Masteroppgave

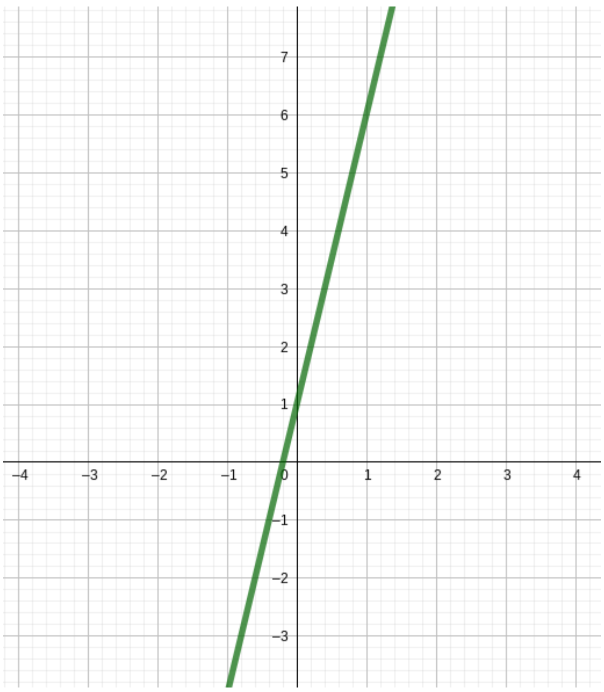
NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Lisa Østreim Nesvik
Kaisa Ingersdatter Ingilæ

Elevers forståelse for stigningstall og konstantledd i lineære funksjoner

En kvalitativ studie av hvordan arbeidet med en modelleringsoppgave i matematikk kan påvirke elevers begrepsforståelse

Masteroppgave i lærerspesialist - matematikkdidaktikk 8. - 10.trinn
Veileder: Trygve Solstad
September 2020



f(x) = 5x + 1

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Lisa Østreim Nesvik
Kaisa Ingersdatter Ingilæ

Elevers forståelse for stigningstall og konstantledd i lineære funksjoner

En kvalitativ studie av hvordan arbeidet med en modelleringsoppgave i matematikk kan påvirke elevers begrepsforståelse

Masteroppgave i lærerspesialist - matematikkdidaktikk 8. - 10.trinn
Veileder: Trygve Solstad
September 2020

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne masteroppgaven har til hensikt å undersøke hvordan fire elever på 10.trinn endret sin uttrykte forståelse for stigningstall og konstantledd, etter arbeidet med en modelleringsoppgave. Forskningsspørsmålet som ble forsøkt besvart er: *Hvordan kan arbeid med en modelleringsoppgave i matematikk påvirke elevers uttrykk for forståelse av stigningstall og konstantledd i lineære funksjoner?*

For å definere begrepsforståelse benyttes teorier av Sierpinska (1992) og Skemp (1987). Videre presenteres Tall og Vinner (1981) og Vinner (1991) som teorigrunnlag for å kunne analysere endringer i elevenes begrepsbilde og begrepsdefinisjoner.

Forskningsmetoden som ligger til grunn for studien er kvalitative, i form av observasjon og intervju. og informantene var fire elever på 10.trinn. Elevene gjennomførte en modelleringsøkt i tillegg til en førtest og en ettertest om lineære funksjoner, samt individuelle intervju og intervju i par. Datainnsamlingen ble gjennomført i løpet av en skoledag.

Resultatene fra studien antydet at de tre faktorene, samarbeidslæring, bruk av digitale hjelpemidler og arbeid med modelleringsoppgave, kan ha positiv påvirkningskraft på hvordan elevene uttrykker sin begrepsforståelse for stigningstall og konstantledd. Funn i studien indikerer at samtlige av elevene på en eller annen måte har gjort endringer i måten de uttrykker sin begrepsforståelse, og det kan tyde på at elevene har fått et bedre samspill mellom begrepsbilde og begrepsdefinisjon.

På bakgrunn av erfaringer gjort gjennom arbeidet med denne oppgaven kan vi oppsummere med at elever med lite forkunnskap om funksjoner, kan ha størst utbytte av arbeid med en slik modelleringsoppgave. Spesielt gjelder dette elever som er interessert, spørrende og deltakende i samspill med kunnskapsrike medelever. Det er også erfart at GeoGebra som digitalt hjelpemiddel kan ha betydning for utvikling av elevers uttrykte begrepsforståelse.

Abstract

The overall goal of this master thesis is to investigate how a sample population of students on the junior high-school level (Norwegian 10. grade) changes their conceptual understanding of slope numbers and constant terms through a modeling assignment. The research question that this thesis aims to answer is: *How can a modeling assignment change how students express their understanding of slope numbers and constant terms in linear functions?*

To define *conceptual understanding,* we utilize the established theories of Sierpinska (1992) and Skemp (1987). These two, together with Tall and Vinner form our theoretical framework for analyzing changes in the sample populations *concept image and conceptual understanding* by utilizing the works of the aforementioned researchers.

The data in this thesis is gathered through observation and interview of our sample population of 10. grade students using the qualitative research method over the span of one school day. The students did a modeling assignment on the topic of linear functions and we used written pre- and post-testing as well as observation, individual and group interviews to attempt to measure changes in students *concept image and conceptual understanding.*

Our analysis and research on the collected data indicate that collaborative learning, digital learning tools and mathematical modeling assignments may have a positive impact/effect on students conceptual understanding of slope numbers and constant terms. Our findings indicate that all the students in this study have changed their conceptual understanding and improved the interaction of their concept image and concept definition on slope numbers and constant terms of linear functions?

Based on the data analysis within this thesis, our research indicates that students with little prior knowledge on the topic of linear functions show significant improvements after working with a mathematical modeling assignment. Especially students that are inquisitive and curious when interacting with more knowledgeable peers. Our study also indicates that digital learning tools, as GeoGebra, may aid students in improving their conceptual understanding on a given topic.

Forord

Da vi høsten 2017 startet på videreutdanningen *Lærerspesialist i matematikk*, hadde vi ikke sett for oss at vi høsten 2020 skulle sitte med en ferdig masteroppgave i matematikkdidaktikk. Det har vært tre spennende, frustrerende og lærerike år, og vi gleder oss til å få lov til å bruke vår kompetanse inn i fagfornyelsen og i veiledning av kolleger.

Først og fremst vil vi takke vår veileder Trygve Solstad, for konstruktive tilbakemeldinger, nyttige innspill og god veiledning.

Vi vil også takke kommunen vår, som hadde tro på oss og lot oss få denne muligheten. Spesielt vil vi takke læreren og elevene som deltok i studien. Uten dem hadde ikke denne oppgaven vært mulig. Takk til Jan Tore og Irene for gjennomlesing og gode innspill.

Til slutt vil vi takke våre bedre halvdeler. De har stilt opp og gitt oss tid til å kunne fullføre dette prosjektet. De har sørget for at barna våre alltid har hatt foreldre tilstede og gjort savnet etter mamma mindre. Nå ser vi frem til å endelig få tilbringe kvelder, helger og ferier sammen med dem igjen!

Så må vi ikke glemme cola og kaffe! Takk til våre venner i nøden!

Sandnes, 1.september 2020

Kaisa Ingersdatter Ingilæ og Lisa Østreim Nesvik

Innhold

Figurer

Tabeller

Forkortelser/symboler

TIMSS	Trends in Mathematics and Science Study
LK06	Kunnskapsløftet
LK20	Fagfornyelsen
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
RME	Realistic Mathematics Education

1.0 Innledning

"For 8. trinn har det i perioden 2011–2015 vært en signifikant resultatframgang for emneområdene Tall og Geometri, men en signifikant tilbakegang i Algebra" (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016)

Sitatet er hentet fra resultater og analyse fra TIMSS 2015. TIMSS står for *Trends in Mathematics and Science Study*, og er en internasjonal studie av undervisning i matematikk og naturfag i grunnskolen som blir utført hvert fjerde år (Sjøberg, 2016). Dagens teknologiske samfunn har i økende grad behov for realkompetanse, en ønsker av den grunn at læring og undervisning i matematikk og naturfag forbedres. Studier av resultater fra TIMSS er med på å gjøre denne forbedringen mulig. Her måles og gjøres det sammenligninger mellom prestasjoner, undervisningspraksis, skolemiljø, elevers holdning, utdanningssystem og læreplan over tid. Målet er å finne nye måter for å forbedre læring og undervisning på tvers av land og kulturer (uio.no, 2015).

Ifølge TIMSS 2015 er norske elever på 8.trinn flinke til å regne med tall og skårer godt i emnet statistikk, men de presterer klart lavere i geometri og algebra. Rapporten viser at elevene har hatt en signifikant framgang i alle emneområdene i perioden 2007 - 2015, utenom i algebra, som holder seg på samme nivå. Fra 2007 - 2011 har det vært framgang i emneområdet algebra, men en tilbakegang fra 2011 til 2015. Tilbakegangen fører til at elevene i 2015 presterer på samme nivå som i 2007 (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016).

I TIMSS inneholder området algebra de sentrale emnene: mønstre, algebraiske uttrykk, likninger, formler og funksjoner (uio.no, 2015). Et spørsmål vi som lærere kan stille oss, er om det kan være en sammenheng mellom hvordan vi opplever undervisningen i emnet og elevenes resultater i algebra. Vi vet av erfaring at lærere ofte introduserer et tema med begrepsavklaring, hvor elevene presenteres for de formelle begrepsdefinisjonene. Videre får de presentert eksempler, regler og jobber med relevante oppgaver. Tradisjonelt har lærebøker det samme oppsettet: eksempel, regel, metode. Bøkene gir eksempler som viser hvordan man bruker en regel, før elevene jobber videre med tilsvarende oppgaver (Schoenfeld, 1992). Elevene får da i mindre grad mulighet til undring og diskusjon (Tall & Vinner, 1981). Vi ønsker derfor å undersøke om en undervisningsøkt som inneholder modellering vil kunne endre elevenes forståelse i algebra og funksjoner. I denne konteksten viser vi til modellering som utforskende oppgaver, hvor ikke nødvendigvis svarene er entydige og det finnes flere veier til mål.

Modellering har i de senere år fått mer plass i matematikkundervisningen. Blomhøj (1993) trekker fram at i løpet av de siste 20 års utvikling av læreplanene, er modellering det mest markante fellestrekket. I Kunnskapsløftet (LK06) er modellering et av fire hovedområder for faget 2P, som er et matematikkfag på videregående, men i Fagfornyelsen (LK20) finner vi nå modellering på ungdomsskolen som et av kjerneelementene: modellering og anvendelse (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Modellering får nå et større fokus, og Fagfornyelsen fremhever modellering som en metode for bedre forståelse. I følge kunnskapsdepartementet skal elevene ha innsikt i hvordan matematikk brukes i dagligliv, samfunnsliv, vitenskap og teknologi. Blomhøj

(2016) og Blomhøj og Kjeldsen (2010) fokuserer på at arbeidet med oppgaver som har en virkelighetsnær kontekst kan være med på å konkretisere matematiske begreper. Målet er å gjøre matematikken mer virkelighetsnær for elevene, gjennom å utforske strukturer, mønster og relasjoner, kunne generalisere og modellere i matematikk. Funksjoner er ment for å gi elevene et viktig verktøy for å studere endring og utvikling (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Utgangspunktet for denne oppgaven er at vi, etter flere år som lærere, har erfart at elevene ofte sliter med å se sammenhenger mellom matematikk og virkelighet. Vi ser ofte at elevene lærer metoder for å gjøre beregninger, men har liten forståelse for hva de gjør og hvorfor de egentlig benytter denne metoden. I temaet funksjoner har vi erfart at lærere presenterer et uttrykk for en enkel lineær funksjon og elevene setter opp en tabell og tegner grafen ut fra koordinater i tabellen. Elevene blir deretter presentert for koeffisientene *a* og *b*, stigningstall og konstantledd. Vår erfaring tilsier at forståelsen av hva variablene egentlig representerer uteblir for veldig mange av elevene. Noe som betyr at de ikke forstår sammenhengen mellom verdimengde og definisjonsmengde for funksjoner (Markovits, Eylon & Bruckheimer, 1986).

Gjennom arbeidet med denne studien vil vi se på hvordan modellering kan gjøre arbeidet med lineære funksjoner mer virkelighetsnært for elevene. Vi ønsker at elevene skal se sammenhenger mellom ulike tema i matematikken, og vi ønsker å undersøke hvordan denne sammenhengen kan ha positiv påvirkning på elevenes forståelse. Berget og Bolstad (2019) referere til modellering som fartøy, når modelleringsprosessen brukes for å oppnå noe annet enn modellering i seg selv, for eksempel ved å utvikle forståelse mellom ulike matematiske områder. I arbeidet med modellering er målet at elevene skal være aktive i sin egen læring, og ved samarbeide og diskusjon vil det skapes en læringskultur. Imsen (2014) påpeker at kunnskap ikke kan skapes individuelt, men må skapes sammen med andre.

1.1 Problemstilling

Dreyfus og Eisenberg (1982) peker på at funksjonsbegrepet ikke er et begrep som står alene, men er knyttet sammen med flere aspekter og underbegrep. Her finner vi ulike representasjonsformer, samt begreper som stigningstall og konstantledd. Forskning viser at funksjonsbegrepet er vanskelig for elever å bearbeide på bakgrunn av hvordan det er bygget opp (Dreyfus & Eisenberg, 1982, Sierpinska, 1992). Forskning gjort av Dreyfus og Eisenberg (1987) viste at elever hadde signifikante problemer knyttet til algebraiske representasjonsformer. Markovits et.al (1986) fokuserer på viktigheten av at elevene kan se sammenhengen mellom ulike underbegreper og representasjonsformer for å oppnå god forståelse av funksjonsbegrepet. Janvier (1987) skiller mellom fire ulike representasjonsformer, og tilhørende aktiviteter som elevene må gjennomføre for å bevege seg mellom de ulike representasjonsformene. For at elevene skal bevege seg fra situasjon til formel må elevene jobbe med aktiviteten modellering. På bakgrunn av forskning, teori og vår interesse for hvordan modellering kan øke elevenes forståelse for algebra og funksjoner i matematikk, ønsker vi å undersøke hvordan en gruppe elever endrer sitt uttrykk for forståelse for stigningstall og konstantledd gjennom arbeidet med en modelleringsøkt.

Gjennom skoleåret 2019/2020 har det blitt satt av mye tid i skolen for å forberede implementering av ny læreplan, fagfornyelsen 2020. Arbeidet med læreplanen avdekket et behov for å undersøke om en ny type oppgave kunne skape bedre forståelse for innholdet i målene, og knytte målene sammen slik at det kan gi mening for elevene. Vi har i denne studien valgt å fokusere på to begrep som er relevante innenfor funksjoner på ungdomstrinnet: stigningstall og konstantledd. Begrepene er valgt på bakgrunn av vår erfaring med at det kan være vanskelig for elevene å forstå forskjell på disse begrepene. Vår erfaring samsvarer med forskning gjort av Janvier (1987) hvor han avdekker at elever har problemer med å tolke grafer, hvordan grafen vokser og minker (finne stigningstall) og se sammenhengen mellom algebraiske uttrykk og grafer. Disse begrepene fremstår som sentrale læringsmål i den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020).

- *utforske forklare og samanlikne funksjonar knytte til praktiske situasjonar*
- *representere funksjonar på ulike måtar og vise samanhengar mellom representasjonane*
- *utforske og samanlikne eigenskapar ved ulike funksjonar ved å bruke digitale verktøy*
- *rekne ut stigingstalet til ein lineær funksjon og bruke det til å forklare omgrepa endring per eining og gjennomsnittsfart*

Ut fra fokusområdet og målene i kunnskapsløftet, ble problemstillingen vår:

"Hvordan kan arbeid med en modelleringsoppgave i matematikk påvirke elevers uttrykk for forståelse av stigningstall og konstantledd i lineære funksjoner?"

For å belyse dette spørsmålet har vi identifisert ulike faktorer som gjennom tidligere forskning og teori kan ha betydning for elevers utvikling av begrepsforståelse. Faktorene vi har fokusert på er: samarbeidslæring, digitale hjelpemidler og arbeid med modelleringsoppgaver. I tillegg vil vi sette fokus på elevenes uttrykte begrepsforståelse gjennom deres begrepsbilde og begrepsdefinisjoner.

1.2 Oppbygging av oppgaven

I kapittel 2 vil vi presentere det teoretiske grunnlaget for vår studie. Vi vil først gjøre rede for relevant læringsteori som ligger til grunn for studien, før vi videre tar for oss teoretisk rammeverk for begrepsforståelse og faktorer for endring i elevers uttrykte begrepsforståelse, som skal legge grunnlaget for analysen.

I kapittel 3 redegjør vi for valg av design og metode. Her presenteres utforming av oppgaver til før- og ettertest, og intervju. Videre gjør vi rede for gjennomføring av datainnsamling og hvordan datamaterialet har blitt håndtert og analysert. Kapittel 3 avsluttes med en vurdering av oppgavens kvalitet basert på troverdighet, overførbarhet, pålitelighet og bekreftbarhet (Guba, 1981).

Kapittel 4 er viet til presentasjon av resultater og analyse. Her vil det bli gjort analyse av både samtaler, gruppeintervjuer og individuelle intervjuer, samt før- og ettertest. Kapittelet er delt inn tre, hvor vi først tar for oss analyse av de ulike faktorene for hvordan elevene uttrykker sin begrepsforståelse, før vi går inn på hver elev for å se etter endringer. Til slutt runder vi av kapittelet med en oppsummering. Analyse av elevers endring i uttrykk vil settes i sammenheng med det teoretiske rammeverket i kapittel 2. I kapittel 5 diskuteres funnene i lys av relevant teori og forskning. Kapittelet er delt inn i fem deler. Vi tar først for oss elevene og endringene som har skjedd, før vi diskuterer de ulike faktorene. Videre ser vi på kritiske betraktninger på vår egen forskning, mulighet for videre studier og veien videre, samt en avslutning hvor vi samler trådene fra oppgaven. Til slutt ligger litteraturliste, med referanser til litteratur som er brukt i oppgaven, og vedlegg.

2.0 Teori

I dette kapittelet skal vi presenterer det teoretiske rammeverket for vår analyse. Undersøkelsene er i hovedsak gjort i samhandlingssituasjoner. Det er derfor naturlig at vi først ser nærmere på det sosiokulturelle perspektivet på læring. Deretter vil vi ta for oss Skemp (1987) og hvordan han definerer elevers begrepsforståelse, og knytte dette opp mot Sierpinskas (1992) handlinger for forståelse. For å kunne vurdere endringen i hvordan elevene uttrykker sin forståelse har vi valgt å ta for oss to dimensjoner av forståelse: begrepsbilde og begrepsdefinisjon, hentet fra Tall og Vinner (1981). Videre vil vi se på ulike teorier knyttet til samarbeidslæring, bruk av digitale hjelpemidler og arbeid med modelleringsoppgaver. Teorien som presenteres i denne delen, vil danne det teoretiske rammeverket og analyseverktøyet for datamaterialet som er hentet inn.

2.1 Læring og kunnskap

Det finnes flere teorier om læring og kunnskap, og teoriene har ulike perspektiv på dette. For å forstå elevers endring i begrepskunnskap, må vi ha noen tanker om hva læring innebærer. Det finnes ulike syn på læring, som alle har hatt stor påvirkning på hvordan vi i dag mener mennesker lærer (Rørvik, 1994). Bakgrunnen for studien er et sosiokulturelt læringssyn, ettersom studien fokuserer på elevers uttrykk for forståelse i en modelleringskontekst, hvor elevene jobber sammen om en modelleringsoppgave. Et slikt læringssyn vektlegger viktigheten av å være en del av et sosialt miljø og interaksjon mellom elevene for individuell utvikling. En kan ikke kun observere virkeligheten for å oppnå denne utviklingen (Burr, 2015 og Säljö, 2001).

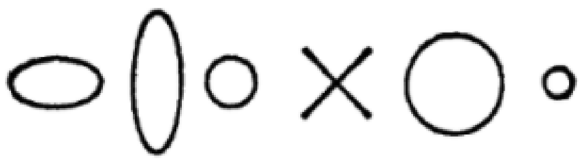
På 1920/1930-tallet var Lev Vygotsky i fronten for sosiokulturell læringsteori. Konstruktivismen la til grunn et individfokus Vygotsky var kritisk til. Han mente at utvikling og læring foregår i sosiale og kulturelle kontekster, ikke utelukkende på det individuelle planet. For at mennesker skal kunne utnytte sitt utviklingspotensiale, mente Vygotsky at man var avhengig av samhandling og hjelp fra andre mennesker. Læring kan, i følge Vygotsky, starte som sosiale interaksjoner og ende opp som individuell kompetanse. Læring er basert på at kunnskaper, ideer, holdninger og verdier utvikles i samspillet med andre elever, i elevens omgivelser. Et av de viktigste redskapene for kommunikasjonen mellom elevene er språket (Lyngsnes & Rismark, 2014). Vestøl, Lund og Hauge (2007) støtter opp om dette ved at aktiviteter som dannes gjennom sosiale interaksjon, blant annet ved bruk av språket som redskap er fokuset i sosiokulturelle læringsteorier.

2.2 Begrepsforståelse

Matematiske begreper er byggesteiner i matematikkfaget. Det er viktig at man ikke forstår begreper som synonymer til ord, men at ord er det man bruker for å forklare og formidle begrepene. Et begrep kan være et objekt, en prosess eller en egenskap i matematikken. For eksempel kan objektet være grafen, prosessen være regnearten som inngår i et funksjonsuttrykk og egenskapene kan være stigningstall eller konstantledd som begge kan brukes for å beskrive en graf (Roos & Trygg, 2018).

Når elever gjentatte ganger møter et fenomen, for eksempel en lineær graf, blir de oppmerksomme på og erfarer at visse egenskaper med denne lineære grafen til en hver tid er tilstede. Et annet eksempel kan være barn sitt møte med hund. Etter å ha sett flere hunder, blir barna oppmerksom på at alle hunder har hale, fire bein og lager en bestemt lyd. En slik prosess kaller Skemp (1987) for abstraksjon. Andre egenskaper med hunden, som farge og størrelse kan variere fra hund til hund, og disse egenskapene blir da ikke abstrahert (Skemp, 1987). Når vi skal ordne nye fenomener i grupper, vil vi ta i bruk tidligere abstraksjoner for å ordne de i grupper med tilsvarende egenskaper. En slik gruppe av fenomener med like egenskaper, definerer Skemp (1987) som begrep. Når elevene skal bygge opp en matematisk forståelse, handler det om å definere fenomener og symboler for ulike begrep. Slike prosesser kan være kompliserte, ettersom matematikk ofte er et abstrakt fag, hvor mange av fenomenene er en del av komplekse hierarkiske strukturer (Skemp, 1987).

Skemp (1987) bruker, på lik linje med Piaget, skjema for å forklare de mentale forbindelsene vi lager til begreper. Et skjema er en mental struktur av begrep. Når elever prøver å forstå begreper, inkluderes begrepet i en større struktur av begreper. I denne strukturen er de fleste begrepene igjen utledet fra andre begrep. Elevenes begrepsstruktur er på denne måten hierarkisk organisert. Hvordan et begrep blir gruppert kan skje på ulike måter, men på bakgrunn av tidligere abstraksjoner vil de bli ordnet i grupper med andre begreper med tilsvarende egenskaper. Et skjema integrerer altså eksisterende kunnskap og kan på denne måten fungere som et fremtidig læringsverktøy, samt fremme forståelse hos elevene (Skemp, 1987). I følge Skemp (1987) bygger elevene opp sin mentale begrepsstruktur gjennom gjentatte møter med egenskaper ved og eksempler av begrepet. Elever kan gruppere begreper på ulike måter, og Skemp (1987) peker på viktigheten av ikke-eksempler og kontraster når begrep skal defineres. Gjennom situasjoner hvor elevene møter eksempler på et begrep og ikke-eksempler, tydeliggjøres de ulike egenskapene og det blir mer sannsynlig at disse egenskapene blir abstrahert.



Figur 1: eksempel på kontrast (Skemp, 1987:11)

Figur 1, hentet fra Skemp (1987:11) viser et eksempel på kontrast. Her ser vi at X'en peker seg ut blant de fem o-formede figurene. I følge Skemp (1987) vil objekter som peker seg ut på en slik måte fra omgivelsene, lettere bli husket og likhetene vil sannsynligvis bli abstrahert over tid. Figuren illustrerer også et ikke-eksempel, ved at X'en skiller seg ut fra de andre formene. Dette gjør at likheter og ulikheter mellom figurene blir tydeligere. Et barn som har abstrahert begrepet hund, kan kalle en katt for en hund. Fordi egenskapene til disse er relativt like. Ved å forklare for barnet at en katt ikke er en hund, gjennom å gjøre barnet oppmerksom på forskjeller mellom disse, vil begrepet hund bli tydeligere gjennom ikke-eksemplet katt. Elever som jobber med funksjoner, vil ikke nødvendigvis skille på lineære funksjoner og andre funksjoner. Ved å vise ikke-eksempel i form av for eksempel en kvadratisk funksjon, vil elevene bli oppmerksom på forskjellene og egenskapene for lineære funksjoner vil bli tydeligere.

Måten Skemp (1987) forklarer begrepsdannelse, kan på mange måter kobles mot hvordan Sierpinska (1992) beskriver forståelse. Ved å se tilfeller og ikke-tilfeller av bestemte objekter, mener Sierpinska (1992) vi har oppnådd forståelse. Vi blir da i stand til å si hva objektet er og ikke er å relatere det til andre begreper. I følge Sierpinska (1992) skjer matematisk læring som hopp. Dette kan skje når elever ser sammenhenger mellom ulike representasjoner for et og samme begrep, eller hvis de finner mønster i problemløsningsoppgaver. Hvis slike hopp finner sted, kan den nye kunnskapen betraktes på to måter. Disse kaller Sierpinska (1992) for *handling for å overvinne hindringer* (act of overcoming difficulties of obstacles) eller *handling av forståelse* (act of understanding). I den første ligger fokuset på hva som hindret hoppet, eller gjorde at det ikke inntraff på et tidligere tidspunkt. I den andre ligger fokuset på det nye vi nå vet eller kan se. Den sistnevnte, handling av forståelse, deler Sierpinska (1992) videre inn i fire kategorier av handlinger: identifisering, diskriminering, generalisering og syntese.

Identifisering (Identification) beskrives av Sierpinska (1992) som prosessen hvor eleven er i stand til å identifisere et objekt i en samling av andre objekt. Elevene kan for eksempel identifisere et funksjonsuttrykk blant andre objekter (som likninger og andre regnestykker). Når eleven er i stand til å gjøre denne identifiseringen, vil det som tidligere var en samling tall og symboler blant andre tall, fremstå som noe spesielt og en vil kjenne det igjen som en funksjon. Når en identifisere funksjoner som et begrep, gis ordet en ny mening. Og eleven har oppnådd en større forståelse av det matematiske begrepet funksjon.

