Gro Kleven Rød

LÆREBØKER, ALGEBRA OG REPRESENTASJONER

En kvalitativ studie av 3 lærebøker på ungdomstrinnet, med tanke på bruk av representasjoner i arbeid med algebra.

Masteroppgave i Master i lærerspesialist, Matematikk 8.-10.trinn
Veileder: Heidi Dahl
September 2020

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Gro Kleven Rød

LÆREBØKER, ALGEBRA OG REPRESENTASJONER

En kvalitativ studie av 3 lærebøker på ungdomstrinnet, med tanke på bruk av representasjoner i arbeid med algebra.

Masteroppgave i Master i lærerspesialist, Matematikk 8.-10.trinn
Veileder: Heidi Dahl
September 2020

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Algebra er et emne som mange elever syns er vanskelig, og som mange elever sliter med å lære. Målet med denne masteroppgaven er å se på hvordan noen lærebøker for ungdomstrinnet legger opp arbeidet med algebra i utvalgte kapitler.

Jeg ønsker å belyse hvordan algebra blir presentert i lærebøkene, og hvordan disse bruker representasjoner i dette arbeidet. Søkelyset er spesielt rettet mot overganger mellom representasjoner i ulike algebraiske aktiviteter.

For å svare på problemstillingen benyttet jeg lærebokanalyse som metode. Jeg foretok analyse av både kommunikasjonen, altså innledninger og eksempler, samt av forventninger til eleven, altså oppgavene. Som grunnlag for analysen brukte jeg utvalgte kapitler fra lærebøkene til Faktor (Hjardar, E. & Pedersen, J. E.,2006, J.W. Cappelen AS), Grunntall (Bakke, B. & Bakke, I. H.,2006, Elektronisk undervisningsforlag) og Nummer (Hole, A., Jensen, R., Tellefsen, H. K. og Wallace, A. K., 2014, H. Aschehoug & Co).

I analysen benyttet jeg et rammeverk basert på Duval (2002), samt begreper fra Kieran (2004). Ved hjelp av dette rammeverket ble både oppgaver og eksempler kategorisert. Funnene fra analysen diskuteres opp mot teori om hva som fremmer matematisk forståelse.

Resultatene fra analysen viser at det er symbolmanipulasjon som dominerer i to av lærebøkene, og arbeidsmåtene som er vektlagt vil antakelig fremme instrumentell forståelse. Den tredje boka legger mer vekt på bruk av naturlig språk som representasjon, og konvertering mellom naturlig språk og symbolspråk. Arbeidsmåtene i denne boka er av mer utforskende karakter, og kan dermed fremme relasjonell forståelse.

Forord

Matematikk var et av yndlingsfagene mine på ungdomsskolen. Det var gøy med oppgaver som krevde litt grubling og jeg likte algebra. Det å løse litt «ekle» likninger, for så å finne ut at x=2 var tilfredsstillende. Noen av mine medelever ga uttrykk for at matematikk var vanskelig, og at de pugget før heldagsprøver. Jeg forsto ikke hva de snakket om. Det var ikke nødvendig å pugge matte, det var jo bare å tenke fornuftig.

På videregående endret dette seg. Jeg pugget og lærte teknikker for å løse diverse oppgaver. Jeg kan ikke huske at matematikk ble satt i noen sammenheng i matematikktimene, men fysikktimene ga faget mening. Etter hvert utdannet jeg meg til lærer i naturfag og matematikk.

Høsten 2016 begynte jeg på lærerspesialistutdanningen ved NTNU, og i den forbindelse leste jeg en artikkel av Judith V. Grabiner som handlet om bevis. I artikkelen blir det presentert en oppgave, $x^2 + 10x = 39$. Oppgaven kan løses ved å utvide venstresiden til et fullstendig kvadrat, men i artikkelen visualiseres dette med en geometrisk figur. For meg var det en aha-opplevelse å «se» løsningen visuelt, og jeg lurer på hvorfor ingen viste meg det på videregående? På videregående lærte jeg hvordan man kunne bruke 1.kvadratsetning til å utvide til et fullstendig kvadrat, men figuren ga en dypere forståelse for metoden. Figuren blir presentert som et eksempel på en geometrisk representasjon i kapittel 2.3.1, Ulike representasjonsregistre.

Denne «vekkeren» gjorde meg nysgjerrig på sammenhengen mellom ulike representasjoner og forståelse. I faget forskningslære i lærerspesialiststudiet gjennomførte jeg en ministudie av en gruppe elevers arbeid med 1. kvadratsetning, først geometrisk og deretter algebraisk. Det viste seg at overgangen mellom den geometriske representasjonen og den algebraiske representasjonen var mer krevende for disse elevene enn jeg hadde forventet.

Når jeg så fikk muligheten til å ta en master i matematikkdidaktikk, ønsket jeg å sette søkelyset på algebra og representasjoner. Jeg syns rett og slett det er veldig spennende!

Takk til alle som har gjort det mulig for meg å fullføre dette studiet. Arendal kommune som ga grønt lys til å søke, ledelsen ved Nedenes skole som har lagt til rette timeplanen min, og gitt meg frihet i forhold til bunden tid og hjemmekontor, Heidi Dahl som en tålmodig og god veileder, alle kollegaer og venner som har hørt meg snakke om algebra og representasjoner, familien som har måttet tåle en fjern mamma og kone, og til slutt Ruffen som uavbrutt holder meg med selskap på arbeidsrommet.

Gro Kleven Rød

Grimstad, august 2020

Innhold

Figurer og tabeller

Figurer

Tabeller

1.0 Innledning

1.1 Bakgrunn for oppgaven

I flere år har Norske elever deltatt i internasjonale undersøkelser som måler elevers kompetanse i matematikk, blant annet gjennom Program for International Student Assessment (PISA) og Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS og TIMSS Advanced). Første året Norge deltok i PISA var i 2000 (Grønmo & Hole, 2017), og det var nettopp resultater fra denne undersøkelsen som rystet skole-Norge i 2001. Da fikk vi det såkalte «Pisa-sjokket». Det viste seg at norske elever scoret helt middels, og ut ifra de økonomiske forutsetningene som Norge hadde, og fremdeles har, ble det betraktet som for lavt (Utdanningsdirektoratet, 2011). Prestasjonene i matematikk har bedret seg de siste årene, men det er et emne som skiller seg negativt ut, og det er algebra. I rapporten «*Prioritering og progresjon i skolematematikken, en analyse av TIMSS Advanced og andre internasjonale studier*» (Grønmo & Hole, 2017) kan man lese: «(…) *utfordringene i norsk skole er at våre elever presterer alarmerende svakt i algebra.» (s. 84)*, og bekymring over svake prestasjoner i algebra går igjen i rapporten.

Siden regning med tall og algebra kan sees på som motoren i matematikk (Grønmo & Hole, 2017), er det et problem at så mange elever sliter med nettopp dette. Algebra danner grunnlaget for videre studier i matematikk, og kompetanse innen algebra er også et viktig grunnlag i alle andre fag som bruker matematikk som et redskap. Svake prestasjoner i et fag som for eksempel fysikk, kan forklares med svake prestasjoner i algebra (Grønmo & Hole, 2017). Frafall i videregående skole kan også skyldes svake ferdigheter i grunnleggende ferdigheter (Kunnskapsdepartementet, 2019), og ny forskning indikerer at bedre resultater i matematikk øker sannsynligheten for å fullføre det første året på videregående skole (Kunnskapsdepartementet, 2020).

Men, algebra er ikke bare viktig for den enkelte som trenger dette i sin jobb eller i sin utdanning, det er viktig for samfunnsutviklingen. Utvikling av teknologi går fort, og vi trenger nytenkning i industrien, både med tanke på fremtidige arbeidsplasser og miljøutfordringene vi står ovenfor. Som samfunn trenger vi derfor personer med høy kompetanse innen realfag, og valg av fordypning i matematikk henger sammen med matematikkunnskaper fra grunnskolen.

Mange norske elever sliter altså med algebra, og da er det naturlig å spørre hvorfor det er slik. Margrethe Naalsund (2012) undersøkte dette i sin doktoravhandling «*Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secondary students algebraic profiency*». Hun oppdaget blant annet at de fleste av elevene på 8.trinn ikke hadde kunnskaper om formelle løsningsstrategier for likninger. De brukte mye «gjett og sjekk». På 10.trinn var bildet litt annerledes. Der brukte de fleste elevene formelle strategier da de løste likninger, men i intervjuene som Naalsund (2012) hadde med elevene kom det frem at de fleste ikke visste hvorfor de gjorde som de gjorde, eller hvorfor det de gjorde var nødvendig. Mange elever ser på algebra som meningsløs manipulasjon av symboler, og de forstår ikke hvorfor reglene er som de er. Det at elever mangler forståelse for, og er usikre på de bakenforliggende strukturene for regnereglene de bruker, mener Naalsund (2012) er en av grunnene til at algebra er vanskelig for mange elever.

Det er flere faktorer som har betydning for elevers læring og forståelse i matematikk. Både motivasjon, det å jobbe utforskende, samt å måtte diskutere matematiske ideer og sammenhenger trekkes frem som sentrale faktorer for å fremme god matematisk forståelse (Nosrati & Wæge, 2015). Svingen (2018) skriver om viktigheten av å jobbe med ulike representasjoner for lavt presterende elever, og Duval (2006) fremhever det å jobbe med skifte av representasjonsregister for å fremme matematisk forståelse. Han sier det så sterkt som at det er selve nøkkelen til matematisk forståelse, «*Changing representation register is the treshold of mathematical comprehension for learners at each stage of the curriculum*» (Duval, 2006, s.128).

Ifølge forskningsrapporten «*Med ark og app*» legger læreboka sterke føringer på undervisningen i skolen. Det påpekes at over 80% av alle lærere i Norge baserer seg på papirbaserte læremidler når de underviser, altså lærebøker og arbeidsbøker, og mange lærere argumenterer for at læreboka har et innhold og en struktur som gjør at progresjonen blir god, samt at kompetansemålene i læreplanen blir ivaretatt (Gilje et al., 2016). Læreboka er dermed med på å legge premisser for læring og undervisning i matematikk, og det er derfor interessant å se på hvordan lærebøker legger opp arbeidet med algebra.

Basert på egne og andre lærerkollegaers erfaringer har jeg en hypotese om at kapitler som omhandler algebra i stor grad handler om å lære regler og algoritmer for symbolmanipulasjon. Dette støttes også av tidligere forskning på lærebøker og algebra (Espeland, 2017; Harder, 2013; Kongelf, 2019), og jeg ønsker å undersøke dette nærmere. For å avgrense oppgaven har jeg valgt å se på bruk av, og overganger mellom representasjoner i kapitler som introduserer algebra. Ifølge Duval (2006) er jo dette kjernen til matematisk forståelse. Jeg vil også se på hvilke algebraiske aktiviteter som blir vektlagt, og på hvordan læremålene blir presentert.

I introduksjonskapitlene er det innføring av bokstaver som tegn, algebraiske lover og likningsbegrepet som blir vektlagt. Funksjoner som emne blir i alle tre bøkene introdusert som et eget kapittel seinere i bøkene. Funksjonsbegrepet har derfor ikke fått noen stor plass hverken i teorien jeg presenterer, eller i analysene mine, selv om funksjonsbegrepet er et viktig begrep i arbeidet med algebra.

1.2 Problemformulering

I denne studien ønsker jeg å undersøke følgende problemstilling: ***Hvordan legger lærebøker opp arbeidet med algebra, og på hvilke måter bruker de representasjoner i dette arbeidet?***

For å belyse problemstillingen har jeg valgt å se nærmere på tre forskningsspørsmål:

- *Hvilke tilnærmingsmåter til arbeid med algebra kommuniseres i bøkene?*
- *Hvilke representasjoner brukes, og hvordan legger bøkene opp til overganger mellom disse?*
- *Hva slags algebraiske aktiviteter legger bøkene opp til?*

For å kunne svare på forskningsspørsmålene, vil jeg studere hva som kommuniseres til eleven (introduksjon og eksempler), og jeg vil studere hva som forventes av eleven (oppgaver) i utvalgte kapitler som omhandler algebra.

I analysen av kommunikasjonen ser jeg nærmere på læringsmålene som blir presentert, og på hvilke tilnærmingsmåter boka bruker i arbeidet med algebra. Med tilnærmingsmåter mener jeg om boka legger opp til utforskende arbeidsmåter, eller om boka presenterer regneregler og metoder som følges opp av passende oppgaver.

Eksemplene blir analysert med tanke på hva slags algebraiske aktiviteter de legger opp til, og bruk av ulike representasjoner. Som rammeverk for analysene bruker jeg teori av

Kieran (2004) og Duval (2002, 2006). Jeg bruker algebraiske aktiviteter slik de er definert av Kieran (2004). Hun bruker begrepene generational, transformational og global/meta-level om de algebraiske aktivitetene. Jeg har valgt å oversette disse med generaliserende, transformerende og global/meta-nivå-aktiviteter. For å definere representasjoner og overganger bruker jeg Duval (2002). Begrepene presenteres og utdypes nærmere i kapittel 2, teorikapitlet.

I analysen av forventningene til eleven, altså hva slags oppgaver boka forventer at eleven skal løse, vil jeg foreta en opptelling av oppgaver med tanke på overganger mellom representasjoner. Her ser jeg også nærmere på hvilke algebraiske aktiviteter boka vektlegger i oppgavene. Rammeverket som brukes i analysen av eksemplene og oppgavene er altså det samme.

Til sammen vil analysene av kommunikasjonen og forventningene til eleven gi et bredt bilde av hvordan boka legger opp arbeidet med algebra, og dermed bidra til å svare på forskningsspørsmålene mine.

1.3 Oppbygging av oppgaven

I innledningen har jeg til nå argumentert for problemstillingen, og jeg har presentert problemformuleringen. Underveis i denne argumentasjonen er det brukt flere begreper som ikke er forklart nærmere. Særlig begreper som matematisk kompetanse og matematisk forståelse, algebra, algebraisk tenkning, algebraiske aktiviteter, representasjoner og overganger mellom representasjoner er viktige begreper i min studie. Disse begrepene vil bli utdypet i kapittel 2, teorikapitlet. Innholdet i læreplanen, og tidligere forskning på emnet algebra og lærebøker sier jeg også noe om i dette kapitlet.

Selve prosjektet er en lærebokanalyse, og i kapittel 3, metodekapitlet, presenterer jeg lærebokanalyse som forskningsdesign, og læreboka som forskningsobjekt. Der begrunnes også utvalget av lærebøker som er gjort for denne studien, og jeg gjør noen etiske betraktninger rundt studien min. I metodekapitlet sier jeg også noe om analyseverktøyet og studiens kvalitet.

Analysen av lærebøkene presenteres i kapittel 4. Først presenteres læreverkene. Presentasjonen sier noe om oppbyggingen av læreverkene og de tilhørende lærebøkene. Deretter presenteres de vertikale analysene. Det er en analyse av kommunikasjonen i bøkene, der jeg retter søkelyset mot introduksjoner og eksempler, og en analyse av forventninger til elever, der jeg retter søkelyset mot oppgavene som lærebøkene presenterer.

I kapittel 5, diskusjonskapitlet, drøftes resultatene fra analysen opp mot presentert teori. Både læringsmål, tilnærmingsmåter, algebraiske aktiviteter, overganger mellom representasjoner og språk som representasjon diskuteres opp mot teori om hva som fremmer matematisk forståelse.

Etter diskusjonskapitlet, i kapittel 6, foretar jeg en konklusjon, der jeg sammenfatter funnene opp mot forskningsspørsmålet mitt.

Til slutt ser jeg på noen perspektiver av forskningen, og jeg sier noe om implikasjoner og evt. ny forskning. Dette skjer i kapittel 7.

2.0 Begreper og teori

I dette kapitlet vil jeg gjøre rede for sentrale begreper og presentere teorien og rammeverkene som er utgangspunktet for studien min. Undersøkelsen handler om å se på hvordan noen lærebøker legger opp arbeidet med algebra. Hva blir kommunisert, og hva forventes av eleven? Siden det er elevers kompetanse innen algebra som er utgangspunktet for undersøkelsen, er det viktig å si noe om hva som menes med algebra i skolen. Både algebraisk tenkning og algebraiske aktiviteter er viktige begreper her. Begreper som representasjoner, konvertering og algebraiske aktiviteter er også vesentlige med tanke på selve analysen. Behovet for teori rundt språk som representasjon meldte seg etter hvert som jeg analyserte de ulike lærebøkene. Språket i de ulike bøkene fremstår som ulikt, både i formen og den rollen som språket har i læreboka.

I studien gjør jeg ikke noe forsøk på å måle elevers utbytte av læring av algebra. Målet med oppgaven er likevel å si noe om hvordan arbeidet som lærebøkene legger opp til fremmer matematisk forståelse. Begreper knyttet til matematisk kompetanse og matematisk forståelse blir derfor presentert som et teoretisk grunnlag for diskusjonskapitlet.

2.1 Hva ligger i begrepet matematisk kompetanse og matematisk forståelse

Både matematisk kompetanse og matematisk forståelse er komplekse begreper, og det er ulike syn på hva som ligger i begrepene. Kunnskapsløftet, og Fagfornyelsen, bruker blant annet trådmodellen til Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) som grunnlag for å beskrive matematisk kompetanse. I avsnittet under bruker jeg trådmodellen til å utdype hva som menes med matematisk kompetanse, mens jeg bruker Skemp (2006) og Hiebert & Lefevre (1986) til å utdype begrepet matematisk forståelse.

2.1.1 Matematisk kompetanse

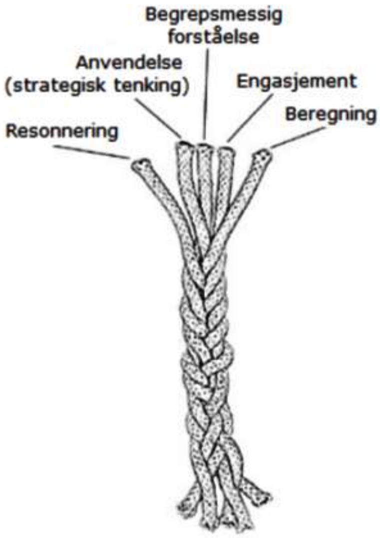
Matematisk kompetanse er som nevnt et komplekst begrep, og Kilpatrick et al. (2001) har satt sammen fem komponenter for å forklare begrepet. De fem komponentene, eller trådene er: forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement. Disse trådene er tett sammenvevd, og for at eleven skal ha god matematisk kompetanse er det viktig at alle trådene er med. Hvis ikke får «tauet», eller den helhetlige kompetansen, en svakhet.

Tråden *forståelse* er forklart ved at elever har en god begrepsforståelse og klarer å se sammenhenger mellom ulike begreper, ideer, prosedyrer og regler i matematikk. Forståelse handler også om å tolke oppgaver, kjenne til ulike representasjoner og hvilke representasjoner som er mest hensiktsmessige i gitte situasjoner. Om denne type matematisk forståelse kan vi også bruke begrepet relasjonell forståelse (Stedøy, 2018). Begrepet forståelse vil bli utdypet i neste delkapittel.

Å *beregne* betyr å kjenne til ulike regler og prosedyrer, og å forstå når det er hensiktsmessig å bruke de ulike prosedyrene eller reglene. Det å trene på algoritmer eller fremgangsmåter slik at ulike beregninger går raskt, er et godt verktøy i matematikk, og så lenge det ikke går på bekostning av at elever utvikler relasjonell forståelse, er dette viktig. Det å ha gode, og mange, verktøy innen beregning, kan ikke sees på som en ulempe.

Det å *anvende* matematikk betyr her å kunne gjenkjenne og formulere matematiske problemer med utgangspunkt i en hverdagssituasjon eller i mer abstrakte matematiske problemer. Dette punktet består i å kunne velge passende representasjoner for å kunne planlegge og gjennomføre for å kunne finne en løsning på problemet.

Klarer man å tenke logisk og kunne bruke gyldig argumentasjon for å kunne forklare eller bevise i matematikk, jobber man med tråden *resonnering*. Resonnering er tett knyttet til begrepet forståelse, og da spesielt relasjonell forståelse, men også til et begrep som generalisering. En elev som klarer å gjenkjenne og beskrive et mønster for så å kunne generalisere utviklingen viser tegn på både god resonneringskompetanse, men også på god relasjonell forståelse.



Figur 1: Trådmodellen til Kilpatrick, Swafford og Findell (2001)

Beskrivelsen av disse trådene i tauet til Kilpatrick et al. (2001) viser at matematisk kompetanse er et komplekst begrep. Begrepene glir over i hverandre, og det er viktig å jobbe parallelt med trådene for at elever skal få god matematisk kompetanse (Stedøy, 2018). Det er vanskelig å se for seg en elev med evne til å anvende eller resonnere i matematikk, uten god matematisk forståelse i bunnen.

Den siste tråden i tauet er engasjement. Uten at eleven selv har tro på at det er mulig å lære matematikk, og uten vilje til å prøve, er det nesten umulig å lære. Et aspekt ved begrepet er utholdenhet, og elever må lære, at å lære, er hardt arbeid.

2.1.2 Matematisk forståelse

Trådmodellen til Kilpatrick et al. (2001) beskriver matematisk forståelse som en del av matematisk kompetanse. I studien min vil jeg se nærmere på hvordan noen lærebøker legger opp til arbeid med algebra, og analysere dem med tanke på hvordan de eventuelt fremmer matematisk forståelse. I dette avsnittet vil jeg utdype begrepet, og se på ulike typer av matematisk forståelse.

Skemp (2006) bruker begrepene relasjonell og instrumentell forståelse. Begrepene er nært knyttet til henholdsvis begrepsmessig kunnskap og prosedyrekunnskap slik de presenteres av blant annet Hiebert & Lefevre (1986). En person som innehar relasjonell forståelse i matematikk, vet ikke bare hvordan en oppgave løses, men forstår også hvorfor den løses på en bestemt måte. Vedkommende ser altså sammenhenger i faget, og mellom begrepene i faget (Skemp, 2006). Et eksempel på dette er fra arbeid med likninger. For å forstå regler i arbeid med likninger, er det selve ekvivalensbegrepet som ligger til grunn. En lærer som underviser for at elever skal oppnå relasjonell forståelse i arbeidet med likninger, bruker mye tid nettopp på dette begrepet. Det tar lengre tid enn å lære enkle regler i møte med likninger, men når eleven først har forstått hva ekvivalens betyr, er det en grunnpilar i veldig mange matematiske problemstillinger. En person med relasjonell forståelse er ikke avhengig av å ha lært spesielle fremgangsmåter, men bruker elementer fra ulike sammenhenger og begreper for å finne løsninger på ulike problemstillinger. Elever med relasjonell forståelse er derfor ofte gode problemløsere. Hiebert og Lefevre (1986) definerer begrepsmessig kunnskap som kunnskap som er rik på relasjoner. De sammenligner det med en nett av kunnskap med koblinger mellom de enkelte delene. Utviklingen av begrepsmessig kunnskap handler om å konstruere sammenhenger mellom deler av informasjon, og forståelse dannes når ny kunnskap kobles til eksisterende kunnskap

I motsetning til dette har vi instrumentell forståelse. Instrumentell forståelse kjennetegnes ved at elever, eller studenter, har lært visse regler og prosedyrer som kan brukes på en spesiell type oppgaver. Naalsund (2012) beskriver i sin avhandling flinke elever som vet hvordan de kommer fram til svaret i en likning, men som ikke vet hvorfor reglene de bruker virker. Mangel på forståelse for de bakenforliggende strukturene i algebraiske regler er altså litt av hovedproblemet til norske elever i møte med algebra. Dette kan tyde på at flere mangler relasjonell forståelse. En elev som er avhengig av å pugge formler og fremgangsmåter for alle oppgavetyper, kan vi si innehar instrumentell forståelse. De kan slite med å se sammenhenger i faget, og de kan være dårlige problemløsere. Et eksempel kan være en elev som pugger flere fremgangsmåter i møte Pytagoras setning. En metode for å finne hypotenusen, og en metode for å finne en av katetene. Eleven ser ikke at det han eller hun egentlig gjør i møte med disse algoritmene, er å løse likninger. De kobler ikke begrepet likning og Pytagoras setning. Elever som jobber på denne måten får etter hvert veldig mange regneregler og fremgangsmåter å huske på, og matematikk står i fare for å bli et fag som består av å pugge regler og fremgangsmåter. Instrumentell forståelse kan oppfattes som et litt negativt ladet begrep, mens prosedyrekunnskap slik Hiebert og Lefevre (1986) definerer det, har en litt videre betydning. De deler prosedyrekunnskap i to, der en del handler om å lære det formelle matematiske symbolspråket, mens en del handler om å lære regler, algoritmer og prosedyrer som blir brukt i møte med matematiske problemer. Prosedyrekunnskap er sammenfallende med tråden «beregning» i beskrivelsen i trådmodellen til Kilpatrick, Swafford og Findell (2001). Hiebert og Lefevre (1986) fremholder viktigheten av å jobbe parallelt med begreps- og prosedyrekunnskap.

Skemp (2006) fremholder også noen fordeler med å jobbe med instrumentell matematikk. Han skriver: «*Within its own kontext, instrumental mathematics is usually easier to understand; sometimes much easier*» (Skemp, 2006, s.92). Innenfor sin egen kontekst er altså instrumentell matematikk ofte lettere for elever å forstå. Et eksempel på dette er brøkdivisjon eller multiplikasjon med to negative tall. Eleven lærer seg reglene, og mestrer mange slike oppgaver. Dette kan gi eleven en god følelse og dermed god selvtillit i matematikk, selv om vedkommende ikke forstår hvorfor reglene virker. Ofte kan også innlærte metoder gi raskere svar – selv med mindre kunnskap. Matematikere som kan tenke relasjonelt bruker også ofte instrumentelle metoder. Det sparer tid, og er dermed fornuftig.

Hiebert & Lefevre (1986) skriver at det er mulig å ha prosedyrekunnskap uten å ha begrepsmessig kunnskap, men at det er vanskelig å ha begrepsmessig kunnskap uten prosedyrekunnskap. Det er altså ikke slik at instrumentell matematikk er negativt, men relasjonell forståelse er ønskelig. Relasjonell forståelse er overførbar til andre oppgaver, og den er mer anvendbar. Det kan være vanskeligere for elever å oppnå relasjonell forståelse, men matematiske sammenhenger som gir mening er lettere å huske, og det blir langt færre sammenhenger å huske. Skemp (2006) påstår at relasjonelle fremgangsmåter er «*organiske*» i sin kvalitet (s. 93). Det betyr at du kan forme fremgangsmåten slik at den passer oppgaven og formålet. En elev med begrepsmessig forståelse har evnen til å tenke strategisk i møte med problemer, men eleven trenger også prosedyrekunnskap til å formidle løsningen på en matematisk måte (Hiebert & Lefevre, 1986).

Forståelse er noe en elev innehar, men Skemp (2006) bruker også begrepet instrumentell og relasjonell matematikk. Med dette mener han at lærere underviser på måter som fremmer en viss type forståelse. Med instrumentell matematikk mener han at arbeid med regler og fremgangsmåter styrer undervisningen, mens relasjonell matematikk vektlegger å bygge opp matematiske begreper og strukturer som elever kan bruke. Hiebert og Lefevre (1998) fremholder at det er koblingen mellom begrepsmessig kunnskap og prosedyrekunnskap som er nøkkelen, og at både forståelse og ferdigheter er viktig for i å utvikle matematisk kompetanse (s. 23).

2.2 Algebra som begrep i skolematematikken

Slår man opp i store norske leksikon står det at den enkleste definisjonen av algebra er «læren om likninger, regning med tall og variabler og bokstavregning». Selve ordet algebra kommer fra arabisk al-jebr som betyr gjenforening eller kombinasjon, og historisk sett ble begrepet algebra brukt identisk med likninger. (Aubert, 2018)

På midten av 1990 tallet presenterte Lesley Lee spørsmålet «*Hva er algebra?*» til en kohort av lærere, studenter og forskere, og svarene hun fikk var som følger:

- Et skolefag
- Generalisert aritmetikk
- Et verktøy
- Et språk
- En kultur
- En måte å tenke på
- En aktivitet

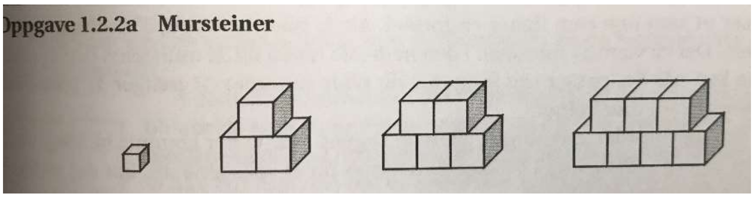
(Som sitert i Kieran, 2004, s. 22)

Algebra blir altså brukt i en vid betydning. I innledningen skrev jeg at algebra er et språk og et verktøy. I delkapitlene under vil jeg først presentere algebraisk tenkning, før jeg går nærmere inn på ulike algebraiske aktiviteter. Dette vil danne et av rammeverkene jeg bruker i analysen av læreverkene.

2.2.1 Algebraisk tenkning

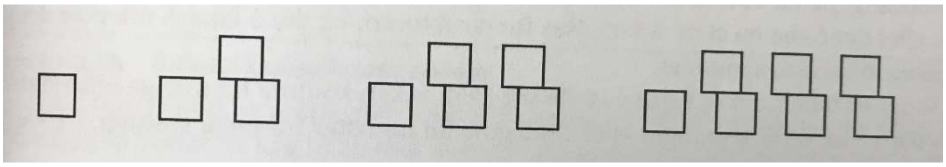
Algebraisk tenkning kjennetegnes ved å tenke modeller, uttrykke matematiske sammenhenger og begrunne disse (Blanton, 2008). Når barn oppdager en matematisk sammenheng, for eksempel at du alltid vil få et partall om du adderer to oddetall, og de beskriver eller uttrykker denne sammenhengen, så tenker de algebraisk. De generaliserer, og generalisering er en viktig del av det å tenke algebraisk. Det å se mønster i aritmetikken, altså arbeid med tall, er en viktig forutsetning for algebra. Etter hvert som man lærer seg til å uttrykke matematiske sammenhenger med ord, kan man innføre bokstaver, og da beveger man seg over i en mer tradisjonell beskrivelse eller forståelse av hva algebra er (Blanton, 2008).

Algebraisk tenkning er essensielt i arbeid med algebra. Mason (1996) skriver at matematikk handler om å se sammenhenger, og algebra handler om å lete etter likheter og ulikheter, gjenta og ordne og klassifisere og merke. Dette handler om generalisering, og «*generalisering er en av de mest fundamentale byggesteinene i matematikk*» (Mason, Graham, Johnston-Wilder, 2011, s. 8). I arbeid med generalisering er det viktig å se det generelle gjennom det spesielle, og det er flere måter å få elever til å bli oppmerksomme på hvordan det er mulig å generalisere. Det er viktig å vektlegge *hvordan* du tegner, beregner eller teller i spesielle tilfeller for å bli oppmerksom på hvordan det kan uttrykkes i det generelle tilfellet. Oppgaven i figur 2 handler om å finne et mønster for hvordan antall mursteiner utvikler seg i bildeserien.

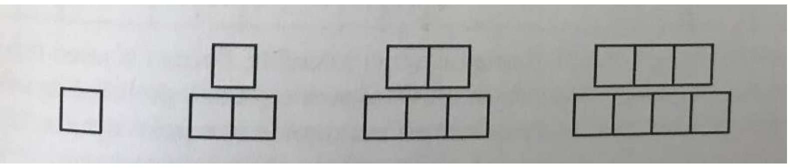


Figur 2: Telling av mursteiner, 1 (Mason et al., 2011, s. 23)

I figur 3 og 4 ser vi to ulike måter å «se» dette på.