Diskriminering (discrimination) beskrives som prosessen hvor eleven tar steget videre fra å gjenkjenne eller identifisere objekter, til også være i stand til å identifisere forskjeller og spesielle egenskaper ved objekter. For eksempel ønsker vi at eleven skal kunne skille mellom partall og oddetall, og se disse som to ulike typer tall. Eller at eleven ved å se på formen til en grafer er i stand til å skille mellom lineære funksjoner og andregradsfunksjoner (Sierpinska, 1992, Sinclair & Schiralli, 2003).

Generalisering (generalisation) er prosessen som skjer når en gitt situasjon gir overføringsverdi til andre situasjoner. Elevene kan overføre egenskapene fra en situasjon til neste. Sierpinska (1992) påpeker at mens identifikasjon kan sees på som en grunnleggende forestilling om noe, kan generalisering sees på som en grunnleggende prosess eller handling. Det finnes flere typer generalisering, men en av de vanlig kan være at elever kan se en firkant som et spesielt tilfelle av et rektangel. Et annet eksempel kan være at elevene generaliserer stigningstallet i lineære funksjoner. Koeffisienten a i lineære funksjoner ($f(x) = ax + b$) gir oss stigningstallet og viktig informasjon om hvordan grafen vil se ut. Selv om koeffisientene a og b i andregradsfunksjoner ($f(x) = ax^2 + bx + c$) gir oss viktig informasjon om stigningen til funksjonen, kan det likevel ikke tolkes på samme måte, og egenskapen er derfor ikke direkte overførbar (Sierpinska, 1992, Sinclair & Schiralli, 2003).

Den fjerde og siste handlingen av forståelse kaller Sierpinska (1992) for *syntese*. Her ligger prosessen med å søke etter en felles kobling, hvor kunnskap, egenskaper og sammenhenger forenes til et større nettverk. Også små barn driver med syntese, når de har funnet samlede prinsipper som binder foreldre, søsken og kanskje også onkler, tanter og kjæledyr sammen. Hos elevene kan vi se syntese når de er i stand til å knytte sammen ulike grafer med riktig funksjonsuttrykk, på bakgrunn av egenskapene til grafene og funksjonsuttrykkene (Sierpinska, 1992, Sinclair & Schiralli, 2003).

I Sierpinska (1992) sin forståelse av et begrep, legges det vekt på forbindelsen mellom begrepet og andre begrep. Det legges spesielt vekt på hvordan vi relaterer begreper til hverandre. I følge Skemp (1987) er ikke begrepet forstått før det kan assimileres inn i et passende mentalt skjema. Han legger videre vekt på at forståelse er en subjektiv opplevelse, for eksempel i tilfeller hvor vi misforstår et begrep og assimilerer det til et mentalt skjema som ikke er korrekt.

Hiebert og Carpenter (1992) støtter på mange måter opp Skemp (1987) og Sierpinska (1992) sine syn på begrepsforståelse. De mener at mentale koblinger vi gjør i forbindelse med ulike begreper, har betydning for forståelsen. At vi skaper vår egen mentale representasjon av et begrep når vi lærer noe nytt. Videre kobles den mentale representasjonen sammen med andre representasjoner og andre begreper. Forståelsen blir bedre desto flere og sterke koblinger som gjøres. Det legges vekt på at forståelse gjør det lettere for elevene og generer ny kunnskap, ved at ny kunnskap organiseres sammen med strukturer som allerede finnes. Når ny kunnskap organiseres med allerede eksisterende strukturer, styrkes elevenes evne til å huske, da det ikke er nødvendig for elevene å hente fram individuelle deler av et begrep når det skal tas i bruk.

Ser man på hvordan Skemp (1987), Sierpinska (1992) samt Hiebert og Carpenter (1992) definerer forståelse, har alle i ulik grad en eller annen form for forståelse. I neste delkapittel vil vi se på to dimensjoner av begrepsforståelse, begrepsbilde og begrepsdefinisjon, som skal hjelpe oss til å danne et bilde av elevenes uttrykte forståelse av begrepene stigningstall og konstantledd.

2.2.1 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon

Det brukes en rekke ulike begreper for å beskrive og forklare begrepsforståelse. Tall og Vinner (1981) skiller mellom begrepsbilde (concept image) og begrepsdefinisjon (concept definition).

Tall og Vinner (1981) definerer *begrepsbilde* som den totale kognitive strukturen. Innenfor denne strukturen finner vi alle mentale bilder av begrepet, egenskapene og prosessene som er knyttet til. Et begrepsbilde bygges opp over tid, gjennom erfaringer og når eleven stimuleres og modnes. Når en person ser eller hører et begrep, vekkes noe i personens minne, og begrepsbildet kan derfor sees på som noe ikke-verbalt en assosierer med, for eksempel et begrepsnavn (Vinner, 1991). Prosessen for et vekket begrepsbilde kan skje bevisst eller ubevisst. For eksempel kan dette gjelde når elevene møter begrepene stigningstall og konstantledd. Elevene vil kunne gjenkjenne hva som er stigningstall og konstantledd i et funksjonsuttrykk, men vil ikke alltid kunne avgi en formell definisjon på begrepene. Utviklingen av begrepsbildet trenger ikke være sammenhengende til en hver tid. Ulik stimuli vil aktivere forskjellige deler av elevens begrepsbilde, og dermed utvikles begrepsbildet uten en sammenhengende helhet (Tall & Vinner, 1981)

I tilknytning til *begrepsbilde*, beskriver Tall og Vinner (1981) *begrepsdefinisjon. Begrepsdefinisjon* omhandler ord som brukes for å spesifisere et begrep. Det kan være gitt til eleven eller konstruert av eleven selv, og deles derfor inn i to ulike begreper: *personlig begrepsdefinisjon* og *formell begrepsdefinisjon*. Er begrepet konstruert av eleven selv kan den være annerledes enn den formelle begrepsdefinisjonen, som er akseptert som matematisk korrekt (Tall & Vinner, 1981).

Det begrepsbildet som blir aktivert, for eksempel i møte med et funksjonsuttrykk, kalles det *vekkede begrepsbildet.* Møter elevene en lignende oppgave på et senere tidspunkt trenger ikke de samme begrepsbildene bli vekket, selv om oppgavene omhandler samme begrep. Dersom motstridende begreper blir vekket på samme tid, kan det oppstå en forvirring. En forvirring som Tall og Vinner (1981) refererer til som en *kognitiv konflikt*.

2.2.2 Elevers begrepsforståelse av funksjoner

Markovits et.al (1986) identifiserte flere komponenter som må være tilstede for å utvikle en dypere forståelse for funksjoner. Elevene må først få et forhold til underbegrep av funksjoner som kan deles inn i tre kategorier: *definisjonsområde, verdimengde og sammenhengen mellom definisjonsmengde* og *verdimengde.* Denne forståelsen kan oppstå tidlig i barneskolealder, selv om ikke elevene jobber med funksjonsbegrepet.

Når elevene blir eldre og blir introdusert for temaet funksjoner, vil de få et forhold til ulike represententasjonsformer for funksjoner. Markovits et.al (1986) kategoriserer ulike representasjoner i fire grupper: *verbal, pil-diagram, algebraisk* og *grafisk representasjon*. For at en elev skal ha en god forståelse for funksjoner påpekes det at elevene må kunne se underbegrepene og representasjonsformene i en sammenheng. Tabell 1 viser hva elevene skal ha en forståelse for innenfor de ulike kategoriene (egen oversettelse) (Markovits et.al, 1996).

	Ulike representasjonsformer av funksjoner			
Underbegrep av funksjoner	Verbal	Pil-diagram	Algebraisk	Grafisk
Definisjonsområde	Verbal eller matematisk notasjon	En kurve som omslutter definisjonsområdet	Verbal eller matematisk notasjon	Den horisontale aksen (x)
Verdimengde	Verbal eller matematisk notasjon	En kurve som omslutter verdimengden	Verbal eller matematisk notasjon	Den vertikale aksen (y)
Sammenheng mellom definisjon- og verdimengde / samsvarsregel	Verbal	Piler	Formel	Et sett med punkter i koordinatsystemet

Tabell 1: Ulike representasjonsformer av funksjoner (Markovits et.al, 1996:19)

I likhet med Markovits et.al (1986) presenterer Janvier (1987) fire ulike representasjonsformer for funksjoner, og fokuserer i tillegg på tilhørende aktiviteter som elevene må arbeide med for å bevege seg mellom representasjonsformene. Det vil derfor være nødvendig at elevene arbeider med ulike aktiviteter som lar elevene utforske ulike arbeidsmåter og løsningsmetoder som vil bidra til at de beveger seg mellom de ulike representasjonsformene. Elevene kan også utfordres med å møte oppgaver og aktiviteter som lar dem bevege seg gjennom flere representasjonsformer innad i samme aktivitet. Oppgaven kan starte med en situasjon, legge opp til at elevene må lage tabell, finne formel og lage graf. Beveger elevene seg fra situasjon til formel påpeker Janvier (1987) at elevene arbeider med modellering.

Fra ↓ Til →	**Situasjon**	**Tabell**	**Graf**	**Formel**
Situasjon		Måling	Skisse	Modellering
Tabell	Tolkning av tabell		Plotting	Tilpassing
Graf	Tolkning av graf	Avlesing		Tilpassing
Formel	Gjenkjenning	Utregning	Skisse	

Tabell 2: Ulike representasjonsformer og tilhørende aktiviteter (Janvier, 1987)

For elever innebærer det, i tillegg til å beherske de ulike representasjonsformene som er presentert over, å kunne klassifisere funksjoner og ikke-funksjoner og å kunne gi eksempler på ulike funksjoner. Oppfyller en elev disse elementene kan det sammenlignes med Sierpinskas (1992) øverste nivå av forståelse, syntese, der de forskjellige deler av kunnskap, egenskaper og sammenhenger forenes til et større nettverk. Vinner (2014) beskriver to prosedyrer som må gjennomføres for å utvikle dypere forståelse i matematikk: å identifisere likheter og skille ulikheter, som kan sammenlignes med Skemps abstraksjon (teori 2.2) (Skemp, 1987). For å unngå en kognitiv konflikt mellom begrepsbilde og begrepsdefinisjon beskriver Vinner (2014) viktigheten av å introdusere et fullstendig begrep for eleven, slik definisjonen ikke blir meningsløs.

2.2.3 Elevers bruk av begrepsbilde og begrepsdefinisjon

Vinner (1991) presenterer den kognitive strukturen og samspillet mellom begrepsdefinisjon og begrepsbilde på denne måten, se figur 2.

Figur 2: samspill mellom begrepsdefinisjon og begrepsbilde (Vinner, 1991:70)

Cellene med begrepsdefinisjon og begrepsbilde representerer elevens forståelse for et matematisk begrep. Det kan være en interaksjon mellom cellene, men det kan også være at en eller begge cellene er tomme, som betyr at eleven ikke har forståelse for begrepet. Eleven kan også bare ha innhold i en av cellene, eller at begge cellene er i bruk, men at de ikke er fulle.

Vinner (1991:70) bemerker at samspillet mellom cellene kan være forskjellig ut i fra om eleven får et begrepsbilde først eller om eleven lærer begrepsdefinisjonen først.

Presenteres elevene for begrepsbilde først, og begrepsdefinisjonen i etterkant er det tre ulike scenarioer som kan oppstå.

1. Begrepsbildet endres og vil inkludere begrepsdefinisjonen

2. Begrepsbildet forblir slik det er. Begrepsdefinisjonen inneholder den innlærte definisjonen, men den vil etter en tid bli glemt eller forvridd. I møte med begrepet vil begrepsbildet bli fremkalt framfor begrepsdefinisjonen.

3. Ingen endring i cellene. Blir eleven spurt om å definere begrepet vil personen gjenta den lærte definisjonen, men i alle andre situasjoner vil personen tenke på sitt begrepsbilde. (Vinner, 1991:70, egen oversettelse)

I de tilfellene der eleven presenteres for begrepsdefinisjoner først, vil cellen med begrepsbilde i starten være tom, se figur 2. Cellen vil etter hvert som eleven erfarer ulike oppgaver og eksempler, fylle seg opp og skape et samspill mellom begrepsbilde og begrepsdefinisjon. I følge Vinner (1991) presenteres det ofte begrepsdefinisjoner i undervisningssituasjoner. Videre skapes det en forventning om at begrepsbildet vil formes hos de fleste elevene etter arbeid med oppgaver. Dette er ikke tilfelle for alle, og lignende scenarioer som beskrevet over kan også skjer her. Vinner (1991) presenterer også ulike scenarioer for hvordan eleven ubevisst benytter seg av begrepsbildet og begrepsdefinisjonen for å løse ulike matematiske problem (egen tolkning).

1. Eleven opplever et samspill mellom begrepsdefinisjon og begrepsbilde, og tar i bruk begge deler for å avgi et svar.

2. Eleven benytter seg kun av formell begrepsdefinisjon for å avgi et svar. Her benyttes ikke begrepsbildet, og det er derfor ingen garanti for at eleven avgir riktig svar.

3. Begrepsbildet vekkes og ved bruk av begrepsdefinisjon kan eleven avgi et svar. Eleven får her testet om det er samspill mellom begrepsdefinisjon og begrepsbilde.

4. Eleven benytter seg kun av begrepsbildet før det avgis et svar. Begrepsbildet kan inneholde elementer som ikke er korrekte, og det kan føre til at eleven ikke avgir riktig svar.

2.3 Faktorer for endring i hvordan elevene uttrykker sin begrepsforståelse

Det er ifølge Tall og Vinner (1981) og Blomhøj (1993) vanlig at elevers konstruerte begreper er ufullstendige. For å konstruere en bedre forståelse av begreper, mener Blomhøj (1993) det er nødvendig at elevene gjør erfaringer knyttet til begrepene. Slike erfaringer kan elevene oppnå gjennom felles faglige refleksjon i arbeid med undersøkende matematikk. Det er derfor viktig at læreren legger til rette for samarbeid og dialog i undervisningen (Blomhøj, 2016). Ut ifra teori velger vi å konsentrere oss om tre måter å tilegne seg relevante matematiske erfaringer på, som ofte trekkes fram i matematikkdidaktisk litteratur i dag; samarbeidslæring, digitale hjelpemidler og arbeid med modelleringsoppgaver. Under vil vi presentere de ulike faktorene, og knytte de sammen med endring i begrepsforståelsen hos elevene.

2.3.1 Samarbeidslæring

Det finnes flere tolkninger av hva som menes med *samarbeidslæring*, og som pedagogisk retning har samarbeidslæring flere teoretiske tilnærminger (Johnson, Johnson, Aakervik & Haugaløkken 2003). I denne oppgaven brukes ordet samarbeidslæring, om læring som foregår når elevene arbeider i små gruppe og er i dialog med andre elever og lærer. Ønsket er at elevene skal arbeide sammen i små grupper mot et felles mål, for å maksimere læringsutbytte og forståelse for seg selv og de andre deltakerne i gruppen (Johnson, Johnson & Holubec, 1994 og Johnson et.al, 2003). Målet er ikke nødvendigvis at alle skal lære og forstå like mye, men at alle skal lære og forstå mest mulig, at de skal skape en felles forståelse av begrepene stigningstall og konstantledd (Johnson, Holubec & Johnson, 2001 og Murphy & Alexander, 2006). I et slikt samarbeid har læreren ansvar for å skape et effektivt læringsmiljø, men ansvaret for selve læringen er en samhandling mellom lærer, elev og medelev (Black og Wiliam, 2009).

Sett i lys av et sosiokulturelt syn, er språket et viktig redskap i kommunikasjon mellom elevene i samarbeidslæring. I følge Vygotsky utvikles forståelsen av vitenskapelige begreper ved at de introduseres formelt, ved for eksempel en definisjon. Dersom elever arbeider og reflekterer over begrepets betydning, utvikles begrepets mening (Skott, Hansen & Jess, 2008). I følge Hattie (2013) er samarbeidslæring positivt og effektivt på læring i forhold til individuelle metoder, og at styrken som ligger i medelevene kan spille en stor rolle i elevers læring. Gjennom å lære andre, lærer også elevene selv mye. For å ha best effekt av samarbeidslæring trenger elevene en del forkunnskap om temaet, dette for å kunne delta i diskusjoner og samspill med medelever (Hattie 2013).

En studie gjort av Kaiser og Schwarz (2006) viser til at samtalen i modelleringsarbeid kan være sentral i elevers læring. Flere elever i denne studien mente de hadde hatt utbytte av samarbeid. Gjennom diskusjon kunne elevene få klarhet i usikkerheten som kan oppstå i arbeid med modelleringsoppgaver, og de kunne diskutere og vurdere nye løsningsmetoder. Faktorer som matematiske diskusjoner og kommunikasjon mellom elevene har de senere år blitt fremhevet som avgjørende for den begrepsmessige forståelsen og utviklingen av denne (Nosrati og Wæge, 2015). Alan H. Schoenfeld har sammen med flere forskere ved amerikanske NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), ledet utviklingen av et rammeverk for undervisning i matematikk kalt TRU Math (Teaching for Robust Understanding in Mathematics). I rammeverket er det satt opp ulike dimensjoner for robust undervisning i matematikk, og samtale er fremtredende som en viktig faktor i flere av dimensjonene, både gjennom diskusjon, forklaring og argumentering av egne matematiske resonnement (Schoenfeld & Floden, 2014).
Funn i en studie av Zbiek og Conner (2006) viser til at gjennom sosial interaksjon kan forståelsen i modelleringsarbeid blir utfordret, og føre til nye koblinger og endringer i forståelsen av matematikk. I følge Carpenter et.al (2003) vil elever kunne utvikle en dypere forståelse dersom de lærer å gi uttrykk for og begrunne sine matematiske ideer, resonnere gjennom sine egne og andres matematiske forklaringer, samt gi en begrunnelse for svarene sine. Denne forståelsen mener Carpenter, Franke og Levi (2003) er avgjørende for elevens fremtidige suksess i matematikkfaget. Når elevenes fokus skifter fra selve prosedyren i matematikk, til å argumentere og forstå hvorfor, vil de bli

mindre opptatt av å finne selve svaret, og heller ønske å se på tankegangen som fører til svaret (Fraivillig, Murphy og Fuson, 1999). At elever lytter til andres tanker og ideer, samt bruker diskusjon er viktig for å etablere en felles forståelse. I slike diskusjoner må det være rom for uenigheter for å kunne løse problemet (Anthony og Walshaw, 2009, Chapin og O'Connor, 2007). Ikke nødvendigvis alle elevene er på det stadiet at de er i stand til å bidra til en diskusjon som kan gi felles forståelse. Grunnen til dette kan være at de ikke klarer ordlegge seg slik at andre forstår, eller at de ikke har kunnskapen som kreves (Lobato, Clarke og Ellis, 2005).

Støtte fra lærer kan være til hjelp for at elever skal jobbe mer effektiv sammen, gi de mest mulig støtte underveis og hjelpe de videre i arbeidet. Det kan komme overraskende innspill fra elevene som kan gi rom for gode matematiske diskusjoner, og det er lærerens ansvar å møte slike innspill på en gjennomtenkt måte (Lobato et.al. 2005). I følge Schoenfeld og Floden (2014) er det viktig at læreren bevisst planlegger og skaper trygghet for at alle elever skal kunne delta i diskusjoner på sitt nivå. Læreren har da ansvar for å stille spørsmål hvor elevene må reflektere og begrunne sine egne valg og gir ideer og eventuelt andre muligheter for løsning. Læreren må være en aktiv lytter i elevenes diskusjon og til ideene deres, for å kunne avgjøre når det er hensiktsmessig å gå inn eller trekke seg ut av diskusjonen, spørre etter forklaring eller løse opp i misforståelser (Lobato et.al, 2005).

2.3.2 Digitale hjelpemidler

I arbeidet med funksjoner er det nyttig å bruke digital graftegner som hjelpemiddel for å visualisere matematiske sammenhenger og begreper. Ved bruk av digitale hjelpemidler kan elevene utforske hvordan en graf endrer utseende og egenskap når stigningstall og konstantledd endres. Hall og Lingefjärd (2016) presenterer glidere som et verktøy for å lettere kunne endre på grafens stigningstall og konstantledd. Ved å bruke glidere blir endringene i både grafens utseende og funksjonsuttrykk mer visuell, og det kan være en god støtte for å øke begrepsforståelsen.

I en undersøkelse gjort på elever i videregående skole, hvor en gruppe elever fokuserte på bruk av GeoGebra i undervisningen om funksjoner, mens en kontrollgruppe gjennomgikk tradisjonell undervisning uten bruk av digitale hjelpemidler. Fant Zulnaidi og Zakaria (2012) resultatene som indikerer at elevene med hadde tilgang på GeoGebra hadde en signifikant økning i begrepskunnskapen om funksjoner, sammenlignet med kontrollgruppen. Undersøkelsen viste også at elevene som brukte GeoGebra i undervisningen hadde en økning i prosedyremessig kunnskap (Zulnaidi & Zakaria, 2012).

Ubuz (2007) og Tall (1989) har gjennomført liknende undersøkelser, der resultatet viser at begrepsbildene til elevene fikk støtte av visualiseringen i dataprogram. Ubuz (2007) trekker derimot fram at bruken av digitale hjelpemidler ikke nødvendigvis gir bedre forståelse, siden man kun trenger trykke på de rette knappene. Dette kan overføres til at elevene bare kan legge inn funksjonsuttrykket uten å forstå hva de ulike elementene i uttrykket egentlig beskriver.

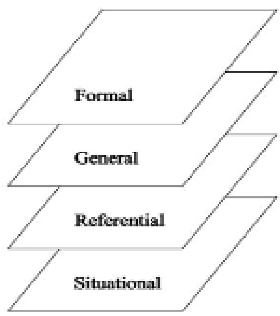
Ut i fra tidligere studier ser det ut til at GeoGebra kan være en faktor som bidrar til endring i begrepsforståelsen av stigningstall og konstantledd. En viktig faktor i denne sammenhengen er støtte fra lærer under arbeidet. Læreren har i følge Egeberg, Hatlevik, Ottestad, Skaug og Tømte (2012) en viktig rolle i å sette seg inn i det digitale verktøyet slik at eleven kan utvikle sin digitale ferdighet. Læreren er ansvarlig for å bygge opp en skolerelatert digital kompetanse, slik at elevene er i stand til å benytte seg av digitale verktøy for å gjennomføre matematiske resonnementer. For at elevene skal ha best mulig nytte av digitale hjelpemidler, må læreren også være bevisst på at det kan ha uheldig påvirkninger, som for eksempel at de legger inn funksjonsuttrykket og får en graf, uten å forstå hvordan det henger sammen (Ubuz, 2007). I følge Aspinwall, Shaw og Presmeg (1997) og Hollenberg (1970), kan visualisering i enkelte tilfeller føre til forvirring isteden for at det støtter opp om begrepsforståelsen.

2.3.3 Arbeid med modelleringsoppgave

I arbeidet med modelleringsoppgaver skal elevene få muligheten til å oppleve matematikken på ny, og selv være involvert i prosessen ved å utvikle matematiske resultater (Gravemeijer & Stephan, 2002). Elevene skal også få jobbe med matematiske uformelle og realistiske aktiviteter, slik at de kan se sammenhengen mellom matematikk og virkelighet, som presenteres av Skott et.al (2008) som *Realistic Mathematics Education* (RME). De skal selv få utforske og skape forståelse ut ifra egen erfaring (Skott et.al, 2008). Arbeid med modelleringsoppgaver står i kontrast til tradisjonell undervisning som domineres av tavleundervisning og løsning av rutineoppgaver (Alrø & Skovsmose, 2002). Ifølge Janvier (1987) er det også viktig at elevene får jobbet med aktiviteter som bidrar til at elevene forflytter seg fra en representasjonsform for funksjoner, til en annen. Når elevene flytte seg fra representasjonsformen *situasjon* til *formel* kaller Janvier (1987) dette for en modelleringsaktivitet, se tabell 2.

Modellering er en del av matematikken som kan bidra til at elevene får arbeidet med uformelle og realistiske aktiviteter. Modellering fokuserer på læring over lengre tid der en modell er under utvikling. Modellen går fra å være en enkel modell av en situasjon, til å gradvis bli en modell for lignende situasjoner, for til slutt bli en modell for tanken. Dermed blir modellen et redskap for matematiske resonnement (Skott et.al, 2008).

Gravemeijer (1999) presenterer en modell for modelleringsaktiviteter der ulike nivåer av abstraksjon utvikles (figur 3). På nivå 1, situasjonsnivå, knyttes aktiviteten opp mot en virkelighetsnær kontekst. Elever som jobber med aktivitet på nivå 1, forstår hvordan oppgaven er bygd opp og hvilke regler som gjelder for den gitte oppgaven. Aktiviteter på nivå 2, referensielt nivå, vil med støtte fra en modell påvirke eleven til å velge løsningsmetode eller strategi for å løse oppgaven. Her er eleven fortsatt avhengig av konteksten i oppgaven. På nivå 3 er aktivitetene på et mer generelt nivå, som vil gjøre eleven mer uavhengig av konteksten. Her kan eleven benytte seg av matematiske strategier for å løse oppgaven og benytte seg av generalisering. Modellen i oppgaven kan fortsatt benyttes som støtte for eleven. I det fjerde nivået, det formelle, benytter eleven formelt matematisk språk og trenger ikke en modell som støtte. Her benytter eleven matematiske notasjoner og prosedyrer. Selv om de fire aktivitetstypene innebærer en utviklingsprogresjon, trenger vi ikke se på nivåene som et hierarki, da elever kan bevege seg opp og ned i de ulike nivåene.



Figur 3: nivåer av abstraksjon (Gravemeijer, 1999:163)

2.3.3.1 Figurtall og generalisering i modelleringsoppgave

Et figurtall er en representasjonsform for et spesielt mønster, hvor det er en spesiell sammenheng mellom posisjonen *n* (figurnummeret) og antall elementer i figuren (Bishop, 2000). Det finnes to måter å finne sammenheng mellom figurnummer og antall elementer. Den første, og gjerne den enkleste, er at man lager en *rekursiv formel* ved å finne differansen mellom to figurer og bruke dette til å finne neste figur i figurmønsteret. Den andre er å lage *eksplisitt formel*, hvor utleder en generell formel for å finne verdien til en figur i en figurrekke dersom en kjenner figurnummeret (Hinna, Rinvold & Gustavsen, 2012). I en studie gjort av English og Warren (1998) finner de at elever i arbeidet med generalisering kan møte flere utfordringer. Studien viser at det for mange vil være utfordrende å gå fra rekursiv til eksplisitt tilnærming.

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) mener at generalisering er nært knyttet til algebra, da algebra er den mest systematiske måten å uttrykke generalitet i figurer og mønster. Dersom elever er i stand til å se sammenheng i ulike mønster, og kan forsvare generaliseringen ved å knytte symboler og variabler til mønsteret, kaller Becker og Rivera (2006) det for *figurativ generalisering*. Elevene må se etter sammenhenger og finne det som er felles ved figurene, og på den måten kunne generalisere dette til å gjelde figurer som kommer senere i rekken (Becker & Rivera, 2006). Aktiviteter hvor elevene må se sammenhenger og generalisere kan knyttes til det tredje nivået i Gravemeijer (1999) sin modell for modelleringsaktivitet.

3.0 Metode

I denne studien vil vi undersøke hvordan en modelleringsoppgave i matematikk kan brukes for å påvirke hvordan elevene uttrykker sin forståelse for stigningstall og konstantledd i lineære funksjoner. For å undersøke hvordan elevene uttrykker seg er vi avhengig av å samle inn data. I dette kapittelet vil vi først gjøre rede for metodiske valg og forskningsdesign. Her vil vi komme inn på utvelgelse av informanter, kontekst for datainnsamling, utforming av oppgavene og gjennomføring. I kapittel 3.2 gjør vi rede for hvilke metoder vi har benyttet for datainnsamling, før vi i 3.3 tar for oss etiske betraktninger og studiens validitet, reliabilitet, overførbarhet. Til slutt presenterer vi hvordan rammeverket er satt sammen til et analyseverktøy.

3.1. Kvalitativ metode og undervisningseksperiment

I denne studien skulle vi studere menneskelige prosesser, ved å se på elevers begrepsforståelse og hvordan de gir uttrykk for sin forståelse gjennom samtaler og intervju. I slike studier gjør en bruk av kvalitativ metode (Postholm, 2010).

Vår forskning er et undervisningsopplegg hvor vi ønsker at elevene skal jobbe sammen. Vi vil studere om det skjer endring, og hvilke endringer som skjer i måten de uttrykker sin begrepsforståelse for stigningstall og konstantledd i lineære funksjoner. Studien kan sees på som et undervisningseksperiment, og i dette tilfellet kaller vi eksperimentet for designforskning. Bakgrunnen ligger i at studiet vårt er å finne ut om en viss type oppgaver, modelleringsoppgaver, kan påvirke hvordan elevene uttrykker sin forståelse. En designstudie kan sees på som en systematisk studie av både utvikling og evaluering av undervisningsopplegg (Plomp & Nieveen, 2007). Når man snakker om designforskning, snakker man om både utvikling og design av et undervisningsmateriell, læringsstrategier, resultater og løsninger på ulike problem (Cobb, 2001). Designforskning befinner seg, i følge Wittmann (1998), som en vitenskapelig disiplin innen matematikkdidaktikk. Det blir betraktet som en designvitenskap, hvor den teoretiske rammen støtter metodologien innenfor designforskning, og består i å utvikle teoribaserte undervisningsopplegg og empirisk forskning. Elevene, lærer og klasserommet danner basisen for både opplegget og forskningen (Wittmann, 1998). Et viktig moment å ta med i designforskning, er at læreren er en viktig samarbeidspartner (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003)

3.1.1 Utvelgelse av informanter

Informantene i denne studien ble rekruttert fra en skole på Vestlandet hvor vi ikke arbeider selv. Å forske på egne elever kan være positivt, hvis samspillet mellom lærer og elev fungerer. Derimot hvis samspillet ikke fungerer, eller en har dannet seg en mening eller oppfatning av elevgruppen, kan det påvirke studiet (Delfabbro, Winefield, Trainor, Dollard, Anderson, Metzer & Hammarstrom, 2006 og Hughes & Chen, 2011). Vi valgte av den grunn å forske på en elevgruppe vi ikke hadde forkunnskaper om eller relasjoner til.

Vi tok kontakt med en lærer ved den aktuelle skolen, som er kontaktlærer og faglærer i matematikk for en klasse på 10.trinn. Læreren fikk i oppgave å velge ut fire elever, slik at de kunne jobbe to og to med den digitale delen av oppgaven. Ifølge Johannessen, Tufte og Christoffersen (2016), egner ikke en kvalitativ undersøkelse seg for tilfeldig uttrekning av forskningsdeltakere. Man bør velge informanter som er relevante og interessante for studiet (Tjora, 2017). Læreren gjorde det strategiske utvalget på bakgrunn av følgende kriterier:

1. *Elever som samarbeider godt og liker å gi uttrykk for sine tanker og meninger. Det var viktig med elever som bidrar verbalt, for å få innsikt i hvordan de uttrykker sin forståelse.*
2. *Elevene med noe forkunnskap om funksjoner og figurtall, slik at de kan si noe på førtesten og kan bidra noe i arbeidet med modelleringsoppgaven.*
3. *Elevene bør ikke ha for god forkunnskap om funksjoner, da allerede eksisterende begrepsforståelse kan bety mindre utviklingspotensial.*

Til slutt valgte læreren ut fire elever som hadde lav til middels måloppnåelse i faget. Gruppen består av tre jenter og en gutt. Vi har gitt dem fiktive navn; Sine, Ella, Rikke og Trym.

3.1.2 Kontekst for datainnsamling

Gjennomføringen av studiet ble gjort på et møterom på ungdomsskolen der vi fikk rekruttere informanter. Møterommet var relativt stort, og godt utstyrt med pulter og sitteplasser. Størrelsen på rommet gjorde at elevene fikk jobbet i fred, samtidig som vi kunne observere dem på avstand. Resten av klassen gjennomførte arbeidet med modelleringsoppgaven i klassen, med sin lærer i matematikk. Elevene i undersøkelsen ble gjort oppmerksomme på at deltakelsen i studiet ikke hadde påvirkning på deres karakter i faget, og at de når som helst kunne trekke seg. Etter arbeidet med modelleringsoppgaven gikk vi i gang med intervju i par. Da ventet de andre to på gangen. Etter lunsj ble informantene hentet ut en og en fra klassen, for ettertest og individuelle intervju. Som påskjønnelse for deltakelsen fikk elevene et gavekort på 100kr hver.

3.1.3 Utforming av oppgaver

For å kunne gjennomføre studien vår var vi avhengig av oppgaver vi kunne knytte opp mot funksjoner. Ettersom vi vil se på endring i elevenes uttrykk for forståelse, måtte vi finne en måte å få innsikt i hvordan elevene uttrykker seg før, under og etter arbeidet. Vi valgte å lage en førtest, hvor elevene skulle forklare enkle funksjonsuttrykk, før vi gikk videre til en modelleringsoppgave hvor elevene begynte å jobbe med figurtall og videre beveget seg inn på funksjoner. I arbeidet med funksjoner i GeoGebra ble elevene utfordret til å sammenligne og diskutere egenskapene til ulike funksjoner med ulikt stigningstall og konstantledd. Avslutningsvis fikk elevene en ettertest, utformet likt førtesten, men med noen endringer i selve funksjonsuttrykkene.

3.1.3.1 Førtest, modelleringsøkt og ettertest

Oppgavene i studiet er laget for å få et innblikk i hvilken kunnskap og assosiasjoner elevene gjør med funksjonsuttrykk. Gjennom forklaringer knyttet til ulike funksjonsuttrykk, ønsket vi å få et innblikk i hvordan elevene uttrykte sin begrepsforståelse. Elevene var på forhånd informert at studiet omhandlet en modelleringsøkt, men hadde ikke fått noen føringer på hvilket tema.

Førtesten besto av tre oppgaver som presenterte tre ulike funksjoner (se vedlegg 7.1). Første oppgave var en positiv proporsjonalitet, andre oppgave var en positiv lineær funksjon, hvor stigningstallet var presentert som en brøk, og den siste oppgaven var en negativ lineær funksjon. Førtesten som elevene skrev notater på, ble samlet inn og ble en del av datamaterialet.

Oppgaven i modelleringsøkten er todelt (se vedlegg 7.2). Første del omhandler figurtall der elevene skal komme fram til en *rekursiv* og *eksplisitt formel*. Teori presentert i kapittel 2.3.3.1 beskriver generalisering, som brukes til å uttrykke generalitet i figurer og mønster, som en viktig del av algebra. Det å lage en eksplisitt formel beskrives også som noe av det mest krevende innenfor figurtall og generalisering (English og Warren, 1998). Vi har også inntrykk av at de fleste oppgavene stopper etter eksplisitt formel. På bakgrunn av dette ønsker vi derfor å ta oppgaven et steg videre. Vi ville at elevene skulle se den eksplisitte formelen i sammenheng med funksjonsuttrykket, og at funksjoner også beskriver en vekst. Oppgaven elevene skulle jobbe med er laget etter inspirasjon fra Maximum 8 (Alseth, Stedøy-Johansen, Tangen & Tofteberg, 2013 s.280). Vi tok utgangspunkt i ordlyden til en oppgave på side 280, men vi fant en ny figurrekke. Modelleringsoppgaven er designet med bakgrunn i nivåene for aktivitet, presentert av Gravemeijer (1999). Oppgaven vi laget inneholder også de ulike representasjonsformene presentert av Janvier (1987), der elevene utfører en modelleringsprosess når de går fra representasjonsform *situasjon* til *formel* (kap. 2.2.2 og kap. 2.3.3). Videre skulle elevene arbeide med å lage en modell for videre vekst at figurtallene. Her fikk elevene velge fremgangsmåte selv, men modellen skulle presenteres ved bruk av GeoGebra.

For å gi elevene mulighet til å erfare flere ulike lineære funksjoner, med ulikt stigningstall og konstantledd, fikk de til slutt arbeide med glidere i GeoGebra. Ved hjelp av en glider for stigningstall og en glider for konstantledd ble det rom for sammenligning og refleksjon over egenskapene til ulike lineære grafer og tilhørende funksjonsuttrykk som ble presentert i algebrafeltet. Denne delen av oppgaven er inspirert av lignende oppgaver fra *Mathematical modeling: applications with GeoGebra* (Hall og Lingefjärd, 2016).

Oppgavene i ettertesten er utformet på samme måte som oppgavene i førtesten (se vedlegg 7.3). Første oppgave var et bilde av en proporsjonal funksjon for å se om elevene nå kunne si noe om stigningstall og konstantledd ut i fra en graf i et koordinatsystem, og ikke bare fra uttrykket. Andre oppgave besto på lik linje med den andre oppgaven i førtesten av et funksjonsuttrykk med brøk. Forskjellen er at vi har byttet ut verdien på brøken fra $\frac{1}{2}$ til $\frac{1}{3}$. Endringen er gjort kun for å få endring i oppgaven. Den siste oppgaven ble utformet for å gi elevene utfordringer på forståelsen av stigningstall og konstantledd. Her ble den generelle formelen for lineære funksjoner snudd, slik at elevene fikk et uttrykk med konstantleddet før stigningstallet. Oppgavene i førtesten er laget med tanke på å se om elevene er i stand til å fortelle oss mer om egenskapene til funksjonsuttrykkene og hvordan grafene vil se ut. Det er i ettertesten vi kan få innblikk i om elevenes uttrykk for begrepsforståelsen av stigningstall og konstantledd har endret seg.

3.1.4 Gjennomføring av førtest, modelleringsoppgave og ettertest

Elevene ble presentert for funksjonsuttrykkene i førtesten, med spørsmål om å forklare uttrykkene. På denne måten ønsket vi å undersøke hvordan elevenes begrepsbilde ble vekket, og hvordan de satte ord på dette. Kunne de allerede i førtesten si noe om stigningstall og konstantledd?

Elevene begynte med å gjennomføre førtesten, hvor de gjorde oppgavene individuelt. De noterte på egne ark, og presenterte løsningene sine for hverandre ved rekkeframlegg. Her fikk de sette ord på egne tanker, samtidig som de ble presentert for andre måter å tenke på. Elevene hadde også mulighet til å diskutere svarene sine med de andre i gruppen, hvis de var uenige.

Etter førtesten begynte elevene arbeidet modelleringsoppgaven. De fikk sitte alene med oppgaven først, før de gikk sammen for å diskutere og dele tanker om løsningsmetoder. Her hadde de også mulighet til å korrigere sine egne svar, hvis de oppdaget feil. I denne delen forholdt vi oss i bakgrunnen, som observatører, slik at elevene fikk diskutere fritt uten innblanding fra lærer. Den neste delen av oppgaven ble gjennomført i GeoGebra. Her jobbet elevene to og to for å utforske sammen. Planen var at vi skulle være observatører i begge delene av oppgaven, men siden vi oppdaget at elevene ikke hadde tilstrekkelig kunnskap i GeoGebra tok vi rollen som deltakende observatør. Som deltakende observatør kunne vi hindre at arbeidet stoppet opp og hjelpe elevene videre ved behov. I etterkant av dette arbeidet gjennomførte vi gruppeintervju med elevene.

Avslutningsvis fikk elevene ettertesten. Her jobbet elevene individuelt, og de hadde ikke mulighet til å diskutere svarene sine med medelevene i etterkant. Bakgrunnen for dette var at denne testen ble gjort i forbindelse med de individuelle intervjuene. Her kunne elevene sette ord på hvordan de løste oppgavene, og vi kunne stille spørsmål rundt hvordan de tenkte nå, i forhold til i førtesten.

3.2 Intervju og observasjon

Vi har benyttet oss av intervju og observasjon for innsamling av data. Det finnes ulike former for intervju, og i følge Postholm (2010) er det en sammenheng mellom hensikten med forskningen, forskningens teoretiske utgangspunkt og hvordan intervjuet fortoner seg. Intervju er ifølge Robson og McCartan (2015) en fleksibel metode for å innhente data, som lett kan tilpasses forskningsdesignet. Observasjon kan være effektivt for å søke svar på problemstillingen, men å stille informantene direkte spørsmål om det man lurer på kan være en enda mer effektiv metode. I vårt tilfelle ble det brukt et semi-strukturert intervju. I slike intervju kan ordlyden og rekkefølgen kan endres, ut fra hvordan intervjuet fortoner seg, og en kan legge til uforutsette spørsmål for å følge opp svarene (Robson & McCartan, 2015).

Det ble på forhånd laget en intervjuguide (se vedlegg 7.5), slik at alle elevene skulle få de samme spørsmålene. Intervjuguiden lager en ramme rundt intervjuene, gir oss en sjekkliste for relevante tema og strukturerer intervjuene. I tillegg er den med på å gjøre analysearbeidet enklere (Postholm, 2010). Spørsmålene i intervjuguiden ble formulert på bakgrunn av det teoretiske rammeverket i kap. 2, og dekker faktorene for endring i begrepsforståelse og de underkategoriene vi ønsket å undersøke. Her har vi basert oss på tilsvarende struktur som i masteroppgaven *Elevers begrepsforståelse i modelleringskonteksten* (Ommedal, 2017).

Vi valgte å gjennomføre gruppeintervju og individuelt intervju. Studien vår fokuserer på endringer i elevers forståelse, og da var det viktig at vi fikk høre elevene sette ord på tankene sine, og ikke bare skrive dem ned på et ark. Førtest ble gjennomført individuelt på papir, og videre diskutert med medelever. Ettertest ble bevisst gjennomført som individuelle intervju, slik at elevene ikke ble påvirket av andre elevers svar. Det var også hensiktsmessig med individuelle intervju da vi hadde relativt få informanter, og ønsket en dypere og grundigere beskrivelse av elevenes uttrykk for forståelse (Jacobsen, 2005).

I gruppeintervjuet var elevene satt sammen to og to, med den samme personen som de jobbet med i arbeidet med modelleringsoppgaven. Her kunne de diskutere og støtte seg til hverandre, og diskutere hvilke faktorer de mente hadde påvirkning for endring i forståelse av funksjonsbegrepet. I følge Robson & McCartan (2015) kan gruppeintervju være en trygghet for elever som ikke vil intervjues alene, og som føler de har lite å komme med. Elevene kan lettere avkrefte og bekrefte utsagn fra andre elever. Feilkilder i forbindelse med gruppeintervju kan være at en elev dominere i gruppen og de andre elevene bare sier seg enig med den dominerende part. Da vil man ikke få innblikk i hva alle elevene tenker.

I tillegg til intervju benyttet vi oss av observasjon. Det var en utfordring for oss å bestemme oss for hvilken rolle vi skulle ha under gruppesamarbeidet. For stor innblanding fra observatøren kan påvirke påliteligheten av studien, fordi det kunne vært styrende for hvordan diskusjonen mellom elevene utviklet seg. Derimot kunne det vært en unaturlig og ubehagelig opplevelse for informantene dersom vår rolle som observatører ble for passiv. Elevene er vant til at lærer er tett på dem og kunne gi støtte når de står fast. Det var også viktig for studien vår at elevene kom seg gjennom hele oppgaven. Vi valgte derfor å være deltakende observatører, i de delene av oppgaven der elevene trengte støtte fra lærer, mens i noen deler var vi kun observatører. Som en deltakende observatør kunne vi stille spørsmål til elevene for å få de til å utdype hva de snakket om. Observasjonene er ikke brukt direkte i analysearbeidet, men er brukt til å støtte opp om lydopptakene (Robson og McCartan, 2015).

3.2.1 Lydopptak

For å fange opp samhandlingen mellom elevene i arbeidet med modelleringsoppgaven valgte vi å benytte lydopptaker. Bruken av lydopptak ga tilgang til et mer nøyaktig datamateriale, enn en observatør vil ha kapasitet til å registrere, notere og huske. Observatøren får også muligheten til å være mer tilstede i situasjonen (Brekke & Tiller, 2013). Studien vår fokuserer på hvordan elevene uttrykker sin forståelse for funksjoner, og det var derfor viktig å få innblikk i hvordan elevene diskuterte og tenkte når de skulle løse de ulike oppgavene.

3.3 Kvalitetsvurdering

I undersøkelser hvor mennesker studeres og intervjues er det viktig å ta etiske hensyn (Silverman, 2000). Disse hensynene er beskrevet i 3.4.1. Videre er det viktig, for å sikre kvaliteten i kvalitative studier, å se på begreper som troverdighet, pålitelighet og overførbarhet (Guba, 1981). Ettersom vi har valgt å bruke Guba (1981) for å teste forskningens troverdighet, har vi i tillegg fokusert på studiens bekreftbarhet samtidig som vi ser på valg av metode med et kritisk blikk.

3.3.1 Etiske betraktninger

For å oppfylle de etiske betraktningene i studiet, har vi forholdt oss til rammeverket for etikk utgitt av NESH (2016). Rammeverket er meget omfattende, og vi har valgt å fokusere på noen viktige aspekter. Elevene i vår studie er 15 år, likevel ønsket vi at elevene skulle drøfte deltakelsen med foresatte før de signerte samtykkeskjemaet (se vedlegg 7.4). I samtykkeskjemaet ble elevene gjort oppmerksom på at deltakelse i studien er frivillig, at alt materiale bli anonymisert, at oppbevaring av datamaterialet følger de etiske retningslinjene og at en når som helst kan trekke seg. Ved å gi informasjon i forkant av datainnsamlingen vet elevene hva de sier ja til, og hva de skal være med på. Når elevene har svart ja, kalles det informert samtykke. Ettersom vi benyttet oss av semistrukturert intervju, var det vanskelig å gi elevene full informasjon om hva intervjuet vil handle om på forhånd. Denne typen intervju gir forskeren mulighet til å følge opp tema informantene bringer inn i samtalen. Ved å ha hente inn informert samtykke fra elevene, kan det bidra til at elevene er mer fortrolig med situasjonen (Postholm, 2010).

Det ble tatt lydopptak av samtaler, modelleringsøkt og intervjuene, med godkjenning fra NSD ble disse oppbevart på en kryptert minnepinne. Lydopptakene ble transkribert, anonymisert og oppbevart i henhold til godkjenning, og ble slettet når prosjektet ble avsluttet.

3.3.2 Forskningens troverdighet og metodekritikk

I kvalitative undersøkelser er ikke datamaterialet like målbart og stabilt, som i en kvantitativ undersøkelse. For å validere de kvalitative målepunktene har vi lagt Gubas (1981) kriterier om troverdighet (credibility), overførbarhet (transferability), pålitelighet (dependability) og bekreftbarhet (confirmability), til grunn.

Når man gjennomfører en studie stilles det krav til troverdigheten. Guba (1981) refererer til flere metodiske kriterier for økt troverdighet, *credibility*, som innebærer å bruke flere metoder for innsamling av data, gjennomføre studien over lengre tid og ved å gjennomføre et oppfølgingsintervju med informantene. I vår studie har vi benyttet oss av ulike metoder for innsamling av data. Vi har gjennomført en førtest med påfølgende gruppesamtaler, der vi tok notater og lydopptak av samtalen. Vi samlet også inn elevenes notater fra førtesten, som et supplement til lydfilene. Videre ble det gjennomført gruppearbeid med modelleringsoppgave, på papir og digitalt, hvor det ble gjort lydopptak og observasjon av elevers samtaler og løsningsstrategier. Til slutt gjennomførte vi intervjuer og avsluttet med ettertest og individuelle intervju om oppgavene i ettertesten. Det kan diskuteres om førtesten også burde blitt gjennomgått som et individuelt intervju. Som nevnt i kap. 3.2, kan enkelte elever i en gruppesamtale støtte seg på en dominerende part, og vi kan ha gått glipp av tanker som noen av elevene ikke ønsket å dele med de andre i gruppen (Robson & McCartan, 2015). Postholm (2010) refererer til Lincoln og Guba, som vurderer *member checking* som en viktig prosedyre for å skape troverdighet i studiet. Ved *member checking* får informantene tilbud om å lese gjennom transkribering og oppsummering av intervju. Dermed får de muligheten til å gi uttalelser om eventuelle feiltolkninger, faktafeil eller komme med relevant tilleggsinformasjon. Elevene i vår studie har ikke fått denne muligheten, og troverdigheten av vår studie kan derfor være noe svekket.

For å øke forskningens troverdighet, er det en fordel at studiet kan strekkes over tid og at en har mulighet til oppfølgingsintervju med informantene. I vårt tilfelle ble før- og ettertesten gjennomført med relativt kort mellomrom, noe som kan føre til at troverdigheten for studien svekkes. I dette studiet er tidsbruken dessverre begrenset, da elevene er lånt fra annen skole, og gir derfor ikke mulighet for observasjon og oppfølging over tid. I et forsøk på å øke troverdighet til studien, har vi av den grunn valgt å kalle studien vår for designforskning, en systematisk studie av både utvikling og evaluering av et undervisningsopplegg (Plomp & Nieveen, 2007).

Et annet spørsmål om validitet til studiet er Gubas (1981) *transferability,* studiens overførbarhet. Hvis utvelgelse av informanter hadde fulgt samme kriterier og kontekst som representert i kap 3.3.2, er det mulighet for generalisering basert på funn fra lignende situasjoner. Andre kan vurdere beskrivelsen av våre funn i lys av arbeidet med en modelleringsoppgave og intervjukontekst, for å se om de oppnår tilsvarende funn i en tilsvarende kontekst.

Gubas (1981) kriterier for pålitelighet, *dependability*, er et mål på hvor kontekstavhengige funnene i studien er, og i hvor stor grad man vil få samme resultat om en gjennomfører det i flere varierte kontekster. Med tanke på at dette er en liten studie er ikke målet en direkte overførbarhet. Vi ønsker derimot at studien skal være et eksempel på en undervisningsøkt hvor man kan bruke modellering for å skape sammenheng mellom ulike matematiske tema.

Under arbeidet med modelleringsoppgaven, var vi som forskere mer en veileder av elevene for å sikre framdrift i arbeidet. Spesielt under arbeidet med digitale hjelpemidler. For at studien skal være overførbar, stilles det krav om digital og matematisk kunnskap hos forskeren. Dette kan være med på å senke studiens pålitelighet, da den kan være vanskeligere å replikere. Målet for vår forskning er ikke i første rekke at det skal være overførbart, men å se om denne måten å jobbe på er mulig og kan gi ønskede resultater.

Elevers relasjon til lærer kan også påvirke påliteligheten til studiet. Nordahl (2010) mener at en positiv lærer-elev relasjon kan gjøre elevene tryggere i situasjonen og gi en bedre læringssituasjon. I vår studie har vi ingen tidligere relasjon til elevene, og hvilke oppfatninger vi har til hverandre er derfor ikke påvirket av relasjoner. I kapittel 3.1.1 begrunner vi hvorfor vi har valgt elever vi har en nøytral relasjon til, og hvorfor dette er positivt for studiet.

Bekreftbarheten i studiet, *confirmability,* handler om tilliten til at funnene er basert på deltakernes fortellinger og ord, og ikke forskerens eventuelle feiltolkninger (Guba, 1981). Funnene i vår studie er i sin helhet kun basert på hva elevene selv mener om hvilke faktorer som har påvirket deres endring i forståelse, og hvordan de selv ordlegger seg i før- og ettertesten. Våre observasjoner er ikke en del av datamaterialet, og er derfor ikke en kilde til feiltolkning. For å sikre oss etterprøvbarhet i studiet har vi benyttet oss av en intervjuguide, vedlegg 7.5, som ble utformet med utgangspunkt i det teoretiske rammeverket.

3.4 Metode for analyse

Etter å ha avsluttet datainnsamlingen, satt vi med datamateriale i form av lydopptak og enkelte notater gjort av elevene fra før- og ettertestene. Vi transkriberte lydfilene og la elevenes notater inn i tabeller for å undersøke tegn på endring. For å ikke gå glipp av relevante samtaler, og for å få en fullstendig oversikt over hele modelleringsøkten, valgte vi å transkribere alt av lydopptak. På den måten ble vi godt kjent med datamaterialet og det var lettere for oss å identifisere relevant informasjon til bruk i analysen (Robson & McCartan, 2015). Transkripsjonen ble gjort på bokmål, da dialekten ikke er relevant for studiet. Vi valgte å ta med uttrykk som "eeh", "hmm", "ja" og "nei", samt registrere pauser, da dette kan være relevant for studien og kan indikere om eleven er usikker eller må tenke seg om.

Når vi satte i gang med vår forskning var det ikke forutbestemt hva vi skulle se etter. Vi hadde bestemt oss for tema og en foreløpig problemstilling. Vedeler (2000) understreker at at analysekategorier i kvalitativ forskning som regel ikke er bestemt på forhånd. Derimot finner forskeren fram til disse kategoriene underveis, på bakgrunn av det innsamlede datamaterialet. På den måten har forskeren mulighet til å studere de ulike temaene mer i detalj. Underveis i vårt arbeid ble det lest flere masteroppgaver innenfor temaet matematikkdidaktikk. Blant annet har vi basert oss på tilsvarende analysemetodikk som er beskrevet av Ommedal (2017) i *Elevers begrepsforståelse i modelleringskonteksten.*

3.4.1 Analyseverktøy

For å besvare problemstillingen vår bestemte vi oss tidlig for to faktorer, bruk av digitale hjelpemidler og arbeid med modelleringsoppgave. Faktoren om samarbeidslæring ble til når vi ønsket å finne ut hvordan elevene uttrykte sin forståelse og tanker rundt lineære funksjoner, stigningstall og konstantledd. I tillegg var vi på jakt etter begrepsforståelse og hvordan elevene ga uttrykk for forståelsen. Basert på Sierpinskas (1992) kategorier for endring i forståelse, samt Tall og Vinner (1981) sin definisjon av begrepsbilde og begrepsdefinisjon ble de siste faktorene til. Videre laget vi underkategorier for å forenkle analysearbeidet. Hver underkategori fikk en egen fargekode, og disse fargene brukte vi i analysen av datamaterialet, se tabell 3 under. Arbeidet med fargene i transkripsjonen gjorde det mulig å få en oversikt over hvor de ulike faktorene og underkategoriene var representert i datamaterialet. Fargekodene gjengis ikke i utdrag av intervju og sitat i analysekapittelet.