Figur 3: Telling av mursteiner, 2 (Mason et al., 2011, s. 23)



Figur 4: Telling av mursteiner, 3 (Mason et al., 2011, s. 23)

I figur 3 har man først 1 kloss, før det legges til to. Deretter legges det til to for hver utvidelse. Dette kan uttrykkes som 1 + 2·(n-1). I figur 4 ser man først 1, før man ser 1 + 2, deretter 2 + 3 og 3 + 4. Dette kan uttrykkes som (n – 1) + n. Rydder man i begge uttrykkene får man uttrykket 2n - 1. Ingen av måtene å «se» på er feil, det er bare to ulike måter å se utviklingen av mønsteret på. Hvordan vi «ser» en figur eller en tallrekke, har mye å si for hvordan vi klarer å generalisere. Ved å variere hvilke detaljer som skal vektlegges, og ved å gi flere oppgaver av samme art, gis eleven mulighet til å utvide repertoaret og trene kreativiteten i konstruksjon av matematiske ideer.

Man kan også introdusere store og uhåndterlige tall for å henlede oppmerksomheten mot struktur, og vekk fra spesielle beregninger. Og ved å øve på å lage egne oppgaver, eller eksempler, trener eleven opp kreativitet og oppfatning av generalitet (Mason et. al, 2011, s.40).

Det kan også være en god strategi å øve på å se det spesielle gjennom det generelle, altså den motsatte prosessen. For å se det spesielle i det generelle, må eleven opparbeide seg en mening i hva generaliseringen går ut på. Eleven må «se» hva hun/han gjør (Mason et. al, 2011). Ta for eksempel konjugatsetningen:

$(a + b)\cdot(a - b) = a^2 - b^2$

Dette uttrykket er gjerne abstrakt for elever, og mange elever har nok vanskelig for å se hva som skjer. For å hjelpe eleven til å se kan man starte med å bytte ut bokstavene med tall. Hva skjer om a = 1 og b =0? Hva om a=0 og b=1? Hva om a =100 og b =1? osv. Det å se hva man gjør gjennom beregningene kan hjelpe eleven til å finne strukturen slik at eleven selv forstår den generelle sammenhengen (Mason et al, 2011, s. 43). Deretter kan eleven utfordres på å se om $102 \cdot 98 = 10000 - 4$ er et uttrykk som passer til den generelle sammenhengen.

2.2.2 Algebraiske aktiviteter i skolen

Det er vanlig å skille mellom to innfallsvinkler når det gjelder å introdusere algebra. Det er algebra som generalisert aritmetikk eller en funksjonsbasert innfallsvinkel (Kieran, 2004). I kunnskapsløftet står det at «algebra i skolen generaliserer tallregning ved at bokstaven eller andre symboler representerer tall» (Utdanningsdirektoratet, 2006). Kieran (2004) skriver at det å bruke generalisert aritmetikk som innfallsvinkel kan føre til at den ukjente blir prioritert over den variable, og eleven oppfatter bokstaven som erstatning for et tall i en numerisk prosess heller enn en variabel. Dette kan bli problematisk med tanke på funksjonsbegrepet.

Uavhengig av innfallsvinkler beskriver likevel Kieran (2004) tre hovedaktiviteter i arbeid med skolealgebra. Det er generaliserende aktiviteter, transformerende aktiviteter og aktiviteter på global/meta-nivå (GTG).

Transformerende aktiviteter

Transformerende aktiviteter er det som mange ser på som «vanlig» algebra i skolen. Det kan være å løse en likning algebraisk, faktorisere og forkorte algebraiske brøkuttrykk eller polynomdivisjon. En typisk aktivitet kan være:

«Løs opp parentesene og regn ut. $3a(2a + b + 2) - 6b - 2(a + 3b)$»

Dette er en regelstyrt aktivitet, og eleven jobber kun med å manipulere uttrykket. Det er ikke nødvendig å vite hva bokstavene a og b står for, for å kunne løse oppgaven. Utregningen baserer seg på å multiplisere faktorer inn i parenteser, løse opp parentesene og trekke sammen ledd med like bokstaver. Mason (1996) mener slike aktiviteter strengt tatt ikke er algebra*: «Algebra is usually what people have in mind when they think of mathematics as a language: strings of symbols. But strings of symbols are not themselves algebra» (s. 73).* Han mener altså at algebra som et matematisk språk i seg selv ikke er algebra, men det blir først algebra når dette språket brukes til å uttrykke en sammenheng.

Generaliserende aktiviteter

Kieran (2004) bruker begrepet generational activity, og jeg har valgt å oversette dette til generaliserende aktiviteter. Dette kan diskuteres. Blant annet Petersen (2015) har oversatt dette til genererende aktiviteter. Mason (1996) derimot, bruker begrepet generalization, og Udir (2020) bruker begrepet generalisering om det å oppdage sammenhenger og strukturer. Generational activity handler om å generere algebraiske uttrykk, men disse uttrykkene uttrykker en generell sammenheng, og det er dette jeg har vektlagt i min oversettelse. Generalisering er også beskrevet under algebraisk tenkning

Kieran (2004) beskriver tre former for generalisering. Den første formen for generalisering er kvantitative problemer som kan skrives som en algebraisk likning (type 1). Det kan være en aktivitet på formen:

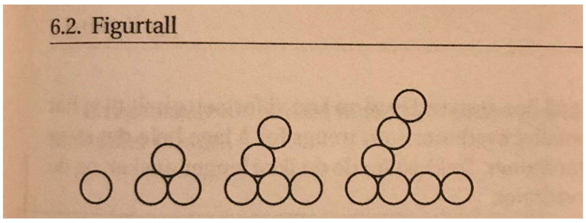
Ali er tre år eldre enn Thea. Thea er to år yngre enn Frode. Til sammen er de fjorten år. Hva er alderen til hver av dem?

Dette er et typisk kvantitativt problem som kan settes opp som en likning:

$x + (x-2) + ((x-2) + 3) = 14$

Her står x for alderen til Frode, og alderen til Thea (x – 2) og Ali ((x-2) + 3) er uttrykt i forhold til alderen til henholdsvis Frode og Thea. I dette tilfelle er x en ukjent, den har altså en spesifikk verdi. Men det er også et generelt uttrykk for alderen til Frode, altså har vi generalisering. Generalisering på denne formen kan også inneholde variabler, men vil alltid ta utgangspunkt i et kvantitativt problem.

Den andre formen for generalisering er å uttrykke en generell sammenheng som oppstår i et geometrisk mønster eller en numerisk sammenheng (type 2). Et eksempel på et geometrisk mønster ser vi i figur 5.



Figur 5: Mønster med sirkler (Mason et al., 2011, s. 145)

Oppgaven kan være å finne ut hvor mange sirkler(s) som trengs for å lage det n-te bildet ($s = n \cdot 2 - 1$). I dette tilfelle vil n være en variabel, og antall sirkler vil være avhengig av hvilken figur i rekka vi velger, altså hva vi setter n til å være. I dette tilfelle jobber vi med funksjonsbegrepet, og antall sirkler er en funksjon av n.

Den tredje formen for generalisering som Kieran beskriver, er å uttrykke generelle relasjoner mellom tall og operasjoner på tall (type 3). Eksemplet til Kieran (2004) er «summen av to påfølgende tall er alltid et oddetall – kan du forklare hvorfor?». Et annet eksempel kan være:

«Hvilke tall oppstår om vi multipliserer to tall som har differanse 2, og så legger til 1?» (Mason et al., 2011, s. 142).

Dette kan uttrykkes som $n \cdot (n+2) + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Av formelen ser vi at tallene vi får er kvadrattall. Målet med oppgaven er ikke å finne en liste med tall, men det er å kjenne igjen den type tall som oppstår, og å uttrykke dette generelt. Her vil også bokstaven n ha form som en variabel, og ikke en ukjent.

Aktiviteter på global/meta-nivå

Det å bruke algebra som et verktøy henger sammen med det Kieran (2004) beskriver som en global/meta-aktivitet. Generalisering er beskrevet som en aktivitet på global/meta-nivå, men aktiviteter på dette nivået kan også være problemløsning, modellering, analysere sammenhenger og begrunne eller å bevise en sammenheng. Slike aktiviteter er ikke nødvendigvis avhengige av algebra, men algebra kan være et nyttig verktøy. Slike aktiviteter kan også kalles resonnerende aktiviteter (Petersen, 2015), men jeg har valgt å beholde det engelske uttrykket. Aktivitetene handler ikke alltid om å finne et svar, det kan like gjerne være å avdekke et problem eller å vurdere et svar (Kieran, 2007, referert i Petersen, 2015). Slike aktiviteter gir algebra mening, og er viktige i alle deler av et algebraisk utdanningsløp (Kieran, 2004). Det kan være vanskelig å beskrive aktiviteter på global/meta-nivå, for som på samme måte som problemløsningsoppgaver er slike aktiviteter avhengig av nivå på mottakeren av oppgaven. Under er et eksempel fra Nummer 9 (Hole et al., 2015) som jeg vil definere som en aktivitet på global/meta-nivå.

> *Tenk på et tall mellom 1 og 10. Multipliser det med seg selv. Subtraher så fra tallet du tenkte på. Deretter skal du dividere tallet med tallet du tenkte på. Subtraher så fra tallet du tenkte på en gang til. Til slutt skal du legge til 7. Svaret du kommer fram til er nå 6. Bevis at det alltid vil bli slik, uansett hvilke tall du starter med. (s. 67)*

Eleven vil måtte analysere teksten, prøve ut flere tall for å se om det faktisk stemmer, og forhåpentligvis oppdage at algebra kan være et nyttig verktøy i bevisføringen. Eleven vil kunne se nytten av algebra, og det kan være med på å motivere i arbeidet med algebra.

Det er viktig å jobbe med alle disse type aktivitetene, men det er den siste aktiviteten, global/meta-aktiviteten som er målet (Kieran, 2004). I innledningen skrev jeg at «*algebra danner grunnlaget for videre studier i matematikk, og emnet er viktig i utdanninger der man bruker det matematiske språket*». Det å bruke det matematiske språket i jobb eller høyere utdanning, vil ofte være det samme som å bruke et algebraisk språk. Og det å bruke det algebraiske språket som et verktøy, er global/meta-aktivitet, som ifølge Kieran (2004) er målet med algebra.

Samtidig som dette siste punktet, global/meta-aktivitet, er målet, er slike aktiviteter også viktig for å gi mening til de andre delene av algebraiske aktiviteter. Det er viktig å sette algebraiske aktiviteter i en sammenheng for at ikke elever skal oppleve algebra som meningsløs manipulering av bokstaver (Kieran, 2004).

2.3 Representasjoner

Matematikk er i sin natur et abstrakt fag, og for å jobbe med matematiske ideer må man bruke representasjoner av det matematiske objektet. Det er nettopp denne abstraktheten som gjør matematikk vanskelig tilgjengelig for mange elever. Ulike representasjoner er aldri det matematiske objektet, men de er nettopp en representasjon for det (Duval, 2017). Av den grunn er det viktig å jobbe med ulike representasjoner av matematiske objekter, slik at ikke elever tror at det er selve det matematiske symbolet som er det matematiske objektet, men at de får en forståelse av at det nettopp er en representasjon for noe annet. Svingen (2018) skriver blant annet: «*For elever som presterer lavt i matematikk, er det særs viktig å oppdage sammenhenger mellom ulike representasjoner*» (s. 4). Duval (2006) uttrykker det enda sterkere. Han skriver at det å endre representasjonsregister er selve nøkkelen til matematisk forståelse.

Siden det er algebra jeg er opptatt av i denne undersøkelsen, er jeg mest opptatt av hva som kan fremme algebraisk forståelse. For å fremme god algebraisk forståelse må elever være utforskere, oppfinnere, mønstersniffere og beskrivere (Nosrati & Wæge, 2015). Det å lete etter mønster i et matematisk materiale er generalisering, og Mason (1996) mener generalisering ligger til grunn for all algebra. I en generaliseringsprosess må eleven gå fra det spesielle til det generelle. Eleven må skifte fokus. Det å trene på å se, og skifte mellom, ulike representasjoner er kognitivt krevende. Men det å kunne skifte fokus fra en representasjon til en annen er en forutsetning for å kunne være fleksibel i å se skrevne symboler (Mason, 1996, s. 74). Konvertering mellom ulike representasjonsregistre er altså en nøkkel også til algebraisk forståelse.

Mason (1996) fremholder også den viktige rollen språket har i dette arbeidet. Det å uttrykke en sammenheng med naturlig språk er en form for generalisering, siden ord er generelle. Han mener språket kan hjelpe eleven til å finne en formel, men han er også opptatt av den viktige rollen språket har i å hjelpe andre elever til å «se».

2.3.1 Ulike representasjonsregistre

Siden arbeid med representasjoner og endring av representasjonsregister er så viktig med tanke på matematisk forståelse (Duval, 2006), ønsker jeg å få svar på hvordan bøkene bruker dette i arbeidet med algebra. I delkapitlet vil jeg derfor utdype hva som menes med ulike representasjoner og arbeid med dem.

Duval (2002) har kategorisert semiotiske representasjoner som brukes i matematikk i ulike representasjonsregistre. Figur 6 viser en oversikt de fire ulike representasjonsregistrene som Duval (2006) tar utgangspunkt i. De ulike grupperingene beskrives nærmere under.

	DISCURSIVE REPRESENTATION	NON-DISCURSIVE REPRESENTATION
MULTIFUNCTIONAL REGISTERS: Processes cannot be made into algorithms	Natural language *Verbal (conceptual) associations* *Reasoning:* *-arguments from observations, beliefs…* *- valid deductions from definitions or theorems*	Plane or perspective geometrical figures (configurations of 0, 1, 2, and 3 dimensional forms) *Operatory and not only perceptive apprehension* *Ruler and compass construction*
MONOFUNCTIONAL REGISTERS: Most processes are algorithmic	Notation systems: numeric (binary, decimal, fractional…) algebraic symbolic (formal languages)	Cartesian graphs *Changes of coordinate systems* *interpolation, extrapolation*

Figure 1 Classification of the different registers which can be mobilized in mathematical processes

Figur 6: Duvals oversikt over representasjonsregistre (Duval, 2002, s. 3)

Duval (2002) bruker begrepene discursive og non-discursive representation. Jeg velger å oversette det til språklige (muntlig eller skriftlig) og ikke språklige representasjoner. En språklig representasjon kan være en representasjon med et naturlig språk, eller det kan være en oppgave presentert med et symbolsk matematisk språk.

Videre har vi de ikke-språklige representasjonene. Det kan for eksempel være illustrasjoner av geometriske figurer. Figurene kan fremstå som skisser eller de kan være konstruksjoner, men felles er at de er intuitive og uten skriftlig notasjon. Den andre formen for ikke språklig representasjon er for eksempel grafer i et koordinatsystem, tabeller eller diagrammer.

Det er altså et skille mellom språklige og ikke språklige representasjoner i registrene til Duval (2002), men han skiller også mellom monofunksjonelle og multifunksjonelle registre. De fleste representasjoner som er kategorisert som monofunksjonelle, fordrer matematiske prosesser som er algoritmiske. Representasjoner som er multifunksjonelle krever andre, og gjerne flere, kognitive prosesser.

Først vil jeg komme med et eksempel på en språklig, multifunksjonell representasjon. Det er en semiotisk representasjon i registeret naturlig språk.

«Frida er 13 år, og selger aviser hver søndag. Hun tjener 10 kroner for hver avis hun selger. I tillegg får hun 50 kroner fast. Hvor mye tjener hun på en søndag?»

Denne oppgaven har ikke et entydig svar. Svaret kommer jo an på hvor mange aviser hun selger. Det finnes heller ikke noen entydig algoritme for å løse oppgaven. Eleven må forstå innholdet i teksten, og trekke ut det som er vesentlig eller uvesentlig. Dette er mer kognitivt krevende enn å følge en algoritme. Svaret på oppgaven over kan presenteres som en funksjon eller et algebraisk uttrykk.

$F(x) = 10x + 50$

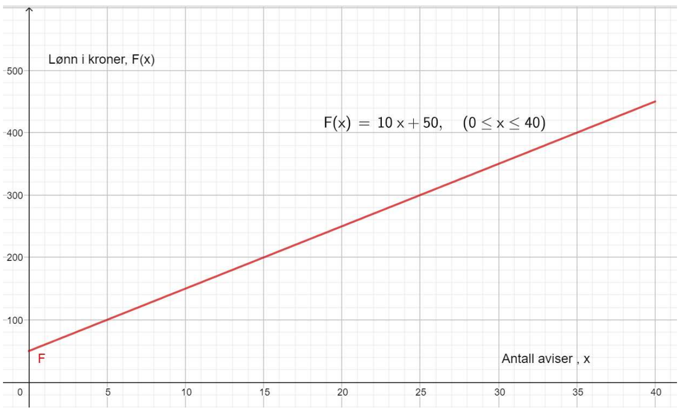
Uttrykket er en semiotisk representasjon i det språklige, monofunksjonelle registeret. I dette registeret brukes enten tall eller symboler, altså et symbolsk matematisk språk, og de fleste prosessene som utføres er algoritmiske. Det algebraiske språket hører til dette registeret, som kalles det symbolske registeret. Et annet eksempel fra dette registeret kan være å løse en likning algebraisk.

Hvis vi fortsetter med avis-oppgaven, kan den også presenteres som en tabell eller en graf.

Tabell:

x	F(x)
10	150
20	250
30	350

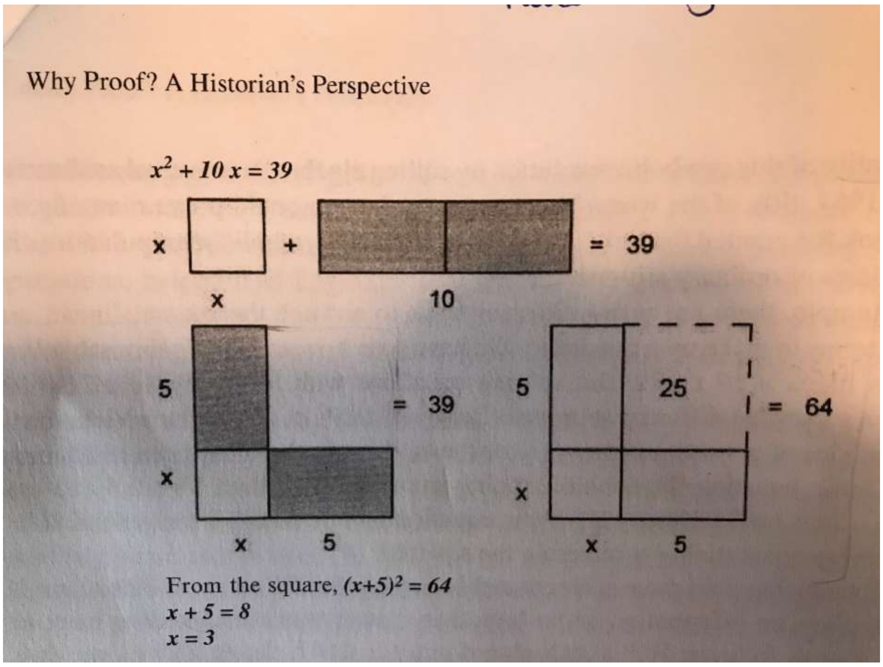
Graf:



Figur 7: Graf som representasjon.

Dette vil være en semiotisk representasjon i det ikke-språklige, monofunksjonelle registeret. Prosesser i dette registeret vil også ofte være algoritmiske. Dette registeret kalles for tabeller, diagrammer og grafer.

Til slutt (Figur 8) vil jeg presentere en representasjon i det ikke-språklige, multifunksjonelle registeret. Figuren jeg har valgt viser en geometrisk begrunnelse for hvorfor utvidelse til et fullstendig kvadrat som metode, kan brukes til å løse en andregradslikning. Det er nettopp denne figuren jeg henviste til i forordet.



Figur 8: Forklaring på «fullstendige kvadraters metode» for å løse andregradslikning (Grabiner, 2012, s. 155)

En figur i dette registeret kan ikke behandles med en innlært algoritme, men det kreves at eleven ser figuren på flere måter. Det å se hvordan uttrykket kan deles opp i kvadrater og rektangler, og hvordan dette kan brukes, krever både forestillingsevne og kreativitet. Dette er egenskaper som ofte kreves i slike representasjoner. Det å beskrive prosesser i dette registeret, illustrasjoner, krever også ofte bruk av det naturlige språket.

Duval (2002) bruker begrepet register når han klassifiserer de ulike typene representasjoner. Jeg har kalt de fire registrene for naturlig språk, symbolspråk, illustrasjoner og tabeller, diagrammer og grafer.

I en del litteratur refereres det til konkreter som en representasjon. Duval beskriver ikke konkreter i sine semiotiske registre, og konkreter blir ikke vektlagt i min analyse. Begrepet vil dermed ikke utdypes nærmere.

2.3.2 Konvertering og behandling

Duval (2002) bruker to begreper når det gjelder overganger mellom semiotiske representasjoner i matematikk. Det første begrepet er behandling (treatment). Behandling er når man holder seg innenfor samme register i arbeidet. Det kan være å manipulere en geometrisk figur slik at den viser (beviser) en sammenheng intuitivt, men det kan også være å løse en likning algebraisk.

Jeg løser likningen 5x – 2 = 3x + 4:

$$5x - 2 = 3x + 4$$

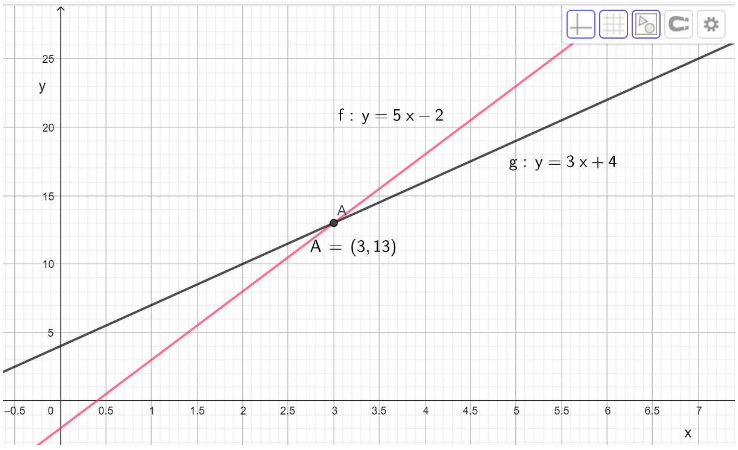
$$5x - 3x = 4 + 2$$

$$2x/2 = 6/2$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

Oppgaven handler om symbolmanipulasjon, og jeg løser oppgaven med innlærte regler og algoritmer. Oppgaven er også et typisk eksempel på en transformerende aktivitet (Kieran, 2004). Behandling spiller en viktig rolle i matematiske prosesser og i bevisføring, men i henhold til det jeg har skrevet om generalisering (Mason, 1996) og skifte av representasjonsregister (Duval, 2002) spiller ikke behandling en like viktig rolle med tanke på matematisk forståelse.

Den andre formen for overgang mellom semiotiske representasjoner er konvertering (Duval, 2002). Konvertering krever at vi oversetter fra en matematisk representasjon i et register til en representasjon i et annet register. Det krever først og fremst at eleven anerkjenner at det dreier seg om det samme matematiske objektet. Et eksempel på konvertering er hvis vi velger å løse likningen 5x – 2 = 3x + 4 grafisk:



Figur 9: Grafisk løsning av likning

Dette er en kognitivt krevende prosess. Det krever at eleven «ser» at likningen kan sees på som to funksjoner, som igjen kan uttrykkes som grafer i et koordinatsystem. Altså at likningen og de to grafene uttrykker den samme matematiske sammenhengen.

Jeg har brukt Geogebra for å vise den grafiske løsningen. Det er muligens en «snarvei», og selv om oppgaven krever konvertering mellom representasjonsregister, vil elever kunne lære seg en fremgangsmåte eller en algoritme for å løse denne oppgaven. Begge representasjonene er også i det monofunksjonelle registeret, og matematiske prosesser kan gjerne utføres som algoritmer.

Hvis eleven derimot ble bedt om å lage en regnefortelling som kunne illustrere likningen, ville det kreve andre kognitive funksjoner. Eleven vil ikke kunne følge noen algoritme, og det kreves både fantasi og forestillingsevne for å lage en fortelling til uttrykket i registeret naturlig språk. Dette oppleves av mange elever som vanskelig (Duval, 2006).

Ifølge Duval (2006) er det nettopp konvertering som leder til mekanismene som fremmer forståelse i matematikk. Det er en ting å «se» en sammenheng i en figur (illustrasjoner), men det er noe helt annet å bevise denne sammenhengen algebraisk (symbolspråk). Duval (2006) har en formening om at forståelse i matematikk forutsetter koordineringen av minst to semiotiske systemer (s. 115) Det er også viktig å jobbe med konvertering begge veier (Duval, 2006). Et eksempel på det, som Duval (2002) trekker fram, er konvertering mellom registrene symbolspråk og tabeller, diagrammer og grafer. Selv om en elev kan konvertere fra et funksjonsuttrykk til en graf, er det ikke gitt at den samme eleven kan konvertere fra en graf til et funksjonsuttrykk.

2.3.3 Språk som bærende representasjon

Duval (2006) skriver at bruk av de multifunksjonelle registrene, altså naturlig språk og illustrasjoner, blir unngått av mange lærere fordi bruk av disse registrene kan oppleves som vanskelig for en del elever. Dette er et paradoks siden arbeid med disse registrene er viktige for matematisk forståelse.

Natalie Ott (2018) har gjort en studie av hvordan ulike kombinasjoner av representasjoner hjelper elever til å løse matematiske problemer. I studien til Ott (2018) refereres det til tre ulike representasjoner. Det er tekst, formler og grafikk. Tekst hører inn under naturlig språk, formler hører til symbolspråk og grafikk hører til illustrasjoner. Den første delen av studien støtter teorien om Multiple External Representation (MER), altså at flere representasjoner av et problem støtter elever i løsningsprosessen av problemet (Ainsworth, 2006). Denne teorien legger til grunn at ulike representasjoner lagres og prosesseres i ulike kognitive systemer, og at det er interaksjonen mellom disse tankeprosessene som fører til en dypere læring og forståelse av den presenterte informasjonen. Dette kjenner vi også igjen hos teorien til Duval (2006) når han skriver om skifte av representasjonsregister. Studien til Ott (2018) konkluderer med at det ikke er tilfeldig hvilken kombinasjon av representasjoner som gir best resultater. Kombinasjonene hun undersøkte viste at der en av representasjonene var tekst, hadde større effekt enn kombinasjoner uten tekst. Ott (2018) mener det kan være fordi tekst, eller språk, er den bærende representasjonen for disse elevene. Språket er altså viktig, og studien indikerer at tilgjengeligheten av to representasjoner kan forsterke læring, så lenge den ene representasjonen er bærende. Hvis derimot begge representasjonene er lite kjent for personen, mener Ott (2018) at det kan føre til en kognitiv konflikt, og resultatet kan bli dårligere læring/forståelse. Det er kun når eleven har kunnskaper om, og ferdigheter i, minst en av representasjonene som blir presentert, at eleven vil dra nytte av MER. Dette henger også sammen med det Mason (1996) skriver om bruk av språket i arbeid med generalisering.

2.4 Hva sier læreplanen om algebra og bruk av ulike representasjoner?

Læreplanen bør være et viktig dokument for læreren. Dokumentet er et styringsdokument, og sier noe om hva eleven skal lære, og hvilke aktiviteter læreren skal vektlegge i sin undervisning. Forskning viser derimot at mange lærere stoler på læreboka som styringsdokument. De er trygge på at læreboka har et innhold og en struktur som gjør at målene i læreplanen blir ivaretatt (Gilje et al., 2016).

I Kunnskapsløftet (Udir, 2006) blir ordet representasjon kun brukt i et av kompetansemålene etter 10.trinn, ellers er ikke selve ordet representasjon brukt. Derimot brukes ulike representasjoner i beskrivelser. Det står blant annet at eleven skal kunne bruke både tegninger, tabeller og skisser i tillegg til et mer formelt matematisk språk. Denne beskrivelsen betyr jo at eleven bør få erfaring med å bruke ulike representasjoner i matematikk. I Fagfornyelsen (Udir, 2020) er «Representasjon og kommunikasjon» et av seks kjerneområder. Representasjon i matematikk er forklart som en måte å uttrykke et matematisk begrep, sammenheng eller et matematisk problem på. Det kan gjøres ved hjelp av konkreter, visuelt (f.eks. en tegning), symboler, ved en verbal fremstilling eller kontekstuelt. I beskrivelsen av kjerneområdet står det blant annet at «elevene må kunne omsette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjoner». Det viser at fokuset på representasjoner og overganger mellom representasjonsregistre er tydeliggjort i den nye læreplanen.

Når det gjelder algebra og algebraiske tenkemåter står det blant annet i Kunnskapsløftet (Udir, 2006) at eleven etter 2. trinn skal «*kjenne igjen og samtale om å videreføre strukturer i tallmønster*.» Etter 4. trinn skal de også «*eksperimentere med tallmønster*». Etter 7.trinn skal de «*utforske og beskrive strukturer og forandringer i geometriske mønster og tallmønster med figurer, ord og formler*». Dette kjennetegner algebraisk tenkning, men det er først etter 7.trinn at elevene skal komme fram til en formel. Det er også først etter 7.trinn ordet likning blir brukt i Kunnskapsløftet.

I Fagfornyelsen (Udir, 2020) er kompetansemålene beskrevet etter hvert trinn, bortsett fra 1.trinn, og jeg vil hevde at algebra og algebraisk tenkning er mer fremtredende. Allerede etter 2.trinn skal elevene kunne utforske og beskrive generelle egenskaper ved partall og oddetall. Generalisering blir innført allerede på 2. trinn. Elevene skal kunne kjenne igjen og beskrive repeterende egenskaper i mønster, og de skal lage egne mønster. Etter 3.trinn skal elever beskrive likhet og ulikhet i sammenlikning av størrelser, mengder, uttrykk og tall og bruke likhet- og ulikhetstegnet. I tillegg skal de utforske likevekt og balanse i praktiske situasjoner, og lage algoritmer og uttrykke dem ved hjelp av variabler. Etter 5.trinn brukes begrepet likninger og ulikheter helt konkret. Min oppfattelse er at algebra og algebraisk tenkemåte blir altså innført tidligere, og tydeliggjort, i den nye læreplanen. Under fagrelevans og sentrale verdier står det at: «*Matematikk er eit sentralt fag for å kunne forstå mønster og samanhengar i samfunnet og naturen gjennom modellering og anvendingar. Matematikk skal bidra til at elevane utviklar eit presist språk for resonnering, kritisk tenking og kommunikasjon gjennom abstraksjon og generalisering*.»

Med dette som bakteppe er det ekstra spennende å se på hva lærebøker kommuniserer og forventer av elever på ungdomstrinnet.

2.5 Tidligere forskning på lærebøker og algebra

Det er foretatt en del forskning både på algebra og lærebøker. Harder (2013) har skrevet en master som omhandler bruk av problemløsningsmetoder i algebrakapitler i lærebøker for 1T og R1. Hun fant at ulike problemløsningsmetoder i emnet var dårlig representert. Espeland (2017) skriver også at undervisning i algebra på videregående er preget av regler og algoritmer, og med lite fokus på bakenforliggende begreper. Hun baserer sin forskning både på læreboka og på undervisning i klasserommet.

Kongelf (2019) har gjort et stort arbeid som omhandler algebra og lærebøker på ungdomstrinnet i Norge. Han har undersøkt både introduksjonskapitler og oppgaver som omhandler algebra. Søkelyset hans var på hvordan bøkene omhandlet problemløsning i forbindelse med algebra, og hvilke heuristiske problemløsningsmetoder som ble brukt. Kongelf konkluderte med at bøkene i liten grad bruker generaliserende oppgaver, og at introduksjonene først og fremst dreier seg om manipulasjon av bokstaver, altså transformerende aktiviteter. Han konkluderte også med at lærebøkene ikke introduserer algebra i tråd med læreplanen, og at størstedelen av oppgavene handler om symbolmanipulasjon. Analyser av lærebøker brukt i England (7. trinn) viser at bøkene også der er preget av rutinemessige oppgaver som følger bearbeidete eksempler, og at det sjeldent kreves refleksjon (Hodgen, Küchemann & Brown, 2010).