ANALYSEVERKTØY	
Faktorer	**Underkategorier**
Samarbeidslæring (gule koder)	Snakke høyt/forklare selv
	Lære når andre forklarer
	Diskusjon
	Støtte fra lærer
Bruk av digitale hjelpemidler (grønne koder)	Grafisk visualisering
	Sammenligne grafer med ulikt stigningstall og konstantledd
Arbeid med modelleringsoppgave (blå koder)	Overgang fra figurtall til tabell, punkter og graf
Endring i forståelse - Sierpinska	Identifisering
	Diskriminering
	Generalisering
	Syntetisering
Endring i begrepsbilde og personlig og formell begrepsdefinisjon	Endring i begrepsbilde

Tabell 3: Analyseverktøy.

Transkripsjonen ble kodet og sortert i flere omganger. Noen deler av transkripsjonen passet inn under flere hovedkategorier og underkategorier, og vi gjorde et utvalg over hvor vi ville presentere utdragene. Hvert utdrag av transkripsjonen har i analysen blitt presentert med et nummer, fra 1 til 14, som gjør det mulig for oss å referere til andre utdrag et annet sted i analysen. På den måten var det ikke nødvendig å skrive det samme utdraget flere ganger.

4.0 Resultat og analyse

I dette kapittelet vil vi presentere datamaterialet fra studien og vår analyse av datamaterialet. Det anbefales å gjøre seg kjent med vedlegg 7.1, 7.2 og 7.3 i forkant av dette kapittelet. Kapittel 4.1 presenterer funn fra modelleringsøkten og intervju. Her ser vi på faktorene som kan være med på å påvirke måten elevene uttrykker sin begrepsforståelse for stigningstall og konstantledd: samarbeidslæring, bruk av digitale hjelpemidler og arbeid med modelleringsoppgave. I kapittel 4.2 vil hver enkelt elevs endring i uttrykk for begrepsforståelse bli analysert med bakgrunn i det teoretiske rammeverket. Her vil vi i hovedsak se på hvordan elevene uttrykker sin begrepsforståelse i før- og ettertest, med tanke på begrepsbilde og begrepsdefinisjoner. Kapittelet avrundes med en oppsummering av analysen i 4.3.

Utdragene i analysen er nummerert, slik at det skal bli lettere å bruke de videre i analysen, samt henvise tilbake senere i oppgaven.

4.1 Analyse av ulike faktorer som kan føre til endring i begrepsforståelse

I dette kapittelet vil vi ta for oss datamateriale fra elevenes arbeid med modelleringsoppgaven og parintervju. Vi vil ta for oss de ulike faktorene og tilhørende underkategoriene vi mener er interessante får å se på endring i begrepsforståelse. Deretter vil vi analysere hvilke av disse faktorene som kommer fram i løpet av intervjuene og under observasjon. Her vil vi fokusere på om elevene har ulik oppfatning av hvilke faktorer som førte til en eventuell endring, og om vi har observert noe annet enn elevene. Faktorene som ligger til grunn er samarbeidslæring, bruk av digitale hjelpemidler og arbeid med modelleringsoppgave.

4.1.1 Samarbeidslæring som faktor for endring i begrepsforståelse

Ved å sammenstille våre notater og observasjoner med de transkriberte intervjuene, ser vi indikasjoner på at faktoren samarbeidslæring kan ha betydning for hvordan elevene uttrykker sin begrepsforståelse for stigningstall og konstantledd. Tabell 4 gir en oversikt over underkategoriene for samarbeidslæring, samt hvilke av disse elevene selv mener hadde betydning for deres endring i begrepsforståelse.

Samarbeidslæring som faktor for endring i begrepsforståelse				
Underkategorier:	**Trym**	**Ella**	**Sine**	**Rikke**
Snakke høyt og forklare selv		x	x	x
Lære når andre forklarer	x	x	x	x
Diskusjon		x		x
Støtte fra lærer		x	x	x

Tabell 4: Samarbeidslæring som faktor for endring i begrepsforståelse

4.1.1.1 Snakke høyt og forklare selv

Tabell 4 viser at samtlige av elevene uttrykker at å *snakke høyt og forklare selv* gjør at de oppnår en bedre forståelse av stigningstall og konstantledd. Det hjelper å få satt ord på tankene, slik at andre kan hjelpe med å se eventuelle feiloppfatninger. I denne konteksten viser vi til forståelse som en del av begrepsforståelse slik den presenteres av Skemp (1987) i kap. 2.2.

Utdrag fra intervjuene viser eksempler på hva elevene svarte når vi ba dem om å uttrykke egne meninger rundt det å lytte til andre og forklare hva de selv tenker.

Utdrag 1

> Lærer: Hvordan var det å forklare andre hvordan du tenker? Hjalp det deg å forstå mer når du må forklare selv?
>
> Sine: Jeg føler egentlig jeg forstår det bedre da. Og hvis jeg deler tankene mine så kan jeg få tilbakemelding på det.
>
> Rikke: Jeg begynne bli veldig vant med å fortelle hvordan jeg tenker. For vi pleier alltid å sitte i grupper i mattetimen og snakke ut om en oppgave som han [læreren] har tatt på tavla. Så vi begynner å bli vant til å uttrykke våre meninger. Selv om det kanskje ikke er rett.
>
> Lærer: Så det gjør ingenting å si feil? Det er ikke flaut?
>
> Rikke: Nei.

Sine, som under hele modelleringsøkten var stille og i liten grad bidro i gruppesamtalene, gir uttrykk for at hun oppnår en bedre forståelse av temaet ved å få tilbakemeldinger på tankene sine. Hun sier at hun ser styrken i bruk av språket som verktøy i samarbeidslæring. Elevene gir også uttrykk for at sosial interaksjon, hvor de både får mulighet til å snakke høyt og forklare selv, er en måte å arbeide på som de ofte benytter seg av i klasserommet. Noe som har gjort dem trygge på å si sin mening, selv om den ikke nødvendigvis er korrekt.

Det elevene rapporterer i intervjuet får vi bekreftet når vi ser på elevenes arbeid med modelleringsoppgaven. Her fikk de mulighet til å snakke sammen og forklare hverandre hvordan de løste oppgaven. De skulle ha rekkeframlegg og det var viktig at alle fikk mulighet til å forklare seg, uten forstyrrelser fra andre, uavhengig av om det de sa var riktig eller galt. Utdrag 2 er en del av samtalen mellom elevene da de hadde rekkeframlegg av deloppgave a (se vedlegg 7.2).

Utdrag 2

> Trym: Jeg laget en tabell. Så begynte jeg på 1 som gikk opp til 9, så plusset jeg på 5 på hver. Enkelt.
>
> Ella: Eeh..jeg vet ikke om dette er riktig, men jeg fant at det stiger med..[pause]..nei, det stiger jo med 5.. jeg har nok gjort feil. Jeg telte 6.
>
> Sine: Jeg er og litt usikker på om jeg har gjort rett. Jeg fant ut at det økte med 11. Jeg fikk 26, 37 osv.
>
> Rikke: Jeg tok at det økte med 5, så på figur 5 fikk jeg 26 og på figur 6 fikk jeg 31. Tror jeg har det samme som Trym.

Utdraget bekrefter resultatet fra tabell 3, der alle elevene utenom Trym uttrykker at det å snakke høyt og forklare for andre er en positiv bidragsyter til endring i begrepsforståelse. Trym avgir svar og viser tydelig at han ikke har noe behov for videre diskusjon. Når Ella skal gi sin forklaring, blir hun usikker på om hun har gjort riktig, noe som tyder på at hennes begrepsbilde ikke stemmer overens med det Trym har gitt uttrykk for. Mens hun selv snakker, gjør hun refleksjoner, og kommer fram til at hun må ha gjort en feil. Hun korrigerer svaret sitt, og det skjer muligens en utvikling i hennes celle for begrepsbilde (kap. 2.2.3). Også Sine er usikker på om hun har gjort rett, men velger likevel å gi en forklaring på hvordan hun har tenkt. Rikke er usikker og slutter seg til Trym sin forklaring, da hun tror hun har kommet fram til det samme.

Trym sin forståelse av problemet gjør at han lager en tabell for de ulike figurene og finner neste figurtall ved hjelp av denne. Når han beveger seg mellom representasjonsformene situasjon og tabell, benytter han seg av måling som aktivitet (kap. 2.2.2).

4.1.1.2 Lære når andre forklarer

Tabell 3 viser at samtlige elever i løpet av intervjuet uttrykte at de lærte mer, og opplevde økt forståelse når de kunne lytte til andre elever sin forklaring. Under kommer et utdrag fra intervjuet med Trym og Ella der de blir bedt om å fortelle hvordan samtalen i gruppen var med på å hjelpe dem til bedre forståelse.

Utdrag 3

> Ella: Trym var veldig flinkt til å forklare hva han hadde gjort. Jeg synes jeg forsto mer. For jeg var veldig usikker. Jeg forsto forklaringen til Trym etter hvert. Det

var bra at vi hadde forskjellige måter å finne ut svaret på. Det er jo lærerikt. Når noen forklare sin måte så forstår en det kanskje bedre.

Lærer: Du da, Trym?

Trym: ja, jeg syns det er ganske greit å høre på hva andre tenker. For da får jeg andre metoder å tenke på enn bare min egen. Og det kan være ganske lærerikt. Synes jeg.

I utdraget uttrykker Ella at hun hadde utbytte av å lytte til Trym sine forklaringer, fordi han var flink til å forklare hvordan han hadde tenkt. Fra Utdrag 2 så vi at Ella, etter Trym sin forklaring, kom fram til at hun selv måtte ha tenkt feil. I utdrag 3 bekrefter Ella at det det er lærerikt å høre på andres forklaring og å få innblikk i andre måter å tenke på. Utdraget indikerer at Ella, gjennom medelevers resonnement og matematiske forklaringer, får en bedre forståelse av matematikken. Trym viser til at det er lærerikt å høre andres forklaring, for å få innblikk i andre metoder enn de han selv bruker. Ved å høre på andres matematiske forklaringer kan Trym bygge opp sin mentale begrepsstruktur (kap. 2.2). Gjennom diskusjon av ulike matematiske resonnement kan elevene utvikle en felles forståelse, noe utdrag 4 støtter opp om (kap. 2.3.1).

Utdrag 4

Lærer: Hvordan var samtalen i gruppen med på å hjelpe deg til å forstå mer i dag?

Rikke: eeehm….Vi hadde jo litt forskjellige svar. Det var jo litt kjekt å høre hva de andre tenkte. Jeg fikk en oppklaring i hva som var riktig. Jeg synes det er greit å høre på hva andre tenker sammen med hva jeg tenker..liksom..så jeg kan finne ut hva som er riktig.

Sine: Jeg tenker at det var mye kjekkere å jobbe sammen når vi kunne høre hva de andre hadde svart og at de forklarte veldig bra. Følte det var veldig lærerikt.

Rikke legger vekt på at det er kjekt og oppklarende å høre andre sin forklaring og ulike svar. Både Sine og Rikke ser nytten i å lytte til andre, for å vurdere andres løsningsmetoder og for å oppklare eventuelle misforståelser eller feil i eget begrepsbilde. At elevene presenterer ideene sine for hverandre gjennom språket, kan være med på bedre forståelse og føre til endring i begrepsforståelsen (kap. 2.2.3).

4.1.1.3 Diskusjon

I en diskusjon vil elevene kunne stille hverandre spørsmål og få en ekstra oppklaring i en oppgave som de ikke helt har forstått. Ut fra tabell 4 er det kun Ella og Rikke som selv svarer at diskusjon har bidratt til en endring i forståelsen av begrepene stigningstall og konstantledd. Derimot viser datamaterialet vårt at alle fire elevene er delaktige i diskusjoner i løpet av arbeidsøkten. Selv om ikke elevene oppgir diskusjon som bidragsyter til endring i begrepsforståelse, kan observasjonene våre tyde på at forståelsen kan ha endret seg noe.

Under kommer et utdrag fra observasjon av arbeidsøkta der vi ser hvordan Rikke og Ella har faglig utbytte av diskusjon med Trym, som på sin side må endre hvordan han ordlegger seg i forklaringen. Her skulle elevene finne eksplisitt formel for figurtallene og forklare hvordan de har tenkt.

Utdrag 5

> Lærer: Men hvis vi ikke vet figuren før. Hvordan skal vi da finne den?
>
> Trym: 5x + 1 [svarer veldig kjapt]
>
> Lærer: Ok, hvorfor det? Kan dere diskutere?
>
> Trym: Den stiger med 5 for hver gang. Den starter med 6, og hvis man tar 6 - 5 = 1. Så da står vi igjen med 1. Og da kan man ta 5 ganger figurtallet, som blir 5x, og så plusser man på 1, og da får man svaret.
>
> Rikke: Så det plusses ikke med en på hver figur?
> Trym: Jo, på hver figur.. For hvis du ser på figur 7 så blir det 5*7 + 1
>
> Rikke: Blir det ikke en for mye da?
>
> Trym: Nei, for den første er jo 6, sant? Og den andre er 11. Du plusser på 5 pluss den ene ekstra.
>
> Rikke: Ja, jeg fatter.
>
> Lærer: Var alle med på det?
>
> Ella: Nei..
>
> Trym: Okei..figur 1 starter med 6, og så øke det med 5 til neste figur og hver figur. Så hvis du tar 5 og ganger med figurtallet. For eksempel hvis du har figur 7, så blir det 5 ganger 7 som blir 35, og plusse på den ene som den første figuren starter med.
>
> Ella: Ja, nå fatter jeg.

I denne diskusjonen stilte lærer spørsmålet fra oppgaven høyt, og Trym var veldig rask med å svare og lærer ønsker en forklaring. Trym kommer med grundig forklaring på hvorfor uttrykket han kommer med må bli slik. I denne forklaringen ser vi at han generaliserer og kan forklare bruken av x som variabel. Han knytter x opp mot figurnummeret og forklarer for de andre i gruppen hvorfor man også må huske å legge på en ekstra perle til hver figur. Han behersker sammenheng mellom definisjon- og verdimengde, og han går fra representasjonsformen formel til situasjon ved å bruke forklaring (kap. 2.2.2). Etter forklaringen til Trym henger Rikke seg på, og stiller spørsmål for å få en oppklaring. Rikke har løst oppgaven med tabell og kan finne den rekursive formelen for neste figur, men hun har ikke helt forstått generaliseringen av uttrykket. Trym utdyper sin forklaring, men Rikke er ikke helt sikker og spør flere spørsmål for oppklaring. Trym må nok en gang endre litt på forklaringen sin før Rikke er fornøyd. Ella har fortsatt ikke helt forstått, og Trym gir enda en forklaring. Her kan vi se hvordan diskusjonen mellom elevene gjør at Trym gjennom språket må endre forklaringen sin og uttrykke seg tydeligere før både Rikke og Ella gir uttrykk for felles forståelse av løsningen.

4.1.1.4 Støtte fra lærer

Under kategorien støtte fra lærer ser vi i tabell 4 at tre av fire elever synes støtte fra lærer er en god hjelp i arbeidet med oppgaven. Dette kan bidra til at elevene får en annen forståelse av stigningstall og konstantledd. I første del av oppgaven jobbet elevene selvstendig og i grupper. Her var vi observatører og støttet ikke elevene i arbeidet. Når elevene jobbet med oppgaven i GeoGebra gikk vi over i rollen som deltakende observatører, for å kunne støtte elevene i arbeidet. Utdrag 6 er hentet fra selve modelleringsøkten hvor elevene skulle lage en modell for figurens videre vekst.

Utdrag 6

> Lærer: Nå har dere lagt inn punktene som viser hvordan figuren økte. Kan dere lage en modell som viser utvikling av figuren uten å måtte plotte inn alle punktene videre?
>
> Sine: Ja, du kan vel legge inn en graf. Kan du ikke det?
>
> Lærer: Hvorfor velger du å legge inn en graf?
>
> Sine: For å se hvordan de stiger videre oppover. Da kan man også finne skjæringspunkt og se hvordan figuren endrer seg videre.
>
> Lærer: Hvordan valgte dere å sette inn grafen?
>
> Sine: Jeg valgte å sette inn grafen over punktene. Satte en linje gjennom.
>
> Trym: Jeg skrev funksjonen jeg laget tidligere i oppgaven. Til den der figuren.
>
> Lærer: Dere har gjort det på to forskjellige måter. Har dere fått samme resultat?
>
> Trym: ja, det må vi jo. Så lenge begge grafene går gjennom punktene så må det jo være det samme.
>
> Lærer: ut i fra den modellen dere har laga. Kan vi nå finne ut hvor mange perler det er i figur nr.13?
>
> Sine: Kan vi legge inn x=13 kanskje?
>
> Rikke: Prøv. [pause mens de jobber] ...Så finn skjæringspunktet.

Trym: (13, 66)

Rikke: (13, 65.9)

Lærer: Det er jo ikke det samme. Her har det skjedd noe. Fortell hvordan dere fant punktet.

Rikke: Vi tok x=13, så fikk vi ei linja, og tok skjæringspunkt mellom linja og grafen.

Lærer: Okei, men hvis dere ser på grafen dere har laga. Se hva som står i algebrafeltet.

Rikke: 4,99x + 1,01

Trym: 5x + 1

Lærer: Dere har ulikt uttrykk. Kanskje det er en unøyaktighet her?

Trym: Går det an å sjekke at punktene står rett da?

[punktene blir lest opp og sjekket] - konkluderer med like punkt

Lærer: Kanskje linja er unøyaktig?

[Elevene prøver på ny og får nå nøyaktig graf]

Lærer: sjekk skjæringspunktet nå.

Sine: (13,66)

Lærer: Dere har laget ei linje via punkter og da har dere fått et uttrykk. Ser dere noe likhet mellom uttrykket i algebrafeltet og hvordan figuren var bygd opp?

Rikke: Det er det samme uttrykket som Trym laga for å finne ut hvor mye den øker med. Figurnummeret og gange 5 og plusser på en.

Lærer: Se på det uttrykket i algebrafeltet [5x+1] kan dere beskrive hvordan denne funksjonen ser ut?

Trym: Den stiger og krysser y-aksen i 1. Den stige med 5 per x.

Utdrag 6 starter med at Sine klarer å overføre figurens vekst til en modell. Det kan tyde på at hun har kobling mellom flere representasjonsformer for funksjoner, noe som gjør at hun kan oppnå en dypere forståelse av temaet. Hun benytter seg av både verbal og grafisk representasjon. Trym benytter seg av algebraisk representasjon, og det samme gjør Rikke. Hun gjenkjenner den algebraiske representasjonen som det de uttrykker verbalt tidligere i oppgaven. I denne diskusjonen forholder Ella seg stille. Noe som er interessant i forhold til at hun nevner diskusjon som en viktig underkategori for utvikling av forståelse. Dette kan tyde på hun ser nytten av å være lytter til diskusjon mellom medelever (kap. 2.3.1).

I utdraget ser vi hvordan lærer stiller spørsmål for å få elevene videre i arbeidet. Gruppene har løst oppgaven likt, og lærer gjør dem oppmerksom på å se i algebrafeltet. Elevene oppdager da at de ikke har samme funksjonsuttrykk. Med støtte fra lærer får elevene hjelp til å oppdage en unøyaktighet i svarene, og videre bidrar spørsmålene fra lærer til at elevene må reflektere over grunnen til unøyaktigheten.

Videre blir elevene utfordret på om det er noen likheter med det uttrykket i algebrafeltet og det de jobbet med under figurtallene. Rikke konkluderer med at det er det samme uttrykket som Trym fant da de skulle finne ut hvor mye figuren økte med. Trym utdyper forklaringen på uttrykket, med å bruke både stigningstall og konstantledd, ved at grafen stiger, krysser y-aksen i 1 og stiger med 5 per x. Her ser vi at Trym nå beskriver uttrykket ved å ta i bruk formell begrepsdefinisjon (kap. 2.2.3).

I intervjuene ble elevene spurt om hva de tenker i forhold til støtte fra lærer. Under er sitater hentet fra intervju om arbeidet med oppgavene i GeoGebra.

> *"(...)Læreren kan jo mer om det, men det kommer jo an på om læreren er flink til å forklare. Det er forskjellig" (Ella).*
>
> *"(...)Jeg syns det er veldig greit når læreren forklarer og hjelper. Vi hadde sikkert ikke oppdaget feilen før vi oppdaget at vi hadde forskjellig svar. Litt greit at vi hadde noen til å hjelpe sånn det ikke ble en diskusjon om hvem som hadde rett (Rikke).*
>
> *"(...) Og, jeg syns jo jeg tar jo ting veldig sent i matte, så det å få gjennomgang med litt færre personer som blir litt mer direkte mot meg, så blir det litt lettere å forstå. Syns hvertfall jeg. Det er kanskje litt vanskelig av og til hvis det er gjennomgang i klassen, for da går det kanskje litt fort for meg. Mange som forstår det, og mange som ikke forstår det helt. [lang pause] Så jeg syns det var greit med en gjennomgang med få personer" (Rikke).*

Sitatene kan tyde på at elevene selv mener at det å få støtte fra lærer kan være lærerikt og hjelpe på forståelsen. Ella trekker frem at noen lærere er flinkere til å forklare enn andre, og at dette er avgjørende for læringsutbyttet. Rikke fokuserer på at støtte fra læreren hjelper de videre i arbeidet, at de da slipper å jobbe for lenge med en oppgave hvis de står fast. Ved å korrigere og stille spørsmål underveis, kan lærer rette opp i misforståelser som blir gjort. Rikke sier også at hun tar ting sakte og at læringsutbytte er større i mindre grupper, da læreren er mer tilgjengelig og har mer tid til hver enkelt elev (kap. 2.3.1). Noe som stemmer med våre observasjoner av Rikke, da hun stadig er på jakt etter bekreftelse på tankene sine, både fra medelever og lærer.

4.1.2 Bruk av digitale hjelpemidler (GeoGebra)

Vi observerer at faktoren bruk av digitale hjelpemidler, i form av å kunne se grafen fra oppgaven visuelt og kunne sammenligne grafer med ulikt stigningstall og konstantledd. Overgang fra figurtall til graf i et digitalt program, kan ha betydning for elevens endring av begrepsforståelsen av stigningstall og konstantledd. Tabell 5 viser hva elevene uttrykte i intervju i forhold til dette.

Digitale hjelpemidler som faktor for endring i begrepsforståelse				
Underkategorier:	**Trym**	**Ella**	**Sine**	**Rikke**
Grafisk visualisering		x	x	x
Sammenligne grafer med ulikt stigningstall og konstantledd	x	x	x	x

Tabell 5: Digitale hjelpemidler som faktor for endring i begrepsforståelse

Alle elevene uttalte iløpet av arbeidsøkta, eller i intervjuet, at GeoGebra var et nyttig verktøy under arbeidet med oppgaven. Ved hjelp av GeoGebra kunne de jobbe mer nøyaktig i koordinatsystemet, og de kunne få en mer dynamisk tilnærming til oppgaven da de enklere kunne endre på grafen ved å dra i glidere. De kunne også zoome inn og se at de hadde laget en graf som var unøyaktig i forhold til de punktene de hadde satt inn. Overgangen fra tabell på arket til en digital graf, ble også sett på som et meget godt og nøyaktig verktøy. Da elevene ble bedt om å finne ut hvor mange perler det var i figur nr.100, var de alle enige om at det var enklere å finne løsningen når de kunne bruke grafen i GeoGebra enn på papir.

4.1.2.1 Grafisk visualisering

Under kategorien *grafisk visualisering* ønsker vi å få innblikk i hvordan visualisering av modellen som lages kan være med på å bidra til endring i hvordan elevene uttrykker sin forståelse. Av tabell 5 ser vi at samtlige av elevene selvrapporterer at GeoGebra, som verktøy for grafisk visualisering, gjorde at de fikk en bedre forståelse av funksjoner. Sitatene under er hentet fra intervju med elevene. De ble spurt om det var en spesiell hendelse i modelleringsøkten som gjorde at de forsto mer av funksjoner, stigningstall og konstantledd.

> *"(...) Jeg følte jeg forsto mer når vi skrev det inn på GeoGebra. Når vi skrev ned..ehm..5x+1. Jeg synes det var lettere å forstå det da, for da så du hvordan vi kunne endre på tallene og da se at grafen ble annerledes." (Ella)*

> *"(...) Jeg så hvor mye figuren steg med for hver figur, så kan du jo og bruke det når du skal sette det inn på GeoGebra. Kan bruke graf som hjelpemiddel. Det syns jeg var lettere å forstå. For da kunne en se hvordan grafen beveget seg opp gjennom punktene og se hvor den skjærte på y-aksen. Og når vi skulle finne det skjæringspunktet, og se hvordan grafen fortsatte videre." (Sine)*

> *"(...) Jeg og syns det var lettere å forstå når vi så det i GeoGebra. Jeg forsto litt mer av hvordan vi setter opp en graf. Forsto mer av x og y-aksen og verdiene på de." (Rikke)*

Ella, Sine og Rikke er alle enige i at ved å få uttrykket visualisert i en graf i GeoGebra, gjorde det enklere å forstå hvordan hvordan figurtallet til figuren økte i takt med figurnummeret. Ella legger vekt på at en ved hjelp av GeoGebra kunne se endringer på grafen, når verdiene av koeffisientene i den generelle formelen endret seg. Det kan tyde på at Ella her tenker tilbake observasjonene i Utdrag 6, hvor de to gruppene har benyttet seg av ulike metoder for å tegne en graf, noe som gir en liten unøyaktighet i koeffisientene til funksjonsuttrykket, og dermed gir gruppene en liten unøyaktighet i antall perler for figur 13. Sine legger vekt på at grafen hjalp henne til å kunne se hvordan figurtallene ville fortsette videre, og hvordan den kan hjelpe henne å finne skjæringspunkter.

Rikke fokuserer på noe litt annet, og viser til at arbeidet i GeoGebra hjalp henne til å forstå sammenhengen mellom x- og y-verdien på aksene, samt hva disse egentlig forteller oss. Her antyder hun at noe skjer i begrepsforståelsen, fra å ikke forstå disse verdiene, til å kunne koble dem sammen med selve grafen. Det kan tyde på at Rikke nå har oppnådd en bedre kobling innad i den grafiske representasjonsformen av funksjoner. Hun kobler definisjonsområde (x-akse) og verdimengde (y-akse) til koordinatene, som er en sammenheng mellom definisjon- og verdimengde (tabell 2 i kapittel 2.2.2).

Trym er ikke tatt med som eget sitat, da han opplyste om at dette var noe han kunne fra før, og derfor ikke hadde noe økt læringsutbytte. I delkapittel 4.1.2.2 og Utdrag 8, vil vi likevel få et innblikk i hvordan visualisering og bruk av glider er med på at Trym blir mer formell i sitt uttrykk for begrepsforståelsen.

4.1.2.2 Sammenligne grafer med ulikt stigningstall og konstantledd

I underkategorien *sammenligne grafer med ulikt stigningstall og konstantledd* ønsker vi å undersøke om elevene mener at det å sammenligne ulike grafer kan bidra til å øke forståelsen for stigningstall og konstantledd. Ut fra tabell 5 kan vi se at samtlige elever mener dette er en faktor som påvirker deres forståelse.

Utdrag 7 er hentet fra samtale mellom lærer og elever under arbeidsøkta med glidere. Elevene laget en glider a for stigningstall, og en glider b for konstantledd. Gliderne fikk en minimumsverdi på -5 og maksverdi på 5. De la også inn det generelle uttrykket for en lineær funksjon, y = ax + b. På denne måten kunne de sammenligne ulike grafer med ulikt stigningstall og konstantledd (kap. 2.2).

Utdrag 7:

> Lærer: Kan dere ved bruk av gliderne få grafen til å passe punktene vi satte inn fra tabellen?
>
> Sine: Vi må vel dra i b sånn den blir 1. For b er konstantleddet og a er stigningstallet. Så den må være på 5.
>
> Lærer: Kan dere få grafen til å gå nedover?
>
> Rikke: Nå synker grafen.

Lærer: Ja, hva har skjedd med stigningstallet på glider a nå?

Rikke: Den er negativ. Den er nå -5.

Lærer: Og hva ser dere på glider b?

Rikke: Den står ennå i 1. Så den skjærer y-aksen på 1.

Lærer: Kan dere få grafen til å gå gjennom origo? Forklar hva som skjer med uttrykket da.

Rikke: Grafen blir bare -5x. Der er b = 0, og man trenger ikke plusse på 0 liksom.

Lærer: Kan dere få den til å gå gjennom nedenfor origo?

Rikke: Sånn? Nå står det -5 på b.

Lærer: Ja, sånn. Hva sier funksjonsuttrykket nå?

Rikke: Den er -5 på b. Så den bakerste er alltid der den krysse y-aksen?

Lærer: Ja.

Lærer: Hva tror dere skjer hvis dere setter glider a på 0?

Rikke: Da går den beint på y-aksen?

Lærer: Prøv. Hva skjer med funksjonsuttrykket?

Rikke: Den er bare y = -5.

Lærer: Hvorfor ingen x og hva skjer med stigningen?

Rikke: Det er ingen stigning nå. Og hvis vi tar glider b også på 0 så blir alt 0. y = 0.

Sine er raskt ute med å gjenkjenne stigningstall og konstantledd, og viser at hun forstår at glider a må stå på 5 og glider b må være 1 for at grafen skal passe i punktene fra den tidligere oppgaven. Etter dette utsagnet blir Sine stille, men observerer hva som skjer. At Sine ikke lengre velger å bidra i diskusjonen kan tyde på at hun ikke har noen videre forståelse av hva stigningstall og konstantledd er, eller at hun velger enkleste løsning ved å la Rikke styre samtalen med lærer. Rikke utforsker hva som skjer når hun drar i gliderene for koefisientene a og b. Ved å sette koeffisientene lik 0, gjør Rikke erfaringer med eksempler og ikke-eksempler av graf (kap. 2.2). I løpet av utdrag 7 kan vi se at Rikke prøver å korrigere sin personlige begrepsdefinisjon av stigningstall og konstantledd, ved å stille spørsmål om det "bakerste i uttrykket" alltid viser hvor grafen går gjennom y-aksen. Hun jobber med å skape en sammenheng mellom representasjonsformene formel og graf. Det kan det tyde på at det skjer en endring i forståelsen hennes ved å bruke GeoGebra og glidere som en digital skisse (kap. 2.2.2). Hun setter ord på dette selv i intervjuet i etterkant av modelleringsøkten.

> *"(...) Jeg forsto mer når vi dro i gliderne for å se hvordan grafen flytte på seg." (Rikke)*

Utdrag 8 viser til samtale mellom lærer, Trym og Ella, mens de jobber med glidere i GeoGebra.

Utdrag 8:

> Lærer: se på det uttrykket i algebrafeltet [peker på y = 5x+1]. Kan dere beskrive hvordan denne funksjonen ser ut?
>
> Trym: Den stiger og krysser y-aksen i 1. Den stiger med 5 per x.
>
> Lærer: Forklar hva som skjer når du drar i glider a.
>
> Trym: Du endrer på stigningstallet.
>
> Lærer: Ok. Kan du endre på konstantleddet?
>
> [Trym drar i glider b]
>
> Trym: Ja, nå er den på -5. Den starter på -5 på y-aksen.
>
> Lærer: Ok. Kan dere få funksjonen gjennom origo?
>
> Trym: Ja.. Setter den på 0. Altså konstantleddet til 0. Grafen starter nå på 0.
>
> Lærer: Starter på 0?
>
> Trym: Går gjennom origo..for å være mer matematisk korrekt..

I samtalen mellom lærer og Trym forblir Ella stille, mens Trym bruker gliderne aktivt. Mens han sammenligner grafene med ulikt stigningstall og konstantledd ser vi en endring i måten han ordlegger seg på. Han bruker fra starten av samtalen formelle begrepsdefinisjoner for stigningstall, men vi ser spesielt en endring i måten han beskriver konstantledd. Han refererer i begynnelsen til konstantledd som hvor grafen starter, men etter å ha endret på konstantleddet for å få grafen til å gå gjennom origo, korrigerer han seg selv fra at grafen starter på 0 til at grafen går gjennom 0. Samtalen viser at Trym har en kobling mellom begrepsbilde og sin personlige begrepsdefinisjon, og at samtalen bidrar til å utvikle en mer formell begrepsdefinisjon (kap. 2.2.3).

4.1.3 Arbeid med modelleringsoppgave

Vi observerer at arbeid med RME, kan være en faktor for endring i begrepsforståelsen av stigningstall og konstantledd. Tabell 6 viser at to av fire elever mener at denne faktoren kan ha betydning for forståelsen.

Arbeid med modelleringsoppgave som faktor for endring i begrepsforståelse				
Underkategorier:	**Trym**	**Ella**	**Sine**	**Rikke**
Overgang fra figurtall til tabell, punkter og graf			X	X

Tabell 6: Arbeid med modelleringsoppgave som faktor for endring i begrepsforståelse

4.1.3.1 Overgang fra figurtall til tabell, punkter og graf

I denne underkategorien ønsker vi å kartlegge om selve oppgaven gjorde at elevene fikk bedre forståelse for stigningstall og konstantledd. Oppgaven vi valgte for elevene er sammensatt av to ulike matematiske tema, algebra og funksjonslære. Vi ønsket å finne ut om arbeid med figurtall og generalisering kan være en inngangsport for å skape en bedre forståelse for stigningstall og konstantledd i lineære funksjoner. Den eksplisitte formelen for figurtall kan sammenlignes med funksjonsuttrykk og hvordan noe vokser over tid. Oppgaven kunne løses på flere måter, både ved tegning, regning og bruk av ulike formler. Elevene kunne også ha løst hele oppgaven for hånd, men vi valgte å gi dem muligheten til å bruke GeoGebra, med bakgrunn i digitale hjelpemidler som en faktor.

I begynnelsen av oppgaven velger elevene å komme fram til figurtallene på ulike måter. Rikke, Sine og Ella velger å bruke tegning som hjelpemiddel, ved å tegne neste figur i oppgaven. Trym velger å finne forskjellen mellom de figurene han får oppgitt og på den måten finne ut hvordan figuren øker. Her viser Trym at han har forståelse av at figuren vil øke med et fast tall, og ved å se tilbake på økning per figur er han i stand til å finne antall i figurene som kommer etter. Dette kan tyde på at han har et begrepsbilde av stigningstall og kan knytte dette til hvordan figuren vil øke i antall.

I Utdrag 6, kap 4.1.1.4, i underkategorien støtte fra lærer, jobbet elevene med overgangen fra tabell til graf. I dette utdraget ble elevene bevisste på når de satte inn punktene fra tabellen i koordinatsystemet og trakk ei linje gjennom punktene, fikk linja samme uttrykk som det eksplisitte uttrykket de laget i arbeidet med figurtallene. Sitatet under er hvordan Rikke uttrykte seg på spørsmål om sammenheng mellom det de gjorde i GeoGebra og det de hadde gjort med figurtallene.

> *"(...)Det er det samme uttrykket som Trym laget for å finne ut hvor mye den øker med. Figurnummeret og gange 5 og plusser på en." (Rikke)*

Sitatet viser at Rikke her gjør en kobling mellom funksjonsuttrykket og den eksplisitte formelen for figurtallet. Ut fra sitatet til Rikke ser vi at hun klarer å koble sammen to tema, som i matematikken ofte blir sett på som adskilt. Rikke viser at hun er i stand til å generalisere med ord, selv om hun ikke bruker de formelle begrepsdefinisjonene for stigningstall og konstantledd. Hun ser ut til å forstå at variabelen i funksjonsuttrykket representerer figurnummeret, som må multipliseres med fem og at det i tillegg må legges på en (kap. 2.2.2).

I intervjuet ser vi at Sine gjør en kobling mellom hvordan figuren vokser på papiret og hvordan det kan representeres som en modell, i form av en graf i GeoGebra.

> *"(..) Det gjorde det lettere å forstå når vi fikk se figurene i den først oppgaven og brukte hvordan mønsteret hang sammen. Jeg så hvor mye figuren steg med for hver figur da.. og så kan vi jo bruke det når vi skal sette det inn i GeoGebra. Kan bruke punkter og graf." (Sine)*

Sitatet indikerer at Sine har oppnådd en forståelse av sammenhengen mellom figurens vekst og tilhørende funksjon. Dette tyder på at visualisering ved bruk av GeoGebra som verktøy, kan være nyttig i forståelsen av overgangen mellom representasjonsformene (kap. 2.2.2).

4.2 Endring i elevenes uttrykte begrepsforståelse

Vi vil i dette delkapittelet vurdere elevenes uttrykte begrepsforståelse enkeltvis. Vi vil ta for oss før- og ettertest, samt hvor eventuelle endringer har kommet til uttrykk under modelleringsøkten. Her vil vi lete spesifikt etter endring i begrepsforståelsen i sammenheng med faktorene samarbeidslæring, bruk av digitale hjelpemidler og arbeid med modelleringsoppgave.

Det er ikke mulig å si med sikkerhet om det har skjedd en endring i elevenes begrepsforståelse i løpet av modelleringsøkten. Det vi kan si noe om, er hvordan de gjennom arbeidet endrer sin måte å bruke begrepene stigningstall og konstantledd på, samt hva de legger i disse begrepene. Vi kan også få innblikk i hvilken uttrykt forståelse elevene satt igjen med i etterkant av modelleringsarbeidet.

4.2.1 Tryms begrepsforståelse

4.2.1.1 Tryms begrepsforståelse i førtesten

I møte med førtesten ser vi at Trym identifiserer alle uttrykkene som lineære funksjoner. Han forklarer videre de ulike egenskapene til grafene ut i fra funksjonsuttrykkene, om de er positive eller negative, og sammenhengen mellom de ulike delene i uttrykket. Her viser Trym at han allerede i førtesten behersker algebraisk representasjonsform for funksjoner.

Tabell 7 viser hvordan Trym ordlegger seg når han skal forklare de ulike funksjonsuttrykkene.

Trym	Førtest
$f(x) = 3x$	Dette er en funksjon Den har positivt tall og går oppover Går gjennom origo
$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$	Stiger med en halv y eller x Starter på 2 på y-aksen
$f(x) = -2x - 2$	Synker Går gjennom -2 på y-aksen

Tabell 7: Trym sin førtest

Svarene til Trym kan tyde på at han har et relativt godt etablert begrepsbilde av lineære grafer. Han har tilsynelatende også en god personlig begrepsdefinisjon, men han bruker ikke de formelle begrepsdefinisjonene: stigningstall og konstantledd. På det første og det siste funksjonsuttrykket refererer Trym til stigning og nedgang, uten noen videre forklaring. Utdrag 9 gir et innblikk i at Trym har et godt fungerende begrepsbilde av en lineær graf. Utdraget er hentet fra rekkefremlegg av oppgavene i førtesten, der Trym og Rikke diskuterer det andre funksjonsuttrykket.

Utdrag 9:

> Rikke: okei..her er jeg veldig usikker på denne.. Men jeg lure på om det er den som er sånn u-forma..
>
> Trym: nei, da må det være x^2. Denne stiger bare med en halv x per... Den stiger med en halv y.. eller, jeg vet ikke. Den stiger med en halv hvertfall.

Her gjør Trym Rikke oppmerksom på at det må være x^2 for at grafen skal være u-formet. Han viser med det at han er i stand til å identifisere forskjeller og spesielle egenskaper med funksjonsuttrykket (kap. 2.2). Begrepsbildet hans vekkes og han gjenkjenner uttrykket som en lineær graf som stiger med en halv. Utdrag 9 viser at han har forståelse av at grafen $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ stiger, og at den stiger med en halv, men er usikker på om det stiger per x eller per y.

Videre viser tabell 7 at han ikke er konsekvent i bruken av begrepet konstantledd. Tabellen viser at han uttrykker seg på ulike måter og sier; "går gjennom origo", "starter på 2" og "går gjennom -2". Det kan tyde på at han har en konflikt i begrepsbildet sitt (kap. 2.2.1), eller at han ikke er bevisst i måten han uttrykker seg på.

Gjennom hele førtesten forklarer Trym han hva han tenker. Selv om ikke forklaringen hans er i tråd med den formelle begrepsdefinisjonen og matematisk korrekte, forstår vi hva han mener.

4.2.1.2 Tryms begrepsforståelse gjennom arbeidet med modelleringsoppgaven

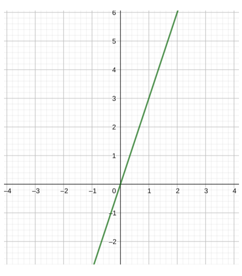
I løpet av modelleringsøkten var Trym engasjert og interessert i oppgavene. Han fremsto selvsikker og forklarte villig til de andre hvordan han hadde tenkt. Trym uttrykte helt fra starten at han ikke var glad i å skrive matematikk, men at han likte å diskutere og forklare andre. Gjennom forklaring fikk han vist sin forståelse av både stigningstall og konstantledd. Ser vi tilbake på Utdrag 5, er Trym en aktiv deltaker når oppgavene skal forklares og diskuteres. Her oppga Trym eksplisitt formel for hvordan figuren vokser uten å avgi noe forklaring på hvorfor den ble slik. De andre elevene stilte spørsmål til hvordan han hadde tenkt og Trym måtte endre sin forklaring underveis, slik at medelevene skulle forstå hva han mente. Det kan tyde på at det skjedde en endring i Trym sin bruk av begrepsdefinisjon når han ble bedt om å forklare det samme flere ganger. Han ble mer tydelig og brukte mer formelle begrepsdefinisjoner, isteden for at han kun støttet seg på begrepsbildet.

Videre i modelleringsøkten, der elevene jobbet med figurtallene i GeoGebra, begynte Trym å bruke relevante begreper som er i tråd med formell begrepsdefinisjon. I Utdrag 8 beskrev Trym uttrykket $5x + 1$ som en graf som stiger med 5 per x og krysser y-aksen i 1. Ved bruk av glidere har elevene kommet fram til et funksjonsuttrykk som går gjennom koordinatene fra tabellen, og som beskriver hvor mange perler figuren øker med. I dette utdraget ser vi at eleven har endret sin måte å beskrive stigningstall og konstantledd, altså bruker relevante begreper som er i tråd med formell begrepsdefinisjon. De kan tyde på at Trym allerede hadde et etablert begrepsbilde og begrepsdefinisjon om lineære grafer, men vi kan se at han i starten benyttet seg av begrepsbildet og noe personlig begrepsdefinisjon. Etterhvert i økta ser vi en endring i bruken av den formelle begrepsdefinisjonen. Trym benytter seg nå av scenario 3, der begrepsbildet vekkes og ved bruk av begrepsdefinisjon kan eleven avgi et svar. Eleven får her testet om det er samspill mellom begrepsdefinisjon og begrepsbilde (kap. 2.2.3).

Gjennom modelleringsøkten viser Trym at han ser sammenheng mellom teksten i oppgaven og de matematiske symbolene vi finner igjen i et funksjonsuttrykk. Han benytter seg av generalisering og gir i tillegg uttrykk for at han forstår ulike representasjonsformer for funksjoner, som verbal, algebraisk og grafisk representasjon (kap. 2.2.2).

4.2.1.3 Tryms begrepsforståelse i ettertest

I ettertesten er Trym rask med å forklare de ulike funksjonsuttrykkene og grafen han får utdelt. Tabell 8 viser hvordan Trym ordlegger seg i ettertesten.

Trym	Ettertest
	Stiger med 3 per x. Hver gang x stiger så går y opp med 3. Ikke konstantledd. Går gjennom origo.

f(x) = $\frac{1}{3}$x - 2	Stiger med en tredel per x Starter på -2. Konstantledd på -2.
f(x) = 1 - 2x	Synker med 2 per x. Går gjennom 1 på y-aksen.

Tabell 8: Trym sin ettertest

Av tabell 8 ser vi at han etter arbeid med modelleringsøkten, i større grad bruker de formelle begrepsdefinisjonene når han svarer på oppgavene. Noe som kan tyde på at hans vekkede begrepsbilde nå henter fram den formelle begrepsdefinisjon, framfor den personlige. Ser vi på utdrag 10, gir han en god forklaring på den første oppgaven, som viser at hans vekkede begrepsbilde stemmer med den formelle begrepsdefinisjonen for stigningstall og konstantledd (kap. 2.2.3).

Utdrag 10:

> Trym: Hver gang x stiger så går y opp med tre, og så, ja, det er det jeg kan av det. Og så den andre, den stiger jo med en tredel per x, og den starter på -2 for den har sånn, åh hva var navnet på det? Konstantledd på -2.
>
> Lærer: Og den da? (peker på bildet)
>
> Trym: Den har ikke konstantledd. Den går gjennom origo. Og så den siste (peker på f(x) = 1 - 2x) den synker med 2 og går igjennom 1 på y-aksen.

I førtesten var han usikker på om grafen steg med en halv per x eller y, men i ettertesten fremstår han mer trygg og mener den stiger med en tredel tre per x. Han definerer også konstantleddet ved å si at at grafen krysser y-aksen i 1, i steden for å si at den starter i 1. Her kan eleven ha gjort en korrigering i begrepsbildet sitt, slik at han uttrykker seg matematisk korrekt. Dette kan, som nevnt tidligere, tyde på at Trym har hatt en endring i sin begrepsdefinisjon, fra personlig til mer formell. Han tar i bruk nye uttrykksformer og begreper, som stigning per enhet og konstantledd. Han uttrykker seg fortsatt med "starter på -2", men korrigerer seg selv og sier at grafen går gjennom aksen. Det kan tyde på at hos Trym var cellen, vist i figur 2, for begrepsbilde mer dominerende enn cellen for begrepsdefinisjon. Begge cellene var aktive, men ikke fulle. I løpet av økta blir det mer samsvar mellom cellene, og cellen for begrepsdefinisjon fylles på med formelle begrepsdefinisjoner (kap. 2.2.3).

4.2.2 Ellas begrepsforståelse

4.2.2.1 Ellas begrepsforståelse i førtesten

I møte med førtesten virket Ella usikker, og hun skrev lite på oppgavearket. Da hun skulle fortelle hva hun visste om de ulike uttrykkene kunne hun ikke si så mye, og hun lyttet mest til de andre elevenes svar.

Tabell 9, viser i hvordan Ella ordlegger seg når hun forklarer de ulike funksjonsuttrykkene i førtesten.

Ella	Førtest
$f(x) = 3x$	Dette er en funksjon.
$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$	Dette er en funksjon.
$f(x) = -2x - 2$	Dette er en lineær funksjon.

Tabell 9: Ella sin førtest

Tabell 9 viser at Ella ga korte svar, uten noe beskrivelse av stigningstall og konstantledd. Begrepsbildet vekkes og hun identifiserer uttrykkene som funksjoner. Kun funksjonsuttrykket $f(x) = -2x - 2$ gjenkjennes som en lineær funksjon, og det kan virke som hun har en personlig begrepsdefinisjon knyttet til funksjonsuttrykk skrevet på denne formen (kap. 2.2.3). Selv om uttrykket med brøk har den samme formen, identifiserer hun ikke dette som en lineær funksjon. Dette kan tyde på at hun kun benytter seg av begrepsbildet før det avgis et svar. Ettersom hun kun kan identifisere uttrykkene som en funksjon, kan det tyde på at hun ikke har forståelse for de ulike representasjonsformene for en funksjon. Hun gir ikke uttrykk for å ha forståelse for hvordan grafen vil se ut, og heller ikke hvilken betydning koeffisientene har for funksjonsuttrykket (kap. 2.2).

4.2.2.3 Ellas begrepsforståelse gjennom arbeidet med modelleringsoppgaven

I løpet av modelleringsøkten var Ella stille og tilbaketrukket. Hun svarte på spørsmål fra medelever og lærer, men virket usikker i egne svar og bidro lite til videre samtale mellom elevene. Da elevene hadde rekkeframlegg, der de fortalte hvordan de løste oppgaven med figurtall, kom denne usikkerheten tydelig fram.

> *"(...) Eeh..jeg vet ikke om dette er riktig, men jeg fant at det stiger med..[pause]..nei, det stiger jo med 5..jeg har nok gjort feil. Jeg telte 6." (Ella)*

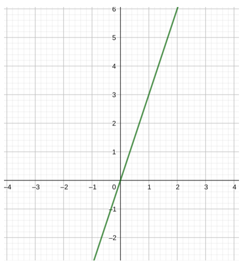
I sitatet, som er hentet fra Utdrag 2, forklarer Ella hvordan hun kommer fram til antall perler i neste figur. Her observerer vi at hun blir usikker med en gang hun skal gi sin forklaring, og i løpet av forklaringen gjør hun refleksjoner rundt sitt eget svar og konkluderer med at det må være feil. Gjennom kommunikasjon og samhandling med de andre elevene, utvikler Ella sin kunnskap om stigningstallet i denne oppgaven, og refleksjoner gjør at hun korrigerer svaret sitt (kap. 2.3.1).

Da elevene skal diskutere seg fram til en rekursiv og en eksplisitt formel for figurtallet er Ella ganske stille og observerer det de andre sier. Likevel er hun flink til å spørre de andre elevene om de kan forklare tankerekken på nytt, og hun gir beskjed hvis hun ikke forstår resonnementet deres. Hun ber Trym om å forklare hvorfor den eksplisitte formelen blir 5x+1 en gang til, og gir da uttrykk for at hun forstår.

I arbeidet med GeoGebra jobbet Ella sammen med Trym, og hun lot han jobbe mens hun observerte. Trym svarte fort og ivrig på spørsmål, mens han dro i gliderne for å sammenligne ulike funksjoner med ulikt stigningstall og konstantledd. Ella sier lite, men trekker seg ikke unna. Det er derfor vanskelig å si hvor det skjer en eventuell endring i Ella sin begrepsforståelse gjennom modelleringsøkten, ettersom det ikke fremgår tydelig i datamaterialet.

4.2.2.2 Ellas begrepsforståelse i ettertesten

I ettertesten var Ella mer selvsikker da hun forklarte funksjonsuttrykkene og grafen hun fikk utdelt. Tabell 10 viser hvordan Ella ordlegger seg i ettertesten.

Ella	Ettertest
	Dette er en lineær funksjon Grafen stiger. Den går gjennom origo.
f(x) = $\frac{1}{3}$x - 2	Dette er en lineær funksjon Stigningstallet er en brøk. Starter på -2.
f(x) = 1 - 2x	Dette er en lineær funksjon Negativ funksjon som går nedover?

Tabell 10: Ella sin ettertest

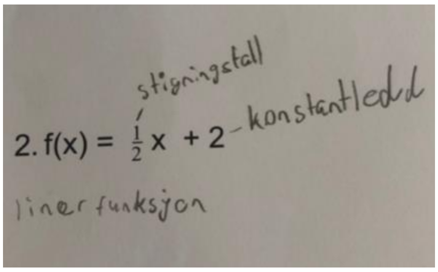
Av tabell 10 ser vi at Ella, etter arbeid med modelleringsøkten, ved å se på egenskapene til funksjonsuttrykkene identifiserer alle som lineære funksjoner. Hun identifiserer stigningstallet til funksjonene, og sier noe om hvor den "starter". Ella har gått fra å kunne si lite om de ulike uttrykkene i førtesten, til her, i større grad kunne sette ord på hva de forteller oss. Vi vet fortsatt lite om begrepsforståelsen til Ella, da det underveis i arbeidet har vært vanskelig å observere endringer, på bakgrunn av at hun er passiv og lite muntlig. Ettertesten viser oss derimot at Ella har tatt i bruk et mer matematisk språk, noe som kan henge sammen med at hun gjennom arbeidet har blitt presentert for formell begrepsdefinisjon av for eksempel stigningstall, og hennes personlige begrepsdefinisjoner kan ha endret seg. Dette kan tyde på at der Ella tidligere hadde et lite utviklet begrepsbilde for funksjonsuttrykk, har hun nå koblet det til en begrepsdefinisjon som gjør henne i stand til å si at denne type funksjoner er lineære.

I den siste oppgaven blir Ella forvirret over at koeffisientene a og b har byttet plass. Hun svarer at hun tror det er en negativ funksjon, men hun er usikker. Det kan tyde på at cellene for begrepsbildet og begrepsdefinisjonen er utvidet, men at de er fremdeles ikke ferdig utviklet (kap. 2.2.3).

4.2.3 Sines begrepsforståelse

4.2.3.1 Sines begrepsforståelse i førtesten

I møte med førtesten var Sine rask til å notere på oppgavearket, der hun ivrig identifiserte stigningstall og konstantledd til de ulike funksjonsuttrykkene.

Sine	Førtest	
f(x) = 3x	Dette er en funksjon Stigningstall 3 Går gjennom origo	
f(x) = $\frac{1}{2}$x + 2	Dette er en lineær funksjon Stigningstall $\frac{1}{2}$og konstantledd 2	
f(x) = -2x - 2	Funksjon som går nedover Stigningstall -2 og konstantledd -2	

Tabell 11: Sine sin førtest

Sine gjenkjente den første funksjonen som en graf med stigningstall, og videre identifiserte hun de neste uttrykkene som lineære funksjoner. Svarene hennes kan tyde på hun har et begrepsbilde for lineære funksjoner, men at hun i stor grad støtter seg på de formelle begrepsdefinisjonene av stigningstall og konstantledd. Det kan tyde på at hun har et mentalt bilde av det generelle uttrykket for lineære funksjoner, f(x) = *a*x + *b*. Hun er tydelig opptatt av at koeffisienten *a* og *b* representerer henholdsvis stigningstallet og konstantledd, men avgir ingen forklaring hvordan koeffisientene henger sammen med egenskapene til grafen.