Naalsund (2012) rettet søkelyset på elevers kompetanse i algebra i sin doktorgrad. Hun fant at prosedyrekunnskap økte fra 8. – 10. trinn når det gjaldt å løse likninger, men at elever, både på 8. og 10. trinn, slet med begrepsmessig forståelse av begrepet ekvivalens. De slet også med å forklare bakenforliggende strukturer på prosedyrer for å løse likninger.

3.0 Metoder

Problemstillingen i oppgaven min handler om hvordan noen lærebøker for ungdomstrinnet legger opp arbeidet med algebra. Dette resulterte i spørsmål som hvilke tilnærmingsmåter bøkene bruker, hvilke representasjoner som brukes og overganger mellom disse, og hvilke algebraiske aktiviteter som blir vektlagt i bøkene. I dette kapitlet vil jeg gi en nærmere beskrivelse av metoden som er brukt for å søke svar på disse spørsmålene. Jeg vil redegjøre for forskningsdesignet, for utvalget, analyseverktøyet og for gyldigheten til studien.

3.1 Lærebokanalyse

For å svare på forskningsspørsmålene mine tolket og analyserte jeg innholdet i lærebøker. Dette kalles lærebokanalyse. Under analysene gikk jeg gjennom empirien flere ganger i arbeidet med å kategorisere aktiviteter og oppgaver, og nye aspekter ved empirien dukket opp underveis. Under vil jeg redegjøre for lærebokanalyse som forskningsdesign og læreboka som forskningsobjekt.

3.1.1 Lærebokanalyse som forskningsdesign

I en lærebokanalyse vil forskeren være løsrevet fra objektet, og forskeren vil ikke kunne påvirke objektet direkte. Sånn sett er forskeren nøytral, altså skilt fra virkeligheten. Dette kjennetegner positivismen (Postholm & Jacobsen, 2018). Men en lærebokanalyse kan likevel vanskelig karakteriseres som helt nøytral. Forskeren har ofte forutinntatte antakelser, som hun/han vil undersøke nærmere. Dette er i seg selv subjektivt. Jeg prøvde å se på innholdet i lærebøkene med et nøytralt blikk, og analysene baserer seg på studier av tekst, eksempler og opptelling av oppgaver. Men eksempler og oppgaver må kodes og kategoriseres, og min forståelse, eller min tolkning av en oppgave, vil alltid være «*en oppfattelse av virkeligheten, ikke virkeligheten i seg selv*» (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 49). Dette kjennetegner en konstruktivistisk epistemologi. Jeg vil definere studien som er en blanding av positivisme og konstruktivisme. Dette kalles post-positivistisk. Et post-positivistisk syn på forskning baserer seg på teorier om at det er vanskelig å skille forskeren og virkeligheten, men at det likevel er mulig å frembringe sann kunnskap om virkeligheten (Postholm & Jacobsen, 2018).

I studien min kategoriserte jeg oppgaver og jeg studerte innledningssekvenser, forklaringer og eksempler med sikte på å belyse forskningsspørsmålene mine. Alt arbeidet gjorde jeg selv. Dette kalles en kvalitativ innholdsanalyse (Grønmo, 2011, s. 201). Studien min vil jeg derfor karakterisere som en kvalitativ innholdsanalyse av lærebøker.

3.1.2 Læreboka som forskningsobjekt

Læreboka er en stabil kilde, og man kan si at læreboka er objektiv. Det er likevel ikke en objektiv kilde til kunnskap/forståelse, for bruken av læreboka er også vesentlig i en læringssituasjon, og bruken er avhengig av dem som bruker den. Det vil altså være et samspill mellom lærer, elev og lærebok i en læringssituasjon. Fan (2013) mener det bør skje et paradigmeskifte i lærebokforskning, der vi ikke bare ser på innhold, men også på bruken av læreboka sammen med innholdet. Jeg har ikke sett på bruken av lærebøkene, selv om det hadde vært veldig interessant, men har valgt å se på innholdet. Siden læreboka er et så viktig verktøy for mange lærere, både når de skal planlegge undervisning og når elever blir satt til å jobbe med matematikk, vil innholdet i bøkene være med på å styre undervisningen. Innholdet er dermed interessant i seg selv. Jeg har valgt å diskutere dette opp mot didaktiske ideer for læring. Analysen min sier altså ikke noe om undervisningen til gruppene som bruker de respektive bøkene, men den sier noe om måten emnet er presentert på i bøkene forhold til teorier om hva som fremmer matematisk forståelse hos elever. Dette vil drøftes nærmere i kapittel 5, diskusjonskapitlet.

3.2 Valg av lærebøker og kapitler

Utvalget av lærebøker er gjort på bakgrunn av at jeg ønsket å studere bøker som var mye brukt. Valget mitt falt blant annet på læreboka til Grunntall, og læreboka til Faktor. Bøkene har vært i bruk på flere skoler i området jeg jobber, og de er representative også nasjonalt (Ryvold, 2018). Læreverket Grunntall gis ut av Elektronisk undervisningsforlag A/S, og kom i forbindelse med kunnskapsløftet i 2006. Forfatterne bak Grunntall er Bjørn Bakke og Inger Nygjelten Bakke. Faktor kom også i 2006, og utgis på J. W. Cappelen Forlag. Forfatterne av Faktor er Espen Hjardar og Jan-Erik Pedersen.

I tillegg til disse to ønsket jeg egentlig å se på lærebøker utgitt i forbindelse med ny læreplan. Da disse ble utgitt seinere enn forespeilet, ønsket jeg å innlemme et annet, men nyere læreverk i studien. Valget falt på Nummer, utgitt på H. Aschehoug & Co (W. Nygaard) i 2014. Forfatterne av dette verket er Arne Hole, Renate Jensen, Helga Kufaas Tellefsen og Anne Karin Wallace. Dette verket ble utgitt etter en revidering av læreplanen i 2013. Jeg har hørt lærere snakke varmt om dette verket, og ut fra det jeg har hørt legges det opp til mye samtale og utforskende undervisning i lærebøkene. Jeg tenkte det kunne være et interessant tilskudd til empirien.

Siden jeg ønsker å rette søkelyset på algebra og introduksjon av dette, har jeg valgt kapitler som introduserer emnet, samt innføring av likninger og ulikheter. I figur 10 presenteres en oversikt over bøker og kapitler.

Læreverk:	**Innhold:**
J. W. Cappelen Forlag	
Faktor 1, kap. 6, Tall og Algebra	Innføring av begrepet algebra, bokstavuttrykk og likningsbegrepet.
Faktor 2, kap. 2, Algebra	Arbeid med bokstavuttrykk, likninger og ulikheter.
Elektronisk undervisningsforlag A/S	
Grunntall 8, kap. 8, Algebra	Innføring av begrepet algebra og bokstavuttrykk
Grunntall 8, kap. 10, Likninger og ulikheter	Innføring og arbeid med begrepet likning og ulikhet.
H. Aschehoug & Co (W. Nygaard)	
Nummer 8, kap. 4, Tall og Algebra	Innføring av begrepet algebra og likningsbegrepet.
Nummer 9, kap. 1, Algebra	Arbeid med algebra og algebraiske regler, samt mer arbeid med likninger og ulikheter.

Tabell 1: Oversikt over bøker og kapitler

3.3 Analyseverktøy

Som et strukturerende redskap i analysen tok jeg utgangspunkt i teori presentert av Charalamous, Delaney, Hsu & Mesa (2010). De strukturerer en lærebokanalyse etter tre nivåer; en horisontal analyse, en vertikal analyse og en kontekstuell analyse. Dette egner seg særlig til komparative analyser, men er også et godt utgangspunkt for min studie.

I en horisontal analyse ser forskeren på hele læreverket som en bit i et utdanningssystem. Den tar for seg generelle karakteristikker og både bakgrunnsinformasjon og oppbyggingen av læreverket gjennomgås grundig (Charalambous et al., 2010).

En vertikal analyse ser nærmere på hvordan læreboka behandler et enkelt matematisk konsept. Den vertikale analysen deles igjen i tre. Den første delen kalles «*kommunikasjon med eleven*». Det er en analyse av introduksjon og eksempler til et emne. Den andre delen er «*hva som forventes av eleven*». Det er en analyse av oppgavesamlingen eller av oppgaver som det er forventet at elever skal gjøre. Den tredje delen av en vertikal analyse er å studere «*sammenhenger*». Sammenhenger ser på hvordan oppgaver henger sammen med andre tema, mellom læreboka og andre klasseromsaktiviteter, og til situasjoner utenfor klasserommet (Charalambous et al., 2010).

En kontekstuell analyse ser på hvordan læreverket blir brukt i en sammenheng, og om læreverket blir brukt etter intensjonene (Charalambous et al., 2010).

I starten av kapittel 4, analysekapitlet, presenteres læreverkene og deres oppbygging. Presentasjonen er ingen horisontal analyse slik Charalambous et al. (2010) definerer det, men en presentasjon av læreverkene med tanke på å gi et bilde av hvordan disse er bygd opp og hvilken plass lærebøkene har i verkene.

Jeg foretok derimot vertikale analyser av lærebøkene med tanke på hva som forventes av elevene og på hvordan bøkene kommuniserer med eleven. Jeg så på hvilke tilnærmingsmåter lærebøkene bruker, altså introduksjoner og eksempler. Dette kalles *kommunikasjon med elever*. Jeg foretok også en analyse av oppgavesamlingen med tanke på overganger mellom representasjoner og algebraiske aktiviteter. Dette er hva Charalambous et al. (2010) kaller å analysere *forventninger til elever*.

På bakgrunn av forskningsspørsmålene mine har jeg funnet, og presentert, teori til bruk i analysen. I analysen av forventninger til eleven, altså oppgavene, ønsket jeg først og fremst å undersøke hva oppgavene forventet med tanke på representasjoner og overganger mellom disse, samt hvilke algebraiske aktiviteter som ble brukt. Jeg brukte teorien til Duval (2002), og utviklet et skjema til analysen. Utgangspunkt var representasjonsregisteret symbolspråk. Dette er et språklig, monofunksjonelt register, og det formelle algebraiske språket hører til dette registeret. Behandling i dette registeret, samt konvertering mellom dette og andre registre, begge veier, danner et av verktøyene for analysen av forventninger. På bakgrunn av dette skjemaet, tabell 2, ble det gjort en opptelling av oppgaver. I tillegg ble alle oppgavene kodet med tanke på hva slags algebraiske aktiviteter de fordret. Altså om oppgavene la opp til transformerende aktiviteter, generaliserende aktiviteter eller aktiviteter på global/meta-nivå.

Behandling i registeret symbolspråk. Eksempelvis algebraisk manipulasjon av likninger eller forenkling av algebrauttrykk.
Konvertering fra naturlig språk til symbolspråk. For eksempel tekstoppgaver som skal løses som en likning (algebraisk).
Konvertering fra symbolspråk til naturlig språk. For eksempel der elever blir bedt om å lage en regnefortelling ut fra et algebraisk uttrykk.
Konvertering fra illustrasjoner til symbolspråk. For eksempel å lage uttrykk for omkrets, areal eller volum av geometriske figurer.
Konvertering fra symbolspråk til illustrasjoner. For eksempel å skulle vise en algebraisk sammenheng ved hjelp av en geometrisk figur.
Konvertering fra tabeller, diagrammer og grafer til symbolspråk. Eksempler på oppgave kan være en graf som skal uttrykkes som et algebraisk uttrykk.
Konvertering fra symbolspråk til tabeller, diagrammer og grafer For eksempel et algebraisk funksjonsuttrykk som skal tegnes inn i et koordinatsystem.

Tabell 2: Oversikt over kategorier til opptelling

Jeg foretok også en analyse av introduksjonen til de ulike emnene og eksempler som ble presentert. Dette er *kommunikasjon med elever* (Charalambous, 2010). Jeg studerte målene som bøkene presenterte til eleven, og hvordan emnene ble presentert. Jeg så på hva slags tilnærmingsmåter bøkene brukte, altså om det var en utforskende tilnærming, eller om reglene ble presentert med etterfølgende eksempler og algoritmer som skulle følges. Eksemplene var også gjenstand analysen, og disse ble kategorisert på bakgrunn av det samme verktøyet som ble brukt i analysen av oppgavene.

I analysene, altså kategoriseringen av oppgaver og eksempler, er det en del overlapping når det gjelder algebraiske aktiviteter og overganger mellom representasjoner. For eksempel vil de fleste oppgavene som blir kategorisert som generaliserende aktiviteter, også kreve en form for konvertering mellom representasjonsregistre. Dette er også gjenstand for diskusjon i kapittel 5, diskusjonskapitlet.

Under arbeidet med analysene ble jeg også klar over språklige forskjeller i bøkene. Det var stor forskjell på selve språket, og på hva språket ble brukt til, og behovet for ny teori meldte seg. I teorikapitlet har jeg derfor et delkapittel, kap.2.3.3, som heter s*pråk som bærende representasjon*. Jeg har dermed vekslet mellom å jobbe deduktivt og induktivt, og dette kalles en abduktiv metode. (Postholm & Jacobsen, 2018)

3.4 Studiens kvalitet

I punktene under vil jeg si noe om kvaliteten på studien min. Validiteten forteller om datamaterialets gyldighet i forhold til funn og resultater med tanke på problemstillingene som skal drøftes. Reliabiliteten forteller om datamaterialets pålitelighet. Det handler om at en oppgave skal være et solid arbeid uten innslag av slurv, enkle løsninger eller snarveier. Til slutt vil jeg foreta noen etiske betraktninger.

3.4.1 Validitet

Grønmo (2011) skriver: «Høy validitet innebærer at undersøkelsesopplegget og datainnsamlingen resulterer i data som er relevante for problemstillingen» (s. 426). Utvalget av empiri er gjort på bakgrunn av bøker som er mye brukt på ungdomstrinnet, og som er skrevet etter den gamle læreplanen. En av bøkene er derimot valgt på bakgrunn av at den er av nyere dato, og er skrevet etter en revidering av læreplanen i 2013. Den nyeste boka er muligens mer påvirket av nyere forskning enn de to som kom i 2006, og jeg syns derfor det var interessant å ta den med i utvalget. Dette er likevel et relativt lite utvalg av lærebøker brukt på ungdomstrinnet, men jeg er trygg på at i hvert fall to av bøkene er mye brukt. Jeg vil påstå at utvalget er gode representanter for lærebøker på ungdomstrinnet, og at datamaterialet derfor vil være relevant for problemstillingen som går ut på å undersøke hvordan noen lærebøker legger opp arbeid med algebra og behandling av representasjoner. Valgt empiri er gyldig i forhold til det forskeren (jeg) ønsker å måle (Dahlum, 2018), og jeg vil hevde at studien har høy indre validitet.

Det er vanlig å skille mellom indre og ytre validitet, der ytre validitet sier noe om resultatene er gode nok til at de kan generaliseres (Dahlum, 2018). Undersøkelsesmetodene jeg har brukt er en systematisk kategorisering av oppgaver og eksempler, samt en mer åpen analyse av mål og introduksjonstekst i alle bøkene. Antall oppgaver og eksempler som er kategorisert og analysert tilsier at jeg får et godt bilde av oppgavetypene i de ulike bøkene. I tillegg foretok jeg en analyse av innledningene. Til sammen ga disse et godt overblikk over hva slags aktiviteter som bøkene vektlegger og hvordan de legger opp arbeidet med algebra. Datainnsamlingen resulterte altså i data som var relevante for min studie, men samtidig er utvalget bøker for snevert til at resultatene kan generaliseres. Det er ikke riktig å si noe om bruken av representasjoner i algebra generelt med bakgrunn i datamaterialet fra min undersøkelse, og studien har derfor en lavere ytre validitet. Skulle den ytre validiteten vært høyere, måtte datagrunnlaget også vært bredere.

Til sammen ga likevel de vertikale analysene av bøkene data som var relevante for problemstillingen min, og jeg fikk et godt bilde av hvordan noen lærebøker legger opp arbeidet med algebra, og på hvilke måter de bruker representasjoner i arbeidet.

3.4.2 Reliabilitet

Grønmo (2011) skriver at «*reliabilitet kommer til uttrykk ved at vi får identiske data dersom vi bruker det samme undersøkelsesopplegget ved ulike innsamlinger av data om de samme fenomenene*» (s. 423). Datamaterialet mitt består av lærebøker, og vil være upåvirket av forskeren(meg) eller andre forhold rundt undersøkelsen. Men, hvis analysemetoden foretas på andre lærebøker vil sannsynligvis resultatet bli annerledes. Dette reflekterer, ifølge Grønmo (2011), forskjeller mellom analyseenhetene, og har ikke noe å si for reliabiliteten til undersøkelsen. Undersøkelsesmetoden har likevel noen svakheter. Et kritisk punkt i undersøkelsen er kategoriseringen av oppgavene. Jeg prøvde å kategorisere oppgavene så objektivt jeg kunne, men uansett er det min tolkning av en oppgave som ligger til grunn for opptellingen. Det gjelder både kodingen av oppgavene og analysen av innledninger og eksempler. Det betyr at hvis en annen person hadde brukte det samme analyseredskapet på datamaterialet, kunne opptellingen blitt noe annerledes. Likevel vil jeg påstå at metoden og analyseredskapet er av en slik art at konklusjonen ville blitt den samme. Det betyr at selve undersøkelsesmetoden har god reliabilitet.

3.4.3 Etiske betraktninger

Som forsker skal man forholde seg både til lover om forskning, og til etiske retningslinjer. Etiske retningslinjer finner man blant annet på nettsida til de nasjonale forskningsetiske komiteene. Retningslinjene handler om hvordan du skal opptre som forsker, og om hvordan du behandler forskningsobjektene dine.

Min studie er en lærebokanalyse, og dokumentene jeg analyserer er offentlige dokumenter som er tilgjengelige for alle. Sånn sett kreves det ikke samtykke for å bruke dokumentene. Det er likevel forfattere som står bak bøkene, og jeg har et ansvar for å behandle dokumentene med respekt.

I en lærebokanalyse av tre bøker vil det være naturlig at det oppstår en viss sammenlikning, selv om studien ikke er en komparativ dokumentanalyse. Bøkene som jeg har analysert er utgitt på forskjellige tidspunkter, to stykker i 2006, og en i 2014. I årene mellom utgivelsene har det skjedd mye forskning på didaktiske temaer innen matematikk, og det vil naturligvis prege bøkene. Dette tar jeg ikke hensyn til i mine analyser, eller i diskusjonen av analysene. Jeg tar heller ikke hensyn til at de ulike læreverkene har kommet med supplementer til bøkene i form av nye oppgavesamlinger eller nye nettsteder. Det er selvfølgelig urettferdig i forhold til sammenlikninger som gjøres. Det er også viktig å huske på at jeg ikke sier noe om undervisningen som foregår i klasserom der læreren bruker de ulike bøkene i analysen. Det har jeg ingen forutsetninger for å si noe om. Jeg sier altså kun noe om hvordan utvalgte lærebøker legger opp arbeidet med algebra i forhold til teorien som jeg presenterer.

4.0 Analyse

Undersøkelsen min handler om hvordan noen lærebøker legger opp arbeidet med algebra, og hvordan de bruker ulike representasjoner i dette arbeidet. Dette søker jeg svar på gjennom å studere introduksjoner, eksempler og oppgaver i bøkene. Jeg ser nærmere på hvilke tilnærmingsmåter bøkene bruker, og hvordan ulike representasjoner, og algebraiske aktiviteter behandlet. I denne delen av oppgaven presenteres de ulike lærebøkene, og funn av ulike tilnærmingsmåter og ulike oppgavetyper i utvalgte kapitler som omhandlet algebra. Først gis det en oversikt over oppbyggingen til de ulike læreverkene som lærebøkene er hentet fra, der generelle karakteristikker, bakgrunnsinformasjon og oppbyggingen av læreverket presenteres. Målet med presentasjonen er å gi en oversikt over lærebokas rolle i læreverkene, men dette tas ikke videre med i kapittel 5, diskusjonskapitlet. Deretter presenteres funn fra den vertikale analysen. Den er todelt. Den ene delen handler om kommunikasjon til eleven, altså introduksjon av emner og eksempler, den andre delen handler om forventninger til eleven, altså oppgavene.

4.1 Presentasjon av læreverkene som inngår i datamaterialet

Under presentasjonen av de ulike læreverkene gis det en oversikt over hvilke elementer læreverkene består av. I presentasjonen vil jeg ikke bruke mye plass på å beskrive de ulike elementene i læreverkene, for det er ikke viktig i forhold til problemstillingen min. Det er likevel på sin plass å gi en oversikt over hele læreverket med tanke på å plassere lærebøkene i læreverket, men også med tanke på etiske hensyn. I studien ser jeg nærmere på lærebøkene til eleven, men av respekt for forfatterne er det viktig å få med at det finnes supplementer til lærebøkene som kanskje vektlegger både arbeidsmåter og oppgavetyper som savnes i lærebøkene. Jeg går ikke inn på ulike oppgavetyper i de ulike delene av læreverkene, men gir en oversikt basert på forlagenes egne ord.

Læreverket Grunntall og læreverket Nummer opererer med en grunnbok til eleven, mens Faktor opererer med en grunnbok samt en tilhørende oppgavebok. Som grunnlag for mine analyser av oppgaver til elever, bruker jeg både grunnboka og oppgaveboka til faktor, mens jeg kun tar utgangspunkt i grunnboka hos Grunntall og Nummer.

4.1.1 Faktor

Forfatterne bak læreverket faktor er Espen Hjardar og Jan Erik Pedersen, og læreverket er utgitt på J.W.Cappelen Forlag AS. Det ble utgitt i forbindelse med at Kunnskapsløftet ble lansert, og 1. utgaven kom i 2006. Bøkene er etterpå blitt revidert, og nye utgaver av lærebøkene ble utgitt i 2014. Bøkene som inngår i min studie, er utgitt i 2006.

Læreverket består av en grunnbok og en oppgavebok som er beregnet på eleven. I tillegg består verket av flere tilleggsbøker som supplerer disse bøkene. Det finnes blant annet en alternativ oppgavebok som følger læreboka, men med enklere eksempler og oppgaver, og det finnes fordypningshefte, eksamensforberedende hefte og et regelhefte. Det finnes også digitale løsninger til bøkene, brettbøker, som har identisk innhold til de trykte bøkene. I tillegg til ekstra hefter beregnet på eleven, finnes lærerens bok beregnet på læreren. Dette er egentlig den samme boka som grunnboka, men med en metodiske tips, åpne oppgaver og henvisninger til oppgaveboka. Læreverket har også en lærerveiledning, men den er etter hvert blitt erstattet med et digitalt nettsted med tilgang til blant annet kapittelprøver, retteskjemaer og terminprøver. Det digitale nettstedet, Faktor 8 – 10, er et nettsted for elever og inneholder interaktive oppgaver i tre vanskegrader. Læreverket er altså bygd opp av flere bøker og oppgavesamlinger, og det er foretatt suppleringer og fornying, spesielt med tanke på det digitale, siden utgivelsen i 2006.

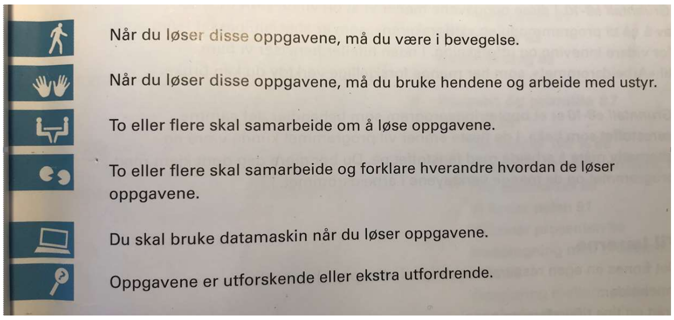
Grunnboka og oppgaveboka følger hverandre med en inndeling av kapitler som omhandler det samme temaet. I grunnboka blir nytt stoff presentert med mål, forklaringer og eksempler, og etter hver presentasjon følger det oppgaver tilpasset det som nettopp er presentert. Noen oppgaver er merket med stjerne. Stjerneoppgaver er oppgaver som anses som litt mer krevende. På slutten av hvert kapittel er det en «Prøv deg selv» med oppgaver som tester det som er gjennomgått i kapitlet. Deretter følger «Noe å lure på». Dette er, ifølge forfatterne, en samling problemløsningsoppgaver. Til slutt i kapitlet følger en oppsummering av viktige sammenhenger og regneregler. Alle kapitlene i grunnboka følger den samme malen. Oppgaveboka følger temaene til grunnboka, med oppgaver tilpasset hvert emne, men her er oppgavene delt opp i tre kategorier. Det er blå, grønne og rosa oppgaver. Blå oppgaver er de enkleste og rosa oppgaver anses som mest krevende. Det naturlige er at eleven velger en av «stiene», altså enten blå, grønne eller rosa oppgaver til hvert emne. Til slutt i hvert kapittel i oppgaveboka følger en oppgavesamling som kalles «Litt av hvert». Det er en diversesamling av oppgaver som repeterer tidligere gjennomgåtte temaer. Helt til slutt i oppgaveboka er det et kapittel viet digitale øvingsoppgaver, før fasiten til oppgavesamlingen kommer. Bøkene presentert over kalles i den videre analysen for lærebøker. Dette er bøker beregnet på normaleleven i et klasserom.

4.1.2 Grunntall

Læreverket Grunntall er skrevet av Bjørn Bakke og Inger Nygjelten Bakke og gitt ut på Elektronisk undervisningsforlag AS i Drammen. Dette læreverket er også utgitt i 2006, altså samtidig som Kunnskapsløftet ble tatt i bruk.

Læreverket består av en grunnbok, og et tilhørende dataopplæringsprogram, Grunntall e8-10, beregnet på eleven. E8-10 inneholder øvingsoppgaver samt opplæring i Geogebra og regneark. I 2014 ble det også utgitt en oppgavesamling som et supplement til grunnboka. Denne kom etter revidering av læreplanen, og ifølge forfatterne består de av sammensatte oppgaver som dekker flere kompetansemål, diskusjonsoppgaver og ekstra utfordrende oppgaver, oppgaver spesielt egnet for graftegner og med fokus på matematisk språk og symboler. Oppgavesamlingen følger kapitteldelingen i boka og har fasit bak i boka. Læreverket består også av ressurspermer beregnet på læreren, og disse finnes både i papir og digitalt. Ifølge lærebokas nettsted inneholder disse blant annet lærerveiledning, ekstraoppgaver av ulik vanskegrad, basisoppgaver for elever med store matematikkvansker, prøver mm.

Grunnboka til eleven innleder hvert kapittel med mål. Deretter introduseres ulike delemner, som etterfølges av regneeksempler og oppgaver. Oppgavene har ulike koder. Blå oppgaver gir innøving av de grunnleggende ferdighetene. Grunnleggende ferdigheter i dette tilfellet er ikke det samme som grunnleggende ferdigheter beskrevet i Kunnskapsløftet, men heller en beskrivelse av primære og nødvendige ferdigheter til det spesielle emnet i faget. Forfatterne anbefaler at alle elevene gjør de blå oppgavene, før de eventuelt går over til de røde (middels vanskegrad) eller grønne (høy vanskegrad) oppgavene. På slutten av hvert kapittel fins det en oppgavesamling, «Vi øver mer», før kapitlet avsluttes med et sammendrag av det som er presentert i kapitlet. Dette gjentas i alle kapitlene i læreboka. På slutten av boka finnes en fasit. I forordet til boka står det at læreverket er laget med fokus på læringsstiler, og at noe av innlæringen foregår gjennom praktiske aktiviteter der eleven kan utforske, være kreative eller problemløsende. De ulike oppgavene er kodet etter hva slags aktivitet de fordrer. Se figur 10.



Figur 10: Oversikt over ulike symboler for oppgavetyper (Bakke & Bakke, 2006, s. 3)

4.1.3 Nummer

Læreverket Nummer er et nyere læreverk enn både Faktor og Grunntall. Forfatterne bak Nummer er Arne Hole, Renate Jensen, Helga Kufaas Tellefsen og Anne Karin Wallace. Det er utgitt på forlaget H. Aschehoug & Co (W Nygaard). Nummer 8 ble utgitt i 2014, mens Nummer 9 ble utgitt i 2015.

I tillegg til læreboka finnes det en parallellbok. Denne boka er beregnet på elever som sliter litt ekstra. Boka har ifølge forlaget lav inngangsterskel og enkle oppgaver og teori som følger strukturen i den ordinære læreboka. Det finnes også et nettsted både for eleven og læreren. Nettstedet for eleven inneholder løsningsforslag til enkelte oppgaver, mer øving, flere utfordringer og opplæring i Geogebra og Excel. Eleven har også tilgang til omvendt undervisning for både grunnboka og parallellboka. Omvendt undervisning består av videosekvenser med forklaringer og eksempler til det som er presentert i bøkene.

I tillegg til dette har verket lærerens bok. Denne er beriket med didaktiske tips til bruk i klasserommet.

Læreboka er delt inn i kapitler og delkapitler. Hvert kapittel innledes med et mål, og hvert delkapittel innledes også med et læringsmål og en begrepsliste. De fleste oppgavene eller aktivitetene har egne koder. Det er koder for samarbeid, ekstra utfordringer, oppgaver som egner seg for å løses i Geogebra eller ved hjelp av regneark, eksamensoppgaver og oppgaver som gir mulighet for kreative løsningsmetoder. Til slutt i hvert delkapittel er det en oppgavesamling som kalles «Hva kan du nå». Denne samlingen oppsummerer målet for delkapitlet, og er ifølge forlaget tenkt å gi et grunnlag for egenvurdering. Helt til slutt i hvert kapittel finnes det en oppgavesamling som oppsummerer kapitlet og et sammendrag av emnet.

4.2 Vertikale analyser av kommunikasjon i lærebøkene

I de kommende avsnittene presenteres funn fra de vertikale analysene av kommunikasjonen i lærebøkene. Her har jeg i all hovedsak tatt for meg teksten og eksemplene i bøkene, men noen steder har det vært nødvendig å se på hvordan teksten og eksemplene følges opp av oppgaver til elevene, siden tekst, eksempler og oppgaver danner en helhetlig sekvens. I kapittel 4.2.1 har jeg sett nærmere på læringsmålene slik de presenteres for eleven, mens i kapittel 4.2.2 tar jeg for meg hvordan ulike delemner i algebra blir introdusert, med særlig fokus på hvordan regneregler og fremgangsmåter formidles. I kapittel 4.2.3 tar jeg for meg hvilke algebraiske aktiviteter som teksten og eksemplene vektlegger, mens i 4.2.4 ser jeg på konvertering mellom representasjonsregister. Til slutt, i 4.2.4, sier jeg noe om selve språket som er brukt i kapitlene som analyseres.

4.2.1 Kommunikasjon av læringsmål

Alle lærebøkene presenterer læringsmål i starten av kapitlene, og målene sier noe om hvilke tilnærmingsmåter i arbeidet med algebra som læreboka vektlegger. To av lærebøkene, Faktor og Grunntall, er ganske like i målene de kommuniserer til elevene. De bruker verb som «lære om», «regne» og «løse». I målet for emnet signaliseres det ikke at eleven skal *bruke* algebra til å utforske sammenhenger, men hovedinntrykket er at de skal *lære om* algebraiske uttrykk og likninger med en ukjent.