Sine blir ikke forvirret av brøken som presenteres i oppgave to, men markerer stigningstallet og konstantleddet i hver funksjon (Se bilde i tabell 11). Hun kan derimot ikke beskrive grafens utseende mer enn å si "den går nedover". Svarene hun avgir i førtesten kan tyde på at hun ikke har et godt utviklet begrepsbilde, men at det er cellen for formell begrepsdefinisjon som dominerer (kap. 2.2.3).

4.2.3.2 Sines begrepsforståelse gjennom arbeidet med modelleringsoppgaven

I løpet av modelleringsøkten var Sine en av de mindre deltakende i diskusjoner hvor elevene selv hadde regien. Hun viste derimot at hun responderte godt på støtte fra lære.

Under den lærerstyrte samtaler viser hun iver og interesse, hun snakket ivrig, forklarte og diskuterte.

Helt fra starten av virker Sine til å være en elev som har øvd inn regler og prosedyrer. Hun bruker begrepene stigningstall, konstantledd og lineære funksjoner, og identifiserer disse, uten å kunne gi noe mer forklaring på hva dette er til resten av gruppen.

> *"(..) ja.. Jeg tenkte at det var en lineær funksjon for den har stigningstall og konstantledd. Og at den sank.. Fordi den er i minus" (Sine)*

Sine begrunner at funksjonsuttrykket må være en lineær funksjon på bakgrunn av at den inneholder stigningstall og konstantledd. Hun viser at hun ikke bare er i stand til å gjenkjenne uttrykket som en funksjon, men også klassifisere det som en lineær funksjon. Ved å gjenkjenne funksjonsuttrykket som en lineær funksjon viser Sine at hun har forståelse for algebraisk representasjonsform for funksjoner.

Sine bidrar lite i diskusjonene som foregår mellom elevene, men melder seg på når diskusjonen blir lærerstyrt. Etter at elevene har lagt inn punkter i GeoGebra, svarer Sine lærerne på spørsmål om å lage en modell for å se hvordan figuren utvikler seg. Av Utdrag 11 ser vi at hun både forklarer at man kan lage en graf og hvordan man kan lage en graf.

<u>Utdrag 11:</u>

> Sine: Ja, du kan vel legge inn en graf… Kan du ikke det?
>
> Lærer: Hvorfor velger du å legge inn en graf?
>
> Sine: For å se hvordan de stiger videre oppover. Da kan man også finne skjæringspunkt og se hvordan figuren endrer seg videre.
>
> Lærer: Hvordan valgte dere å sette inn grafen?
>
> Sine: Jeg valgte å sette inn grafen over punktene. Satte ei linje gjennom.

Sine viser at hun har kunnskap om hvordan en lineær graf vil stige, og at ved å lage selve grafen vil en kunne få et visuelt bilde av utviklingen. På denne måten forklarer hun videre hvordan en kan finne antall perler i en gitt figur, ved å bruke figurnummer og lese av på grafen. Ved å bruke punkter og graf i koordinatsystemet viser Sine at hun har forståelse for grafisk representasjonsform for funksjoner. I videre diskusjon om unøyaktigheter på grafen blir Sine igjen passiv. Det at Sine er tilbaketrukket i diskusjon med medelever gjør at det er vanskelig å få innblikk i om hun har forståelse for verbal representasjonsform for funksjoner.

Arbeidet med glidere i GeoGebra blir igjen til dels lærerstyrt, og Sine kobles på. Gjennom dette arbeidet viser hun at hun har kontroll på hvordan en lineær funksjon må se ut, og kan referere til den generelle formelen. Videre viser samtalen at hun også, ut fra grafen, kan lokalisere stigningstall og konstantledd, noe hun gjør ved å dra i gliderne slik at det stemmer overens med det funksjonsuttrykket de tidligere har funnet for veksten på figurtallene (Utdrag 7).

Sine mener selv at hun har hatt utbytte av å jobbe på denne måten, og at hun nå har forståelse for hva stigningstall og konstantledd er. Videre samtaler viser at hun fortsatt lokaliserer stigningstall og konstantledd, men at hun har en feiloppfatning av hva det egentlig betyr.

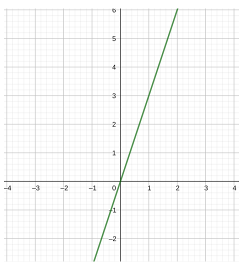
> *"Stigningstall er jo hvor mye x stige med, og konstantleddet er jo hvor en skjære på y-aksen." (Sine)*

I sitatet refererer Sine til stigningstall som hvor mye x stiger med, og ikke at det er hvor mye y stiger med per x. Konstantleddet lokaliserer hun fortsatt med hvor grafen skjærer på y-aksen. Det tyder på at Sine ikke har forståelse av sammenhengen mellom definisjonsmengde og verdimengde for funksjoner (kap. 2.2.2).

4.2.3.3 Sines begrepsforståelse i ettertesten

I ettertesten var Sine mer selvsikker da hun skulle fortelle om de ulike funksjonene. Hun uttrykte at økta hadde vært nyttig, og at hun nå syntes det var lettere å gi en forklaring på funksjonsuttrykkene. Hun begrunner dette med at samtaler, diskusjoner og samarbeidet i gruppen har bidratt til forståelse av hvordan de ulike funksjonene var "satt sammen".

Hun var fremdeles opptatt av å definere stigningstall og konstantleddet i funksjonen, og tabell 12 viser hvordan Sine ordlegger seg i ettertesten.

Sine	Ettertest
	Dette er en lineær funksjon. Det er en graf som stiger oppover og har da et positivt stigningstall. Den har kun stigningstall, ikke konstantledd. Den passerer i origo.
$f(x) = \frac{1}{3}x - 2$	Dette er en lineær funksjon. Stigningstallet er en en tredjedel. Skjærer på den negative siden, i minus 2.
f(x) = 1 - 2x	Dette er en lineære funksjoner. Negativt stigningstall. Den går nedover. Skjærer y-aksen i 1.

Tabell 12: Sine sin ettertest

Her ser vi at Sine, på alle oppgavene som ble gitt, i større grad gir utfyllende svar om hva stigningstall og konstantleddene representerer. Vi observerer at Sine har gått fra å ha et begrepsbilde som i hovedsak bestod av gjenkjenning, til i større grad kunne beskrive grafens egenskaper. Det kan tyde på at arbeidet med modelleringsoppgaven, der hun har erfart ulike lineære funksjoner, har utvidet begrepsbilde og sin personlige begrepsdefinisjon. Hun er i stand til å forklare mye om et funksjonsuttrykk. Hadde vi stoppet der, kunne vi sittet igjen med forståelsen av at hun har økt sin forståelse for begrepene. Ser vi derimot videre på intervjuet om funksjonsuttrykkene i utdrag 12, kommer det tydelig frem at selv om hun kan identifisere stigningstall og konstantledd, har hun liten forståelse for hvordan de henger sammen med hverandre og hva de faktisk har å si for en eventuell graf.

Utdrag 12:

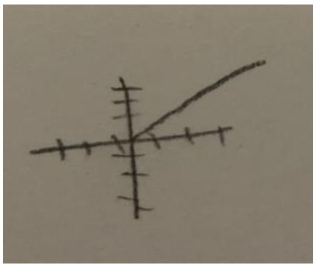
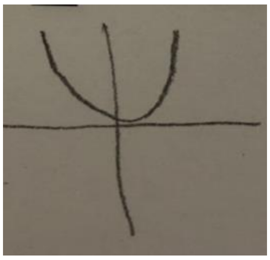
> Lærer: Hvilken av de to grafene i ettertesten har størst stigning? Det er en som er 1/3x og en som er 1 -2x.
>
> Sine: Jeg tror kanskje at hm….. (litt nøling)... Kanskje 1-2x, jeg er litt usikker egentlig. At den skjærer litt mer opp.
>
> Lærer: ok, hvis du tenker på den 1/3x, hvordan vil den se ut i forhold til den som har 5x, den som vi hadde i oppgaven?
>
> Sine: Den vil jo skjære mellom 1 og 2 på y-aksen, så den er jo, eh.. Skjærer litt lengre ned. Enn det den 5x gjør.

Vi observerer i utdrag 12 at Sine fortsatt er i stand til å gjenkjenne egenskaper til funksjoner som stigningstall og konstantledd. Derimot blir hun usikker når hun skal sammenligne to grafer med ulikt stigningstall, og er ikke i stand til å forklare hvordan koeffisienten *a* påvirker utseendet til grafen. Selv om hun tidligere har vist at hun mestrer sammenhengen mellom definisjon- og verdimengde, ved å kunne avsette et sett med punkter i koordinatsystemet, ser vi her at hun har problemer med å forklare denne sammenhengen verbalt. Det ser ut til at hun fortsatt ikke har utviklet et begrepsbilde for begrepene stigningstall og konstantledd. Det er fortsatt cellen for formell begrepsdefinisjon som er dominerende, og den hun benytter seg av i sitt resonnement (kap. 2.2.3).

4.2.4 Rikkes begrepsforståelse

4.2.4.1 Rikkes begrepsforståelse i førtesten

I møte med førtesten kunne Rikke kjenne igjen den første funksjonen som en graf som stiger og går gjennom origo, se tabell 13. Ved at hun skisserer hvordan hun tror grafen ser ut, skiller hun seg fra de andre elevene. I resten av førtesten er hun usikker og svarer lite.

Rikke	Førtest
f(x) = 3x	Identifiserer uttrykket som en funksjon Positiv siden den ikke har minustegn Føler den går gjennom origo Skisser: 
f(x) = $\frac{1}{2}$x + 2	Jeg lurer på om det er en u-formet funksjon Skisser: 
f(x) = -2x - 2	[svarer blankt her]

Tabell 13: Rikke sin førtest

Svarene til Rikke kan tyde på at hun har et vekket begrepsbilde om utseende til ulike funksjoner. Hun gjenkjenner den første funksjonen som en skrå linje, som starter i origo, slik som hun viser i skissen. Her har hun et begrepsbilde av at grafen starter i origo, og ikke går gjennom. Dette kan tyde på at hun har kobling mellom begrepsbilde og personlig begrepsdefinisjon, men at begrepsbildet er ufullstendig.

Brøken i den neste funksjonen gjør at hun kobler uttrykket til en "u-formet funksjon", en parabel. Dette viser hun ved å skissere hvordan hun ser for seg at grafen ser ut. Her kan det også tyde på at koblingen mellom det vekkede begrepsbildet og begrepsdefinisjonen ikke stemmer overens med den formelle begrepsdefinisjonen (kap. 2.2.3). I funksjonsuttrykket med negativt stigningstall svarer hun blankt, som kan bety at hun ikke har noe begrepsbilde som inneholder negativt stigningstall.

Førtesten viser også at Rikke ikke har noe kjennskap til begrepene stigningstall og konstantledd, da hun ikke nevner dette i noen av uttrykkene.

4.2.4.2 Rikkes begrepsforståelse gjennom modelleringsøkten

Helt fra starten ga Rikke uttrykk for at matematikk var vanskelig for henne, og at hun brukte lang tid på å forstå. Hun var veldig interessert i å fortelle hvordan hun hadde tenkt og ønsket tilbakemelding fra andre, noe som gjorde at hun ofte var først ute når elevene skulle snakke om oppgavene. Det viste seg at hun hadde mange gode tanker rundt oppgavene.

> *"(...) Jeg så at jeg kunne plusse på med 5 for hver, så da plusset jeg bare på 5 på antallet som var i figur 6. Egentlig setter man på ei perle på alle kantene for hver gang." (Rikke)*

Gjennom hele økta jobbet Rikke med begrepsbildet sitt, og prøvde å koble på formelle begrepsdefinisjoner. I diskusjonen som foregikk mellom henne og Trym i utdrag 5 misforstår Rikke forklaringen til Trym om det generelle uttrykket for figurtallene. Det kan tyde på at de har ulike begrepsbilder knyttet til uttrykket. Gjennom å diskutere med Trym fikk hun innblikk i hans begrepsbilde og hans personlige begrepsdefinisjon. En kan tolke det dithen at Rikke opplever en kognitiv konflikt. Ved å stille oppklarende spørsmål jobber hun med å utvikle en personlig begrepsdefinisjon som kan stemme overens med den formelle begrepsdefinisjonen (kap. 2.2.3)

Sitatet under er hentet fra kapittel 4.1.2 og omhandler arbeidet med overganger fra papir til GeoGebra. Sitatet viser at Rikke refererer til momenter fra diskusjonen med Trym, og gir en forklaring til uttrykket de kommer fram til.

> *"(...)Det er det samme uttrykket som Trym laget for å finne ut hvor mye den øker med. Figurnummeret og gange 5 og plusser på en." (Rikke)*

At Rikke her bruker det de har diskutert, og klarer å sammenligne grafen i GeoGebra med uttrykket Trym har laget tidligere, kan tyde på at det har skjedd noe i måten hun uttrykker sin forståelse av stigningstall og konstantledd.

Forståelsen kommer også til uttrykk når Rikke videre jobber med glidere, se Utdrag 13. Hun viser at hun kan få grafen til å flytte seg opp og ned langs y-aksen ved å endre på glideren som er laget for konstantledd, samtidig som hun redegjør for at fortegnet på konstantleddet avgjør om det befinner seg "over eller under" origo.

<u>Utdrag 13:</u>

> Lærer: kan dere få den til å gå gjennom origo? Hva skjer med uttrykket da?
>
> Rikke: den blir bare -5x. Der er b 0, og man trenge ikke plusse på 0 liksom.

Her viser Rikke at hun har dannet seg et begrepsbilde av at koeffisienten b forteller hvor grafen krysser y-aksen og skal legges til uttrykket. Hun gir ikke noen videre forklaring på konstantleddet, og det er derfor usikkert om hun har fått koblet det til en begrepsdefinisjon (kap. 2.2.3).

Videre i utdrag 13, viser Rikke at ved å endre på glideren som er laget for grafens vekst, vil grafen stige eller synke. Her gjør hun rede for at fortegnet til stigningstallet er avgjørende for om grafen stiger eller synker.

Utdrag 13 fortsetter:

Lærer: hva tror dere skjer hvis dere setter a på 0?

Rikke: da går den beint på y-aksen?

Lærer: ja, prøv. Hva skjer med funksjonsuttrykket?

Rikke: den er bare y = -5.

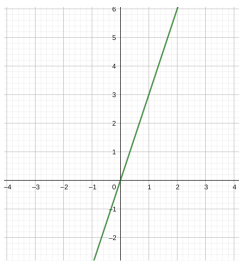
Lærer: hvorfor ingen x og hva skjer med stigningen?

Rikke: det er ingen stigning. Og hvis vi tar b og på 0 så blir alt 0. y = 0

Gliderne hjelper Rikke å oppnå forståelse av hva stigningstallet har å si for grafen. Noe hun uttrykker ved å kunne forklare hva som skjer med grafen dersom vi velger å sette stigningstallet til 0. Rikke har her utviklet et begrepsbilde for hvordan en graf vil se ut på bakgrunn av stigningstallet. Ved at hun ikke videre utdyper betydningen av koeffisienten a, er det vanskelig å si om hun har utviklet noe begrepsdefinisjon knyttet til stigningstall.

4.2.4.3 Rikkes begrepsforståelse i ettertesten

I ettertesten var Rikke positiv og ivrig etter å svare, se tabell 14. Hun forteller at hun hadde godt utbytte av modelleringsøkten, og at hun nå hadde fått bedre forståelse for hvordan funksjonsuttrykkene var bygd opp.

Rikke	Ettertest
	Denne grafen er positiv og stiger. Går gjennom origo.
$f(x) = \frac{1}{3}x - 2$	Den er positiv. En vanlig skrå funksjon. Ikke u-formet. Krysser ikke origo, men i -2. Den stiger med $\frac{1}{3}$.
f(x) = 1 - 2x	Den er negativ. Har minus og det betyr at den synker. Krysser y-aksen på -2.

Tabell 14: Rikke sin ettertest

Vi ser i ettertesten at hun nå virker mer selvsikker i svarene sine, og vi observerer endring i hvordan hun ordlegger seg. Hun kan nå si mye mer om hvert funksjonsuttrykk. I de to første uttrykkene sier hun hvor grafen krysser y-aksen, og hun blir ikke forvirret av brøken eller bildet av grafen. I den siste oppgaven blir hun heller ikke forvirret av det negative stigningstallet, men hun kobler dette til der grafen krysser y-aksen. Her kan det tyde på at hun har en konflikt mellom begrepsbilde og sin personlige begrepsdefinisjon. Ved å sammenligne ulike grafer med ulikt stigningstall og konstantledd, kan det tyde på at Rikke i større grad har skapt en kobling mellom begrepsbilde og en personlig begrepsdefinisjon av lineære funksjoner. Siden hun ikke bruker begreper som stigningstall og konstantledd i ettertesten, kan det tyde på at hun ikke har opparbeidet seg en formell begrepsdefinisjon.

I intervjuet i etterkant av ettertesten ble hun bedt om å sammenligne to funksjonsuttrykk. Utdrag 14 er hentet fra dette intervjuet:

Utdrag 14:

> Lærer: Så hvis du ser på disse to uttrykkene, y = 0,5x + 1 og y = 5x + 2.
>
> Rikke: Da krysse den ene på 1 og den andre på 2 på y-aksen
>
> Lærer: ja, og så husker du hva det tallet foran x, hva forteller det oss?
>
> Rikke: Hvor mye den steg med. Den ene stiger med 5 og den andre med 0,5.
>
> Lærer: Hvilke av de vil være brattest?
>
> Rikke: Fem. Fordi det er et større tall.
>
> Lærer: Hva skjer hvis det tallet blir negativt da?
>
> Rikke: Da synker den, den går motsatt vei.

Utdraget viser at Rikke kan sammenligne stigningstall og konstantledd i to ulike uttrykk, og kan forklare hva dette har å si for grafens utseende. Hun viser forståelse for at større stigningstall gir en brattere stigning. I sin forklaring benytter seg da av både algebraisk og grafisk representasjonsform for funksjoner gjennom et verbalt uttrykk (kap. 2.2.2). Det kan tyde på at hun nå har utviklet cellen for begrepsdefinisjon, men at det fremdeles er den personlige begrepsdefinisjonen som dominerer. Rikke bruker fremdeles ikke begrepene stigningstall og konstantledd når hun samtaler om funksjonene (kap. 2.2.3).

Ettersom Rikke kom inn i studien med et ganske tydelig begrepsbilde for hvordan lineære funksjoner så ut, kunne det se ut som hennes celle for begrepsbilde var dominerende. Rikke uttrykket seg lite i førtesten og det er usikkerhet rundt hvor velutviklet cellen for begrepsdefinisjon var. I ettertesten og i intervjuet, kan det tyde på at cellen for begrepsdefinisjonen er utvidet, men ikke ferdig utviklet (kap. 2.2.3).

4.3 Oppsummering av analyse

Vi skal avslutningsvis sammenstille våre funn før diskusjonen. Her vil vi generalisere funnene og se etter fellestrekk. Resultatene fra analysen er organisert i to tabeller for å få bedre oversikt. Tabell 15 gir en oversikt over funn fra den detaljerte analysen av før- og ettertesten av de fire elevene, med hovedvekt på begrepsbilde og begrepsdefinisjon. Her har vi delt begrepsdefinisjon inn i personlig og formell begrepsdefinisjon som beskrevet i det teoretiske rammeverket i kapittel 2.2.3. Oversikten viser vår analyse av hvilke celler for begrepsforståelse som er aktive og dominerer i før- og etter-testen.

	Analyse av aktive celler iførtesten			Analyse av aktive celler i ettertesten		
	Begrepsbilde	Personlig begrepsdefinisjon	Formell begrepsdefinisjon	Begrepsbilde	Personlig begrepsdefinisjon	Formell begrepsdefinisjon
Trym	x	x		x	x	x
Ella	x			x	x	
Sine	x		x	x	x	x
Rikke	x			x	x	

Tabell 15: Oversikt over analyse av aktive celler i før- og ettertest

Vår analyse indikerer at alle på en eller annen måte har endret begrepsbilde eller begrepsdefinisjon i løpet av arbeidet med modelleringsoppgaven. Dette kan tyde på at elevene har fått et bedre samspill mellom begrepsbildet og begrepsdefinisjon. Trym var den av elevene som startet økten med mye kunnskap om funksjoner. Han kunne redegjøre for sammenhenger og hadde korrekte begrepsbilder. Ettertesten viste at han ble flinkere til å bruke mer korrekte begrepsdefinisjoner i løpet av økta. Førtesten avdekket at Ella hadde et relativt lite utviklet begrepsbilde, og heller ingen begrepsdefinisjoner. Av tabell 15 ser vi i ettertesten, at Ella har begynt å fylle på cellene for begrepsbilde og personlig begrepsdefinisjon. Sine har et delvis utviklet begrepsbilde, men cellen for formell begrepsdefinisjon dominerer i førtesten, og hun har vanskelig for å løsrive seg fra disse definisjonene. Underveis i modelleringsøkten jobber hun med begrepsbildet, men vil likevel støtte seg på de formelle begrepsdefinisjonene. Ettertesten avdekker at hun til en viss grad har utviklet en mer personlig begrepsdefinisjon. Rikke viste i førtesten at hun hadde begrepsbilder på lineære funksjoner som ikke var korrekte. I løpet av arbeidet med modelleringsoppgaven begynte hun å fylle på cellene for begrepsbilde og begrepsdefinisjon. Hun brukte fremdeles ikke formelle begrep for stigningstall og konstantledd, men hadde et mer korrekt begrepsbilde og utviklet noen personlige begrepsdefinisjoner. Rikke har hatt en relativt stor endring i hvordan hun uttrykker sin forståelse for funksjoner, stigningstall og konstantledd fra førtest til ettertest, men hun benytter seg fortsatt ikke av formelle begrepsdefinisjoner.

Tabell 16 gir en oversikt over hvilke faktorer og underkategorier elevene mener hadde betydning for endring i deres begrepsforståelse.

	Samarbeidslæring				Digitale hjelpemidler		Arbeid med modelleringsoppgave
	Snakke høyt og forklare selv	Lære når andre forklarer	Diskusjon	Støtte fra lærer	Grafisk visualisering i GeoGebra	Sammenligne grafer	Overgang fra figurtall til tabell, punkter og graf
Trym		x				x	
Ella	x	x	x	x	x	x	
Sine	x	x		x	x	x	x
Rikke	x	x	x	x	x	x	x

Tabell 16: Oversikt over hvilke faktorer elevene mener har betydning for deres begrepsforståelse

Tabell 16 indikerer at arbeid med modelleringsoppgave, samarbeidslæring og digitale hjelpemidler har en positiv endring på hvordan elevene uttrykker sin begrepsforståelse. Under faktoren samarbeidslæring rapporterer elevene at de har størst utbytte av å lytte til andre som forklarer, og minst utbytte av diskusjon. Analyse av transkripsjon viser derimot at elevene som ikke rapporterer diskusjon som en viktig underkategori, likevel har utbytte av at det foregår en diskusjon i elevgruppa. Blant annet blir Trym mer formell i språket sitt gjennom diskusjon med medelever. Samtlige elever, bortsett fra Trym, rapporterer at å snakke høyt og forklare selv og støtte for lærer var nyttig. Det kan henge sammen med at Trym allerede hadde et godt utviklet begrepsbilde og personlige begrepsdefinisjoner innenfor temaet, og hadde derfor ikke behov for støtte fra lærer eller få respons på tankene sine.

Av tabell 16 kommer det fram at samtlige elever anser digitale hjelpemidler som en viktig faktor for endring i begrepsforståelsen. Visualisering av grafen i GeoGebra gjorde at elevene fikk en bedre kobling mellom den grafiske representasjonsformen for funksjonene. Ved å bruke glidere for å sammenligne grafer med ulikt stigningstall og konstantledd, kunne elevene se se sammenhengen mellom koeffisientene når de dro i gliderne. Elevene får bruke GeoGebra og gliderne som en digital skisse, og dette gjør dem mer bevisst på hvilken betydning koeffisientene i funksjonsuttrykket har for egenskapene til grafen.

Kun to elever rapporterer at selve modelleringsoppgaven var en positiv faktor for utvikling av begrepsforståelsen. Analysen av transkripsjon viser at Sine og Rikke hadde utbytte av å se hvordan figurens vekst kunne systematiseres i en tabell, og videre representere koordinater i et koordinatsystem. Koordinatene ble så utgangspunkt for en graf gjennom punktene, og på denne måten fikk de koblet sammen ulike representasjonsformer for funksjoner. De gjør her erfaringer på tvers av matematiske emneområder. To av elevene ser ikke på denne type oppgave som viktig for forståelsen, da de ikke legger så stor vekt på hvilke type oppgave de jobber med. Analysen viser likevel at arbeidet med modelleringsoppgaven har hatt påvirkning på hvordan disse elevene uttrykker sin forståelse med tanke på begrepsbilde og begrepsdefinisjon. Årsaken til dette kan være at faktorene samarbeidslæring og bruk av digitale hjelpemidler er en naturlig del av modelleringsøkten. Faktorer som vi har observert har positiv effekt på elevenes uttrykte begrepsforståelse for stigningstall og konstantledd i lineære funksjoner.

Oppsummert viser både tabell 15 og 16, samt vår analyse av datamaterialet, at Rikke er den eleven som i størst grad har hatt utbytte av arbeidet med modelleringsoppgaven. Noe som kan gi indikasjoner på at elever med lite forkunnskap, men samtidig er interesserte, spørrende og deltakende i samhandling med medelever med mer kunnskap, har størst utbytte av arbeidet. Analysen viser også at elever som sitter med et godt utviklet begrepsbilde og personlige begrepsdefinisjon, utvikler et mer formelt matematisk språk og formelle begrepsdefinisjoner, gjennom å måtte forklare og beskrive sine resonnement.

5.0 Refleksjoner og diskusjon

Det vi ønsket med denne studien var å undersøke hvordan arbeidet med en modelleringsoppgave i matematikk kan påvirke elevers uttrykk for forståelse av stigningstall og konstantledd i lineære funksjoner.

Studien viser at samtlige elever, i større eller mindre grad, har en endring i begrepsbilde og begrepsdefinisjon etter arbeidet med modelleringsoppgaven. De ulike faktorene som er presentert i studien, ser ut til å ha påvirkning på samspillet mellom elevenes celler for begrepsbilde og begrepsdefinisjon.