I Faktor står det bant annet at eleven skal *«lære om enkle algebraiske uttrykk, regning med tall eller formler og løsning av likninger»* (Hjardar & Pedersen, 2006a, s. 181). Ingen av målene bruker formuleringer som å forstå eller se sammenhenger. Målene i Grunntall signaliserer det samme, men noen av målene signaliserer i enda sterkere grad at læreboka er opptatt av å lære eleven regler i arbeidet med algebra. Det står blant annet at målet er å *«løse likninger ved å bruke flytte-bytteregelen, multiplikasjonsregelen og divisjonsregelen» og «løse større likninger ved å bruke flere av reglene i samme likning»* (Bakke & Bakke, 2006, s. 289). Ordet «regel» går igjen i målene. Nummer signaliserer også bruk av regler i sine mål, og i Nummer 9 står det at eleven skal *«forstå og bruke regneuttrykk der det inngår mer enn en regneoperasjon» og «kjenne til regler for skrivemåter for regneuttrykk, inkludert bruk av «tenkte» parenteser og usynlige regnetegn»* (Hole et al., 2015, s. 10)

De andre målene som kommuniseres i Nummer, skiller seg ut fra målene i både Faktor og Grunntall. Det brukes helt andre verb, og det fører til at forventningene til eleven blir annerledes. I målene brukes verb som forklare, arbeide med, eksperimentere og bruke. Det står blant annet at eleven skal *«kunne forklare hva en variabel, en konstant og en formel er»* og eleven skal kunne *«sette opp regneuttrykk knyttet til praktiske situasjoner og kunne eksperimentere med dem» (Hole et al., 2014, s.253).* Verbene forklare, eksperimentere og bruke skaper en forventning om at eleven ikke bare skal kjenne til regler og kunne bruke dem til symbolmanipulasjon, men at eleven skal forstå regler og bruke dem i en større sammenheng.

Nummer skriver også i målene at eleven skal bruke likninger til å løse praktiske problemer, mens faktor skriver at de skal løse praktiske problem. Det å bruke algebra til å løse problemer, kan sees på som aktiviteter på global/meta-nivå (Kieran, 2004).

4.2.2 Introduksjoner

Når det gjelder introduksjoner er også bøkene ulike. Hovedregelen i introduksjonene til de ulike delemnene i både Faktor og Grunntall, er at begge lærebøkene følger en «tradisjonell» fremgangsmåte. Det vil si at de legger vekt på å presentere regler og gode eksempler som eleven kan følge i sitt arbeid med oppgaver. Nummer har derimot en mer utforskende tilnærmingsmåte.

Faktor begynner alltid hvert delkapittel med en tegning av en situasjon, og tanken er nok at den skal legge opp til en reflekterende samtale. Et eksempel på dette vises i figur 11, og er fra emnet «Uttrykk med variabler» i Faktor 1.

Uttrykk med variabler

Hvis Bent er 10 år, hvor gammel er Hanna da?

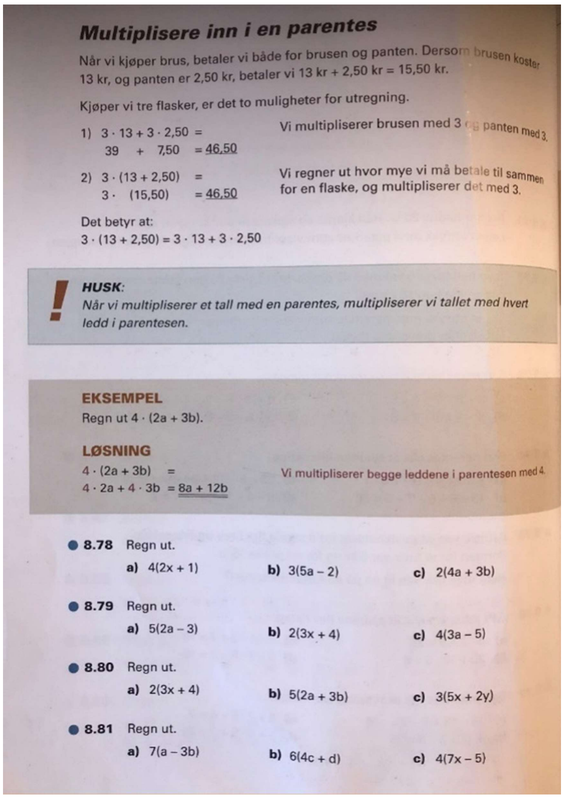
Hanna er tre år eldre enn Bent.

Hvis vi tenker oss at *x* er et tall som står for alderen til Bent, så er alderen til Hanna

Figur 11: Eksempel på introduksjon av uttrykk med variabler (Hjardar & Pedersen, 2006a, s. 185)

Tegningen legger opp til undring rundt bruk av variabler, men i og med at forklaringen på undringen følger rett under tegningen, kan det virke som om illustrasjonen er ment å illustrere hva emnet handler om, heller enn å legge opp til en reflekterende samtale.

Eksemplet i Figur 12 er et annet eksempel på en typisk introduksjon. Eksemplet er hentet fra kapitlet «Algebra» i Grunntall.



Multiplisere inn i en parentes

Når vi kjøper brus, betaler vi både for brusen og panten. Dersom brusen koster 13 kr, og panten er 2,50 kr, betaler vi 13 kr + 2,50 kr = 15,50 kr.

Kjøper vi tre flasker, er det to muligheter for utregning.

1) $3 \cdot 13 + 3 \cdot 2{,}50 =$
$39 + 7{,}50 = \underline{46{,}50}$

Vi multipliserer brusen med 3 og panten med 3.

2) $3 \cdot (13 + 2{,}50) =$
$3 \cdot (15{,}50) = \underline{46{,}50}$

Vi regner ut hvor mye vi må betale til sammen for en flaske, og multipliserer det med 3.

Det betyr at:
$3 \cdot (13 + 2{,}50) = 3 \cdot 13 + 3 \cdot 2{,}50$

HUSK:
Når vi multipliserer et tall med en parentes, multipliserer vi tallet med hvert ledd i parentesen.

EKSEMPEL
Regn ut $4 \cdot (2a + 3b)$.

LØSNING
$4 \cdot (2a + 3b) =$
$4 \cdot 2a + 4 \cdot 3b = \underline{\underline{8a + 12b}}$

Vi multipliserer begge leddene i parentesen med 4.

8.78 Regn ut.
a) $4(2x + 1)$ **b)** $3(5a - 2)$ **c)** $2(4a + 3b)$

8.79 Regn ut.
a) $5(2a - 3)$ **b)** $2(3x + 4)$ **c)** $4(3a - 5)$

8.80 Regn ut.
a) $2(3x + 4)$ **b)** $5(2a + 3b)$ **c)** $3(5x + 2y)$

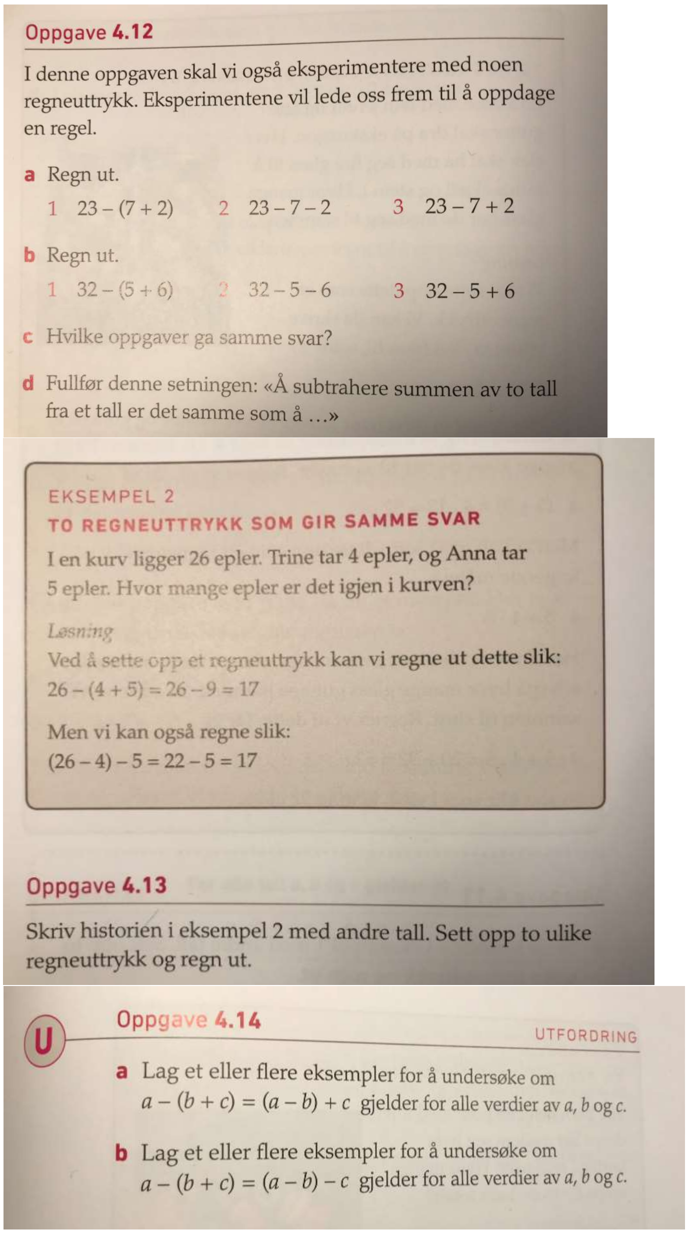
8.81 Regn ut.
a) $7(a - 3b)$ **b)** $6(4c + d)$ **c)** $4(7x - 5)$

Figur 12: Typisk introduksjon i Grunntall (Bakke & Bakke, 2006, s. 228)

Først presenteres noen regneregler, deretter kommer det noen regneeksempler før oppgavene kommer til slutt. I noen av introduksjonene brukes virkeligheten for å illustrere, og i innledningen til Kapitlet algebra står det: «*Vi henter eksempler fra dagliglivet, og ved å bruke algebra kan vi analysere forskjellige problemer fra den virkelige verden*» (Bakke & Bakke, 2006, s. 214). Svært få av eksemplene som følger tar likevel utgangspunkt i dagliglivet eller den virkelige verden, men viser heller et algebraisk uttrykk og hvordan dette kan manipuleres. De algebraiske oppgavene er heller ikke satt i noen sammenheng, og det er ikke forklart nærmere hva bokstavene kan symbolisere. I kapitlet «Likninger og ulikheter» er dette spesielt framtredende. Både i Grunntall og Faktor er emnene innen algebra som jeg har studert, ryddig og oversiktlig presentert. De har en form, eller et oppsett, som går igjen med forklaringer, eksempler og oppgaver. Oppsettet gjenkjennelig for eleven, og eleven kan dermed relativt raskt lære seg fremgangsmåter for bestemte oppgavetyper.

Nummer har også sekvenser der fokuset er på eksempler og regler, og boka har en rask progresjon. I arbeidet med likninger er dette synlig. Først introduseres «holde over» -metoden før boka relativt raskt slår fast at å løse likninger algebraisk vil si å regne seg fram til å få x alene på den ene siden ved hjelp av de fire regningsartene. Algebraisk metode introduseres, og deretter presenteres regelen: «*Når du skal løse en likning kan du addere, subtrahere, multiplisere eller dividere med det samme tallet på begge sider av likningstegnet*.» Det er få oppgaver som legger opp til å øve på det å bruke regneartene hver for seg.

Analysen viser likevel at Nummer har en annen tilnærmingsmåte i de fleste av sine introduksjoner. Dette gjelder spesielt i Nummer 8. I Nummer 8 blir emnene gjerne introdusert med en regnefortelling der noen tall er byttet ut med bokstaver. Eleven blir bedt om å beskrive med ord hva bokstavene står for. Det er altså det naturlige språket og hverdagssituasjoner som er utgangspunktet for introduksjon av begrepet algebra. Symbolene som brukes i algebra er satt inn i en kontekst som elever skal kunne forstå. Det brukes også aritmetiske oppgaver som er utformet slik at eleven selv kan oppdage sammenhenger. Det fremstår som algebraisk tenkning (Blanton, 2008; Mason, 1996) blir vektlagt i arbeidet med regneregler, og boka introduserer svært få regneregler gjennom tekst og eksempler. Dette gjelder både Nummer 8 og 9. Det er samspillet mellom oppgaver og eksempler som fører fram til ulike regneregler, og kommunikasjonen og oppgavene henger derfor nøye sammen. Oppgavestrengen i figur 13 er et eksempel på at oppgaver og eksempel fører eleven fram mot en regel.



Oppgave **4.12**

I denne oppgaven skal vi også eksperimentere med noen regneuttrykk. Eksperimentene vil lede oss frem til å oppdage en regel.

a Regn ut.

1 $23 - (7 + 2)$ 2 $23 - 7 - 2$ 3 $23 - 7 + 2$

b Regn ut.

1 $32 - (5 + 6)$ 2 $32 - 5 - 6$ 3 $32 - 5 + 6$

c Hvilke oppgaver ga samme svar?

d Fullfør denne setningen: «Å subtrahere summen av to tall fra et tall er det samme som å …»

EKSEMPEL 2

TO REGNEUTTRYKK SOM GIR SAMME SVAR

I en kurv ligger 26 epler. Trine tar 4 epler, og Anna tar 5 epler. Hvor mange epler er det igjen i kurven?

Løsning

Ved å sette opp et regneuttrykk kan vi regne ut dette slik:

$26 - (4 + 5) = 26 - 9 = 17$

Men vi kan også regne slik:

$(26 - 4) - 5 = 22 - 5 = 17$

Oppgave **4.13**

Skriv historien i eksempel 2 med andre tall. Sett opp to ulike regneuttrykk og regn ut.

U Oppgave **4.14** UTFORDRING

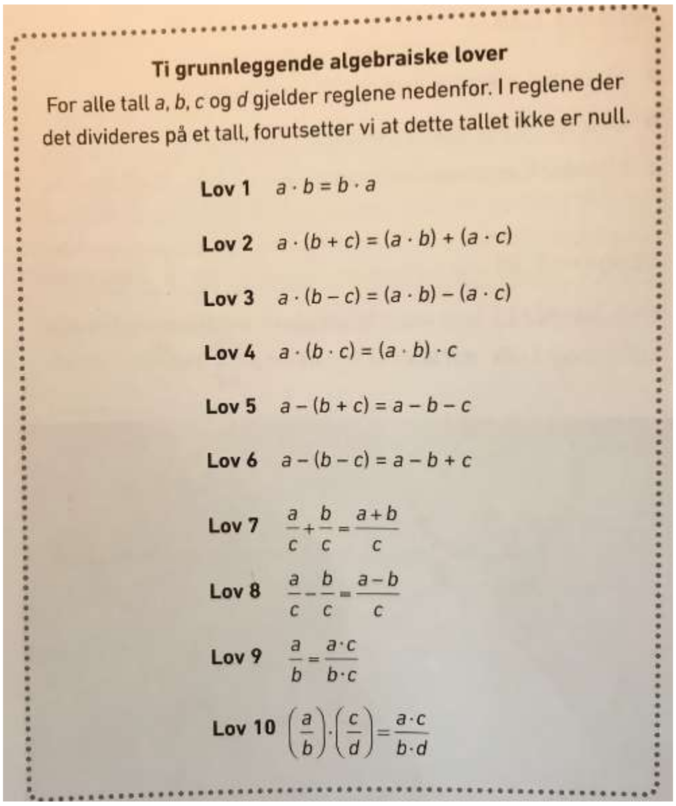
a Lag et eller flere eksempler for å undersøke om $a - (b + c) = (a - b) + c$ gjelder for alle verdier av a, b og c.

b Lag et eller flere eksempler for å undersøke om $a - (b + c) = (a - b) - c$ gjelder for alle verdier av a, b og c.

Figur 13, Oppgavestreng som leder fram til en formel (Hole et al., 2014, s. 262)

I oppgave 4.14 blir det presentert en algebraisk sammenheng, som eleven har hatt mulighet til å oppdage og sette ord på i oppgave 4.12, og som det er gitt mening til gjennom en kontekst og det påfølgende eksemplet om epler. Det å «se» at det algebraiske uttrykket beskriver den aritmetiske sammenhengen, er noe som både Duval (2006) og Mason (1996) fremholder som krevende for elever, samtidig som det er vesentlig for å oppnå matematisk forståelse.

I Nummer 9 fortsetter arbeidet med likninger, og det er fremdeles en utforskende tilnærming til regneregler og algoritmer som preger sidene, men formen forandrer seg. Læringsmålet for kapitlet er at eleven «skal få oversikt over den grunnleggende algebraen som inngår i grunnskolen». Emnet starter med en aktivitet på global/meta-nivå som handler om et tulipanbed, men de neste 45 sidene er preget av arbeid med regneregler og tilhørende oppgaver og målet er å «*forstå og forklare ti algebraiske lover som ligger til grunn for all algebra i grunnskolen*» (Hole et al., 2015)



Ti grunnleggende algebraiske lover

For alle tall *a*, *b*, *c* og *d* gjelder reglene nedenfor. I reglene der det divideres på et tall, forutsetter vi at dette tallet ikke er null.

Lov 1 $a \cdot b = b \cdot a$

Lov 2 $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Lov 3 $a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$

Lov 4 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Lov 5 $a - (b + c) = a - b - c$

Lov 6 $a - (b - c) = a - b + c$

Lov 7 $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

Lov 8 $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Lov 9 $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

Lov 10 $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Figur 14: Ti algebraiske lover som ligger til grunn for all algebra i grunnskolen (Hole et al., 2015, s. 42)

I dette arbeidet brukes den samme fremgangsmåten på hver sekvens. Først skal eleven utforske aritmetiske uttrykk for så å oppdage et mønster. Så presenteres loven som et algebraisk uttrykk. Deretter blir eleven presentert for en regnefortelling og skal jobbe med regnefortellinger selv. Til slutt skal de forklare regelen med egne ord og bruke den i en oppgave. I forhold til sekvensen presentert i figur 13, er det en forskjell. Etter at eleven har utforsket det aritmetiske uttrykket, presenterer boka det algebraiske uttrykket som uttrykker sammenhengen eleven skulle finne. Boka presiserer at den algebraiske regelen uttrykker det eleven fant ut. Boka hjelper altså eleven til å se sammenhengen mellom den aritmetiske sammenhengen og det algebraiske uttrykket.

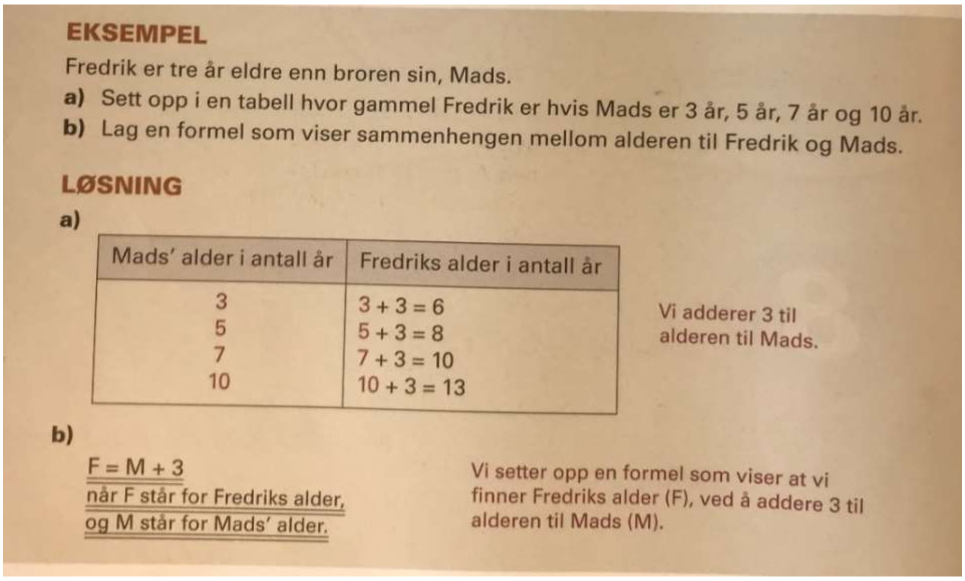
Dette mønsteret repeteres for alle de ti lovene. Boka bruker konsekvent regnefortellinger i arbeidet, og kobler dermed algebraen til virkeligheten. Dette kan hjelpe eleven til å gi mening til reglene. Det brukes lite plass til å dvele ved reglene underveis, og det er få oppgaver der elevene får mulighet til å øve på dem. Til slutt i emnet presenteres noen oppgaver der elevene skal bruke lovene, og eleven må selv vurdere hvilken lov som må brukes.

4.2.3 Algebraiske aktiviteter

I både Faktor og Grunntall er det transformerende aktiviteter som i all hovedsak vektlegges gjennom valg av eksempler. Eksemplene presenteres også på en slik måte at de kan brukes som en mal for hvordan oppgavene kan løses, og eleven får dermed en «oppskrift» de kan bruke for å løse tilsvarende oppgaver. Dette beskriver regelstyrte aktiviteter, der elevene jobber med å manipulere algebraiske uttrykk. Eksempler på slike aktiviteter er presentert i figur 12 i det foregående delkapitlet. Ifølge Mason (1996) er slike aktiviteter strengt tatt ikke algebra. Det er først når det algebraiske språket brukes til å uttrykke sammenhenger, at vi kan kalle det algebra. Analysen av kommunikasjonen i Nummer viser også bruk av transformerende aktiviteter, men eksemplene følges alltid av naturlig språk.

Det å bruke algebra som et verktøy er det som Kieran (2004) kaller en aktivitet på global/meta-nivå. Det kan for eksempel være generaliserende aktiviteter, problemløsning, modellering, bevisføring eller andre aktiviteter der algebra er et nyttig, men ikke et nødvendig verktøy. I analysen av kommunikasjonen til elevene, altså introduksjonen og eksemplene som blir presentert, finner jeg ingen gode eksempler på aktiviteter på global/meta-nivå hverken i Faktor eller i Grunntall. Det kan se ut som at aktiviteter på dette nivået ikke er vektlagt i disse lærebøkene.

I emnet «Hva er algebra?» i Grunntall står det beskrevet at algebra er å «*regne med bokstaver i stedet for tall*», og at det «*kan brukes til å forenkle og analysere forskjellige problemer fra den virkelige verden*» (Bakke & Bakke, 2006, s. 214) Det å bruke algebra som beskrevet over, kan være en aktivitet på global/meta – nivå. I læreboka finner jeg et eksempel som viser en generaliserende aktivitet. (se figur 15)



EKSEMPEL

Fredrik er tre år eldre enn broren sin, Mads.

a) Sett opp i en tabell hvor gammel Fredrik er hvis Mads er 3 år, 5 år, 7 år og 10 år.

b) Lag en formel som viser sammenhengen mellom alderen til Fredrik og Mads.

LØSNING

a)

Mads' alder i antall år	Fredriks alder i antall år
3	3 + 3 = 6
5	5 + 3 = 8
7	7 + 3 = 10
10	10 + 3 = 13

Vi adderer 3 til alderen til Mads.

b)

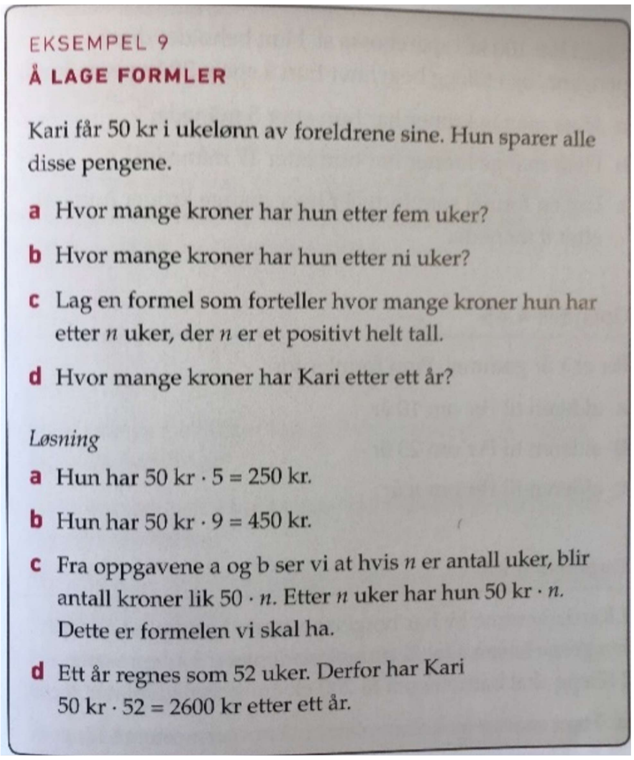
F = M + 3
når F står for Fredriks alder,
og M står for Mads' alder.

Vi setter opp en formel som viser at vi finner Fredriks alder (F), ved å addere 3 til alderen til Mads (M).

Figur 15: Generalisering som introduksjon til algebra (Bakke & Bakke, 2006, s. 114)

Eksemplet som presenteres, handler om å lage en formel ut fra en enkel regnefortelling. Det er altså et kvantitativt problem som leder til en algebraisk sammenheng, og algebra introduseres i form av en generaliserende aktivitet av type 1. I løsningen i eksemplet settes det opp en tabell som viser alderen til Mads og alderen til Fredrik. Ved siden av tabellen er det en forklaring, i naturlig språk, på hva som skjer. Formelen er skrevet på formen F = M + 3, og det forklares at F står for alderen til Fredrik og at M står for alderen til Mads. Eksempelet viser en typisk fremgangsmåte som kan brukes på oppgaver på denne formen. Vi ser flere skifter av representasjoner i eksemplet. Den matematiske sammenhengen blir først presentert ved hjelp av et naturlig språk, før den blir overført til en tabell og så presentert som en formel i registeret symbolspråk. Slike skifter av representasjonsregister er nettopp hva Duval (2006) mener er viktig for å oppnå forståelse i matematikk. De påfølgende oppgavene i delemnet følger samme form, og eleven kan følge samme fremgangsmåte som i eksemplet. Introduksjonen kommuniserer til eleven at algebra kan brukes til å analysere problemer fra virkeligheten, og eksemplet bruker generalisering som aktivitet. I dette eksemplet brukes altså både representasjoner i registeret naturlig språk, symbolspråk og i tabeller, diagrammer og grafer. Men selv om dette er en generaliserende aktivitet, vil jeg ikke kalle det en aktivitet på global/meta-nivå. En aktivitet på det nivået bør kreve mer i form av å resonnere rundt et problem, der algebra kan være et nyttig verktøy.

I Nummer viser analysen flere eksempler på generaliserende aktiviteter. I emnet «å lage formler» er målet at eleven skal «kunne sette opp formler som uttrykker sammenhenger i praktiske situasjoner». Eksemplet i figur 17 er en generaliserende aktivitet av type 1, og legger opp til at eleven først må regne noen talleksempler for å finne systemet, for så å finne formelen. Dette eksemplet bruker samme fremgangsmåte som eksemplet fra Grunntall, selv om det ikke legges opp til bruk av tabell i arbeidet. Til forskjell fra eksemplet i figur 15, gjør eksemplet i figur 16 også bruk av formelen i det siste spørsmålet. Sånn sett kan eksemplet kategoriseres som en aktivitet på global/meta-nivå.


EKSEMPEL 9

Å LAGE FORMLER

Kari får 50 kr i ukelønn av foreldrene sine. Hun sparer alle disse pengene.

a Hvor mange kroner har hun etter fem uker?

b Hvor mange kroner har hun etter ni uker?

c Lag en formel som forteller hvor mange kroner hun har etter n uker, der n er et positivt helt tall.

d Hvor mange kroner har Kari etter ett år?

Løsning

a Hun har 50 kr · 5 = 250 kr.

b Hun har 50 kr · 9 = 450 kr.

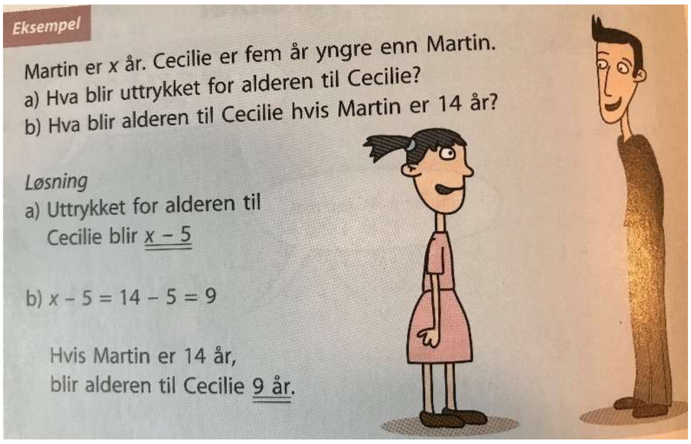
c Fra oppgavene a og b ser vi at hvis n er antall uker, blir antall kroner lik $50 \cdot n$. Etter n uker har hun 50 kr · n. Dette er formelen vi skal ha.

d Ett år regnes som 52 uker. Derfor har Kari 50 kr · 52 = 2600 kr etter ett år.

Figur 16: Eksempel på generalisering (Hole et al., 2014, s. 281)

De første oppgavene som følger etter eksemplet er laget slik at eksemplet kan følges, men etter hvert øker vanskegraden og eleven skal generalisere både fyrstikkfølger og rene tallfølger.

I Faktor er det som sagt lagt lite vekt på aktiviteter på global/meta-nivå, men det finnes noen eksempler som innehar en form for generalisering. I eksemplet i figur 17 blir eleven bedt om å lage et generelt uttrykk for alderen til en person. Det å lage slike uttrykk fra et kvantitativt problem, er det som Kieran (2004) kaller generalisering av type 1.



Eksempel

Martin er x år. Cecilie er fem år yngre enn Martin.
a) Hva blir uttrykket for alderen til Cecilie?
b) Hva blir alderen til Cecilie hvis Martin er 14 år?

Løsning
a) Uttrykket for alderen til Cecilie blir $\underline{\underline{x - 5}}$

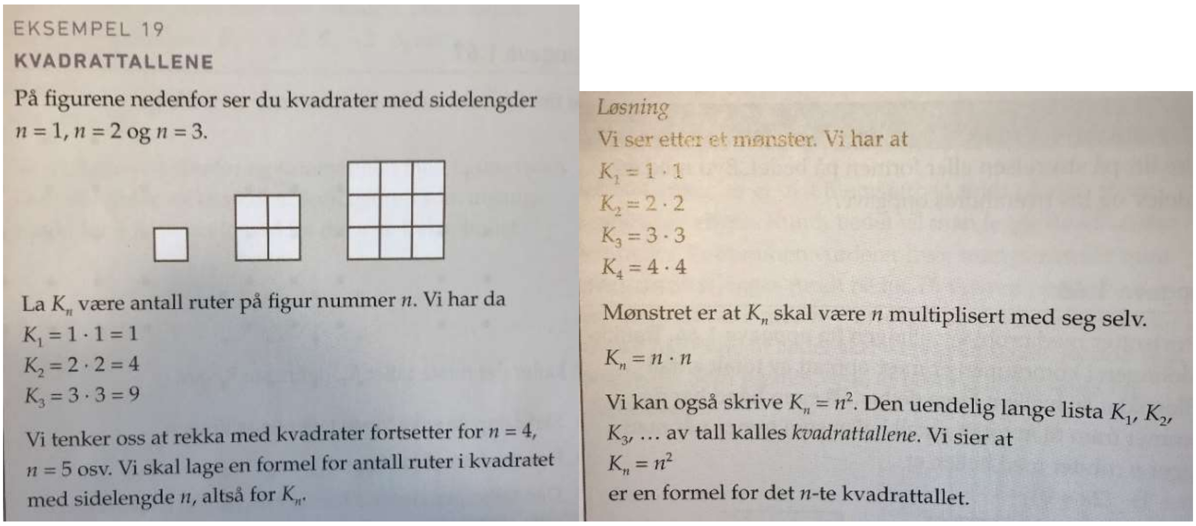
b) $x - 5 = 14 - 5 = 9$

Hvis Martin er 14 år, blir alderen til Cecilie $\underline{\underline{9 \text{ år}}}$.

Figur 17: Eksempel på generalisering (Hjardar & Pedersen, 2006a, s. 186)

Eksemplet har ingen «streng» som kan hjelpe eleven i tankeprosessen, og selv om det kreves generalisering, viser ikke eksemplet noen prosess for generalisering. Det slås bare fast at alderen kan uttrykkes som x-5. Dette uttrykket brukes til å regne ut alderen til Cecilie. Det å anvende algebra på matematiske problemer, kan sees på som en aktivitet på global/meta-nivå. På dette nivået (8. trinn) vil jeg likevel ikke si at det kreves særlig resonnering, og jeg vil ikke definere oppgaven i eksemplet hverken som et problem, eller en modelleringsoppgave. Jeg mener heller ikke at oppgaven viser nytten av å bruke algebra som et verktøy. Jeg valgte derfor å ikke kategorisere dette som en aktivitet på global/meta-nivå, uavhengig av om eksemplet bruker det algebraiske uttrykket til å finne alderen til Cecilie.

I Nummer 9 følges temaet generalisering opp med utgangspunkt i regnefortellinger, figurtall eller rene tallfølger. Jeg velger å ta med nok et eksempel (figur 18) da det skiller seg vesentlig fra de andre eksemplene jeg har vist.



EKSEMPEL 19

KVADRATTALLENE

På figurene nedenfor ser du kvadrater med sidelengder $n = 1$, $n = 2$ og $n = 3$.

La K_n være antall ruter på figur nummer n. Vi har da

$K_1 = 1 \cdot 1 = 1$
$K_2 = 2 \cdot 2 = 4$
$K_3 = 3 \cdot 3 = 9$

Vi tenker oss at rekka med kvadrater fortsetter for $n = 4$, $n = 5$ osv. Vi skal lage en formel for antall ruter i kvadratet med sidelengde n, altså for K_n.

Løsning
Vi ser etter et mønster. Vi har at

$K_1 = 1 \cdot 1$
$K_2 = 2 \cdot 2$
$K_3 = 3 \cdot 3$
$K_4 = 4 \cdot 4$

Mønstret er at K_n skal være n multiplisert med seg selv.

$K_n = n \cdot n$

Vi kan også skrive $K_n = n^2$. Den uendelig lange lista K_1, K_2, K_3, … av tall kalles *kvadrattallene*. Vi sier at
$K_n = n^2$
er en formel for det n-te kvadrattallet.

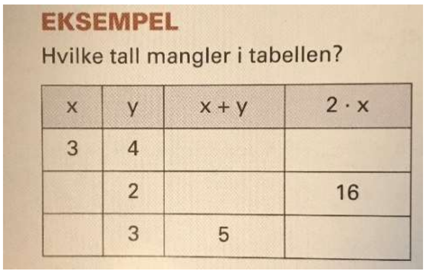
Figur 18: Bruk av språk i arbeid med generalisering (Hole et al., 2015, s. 61)

Eksemplet skiller seg ut både fordi det tar utgangspunkt i et geometrisk mønster, altså generalisering av type 2, men også på grunn av språket. I dette eksemplet er språket «matematisk korrekt», eller mer formelt. Det står blant annet: «*på figurene nedenfor ser du kvadrater med sidelengder n=1, n=2 og n=3*. La K_n være (…)» osv. Språket i eksemplet presentert i figur 16 er på en helt annen form. Det står: «Kari får 50 kroner i ukelønn av foreldrene sine. Hun sparer alle disse pengene». Eksemplet i figur 18 viser at språket i Nummer 9 beveger seg mot et mer formelt matematisk språk. Bruk av naturlig språk som representasjon kommer jeg tilbake til i kapittel 4.2.5.

4.2.4 Konvertering mellom representasjonsregister

I analysen av kommunikasjonen kategoriserte jeg også aktiviteter som krevde skifte av representasjonsregister. Totalt fant jeg fire eksempler på dette i Faktor. Eksemplet presentert i figur 17 er et typisk eksempel som viser skifte av representasjonsregister. I eksemplet er beskrivelsen *«Martin er x år. Cecilie er fem år yngre enn Martin.»* en representasjon i naturlig språk, mens svaret på a) og utregningen i b) gis i symbolspråk. Det skjer altså en konvertering fra naturlig språk til symbolspråk.

Grunntall har få eksempler som krever skifte av representasjonsregister. Bortsett fra eksemplet som handler om generalisering (figur 15) finner jeg ingen. I det siste delemnet i kapitlet «Algebra» finner jeg likevel et interessant eksempel. Emnet kalles «Formler i tabell», og her tar boka i bruk tabeller i arbeid med algebra. I eksemplet kreves ingen konvertering mellom representasjonsregister, men kun behandling i symbolspråk. Likevel bruker boka en tabell i arbeidet (se figur 19), og det er en representasjon som hører hjemme i representasjonsregisteret tabeller, diagrammer og grafer.



EKSEMPEL

Hvilke tall mangler i tabellen?

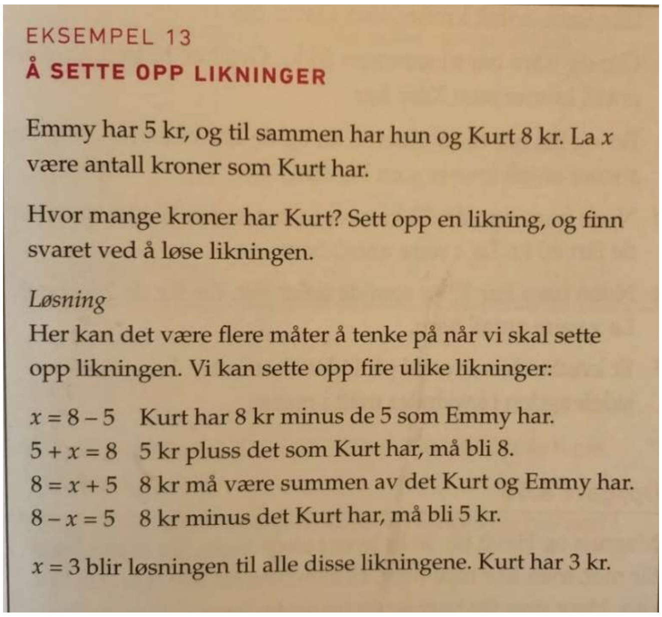
x	y	x + y	2 · x
3	4		
	2		16
	3	5	

Figur 19: Eksempel på bruk av tabell (Bakke & Bakke, 2006, s. 230)

Tabellen inneholder verdier av x og y, men også algebraiske uttrykk. Tabellen brukes ikke til å finne et funksjonsuttrykk, men i tabellen må eleven regne «begge veier» i arbeidet med uttrykkene. Han/hun må både finne verdier for bokstavene, og de må sette verdier inn i algebraiske uttrykk.

Analysen viser at Nummer vektlegger skifte av representasjoner i sine eksempler. Under delemnet *«Å lage og tolke regneuttrykk»* er læringsmålene at eleven skal kunne *«lage regneuttrykk til praktiske situasjoner og lage praktiske situasjoner som passer til oppgitte regneuttrykk»* (Hole et al., 2014, s. 266). Det siste målet forteller at eleven skal jobbe «begge veier». Eleven skal kunne lage regneuttrykk av regnefortellinger, men også regnefortellinger til regneuttrykk. Det betyr at eleven skal konvertere fra naturlig språk til symbolspråk, og fra symbolspråk til naturlig språk. Konvertering mellom representasjonsregister, begge veier, er viktig for å fremme matematisk forståelse (Duval, 2006), og i boka brukes begge representasjonsformene i de aller fleste eksemplene.

Boka har også en interessent tilnærming til begrepet likninger. Eksemplet som blir presentert i figur 20 er et eksempel på at det er det å sette opp en likning, heller enn å løse den, som boka setter søkelyset på i introduksjonen av likninger.


EKSEMPEL 13
Å SETTE OPP LIKNINGER

Emmy har 5 kr, og til sammen har hun og Kurt 8 kr. La x være antall kroner som Kurt har.

Hvor mange kroner har Kurt? Sett opp en likning, og finn svaret ved å løse likningen.

Løsning
Her kan det være flere måter å tenke på når vi skal sette opp likningen. Vi kan sette opp fire ulike likninger:

$x = 8 - 5$	Kurt har 8 kr minus de 5 som Emmy har.
$5 + x = 8$	5 kr pluss det som Kurt har, må bli 8.
$8 = x + 5$	8 kr må være summen av det Kurt og Emmy har.
$8 - x = 5$	8 kr minus det Kurt har, må bli 5 kr.

$x = 3$ blir løsningen til alle disse likningene. Kurt har 3 kr.

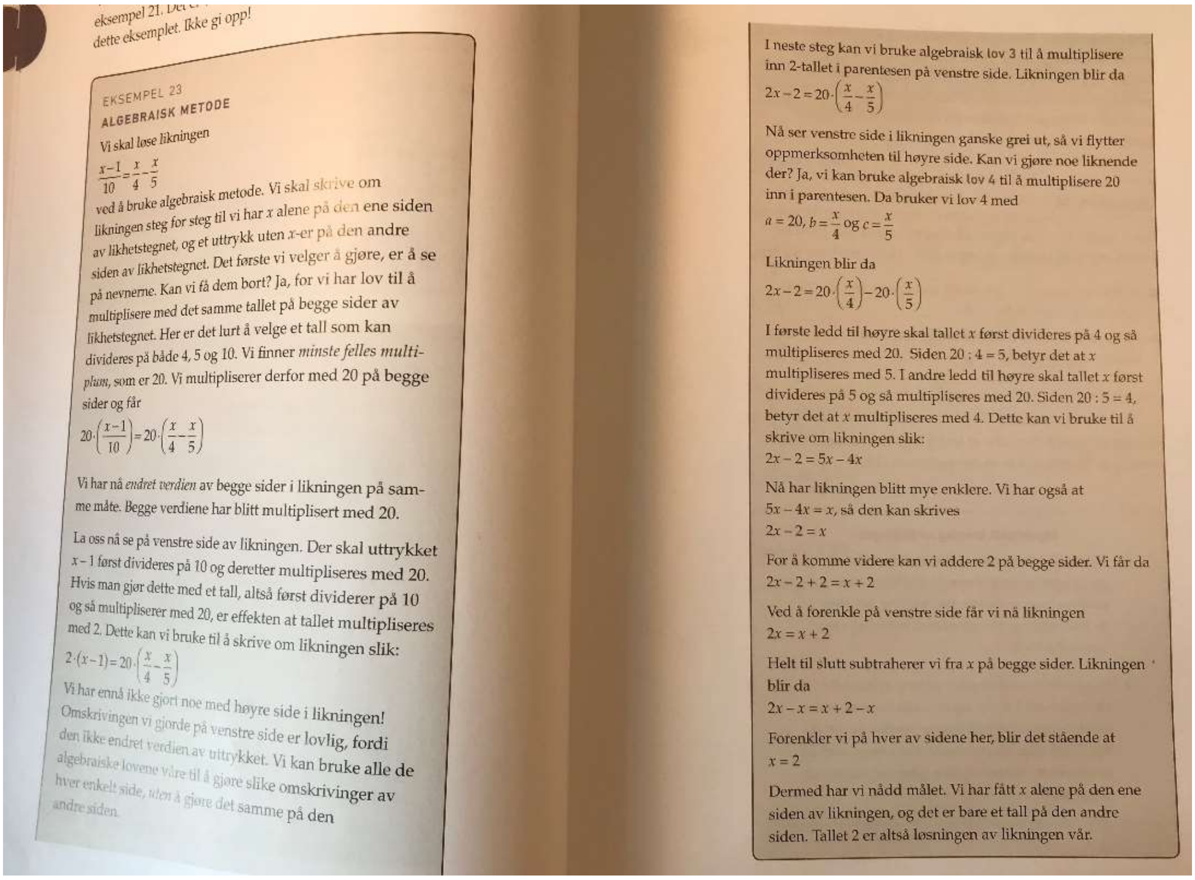
Figur 20: Eksempel på å sette opp likninger (Hole et al., 2014, s. 289)

I eksemplet tar boka utgangspunkt i en enkel tekst, for så å sette opp fire ulike likninger algebraisk. Det å sette opp likninger på denne måten er konvertering fra naturlig språk til symbolspråk, men det som er spesielt er at boka setter opp fire ulike algebraiske uttrykk som alle kan uttrykke sammenhengen gitt i teksten. Jeg tolker dette som at boka setter søkelys på begrepet ekvivalens, og ikke på løsningsmetoder. Ifølge Naalsund (2012) er problemer med forståelse av ekvivalensbegrepet en av årsakene til at elever sliter med algebra, og begrepsforståelse er også en forutsetning for relasjonell forståelse (Skemp, 2006). Alle uttrykkene forklares ved hjelp av naturlig språk, og det foregår konvertering begge veier. Eksemplet viser konvertering mellom naturlig språk og symbolspråk, og mellom symbolspråk og naturlig språk.

4.2.5 Naturlig språk som representasjon

Under arbeidet med analysene av oppgaver, eksempler og innledninger ble jeg ekstra var språket som ble brukt i bøkene. Språket, og da mener jeg først og fremst naturlig språk, fremstår som ganske ulikt i de tre bøkene. Dette gjelder både når det kommer til mengden språk og hvordan selve språket fremstår sammen med oppgaver, introduksjoner og eksempler.

Når det gjelder mengden språk skiller Nummer seg ut. Læreboka har mye bruk av det naturlige språket, både i introduksjoner, eksempler og i oppgavene. Figur 21 viser to sider fra Nummer 9. Eleven presenteres for en likning som skal løses ved hjelp av algebraisk metode. Forklaringen er ganske omfattende, og jeg opplever at det stilles store krav til eleven med tanke på språket.



eksempel 21. Det e… dette eksemplet. Ikke gi opp!

EKSEMPEL 23

ALGEBRAISK METODE

Vi skal løse likningen

$$\frac{x-1}{10}=\frac{x}{4}-\frac{x}{5}$$

ved å bruke algebraisk metode. Vi skal skrive om likningen steg for steg til vi har x alene på den ene siden av likhetstegnet, og et uttrykk uten x-er på den andre siden av likhetstegnet. Det første vi velger å gjøre, er å se på nevnerne. Kan vi få dem bort? Ja, for vi har lov til å multiplisere med det samme tallet på begge sider av likhetstegnet. Her er det lurt å velge et tall som kan divideres på både 4, 5 og 10. Vi finner *minste felles multiplum*, som er 20. Vi multipliserer derfor med 20 på begge sider og får

$$20\cdot\left(\frac{x-1}{10}\right)=20\cdot\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{5}\right)$$

Vi har nå *endret verdien* av begge sider i likningen på samme måte. Begge verdiene har blitt multiplisert med 20.

La oss nå se på venstre side av likningen. Der skal uttrykket $x-1$ først divideres på 10 og deretter multipliseres med 20. Hvis man gjør dette med et tall, altså først dividerer på 10 og så multipliserer med 20, er effekten at tallet multipliseres med 2. Dette kan vi bruke til å skrive om likningen slik:

$$2\cdot(x-1)=20\cdot\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{5}\right)$$

Vi har ennå ikke gjort noe med høyre side i likningen! Omskrivingen vi gjorde på venstre side er lovlig, fordi den ikke endret verdien av uttrykket. Vi kan bruke alle de algebraiske lovene våre til å gjøre slike omskrivinger av hver enkelt side, *uten* å gjøre det samme på den andre siden.

I neste steg kan vi bruke algebraisk lov 3 til å multiplisere inn 2-tallet i parentesen på venstre side. Likningen blir da

$$2x-2=20\cdot\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{5}\right)$$

Nå ser venstre side i likningen ganske grei ut, så vi flytter oppmerksomheten til høyre side. Kan vi gjøre noe liknende der? Ja, vi kan bruke algebraisk lov 4 til å multiplisere 20 inn i parentesen. Da bruker vi lov 4 med

$a=20$, $b=\frac{x}{4}$ og $c=\frac{x}{5}$

Likningen blir da

$$2x-2=20\cdot\left(\frac{x}{4}\right)-20\cdot\left(\frac{x}{5}\right)$$

I første ledd til høyre skal tallet x først divideres på 4 og så multipliseres med 20. Siden $20:4=5$, betyr det at x multipliseres med 5. I andre ledd til høyre skal tallet x først divideres på 5 og så multipliseres med 20. Siden $20:5=4$, betyr det at x multipliseres med 4. Dette kan vi bruke til å skrive om likningen slik:

$$2x-2=5x-4x$$

Nå har likningen blitt mye enklere. Vi har også at $5x-4x=x$, så den kan skrives

$$2x-2=x$$

For å komme videre kan vi addere 2 på begge sider. Vi får da

$$2x-2+2=x+2$$

Ved å forenkle på venstre side får vi nå likningen

$$2x=x+2$$

Helt til slutt subtraherer vi fra x på begge sider. Likningen blir da

$$2x-x=x+2-x$$

Forenkler vi på hver av sidene her, blir det stående at

$$x=2$$

Dermed har vi nådd målet. Vi har fått x alene på den ene siden av likningen, og det er bare et tall på den andre siden. Tallet 2 er altså løsningen av likningen vår.

Figur 21: Algebraisk metode med tilhørende forklaring, (Hole et al., 2015, s. 74 og 75)

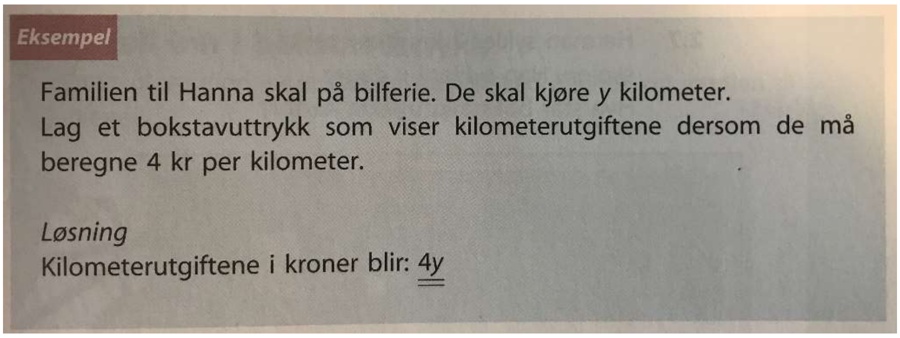
Forfatterne bruker generelt mange ord når de kommuniserer med elevene, og i forordet blir også eleven oppfordret til å sette ord på hvordan han/hun har tenkt. Læreboka legger opp til mye bruk av det naturlige språket som representasjon, både i form av at elever skal diskutere sammen, forklare med egne ord, skrive med egne ord og lage egne regnefortellinger.

I Faktor derimot, er sidene luftige og mengden språk er mye mindre. Det naturlige språket brukes i introduksjoner, eksempler og oppgaver, men setningene er ofte korte og konsise. Det legges heller ikke opp til at elever skal bruke det naturlige språket, hverken muntlig eller skriftlig. Dette gjenspeiles også i analysen av oppgavene som viste at få oppgaver, 2%, krever konvertering fra symbolspråk til naturlig språk.

Mengden språk i Grunntall er også betydelig mindre enn i Nummer. I Grunntall brukes det naturlige språket i introduksjoner og i eksempler, mens i oppgavene er det lite bruk av det naturlige språket. Analysen av oppgavene viste også at ca. 90% av oppgavene er transformerende aktiviteter, og ingen av oppgavene vektla at elevene selv skulle bruke det naturlige språket som representasjon.

Formen på selve språket ble også gjenstand for min oppmerksomhet. I Grunntall har det naturlige språket en plass i eksemplene på den måten at det brukes til å forklare hva som skjer på de ulike stegene i løsningen. Det naturlige språket har dermed en rolle som «støtterepresentasjon» i arbeidet. Det foregår ikke nødvendigvis noen konvertering til eller fra naturlig språk som representasjon, men jeg vil likevel si at det naturlige språket kan ha en viktig funksjon. Selve språket fremstår som naturlig for en elev på det trinnet, og det kommuniseres direkte til eleven. Det kan blant annet stå: «*Syns du det er litt* *vanskelig å regne sammen når leddene står om hverandre, kan du samle dem før du regner sammen»* (Bakke & Bakke, 2006, s. 220). Dette er ikke et typisk matematisk språk, men et språk som nok virker naturlig for en elev på 8. trinn.

Faktor har også lite tekst, og teksten som brukes er ofte konsis. Eksemplet i figur 22 viser et eksempel som krever konvertering fra naturlig språk til symbolspråk.



Eksempel

Familien til Hanna skal på bilferie. De skal kjøre *y* kilometer.
Lag et bokstavuttrykk som viser kilometerutgiftene dersom de må beregne 4 kr per kilometer.

Løsning

Kilometerutgiftene i kroner blir: $\underline{\underline{4y}}$

Figur 22: Eksempel på bruk av språk i Faktor (Hjardar og Pedersen, 2006c, s. 39)

I teksten står det: «De skal kjøre y kilometer». I Faktor er ofte det naturlige språket iblandet typiske matematiske symboler. Det at språket er så konsist, og ofte inneholder flere matematiske symboler, er ikke uproblematisk. Dette blir behandlet nærmere i kapittel 5, diskusjonskapitlet.

I Nummer 8 tas det ofte utgangspunkt i situasjoner fra hverdagen, som beskrives i et naturlig språk uten innslag av matematiske symboler. I kapitlet «Algebra» i Nummer 9 endres formen på kommunikasjonen. Språket blir mer formelt, og med et stort innslag av matematiske symboler. Det kan for eksempel stå: «Bruk de algebraiske lovene til å bevise at for alle tall, x, y, z og w gjelder $(x + y) \cdot (z - w) = xz + yz - xw - yw$» (Hole et al., 2015, s. 52). Eksemplet i figur 18 er et annet eksempel på språk i Nummer 9. Et språk mettet med matematiske symboler kan være vanskelig tilgjengelig for mange elever. Det er abstrakt, og det er nettopp denne abstraktheten som gjør algebra vanskelig tilgjengelig.

4.3 Vertikale analyser av forventninger til elever

I dette delkapitlet presenteres resultatene fra de vertikale analysene av forventninger til eleven, altså oppgavene. Først gis det en oversikt over kategoriseringen av oppgavene med tanke på om det kreves behandling i registeret symbolspråk, eller om det kreves konvertering mellom ulike registre. Deretter presenteres eksempler fra de ulike kategoriene slik de fremkom i analysen. Til slutt presenteres funn på bakgrunn av algebraiske aktiviteter slik de er beskrevet av Kieran (2004).

Den første kategorien oppgaver som presenteres, transformerende aktiviteter, krever kun behandling i registeret symbolspråk. Deretter presenteres oppgaver som krever konvertering mellom språklige registre, konvertering mellom illustrasjoner og symbolspråk og oppgaver som krever andre konverteringer. Til slutt presenteres generaliserende aktiviteter og aktiviteter på global/meta-nivå.

Underveis vil jeg også presenterer noen ikke-typiske oppgaver som jeg fant interessante i datamaterialet mitt.

4.3.1 Oversikt over antall oppgaver av ulik karakter med tanke på overganger mellom representasjoner.

Oversikten i tabell 3 gir et bilde av fordelingen av de ulike kategoriene med tanke på overganger mellom representasjoner. Antallet oppgaver i hver bok kan være misvisende når det gjelder forventninger til eleven. I Nummer la flere oppgaver opp til både konvertering fra naturlig språk til symbolspråk, og fra symbolspråk til naturlig språk. Noen av oppgavene valgte jeg derfor å dele opp i a og b, slik at de er notert under begge kategoriene. Faktor opererer med en oppgavebok som er tredelt på bakgrunn av nivå. Det er dermed ikke forventet at eleven skal gjøre alle oppgavene, men kun en tredel. Det samme gjelder for Grunntall som har nivådelte oppgaver. Dette fører til at antallet oppgaver i lærebøkene kan gi et noe misvisende bilde når det gjelder forventning til enkelteleven, men fordelingen av kategoriene gir likevel et godt bilde av forventninger når det gjelder hvilke aktiviteter som oppgavene fordrer.

Antall oppgaver/ Lærebok	**Faktor**	**Grunntall**	**Nummer**	**Totalt**
Behandling i registeret symbolspråk.	182	189	78	449
Konvertering fra naturlig språk til symbolspråk.	63	16	102	182
Konvertering fra symbolspråk til naturlig språk.	6		40	46
Konvertering fra illustrasjoner til symbolspråk.	14		11	25
Konvertering fra symbolspråk til illustrasjoner.	1		1	2
Konvertering fra Tabeller, diagrammer og grafer til symbolspråk.				
Konvertering fra symbolspråk til tabeller, diagrammer og grafer.				
Andre oppgaver	4	6	8	18
Totalt antall oppgaver i bøkene	270	211	240	722

Tabell 3: Oversikt over ulike konverteringer/behandling som oppgaver i de ulike bøkene fordrer.

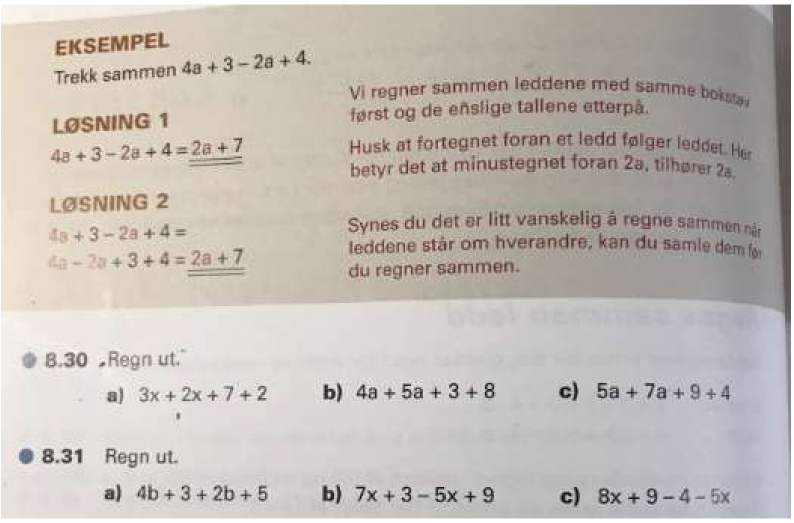
4.3.2 Transformerende aktiviteter

I oversikten som er presentert i tabell 3, vil oppgaver som krever behandling i registeret symbolspråk i denne studien stort sett tilsvare transformerende aktiviteter slik de er beskrevet hos Kieran (2004). Jeg har derfor valgt å slå sammen presentasjonen av oppgaver som krever behandling i symbolspråk og transformerende aktiviteter.

Den vertikale analysen av lærebøkene bekrefter noen av hypotesene mine. Opptellingen av viser at ca. 70% av alle oppgavene i Faktor, og ca. 90% av oppgavene i Grunntall er transformerende aktiviteter. Analysen av Nummer viser en annen fordeling av kategorier enn forventet. Læreverket hadde andre forventninger til eleven, og det var bare i overkant av 30% av oppgavene i Nummer som la opp til transformering.

Typiske aktiviteter i denne kategorien er å trekke sammen algebraiske uttrykk eller å løse likninger algebraisk. Oppgavene krever kun behandling i representasjonsregisteret symbolspråk. Både i Faktor og i Grunntall er de fleste oppgavene på denne formen.

Grunntall bruker gjerne situasjoner fra hverdagslivet i forklaringssekvensene til oppgavene, mens eksemplene i boka viser symbolmanipulasjon. Når det kommer til hva som forventes av eleven er det også symbolmanipulasjon, altså transformerende aktiviteter som dominerer. Figur 23 viser en typisk sekvens hentet fra Grunntall.



EKSEMPEL
Trekk sammen $4a + 3 - 2a + 4$.

LØSNING 1
$4a + 3 - 2a + 4 = \underline{\underline{2a + 7}}$

Vi regner sammen leddene med samme bokstav først og de enslige tallene etterpå.

Husk at fortegnet foran et ledd følger leddet. Her betyr det at minustegnet foran 2a, tilhører 2a.

LØSNING 2
$4a + 3 - 2a + 4 =$
$4a - 2a + 3 + 4 = \underline{\underline{2a + 7}}$

Synes du det er litt vanskelig å regne sammen når leddene står om hverandre, kan du samle dem før du regner sammen.

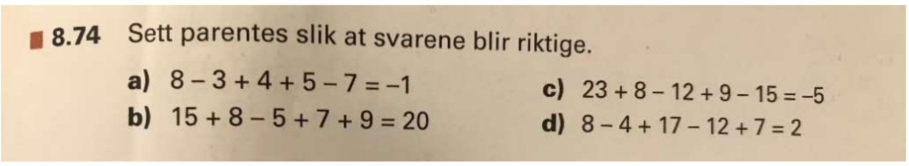
8.30 Regn ut.
a) $3x + 2x + 7 + 2$ **b)** $4a + 5a + 3 + 8$ **c)** $5a + 7a + 9 + 4$

8.31 Regn ut.
a) $4b + 3 + 2b + 5$ **b)** $7x + 3 - 5x + 9$ **c)** $8x + 9 - 4 - 5x$

Figur 23, Typiske eksempler på oppgaver som krever behandling i symbolspråk, altså transformerende aktiviteter (Bakke & Bakke, 2006, s. 220)

I eksemplene i figur 23 bruker boka naturlig språk som følger forklaringen av eksemplet, men i oppgavene forventes det ikke at eleven skal bruke naturlig språk, kun symbolspråk.

I arbeidet med parenteser er det noen oppgaver som skiller seg litt ut fra de vanlige oppgavene i læreboka. Emnet kommer i forbindelse med algebra, og selv om det er en aritmetisk oppgave, velger jeg likevel å ta med et eksempel (se figur 24). Sekvensen er et ledd i det å jobbe med parenteser i bokstavuttrykk, og jeg mener det forsvarer valget. Emnet starter som vanlig med et eksempel og oppgaver som følger samme malen, men så kommer det en side med oppgaver som skiller seg litt ut.



8.74 Sett parentes slik at svarene blir riktige.
a) $8 - 3 + 4 + 5 - 7 = -1$ **c)** $23 + 8 - 12 + 9 - 15 = -5$
b) $15 + 8 - 5 + 7 + 9 = 20$ **d)** $8 - 4 + 17 - 12 + 7 = 2$

Figur 24: Oppgave som handler om å regne med parenteser (Bakke & Bakke, 2006, s. 227)

I oppgave 8.74 må eleven tenke «motsatt vei». Eleven har blitt presentert for hvordan han/hun skal regne når det er parenteser i et uttrykk, men i oppgave 8.74 kan ikke eleven følge reglene. Eleven må selv sette parenteser slik at svarene blir riktige. Denne oppgaven krever en annen, mer utforskende måte å tenke på, og er kognitivt mer krevende enn å følge gitte regneregler. Forventningene i oppgaven er fremdeles behandling i registeret symbolspråk, men eleven må reflektere over hva regelen betyr, før de selv må bruke regelen i konstruksjon av et matematisk uttrykk. Grunntall har flere oppgaver som krever at eleven tenker «begge veier».

Oppgaven presentert i figur 25 går ut på å bytte ut x og y med tall i ulike regneuttrykk, for så å regne ut verdier. I dette arbeidet behandler eleven representasjoner i symbolspråk, men det spesielle med oppgavene er at eleven skal bruke tabeller i arbeidet. (Et liknende eksempel er kommentert i kapittel 4.2.4.) I oppgavene må eleven lese tabellen både vannrett og loddrett for å finne svarene.

Tegn tabellen i kladdeboka, og fyll ut det som mangler.