I kapittel 5.1 vil vi diskutere elevenes endring i den uttrykte begrepsforståelsen, på bakgrunn av før- og ettertest, og drøfte det opp mot teori presentert i rammeverket. Faktorene som har bidratt til endring i den uttrykte begrepsforståelsen for stigningstall og konstantledd i lineære funksjoner, blir i 5.2 drøftet opp mot det teoretiske rammeverket. I 5.3 vil vi legge fram noen kritiske betraktninger til studien. Kapittel 5.4 presenterer veien videre og muligheten for videre forskning, før vi runder av med noen avsluttende ord og tanker rundt resultatene i kapittel 5.5.

5.1 Endring i elevenes uttrykte begrepsforståelse

Ved å gi elevene en før- og ettertest, har vi fått innsyn i hvordan elevene uttrykte sin forståelse for stigningstall og konstantledd før og etter arbeid med modelleringsoppgaven. Ved bruk av ettertest har vi fått innsyn i om elevene klarte å overføre noe av kunnskapen fra modelleringsoppgaven til oppgavene i ettertesten. Gjennom analyse av elevenes bruk av begrepsbilde og begrepsdefinisjoner kan vi observere ulik grad av endring i hvordan de uttrykte sin begrepsforståelse. Resultatet fra analysen av hvilke celler som er aktive og dominerende i før- og ettertesten, er sammenfattet i tabell 15, kapittel 4.3.

Et interessant funn fra analysen er at ettertesten viser at Trym gjennom arbeidet med modelleringsøkten har formalisert språket sitt, noe som kommer til uttrykk ved bruk av mer formelle begrepsdefinisjoner. Trym har fra starten av et godt etablert begrepsbilde og personlig begrepsdefinisjon, og det er vanskelig å avdekke hva som ble innlært først, begrepsbilde eller begrepsdefinisjonen. Dersom han har fått begrepsbilde først har begrepsbildet utviklet seg og inneholder nå flere formelle begrepsdefinisjoner. Er det motsatt tilfelle, har begrepsdefinisjonene utviklet seg og inneholder flere begrepsbilder. Måten Trym uttrykker seg på tyder på at det vekkes et begrepsbilde i møte med det matematiske problemet han blir presentert for, og han benytter begrepsdefinisjoner for å begrunne svarene sine. Svarene Trym avgir kommer raskt og det virker som det går på "autopilot". Det kan tyde på at han ser løsningen, men ikke nødvendigvis gjør refleksjoner rundt hvorfor løsningen er som den er. Vinner (1991) ser på dette som en ubevisst handling, hvor Trym benytter seg av samspillet mellom cellene for begrepsbilde og begrepsdefinisjon. Et samspill som er mulig, da Trym allerede har godt utfylte celler for begrepsbilde og personlig begrepsdefinisjon.

Analysen av datamaterialet viser at Ella i liten grad bidrar i samhandling med medelever og lærer, og hun er lite verbal. Likevel viser analysen at i de få utsagnene hun kommer med er det cellen for begrepsbilde som dominerer. Observasjoner gjort i analysen tyder på at hun ikke har noen begrepsdefinisjoner knyttet til funksjonsbegrepet, og vi tolker det dithen at denne cellen ikke er utfylt. Vinner (1991) mener at samspillet mellom cellene kan ha ulikt utfall når elevene får begrepsbilde presentert før en begrepsdefinisjon blir innlært. Det første scenarioet som kan skje er at hvis Ella fortsetter å arbeide med lineære funksjoner, vil begrepsbildet hennes kunne endres og etterhvert inkludere begrepsdefinisjoner. Hvis hun derimot ikke arbeider mer med lineære funksjoner, kan begrepsbildet bli som det er, og begrepsdefinisjonen som er på vei til å bli innlært kan bli glemt. I følge Vinner (1991) vil hun senere i livet ubevisst kunne fremkalle begrepsbildet, fremfor begrepsdefinisjonen, i møte med funksjonsuttrykk.

Funn fra analysen viser derimot at det hos Sine er cellen for begrepsdefinisjonen som dominerer. Hun var den av elevene som allerede i førtesten var opptatt av å definere elementer i funksjonsuttrykkene å bruke de formelle begrepene stigningstall og konstantledd. Det kan se ut som om Sine har formelle begrepsdefinisjoner som ifølge Vinner (1991) er begrepsdefinisjoner som er gitt eleven, ikke noe hun har konstruert selv. Ettertesten antyder at det har skjedd en endring i hvordan Sine uttrykker sin forståelse, da svarene hennes er mer detaljerte og inneholder mer informasjon om de ulike funksjonsuttrykkene. Hun har derimot ikke like stor endring i måten hun uttrykker seg på som de andre elevene. Sine er i større grad enn de andre elevene opptatt av de formelle begrepsdefinisjonene, og en kan derfor stille seg spørsmålet om det kan være en faktor for at hun har mindre utbytte av modelleringsøkten enn de andre elevene. Ser vi til Vinner (1991) legger han vekt på at de elevene som får presentert en formell begrepsdefinisjon først, kun benytter seg av formell begrepsdefinisjon for å avgi et svar. Her benyttes ikke begrepsbildet, noe som kan være avgjørende for at hun klare å si noe om egenskapene til grafen til en funksjon. Spesielt når hun skal sammenligne to ulike funksjonsuttrykk og si noe om hvilke likheter og forskjeller de to uttrykkene har.

Rikke er den av elevene som har størst endring i hvordan hun uttrykker forståelse for stigningstall og konstantledd fra førtesten til ettertesten. Analysen av førtesten viser at hun kommer inn med et ukorrekt begrepsbilde. I ettertesten kan det tyde på at hun har både fylt på cellen for begrepsbilde og personlig begrepsdefinisjon, ved at hun nå kan identifisere egenskaper og forklare hvilke grafer som er "brattest" ut fra utseende og egenskaper. Analysen viser at samtale og diskusjon er faktorer som Rikke har veldig nytte av. Hun stiller spørsmål til de andre elevene om hvordan de har tenkt, og ved å spørre lærer om hun har tenkt rett. Hun korrigerer begrepsbildet og begrepsdefinisjonen sin underveis i hele modelleringsøkten. Dette samsvarer med studier gjort av Kaiser og Schwarz (2006), hvor elever selv har satt ord på at de har læringsutbytte av samarbeid i arbeid med modellering.

Funn gjort i analysen av digitale hjelpemidler som faktor, viser alle elevene har utbytte av å se grafer med ulike egenskaper. Spesielt observerer vi en utvikling av begrepsbilde hos Rikke, ved at hun får korrigert begrepsbildet sitt i forhold til lineære grafer ved å få tydeliggjort egenskapene. Funnet samsvarer med Skemp (1987) hvor bruk av eksempler og ikke-eksempler, for å tydeliggjøre ulike egenskaper, gjør det mer sannsynlig at egenskapene til de ulike funksjonene bli abstrahert. Sierpinska (1992) støtter opp om at ved å se tilfeller og ikke-tilfeller av et bestemt objekt, kan eleven bli i stand til å si noe om objektet og oppnå forståelse. Zibek og Conner (2006) har gjennom en studie av læreres matematiske modelleringsarbeid, gjort funn som tyder på at det kan oppstå nye koblinger i forståelsen av matematikk gjennom sosial interaksjon i modelleringsarbeid. Vår studie indikerer at Rikke gjennom diskusjon og sosial interaksjon med de andre elevene, da spesielt Trym, har gjort nye koblinger og opplever endring av forståelsen for egenskaper for funksjoner. Carpenter et.al (2003) støtter opp om dette, i form av at elever kan utvikle en dypere forståelse gjennom begrunnelse, resonnement av egne og andres forklaringer og begrunne svarene sine.

5.2 Faktorer som påvirker elevenes uttrykk for forståelse

I denne delen vil vi ta for oss faktorer som i vår studie har vist seg å være med på å endre elevenes begrepsbilde og begrepsdefinisjoner for stigningstall og konstantledd i lineære funksjoner. Vi vil se på funnene presentert i tabell 16 i kapittel 4.3, innenfor hver av de tre faktorene og diskutere disse i lys av det teoretiske rammeverket, samt ny teori der det er hensiktsmessig.

5.2.1 Samarbeidslæring

En indikasjon av studiet er at samarbeidslæring påvirker hvordan elevene uttrykker sin forståelse for stigningstall og konstantledd i lineære funksjoner. Den første faktoren, samarbeidslæring, inneholder fire underkategorier; snakke høyt og forklare selv, lære når andre forklarer, diskusjon og støtte fra lærer. Tabell 16 viser at alle de fire underkategoriene ser ut til å ha positiv effekt på elevenes uttrykk, noe vi både ser igjen i analyse av samtaler og hva elevene uttrykker i ettertest og intervju.

Resultater fra analysen antyder at samtlige elever mener at å snakke høyt og forklare selv har hatt positiv påvirkning av deres forståelse i modelleringsøkten. Elevene mener at det å få uttrykke hvordan de har tenkt er viktig for egen forståelse, da de kan få tilbakemelding fra andre elever på det de har tenkt og at de kan diskutere sammen dersom de har ulike løsningsforslag. Datamaterialet viser at muntlig aktivitet varierer fra elev til elev, selv om elevene i intervjuet forteller at de lærer mer av å fortelle hva de har tenkt og hvordan de har løst oppgavene. Samtlige elever rapporterer at å snakke høyt vil bidra til økt forståelse, da de får satt ord på det de tenker, og kan få en direkte tilbakemelding dersom det viser seg at de har tenkt feil. Forskning gjort av både Kaiser og Schwartz (2006) og Zibek & Conner (2006), støtter opp om at samtale og sosial interaksjon mellom elever er sentralt i elevers læring og endring av forståelsen. Gjennom samtaler hvor elevene får mulighet til å begrunne matematiske ideer og resonnementer, mener Carpenter et.al (2003), at elevene kan utvikle en dypere forståelse av matematikken.

Et interessant funn er at elevene ser viktigheten av å ha en elev i gruppen som kan være pådriver og bidragsyter til medelevenes forståelse. Datamaterialet viser at elevene liker å lytte til andre, og da spesielt til andre elever som er flinke til å forklare. Dette kan bidra til at elever som uttrykker seg muntlig blir tvunget til å tydeliggjøre hvordan de tenker, for at medelever skal forstå og gruppen skal oppnå en felles forståelse. Forskning gjort på nivådifferensiering og homogene grupper i matematikk viser at grupper med lavt nivå får færre intellektuelle utfordringer, og det blir mindre engasjement og utfordringer innad i gruppen (Oakes, 1993). Boaler (2009) har gjort forskning på samme tema og legger vekt på at homogene grupper med høyt nivå opplever lite samarbeid, stort press og for høyt tempo. Ifølge Jahr (2000) er det positivt at høyt-presterende og lavt-presterende elever får samarbeide i grupper. Ved at høyt-presterende elever må forklare oppgaver de vanligvis får til uten videre, blir de tvunget til å reflektere over spørsmål som de ikke har tenkt over før. I følge Carpenter et.al (2003) kan elevene gjennom presisering oppnå en dypere forståelse for matematikk, som kan være avgjørende for fremtidig suksess i faget. Funnet støttes av Hattie (2013), som legger vekt på medelevers rolle i elevenes læring.

I analysen kommer det fram at det kun var Rikke og Ella som ga uttrykk for at diskusjon var en viktig faktor for samarbeidslæring. Et funn som på mange måter er interessant, da det av førtesten kommer fram at begge har lite kunnskap om temaet de skulle jobbe med. Kunnskap som i følge Lobato et.al (2005) kan være viktig for å kunne bidra i diskusjoner som skal skape felles forståelse. Til tross for dette bidrar Rikke mye i diskusjonene, da hun er flink til å ordlegge seg og er interessert i å gjøre rede for sine resonnement for å kunne få tilbakemelding. Hun er også interessert medelevers resonnement for å lære. Ved å stille relevante spørsmål og gi av seg selv, kan Rikke være med på å øke læringsutbyttet og forståelsen for hele gruppen, ved å oppmuntre elever som sitter på kunnskap til å dele. I motsetning til Ella, som stort sett er observatør til diskusjonene, og i liten grad bidrar med noe selv. Det kan tyde på at hun synes diskusjon var nyttig for å få innblikk i andres tanker og ideer, men ikke klarer å ordlegge seg, eller ikke sitter på nødvendig kunnskap for å bidra i selve diskusjonen.

Artikkelen *Initiating and Eliciting in Teaching: A Reformulation of Telling*, av Labato et.al (2005) peker på læringseffekten av å snakke matematikk. Her poengterer de viktigheten av å ha elever som allerede sitter på kunnskap, eller er flinke til å ordlegge seg, for å dra samtalen videre. Ella bidrar ikke i samtalen, men har likevel utbytte av samarbeidet som foregår da hun lytter til hva de andre i gruppen diskuterer og forklarer. I en forskningsoversikt gjort av Andreassen (2010) vises det til studier gjort av Johnson og Johnson på 1980-tallet, hvor de målte effekten av samarbeidslæring i forhold til konkurranse og individuelt arbeid. Med utgangspunkt i data fra 300 enkeltstudier kom det tydelig frem at i 50% av studiene ble samarbeidslæring fremhevet som den mest positive bidragsyteren, framfor konkurranse og individuelt arbeid. Johnson og Johnson avdekket at positiv gjensidig avhengighet og individuell ansvarlighet mellom gruppemedlemmer måtte være til stede for å oppnå størst mulig positiv virkning av samarbeidslæring (Andreassen, 2010). Resultater fra vår studie samsvarer med forskning om samarbeidslæring gjort av Johnson og Johnson, og indikerer at selv om elever ikke kan bidra direkte med faglig kompetanse inn i gruppen, kan diskusjon og samarbeidslæring være nyttig.

Analysen av datamaterialet indikerer en positiv effekt av støtte fra lærer innenfor hovedfaktoren samarbeidslæring. Lobato et.al (2005) legger vekt på viktigheten av å lytte til elevenes innspill og tanker. På den måten kan læreren stille oppklarende spørsmål og løse opp i misforståelser. Vår studie viser at elevene rapporterer om viktigheten av at læreren stiller oppklarende spørsmål når elevgruppen møter problemer som de ikke klarer å løse i fellesskap. Blum og Ferri (2009) fokuserer på at læreren, i modelleringsprosessen, skal legge til rette for at elevene forstår konteksten og problemet i oppgaven, og organisere diskusjoner og tilbakemeldinger mellom elever. Læreren beskrives som uunnværlig, men det må være en balanse mellom å stille de rette spørsmålene, og mengden innblanding i elevenes diskusjoner. Det legges vekt på at elevene må få muligheten til å jobbe selvstendig med problemet på egenhånd. Det er da viktig at læreren, som Lobato et.al. (2005) også legger vekt på, er i stand til å møte elevenes innspill for å gi rom for gode matematiske diskusjoner. For å kunne møte elevenes innspill på en hensiktsmessig måte, er det viktig som elevene i studien rapporterer, at læreren innehar nødvendig kunnskap.

5.2.2 Bruk av digitale hjelpemidler

Resultater fra studien, presentert i tabell 16, viser at bruk av digitale hjelpemidler kan ha en positiv påvirkning på hvordan elevene uttrykker sin begrepsforståelse for stigningstall og konstantledd. Faktoren inneholder to underkategorier: grafisk visualisering og sammenligne grafer med ulikt stigningstall og konstantledd. I intervjuene rapportere elevene at ved å bruke digitale hjelpemidler får de knyttet sammen funksjonsuttrykk til grafens egenskaper og utseende. De to underkategoriene ser derfor ut til å ha positiv påvirkning på elevenes begrepsbilde, og hvordan de uttrykker sin forståelse.

Grafisk visualisering i GeoGebra trekkes av elevene frem som en positiv bidragsyter, på bakgrunn av at det gjør det enklere for elevene å tegne grafene mer nøyaktig og raskere enn på papir. Grafisk visualisering ser derfor ut til å være en viktig faktor for endring i elevenes uttrykk for forståelse av stigningstall og konstantledd. Samtlige av elevene i studien uttrykte at å kunne legge inn koordinater og graf i GeoGebra, gjorde det lettere å forstå sammenhengen mellom figurtall og funksjoner. Spesielt uttrykker de det positive med at GeoGebra gir et mer nøyaktig bilde enn å tegne grafen for hånd på papir. Rikke fremhever at det er positivt at man kan zoome inn for å finne eventuelle unøyaktigheter i grafen og koordinatene. Sine påpeker at de er lettere å oppdage eventuelle feil i koordinater og graf, da funksjonsuttrykket kommer opp i algebrafeltet. Analysen viser også at det er enklere for elevene å gjøre endringer digitalt enn på papir. Noe vi ser når elevene får sammenligne grafer med ulikt stigningstall og konstantledd ved å jobbe med glidere i GeoGebra.

Bruken av glidere for visualisering, presenteres av Hall og Lingefjärd (2016) som et godt verktøy og støtte i arbeidet med begrepsforståelse. Doorman og Gravemeijer (2009) viser til at elever kan ha problemer med å tolke grafiske situasjoner. Bruken av glidere kan være et godt verktøy for å visualisere hvordan grafen vil endre seg når man drar i en glider for stigningstall og en for konstantledd. Analysen viser hvordan elevene bruker glidere for å reflektere over hvordan funksjonsuttrykket endrer seg når stigningstallet og konstantleddet endrer seg fra positivt til negativt, og hva som skjer når en av gliderne settes til null. Ser vi på forskning gjort av Zulnaidi og Zakaria (2012), finner de at elever som har jobbet med GeoGebra har signifikant bedre begrepskunnskap og prosedyremessig kunnskap om funksjoner, enn elever som ikke bruker GeoGebra. Tall (1989) og Ubuz (2007) støtter også opp om deler av dette, da de viser til at visualisering kan gi elevene støtte i utviklingen av begrepsbilde. Noe som stemmer ut i fra vårt datagrunnlag, der vi observerer at det er de elevene som faktisk drar i gliderne, som sitter igjen med størst utbytte av den delen av økta.

Videre legger Ubuz (2007) vekt på faren ved bruk av digitale hjelpemidler. Bruken kan føre til at det blir en mekanisk øvelse, der eleven kun mestrer å legge inn et funksjonsuttrykk for å få fram en graf, uten å forstå hvordan graf og funksjonsuttrykk henger sammen. Vår studie viser at i underkategorien samarbeidslæring, at man kan unngå denne mekaniske øvelsen, ved å gi rom for samtale og refleksjon for å diskutere endringer i funksjonsuttrykk og grafens egenskaper.

5.2.3. Arbeid med modelleringsoppgave

Resultatene av studien, presentert i tabell 16 i kapittel 4.3, indikerer at arbeid med modelleringsoppgave kan bidra til endring i hvordan elevene uttrykker sin begrepsforståelse for stigningstall og konstantledd.

Et av våre funn er at to elever rapporterer at arbeidet med modelleringsoppgaven gjorde at de forsto mer av lineære og proporsjonale funksjoner. Resultater fra før- og ettertest av de fire elevene viser likevel at alle har hatt en endring i hvordan de uttrykker forståelsen for funksjoner etter arbeidet med modelleringsoppgaven. Skott et.al (2008) presenterer Realistic Mathematics Education (RME) som en måte å jobbe på hvor elevene arbeider med oppgaver som fokuserer på fremvoksende modeller, og læring over tid der modellen er under utvikling. Oppgaven vår inneholder elementer fra to separate emner i matematikken, figurtall og funksjonslære. Oppgaven skal også bidra til at elevene får jobbe med matematiske uformelle og realistiske aktiviteter, slik at de kan koble matematikken til virkelighet. Elevene skal selv få utforske og skape forståelse ut ifra egen erfaring (Skott et.al, 2008). Datamaterialet viser at spesielt Sine og Rikke uttrykker en endring i begrepsforståelsen, ved at de uttrykker forståelse av at funksjonsuttrykket de får i GeoGebra representerer hvordan figuren vokser.

På en annen side kan det stilles spørsmål om denne forståelsen vil vedvare over tid. Ettersom teorien fokuserer på at arbeid med RME bør gå over lengre tid og oppgaven skal bevege seg oppover i nivå, fra å være konkret med tegning og tabeller, til generalisering (Gravemeijer og Stephan, 2002). I denne studien hadde vi kun to skoletimer tilgjengelig, og det kan da diskuteres om vi har gitt elevene nok tid til å reflektere rundt sammenhengen mellom figurtall og funksjoner. Hadde vi gjennomført dette i egen klasse, hadde prosessen med denne type undervisningsopplegg foregått over flere skoletimer. Ved å jobbe med opplegget over tid vil alle elevene i større grad få mulighet til å opparbeide en forståelse for hvordan figuren vokser og hvordan man lager rekursiv formel, for å så jobbe med en eksplisitt formel. Deretter vil man fokusere på å bruke denne formelen inn i GeoGebra og diskutere og reflektere rundt stigningstall og konstantledd (Gravemeijer og Stephan, 2002).

5.3 Kritiske betraktninger

I dette kapittelet vil ta for oss noen kritiske betraktninger rundt studiets funn, innsamlingsmetoder og analysevalg.

Man kan stille seg kritisk til noen funn i studien om hvordan elever uttrykker sin forståelse for stigningstall og konstantledd. Forskningen vår foregår som et undervisningseksperiment (Cobb, 2001), hvor vi som forskere har innhentet data gjennom en undervisningsøkt med informanter rekruttert fra en annen skole. Vi gjennomførte både før- og ettertest, samt modelleringsøkt i samme økt, elevene hadde derfor kunnskapen friskt i minne. Selv om modellering i følge Skott et.al (2008) skal arbeides med over tid, viser vårt datamateriale at elevene i undersøkelsen har hatt en endring i hvordan de uttrykker sin forståelse for lineære funksjoner. Det kan derimot diskuteres om resultatet ville vedvart dersom vi hadde kommet tilbake på et senere tidspunkt for gjennomføring av ettertesten. I tillegg har vi konsentrert oss om fire elevers uttrykte forståelse, og studiens troverdighet ville økt dersom datainnsamlingen ble gjort med flere informanter (Guba, 1981).

Våre vurderinger i ettertid, er at førtesten kunne vært utført i forbindelse med individuelle intervju, før en eventuell diskusjon mellom elevene. Det er en mulighet for at gjennomgang av førtesten som rekkeframlegg i gruppen, kan ha påvirket elevenes verbale uttrykk. På den måten øker usikkerheten rundt om vi har fått fullstendig innblikk i hva elevene kan om de ulike funksjonene. Det kan derimot diskuteres om elevene har hatt læringsutbytte av rekkeframlegget.

For i større grad kunne se på endringer i uttrykt forståelse for stigningstall og konstantledd, kunne ettertesten vært utarbeidet annerledes. Ettersom testen i stor grad ligner på førtesten, er det mulig at eleven gjenskaper svar de har kommet med tidligere. For å unngå dette burde ettertesten i større grad inneholdt funksjonsuttrykk som ikke følger den generelle formelen for lineære funksjoner. I tillegg burde både førtest og ettertest inneholdt elementer av ikke-funksjoner eller andre typer funksjoner. Dette for å kunne kontrollere at elevene faktisk har endret sitt uttrykk for forståelse, og ikke bare regner med at dette er lineære funksjoner på bakgrunn av modelleringsøkten.

Med et kritisk blikk på modelleringsøkten kan vi stille oss spørsmål om økta kan sees på som "teaching to the test", i form av at den handlet om det de skulle gjøre i ettertesten (Popham, 2001). Lærertettheten kan ha vært utslagsgivende for læringsutbytte i gruppen. Selv om vi i stor grad holdt oss i bakgrunnen av arbeidet som foregikk, var vi mer tilgjengelig for hjelp og støtte enn en lærer har mulighet til i et vanlig klasserom.

Et annet kritisk blikk på funnene vi har gjort er knyttet til intervjuene. Intervjuene som ble gjort i forbindelse med ettertesten kunne inneholdt flere oppfølgingsspørsmål tilknyttet representasjonsformene til funksjoner. Spesielt med fokus på definisjonsmengde og verdimengde, og at elevene hadde fått muligheten til å uttrykke sin forståelse verbalt (Markovits et.al, 1996). Hadde slike endringer blitt gjort, ville vi fått et bedre innblikk i elevenes uttrykte forståelse av sammenhengen mellom funksjonsuttrykk og selve grafen, samt hvilken betydning stigningstall og konstantledd har for denne sammenhengen.

5.4 Veien videre og mulighet for videre forskning

Som lærerspesialister i matematikk blir vårt fokus videre å trekke lærdommen fra studiet inn i arbeidet med elevene og i arbeidet med å veilede kolleger i implementeringen av fagfornyelsen. Vi ønsker å bruke erfaringer fra oppgaven videre, til å skape sammenheng for elever mellom ulike fagområder i matematikk. Målet er å gjøre matematikk virkelighetsnær og anvendelig for elevene, som er et av fokusområdene innenfor modellering.

Fagfornyelsen, som trer i kraft høsten 2020, introduserer landets grunnskolelærere for et nytt begrep i matematikken, modellering. I tillegg løfter den nye læreplanen fram termen dybdelæring, som ifølge Fagfornyelsen er: *"å gradvis utvikle kunnskap og varig forståelser av begreper, metoder og sammenhenger i fag og mellom fagområder"* (Kunnskapsdepartementet, 2019). Under innhenting av relevant forskningslitteratur fant vi lite forskning på bruken av modellering for å se sammenhenger mellom ulike matematiske tema. På bakgrunn av nye fokusområder i Fagfornyelsen mener vi derfor det er potensiale for mer, spennende forskning. Det ville derfor ha vært interessant å gjennomføre en liknende studie med flere og større elevgrupper, for å i større grad kunne sagt noe om eventuelt utbytte av undervisning med modellering. Forskningen kunne også ha tatt i betraktning hvordan lærere underviser, og forskjellen i forståelsen hos elever som får dannet seg et begrepsbilde før de presenteres for begrepsdefinisjonen, eller motsatt.

5.5 Avslutning

Flere år som lærere på ungdomsskolen har gjort oss oppmerksomme på at arbeidet med tema rundt funksjoner viser seg å være utfordrende, ikke bare for elever, men også for lærere som skal undervise temaet. Undersøkelser som TIMSS 2015 (Bergem et.al, 2016) viser at elever i norsk skole har fremgang i alle emner i matematikk, foruten algebra. Som definert tidligere er algebra en del av området funksjoner. For at elevene skal ha god forståelse for funksjoner, påpeker Markovits et.al (1996) at elevene må kunne se underbegreper og ulike representasjonsformer i en større sammenheng. For å skape en sammenheng mellom funksjonsuttrykk, graf og andre emneområder, ønsket vi å finne ut om en alternativ måte å jobbe på kunne ha noe å si for elevenes begrepsforståelse. Ettersom det er vanskelig å måle forståelsen, valgte vi å konsentrere oss om hvordan elevene uttrykker sin forståelse. Problemstillingen vår ble da;

"Hvordan kan arbeid med en modelleringsoppgave i matematikk påvirke elevers uttrykk for forståelse av stigningstall og konstantledd i lineære funksjoner?"

Studien indikerer at arbeid med modelleringsoppgaver kan være med på å endre hvordan elevene uttrykker sin begrepsforståelse for stigningstall og konstantledd i lineære funksjoner. Samarbeidslæring i form av samtale og diskusjon, og arbeid med digitale hjelpemidler er viktige faktorer som studien indikerer bør ligge til grunn for at elevene skal få størst mulig utbytte av modelleringsarbeidet. Uavhengig av hvilke endringer elevene har gjort i sitt uttrykk for forståelse av stigningstall og konstantledd, har elevene gjort seg flere erfaringer med begrepene.

Resultater av studien gir også et bilde av at å jobbe med modellering kan være en fin måte å introdusere temaet funksjoner. Gjennom arbeidet får elevene mulighet til å se sammenhengen mellom representasjonsformene på en helt annen måte enn i det som betegnes som vanlig klasseromsundervisning (Alrø & Skovsmose, 2002).
I arbeidet med studien har vi som lærere erfart at elevenes begrepsbilde og begrepsdefinisjoner er viktig for hvordan de gir uttrykk for sin forståelse. Tall og Vinner (1981) viser til at lærere ofte velger å presentere elevene for formelle definisjoner i starten av nye tema, noe vi kjenner oss igjen i. Videre er det ønskelig at elevene skal jobbe med oppgaver innenfor temaet for å øke sin forståelse. I følge Tall og Vinner (1981) kan dette føre til en begrenset begrepsforståelse, fordi begrepsdefinisjonene ikke blir fult utviklet. Elevene kan på den måten ende opp med en instrumentell forståelse, som i hovedsak omhandler hvilke fremgangsmåter de skal bruke for å løse problemet, kontra forståelsen av problemet. Vi har fått innblikk i hvilke fordeler det kan ha å jobbe med å utvikle elevers begrepsbilde og personlige begrepsdefinisjoner i begynnelsen av et tema, fremfor å presentere den formelle begrepsdefinisjonen. Læreren må ta aktiv del i å utvikle elevenes begrepsbilde og personlige definisjoner gjennom arbeidsmetoder og diskusjoner. Dette er et arbeid hvor lærers veiledning vil spille en stor rolle, for at elever ikke skal ende opp med ukorrekte begrepsbilder og definisjoner. Avslutningsvis mener vi

at bruk av modelleringsoppgaver, knyttet sammen med faktorene vi har presentert i denne studien, kan være et steg i riktig retning i forhold til Fagfornyelsen 2020.

6.0 Litteraturliste

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection. *Critique*, *29*.

Alseth, B., Stedøy-Johansen,I. M., Tangen M. & Tofteberg, N. G. (2013) Maximum 8. *Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Gyldendal.

Andreassen, R. (2010). Samarbeidslæring–en god måte å utvikle elevenes leseforståelse på? En forskningsoversikt. *Acta Didactica Norge*, *4*(1), Art-6.

Anthony, G., & Walshaw, M. (2009). Characteristics of effective teaching of mathematics: A view from the West. *Journal of Mathematics Education*, *2*(2), 147-164. Hentet fra: https://www.creatingrounds.com/uploads/9/6/2/4/96240662/characteristics_of_effective_teaching_of_mathemati.pdf

Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational studies in mathematics, 33*, 301-317.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 465-472). Prague,, Czech Republic: Charles University.

Bergem, O. K., Kaarstein, H., & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag-Resultater og analyser fra TIMSS 2015*. Universitetsforlaget.

Berget, I. K. L., & Bolstad, O. H. (2019). Perspektiv på matematisk modellering i Kunnskapsløftet og Fagfornyinga. *Nordisk tidsskrift for utdanning og praksis*, *13*(1), 83-97.

Bishop, J. (2000). Linear Geometric Number Patterns: Middle School Students' Strategies. Mathematics Education Research Journal, 12 (2), s. 107-126. Hentet fra: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.583.7074&rep=rep1&type=pdf

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability (formerly: Journal of Personnel Evaluation in Education), 21*(1), 5–31. Hentet fra https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5

Blomhøj, M. (1993). Modellerings betydning for tilegnelsen af matematiske begreber. Nordisk matematikdidaktikk, 1(1), 18-38.

Blomhøj, M. (2016). *Fagdidaktik i matematik*. Frydenlund Academic.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T. H. (2010). Mathematical modelling as goal in mathematics education-developing of modelling competency through project work First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education (Vol. 41, pp. 555-567). United States of America: Information Age Publishing Incorporated & The Montana Council of Theachers of Mathematics.

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of mathematical modelling and application*, *1*(1), 45-58. Hentet fra: https://bu.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/download/1620/1087

Boaler, J. (2009). The Elephant in the classroom - Helping children learn and love maths. London: Souvenir press

Brekke, M., & Tiller, T. (2013). Læreren som forsker: innføring i forskningsarbeid i skolen: Universitetsforlaget

Burr, V. (2015). Social Constructionism (3.utgave). London: Routledge

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann, 361 Hanover Street, Portsmouth

Chapin, S. H., & O'Connor, C. (2007). Academically productive talk: Supporting students' learning in mathematics. *The learning of mathematics*, *69*, 113-128.

Cobb, P. (2001). Supporting the improvement of learning and teaching in social and institutional context. In S. Carver & D. Klahr (Eds.), Cognition and Instruction: Twenty-Five Years of Progress (pp. 455-478). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in Educational Research. Educational Researcher, 32(1), 9-13.

Delfabbro, P., Winefield, T., Trainor, S., Dollard, M., Anderson, S., Metzer, J. & Hammarstrom, A. (2010). Peer and teacher bullying/victimization of South Australian secondary school students: Prevalence and psychological profiles. British Journal of Educational Psychology, 76, 71–90.

Doorman, M., & Gravemeijer, K. (2009). *Emergent modeling: Discrete graphs to support understanding of change and velocity.* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 41, 199-211.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. Journal for Research in Mathematics Education, 13(5), 360–380.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1987). On the deep structure of functions. *Proceeding of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* (s.190 - 196). Montréal: Université de Québec à Montréal

Egeberg, G., Gudmundsdottir, G. B., Hatlevik, O. E., Ottestad, G., Skaug, J. H., & Tømte, K. (2012). Monitor 2011. Skolens digitale tilstand. *Senter for IKT i utdanningen. Retrieved April*, *19*, 2012.

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the Variable through Pattern Exploration. *Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

Fraivillig, J. L., Murphy, L. A., & Fuson, K. C. (1999). Advancing children's mathematical thinking in everyday mathematics classrooms. *Journal for research in mathematics education*, 148-170.

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. Mathematical Thinking and Learning, 1(2), 155–77.

Gravemeijer, K., & Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 145-169). Springer, Dordrecht.

Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Ectj*, *29*(2), 75.

Hall, J., & Lingefjärd, T. (2016). *Mathematical Modeling: applications with GeoGebra*. John Wiley & Sons.

Hattie, J. 2013. Synlig læring for lærere: maksimal effekt på læring. 1. utg. [Oslo]: Cappelen Damm akademisk.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics, 65-97.

Hinna, K., Rinvold. R., & Gustavsen, T. (2012). QED 1-7: Matematikk for grunnskolelærerutdanningen, Bind 1. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Hollenberg, C. K. (1970). Functions of Visual Imagery in the Learning and Concept Formation of Children. *Child Development, 41*(4), 1003-1015. doi:10.2307/1127328

Hughes, J.N. & Chen, Q. (2011). Reciprocal effects of student-teacher and student-peer relatedness: Effects on academic self efficacy. Journal of Applied Developmental Psychology, 32, 278–287

Imsen, G. 2014. *Elevens verden: innføring i pedagogisk psykologi.* 5. utg. Oslo: Universitetsforlaget

Jacobsen, D. I. (2005). *Hvordan gjennomføre undersøkelser?: innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (Vol. 2). Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Jahr, E. (2000). Matematikk på Mellomtrinnet. I G. Gjone & T. Onstad (Ed.), Mathema 2000 (s. 81-95). Oslo: NKS-forlaget.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbaum

Johannessen, A., Tufte, P. A., & Christoffersen, L. (2016). Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode (5. ed.). Oslo: Abstrakt forlag

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Holubec, E. J. (1994). *The nuts and bolts of cooperative learning*. Interaction Book Co.

Johnson, D. W., Holubec, E. J., & Johnson, R. T. (2001). *" Som hånd i hanske": en praktisk innføring i samarbeidslæring*. Pedagogisk psykologisk forl..

Johnson, D. W., Johnson, R. T., Aakervik, A. O. & Haugaløken O. K. (2003). Samarbeid i skolen: pedagogisk utvikling - samspill mellom mennesker. 3. utg. Namsos: Pedagogisk psykologisk forlag.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), 196-208.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (Vol. 2101). National research council (Ed.). Washington, DC: National Academy Press.

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Overordnet del - dybdelæring.* Hentet fra: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/dybdelaring/

Lobato, J., Clarke, D., & Ellis, A. B. (2005). Initiating and eliciting in teaching: A reformulation of telling. *Journal for research in mathematics education*, 101-136.

Lyngsnes, K. og Rismark, M. (2014). Didaktisk arbeid, 3. utgave. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag

Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the learning of mathematics*, *6*(2), 18-28.

Murphy, P.K., & Alexander, P.A. (2006). U*nderstanding how students learn: A guide for instructional leaders.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

NESH (2016): *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi* (4. utg.). Oslo: Den nasjonale forskningsetiske komite for samfunnsvitenskap og humaniora.

Nordahl, T. (2010). *Eleven som aktør: Fokus på elevens læring og handlinger i skolen.* Oslo: Universitetsforlaget AS.

Nosrati, M., & Wæge, K. (2015). Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk. *Hentet*, *10*, 2017.

Oakes, J. (1993). Ability grouping, tracking and within-school segergation in the San Jose Unified School District. Los Angeles: University of California.

Ommedal, Eili (2017). *Elevers begrepsforsåelse i modeleringskontekst*. (Mastergradsavhandling). Universitetet i Bergen, Bergen. Hentet fra: http://bora.uib.no/bitstream/handle/1956/16374/Masterinnlevering-Eili-Ommedal.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Plomp, T. & Nieveen, N. (2007). An introduction to Educational Design Research. Paper presented at the conference on educational design research, East China Normal University, Shanghai

Popham, W. J. (2001). Teaching to the Test?. *Educational leadership*, *58*(6), 16-21. Hentet fra: http://olms.cte.jhu.edu/olms2/data/ck/file/TeachingtotheTest-Popham.pdf

Postholm, M.B (2010). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2.utg.). Oslo: Universitetsforlaget

Robson C. & McCartan K. (2015). *Real world research: A resource for social scientists and practitioner-researchers*(4.utg). Oxford: Blackwell.

Roos, H., & Trygg, L. (2018). Begrepp och representationer. Hentet fra http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1251824/FULLTEXT01.pdf

Rørvik, H. (1994): Læring og utvikling - det pedagogiske oppdraget. Oslo: Universitetsforlaget

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, *334370*. Hentet fra: http://howtosolveit.pbworks.com/f/Schoenfeld_1992%20Learning%20to%20Think%20Mathematically.pdf

Schoenfeld, A. H., & Floden, R. E. (2014). The Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project. *The TRU math scoring rubic*.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Psychology Press.

Skott, J., Hansen, H. C., & Jess, K. (2008). Delta: fagdidaktik. Denmark: Forlaget Samfundslitteratur.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, 25, 23-58.

Silverman, D. (2000). Doing Qualitative Research. A practical Handbook. London: Sage

Sinclair, N., & Schiralli, M. (2003). A constructive response toWhere mathematics comes from'. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(1), 79-91.

Sjøberg, S., (2016). TIMSS. Hentet den 20.11.2017 fra Store norsk leksikon fra: https://snl.no/TIMSS

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: et sosiokulturelt perspektiv*. Cappelen akademisk.

Tall, D. (1989). Concept images, generic organizers, computers, and curriculum change. For the learning of mathematics, 9(3), 37-42.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. An International Journal, 12, 151-169.

Tjora, A. (2017). Kvalitative forskningsmetoder i praksis. (3. ed.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(5), 609-637.

Uio.no (2015). Om TIMSS Advanced. Institutt for lærerutdanning og skoleforskning. Det utdanningsvitenskaplige fakultetet. Hentet den 20.11.2017 fra: http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/timss-advanced/om-timssadvanced/

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk 1 - 10 (MAT01-05)*. Hentet fra: https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Vedeler, L. (2000). Observasjonsforskning i pedagogiske fag: En innføring i bruk av metoder. Oslo: Gyldendal akademisk.

Vestøl, J. M., Lund, A., & Hauge, T. E. (2007). Undervisning i endring: IKT, aktivitet, design. Oslo: Abstrakt forl.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. I D. Tall (Red.), Advanced Mathematical Thinking (s. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Hentet fra: https://www.researchgate.net/profile/Shlomo_Vinner/publication/227282219_The_Role_of_Definitions_in_the_Teaching_and_Learning_of_Mathematics/links/5590f4c808ae47a3490eef2c.pdf

Vinner, S. (2014). Concept development in mathematics education. I S. Lerman (red.), Encyclopedia of Mathematics Education (s. 91-96). Nederland: Springer.

Wittmann, E. C. (1998). Mathematics education as a "design science". In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics Education as a research Domain: A search for Identity. (pp. 87-103). Great Britain: Kluwer Academic Publishers

Zbiek, R. M., & Conner, A. (2006). Beyond Motivation: Exploring Mathematical Modelingas A Context for Deepening Students' Understandings of Curricular Mathematics. An International Journal, 63(1), 89-112. doi:10.1007/s10649-005-9002-4

Zulnaidi, H., & Zakaria, E. (2012). The effect of using GeoGebra on conceptual and procedural knowledge of high school mathematics students. *Asian Social Science*, *8*(11), 102.

7.0 Vedlegg

7.1 Førtest

Oppvarmingsoppgaver
Hva er dette? Skriv ned/forklar.

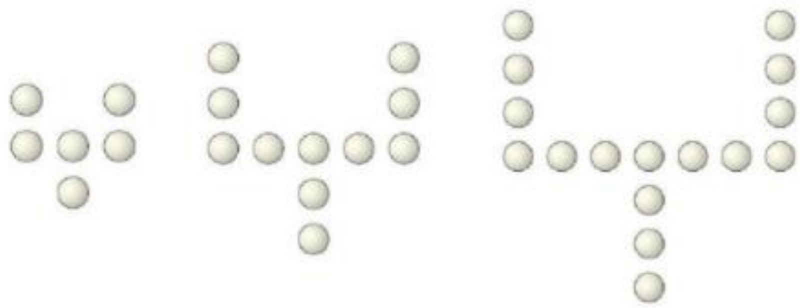
1. $f(x) = 3x$

2. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

3. $f(x) = -2x - 2$

7.2 Modelleringsoppgave

FIGURTALL



a. Følg samme mønster og tegn figuren f_4

b. Hvor mange perler vil det være i figuren f_5 og i figuren f_6? Lag en tabell over figurnummer og antall perler.

c. Hvordan kan dere finne f_7 hvis dere vet f_6? Ser dere et system? Forklar.

d. Hvordan kan dere finne f_{20} hvis dere ikke vet f_{19}? Kan dere lage et uttrykk for f_n?

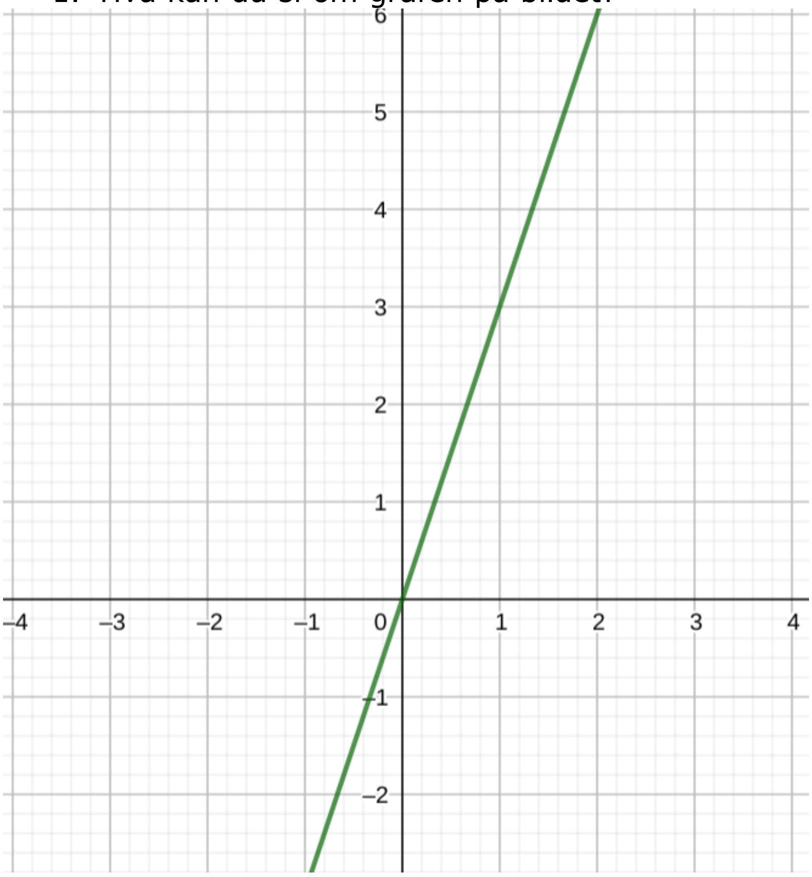
e. Sett verdiene fra tabellen inn i GeoGebra. Kan dere lage en modell som viser utviklingen av figuren uten å plotte inn alle punktene videre.

f. Kan dere bruke modellen til å finne ut hvor mange perler det er i figur f_{13}?

7.3 Ettertest

Hva kan du si om disse funksjonene?

1. Hva kan du si om grafen på bildet?



2. $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$

1. $f(x) = 1 - 2x$

7.4 Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet "Bruk av modelleringsoppgaver i matematikk"

Et masterprosjekt i matematikkdidaktikk

Dette er et spørsmål til foresatte til elever i klasse 10C om deltakelse i et forskningsprosjekt, hvor formålet er å undersøke om arbeidet med modelleringsoppgaver i matematikk kan bidra til økt begrepsforståelse. I dette skrivet gir vi informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære. Fint om dere som foresatte går gjennom dette skrivet sammen med eleven.

Formål
Formålet med masterstudien er å undersøke hvordan arbeidet med modelleringsoppgaver kan bidra til økt begrepsforståelse i matematikk. Resultatene fra forskningen kan bidra til en større bevisstgjøring rundt elevenes arbeid med modelleringsoppgaver, og hvilke læringspotensial slike oppgaver har.

Masterprosjektet vil bli gjennomført av Kaisa Ingersdatter Ingilæ og Lisa Østreim Nesvik, som har jobbet mange år i ungdomsskolen, og de siste to årene har studert lærerspesialist i matematikk og fullfører nå lektorutdanning ved NTNU. Veileder er Trygve Solstad, førsteamanuensis ved NTNU.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Hva innebærer det å delta?
I løpet av studiet vil eleven arbeide med modelleringsoppgave i grupper sammen med medelever. Arbeidet med oppgaven vil bli filmet og observert av Kaisa og Lisa. Dette er for å samle inn data fra gruppediskusjoner i arbeidet med oppgavene. Det vil også bli foretatt individuelle intervju i etterkant av arbeidet. Intervjuet blir gjennomført i undervisningstid med lydopptaker.

Kaisa og Lisa vil være tilstede under hele modelleringsprosjektet og gjøre egne observasjoner. Vi er underlagt full taushetsplikt. Deltakelse i prosjektet vil ikke ha noe å si for karakter i faget.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis dere samtykker til deltagelse, kan dere når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger vil bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deltaker dersom en velger å trekke seg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om informantene til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. De som får tilgang til opplysningene er Kaisa, Lisa og veileder for prosjektet. Videoopptak og lydopptak vil bli lagret på kryptert minnepenn og all bearbeiding av data vil foregå slik at det ikke kan knyttes opp mot informantene. I masteroppgaven skal det bli benyttet pseudonym og navnelister vil også bli lagret adskilt

fra øvrige data. Studien er også meldt til Personvernombudet for forskning, NSD, Norsk senter for forskningsdata.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 5.september 2020*.* Video- og lydopptak vil innen dette være slettet og alle opplysninger anonymisert slik at datamaterialet ikke kan kobles til informantene.

Dine rettigheter
Så lenge informanten kan identifiseres i datamaterialet, har informanten rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om informanten basert på samtykke.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS har vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis dere har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte dere av deres rettigheter, ta kontakt med:

Lisa Østreim Nesvik
Lisa.ostreim.nesvik@sandnes.kommune.no
tlf: 41 64 98 83

Kaisa I. Ingilæ
kaisa.ingersdatter.ingila@sandnes.kommune.no
tlf: 91 77 75 46

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet ved Trygve Solstad.
trygve.solstad@ntnu.no

Vårt personvernombud:
NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17

Med vennlig hilsen
Lisa Østreim Nesvik og Kaisa Ingersdatter Ingilæ

Prosjektansvarlig
Trygve Solstad

Samtykke til deltakelse i studien

"Bruk av modelleringsoppgaver i matematikk"

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å la mitt barn delta.

Navn på foresatt: ____

Signatur elev og foresatt / dato: ____

7.5 Intervjuguide

Intervjuguide

Briefing:

- Formålet med studien: Fokus på modellering mot lineær funksjon.
- Undersøkelsen har ikke noe betydning for elevenes karakter i matematikkfaget,
- Anonymitet.
- Informere elevene om lydopptak/filming.

Intervjuspørsmål

1. Er det en situasjon under arbeidet med oppgaven, som fikk deg til å forstå mer av den lineære funksjonen?

Videre vil vi spørre mer generelt om det vi har jobbet, og det er fint om det kan knyttes til eksempler.

2. I oppgaven du jobbet med, var det ingen bestemt fremgangsmåte for hvordan den skulle løses. Hvordan påvirket dette deres arbeid og valg av metode?
    a. Påvirket dette hvordan du forstod stigningstall og konstantledd i en lineær funksjon?
    b. Der var ikke en fasit tilgjengelig, på hvilken måte påvirket dette arbeidet? Påvirket dette hvordan du forstod stigningstall og konstantledd?
    c. Hvordan fikk du bruk for tidligere kunnskap om algebra og funksjoner i arbeidet med denne oppgaven?

3. Samarbeid, dialog og diskusjoner: Hvordan var diskusjonene i gruppen med på å hjelpe deg til å forstå mer?
    a. Hvordan synes du det var å måtte fortelle andre hvordan du tenker? Gjorde dette at du forstod mer?
    b. Hvordan var det å høre på de andre og få et innblikk i hvordan de tenkte? Gjorde dette at du forstod mer?
    c. Hvordan påvirket hjelpen fra læreren deg i arbeide med oppgaven? Påvirket dette din forståelse for stigningstall og konstantledd?

4. Bruken av GeoGebra: Gjorde bruken av GeoGebra det enklere eller vanskeligere å forstå stigningstall og konstantledd?
    a. Hadde du tilstrekkelige GeoGebra-kunnskaper i forkant av oppgaven?

Etter at eleven har jobbet med ettertesten:

5. Hvordan har din forståelse for funksjonene endret seg etter arbeidet med modelleringsoppgaven?
    a. Kan du forklare hva du mener modelleringsprosessen har bidratt med for din forståelse av lineære funksjoner?

7.6 Refleksjonsnotat

Gruppa vår besto av to medlemmer. Gjennom hele lærerspesialist studiet har vi hatt god kontakt, og arbeidet godt sammen. Da det ble åpnet opp for at en kunne skrive denne masteroppgaven sammen, var derfor valget enkelt. Vi ble raskt enige om at vi ønsket å skrive en masteroppgave om modellering. Etter videre samtaler ble vi enige om at vi ville undersøke hvordan arbeid med funksjoner kunne gjøres mer interessant og spennende for elevene. Vi satt begge med erfaringen om at funksjonsbegrepet kunne være vanskelig for mange elever.

Videre i prosessen bestemte vi oss for at vi ikke ville fordele arbeidet, men at vi ønsket skrive alle delene sammen. Å skrive sammen vet vi av erfaringer at i mange tilfeller kan være vanskelig og krevende. For oss ble det ingen av delene. Vi har utfylt hverandre på en god måte. Det eneste vi har skrevet delvis alene er noen av delkapitlene i kapittel 2. Likevel har vi også her sittet i samme rom, for å kunne diskutere, reflektere og oppnå felles forståelse. Tiden i mellom våre faste møtepunkt har vi brukt til research rundt tema, innhenting av teori og transkribering.

Allerede tidlig i arbeidet bestemte vi oss for at vi måtte legge en plan for hvordan vi skulle klare å finne tid og rom for arbeidet. I oktober bestemte vi oss for at onsdags kveld ble et fast møtepunkt. Det siste året har vi derfor tilbrakt så og si hver onsdagskveld på Høyland ungdomsskole. I tillegg bestemte vi at det meste av ferier og helger skulle gå til samme formål. At vi tok valget å være to om alt, har gjort at vi har tilbrakt mye tid sammen, og hatt mulighet til å reflektere og diskutere rundt spørsmål som har dukket opp underveis. For oss har dette vært avgjørende for ikke å miste motet. Vi har holdt hverandre i hendene gjennom hele prosessen.

Under er en tabell som viser en oversikt over fremdriften i arbeidet.

Måned	**Hva ble gjort**
August 2019	Fant foreløpig problemstilling og tema
September 2019	Fikk møte veileder på skriveseminar Ble enig med veileder om problemstilling og "veien videre" Leste teori og undersøkte valg av metode Søkte til nsd
Oktober 2019	Planla gjennomføring av datainnsamling Skrev samtykkeskjema Lagte oppgave, før-test og etter-test klar til datainnsamling Leste teori og metode
November 2019	Godkjenning fra nsd Leste teori og metode Gjennomførte datainnsamling (25.11.2020)
Desember 2019	Transkriberte intervjuer og modelleringsøkten
Januar 2020	Skrev forslag til innledning Møtte veileder på skriveseminar og avtalte veien videre Startet arbeidet med analysen
Februar 2020	Arbeidet med analysen. Laget analysekoder og gikk gjennom transkripsjonene sammen.

Mars 2020	Sendte analysekapittelet til veiledning (18.03.2020) Gjennomførte digital studentkonferanse der vi la fram oppgaven for veileder og andre studenter (26.03.2002) Startet arbeidet med teorikapittelet
April 2020	Arbeidet med teorikapittelet Sendte teorikapittelet til veiledning (26.04.2020) Starter på metodekapittelet
Mai 2020	Arbeidet med metodekapittel Sendte metodekapittel til veiledning (25.05.2020) Startet på diskusjon/drøfting
Juni 2020	Arbeidet med diskusjon, innledning og avslutning Sendte hele dokumentet til veiledning (15.06.2020)
August 2020	Rettet opp i kommentarer fra veiledning Sendte diskusjon til veiledning på ny (12.08.2020) Ferdigstilling av oppgaven
September 2020	Leverte oppgaven (04.09.2020)

NTNU

Kunnskap for en bedre verden