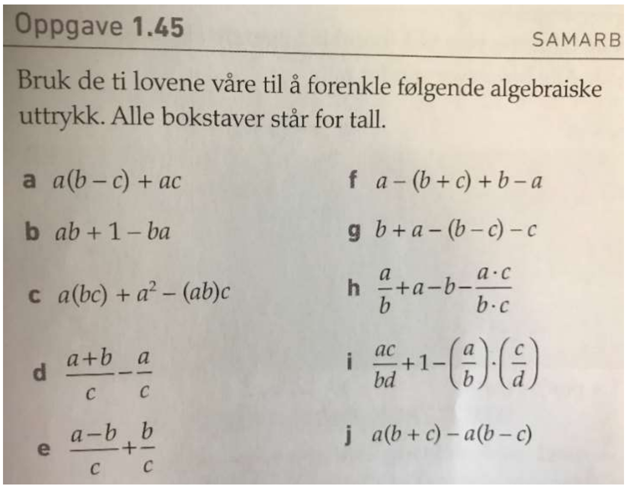
x	y	$x - y$	$2 \cdot x \cdot y$
	2	4	
5			10

Figur 25: Oppgave som handler om formler i en tabell (Bakke & Bakke, 2006, s. 232)

For å mestre disse oppgavene må eleven se sammenhengene mellom formlene og tallene, og eleven må klare å løse enkle likninger for å finne alle verdiene. Eleven må kunne hente informasjon ut av tabellen for å klare å løse oppgavene, og som nevnt må eleven kunne tenke begge veier. Det vil si at oppgaven er kognitivt mer krevende enn enkle oppsatte likninger, og eleven får trening i å lese tabeller vannrett og loddrett. Begrepet tabell er også viktig i oppgaven, selv om oppgavene ikke handler om å finne et algebraisk uttrykk ut ifra verdier i en tabell, altså konvertering mellom tabeller, diagrammer og grafer og symbolspråk.

Analysene av oppgavene i Nummer viste at i overkant av 30% av oppgavene legger opp til behandling i registeret symbolspråk. I Nummer 8 handler de fleste av disse oppgavene om å løse likninger algebraisk. I arbeidet med å løse likninger starter boka, som nevnt i kapittel 4.2.2, først med uformelle metoder, så som «holde over»-metoden, før mer formelle metoder blir presentert. Algebraisk metode blir introdusert og det forventes at eleven bruker alle «stegene». Boka legger altså ikke opp til å øve på et og et steg, men eleven må selv vurdere hva som er fornuftig å bruke i hver likning. Forfatterne skriver da også: «*Det går ikke an å sette opp noen rekkefølge for hva som må gjøres først og sist med slike likninger. Følelsen for hva som er lurt å gjøre, kommer med erfaring*» (Hole et al., 2015, s. 76).

I Nummer 9 handler også mange av disse oppgavene om å bruke algebraisk metode for å løse likninger, men de handler også om at eleven skal bruke de algebraiske lovene på bokstavuttrykk. Eksempler på dette vises i Figur 26.



Oppgave 1.45 SAMARB

Bruk de ti lovene våre til å forenkle følgende algebraiske uttrykk. Alle bokstaver står for tall.

a $a(b-c)+ac$

b $ab+1-ba$

c $a(bc)+a^2-(ab)c$

d $\frac{a+b}{c}-\frac{a}{c}$

e $\frac{a-b}{c}+\frac{b}{c}$

f $a-(b+c)+b-a$

g $b+a-(b-c)-c$

h $\frac{a}{b}+a-b-\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$

i $\frac{ac}{bd}+1-\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)$

j $a(b+c)-a(b-c)$

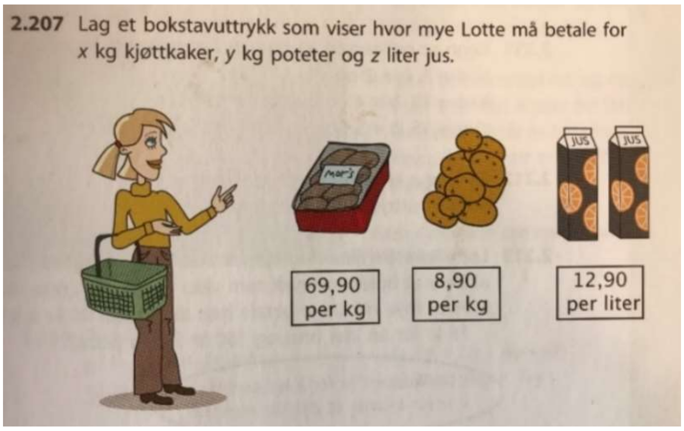
Figur 26: Eleven må bruke de ti algebraiske lovene for å forenkle algebraiske uttrykk. (Hole et al., 2015, s. 45)

I oppgavene som handler om å bruke de algebraiske lovene, legges det ikke opp til at eleven skal øve på en og en lov eller regel, men derimot forventes det at eleven selv skal vurdere hvilken lov det er fornuftig å bruke etter at eleven har hatt mulighet til å oppdage 10 algebraiske lover på de foregående sidene.

4.3.3 Konvertering mellom språklige registre

Når det gjelder konvertering mellom språklige registre, skiller Nummer seg ut. I Nummer er det ca. 60% av oppgavene som krever konvertering mellom språklige registre. De fleste oppgavene krever konvertering fra naturlig språk til symbolspråk, men også den motsatte konverteringen, fra symbolspråk til naturlig språk er godt representert. Faktor forventer også at elever skal kunne konvertere fra naturlig språk til symbolspråk. I Faktor er det ca. 25% av oppgavene som forventer dette. Det er kun noen få, totalt 6 oppgaver, som handler om konvertering den motsatte vegen, fra symbolspråk til naturlig språk. I Grunntall derimot, er det bare ca. 8% av oppgavene som krever konvertering mellom språklige registre, og det er de samme oppgavene som handler om generalisering. Oppgaver som forventer generalisering presenteres i kapittel 4.3.4.

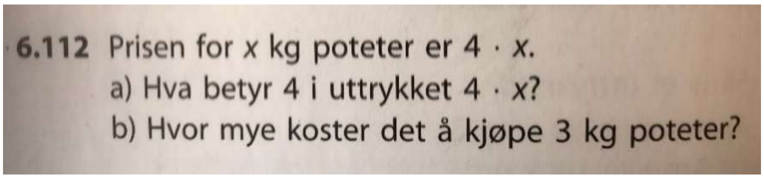
Figur 27 viser et typisk eksempel på en oppgave som jeg har valgt å kategorisere som en oppgave som krever konvertering fra naturlig språk til symbolspråk. Oppgaven er hentet fra Faktor.



Figur 27: Konvertering fra naturlig språk til symbolspråk (Hjardar & Pedersen, 2006d, s. 30)

Oppgaven tar utgangspunkt i en tekst, altså naturlig språk, og eleven skal uttrykke sammenhengen i teksten som et algebraisk uttrykk. Dette krever konvertering mellom representasjonsregistre. Samtidig inneholder teksten typiske matematiske symboler, x, y og z, noe som gjør at teksten kan sees på som en blanding av naturlig språk og symbolspråk. Oppgaven inneholder også tegninger av det som skal handles, der prisene står under. Eleven må dermed forholde seg både til en tekst med matematiske symboler og til tegninger med tekst.

I Faktor viste analysen 6 oppgaver som krever den motsatte konverteringen, altså fra symbolspråk til naturlig språk. Noen av oppgavene er ikke typiske i den forstand at de ber eleven om å lage en regnefortelling til et algebraisk uttrykk. Oppgaven presentert i figur 28 er hentet fra oppgaveboka til Faktor 1.


6.112 Prisen for x kg poteter er $4 \cdot x$.
a) Hva betyr 4 i uttrykket $4 \cdot x$?
b) Hvor mye koster det å kjøpe 3 kg poteter?

Figur 28: Konvertering fra symbolspråk til naturlig språk (Hjardar & Pedersen, 2006b, s. 120)

I oppgaven må eleven analysere teksten og uttrykket, og finne ut hva 4 står for. Det står ikke direkte i oppgaven at potetene koster 4 kroner per kg. (Det kunne vært 4 øre eller 4 dollar) De må altså bestemme at 4 (kroner) må være prisen for potetene. Denne oppgaven krever at eleven klarer å «se» at 4 står for prisen til potetene. Hvis eleven bruker det naturlige språket til å forklare dette, enten skriftlig eller muntlig, vil det foregå en konvertering fra symbolspråk til naturlig språk. Det er grunnen til at jeg velger å kategorisere denne oppgaven som jeg gjør. Samtidig er oppgaven gitt som en tekst i naturlig språk, som eleven må analysere, og anerkjenne at 4x står for x kg poteter av 4 kr. Sånn sett krever også oppgaven at eleven kan konvertere fra naturlig språk til symbolspråk.

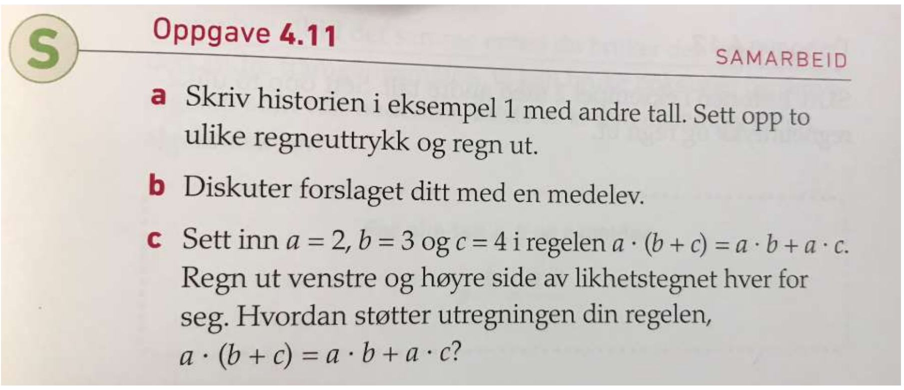
Oppgaven under er også hentet fra Faktor. Det er en typisk oppgave fra boka som krever at elevene analyserer teksten og bokstavuttrykket før de svarer.

«Herman sykler 2km hver vei til skolen. Han sykler i x dager. Hva står bokstavuttrykket 4x for?»

(Hjardar & Pedersen, 2006c, s.40)

Denne oppgaven kan minne om oppgaven fra figur 28. Eleven skal ikke lage en regnefortelling, men må analysere en gitt tekst med innslag av symbolspråk. Deretter må de bruke et naturlig språk til å forklare et algebraisk uttrykk, altså konvertere fra symbolspråk til naturlig språk. Oppgaven kunne egentlig vært en oppgave som krever generalisering, altså at eleven skulle komme fram til uttrykket, men uttrykket er gitt, og oppgaven krever derfor andre kognitive prosesser enn en generaliserende oppgave.

I Nummer viste analysene som nevnt at mange av oppgavene krever konvertering fra naturlig språk til symbolspråk, og fra symbolspråk til naturlig språk. (se tidligere presenterte tall). I begge disse type konverteringene spiller det naturlige språket en viktig rolle, og dette tolker jeg som at læreboka vektlegger det naturlige språket som representasjon. Det naturlige språket er også viktig som en bærende representasjon i arbeid med oppgaver (Ott, 2018). Flere av oppgavene er deler av en oppgaverekke, eller en oppgavestreng, som skal lede eleven fram til å oppdage en matematisk sammenheng. Det at flere av oppgavene er bygd opp slik at eleven skal utforske, analysere, diskutere og komme fram til regler selv, gjorde at oppgavene var sammensatte og kunne inneholde flere konverteringer mellom ulike semiotiske registre. Noen av oppgavene bruker aritmetiske oppgaver som et springbrett for eleven til å oppdage sammenhenger, og lar eleven sette ord på hva han/hun oppdager. Dette kalles algebraisk tenkning (Blanton, 2008; Mason, 1996). Det kreves skifte mellom ulike representasjoner, og algebra introduseres som en forlengelse av de aritmetiske uttrykkene. I oppgavestrengene henger kommunikasjonen og oppgavene nøye sammen. I andre oppgaver tar oppgavene utgangspunkt i en matematisk historie presentert som et eksempel. Oppgaven i figur 29 viser en slik oppgave.



S Oppgave **4.11** SAMARBEID

a Skriv historien i eksempel 1 med andre tall. Sett opp to ulike regneuttrykk og regn ut.

b Diskuter forslaget ditt med en medelev.

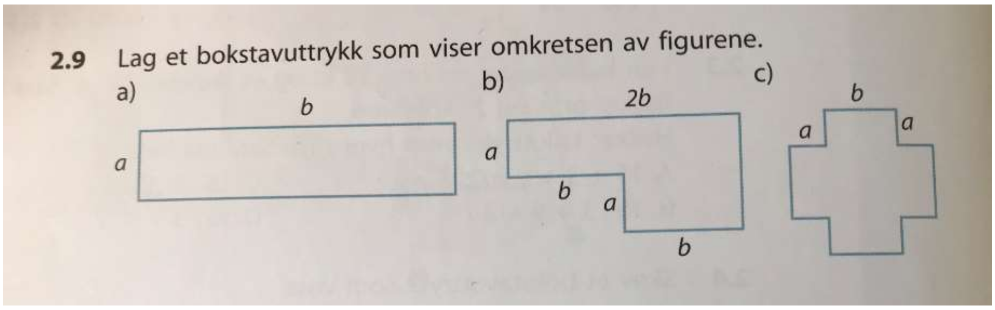
c Sett inn $a = 2$, $b = 3$ og $c = 4$ i regelen $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Regn ut venstre og høyre side av likhetstegnet hver for seg. Hvordan støtter utregningen din regelen, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$?

Figur 29: Oppgave som krever flere ulike konverteringer (Hole et al., 2014, s.261)

I a) blir eleven bedt om å lage en regnefortelling med egne tall. Eleven skal bruke eksemplet som allerede er presentert, og sette opp to ulike regneuttrykk og regne ut. Oppgaven henger altså nøye sammen med det som kommuniseres til eleven. Eleven må i a) også foreta en konvertering fra naturlig skriftlig språk til symbolspråk. I b) skal elevene diskutere forslagene med hverandre. Det betyr at de må bruke det naturlige muntlige språket til å diskutere et symbolsk uttrykk. Her må det skje en konvertering fra symbolspråk til naturlig språk. Altså motsatt vei som i a). Det naturlige språket spiller en viktig rolle, både skriftlig og muntlig, og det foregår konvertering begge veier mellom to registre. I c) skal eleven sjekke om en algebraisk regel stemmer ved å sette inn tall i et algebraisk uttrykk. Denne aktiviteten karakteriseres som behandling i symbolspråk siden eleven ikke må skifte semiotisk register, men eleven blir også bedt om å svare på hvordan utregningen støtter regelen, og for å svare på det trenger eleven det naturlige språket. Igjen må eleven foreta en konvertering. Dette beskriver en typisk fremgangsmåte i Nummer, og fremgangsmåten brukes blant annet i arbeid med den distributive loven og lover om sammentrekking av brøker med lik nevner, alle kalt algebraiske lover.

4.3.4 Konverteringer mellom illustrasjoner og symbolspråk

Analysene viser at illustrasjoner som representasjon er lite brukt. Totalt er det ca. 4% av alle oppgavene som krever konvertering mellom illustrasjoner og symbolspråk. Faktor bruker geometriske figurer i 15 av oppgavene. Bortsett fra en oppgave, handler alle oppgavene om konvertering fra registeret illustrasjoner til symbolspråk. Figur 30 viser en oppgave der elever blir bedt om å lage et uttrykk for omkretsen.

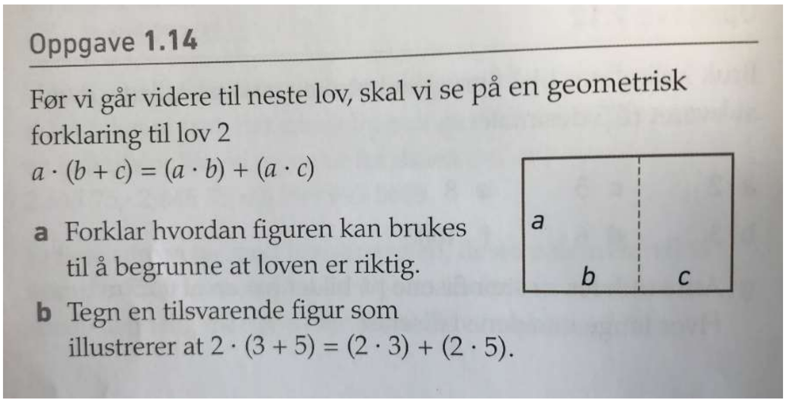


2.9 Lag et bokstavuttrykk som viser omkretsen av figurene.

Figur 30: Oppgave som bruker figurer. (Hjardar & Pedersen, 2006c, s. 40)

I oppgaven må eleven analysere de geometriske figurene, og finne uttrykket for de ukjente sidene, før de kan behandle det algebraiske uttrykket. I a) må for eksempel eleven anerkjenne, eller se, at figuren er et rektangel og at begge lengdene og breddene uttrykkes som henholdsvis a og b, før de kan behandle det algebraiske uttrykket. Dette krever at eleven ser sammenhengen mellom representasjonene i ulike registrene, før eleven kan foreta behandlingen av algebraiske symboler. Her kan det se ut som om forventningen til eleven er behandling av et algebraisk uttrykk i registeret symbolspråk, altså at a + a + b + b = 2a + 2b, mens det som kanskje er den største utfordringen til eleven, er å forstå at symbolene a og b tilsvarer lengde og bredde på figuren. Slike oppgaver har jeg valgt å kategorisere som oppgaver som krever konvertering fra illustrasjon til symbolspråk, men det kan diskuteres. Oppgaven krever at elever anerkjenner det matematiske objektet både i registeret illustrasjoner og symbolspråk, men selve oppgaven, det eleven må skrive, dreier seg egentlig om behandling i symbolspråk. I analysen fant jeg totalt 14 oppgaver av denne typen, der de fleste av dem handler om å finne omkretsen til ulike figurer.

I Nummer viste analysen at 11 oppgaver krevde konvertering mellom registeret illustrasjoner og symbolspråk. Kun en av oppgavene la opp til den motsatte konverteringen. Stort sett handlet alle oppgavene om generalisering, men jeg fant et unntak. Oppgaven (figur 31) handler om å bruke en geometrisk figur til å begrunne en algebraisk lov.



Oppgave 1.14

Før vi går videre til neste lov, skal vi se på en geometrisk forklaring til lov 2

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

a Forklar hvordan figuren kan brukes til å begrunne at loven er riktig.

b Tegn en tilsvarende figur som illustrerer at $2 \cdot (3 + 5) = (2 \cdot 3) + (2 \cdot 5)$.

Figur 31: Konvertering mellom illustrasjoner og symbolspråk, og motsatt (Hole et al., 2015, s. 20)

I oppgaven blir eleven bedt om å forklare den distributive loven for multiplikasjon ved hjelp av figuren. Det å bruke figuren til å begrunne loven krever at elevene ser at figuren og det algebraiske uttrykket, representerer den samme matematiske sammenhengen I b) skal de tegne en tilsvarende figur som viser en aritmetisk sammenheng. Dette tilsvarer en konvertering fra talluttrykk til en figur, altså fra symbolspråk til illustrasjoner.

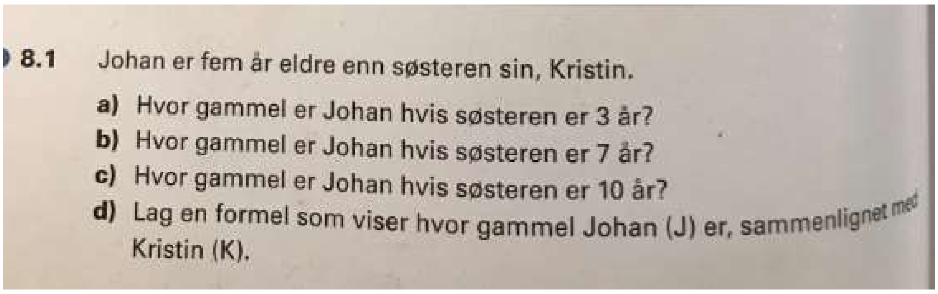
4.3.5 Andre konverteringer

Grunntall bruker konvertering mellom naturlig språk og symbolspråk kun i forbindelse med oppgaver som krever typisk generalisering, men i analysen fremkom også andre oppgaver som krever en form for konvertering. I fire av oppgavene som handler om likninger, legges det opp til å erstatte x-er med runde brikker og tall med pinner (en fyrstikk = 1). Disse oppgavene har jeg kategorisert som «andre». Oppgavene er illustrert med en tegning av to barn med brikker og pinner foran seg. Eleven blir bedt om å samarbeide om å løse oppgaven ved hjelp av å ta bort brikker og pinner. Oppgaven krever at eleven ser at symbolene i det algebraiske uttrykket kan representeres med pinner og brikker, og dette krever dermed en konvertering fra symbolspråk til konkreter. Duval (2002) har ikke konkreter i sine semiotiske representasjonsregistre, men Svingen (2018) nevner konkreter som eksempel på en type matematisk representasjonen som det er viktig å jobbe med for svakt presterende elever.

4.3.6 Generaliserende aktiviteter

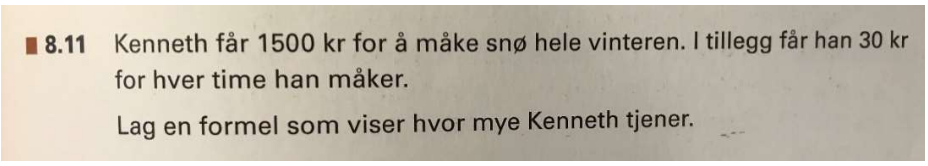
Både antallet oppgaver og type oppgaver som krever generalisering er vektet ulikt i lærebøkene jeg har analysert. Generaliserende aktiviteter krever nesten alltid konvertering, men det kan være ulike typer konverteringer. Det betyr at oppgavene som forventer generalisering er kategorisert på tvers av analyseverktøyet brukt for å kategorisere overganger mellom representasjoner, og det er ikke mulig å lese antallet, eller type, oppgaver som krever generalisering ut fra tabellen som er vist i kapittel 4.3.1.

Grunntall starter emnet Algebra med nettopp generaliserende aktiviteter, som nevnt i kapittel 4.2.2. Figur 32 viser et typisk eksempel med tilhørende oppgave fra boka.


8.1 Johan er fem år eldre enn søsteren sin, Kristin.
a) Hvor gammel er Johan hvis søsteren er 3 år?
b) Hvor gammel er Johan hvis søsteren er 7 år?
c) Hvor gammel er Johan hvis søsteren er 10 år?
d) Lag en formel som viser hvor gammel Johan (J) er, sammenlignet med Kristin (K).

Figur 32: Generaliserende aktivitet i Grunntall (Bakke & Bakke, 2006, s. 214)

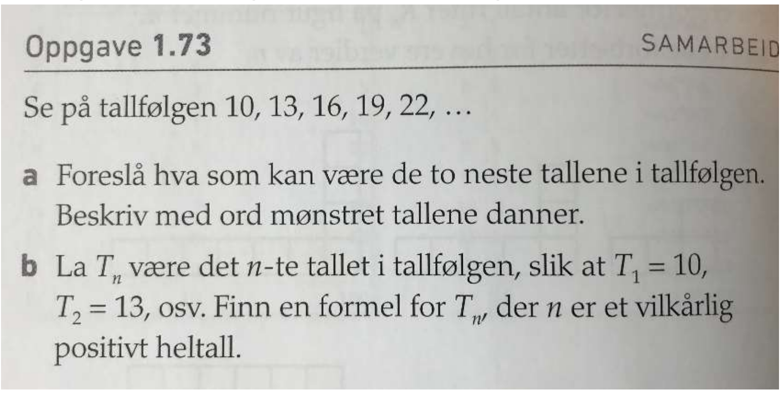
Oppgaven starter med en hverdagskontekst i naturlig språk. Deretter blir eleven bedt om å regne ut alderen til Johan hvis søsteren er henholdsvis 3, 7 og 10 år. Fra eksemplet oppfordres eleven til å lage en tabell (tabeller, diagrammer og grafer) og til slutt lage en formel (symbolspråk). Oppgavestrengen som er beskrevet over, trener eleven i å se sammenhenger mellom ulike representasjoner, og den trener eleven i en måte å tenke generalisering på. Den samme prosessen gjentas i flere oppgaver, og hjelper eleven til å finne en formel. På de siste oppgavene står det bare at eleven skal lage en formel, og det forventes at eleven har lært å «se» sammenhengen (Se figur 33).


8.11 Kenneth får 1500 kr for å måke snø hele vinteren. I tillegg får han 30 kr for hver time han måker.
Lag en formel som viser hvor mye Kenneth tjener.

Figur 33: Oppgave som krever generalisering (Bakke & Bakke, 2006, s. 217)

Analysen viser totalt 16 oppgaver av denne formen i Grunntall, og i alle oppgavene forventes generalisering av type 1. Av tabellen i kapittel 4.3.1 ser vi at antallet generaliserende aktiviteter er identisk med oppgaver som krever konvertering mellom naturlig språk og symbolspråk.

I analysen av Nummer fremkommer oppgaver som krever ulik form for generalisering. På samme måte som Grunntall, har Nummer oppgaver som krever generalisering av et kvantitativt problem (type 1). I oppgavene blir eleven først bedt om å finne spesielle tilfeller, før eleven blir bedt om å finne det generelle uttrykket. Eleven må bevege seg fra det spesielle til det generelle, på samme måte som ble forventet i Grunntall, og som blir fremhevet som viktig i arbeid med generalisering (Mason 1996). Men i tillegg til å ta utgangspunkt i en hverdagstekst, eller et kvantitativt problem, bruker Nummer også geometriske mønster og numeriske sammenhenger i sine generaliserende aktiviteter, altså generalisering av type 2. (Se figur 34)


Oppgave 1.73 SAMARBEID

Se på tallfølgen 10, 13, 16, 19, 22, …

a Foreslå hva som kan være de to neste tallene i tallfølgen. Beskriv med ord mønstret tallene danner.

b La T_n være det n-te tallet i tallfølgen, slik at $T_1 = 10$, $T_2 = 13$, osv. Finn en formel for T_n, der n er et vilkårlig positivt heltall.

Figur 34: Eksempel på generalisering i Nummer 9 (Hole et al., 2015, s. 66)

Oppgaven viser et numerisk mønster som eleven skal generalisere. Eleven må først studere mønsteret for å finne de neste tallene i tallrekka, før eleven blir bedt om å beskrive med ord det mønsteret tallene danner. De må dermed bruke det naturlige språket som representasjon. Deretter blir de bedt om å lage en formel som beskriver mønsteret (symbolspråk). Språket i Nummer 9 er på dette punktet mer formelt enn i Nummer 8, med mer utpreget bruk av matematiske symboler, «La T_n være det n-te tallet (…)» osv. Oppgaven har jeg kategorisert som generalisering av type 2, der det er en numerisk sammenheng som leder til et algebraisk uttrykk. Totalt i Nummer har jeg kategorisert 50 oppgaver som generalisering av type 1 og 29 oppgaver har jeg kategorisert som generalisering av type 2.

I Faktor finnes det også oppgaver som krever generalisering, men generaliserende aktiviteter er ikke vektlagt i boka. De oppgavene som fordrer slik aktivitet i emnet, er heller ikke typiske oppgaver som legger opp til å gå fra det spesielle til det generelle eller til utforsking av mønster, figurtall eller tallrekker. Oppgavene går gjerne ut på å lage et bokstavuttrykk ut ifra en tekst. Et eksempel på en slik oppgave er oppgave 2.11 i kapitlet Algebra (9.trinn):

«Martin svømmer to ganger i uka. Prisen for buss tur/retur svømmehallen er 42 kr, og det koster 25 kr i inngangspenger. Lag et bokstavuttrykk som viser hvor mye Martin må betale for n uker med svømming.» (Hjardar & Pedersen, 2006c, s. 40)

Denne oppgaven krever at eleven foretar en konvertering fra naturlig språk til symbolspråk, og den handler om at eleven skal lage et generelt uttrykk for hvor mye

Martin må betale hver uke. Det er et kvantitativt problem som leder til et algebraisk uttrykk eller likning, altså generalisering av type 1 (Kieran, 2004). Oppgavene legger ikke opp til at eleven skal gå via det spesielle før eleven finner det generelle uttrykket. Totalt i Faktor har jeg kategorisert 38 oppgaver som generaliserende aktiviteter av type 1. Ingen av oppgavene legger opp til å gå via det det spesielle til det generelle, og det er heller ingen av oppgavene jeg har analysert som forventer generalisering av geometriske mønstre eller tallrekker (type 2).

4.3.5 Aktiviteter på Global/Meta-nivå

I analysen har jeg også kategorisert aktiviteter på global/meta-nivå. Oppgaver på dette nivået vil være avhengig av mottakeren, og det gjør kategoriseringen utfordrende, men uansett er mengden oppgaver på dette nivået ulikt representert i de ulike lærebøkene.

I Grunntall la de aller fleste oppgavene opp til transformerende aktiviteter (ca. 90%). Ingen av disse vil jeg kalle aktiviteter på global/meta-nivå. Generaliserende aktiviteter kan karakteriseres som aktiviteter på et slikt nivå, men ikke nødvendigvis. De generaliserende aktivitetene i Grunntall er bygd opp skjematisk, og alle aktivitetene avsluttes ved at eleven har funnet en formel. Eleven blir ikke bedt om å bruke formelen til noe, utover det å uttrykke en sammenheng. Jeg vil ikke si at «algebra er et nyttig, men ikke nødvendig verktøy», og dermed vil jeg ikke karakterisere denne formen for generalisering for en global/meta-aktivitet. I læringsmålene for emnet står det heller ikke at eleven skal bruke likninger til å løse problemer, det står at eleven skal lære å løse likninger ved hjelp av ulike regler. Dette gjenspeiles i forventningene til eleven.

I lærebøkene til Faktor er heller ikke aktiviteter på global/meta-nivå vektlagt. I motsetning til Grunntall er noen av oppgavene som krever generalisering av en slik art at det generelle uttrykket som eleven finner skal anvendes til en utregning i oppgaven. På den måten kan man si at algebra brukes som et verktøy. Det er likevel for opplagt hvordan eleven skal gjøre oppgavene, og utregningene er for enkle, til at jeg har kategorisert oppgavene for aktiviteter på global/meta-nivå. Det finnes noen få unntak. I Faktor 2 er «Problemløsning og likninger» et emne som blir presentert mot slutten av kapitlet «Algebra». Overskriften på emnet indikerer at eleven skal jobbe med problemløsning og bruke algebra som et verktøy, og dette kjennetegner ofte en aktivitet på global/meta-nivå. Under presenteres et eksempel på en oppgave fra emnet.

«*I et rektangel er lengden dobbelt så stor som bredden. Omkretsen av rektanglet er 42cm.*

a) *Kall bredden for x cm og still opp en likning.*
b) *Hvor lange er sidene i rektanglet?*»

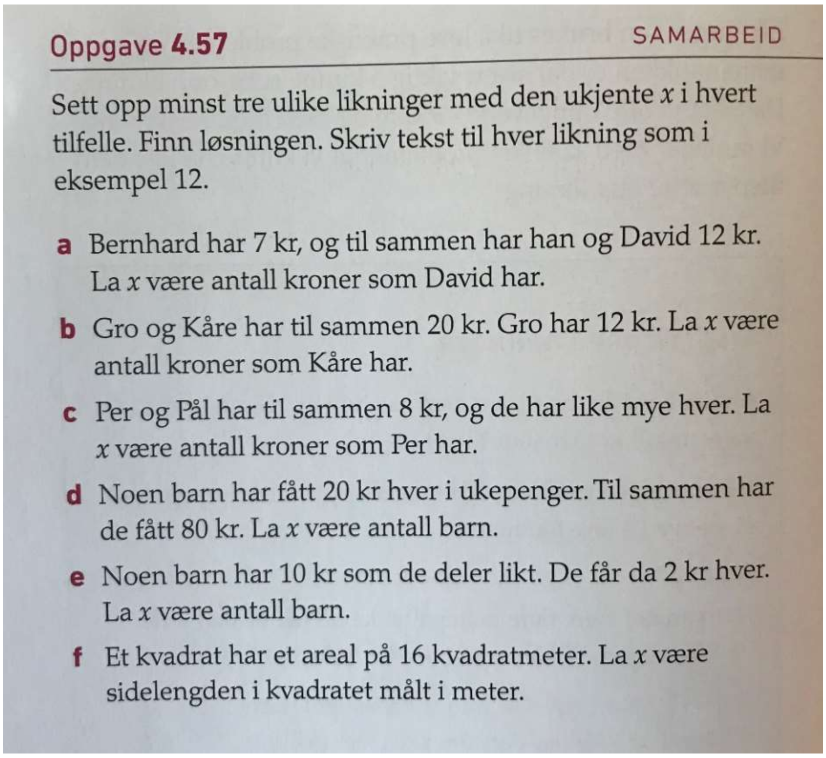
(Hjardar & Pedersen, 2006c, s. 56)

I denne oppgaven blir eleven bedt om å sette opp en likning. Siden eleven får beskjed om hva slags fremgangsmåte hun/han skal bruke, vil jeg ikke kalle oppgaven en problemløsningsoppgave, men oppgaven viser nytten av å bruke algebra i møte med matematiske problemer, og sånn sett er det en enkel oppgave på global/meta-nivå. I Faktor finnes det ca. 15 oppgaver på denne formen. Uavhengig av om dette er en oppgave på global/meta-nivå, er oppgaven interessant, og vil diskuteres videre i kapittel 5, diskusjonskapitlet.

I kapitlet der jeg presenterte funn fra analysen av kommunikasjonen i læreboka til Nummer, kommenterte jeg hvordan boka ofte knyttet eksempler opp mot hverdagssituasjoner. Det å bruke algebra til å utforske situasjoner fra dagliglivet eller bruke likninger til å løse situasjoner fra dagliglivet er eksempler på aktiviteter på global/meta-nivå. I målene for emnet står det blant annet: *«Du skal bruke likninger til å løse teoretiske og praktiske problem» (Hole et al., 2014, s. 253).*

Det er likevel få av oppgavene som forventer at eleven skal bruke en likning til å løse et problem. Det er relativt enkle problemer som presenteres, og eleven vil antakelig se svaret raskt uten bruk av likning.

Oppgaven i figur 35 er hentet fra dette delemnet.


Oppgave 4.57 SAMARBEID

Sett opp minst tre ulike likninger med den ukjente x i hvert tilfelle. Finn løsningen. Skriv tekst til hver likning som i eksempel 12.

a Bernhard har 7 kr, og til sammen har han og David 12 kr. La x være antall kroner som David har.

b Gro og Kåre har til sammen 20 kr. Gro har 12 kr. La x være antall kroner som Kåre har.

c Per og Pål har til sammen 8 kr, og de har like mye hver. La x være antall kroner som Per har.

d Noen barn har fått 20 kr hver i ukepenger. Til sammen har de fått 80 kr. La x være antall barn.

e Noen barn har 10 kr som de deler likt. De får da 2 kr hver. La x være antall barn.

f Et kvadrat har et areal på 16 kvadratmeter. La x være sidelengden i kvadratet målt i meter.

Figur 35: Oppgave som omhandler likninger (Hole et al., 2014, s. 290)

I oppgaven er det heller ikke nødvendigvis det å løse oppgaven ved hjelp av likning som er hovedpoenget. Oppgaven øver eleven i å sette opp algebraiske uttrykk som uttrykker en sammenheng og *kan* løses som en likning. Det er selve ekvivalensbegrepet som eleven jobber med, og eleven må sette opp minst tre ulike likninger som uttrykker sammenhengen, både med symbolspråk og med naturlig språk. Oppgaven krever at eleven knytter ekvivalens sammen med praktiske situasjoner. På den måten kan oppgaven sees på som trening i å bruke likninger til å løse praktiske problemer, selv om jeg ikke vil karakterisere dette for en aktivitet på global/meta-nivå.

I Nummer 9 derimot, møter eleven på noen typiske aktiviteter på global/meta-nivå. I beskrivelsen av hva global/meta-aktiviteter er, kapittel 2.2.2, brukte jeg et eksempel fra Nummer som handlet om bevisføring. Bevisføring er en klassisk aktivitet på dette nivået. Dette kan opptre som: «*Forklar hvorfor løsningsmetodene eller formlene du brukte i oppgave e) gir riktig verdi for alle verdier av n*» (Hole et al., 2015, s. 11). Oppgaven kommer til sist i en oppgave som handler om tulipanbed. Spørsmålet krever at eleven resonnerer og algebra vil være et nyttig verktøy i arbeidet. Dette indikerer en aktivitet på global/meta-nivå.

I flere av oppgavene må eleven bevise en sammenheng, eller forklare hvorfor en algebraisk lov virker. Selv om oppgaven ikke tar utgangspunkt i virkeligheten vil eleven måtte resonnere på et nivå som jeg vil karakterisere som global/meta-nivå. Det kan for eksempel stå: «*Oppgave 1.52, 1.55 og 1.54 antyder noen generelle prinsipper for hvordan man kan multiplisere med parentesuttrykk. Undersøk dette og prøv å formulere regler*» (Hole et al., 2015, s. 52).

5.0 Diskusjon av resultater

I innledningen skrev jeg at jeg hadde en hypotese om at arbeid med algebra i en del lærebøker handlet om å lære regler og algoritmer. I undersøkelsen min har jeg sett nærmere på innledningskapitler som omhandler algebra, og analysene har gitt noen interessante resultater, både med tanke på kommunikasjon og forventninger til eleven. I dette kapitlet vil resultatene fra analysen diskuteres, og jeg setter søkelyset på om, og på hvilke måter, funnene eventuelt kan fremme matematisk forståelse. I dette kapitlet vil det automatisk bli en viss sammenlikning av lærebøkene. I den forbindelse er det viktig å huske på at to av læreverkene ble utgitt i 2006, mens det siste er utgitt i 2014. Dette vil naturlig nok prege lærebøkene, men det er ikke gjenstand for diskusjonen min. Jeg velger å se på hva bøkene formidler uten å ta hensyn til utgivelsesår.

5.1 Læringsmål, tilnærmingsmåter og matematisk forståelse.

Allerede i målene som eleven blir introdusert for, kommer det fram forskjeller i de ulike bøkene. Først og fremst la jeg merke til verbene som ble brukt. I Faktor sine bøker er hovedinntrykket at eleven skal «*lære om*». Eleven skal blant annet «*lære om algebraiske uttrykk*» og «*lære om løsning av likninger*». I Grunntall skal eleven «*regne*» eller «*løse*». Eleven skal for eksempel «*løse opp parenteser og regne sammen bokstavledd», eller «løse likninger ved å bruke flytte-bytteregelen, multiplikasjonsregelen og divisjonsregelen*.» I Nummer derimot, brukes helt andre verb. Eleven skal «*forklare*», «*eksperimentere*», «*bruke*» og «*forstå og bruke regneuttrykk …*».

I forhold til det Skemp (2006) skriver om instrumentell og relasjonell forståelse kan det tenkes at om målet til eleven f.eks. er å «*løse likninger ved å bruke flytte-bytteregelen, multiplikasjonsregelen eller divisjonsregelen*», er det størst sjanse for at det er instrumentell forståelse som eleven oppnår. Det å vektlegge bruk av regler og fremgangsmåter i arbeidet med likninger, er det som Skemp (2006) kaller instrumentell matematikk. Verbene forklare, bruke og forstå derimot, indikerer på en annen måte at det er relasjonell forståelse som er målet.

Bøkene har da også ulike tilnærmingsmåter til emnene. Både læreboka til Faktor og til Grunntall, vektlegger arbeid med regler og fremgangsmåter. Reglene og eksemplene presenteres til eleven, og eksemplene er gode oppskrifter som eleven kan følge. I Grunntall følges eksemplet av en forklarende tekst, mens i Faktor står eksemplet alene. Slike «oppskrifter» foretrekkes av en del elever. Oppgaver som følger en oppskrift kan oppleves som lett å forstå, og det kan gi mestring og god selvfølelse (Skemp, 2006) Regnereglene virker, og svaret blir rett. Det å trene på algoritmer og fremgangsmåter slik at dette går raskt, er heller ikke uten verdi, men det må ikke gå på bekostning av forståelse (Kilpatrick et al., 2001). Det er jo også koblingen mellom begrepsmessig forståelse og prosedyrekunnskap som Hiebert og Lefevre (1986) fremholder som nøkkelen til utvikling av matematisk kompetanse. Forståelse er også noe en elev innehar, og det er ikke mulig å si om en elev har relasjonell eller instrumentell forståelse etter å ha jobbet på denne måten. Det er ingen motsetning mellom å bruke kjente algoritmer og det å inneha relasjonell forståelse. Skemp (2006) kaller likevel en tilnærmingsmåte som vektlegger bruk av regler og algoritmer for instrumentell matematikk, og en slik måte å arbeide med matematikk på kan danne grunnlaget for instrumentell forståelse. Kunnskapen kan dermed bli vanskelig å overføre til andre problemstillinger.

Nummer har en annen tilnærmingsmåte til algebra. Boka tar ofte utgangspunkt i en hverdagssituasjon, og vektlegger at eleven skal oppdage mønster selv. Eleven jobber med aritmetiske oppgaver, og de må lete etter systemer i det de finner. Det å se mønster i aritmetikken er en viktig forutsetning for algebra (Blanton, 2008), og eleven må altså lete etter mønstre og underliggende prinsipper, heller enn å memorere fakta og utføre prosedyrer. Det å lete etter mønster og underliggende prosesser er algebraisk tenkning, og det er en form for generalisering (Mason, 1996). I arbeidet blir også eleven ofte bedt om å diskutere det de fant med en medelev. Det å bruke språk til å beskrive det de fant, kan hjelpe eleven til å finne en formel (Mason 1996). Ordene er generelle, og på den måten beveger eleven seg, via ordene, bort fra det spesielle over mot det generelle (Mason, 1996, s.72). De må bruke dialog i arbeidet med å forstå, og på den måten vil de kanskje også reflektere over sin egen læringsprosess. En elev som jobber på denne måten, vil kanskje ha større mulighet til å oppnå relasjonell forståelse enn en elev som jobber instrumentelt.

5.2 Generalisert aritmetikk som innfallsvinkel til algebra

Kieran (2004) skiller mellom det å bruke en aritmetisk innfallsvinkel og det å bruke en innfallsvinkel som bygger på funksjoner i arbeid med algebra. Dette skrev jeg om i innledningen til algebraiske aktiviteter. Jeg vil hevde at alle bøkene bruker en aritmetisk innfallsvinkel i sin tilnærming til algebra. I både Nummer og Faktor kalles innledningskapitlet til algebra «Tall og algebra», og i Kunnskapsløftet (Udir 2006) brukes også «Tall og algebra» som et hovedemne i kompetansemålene. Der står det at «*Algebra i skolen generaliserer tallregning (…)*», og det tolker jeg som at algebra bygger på aritmetiske regneregler. Det å bruke aritmetiske oppgaver som en inngang til algebra, kalles generalisert aritmetikk, og begge bøkene jobber også med regneregler på aritmetiske uttrykk, før algebraiske uttrykk blir introdusert.

Bruk av en aritmetisk innfallsvinkel har, ifølge Kieran (2004), en svakhet i forhold til en innfallsvinkel som baserer seg på bruk av funksjoner. Hun skriver at om det brukes en aritmetisk innfallsvinkel i arbeid med algebra, er det en fare for at algebraiske tegn blir sett på som ukjente, og ikke variabler.

I Grunntall heter introduksjonskapitlet bare «Algebra», og det første delkapitlet handler om at eleven skal lage formler, altså generaliserende aktiviteter. Forfatterne skriver: «*En bokstav som settes inn som symbol for et tall som varierer kalles en variabel*» (Bakke & Bakke,2006, s. 214). Det kan altså tyde på at forfatterne har et bevisst forhold til bruken av variabelbegrepet i forbindelse med introduksjon av algebra. I introduksjonen av emnet brukes altså generaliserende aktiviteter. Det å lage generaliserte uttrykk med bruk av variabler, er kjennetegn på en innfallsvinkel som bygger på funksjoner. Men boka fortsetter ikke arbeidet med funksjoner i forbindelse med algebra. Det blir ikke brukt grafiske fremstillinger, og det å fremstille likninger som to funksjoner blir heller ikke brukt. Boka dreier derfor over til å bruke en aritmetisk innfallsvinkel. I noen av sekvensene dukker det likevel opp spor av funksjoner. Boka bruker tabeller i stor grad, og i arbeidet med funksjoner kan bruk av tabeller være vesentlig. Bruken av tabellene i boka er likevel ikke direkte knyttet til funksjonsbegrepet. Det handler om å sette verdier inn i bokstavuttrykk og om å finne verdier fra bokstavuttrykk. Selv om boka dermed bruker variabel-begrepet i starten av kapitlet, og har med tabeller i arbeidet, vil jeg karakterisere også innfallsvinkelen til Grunntall for aritmetisk. Jeg vil dermed hevde at alle lærebøkene bruker en aritmetisk innfallsvinkel i introduksjonen til algebra, noe som jo også passer med det som signaliseres i Kunnskapsløftet (Udir, 2006), altså at algebra generaliserer tallregning.

Fraværet av funksjonsbegrepet i introduksjonskapitlene gjenspeiles også i tabellen som er presentert i kapittel 4.3.1. Tabellen viser opptellingen av overganger mellom de ulike representasjonene i oppgavene, og det er ingen av oppgavene som forventer at eleven foretar en konvertering mellom registeret symbolspråk og registeret tabeller, diagrammer og grafer, eller motsatt. I kapitlene som har vært gjenstand for mine analyser er det altså ingen av oppgavene som forventer at eleven skal bruke grafer som representasjon i arbeidet. Både i Grunntall og Nummer er det presentert generaliserende oppgaver der eleven kommer fram til et funksjonsuttrykk med variabler, og noen av oppgavene i Grunntall gjør bruk av tabeller i arbeidet med generalisering, men i og med at begrepet funksjoner ikke er brukt, og det heller ikke er brukt grafer i arbeidet, betyr det at ingen av bøkene har vektlagt arbeid med funksjoner i disse kapitlene. Funksjoner blir i stedet behandlet som egne emner seinere i lærebøkene.

5.3 Bruk av algebraiske aktiviteter i lærebøkene

5.3.1 Transformerende aktiviteter og muligheter for læring

I både Faktor og Grunntall er det først og fremst transformerende aktiviteter som blir presentert i eksemplene og introduksjoner til emnene. Det finnes også noen generaliserende aktiviteter av type 1 i eksemplene, mens aktiviteter på global/meta-nivå så og si er fraværende. Dette gjenspeiles også i oppgavene til eleven, der transformerende aktiviteter er dominerende. Resultatene fra analysene mine stemmer overens med tidligere funn i lærebøker for ungdomstrinnet (Kongelf, 2019), samt forskning som er gjort på undervisning og lærebøker på videregående skole (Espeland, 2017; Harder, 2013). Disse funnene antyder også at matematikken som blir presentert er fokusert på regler og algoritmer og med få koblinger til begreper.

Transformerende aktiviteter handler om behandling i registeret symbolspråk. Slike aktiviteter kan læres, men det er ikke det samme som at eleven forstår (Mason, 1996). Å øve på transformerende aktiviteter vil si det samme som å øve på beregning (Kilpatrick et al, 2001) eller prosedyrekunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986).

Nummer har også transformerende aktiviteter, selv om det er færre, men de har en annen tilnærmingsmåte til aktivitetene. Nummer legger opp til at eleven skal ha mulighet til å oppdage sammenhengene og lovene selv, og diskutere dem, før eleven skal bruke lovene. Boka legger dermed opp til utforskende arbeid, samt diskusjon av ideer og sammenhenger, og dette trekkes fram som viktige arbeidsmetoder for å fremme relasjonell forståelse (Nosrati & Wæge, 2015). Jeg vil si at boka legger opp til rask progresjon, og det kan virke som om boka har høye forventninger til eleven. I Nummer 9 forventes det for eksempel at eleven fortløpende skal oppdage ti algebraiske lover, før alle lovene brukes på oppgaver. Eleven må selv avgjøre hvilke lover som skal brukes. I arbeidet med likninger introduseres først den ikke-formelle «holde over» -metoden før boka relativt raskt slår fast at å løse likninger algebraisk vil si å regne seg fram til å få x alene på den ene siden ved hjelp av de fire regningsartene. Det kan også virke som om boka har en forventning om at når eleven har jobbet utforskende, og sannsynligvis oppdaget en sammenheng, så vil denne sammenhengen forstås og huskes, og sammenhengen kan dermed brukes. Jeg mener at dette viser en forventning om at eleven skal oppnå en relasjonell forståelse (Skemp, 2006) for begreper og sammenhenger. Hvis eleven oppdager sammenhengen, og oppnår relasjonell forståelse, vil en slik fremgangsmåte være ok. Men hvis eleven derimot ikke har oppnådd god forståelse av f.eks. likningsbegrepet, vil kanskje en så rask progresjon virke voldsom. Problemet kan oppstå hvis eleven ikke oppdager sammenhenger i like raskt tempo som medelever. De kan dermed bli presentert for hva de skal oppdage, og det er en form for instrumentell tilnærming (Skemp, 2006). Da vil ikke nødvendigvis denne eleven ha oppnådd relasjonell forståelse, og de får kanskje heller ikke mulighet til å øve nok på sammenhengen, før neste steg i prosessen må tas. Jeg er redd dette kan føre til ekstra frustrasjon hos eleven.

5.3.2 Uforløst potensiale i generaliserende aktiviteter og aktiviteter på global/meta-nivå.

Ifølge Kieran (2004) bør aktiviteter på global/meta-nivå følge alle algebraiske aktiviteter i skolen. Dette er aktiviteter som gir mening og forståelse til transformerende aktiviteter, og som fremmer relasjonell eller begrepsmessig forståelse.

Analysene mine viser at det er lite bruk av slike aktiviteter i lærebøkene jeg studerte. I Grunntall fant jeg ingen slike aktiviteter. I Faktor har jeg funnet ca. 15 oppgaver av denne typen, men flere av aktivitetene er i grenseland for hva som kalles global/meta-nivå. Oppgaven under er hentet fra Faktor og kommentert i kapittel 4.3.5.

«I et rektangel er lengden dobbelt så stor som bredden. Omkretsen av rektanglet er 42cm.

a) *Kall bredden for x cm og still opp en likning.*
b) *Hvor lange er sidene i rektanglet?»*

(Hjardar & Pedersen, 2006c, s. 56)

I oppgaven står det at eleven skal kalle bredden for x og sette opp en likning. Eleven får altså beskjed om fremgangsmåten. Jeg vil hevde at denne delen av oppgaven er med på å gjøre dette til en dårligere global/meta-aktivitet enn det kunne vært. I stedet for å fortelle eleven hvordan oppgaven skal løses kunne spørsmålet bare vært: Hvor lange er sidene i rektanglet? Med en slik spørsmålsstilling gis det større rom for at eleven kan bruke andre fremgangsmåter, for eksempel tegning, i møte med oppgaven. Algebra ville dermed vært et mulig, men ikke nødvendig verktøy i aktiviteten. Dette kjennetegner en aktivitet på global/meta-nivå. I Faktor er det flere oppgaver på denne formen, og jeg vil hevde at med enkle grep kunne disse oppgavene blitt bedre aktiviteter på global/meta-nivå.

Analysene av Nummer viser noen flere aktiviteter på global/meta-nivå. Boka tar ofte utgangspunkt i en hverdagssituasjon som skal matematiseres, og uttrykkene settes inn i en kontekst. På den måten gis det mening til symbolene og selve uttrykket får også mening. Algebra brukes som et verktøy, og både Kieran (2004) og Mason (1996) skriver om hvor viktig dette er i arbeid med algebra. Men selv om aktiviteter tar utgangspunkt i en hverdagssituasjon gjør ikke dette aktiviteten automatisk til en aktivitet på global/meta-nivå, og noen aktiviteter vil jeg karakterisere som aktiviteter på globalt/meta-nivå selv om de ikke tar utgangspunkt i virkeligheten. Dette gjelder for eksempel hvis eleven skal bevise sammenhenger i figurer eller i algebraiske uttrykk. Oppgaven under er et typisk eksempel på dette:

«Oppgave 1.52, 1.55 og 1.54 antyder noen generelle prinsipper for hvordan man kan multiplisere med parentesuttrykk. Undersøk dette og prøv å formulere regler.»

(Hole et al., 2015, s. 52)

Det er heller ikke slik at alle generaliserende aktiviteter er aktiviteter på global/meta-nivå. De generaliserende aktivitetene i Grunntall har jeg ikke kategorisert som slike aktiviteter, mens et eksempel i Nummer viser en generaliserende oppgave som også kan kategoriseres som en oppgave på global/meta-nivå (se figur 16). Forskjellen er at oppgaven i Nummer har et spørsmål til slutt der det er fornuftig å bruke det algebraiske uttrykket. «Hvor mange kroner har Kari etter et år?». I aktiviteten lages det ikke bare et generelt uttrykk, men uttrykket brukes også til å regne ut hvor mange kroner Kari har etter et år. Algebra brukes dermed som et verktøy i oppgaven. Oppgaven er likevel relativ enkel, og eleven kunne lett løst oppgaven uten bruk av det algebraiske uttrykket. Med tanke på alderen til eleven, kreves heller ikke noen stor grad av resonnering i oppgaven. Det er altså ikke en typisk aktivitet på dette nivået, og valget jeg har gjort kan diskuteres.

Generalisering er en aktivitet som blir kommunisert i alle lærebøkene. Jeg har allerede skrevet om hvordan generalisering introduserer algebra i Grunntall. Alle de generaliserende aktivitetene i Grunntall er kvantitative uttrykk som skal fremstilles som en formel (type 1). I arbeidet oppfordres eleven til å lage en tabell, og å jobbe systematisk. Det å se det generelle gjennom det spesielle er en av metodene som Mason et al. (2011) trekker fram i arbeid med generalisering. Dette kan hjelpe eleven til å se mønsteret, og kan være en god fremgangsmåte i arbeidet med generalisering. En liknende måte å jobbe på kommuniseres også i Nummer, men Nummer introduserer eleven også for andre generaliserende aktiviteter. Nummer vektlegger det å finne og uttrykke mønster i en figurrekke og i en tallrekke. Boka presenterer flere oppgaver av samme art, men varierer detaljene. Ved å variere detaljene kan det hjelpe eleven med å «se» nye muligheter, og det trekkes også fram som viktig i arbeid med generalisering (Mason et al., 2011). I Nummer 9 oppleves vanskegraden som relativt høyere, og språket spiller en vesentlig rolle. Dette kommer jeg tilbake til litt seinere i dette kapitlet.

I Faktor er det liten grad av generalisering i kapitlene jeg har undersøkt. Eksemplet under viser en typisk oppgave fra Faktor der generalisering er et element:

«Martin er x år. Cecilie er fem år yngre enn Martin.

a) Hva blir uttrykket for alderen til Cecilie?
b) Hva blir alderen til Cecilie hvis Martin er 14 år?»

I eksemplet skal det lages et uttrykk for alderen til Cecilie, og det å lage et matematisk uttrykk ut ifra et kvantitativt problem er en form for generalisering (type 1). Eksemplet hjelper likevel ikke eleven i hvordan hun/han kan tenke, og aktiviteten generalisering blir ikke kommunisert. Det legges ikke til rette for å bruke noen av metodene som Mason et al. (2011) fremhever som viktige i arbeidet med generalisering. I en typisk generaliseringsoppgave ville muligens spørsmålene blitt byttet om. Det ville kanskje vært naturlig å spørre etter alderen til Cecilie hvis Martin var 10 år, 12 år og 14 år, for så å spørre om det generelle uttrykket hvis han er x år. I eksemplet presenteres uttrykket med en gang, Cecilie blir x-5 år, uten noe forklaring. Mason (1996) beskriver overgangen fra det spesielle til det generelle som problematisk for elever, og at det nettopp er slike overganger som elever må trene på, altså generalisering. I denne oppgaven mener jeg at dette ikke er tatt hensyn til, og det algebraiske uttrykket for alderen til Cecilie blir presentert uten å gå via spesielle eksempler. Det spesielle eksemplet er oppgave b, og der presenteres svaret ved bruk av formelen. Selv om det å finne en formel til et numerisk uttrykk karakteriseres som generalisering (type 1) av Kieran (2004), mener jeg at boka ikke kommuniserer generalisering for eleven. Jeg er også redd for at den kognitive utfordringen det kan være for elever å lage et generelt uttrykk, muligens blir undervurdert.

5.4 Representasjoner og overganger sett i lys av matematisk forståelse

Både generaliserende aktiviteter og aktiviteter på globalt/meta-nivå er viktig i arbeidet med algebra (Kieran, 2004; Mason 1996), og de fleste aktiviteter av denne typen krever også en form for konvertering mellom representasjonsregistre. Duval (2006) trekker likevel fram det å jobbe med ulike representasjoner, og overganger mellom disse, som noe som har en verdi i seg selv for å fremme matematisk forståelse.

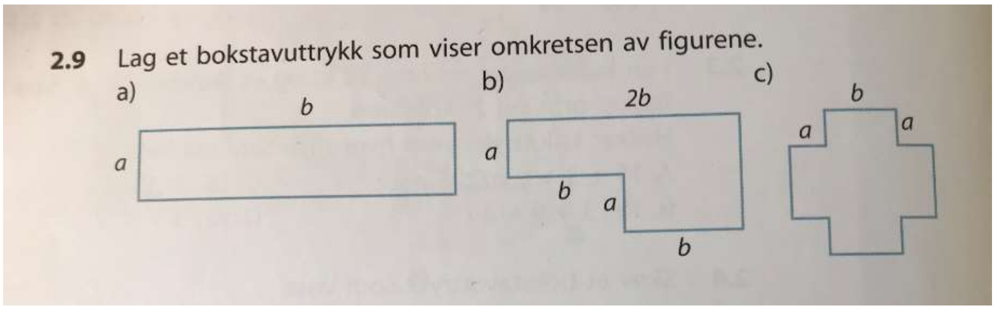
Analysene jeg har gjort viste stor forskjell når det gjaldt bruk av ulike representasjoner og overganger. I Grunntall er det de generaliserende oppgavene som også krever konvertering mellom representasjonsregister, men kun mellom naturlig språk og symbolspråk. De andre oppgavene i Grunntall handler kun om symbolmanipulasjon, altså behandling i registeret symbolspråk. Jeg vil dermed hevde at eleven får en ganske snever erfaring med bruk av ulike representasjoner og konverteringer mellom dem. Det å jobbe med symbolspråk uten å knytte det til andre representasjoner kan gjøre matematikken abstrakt for eleven, og ifølge Duval (2006) er det nettopp denne abstraktheten som gjør forståelsen vanskelig. Duval (2006) fremhever det å jobbe med ulike representasjoner som viktig for at elever skal forstå at en representasjon nettopp er en representasjon for det matematiske objektet og ikke det matematiske objektet i seg selv. Hvis eleven for det meste jobber med transformerende aktiviteter slik som oppgavene i Grunntall legger opp til, fremmer dette først og fremst prosedyrekunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986) eller det som Skemp (2006) kaller instrumentell forståelse. Dette er viktig kunnskap i arbeidet med for eksempel bevisføring, og ifølge Hiebert og Lefevre (1986) er slik kunnskap en forutsetning for begrepsmessig forståelse. Men det å ha prosedyrekunnskap fører ikke nødvendigvis til begrepsmessig forståelse.

I Faktor er det flere oppgaver som krever konvertering mellom representasjonsregistre, men analysene mine viser at også i denne boka er det transformerende aktiviteter som dominerer. Av de oppgavene som forventer konvertering mellom registre, er det konvertering mellom naturlig språk og symbolspråk som er mest representert. Det vil si at konverteringen skjer en vei, og mellom språklige registre. Eleven får dermed ikke trening i å konvertere motsatt vei. Ved konvertering fra symbolspråk til naturlig språk aktiveres andre kognitive funksjoner enn ved konvertering fra naturlig språk til symbolspråk. Konvertering begge veier forsterker dermed læringen (Duval, 2006). I forkant av flere av oppgavene blir det også presentert et eksempel, og jeg vil anta at tanken er at eleven kan følge eksemplet i arbeid med oppgavene. Det å lære oppskrifter eller prosedyrer for å løse bestemte typer oppgaver, kjennetegner instrumentell matematikk (Skemp, 2006). Det kan dermed tenkes at de fleste av disse oppgavene fremmer instrumentell forståelse, selv om det forventes konvertering mellom registre.

Analysen av læreboka til Nummer viser flere interessante funn. Det kan virke som læreboka har et bevisst forhold til bruk av ulike representasjoner og til konvertering mellom representasjonsregistre. Oppgavestrengen som er presentert i figur 13, i kapittel 4.2.2 viser et eksempel på dette. I oppgave 4.13 blir eleven bedt om å skrive en regnefortelling med egne tall. Eleven har allerede en fortelling som kan brukes som mal, men fortellingen må uansett skrives ned med egne tall. Deretter skal eleven sette opp to ulike regneuttrykk og regne ut. Ved å jobbe på denne måten vil fortellingen gi mening til tallene, og tallene er ikke bare symboler. De representerer noe spesielt som eleven har gitt mening til gjennom fortellingen. Dette kan hjelpe eleven til å se at tallene i regneuttrykket representerer den samme matematiske problemstillingen som gitt i regnefortellingen. Dette fremhever både Svingen (2018) og Duval (2006) som viktig for matematisk forståelse, og det foregår en konvertering fra naturlig språk til symbolspråk. I oppgaven (4.11) presentert i figur 29 blir eleven i b) bedt om å diskutere forslaget sitt med en medelev. Det vil altså foregå en konvertering fra symbolspråk til naturlig språk. Mason (1996) trekker også fram bruk av det naturlige språket som viktig på veien mot å finne en formel. I c) blir eleven presentert for en formel, og eleven må sjekke om formelen støtter utregningen hennes. Dette krever behandling i registeret symbolspråk. I denne oppgavesekvensen forventes det konvertering mellom naturlig språk og symbolspråk, og mellom symbolspråk og naturlig språk, samt behandling i symbolspråk. I oppgaven brukes altså konvertering begge veier, noe som gjør at ulike kognitive funksjoner aktiveres, og dermed kan fremme matematisk forståelse (Duval, 2006).

Noe som forundret meg i arbeidet med analysene var hvor lite bruk av illustrasjoner det var i lærebøkene. Dette gjaldt alle lærebøkene i studien min. I Grunntall var bruk av illustrasjoner som representasjon fraværende i kapitlene jeg studerte, mens Faktor og Nummer hadde noe bruk av figurer som representasjon. Bruken var likevel ulik.

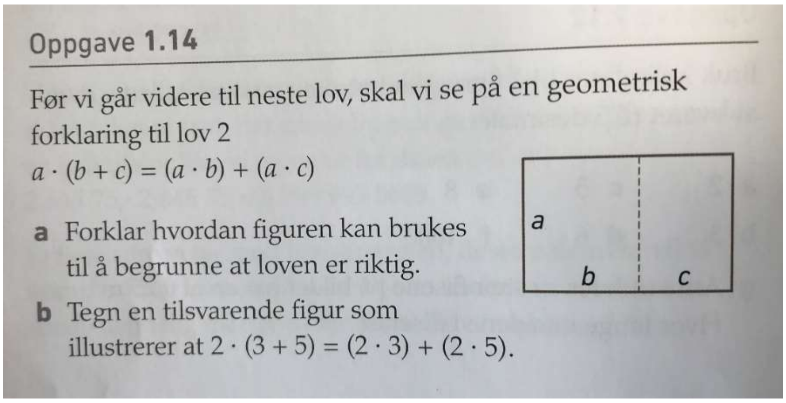
I Faktor brukes de fleste figurene som i arbeidet med for eksempel å uttrykke omkretser som algebraiske uttrykk. Et eksempel på dette er oppgaven i figur 36.



Figur 36: Oppgave som bruker figurer (Hjardar & Pedersen, 2006c, s. 40)

Jeg har kategorisert oppgaven som konvertering fra illustrasjoner til symbolspråk, men dette kan diskuteres. Figurene kan sees på som «støttefigurer» i en oppgave som krever behandling i registeret symbolspråk, og bruker vi oversikten til Duval (2002) skal en representasjon i dette registeret være uten notasjoner. Figurene i oppgaven på figur 36 har notasjoner på noen av sidene, og er dermed ikke «rene» figurer. I oppgaven må likevel eleven «se» figuren, og anerkjenne at de ukjente sidene kan uttrykkes henholdsvis a og b før eleven foretar en behandling av uttrykket i symbolspråk. Jeg vil dermed kalle dette en form for konvertering mellom registre.

I Nummer dukker de fleste figurene opp i forbindelse med generalisering av figurer, men det finnes unntak. I figur 37 presenteres en oppgave fra Nummer, der det brukes en geometrisk figur i arbeidet med å begrunne den distributive loven.


Oppgave 1.14

Før vi går videre til neste lov, skal vi se på en geometrisk forklaring til lov 2
$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

a Forklar hvordan figuren kan brukes til å begrunne at loven er riktig.

b Tegn en tilsvarende figur som illustrerer at $2 \cdot (3 + 5) = (2 \cdot 3) + (2 \cdot 5)$.

Figur 37: Bruk av geometrisk figur i arbeid med algebra (Hole et al., 2014, s. 20)

Denne figuren er heller ikke helt «ren», men jeg vil likevel påstå at eleven må forholde seg til en representasjon i registeret symbolspråk. For å kunne bruke figuren til å begrunne en algebraisk lov er det en forutsetning at eleven ser at figuren representerer det algebraiske uttrykket. Det å se dette kan være kognitivt krevende for eleven, for figuren og det algebraiske uttrykket tilhører to ulike semiotiske systemer (Duval, 2006). Eleven må bruke figuren og det algebraiske uttrykket i arbeidet og ifølge Ott (2018) vil kombinasjoner av representasjoner (MER) kunne være til støtte i arbeid med matematiske problemstillinger. En forutsetning er likevel at den ene representasjonen er bærende. Hvis hverken det algebraiske uttrykket, eller den geometriske representasjonen er bærende for eleven, vil ikke en slik figur støtte eleven i forståelsen av den algebraiske loven. Dette er et tankekors. Det er ikke ukjent for lærere å bruke nettopp geometriske figurer til å begrunne en algebraisk sammenheng for elever, men samtidig viser mine analyser at bruk av illustrasjoner som representasjoner nesten er fraværende i lærebøkene. Mason (1996) skriver at det å «se» i geometriske figurer er noe som må øves på, og i Kunnskapsløftet står det at eleven skal «*bruke både tegninger, tabeller og skisser i tillegg til et mer formelt språk*» (Udir, 2006). Jeg mener at bruk av illustrasjoner som representasjon i arbeid med algebra er lite utnyttet i lærebøkene jeg har analysert.

I kapittel 5.3.2 presenterte jeg en oppgave som jeg diskuterte som en aktivitet på global meta-nivå. Oppgaven egner seg også som diskusjonsgrunnlag for bruk av illustrasjoner i arbeidet med algebra og matematisk forståelse.

«I et rektangel er lengden dobbelt så stor som bredden. Omkretsen av rektanglet er 42cm.

a) Kall bredden for x cm og still opp en likning.
b) Hvor lange er sidene i rektanglet?»

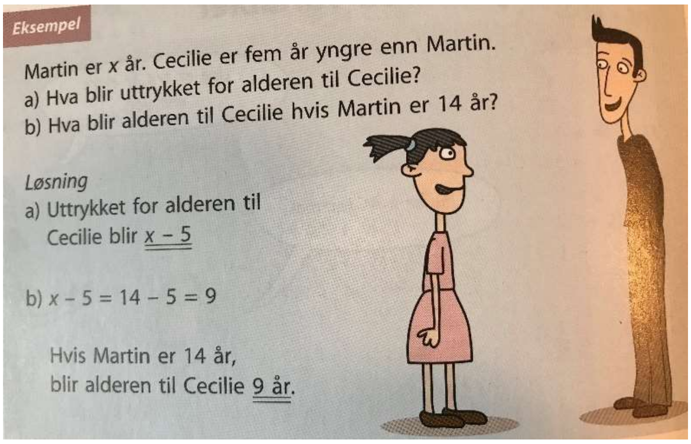
(Hjardar & Pedersen, 2006c, s. 56)

For å gjøre oppgaven bedre egnet som en aktivitet på global/meta nivå foreslo jeg å kutte ut spørsmål a). Da ville det vært ulike måter å løse oppgaven på, og for eksempel kunne det å lage en tegning av rektangelet vært naturlig. Det vil kreve konvertering fra naturlig språk til illustrasjoner, og eleven må «se» at tegningen er en representasjon av det matematiske objektet på samme måte som den muntlige representasjonen. Det er først når eleven ser det, at en visuell representasjon kan være til hjelp. Hvis eleven velger å lage en figur, må eleven deretter analysere figuren før eleven setter opp likningen. Eleven må foreta en konvertering mellom illustrasjoner og symbolspråk. Hvis eleven ikke tegner opp figuren, må eleven likevel ha evnen til å «se» figuren. Dette er blant annet hva Mason (1996) kaller å «se» i matematikk. En elev som bruker tegning på denne måten, får kanskje et indre bilde av hvordan denne figuren ser ut, og ved å jobbe aktivt med illustrasjoner vil det kunne hjelpe eleven til nettopp å «se» slike sammenhenger, og dermed vil eleven kanskje ha større muligheter for å oppnå relasjonell forståelse. Denne evnen til å se sammenhenger mellom geometri og algebra kan trenes opp. Hvis læreren er bevisst på at eleven ikke nødvendigvis «ser» det samme som henne i en geometrisk figur, men trener elevens oppmerksomhet på dette, vil det hjelpe eleven på en annen måte enn om læreren bare tar det som en selvfølge (Mason 1996). I følge Polya (1945) kan det å lage en figur være en god måte å angripe et matematisk problem på, men da må jo også eleven være familiær med å lage illustrasjoner for å illustrere en matematisk sammenheng. Dette er nok et eksempel på viktigheten av at elever trener på å konvertere mellom ulike semiotiske representasjoner i arbeidet med algebra.

5.5 Noen ord om naturlig språk

Språket i bøkene har strengt tatt ikke vært gjenstand for mine analyser, og jeg har heller ikke hatt noe eget analyseverktøy for å analysere språket. Under analysene av introduksjoner og oppgaver ble jeg likevel var forskjellen på språket som ble brukt i bøkene. Det gjaldt både rollen språket hadde, og selve språket som ble brukt. Ott (2018) fremhever det naturlige språket har som bærende representasjon i arbeid med oppgaver, og Mason (1996) framhever også rollen det naturlige språket har i arbeid med generalisering. Underveis i studien min har jeg reflektert mye over hvilken rolle språket spiller som representasjon i de ulike bøkene. På bakgrunn av studien til Ott (2018) og språklige representasjoner slik de er definert av Duval (2002) velger jeg å si noe om språket i lærebøkene.

Faktor fremstår som oversiktlig og ryddig med lite tekst. Forlagets egne ord er at teksten er kortfattet og språket enkelt for å passe alle elever. I utgangspunktet vil kanskje en bok med lite tekst fremstå som enklere for svake, spesielt lesesvake elever. Ser vi nærmere på teksten er jeg usikker på om språket er så enkelt. Språket er veldig konsist, og setningene inneholder typiske matematiske symboler. Figur 38 viser et eksempel fra Faktor, og språket i eksemplet er typisk for læreboka.

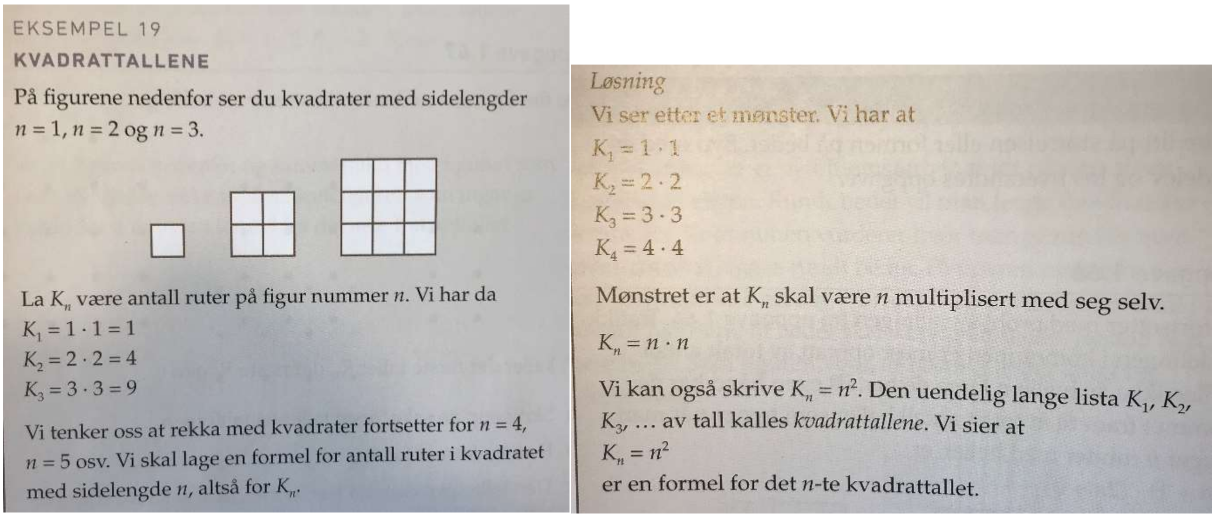


Figur 38: Bruk av språk som representasjon (Hjardar & Pedersen, 2006a, s. 186)

I teksten: «Martin er x år. Cecilie er fem år yngre enn Martin» er setningene korte og konsise, men det at den ene setningene inneholder x (ukjent) kan gjøre teksten mindre tilgjengelig for eleven. Det er ikke sikkert at språket vil fungere som den bærende representasjonen. På grunn av symbolet x kan selve setningen oppleves abstrakt, og det er nettopp abstraktheten som vanskeliggjør algebra (Duval, 2006). Det betyr at selv om boka inneholder lite tekst, og på den måten tar hensyn til lesesvake elever, kan språket muligens være en sperre for de samme elevene.

Grunntall har lite bruk av det naturlige språket i oppgaver. Det viser også analysen av forventningene til eleven, der i underkant av 10% av oppgavene gjorde bruk av naturlig språk som representasjon. Det naturlige språket har likevel en plass i introduksjonen til delkapitlene og i eksemplene jeg har analysert. Språket henvender seg direkte til eleven, og jeg vil hevde at det fremstår som naturlig for en ungdomsskoleelev. Et eksempel på det kan være setningen: «*Syns du det er vanskelig å regne sammen når leddene står om hverandre, kan du samle dem før du regner sammen.*» (Bakke & Bakke, 2006, s. 220). Boka vektlegger altså ikke det naturlige språket som representasjon, men det språket som er representert fremstår som naturlig, og i de få oppgavene der det brukes mener jeg det fungerer som en bærende representasjon.

I motsetning til både Faktor og Grunntall vil jeg hevde at det naturlige språket har en svært fremtredende rolle som representasjon i Nummer. Eksemplene og forklaringene inneholder mange ord, og fremgangsmåter blir forklart og begrunnet med naturlig språk. De fleste av oppgavene i boka forventer også bruk av det naturlige språket, og eleven oppfordres til å bruke det naturlige språket til å forklare og begrunne. I Nummer 8 oppfatter jeg at det naturlige språket også fremstår som naturlig, selv om det er mange ord i teksten. Språket i boka er trolig tilgjengelig for de fleste elevene på ungdomstrinnet. I nummer 9 skjer det et skifte i hvordan det naturlige språket fremstår. Språket blir mer formelt, og det er iblandet flere typiske matematiske symboler. Figur 39 viser et eksempel som handler om generalisering.


EKSEMPEL 19

KVADRATTALLENE

På figurene nedenfor ser du kvadrater med sidelengder $n = 1$, $n = 2$ og $n = 3$.

La K_n være antall ruter på figur nummer n. Vi har da

$K_1 = 1 \cdot 1 = 1$

$K_2 = 2 \cdot 2 = 4$

$K_3 = 3 \cdot 3 = 9$

Vi tenker oss at rekka med kvadrater fortsetter for $n = 4$, $n = 5$ osv. Vi skal lage en formel for antall ruter i kvadratet med sidelengde n, altså for K_n.

Løsning

Vi ser etter et mønster. Vi har at

$K_1 = 1 \cdot 1$

$K_2 = 2 \cdot 2$

$K_3 = 3 \cdot 3$

$K_4 = 4 \cdot 4$

Mønstret er at K_n skal være n multiplisert med seg selv.

$K_n = n \cdot n$

Vi kan også skrive $K_n = n^2$. Den uendelig lange lista K_1, K_2, K_3, … av tall kalles *kvadrattallene*. Vi sier at

$K_n = n^2$

er en formel for det n-te kvadrattallet.

Figur 39: Bruk av språk i arbeid med generalisering (Hole et al., 2015, s. 61)

I eksemplet står det blant annet: «*På figurene nedenfor ser du kvadrater med sidelengder n=1, n=2 og n=3. La K_n være antall ruter på figur nummer n …*». Jeg er redd selve språket i oppgaveteksten kan «skremme» noen elever fordi formen på språket fremstår som abstrakt. Som jeg kommenterte tidligere i kapitlet er det nettopp abstraktheten som er vanskelig tilgjengelig for flere elever (Duval, 2006), og når også det naturlige språket fremstår som abstrakt er jeg redd for at det ikke lenger vil fungere som en bærende representasjon for eleven (Ott, 2018).

5.6 Metodekritikk

Det er gjort flere lærebokanalyser i matematikk de siste tiårene, men ifølge Fan (2013) mangler forskningsfeltet et filosofisk fundament og et tydelig teoretisk rammeverk for lærebokanalyser i matematikk. Han argumenterer for at forskere må utvide fra å se på hvordan et emne blir behandlet i en lærebok, til å se på hvordan dette kan påvirke andre faktorer i undervisningen, og hvordan dette blir påvirket av andre faktorer. En lærebok er kun en faktor i en undervisningssituasjon, og undervisningen er avhengig av mange faktorer. Det er derfor viktig å være klar over at en lærebokanalyse ikke sier noe om undervisningen for en gruppe elever. Det ville derimot vært interessent å se på undervisningen i grupper som bruker ulike læreverk, for å se på om det er en korrelasjon mellom undervisningsmetoder i et klasserom og læreverket som gruppa bruker. Det ultimate målet er uansett å heve kvaliteten på matematikkundervisningen, og for å få til det trenger vi kunnskap om hvorfor en spesiell måte å presentere et emne på er bedre enn en annen måte for å lære matematikk i en spesiell kontekst (Fan, 2013).

Analysen min sier ikke noe om undervisningen til gruppene som bruker de respektive bøkene. Den sier derimot noe om hvordan emnet er presentert i bøkene i forhold til teori om hva som fremmer matematisk kompetanse hos elever. Når vi vet at mange lærere støtter seg til læreboka, både i planlegging og gjennomføring, mener jeg det absolutt er relevant å se på hvordan lærebøker legger opp til arbeid med algebra.

I studien har jeg analysert både introduksjoner og oppgaver i kapitler som omhandler algebra. Jeg vil påstå at bildet jeg gir i analysekapitlet gir et godt og grundig bilde av lærebøkene, og at det gir svar på forskningsspørsmålet mitt. Samtidig vil en analyse foretatt av en person, i dette tilfelle meg, aldri kunne være helt nøytral. Det er min subjektive oppfattelse som ligger til grunn for kategorisering av oppgaver og aktiviteter. En forsker vil også gjerne undersøke noe som vedkommende antar er et problem. Vedkommende kan dermed ende opp med å lete etter informasjon som styrker oppfatninger heller enn å lære noe nytt (Postholm & Jacobsen, 2018). I mitt tilfelle tok jeg også utgangspunkt i noe som jeg antok var et problem, og kunne fort endt opp med å lete etter informasjon som styrket min oppfattelse. Jeg må innrømme at jeg har fått bekreftet noen av hypotesene mine, men jeg har samtidig lært mye. Selv om det store bildet er at mange oppgaver handler om transformering og læring av metoder og algoritmer, har analysen av enkeltoppgaver vært spennende og gitt mye innsikt.

Valg av lærebøker vil også i stor grad påvirke resultatet. To av bøkene i studien var ganske like, mens den tredje skilte seg ut. Det finnes helt sikkert andre bøker som også skiller seg ut, og dermed ville analysene mine gitt andre svar.

6.0 Konklusjon og perspektiver

6.1 Tilnærmingsmåter, representasjoner, overganger og algebraiske aktiviteter

Problemstillingen min handlet om hvordan noen lærebøker legger opp arbeidet med algebra, og hvordan de bruker ulike representasjoner i dette arbeidet. For å svare på dette søkte jeg svar på følgende spørsmål i analysen min:

- *Hvilke tilnærmingsmåter til arbeid med algebra kommuniseres i bøkene?*
- *Hvilke representasjoner brukes, og hvordan legger bøkene opp til overganger mellom disse?*
- *Hva slags algebraiske aktiviteter legger bøkene opp til?*

Jeg hadde en hypotese om at bøkene la vekt på transformerende aktiviteter, altså behandling i registeret symbolspråk, og at bøkene hadde en tilnærmingsmåte som vektla instrumentelle metoder. For to av bøkene vil jeg si at det stemte. Både i Grunntall og i Faktor var det nettopp transformerende aktiviteter som ble vektlagt i det som ble kommunisert til elevene, og det som ble forventet av elevene. I introduksjonene til emnene var hovedregelen også instrumentelle metoder. Det vil si at bøkene vektla å presentere regler og eksempler som elevene deretter kunne følge i arbeidet med oppgavene. Dette er det som Skemp (2006) kaller instrumentell matematikk, og som fremmer instrumentell forståelse.

I introduksjonskapitlene jeg har studert viser analysen at det er en sammenheng mellom læringsmålene som blir presentert for eleven, og tilnærmingsmåtene som bøkene bruker i arbeidet. Nummer brukte andre verb enn Grunntall og Faktor i læringsmålene, og tilnærmingsmåtene boka bruker er også annerledes. Boka hadde en tilnærmingsmåte til emnet som vektla både utforsking og skifte mellom ulike representasjonsregister. Språk som representasjon hadde en vesentlig rolle i arbeidet, og boka la opp til mye matematisk samtale mellom elever. Boka la ikke opp til instrumentelle metoder på samme måte som de to andre bøkene, men vektla metoder som ifølge teorien kan fremme relasjonell forståelse. Det jeg også oppdaget, var at boka la lite vekt på å jobbe med oppgaver som kan trene elever på algoritmer. I de emnene der det ble presentert regler, ble de presentert eller arbeidet med fortløpende, og det ble forventet at elever skulle kunne bruke alle reglene til oppgaver. Språket kunne i noen eksempler og oppgaver, spesielt i Nummer 9, virke litt overveldende. Jeg vil anta at enkelte elever med lav til middels måloppnåelse vil slite med disse sidene.

Når det gjelder representasjoner og konvertering mellom disse skiller også Nummer seg ut. Boka har mye bruk av konvertering både mellom naturlig språk og symbolspråk, og mellom symbolspråk og naturlig språk. Faktor og Grunntall derimot brukte mest behandling i registeret symbolspråk i sitt arbeid. Noe som forundret meg i alle de tre bøkene var hvor lite vekt det var lagt på konvertering mellom illustrasjoner og symbolspråk. Jeg hadde forventet at bruken av geometriske figurer var mer synlig i arbeidet med algebra.

Som nevnt var det transformerende aktiviteter som dominerte, spesielt i Grunntall og i Faktor. Faktor la ikke vekt på generaliserende aktiviteter, mens Grunntall og Nummer hadde et tydelig fokus på generalisering som algebraisk aktivitet. Spesielt Nummer brukte dette mye, både i form av å legge til rette for at elever kan oppdage algebraiske regler, men også i form av tradisjonelle generaliserende oppgaver av type 1 og type 2. Aktiviteter på global/meta-nivå var ikke vektlagt i noen av bøkene, selv om spesielt Nummer hadde noen innslag av slike aktiviteter.

6.2 Læreboka, læreplaner og forskning

Når jeg spør egne elever om når de lærer mest, svarer de som oftest at det er når jeg forklarer oppgaver på tavla. Det er jo et paradoks med tanke på at jeg ønsker at mine elever skal oppnå relasjonell forståelse, samtidig som det gir mening ut fra det Skemp (2006) skriver om instrumentell forståelse. Han skriver at innenfor sin egen kontekst er instrumentell matematikk lettere for elever å forstå. Eleven lærer seg reglene og mestrer mange oppgaver. Dette kan gi eleven en god følelse og god selvtillit.

I teorien jeg har presentert kommer det tydelig fram at arbeid med ulike representasjoner og konvertering mellom disse er viktig med tanke på å utvikle matematisk forståelse. Dette er også synliggjort i læreplanene. I Kunnskapsløftet (2006) står det blant annet at eleven skal bruke både tegninger, tabeller og skisser, i tillegg til et mer formelt matematisk språk. I tillegg er muntlige ferdigheter en av de grunnleggende ferdighetene, og beskriver godt hvordan det naturlige språket skal brukes i arbeid med matematikk. Lærebøkene fra min studie er alle skrevet på bakgrunn av dette dokumentet, men generelt finner jeg lite bruk av ulike representasjoner, spesielt bruk av skisser og tegninger, i materialet jeg har analysert. Duval (2006) skriver også at matematiske prosesser som utføres på representasjoner i de multifunksjonelle registrene, altså illustrasjoner og naturlig språk, er mer krevende siden de ofte krever flere kognitive prosesser. Det er kanskje en av grunnene til at noen lærebokforfattere velger å lage oppgaver som ikke bruker disse registrene så mye. Med tanke på at det nettopp er erfaring med å oversette mellom registrene, og bruk av ulike representasjoner som fører til matematisk forståelse (Duval, 2006) er det tankevekkende.

I den nye læreplanen, Fagfornyelsen (2020), er viktigheten av arbeid med representasjoner og konvertering mellom representasjonsregistre blitt enda tydeligere. Representasjon og kommunikasjon er nå blitt ett av seks kjerneområder. Det står også at eleven skal kunne veksle mellom ulike representasjoner, og veksle mellom matematiske representasjoner og dagligspråket. I Fagfornyelsen (2020) brukes også dybdelæring som et begrep. Ikke bare i matematikk, men som en fellesbetegnelse på hva vi ønsker at elevene skal oppnå med sin skolegang. Dybdelæring defineres som «*det å gradvis utvikle kunnskap og varig forståelse av begreper, metoder og sammenhenger i fag og mellom fagområder.*» Det å utvikle kunnskap, varig forståelse av begreper, metoder og se sammenhenger i faget beskriver også langt på vei relasjonell forståelse i matematikk.

Studien min er lite innlegg i matematikkdidaktisk forskning. Jeg mener likevel at det er et viktig innlegg med tanke på bevisstgjøring rundt bruk av læreboka som styringsdokument i undervisning. Vi har ingen offentlig godkjenning av lærebøker i Norge, og læreren har ingen garanti for at læreboka bygger på forskning eller tar hensyn til alle aspektene i læreplanen. Dette er viktig kunnskap for alle som jobber med matematikkundervisning. Studien er også et viktig innlegg med tanke på bruk av, og konvertering mellom representasjonsregister, og arbeidsmetoder brukt i algebra. Rosseland (2005) skriver: «*Det holder ikke å kun drille algoritmer og formler, for at elevene skal klare seg best mulig til en prøve eller eksamen. Jeg håper det vil tvinge seg* *fram et metodeskifte rundt om i mange klasserom, bort fra instrumentell innlæring og til mer fokus på innsikt, forståelse og varierte arbeidsmetoder»* (s. 53). Kanskje vil vi se spor av dette i kjølvannet av innføring av ny læreplan?

6.3 Videre forskning

Når man jobber så mye med et emne som man gjør når man skriver en master, vil det gjerne dukke opp flere spørsmål som man ønsker svar på. Det jeg er mest nysgjerrig på akkurat nå, er hvordan de nye lærebøkene som er skrevet etter ny læreplan legger opp arbeidet med algebra. Tar de i bruk flere representasjoner i arbeidet, og hvilke konverteringer brukes? Trekkes det inn aktiviteter på global/meta- nivå, og hvordan legger de opp arbeidet med generalisering? Legges det opp til instrumentell eller relasjonell matematikk? Den samme type undersøkelse som jeg har gjort kan nå gjøres på nye læreverk.

Naturlig språk som representasjon kunne også vært gjenstand for egne analyser. Det hadde vært interessant å studere språket i lærebøkene nærmere, men også hvordan elevene brukte det naturlige språket i møte med diverse oppgaver.

Bruk av geometriske figurer er også noe som er interessant i arbeid med algebra. Vil trening i å bruke illustrasjoner som representasjon kunne øke forståelsen elever har av algebraiske sammenhenger? Ifølge Ott (2018) er det det naturlige språket som er den bærende representasjonen, men det hadde uansett vært spennende å studere sammenhengen mellom algebra og illustrasjoner med tanke på matematisk forståelse.

En annen ting jeg er nysgjerrig på er hvordan lærere legger opp arbeidet med algebra. Brukes boka, eller har de en annen tilnærming enn det bøkene har? Hva slags samtaler finner sted i klasserommet i forbindelse med algebra? Dette ville kreve en helt annen undersøkelse enn det jeg har gjort, men det ville kunne gi verdifull innsikt i hvordan lærerne håndterer manglene som jeg har pekt på når det gjelder hvordan lærebøkene legger opp til arbeid med algebra, og det fagdidaktikken fremhever som sentralt for elevers læring.

Litteraturliste

Ainsworth, S. (2006). *DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. Learning and Instruction*, 16(3), 183-198.

Aubert, Karl Egil. (2018, 16. oktober). algebra. I Store norske leksikon. Hentet 19. november 2019 fra https://snl.no/algebra

Bakke, B. & Bakke, I. H. (2006). Grunntall 8. Matematikk for ungdomstrinnet. Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.

Charalambous, C., Delaney, S., Hsu, H., & Mesa, V. (2010). *A Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries.* Mathematical Thinking and Learning, 12(2), 117-151.

Duval, R. (2002). *The cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*.

Duval, R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.DOI: 10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking - the Registers of Semiotic Representations.* Cham: Springer International Publishing AG.

Espeland, H., & Universitetet i Agder Fakultet for teknologi og realfag. (2017). *Algebra at the Start of Upper Secondary School: A Case Study of a Norwegian Mathematics Classroom with Emphasis on the Relationship between the Mathematics Offered and Students' Responses*, 158, 409.

Forskningsetikk, Hentet 19/06/20 fra: https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. ZDM, 45(5), 765-777.

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J.A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., Knain, E., Mørch, A., Naalsund, M. & Skarpaas, K. G. (2017). *Med ark og app, Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer*. Oslo, Norway, Reprosentralen, Universitetet i Oslo.

Grabiner, J. V. (2012). *Why Proof? A Historian’s Perspective*. In (2012 ed., Vol. 15, New ICMI Study Series, pp. 147-167). Dordrecht: Springer Netherlands.

Grønmo, L. S. og Hole A. (red.). (2017). *Prioritering og progresjon i skolematematikken, En nøkkel til å lykkes i realfag. Analyser av TIMSS Advanced og andre internasjonale studier*. Oslo, Norway: Cappelen Damm Akademisk

Grønmo, S. (2016). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (2. utg. ed.). Bergen: Fagbokforlaget

Harder, V. K. (2013). *Problemløsning i norske matematikklærebøker for videregående skole: En studie av fremstillingen av problemløsningsmetoder i algebraeksempler i lærebøkene for kursene 1T og R1*.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-28). Taylor and Francis.

Hjardar, E. & Pedersen, J. E. (2006a). Faktor 1, Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet (1. utg.). Oslo: J.W. Cappelen AS

Hjardar, E. & Pedersen, J. E. (2006b). Faktor 1, Oppgavebok. Matematikk for ungdomstrinnet (1. utg.). Oslo: J.W. Cappelen AS

Hjardar, E. & Pedersen, J. E. (2006c). Faktor 2, Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet (1. utg.). Oslo: J.W. Cappelen AS

Hjardar, E. & Pedersen, J. E. (2006d). Faktor 2, Oppgavebok. Matematikk for ungdomstrinnet (1. utg.). Oslo: J.W. Cappelen AS

Hodgen, Jeremy, Küchemann, Dietmar, & Brown, Margaret. (2010). *Textbooks for the teaching of algebra in lower secondary school: Are they informed by research? Pedagogies*. An International Journal: The Teaching of Algebra, 5(3), 187-201.

Hole, A., Jensen, R., Tellefsen, H. K., Wallace, A. K. (2014). *Nummer 8, Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: Aschehoug.

Kieran, K. (2004). *The core of algebra: Reflection on its main activities*. I K. Stacey, H.Chick, &M. Kendal (Red.), The future of the Teaching and Learning of Algebra The 12 th ICMI Study (s. 21-33). doi: 10.1007/1-4020-8131-6_2

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (red.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Washington, National Research Council. DC: National Academy Press

Kongelf, T., & Universitetet i Agder Fakultet for teknologi og realfag. (2019). *Matematisk Innhold Og Matematiske Metoder I Lærebøker Brukt På Ungdomstrinnet I Norge : Gullgruve Eller Fallgruve for Utvikling Av Matematisk Kompetanse I Problemløsning Og Algebra?*, 241.

Kunnskapsdepartementet. (2020, 11.2). *Intensiv matematikkundervisning kan gi mindre frafall*. Hentet 16.05.2020 fra: https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/intensiv-matematikkundervisning-kan-gi-mindre-frafall/id2690088/

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Fremtidige kompetansebehov II — Utfordringer for kompetansepolitikken. (NOU 2019: 2)* Hentet 16.05.2020 fra: https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2019-2/id2627309/

Mason, J. (1996). *Expressing generality and roots of algebra*. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra - Perspectives for research and teaching* (s. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic. doi: 10.1007/978-94-009-1732-3

Mason, J., Lie, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2011). *Å lære algebraisk tenkning*. (J. Lie, Overs) Bergen: Caspar forlag (Opprinnelig utgitt 2005)

Naalsund, M. (2012), *Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency.,* Oslo, Norway, Universitetet i Oslo

Nosrati, M & Wæge, K. (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk*: Hentet 12.desember 2016 fra:

http://www.matematikksenteret.no/content/4879/Sentrale-kjennetegn-pa-god-laring-og-undervisning-i-matematikk

Ott, N., Brünken, R., Vogel, M., & Malone, S. (2018). *Multiple symbolic representations: The combination of formula and text supports problem solving in the mathematical field of propositional logic*. Learning and Instruction, 58, 88-105.

Polya, G. (1945). *How to Solve it. A New Aspect of Mathematical Method,* Princeton University Press Princeton and Oxford.

Rosseland, M. (2005). *Hva er matematisk kompetanse?* (del2) Hentet 4.mai 2020 fra: http://www.caspar.no/tangenten/2005/rosseland_2_2005.pdf

Ryvold, T. E. (2018). *Sammenligning av norske lærebøker i matematikk og matematikkoppgaver i TIMSS. En komparativ studie av matematikkoppgaver i to norske læreverk og matematikkoppgaver i TIMSS 2015*.

Skemp, R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School,12*(2), 88-95. Lastet ned fra: www.jstor.org/stable/41182357

Svingen, O. E. L. (2018). *Representasjoner i matematikk.* Hentet 3.desember 2019 fra: https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Elever%20som%20presterer%20lavt/P4_M1Representasjoner-i-matematikk_fagtekst.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2011). *Internasjonale studier om norsk skole*. Hentet fra: https://www.udir.no/globalassets/filer/tall-og-forskning/rapporter/temanotat/internasjonale_studier_om_norsk_skole_temanotat.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplanen i matematikk* (MAT 01-05), Fagfornyelsen. Hentet fra: https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Utdanningsdirektoratet. (2013) *Læreplanen i matematikk* (MAT 1-04), Kunnskapsløftet. Hentet fra: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Komplett_visning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden