Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Bjørnar Naalsund og Randi Sandstad

"Men vi kan jo ikke gå tilbake i tid"

- en kvalitativ studie om en praktisk tilnærming til funksjonsbegrepet

Masteroppgave i Lærerspesialist, Matematikk 8.-10. trinn
Veileder: Svein Arne Sikko
September 2020

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Bjørnar Naalsund og Randi Sandstad

"Men vi kan jo ikke gå tilbake i tid"

- en kvalitativ studie om en praktisk tilnærming til funksjonsbegrepet

Masteroppgave i Lærerspesialist, Matematikk 8.-10. trinn
Veileder: Svein Arne Sikko
September 2020

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne masteroppgaven beskriver en studie av et designet, praktisk undervisningseksperiment i elevenes første møte med funksjonsbegrepet og dets representasjoner. Det var ønsket at studentene skulle få en teoretisk og praktisk forståelse av sammenhengen mellom graf og situasjon gjennom praktiske tilnærminger, som dataloggere, samarbeid og resonnement med hverandre. Ettersom dette eksperimentet var tenkt som en del av et større arbeid med temaet, ble både fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap gitt i Ball, Thames & Phelps' modell for undervisningskunnskap (2008) førende i utformingen av undervisningsøkten.

I Kunnskapsløftet 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2020) brukes blant annet Kilpatrick, Swafford og Findell sin trådmodell (2001) til å beskrive dybdelæring. I denne studien brukes denne modellen til å beskrive hvordan elevenes matematiske kompetanse kom til syne under undervisningsøkten. Basert på forskning fra Sierpinska (1992) og Hadjidemetriou og Williams (2002) ser denne studien videre på elevers vanlige misoppfatninger knyttet til emnet, og hvordan disse endres underveis.

Undervisningseksperimentet bestod til slutt av en fortest, for å plukke ut informanter, en designet undervisningsøkt der elevenes arbeid med praktiske oppgaver kunne observeres, samt et intervju med en ettertest.

Resultatene i denne masteroppgaven viser at en 70-minutters undervisningstime kan øke elevers matematiske kompetanse. Elevene fikk en forståelse av sammenhengen mellom graf og situasjonen, og var i stand til å velge riktige/gode strategier for å løse påfølgende oppgaver. Selv om det var tydelig i løpet av undervisningsøkten at mange matematiske begreper ennå ikke var på plass, klarte elevene å resonnere seg frem til hypoteser gjennom å bruke begreper fra hverdagen for å argumentere og forklare for hverandre. I tillegg viste elevene et tydelig engasjement til denne måten å jobbe med matematikk på. De oppmuntret hverandre og nektet å gi opp før de hadde en tilfredsstillende løsning på oppgavene. Inntrykket fra observasjonen ble bekreftet under intervjuene i etterkant, der elevene forklarte hvorfor de syntes det var en fin måte å lære på, og at andre elever også burde få lov til å prøve dette. Når det gjelder misoppfatninger, kom noen til syne under undervisningsøkten. Disse ble helt eller delvis oppklart av elevene selv da de innså at løsningen ikke kunne være riktig, eller gjennom at medelevene forklarte dem det.

Resultatene fra denne studien antyder at den designede undervisningsøkten var effektiv og gjorde det mulig for elevene å utvikle sin matematiske kompetanse innenfor temaet. Dette kom spesielt tydelig frem fire måneder etter at studien var fullført da hele 8. klasse skulle begynne å jobbe med temaet funksjoner; Elevene som hadde deltatt i studien demonstrerte fremdeles matematisk kompetanse i forhold til temaet, selv uten å ha jobbet med det siden utprøvingen. Basert på disse observasjonene er det en anbefaling fra forfatterne av denne masteroppgaven at denne undervisningsmetoden også brukes av andre lærere i ungdomsskolen.

Abstract

This master’s thesis describes a design of a practical teaching experiment when introducing students to the concept of function and its representations. It was desired that students should gain a theoretical and practical understanding of the relationship between the graph and a situation through implementing practical approaches, such as, data loggers, collaborating and reasoning with each other. As it was deemed important to approach the lesson holistically, both subject matter knowledge and pedagogical content knowledge as presented in Ball, Thames & Phelps 's model for teaching knowledge (2008) was important in designing the lesson.

The main topic of this study relates to how the mathematical proficiency of students becomes visible during a lesson. This is important to explore as the Norwegian Government seeks to strengthen this ability among student in the new curriculum, Kunnskapsløftet 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2020). In investigating this, the five strands of mathematical proficiency model by Kilpatrick, Swafford and Findell (2001), among others, has been used. In addition to developing this ability among students, it was deemed important to look at the misconceptions that students appear to have related to this topic based on research by Sierpinska (1992), and Hadjidemetriou and Williams (2002). For this reason, it was examined how the misconceptions among students appeared during the lesson and how they changed along the way. The study conducted in connection to this master’s thesis required a pre-test where informants were chosen, a designated lesson where the work by students on practical assignments could be observed, before concluding with interviews and a post-test.

The results of this master’s thesis demonstrate that a 70-minute teaching lesson can considerably increase the mathematical proficiency of students, i.e. they managed to gain an understanding of how the graph and situation related to each other and were able to choose the correct/good strategies for solving subsequent tasks. Although it was clear during the lesson that many mathematical concepts were not yet in place, the students managed to reason their way to hypotheses through using concepts from everyday life to explain to each other. Furthermore, the students enjoyed this way of working with mathematics. This became evident in that they displayed a sense of commitment to the tasks before them by encouraging one another and refusing to give up before finding a satisfactory solution to a given problem. were confirmed during the interviews afterwards where the students admitted that they thought it was a great way of learning. They highlighted that other students should be allowed to attempt this way of learning as well. In terms of misconceptions, some became evident during the lesson. These were either completely or partially clarified by the students themselves as they realized their answer could not be correct or by someone else that pointed it out to them.

The results of this study would suggest that the lesson design was highly effective and allowed students to develop their mathematical proficiency and to acquire knowledge. This became particularly clear four months after the study was completed when the entire 8th grade was to start working on the topic of functions; the students that had participated in the study still demonstrated mathematical competence in relation to the topic though they had not worked on it since. Based on these observations, it is the recommendation of the authors of this master’s thesis that the lesson design introduced should be implemented in schools all over Norway.

Forord

Denne masteroppgaven er et resultat av et 3-årig løp på lærerspesialistutdanningen i matematikk ved NTNU. Lærerspesialistutdanningen i matematikk ble startet som en pilot og vi ble en del av andreårspiloten fra 2017. Da det ble klart at vi kunne skrive master som en avslutning på dette studiet, bestemte vi oss for at dette ville vi gjøre sammen. Vi har begge mange års erfaring fra læreryrket, jobber på to ulike ungdomsskoler, og skulle vi først skrive en masteroppgave var det viktig for oss at det kunne være noe både vi og kollegaer kunne dra nytte av i undervisningen.

I tråd med at fagfornyelsen skulle implementeres fra høsten 2020, ble det også viktig for oss å være i forkant der, og prøve ut noe som ville passe inn i de nye læreplanene.

Vi har begge to vært i full jobb under arbeidet med denne oppgaven. I tillegg er vi forholdsvis aktive på fritiden, med både kultur og idrett, så det har tidvis vært et tøft år. Og det ble ikke lettere da Covid-19 banket på døra i mars, skolene stengte, og vi bare kunne møtes digitalt – etter en full dag med digital undervisning.

Vi setter derfor stor pris på fleksibiliteten vi har fått fra vår veileder, Svein Arne Sikko, som har bistått oss med å svare på spørsmål og lede oss gjennom dette arbeidet.

Tusen takk til elever som hoppet ut i oppgavene og gav oss den empirien vi trengte, og til kollegaer som har vært samtalepartnere underveis, og også har vært med å prøve ut i etterkant.

En takk også til Fredrik Kleivli, Arve Fiskarstrand, Elisabeth Strandskog og Talania Johansen for gjennomlesing og gode innspill.

Og til slutt: Hverandre!
Uten det fantastiske samarbeidet vi har hatt, hadde vi aldri kommet i mål.
Vi er akkurat like flinke til å finne tid, til å bistå hverandre når det har vært nødvendig, til å utsette så lenge vi kan, til å jobbe effektivt når vi må, og til å finne på noe helt annet å snakke om når vi trengte en pause. Det har blitt mange kopper kaffe, men samarbeidet oss imellom strekker seg nå mye lenger enn til denne oppgaven – faktisk på tvers av to ungdomsskoler, og over flere fag.

Bjørnar Naalsund og Randi Sandstad

NTNU, september, 2020

Innhold

1 Innledning

1.1 Valg av oppgave

Høsten 2020 startet implementeringen av fagfornyelsen av Kunnskapsløftet 2020. Vårt mål for denne forskningen var å designe et undervisningsopplegg som både vi og kollegaer kunne bruke i matematikkfaget, og det var derfor viktig for oss å ta utgangspunkt i de nye planene, og samtidig prøve å dekke et behov knyttet til et tema elever strever med. Tradisjonelt har norsk skole jobbet mer med prosedyrebygging der man har pugget metoder og algoritmer for så å bruke dem, enn med å forstå sammenhenger og bygge konseptuell forståelse. (Nosrati & Wæge, 2015; Alseth, Breiteg & Brekke, 2003)

I de nye læreplanene (Utdanningsdirektoratet, 2020) står utforskende og undrende fremgangsmåter i fokus. Elevene skal jobbe sammen, og gjennom den matematiske samtalen komme frem til løsninger - sammen. En annen endring i matematikkfaget i fagfornyelsen er at det er lagt konkrete mål til hvert årstrinn. Dette er spesielt for matematikkfaget, og kan for eksempel begrunnes med at faget i større grad enn mange andre fag bærer preg av en strengere kronologi og oppbygning. Grunnleggende tallære og mengdelære må komme først. Så kan man i den ene retningen utvide tallbegrepet med negative tall, desimaltall og brøk, og i den andre retning innføre regneartene steg for steg. Deretter kan man abstrahere og generalisere, osv. Ikke alle tema er like avhengig av andre, men når disse skal fordeles og det skal være passe lik arbeidsmengde på alle årstrinn, så gir en del seg av seg selv.

Vår erfaring som matematikklærere er at funksjonsbegrepet sjeldent har blitt behandlet allerede på 8.trinn, og de fleste læreverk har heller ikke tatt det for seg som tema før på 9. og 10.trinn, selv om det har stått som kompetansemål på 8.-10-trinn i Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2006). Det er ansett å være et av de temaene elever strever med (Sierpinska, 1992). Resultat fra TIMSS (Universitetet i Oslo, 2007; Universitetet i Oslo, 2015) og KIM-prosjektet (Brekke, 2002) viser at det hersker en del misoppfatninger knyttet til ulike representasjoner av funksjoner og at dette er et tema som er og har vært vanskelig for elevene.

I de nye fagplanene finner man i mål for opplæring for 8.trinn at eleven skal kunne:

- utforske, forklare og sammenligne funksjoner knyttet til praktiske situasjoner
- representere funksjoner på ulike måter og vise sammenhenger mellom representasjonene.

Gjennom å jobbe med ulike representasjoner, vil elevene kunne utvikle både den abstrakte og den konkrete forståelsen av funksjoner, gjennom modellering og tolking.

> *Funksjoner er det viktigste konseptet, fra barnehage til universitet og vil være kritisk gjennom hele utdanningsforløpet. Aritmetikk i de tidlige år, algebra på ungdomsskole og videregående, geometritransformasjoner på høyskole og universitet, kommer alle til å være basert på ideen om funksjoner.*
>
> *(Harel & Dubinsky, 1992, vår oversettelse)*

Funksjoner brukes som grunnlag for modellering av ulike systemer, og kan dermed gi oss muligheten til å forutsi forskjellige utfall. Denne modelleringen med ulike variabler benyttes i de fleste fagfelt som økonomi, fysikk, biologi, kjemi og geografi.

1.2 Empiri, metode og teoretisk grunnlag

Vi har tatt utgangspunkt i Ball, Thames & Phelps (2008) sine seks hovedelementer for undervisningskompetanse for å skape vårt undervisningseksperiment. De konkretiserer fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap på en måte som er hensiktsmessig i arbeidet med å designe et undervisningsopplegg. Disse forklares nærmere i teorikapittelet.

Inspirert av Gjøvik og Sikkos undervisingseksperiment «Walking a graph» (2019), og lignende prosjekter gjennomført i andre land (Arzarello & Robutti, 2004; Robutti, 2009) ville vi prøve å lage et undervisningseksperiment for 8.trinnselever som hadde en utforskende tilnærming til funksjonsbegrepet.

Ifølge Stavangerprosjektet (Reikerås, Moser & Tønnesen, 2017) er det en klar sammenheng mellom motoriske ferdigheter og matematiske ferdigheter i førskolealder, noe som gjorde det verdt å undersøke om det å koble sammen bevegelse og matematiske oppgaver også kan gi økt forståelse hos elever på ungdomsskolen.

Opplevelsen vår gjennom selv å prøve ut bevegelsessensor, var at en praktisk tilnærming til et eksisterende problem var noe vi kunne dra nytte av med elevene. Selve undervisningseksperimentet skulle derfor innebefatte elevers eksperimentering med bevegelsessensor og grafer, for å gi økt forståelse for funksjonsbegrepet.

Tidligere forskning (Gjøvik & Sikko, 2019; Robutti, 2004) viser at denne typen eksperiment fungerer godt uavhengig av elevenes tidligere kunnskapsnivå. For å se om opplegget vårt ville fungere uansett forkunnskap, bestemte vi oss for å plukke ut en gruppe elever som viste liten kompetanse på feltet fra før, og en gruppe som viste høyere kompetanse på feltet fra før. Siden funksjonsbegrepet etter fagfornyelsen skal introduseres på 8.trinn, ville vil jobbe med elever på dette trinnet.

Funksjonsbegrepet er stort og tar for seg flere ulike representasjoner. Vi tok utgangspunkt i Janviers 12 overganger mellom ulike representasjoner av funksjoner (Janvier, 1978). For å avgrense vår oppgave noe valgte vi å kun se på to av overgangene; *fra graf til situasjon* og *fra situasjon til graf*.

Misoppfatninger innenfor funksjonsbegrepet er velkjent for matematikklærere. Ved å bruke Sierpinska (1992) og Hadjidemetriou og Williams (2002) sine lister over typiske misoppfatninger ønsket vi å se hvilke av disse våre utvalgte elevene hadde, og om disse ble endret gjennom undervisningseksperimentet.

Som teoretisk rammeverk for analysen vår har vi valgt å bruke Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) sin trådmodell, fordi modellen består av fem tråder som til sammen skaper matematisk kompetanse. Disse er *konseptuell forståelse, prosedyreflyt, strategisk kompetanse, resonnering* og *engasjement*. Trådene er gjensidig avhengig av hverandre, og bør utvikles parallelt for å utvikle elevenes matematiske kompetanse. Man finner dessuten igjen innholdet i trådmodellen i de nye læreplanene (Utdanningsdepartementet, 2020) under beskrivelsen av dybdelæring.

1.3 Problemstilling

På bakgrunn av alt dette ble problemstillingen vår slik:

> *Hvordan vil et undervisningsopplegg med vekt på en utforskende tilnærming til overgangen mellom ulike representasjoner av funksjoner, utvikle 8.trinnselevers matematiske kompetanse knyttet til funksjonsbegrepet?*

For å kunne besvare forskningsspørsmålet vårt ville vi se på følgende underspørsmål.

- *Hva bør man legge vekt på når man skal designe et undervisningsopplegg som tilnærmer seg et emne praktisk?*
- *Hvordan kommer de fem trådene i trådmodellen frem i elevenes utprøving?*
- *Hvilke misoppfatninger ser vi hos elevene, og endres disse underveis i undervisningsøkten?*

1.4 Oppgavens oppbygging

Denne oppgaven har seks kapittel, som igjen er delt i delkapittel og underkapittel. I teorikapittelet vil vi presentere teori som omhandler læringsteori, undervisningskunnskap og matematisk kompetanse med vekt på trådmodellen. Vi vil også se på funksjonsbegrepet, misoppfatninger, det å bruke bevegelsessensor og teknologi i undervisning og hvordan sansemotorikk påvirker utvikling av matematisk kompetanse. I metodedelen begrunnes valg av metode og vi vil beskrive forskningsdesignet vårt og de ulike innsamlingsmetodene som har blitt brukt for å innhente data. I analysekapittelet blir funn gjort under observasjon og intervju presentert. I diskusjonskapittelet vil vi diskutere undervisningsdesignet vårt og belyse funn fra gjennomføringen ved hjelp av tidligere presentert teori. Avslutningsvis samler vi trådene og konkluderer på grunnlag av funn og diskusjon opp mot teori.

2 Teoretisk grunnlag

I dette kapittelet vil vi gjøre rede for teorien som danner grunnlaget for analysen og diskusjonen. Vi vil ta for oss læringsteorier, undervisningskunnskap og matematisk forståelse som danner grunnlaget for det undervisningsopplegget vi har laget, samt noen holdepunkter i diskusjonen. Vi vil også gjøre rede for funksjonsbegrepet og vanlige misoppfatninger blant elever knyttet til dette. Til slutt vil vi ta for oss det å bruke teknologi, og her spesielt dataloggere, i undervisningen.

2.1 Læringsteori - Konstruktivismen

Konstruktivistisk læringsteori har vært dominerende innenfor matematikkdidaktikken de siste tiårene. Konstruktivismen kommer fra en filosofisk posisjon som sier at vi mennesker ikke har tilgang til en objektiv virkelighet. Vi bygger vår kunnskap om verden på våre oppfatninger og erfaringer, som igjen er bygd på vår tidligere kunnskap. Læring er prosessen der mennesker tilpasser seg sin erfaringsverden (Simon, 1995). Innenfor konstruktivismen kan man finne en rekke forskjellige inndelinger og enkelte teorier kan bli tatt til inntekt for forskjellige typer konstruktivisme (Quale, 2012).

Man kan si at konstruktivismen har sitt utspring i John Deweys «Learning by doing» (Vanderstraeten, 2002). For å lære må man selv utføre en handling og høste erfaringer fra denne handlingen. Man vil da kunne få en sammenheng mellom handling og resultat som gjør at du vil oppleve læring.

Den mest fremtredende eksponenten for konstruktivismen er Jean Piaget. Hans konstruktivisme blir gjerne kategorisert som kognitiv konstruktivisme, hvor alt vi lærer og erfarer blir tolket gjennom de kunnskaper og erfaringer vi har fra før. En lærer som foreleser om et emne, vil ikke automatisk overføre sin kunnskap til eleven. Det er eleven som selv velger ut hva som skal bli tolket inn i sitt bestående erfaringsgrunnlag. Gjennom handling og utforskning vil man ikke sitte igjen med et statisk minnespor, ala et lydopptak, men et aktivt handlingsmønster i sitt mentale indre plan. Disse handlingsmønstrene bruker man for å erfare den ytre verden, og nye inntrykk må da tilpasses de erfaringene, eller skjemaene en har fra før.

Piaget kategoriserte erfaringene inn i skjema som sensorimotoriske eller kognitive. Når vi møter nye og ukjente situasjoner vil vi ved hjelp av assimilasjon, tolke eller forstå ved hjelp av de kunnskaper eller skjema vi har fra før, og forklare dette ved noe kjent. Hvis dette ikke er mulig må man revurdere og omstrukturere sine gamle oppfatninger, slik at man lager seg nye tolkninger eller skjema, akkomodasjon. Disse to prosessene foregår samtidig ved at man lager seg teorier; hypoteser, prøver ut, tolker, reorganiserer, lager nye teorier, og slik fortsetter det til det oppstår en ny forståelse eller læring (Imsen, 2014).

Den pedagogiske tilnærmingen til konstruktivismen kommer tydeligere til syne gjennom Jerome Bruners arbeider (Smith, 2002). Der Piaget satte søkelys på utviklingsstadier og ikke på læring i seg selv, engasjerte Bruner seg i utviklingen av læreplaner på 1960-tallet i USA. «Learning by discovery» skulle gjøre at elevene var aktive, eksperimenterte og fant ut av ting selv. Innenfor hvert fag er det noen grunnleggende ideer, som kan fremstilles både enkelt og mer komplisert, og dermed kan arbeidsmåter, presentasjonsformer og lærestoffet tilpasses den enkelte elevs nivå. Lærerens rolle skal oppmuntre elevene til å forstå de grunnleggende ideene selv, læreren og eleven må engasjere seg i samtaler om lærestoffet og det er lærerens oppgave å tilpasse til elevens nåværende forståelse. Ideene kan gjentas flere ganger, i stadig mer kompliserte og avanserte former etter hvert som man blir eldre. Læreplanen blir organisert etter spiralprinsippet, slik at eleven kontinuerlig bygger på det de har lært. Nye tolkninger blir laget og man oppnår en stadig akkomodasjon (Smith,2002).

Kritikken mot den kognitive konstruktivismen, går ut på at den i for liten grad tar hensyn til at læring foregår i en sosial sammenheng, og at kunnskapen dermed blir konstruert der. Læringen starter med språket som et kulturelt fenomen, og den må ses i sammenheng med kulturen, språket og det sosiale felleskap som eleven hører til i. (Imsen, 2014). Sosialkonstruktivismen ser på høyere mentale prosesser som sosialt bestemte. Sosiokulturelle prosesser blir gitt analytisk prioritet, når man skal forstå individuelle mentale funksjoner, heller enn motsatt. Fra et sosialt perspektiv bor kunnskapen i kulturen, som er et system større enn sine enkeltdeler (Simon, 1995).

I skolesammenheng står språklige uttrykksformer sentralt gjennom samtaler i klasserom, skolebøker, elevenes skrivebøker, og den muntlige kommunikasjonen som foregår hele tiden i forskjellige former. Den sosiale konstruktivismen kan dermed knyttes tett opp til det praktiske i klasserommet. Kunnskapen er stadig i endring og skapes på nytt, og er derfor vanskelig å måle. Elevene blir styrt både av en indre og en ytre motivasjon, og læreren vil hjelpe elevene med å definere og nå målene sine. Gjennom samarbeid vil elevene oppdage at summen av deres kunnskaper blir høyere enn deres individuelle kunnskap, og dermed lærer de av hverandre. Læreren setter her betingelsene for samarbeidet og aktiviteten er viktig.

Vygotsky (1978) snakker om den proksimale utviklingssonen hvor man er avhengig av at det er en lærer eller en person som kan mer, som er den ene parten av samspillet, og sette i gang læringsprosessene. Ved hjelp av mediering vil eleven da kunne oppdage ny kunnskap og ledes mot denne sonen (Vygotsky, 1978). Språket blir sett på som det fremste medierende hjelpemiddelet, og gjennom samtale, samspill og felles forståelse skjer læring.

En annen form for konstruktivisme er den radikale konstruktivismen. Von Glasersfeld (2013) beskriver denne som en ukonvensjonell tilnærming til kunnskapen og kunnskapens problemer, og tar utgangspunkt i at kunnskap, uansett hvordan den defineres, er i hodene til personer, og at man ikke har andre alternativ enn å konstruere en forståelse knyttet til tidligere erfaringer. Alle erfaringer er i hovedsak subjektive, og selv om man kan anta at min erfaring er den samme som din, har jeg ingen måte å vite om den er den samme. Erfaring og tolkning av språk er ikke unntatt, derav at vi kun kan bevisst handle i den verden vi selv har konstruert. Den radikale konstruktivismen kan formuleres i følgende fundamentale prinsipper (Von Glasersfeld, 2013, s. 51, vår oversettelse)

- Kunnskap blir ikke passivt mottatt gjennom sansene eller ved kommunikasjon. Kunnskap er aktivt bygd opp av det tenkende menneske
- Erkjennelsen tjener personens organisering av den erfaringsmessige verden, ikke oppdagelsen av en objektiv virkelighet

Konstruktivismen som læringsteori forteller oss da at alle lager sine personlige teorier utfra tolkninger og tidligere erfaringer. Kunnskapen vil være individuell, og skal man skape en felles forståelse er man innenfor den sosiale konstruktivismen avhengig av at man bruker språket til å samtale med hverandre. Von Glasersfeld (1998) sier i sin anmeldelse av Paul Ernest bok «Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics» at dette ikke er nødvendig i alle sammenhenger, og at kunnskap innenfor geometri kan bli dannet individuelt uten sosial interaksjon ved å se på enkle grafiske design, som for eksempel visuelle bevis av den pytagoreiske læresetningen, eller innenfor funksjonsbegrepet ved å se på enkle tid/avstand-grafer.

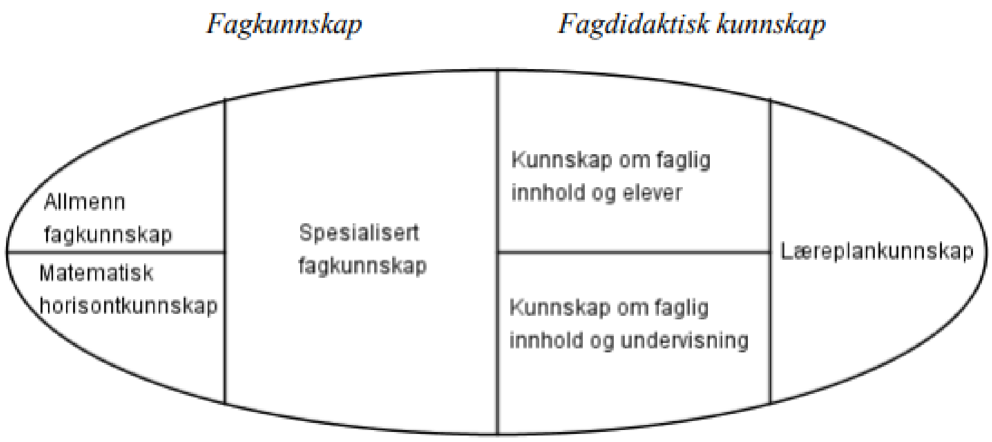
Hva som er viktigst av den sosiale eller kognitive dimensjonen er nødvendigvis vanskelig å besvare, men Simon (1995) ser på hva som kan læres av å kombinere analyser fra disse to perspektivene. Et konstruktivistisk syn kan gi oss et rammeverk for hvordan man tenker om læringen av matematikk i klasserommet, men forteller oss ikke hvordan man skal undervise i matematikk, den gir oss ikke en spesiell modell. Læreren får da en dobbeltrolle med å fremme utviklingen av konseptkunnskap hos elevene og legge til rette for sammensetningen av delt kunnskap i klasseromssamfunnet. En undersøkelse av hvordan eleven ser problemet, og hvorfor deres vei mot en løsning av problemet er adekvat og tilfredsstillende, vil være en nyttig tilnærming til undervisningen (Von Glasersfeld, 1998).

2.2 Undervisningskunnskap

Lee S. Shulman (1986) var en pioner innenfor forskning på matematikklærerkompetanse på 1980-tallet, og han delte kompetansen inn i tre hovedkategorier: Fagkunnskap (Subject matter knowledge), fagdidaktisk kunnskap (pedagogical content knowledge) og læreplankunnskap (curricular knowledge).

Ball og Bass (2003) innførte begrepet «Mathematical knowledge for teaching», MKT. I Norge kalles dette for «Undervisningskunnskap i matematikk», UKM (Valenta, 2015). Dette er et overordnet begrep for å beskrive hvilken kompetanse som er nødvendig for å undervise i matematikk.

De tre kompetansene Shulman identifiserte i 1986, finner man igjen i Ball, Thames og Phelps (2008) sine seks identifiserte hovedelementer for undervisningskunnskap i matematikk. Her deles undervisningskompetansen i to hoveddeler; fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap.



Figur 1: Undervisningskompetanse i matematikk, oversatt fra Ball, Thames og Phelps, 2008.

Fagkunnskap består av allmenn fagkunnskap, spesialisert fagkunnskap og matematisk horisontkunnskap. Allmenn fagkunnskap er den kunnskapen alle som jobber med matematikk har, men som ikke er spesiell for lærere. Spesialisert fagkunnskap er den kunnskapen lærere har innenfor matematikkfaget, som ikke er nødvendig for andre å ha. Slik kunnskap kan for eksempel være å ha en bevisst tanke rundt hvilke metoder og eksempler man velger når man skal forklare operasjoner og idéer. Horisontkunnskap handler om at en lærer må ha et blikk både bakover og fremover i tid, for å se hvordan ulike emner har relasjon til hverandre.

Fagdidaktisk kunnskap består av kunnskap om faglig innhold og elever, kunnskap om faglig innhold og undervisning, og generell læreplankunnskap. Kunnskap om faglig innhold og elever handler om å forstå at elever tenker på ulike måter, og at man må prøve å knytte elevenes interesse til temaet for å skape engasjement. Kunnskap om faglig innhold og undervisning gir læreren kunnskap om hvordan man bør legge opp undervisningsprosessen og –progresjonen, og det er her også læreplankunnskapen kommer inn, hvor man innhenter kunnskap om hvilke temaer som det skal undervises i.

2.3 Matematisk kompetanse

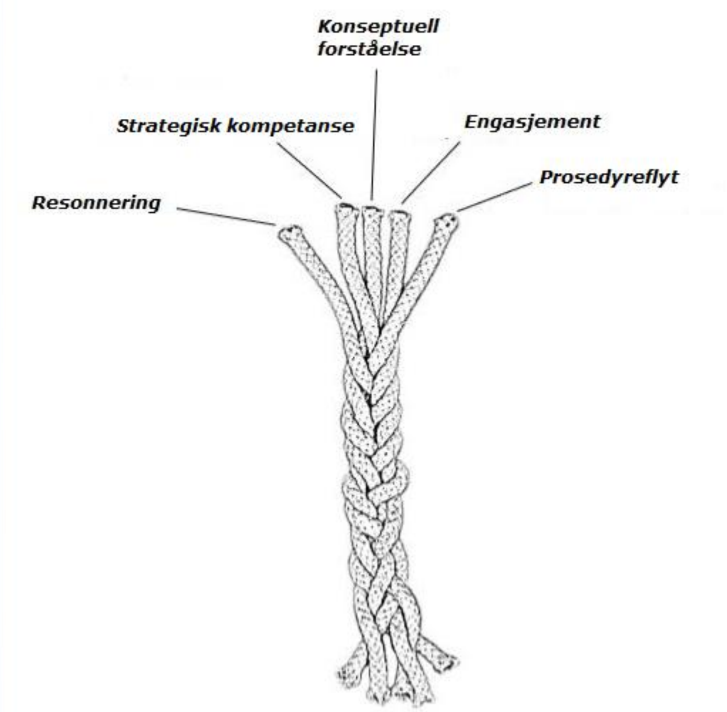
I undervisningssammenheng har det vært en forståelse av at matematisk kunnskap består av to deler. En del som omhandler det å vite hva og hvordan, og en annen del som handler om å vite hvorfor. De to sidene av matematisk kunnskap har blitt omtalt ulikt gjennom årenes løp, men innholdsmessig har det vært en fellesforståelse om et hva/hvordan opp mot et hvorfor (Hiebert & Lefevre, 1986; Kilpatrick et al., 2001).

Hiebert og Lefevre (1986) valgte å bruke begrepene «Conceptual knowledge» og «Procedural knowledge», oversatt til «Konseptuell kunnskap» og «Prosedyrekunnskap». Konseptuell kunnskap går ut på å ha et nettverk av kunnskap som knyttes sammen. Individuelle fakta og forslag blir linket sammen gjennom å bygge relasjoner til eksisterende nettverk, og disse må være linket slik for å kunne forstås som konseptuell kunnskap. Prosedyrekunnskap omhandler bruken av ulike matematiske symboler til å beskrive matematiske ideer, kunne regler for hvordan man ved å bruke symboler kan sette opp oppgaver, kunne ulike algoritmer og prosedyrer for å løse ulike oppgavesett.

Kilpatrick et al. (2001) skriver om «Mathematical proficiency», som vi velger å oversette til *matematisk kompetanse*, i stedet for *kunnskap i matematikk* når de beskriver trådmodellen sin. Likevel finner man mange likheter mellom Hiebert og Lefevre, og Kilpatrick et al. sine begrep. I de nye fagplanene finner man igjen fire av de fem trådene til Kilpatrick et al. som forklaring på hva dybdelæring i matematikk er (Nostrati & Wæge, 2018).

2.4 Trådmodellen

Ifølge Kilpatrick et al. (2001) består matematisk kompetanse av fem komponenter som er tett sammenflettet og avhengige av hverandre. Disse fem har vi oversatt til konseptuell forståelse, prosedyreflyt, strategisk kompetanse, resonnering og engasjement.



`

Figur 2: Trådmodellen (Kilpatrick et al., 2001), s 5, oversatt av oss.

2.4.1 Konseptuell forståelse

Konseptuell forståelse handler om å bygge funksjonelle og begrepsmessige strukturer av matematikken, gjennom å bruke matematiske begrep og operasjoner. Elever med konseptuell forståelse kan mer enn bare isolerte fakta og metoder. De klarer å skape bindende relasjoner mellom ulike matematiske ideer, og kan bruke disse til å tolke, forstå og benytte ulike representasjoner. Konseptuell forståelse går ut på å kunne forstå *hvorfor* en matematisk ide er viktig, og i hvilken situasjon den er hensiktsmessig.

Elever med konseptuell forståelse lærer nye ideer ved å sette sammen kunnskap de allerede har. Graden av forståelse handler om hvor stort spenn av bindinger elevene har mellom de allerede innlærte begrepene og operasjonene. En god indikator på høy konseptuell forståelse er om eleven klarer å bruke ulike representasjoner i ulike sammenhenger og skjønner hvordan de kan ha nytte i ulike situasjoner.

Kunnskap som læres med forståelse gir en base for å løse nye og ukjente oppgaver, og gir grunnlag for innlæring av ny kunnskap. Når elever danner nye bindinger mellom konsept og prosedyrer, og dermed øker sin konseptuelle forståelse, utvikler de et nettverk av fakta og prinsipper. Elever som har et godt utviklet nettverk, har mindre å lære fordi de ser en dypere sammenheng på tvers av ulike tema.

2.4.2 Prosedyreflyt

For å gjennomføre beregninger, må elever ha kunnskap om prosedyrer, når og hvordan de skal bruke dem riktig, og ferdighet til å bruke dem fleksibelt, nøyaktig og effektivt. Elevene må kunne velge hensiktsmessige fremgangsmåter for den enkelte oppgave. Grunnleggende ferdigheter knyttet til ulike beregninger, uten å måtte bruke hjelpemidler, er nødvendige for å kunne være effektiv og nøyaktig. For å gjennomføre en prosedyre, må elevene kunne tenke seg til riktig regnemåte og i tillegg kunne utføre dem på papir. De må kunne utføre en prosess både mentalt og fysisk.

Dersom elever innehar presise, effektive og fleksible regneferdigheter, kan de bruke større kapasitet på å forstå sammenhenger. Konseptuell forståelse og prosedyreflyt blir derfor ofte sett på som to ulike sider ved matematikken. Likevel er disse sterkt knyttet sammen, og man kan ikke fokusere bare på den ene uten å miste noe av den helhetlige matematiske forståelsen.

Ifølge Alseth et al. (2003) har man i norsk skole hatt mer fokus på prosedyrebygging enn arbeid med konseptuell forståelse. Elever som jobber bare med prosedyreflyt, og ikke med konseptuell forståelse, vil se på hver enkelt strategi som enkeltstående isolerte prosedyrer. Det vil da være vanskelig for en elev å se dypere sammenhenger, og kan i ytterste konsekvens bli så situasjonsbestemt at eleven ikke kan løse oppgaver som ligner. Ved å studere prosedyrene mer generelt, kan elevene få innsikt i at matematikken er godt strukturert, og kunne bruke prosedyrene videre som verktøy fremfor spesialisert fremgangsmåte. Forståelse gjør det enklere å lære nye fremgangsmåter og strategier, og å bruke dem uten vanlige misoppfatninger, samtidig som det er umulig å skape en god forståelse uten å ha et visst nivå av prosedyrekompetanse.

2.4.3 Strategisk kompetanse

Strategisk kompetanse handler om evnen til å forstå et matematisk problem. Dette omtales ofte som problemløsning. Når man utvikler strategisk kompetanse, utvikler man evnen til å formulere, presentere og løse problemer.

I skoleverket har elever tradisjonelt blitt presentert med oppgaver som har en klar løsningsstrategi (Alseth et al., 2003). I hverdagslivet er situasjonen en annen, og mange elever ser ikke klare sammenhenger mellom skolefaget matematikk og den matematikken man bruker i hverdagen. Det er derfor viktig at elever får erfaring med både å formulere problemer og å løse dem.

For å utvikle strategisk kompetanse, må elevene først forstå situasjonen; konseptet, og herunder også prosedyrene som er aktuelle i den gitte oppgaven. Deretter kan de bygge seg en mental modell over problemet og således løse det, fremfor bare å hente ut tallmateriale og prøve å sette det sammen til et regnestykke.

En nybegynner på problemløsing vil kunne se noen likheter mellom ulike oppgaver, men det vil kun være på detaljnivå, som f.eks. navnet til hovedpersonene. En mer øvet problemløser vil kunne se strukturelle likheter mellom ulike oppgaver, som igjen gjør det lettere å finne riktig strategi for å løse problemet.

> *For å bli dyktige problemløsere må elevene lære seg å danne mentale representasjoner av problemene, oppdage matematiske sammenhenger og utforme nye løsningsmetoder når de trenger det*.
>
> (Killpatrick et al., 2001 s 126, oversatt av oss)

Når elever møter oppgaver de kjenner løsningsmetoden til, kaller vi det rutineproblem. For å løse slike oppgaver kreves kun reproduksjon av tidligere erfart/lært strategi. Når elever møter problem de ikke kjenner løsningsmetoden til, kreves det en strategisk kompetanse for å finne frem til en måte å løse det på. En elev som har høy strategisk kompetanse vil både kunne finne flere ulike måter å tilnærme seg problemet på, og velge fleksibelt mellom ulike metoder utfra hva som passer best til den gitte situasjonen. En slik fleksibilitet er det viktigste kognitive kravet i problemløsingsoppgaver.

Strategisk kompetanse, konseptuell kompetanse og prosedyreflyt henger tett sammen, og er gjensidig avhengig av hverandre. Elever er avhengig av å beherske rutineoppgaver og å kunne forstå mengdene som er involvert i problemet, for å kunne skape effektive og nøyaktige strategier. Likeledes fører problemløsing til at man skaffer seg en kontekst og motivasjon til å utvikle den konseptuelle forståelsen av problemløsningsoppgaver.

2.4.4 Resonnering

Resonnering er limet som holder matematikken sammen. Det brukes til å veksle mellom de mange faktaene, prosedyrene, konseptene og løsningsmetodene slik at alt gir mening. Det handler om å kunne tenke logisk og å trekke slutninger på tvers. Elever må være i stand til å forklare og rettferdiggjøre løsninger. De må kunne vurdere om løsninger er korrekt, og kunne følge logiske skritt basert på basiskunnskap. Dette er noe som utvikles over tid, og ulike elever vil vurdere ulike fakta som nødvendig/viktig. Resonnering knyttes særlig til andre tråder i trådmodellen under problemløsing. Dersom oppgaven ikke er rutinemessig, kan eleven gjennom konseptuell forståelse av problemløsningsoppgaver bruke resonnering til å finne frem til nødvendige fakta og hensiktsmessige strategier, og på den måten løse oppgaven.

2.4.5 Engasjement

Engasjement er evnen elevene har til å se på matematikken som meningsfullt og nyttig, ha troen på at de gjennom jevnt arbeid vil nå nye mål og lære seg å være effektive matematikere. Hvis elevene skal utvikle de fire andre trådene, må de føle at matematikken gir mening, og at de har det som skal til for å løse oppgavene. Et slikt engasjement utvikles i arbeid med de andre trådene gjennom for eksempel å bygge troen på seg selv. Når elever utvikler strategisk kompetanse på ulike felt, vil disse øke den konseptuelle forståelsen, som igjen vil øke forståelsen for at matematikken er viktig.

Elevers engasjement i matematikkfaget er en viktig faktor for suksess i læringen. Elever som har et «fixed mindset» (Claro, Paunesko og Dweck, 2016) tror at bare de som er født med «matte-genet» kan lære matematikk, og vil dermed være vanskeligere å få engasjert. De kan i ytterste konsekvens bli elever som tror at matematikk bare handler om å pugge regler. Elever som har et «growth mindset» (Claro et al., 2016) tror at deres innsats og vilje vil gjøre at de kan se sammenhenger og bygge broer mellom ulike tema, og vil dermed lettere kunne bygge engasjement for faget også. Matematikklæreren har derfor en kritisk rolle i å skape en positiv holdning til og i faget, og lærerens jobb blir å legge opp undervisning som helst utfordrer alle akkurat der de er, og som gir dem mulighet til mestring så ofte som mulig.

Matematiske ferdigheter er mer enn evnen til å forstå, beregne, løse og resonnere. Man må også ha et personlig engasjement, som gjør at man ønsker å jobbe hardt med matematiske problem, at man tror man har kapasitet til å løse oppgavene, at matematikken gir mening, og at jobben som legges ned er verdt det.

2.4.6 Sammenfletting av trådene

Disse fem trådene er avhengige av hverandre, og bare når de jobbes med parallelt og flettes sammen vil de gi fullstendig matematisk kompetanse. Hver og en av dem er like viktige. For å kunne utvikle konseptuell forståelse må man ha flyt i prosedyrene. For å velge riktig prosedyre må man ha en strategisk kompetanse for hvordan angripe oppgaven. Gjennom resonnering får man uttrykt egne og eventuelt hørt andres tanker som åpner for flere strategier. Gjennom engasjement skapes motivasjon til å prøve ut ulike strategier og prosesser som igjen skaper tettere nettverk mellom ulike konsepter. Gjennom å gi eleven god tid til å utvikle hvert enkelt tema innen matematikken vil man ha muligheten for en utvikling av «hele fletten» (Kilpatrick et al., 2001; Valenta, 2015).

2.5 Fremtidens skole og fagfornyelsen

Ludvigsenutvalget tok blant annet utgangspunkt i tidligere forskning av Skemp, Hiebert og Lefevre og Kilpatrick et al., da de i 2016 la frem sin rapport «Fremtidens skole» (NOU, 2015: 8). Fire av de fem trådene i trådmodellen brukes som forklaring på hva dybdelæring i matematikk er (Nosrati & Wæge, 2018). Dybdelæring er å forstå noe så godt at du kan bruke det i nye sammenhenger, og innenfor matematikk blir problemløsning uthevet som et element som brukes for å kunne finne sammenhenger i, og mellom fagets kunnskapsområder og andre fags kunnskapsområder. Utdanningsdirektoratet definerer dybdelæring slik:

> *Dybdelæring er det å gradvis utvikle kunnskap og varig forståelse av begreper, metoder og sammenhenger i fag og mellom fagområder. Det innebærer at vi reflekterer over egen læring og bruker det vi har lært på ulike måter i kjente og ukjente situasjoner, alene eller sammen med andre.*
>
> *(Utdanningsdirektoratet, 2019a)*

I norsk skole har man tradisjonelt jobbet med utgangspunkt i oppgaver som fører til prosedyreforståelse. Læreren har vist hva som er «riktig» løsningsmåte, elevene har pugget regnemetoder og standardalgoritmer, uten å forstå hvorfor den ene metoden fungerer bedre enn den andre, og løst oppgaver i boka. (Alseth et al., 2003). I stortingsmelding 28, 2016 (Kunnskapsdepartementet, 2016) beskrives dette som overflatelæring, og kjennetegnes med at elevene lærer faktakunnskap uten å jobbe med å sette kunnskapen i en sammenheng.

De siste årene har det vært en vridning mot undervisning og oppgaver som kan fremme konseptuell kunnskap, og fagfornyelsen viser tydelig at det nå forventes en skole som jobber på en litt annen måte innenfor matematikkfaget. Gjennom læringsprosesser som fremmer dybdelæring, tid nok til å fordype seg, og refleksjon over egen læring, kan elevene utvikle god og varig forståelse. I de nye læreplanene (Utdanningsdirektoratet, 2020) finner man kjerneelementer innenfor hvert fag. Disse omhandler det viktigste innholdet, og hva elevene skal lære for å mestre og bruke faget. Kjerneelementene for matematikkfaget er ifølge Kunnskapsløftet 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2020):

- utforsking og problemløsning
- modellering og anvendelse
- resonnering og argumentasjon
- representasjon og kommunikasjon
- abstraksjon og generalisering.

I den overordnede delen av de nye fagplanene finner man begrepet tverrfaglighet og dybdelæring (Kunnskapsdepartementet, 2017). Skolen skal på den måten bidra til å utvikle barn som blant annet kan reflektere, være kritiske, utforskende og kreative.

2.6 Funksjonsbegrepet

Funksjoner ble først introdusert på 1600-tallet, og det tok mer enn to hundre år å lage et solid matematisk fundament for funksjoner (Gjøvik & Sikko, 2019). Rene Descartes (1596-1650) var en av grunnleggerne av den analytiske geometrien og illustrerte funksjoner ved å tegne grafer. Han introduserte algebra inn i geometri i La Géométrie (1637) og sa at en kurve kan tegnes ved å la linjer suksessivt ta et antall uendelige verdier.

Begrepet funksjon ble introdusert av Gottfried William Leibnitz (1646-1716) nesten 50 år senere i en brevveksling med Johann Bernouli (1667-1748). Funksjonsbegrepet ble videre formalisert av Leonhard Euler (1707-1793), som introduserte notasjonen for en funksjon, $y=f(x)$.

Et annet viktig bidrag var arbeidene til Fourier (1768-1830), som var opptatt av problemet med varmestrøm i metallegemer. Han betraktet temperaturen som en funksjon med to variabler, tid og rom. Fourier mente det ville være mulig å få en utvikling av hvilken som helst funksjon gjennom trigonometriske rekker i et passende intervall. Han ga imidlertid aldri et matematisk bevis for sin påstand og problemet ble senere tatt opp av Dirichlet (1805-1859) som formulerte de tilstrekkelige forholdene slik at en funksjon kan bli representert av en Fourier-rekke. For å gjøre dette, trengte Dirichlet å skille funksjonsbegrepet fra sin analytiske representasjon. En funksjon er da en korrespondanse mellom to variabler slik at til en hvilken som helst verdi av den uavhengige variabelen er det knyttet en, og bare en, verdi av den avhengige variabelen (Ponte, 1992). Dirichlet kom i 1837 med denne definisjonen av funksjonsbegrepet:

> *Hvis en variabel y er forbundet med en variabel x etter en regel slik at enhver verdi av x angir regelen en bestemt verdi av y, sies y å være en funksjon av den uavhengige variabelen x.*
>
> *(Høines, Rinvold & Selvik, 2007, s. 58)*

Denne definisjonen er tilstrekkelig for mange formål, men ikke helt tilfredsstillende ved at den støtter seg på begrepet «regel» som er udefinert. I dag er det vanlig å tolke regel som en binær relasjon. Relasjoner trenger heller ikke å være entydige, og man skiller da mellom entydige og flertydige funksjoner. Når mengdelæren ble videre utviklet på 1900-tallet, måtte også funksjonsbegrepet utvides til å ikke gjelde bare tall, men også alle mengder og en nyere definisjon vil da kunne bli:

> *En funksjon f fra en mengde X til en mengde Y, er definert med en mengde G av ordnede par (x, y) slik at $x \in X$, $y \in Y$, og hvert eneste element av X er den første komponenten av et eksakt ordnet par i G.*
>
> (Hamilton, 1982, s 83, vår oversettelse)

I oppgavene elevene våre møtte, var det en sammenheng mellom tid og avstand. For ethvert tidspunkt vil en person kun kunne være på én bestemt avstand. I våre oppgaver er y (avstand) en funksjon av den uavhengige variabelen x (tid).

2.6.1 Ulike representasjoner av funksjoner

Funksjoner kan fremstilles på ulike måter. Claude Janvier (1978) så på ulike representasjoner av funksjoner og mulige sammenhengen mellom de ulike representasjonene.

- Situasjon
- Tabell
- Graf
- Formel

Janvier satte opp en tabell over hvordan man kunne systematisere overganger mellom de ulike representasjonene.

Til / Fra	Situasjon	Tabell	Graf	Formel (uttrykk)
Situasjon		Måle / beregne	Skissere grafer	Modellere
Tabell	Avlese og tolke tabeller		Plotte grafer	Tilpasse algebraisk
Graf	Tolke grafer	Avlese av graf		Kurvejustering
Formel (uttrykk)	Gjenkjenne og tolke variablene	Lage tabell	Skissere grafer	

Figur 3: Janviers tabell med overganger mellom ulike representasjoner (1978), s 3.2, oversatt av oss.

For å kunne gå **fra situasjon til tabell** må det gjøres målinger og beregninger av data som deretter systematiseres. Elevens evne til å analysere den praktiske situasjonen kvantitativt øves opp og settes opp i en verditabell. Å gå **fra situasjon til graf** krever at eleven ser en sammenheng mellom informasjonen situasjonen gir og aksene til grafen. Det kreves altså en større forståelse hos eleven enn når man bare plotter inn informasjon fra en tabell. Resultatet av en slik overgang blir en skisse av grafen, og vil kunne vise de store linjene i situasjonen. Det kreves enda større forståelse hvis eleven skal kunne gå **fra situasjon til formel**. Eleven må modellere den informasjonen han finner i situasjonen til en formel.

Når eleven leser av en tabell og deretter tolker og beskriver med egne ord den situasjonen den fremstiller, går eleven **fra tabell til situasjon**. Situasjoner hentet fra elevens egen virkelighet, som for eksempel pris på epler pr kilo, er enklere å forstå enn situasjonen eleven ikke er kjent med. Tradisjonelt har elever møtt mange oppgaver av typen **fra tabell til graf**. Koordinatene fra tabellen plottes inn i et koordinatsystem, og grafen gis gjennom å trekke linjer gjennom disse punktene. Dersom eleven er i stand til å finne et algebraisk system; et generelt mønster utfra tabellen, kan man gå direkte **fra tabell til formel**. For å kunne gjøre dette trenger eleven kunnskap om hvilke kjennetegn som virker inn på ulike deler av en formel. Ofte velger elever å gå veien om graf før de finner formelen.

Å gå **fra graf til situasjon** krever en tolking av den visuelle fremstillingen. Eleven må beskrive sammenhengen mellom aksene med egne ord, og forklare situasjonen utfra de punktene grafen går gjennom. Gjennom å lese av grafens punkter; x- og y-koordinater, og deretter overføre dem til en verditabell, viser eleven evne til å overføre **fra graf til tabell**. For å kunne gå **fra graf til formel** må eleven gjenkjenne ulike grafer, og vite hvordan ulike kjennetegn fra grafen påvirker formelen.

Å kunne gå **fra formel til situasjon** krever at eleven både gjenkjenner og kan tolke variablene i formelen. I mange situasjoner vil elevene måtte gå via tabell og / eller graf før de kan tolke situasjonen. Gjennom å regne ut funksjonsverdier med utgangspunkt i formelen og deretter sette det opp i en tabell, kan elevene gå **fra formel til tabell**. Hvis de derimot velger å bruke kjennetegnene de har kunnskap om, som for eksempel skjæringspunkt og stigningstall, for å skissere grafen omtrent slik den kommer til å se ut, kan de gå **fra formel til graf**.

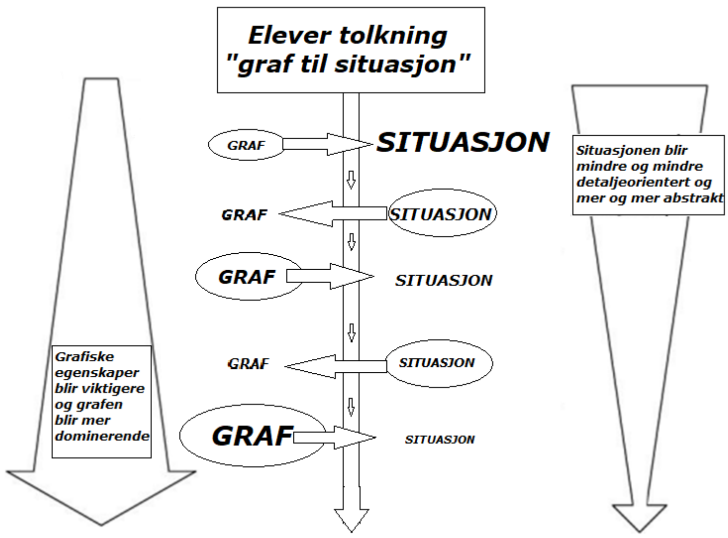
Tabell, graf og formel regnes å være på et abstrakt nivå, mens situasjon er konkret. Man kan derfor si at det å overføre **fra** situasjon handler om ulike måter å modellere på, mens det å overføre **til** situasjon handler om å tolke på ulike nivå.

I denne undervisningsøkten har vi valgt å ha hovedfokus på to av Janviers overganger. Vi har valgt å se på:

- Fra graf til situasjon
  Skisse av en graf som elevene skulle tolke og deretter «kopiere» ved hjelp av bevegelsessensor og graftegner på datamaskinen

- *Fra situasjon til graf*
  Muntlig eller skriftlig framstilt historie som elevene skulle skissere som graf, og deretter skulle «kopiere» ved hjelp av bevegelsessensor og graftegner på datamaskinen.

Allerede i 1978 skriver Claude Janvier om elever som oppfatter grafen som et bilde på en situasjon, fremfor en beskrivelse av en situasjon. Janvier (1978) forklarer at elever som skal bli gode på å tolke grafer, må klare å løsrive seg fra situasjonen.



Figur 4: Janviers tolkningsprosess av graf knyttet til situasjon, krever at eleven løsriver seg fra selve situasjonen og klarer å se abstrakt på den. (Janvier, 1978, s 10.4), oversatt av oss.

Elevene må klare å se det store bildet fremfor små detaljer, og på den måten gjøre situasjonen mer abstrakt.

Clement (2001) viser i sin forskning at elever i ungdomsskolealder håndtere informasjon gitt i tabeller, grafer og funksjonsuttrykk, og at også overgangene mellom disse går greit fordi arbeidet ofte blir gjort abstrakt og handler om å manipulere resultatene algebraisk. Når det kommer til å tolke representasjonene inn i en (naturlig) situasjon, har elevene liten eller ingen evne til dette. Arzarello, Pezzi og Robutti (2007) omtaler også vanskelighetene knyttet til det å tolke grafer, og da særlig grafer som omhandler tid/distanse og tid/fart.

2.7 Misoppfatninger

Nygaard og Zernichow (2006) omtaler misoppfatning som en fastlagt oppfatning omkring et begrep som ikke er den det var meningen en skulle ha. Misoppfatninger er gjerne knyttet opp til forståelse av et begrep. Misoppfatningene kan skyldes generalisering ut ifra tidligere erfaringer og gjerne ut fra et begrenset generaliseringsområde, og da dannes det gjerne ufullstendige begreper. Dette blir kalt for overgeneralisering, hvor erfaringer på ett område tas med til et nytt område der de forrige kunnskaper ikke helt ut kan benyttes. Det vil være et forsøk på å skape sammenheng og logikk for elevene, selv om området erfaringene nå brukes på ikke er gjeldende. Selv om forståelsen er ufullstendig, vil det eleven ligge en bestemt tanke bak. Denne tanken er ikke tilfeldig og vil være gjentakende (Brekke, 2002).

Noen typer feil opptrer oftere enn andre og i de fleste tilfellene kan vi da relatere dette til elevers misoppfatninger. Disse gjentar seg over tid og finnes i de fleste elevgrupper. Det er mulig å identifisere elevenes misoppfatninger, ved å systematisere «feilene» de gjør over tid. Hvor enkelt det er å endre misoppfatningen kommer gjerne an på om elevene har en forståelse som omhandler konseptet eller prosessen. Prosedyreflyt ses her på som å forstå hva man skal gjøre, mens konseptuell forståelse omhandler å forstå hvorfor.

Hadjidemetriou og Williams (2002) delte misoppfatningene inn i fem ulike kategorier:

- Grafiske misoppfatninger kan være en blanding av x- og y-koordinatene og deres manglende evne til å tilpasse seg deres kunnskap i ukjente situasjoner.
- Grafen tolkes som et bilde. Mange elever klarer ikke å tolke grafen som en abstrakt representasjon av forhold og ser ut til å tolke det bokstavelig som et bilde av en underliggende situasjon
- Forvirring når det gjelder høyde og stigning. Elevene klarer ikke å skille mellom høyden og stigningen til funksjonen, og dermed vil høyden være distraherende når en skal tolke stigningen (I en sammenlikning betyr høyest på grafen også størst økning (merkbart redusert med økende årstrinn)).
- Elevene tegner lineære grafer ut fra et ønske om form, kontinuitet og symmetri ut fra tidligere generaliseringer eller at de ut fra opprinnelsen ønsker å tegne alle grafer gjennom dette punktet (barns høyde f.eks.).
- Mistolking av verdiene på aksene, hvor elevene typisk leser av verdiene som 1 eller 10.

Epistemologiske hindringer kan vi også finne. Sierpinska (1992) har skrevet om 16 forskjellige. Disse er kategorisert i sammenhenger mellom funksjoner og betingelser, forandring, variabler og konstanter, størrelser, proporsjoner, analytiske uttrykk, syntese, tabeller, kurver og årsaker. Dette kan ifølge Sierpinska være hindringer som enten har rotfeste kulturelt eller innenfor en gruppe.

En hindring kan være at man anser at matematikk ikke bryr seg om praktiske problem. Matematikk er oppgaver løsrevet fra de problemer man møter i hverdagen og kun oppgaver som skal løses med blyant på papir. Dette vil da skape hindringer for forståelsen om at å gjenkjenne endringer som man observerer i den verden man omgir seg med, kan være et praktisk problem man må løse, og at identifikasjon av regelmessigheter i sammenhengen mellom endringer er en måte å ta hånd om dem.

En annen hindring kan være endringer som et fenomen, hvor man setter søkelys på hvordan noe endrer seg, og ikke hvorfor de endrer seg eller hva de endrer seg til. Dette stemmer godt med hvorfor enkelte elever ser på grafer som et bilde eller kart. De kan tolke grafene ut ifra retninger opp, ned, bort, kurver, rette linjer, men ikke hvorfor.

Sierpinska ser for seg en del didaktiske konsekvenser som følge av disse hindringene. Elever må bli interesserte i å beskrive endringer, og finne regelmessigheter mellom dem, og innse at dette er et problem som er verdt å undersøke vitenskapelig. Disse endringene bør være hentet fra elevenes hverdag, slik at funksjoner blir modeller av sammenhenger som de observerer. Disse situasjonene bør ikke bli forenklet slik at de gir et enkelt svar, men være gjenstand for diskusjoner i klassen. Videre må elevene trenes til å kunne forklare ikke bare hvordan noe endrer seg, men også hva som endrer seg.

Evnen til å tolke en graf eller en tabell er i det hele tatt ikke lett å oppnå (Janvier, 1978). Det er viktig at elevene forstår hva oppgaven spør etter før de begynner å løse den. Elever som har mulighet til å forklare, lage matematiske argumenter og bygge på hverandres ideer, på måter som bidrar til elevenes utvikling, resulterer i positive identiteter som utvikler selvtillit i matematikk (Schoenfeld, 2014).

2.8 Bevegelsessensor og teknologi i matematikkundervisningen

Dataloggere som digitalt verktøy i sammenheng med funksjoner er skrevet om i flere sammenhenger tidligere (Arzarello & Robutti, 2004; Robutti, 2009; Gjøvik & Sikko, 2019).

Datalogging er en prosess hvor man samler inn og lagrer data over tid for å kunne analysere eller bevare dem. Dette kan gjøres på flere forskjellige måter og det er utviklet egne dataloggere til bruk i vitenskapelig sammenheng. Disse kan brukes til å samle inn data om f.eks. temperatur, hjerterytme, pH-verdi, tid og avstand. En datalogger kan samle inn data ved hjelp av en eller flere sensorer, og deretter overføre dataene til en pc med egnet programvare, for å analysere dataene. Disse data kan fremstilles på forskjellige måter, som for eksempel grafer, diagrammer, tabeller osv.

Tidligere brukte man gjerne grafiske kalkulatorer slik at man kunne være mer stedsuavhengig, slik at man kunne se grafene i sann tid og ikke var avhengige av de stasjonære datamaskinene som ville være en begrensning på hvor man kunne utføre dataloggingen. I dag har de fleste tilgang til bærbare datamaskiner som kan gjøre samme jobben. Ved hjelp av USB-overføring vil dataene komme i sanntid på pc-skjermen og kan også forstørres ved hjelp av et smartboard.

I fagfornyelsen er digital kompetanse en av de fem grunnleggende ferdighetene, og i ungdomsskolen i Norge har dette i matematikkfaget hovedsakelig blitt konsentrert om opplæring i bruk av regneark, dynamisk geometriprogram og graftegner. I den nye læreplanen er programmering kommet med. Disse er da brukt som hjelpemiddel for å kunne utforske, løse og presentere matematiske problem. Begge kompetansemålene om funksjoner på 8.trinn (Utdanningsdirektoratet, 2020) blir koblet sammen med digital kompetanse.

> *Digital kompetanse er i dag en forutsetning for å kunne delta i ulike former for læring og utdanning og for å delta aktivt i arbeids- og samfunnsliv.*
>
> (NOU 2015: 8 Fremtidens skole – fornyelse av fag og kompetanser)

I Monitor 2019 (Fjørtoft, Thun & Buvik, 2019), som er en deskriptiv kartlegging av den digitale tilstanden i norske skoler og barnehager, trekkes det frem at det er didaktiske vurderinger som er mest avgjørende for læreres bruk av digitale hjelpemidler, og lærerne er enige i at digitale hjelpemidler er positive for undervisningen, både for å differensiere, men også for å gjøre den mer variert, motiverende og utforskende. Matematikk er også et av fagene hvor elevene bruker datamaskinene mye. Dette i motsetning til Monitorundersøkelsen tre år tidligere, hvor matematikk ble fremhevet som et av de fagene hvor digitale hjelpemidler ble brukt minst, og når de ble brukt var det som regel til å løse oppgaver og til nettsider som tilhører læreboka (Egeberg, Hultin & Berge, 2016).

Spurkland og Blikstad-Balas (2016) skriver at for at det i det hele tatt skal være snakk om funksjonell bruk av digitale hjelpemidler i klasserommet er man avhengig ikke bare av god nok programvare og god, pålitelig maskinvare, men også endringsvillige, kompetente lærere. Teknologiske hjelpemidler blir også brukt i økende grad innenfor vår digitale verden og Gravemeijer (1999) beskriver bruken av teknologiske hjelpemidler for å tette «gapet» mellom den virkelige verden og den formelle matematikken.

I denne oppgaven refererer vi til Gjøvik og Sikko (2019) som gjennomførte et lignende opplegg som vårt med norske 6. klasse-elever, og Robutti og Arzarello (2004) sin undersøkelse på nivå 9 (14-15-åringer) i Italia. Vi brukte bevegelsessensoren Go! Motion og programvaren Logger Lite 1.9.4. Robutti brukte ikke datamaskiner eller smartboard som viste grafene for elevene, men grafiske kalkulatorer. Gjøvik og Sikko brukte en liknende sensor som den som ble brukt i vår undervisningsøkt.

2.9 Multimodalitet og sansemotorikk i matematisk aktivitet

Multimodalitet betegner meningsskaping gjennom to eller flere tegnsystemer. I matematikken består dette gjerne av tekst, bilder, symboler, geometriske figurer, ulike diagrammer og grafer. En multimodalitet vil også gjenspeile samspillet med medelever gjennom refleksjoner, diskusjoner og faglige innspill. Der vi i første rekke vil se på kroppsaktivitet i forbindelse med matematisk læring vil også dette være i samspill med medelever.

Det finnes et skille mellom semiotiske og sansemotoriske matematiske aktiviteter. Der semiotisk læring omfatter læring som kun foregår inne i sinnet, uten annen tilknytning til omverdenen enn lingvistiske symbol, vil den sansemotoriske læringen omfatte kroppshandlinger, gester, manipulasjoner av materiell, bruk av verktøy, tegninger, sensomotorisk koordinasjon, øyebevegelser og ansiktsuttrykk (Nemirovsky & Borba, 2003). Der tidligere sansemotorisk aktivitet gjerne har omfattet arbeidstegninger, bruk av gradskive og passer, og verktøy som bidrar til å øke forståelsen, vil man nå også se på kroppen som et verktøy. Det å gjøre praktiske oppgaver i form av at man beveger kroppen har bred forskning, og Nemirovsky & Borba (2003) bruker kroppsbevegelser som et eksempel på hvordan elever kan bruke den motoriske hukommelsen som en referanse for å forstå matematikkens abstraksjon.

Arzarello og Robutti (2004) hevder at dersom elever kan dele sine konseptuelle tanker og erfaringer gitt gjennom oppgaver designet av læreren, kan de oppfatte vitenskapelige konsept på et dypere plan.

Oppgavene må være gitt slik at elevene kan ha:

- Meningsfulle sensomotoriske erfaringer
- Er støttet gjennom interaksjon med meningsfulle representasjoner av problemstillingen
- Er oppmuntret til å kommunisere med hverandre om forståelsen av representasjonene i gruppediskusjoner

Gjennom å gå en graf blir elevene involvert i visjon, persepsjon, bevegelser og rytmer. Elevene oppfatter bevegelsen sin når de går og løper, før de konstruerer en matematisk følelse av den. Mens de beveger seg har de muligheten ikke bare til å oppfatte, men også å forutse, kontrollere og lede bevegelsen i seg selv (Arzarello & Robutti, 2004).

Gjennom å bruke kroppen som et verktøy vil man kunne erfare hvordan hastighet, pauser, frem og tilbake bevegelser vil gi seg utslag i grafen man går. Dermed vil elevene personifisere tid/avstand og vil få ny innsikt i ideene de skal utforske. Dette samstemmer med Polanyi, som sier at når man bruker et verktøy og er fortrolig med bruken, så blir man verktøyet (Rasmussen, Nemirovsky, Olszewski, Dost, & Johnson, 2004).

2.10 Hvordan knyttes teorien til problemstillingen?

For å kunne besvare problemstillingen vår, har vi sett på tre underspørsmål. Det første omfatter hvilke hensyn man må ta når man designer et undervisningsopplegg. Fordi vi ønsket å få et så helhetlig undervisningseksperiment som mulig, ble Ball et al. (2008) sin modell for undervisningskunnskap førende for oss. Det har vært viktig for oss å se på både fagkunnskapen og den fagdidaktiske kunnskapen. Dette vil vi drøfte videre i drøftingskapittelet.

Det andre underspørsmålet vårt handler om hvordan elevenes matematiske kompetanse kom til syne underveis i den designede undervisningsøkten. I fagfornyelsen brukes blant annet Kilpatrick et al. (2001) til å beskrive dybdelæring. I analysen vil vi derfor vise funn på hvordan de fem trådene i trådmodellen kom frem under elevenes utprøving.

Det siste underspørsmålet vårt omhandler endring av forståelsen elevene hadde underveis. Vi har derfor i teorikapittelet valgt å trekke frem vanlige misoppfatninger (Hadjidemetriou & Williams, 2002) og vil i analysekapittelet og i drøftingskapittelet vise hvordan elevenes misoppfatninger kom til syne, og hvordan de endret seg underveis i undervisningsøkten.

3 Metode

I dette kapittelet vil det først bli redegjort for vår metodologi og forskningsdesign, herunder fortesten, informantutvelgelse, design av undervisningsøkt, intervjuet og ettertesten. Deretter tar vi for oss innhenting av datamateriale og analysemetode for dette. Avslutningsvis i dette kapittelet vil vi ta for oss forskningens validitet og reliabilitet.

3.1 Hva ønsker vi å undersøke?

Hensikten med denne studien er å se på hvordan bruk av datalogger i 8. trinnselevers møte med funksjonsbegrepet utvikler deres matematiske kompetanse om overgangen mellom ulike representasjoner. Har elevene misoppfatninger rundt begrepet, og ville i tilfelle bruk av datalogger endre på disse underveis?

Studien vår ser på hvordan bruk av sensorer og dataloggingsprogramvare kan brukes for at elevenes forståelse av overgangen mellom representasjonene *situasjon til graf* og *graf til situasjon* endres. Funksjoner har tidligere vært et eget emne i Læreplan i matematikk fellesfag, MAT1-04 (Utdanningsdirektoratet, 2006). Her er kompetansemålene bare spesifisert etter 10. trinn for ungdomstrinnet. Hovedsakelig har funksjoner blitt introdusert i 9. trinn, mest fordi ulike lærebøker har plassert temaet der. I fagfornyelsen blir kompetansemålene delt opp og hvert enkelt trinn får sine. Temaet funksjoner finner vi i kompetansemålene for 6. trinn hvor man skal bruke variabler, løkker, vilkår og funksjoner i programmering til å utforske geometriske figurer og mønstre. Begrepet funksjoner er i de nye fagplanene, MAT01-05 (Utdanningsdirektoratet, 2020), plassert første gang på 8. trinn.

3.2 Metodologi og forskningsdesign

Metodologi er læren om hvilke metoder som brukes i vitenskapene. To av hovedsynene på kunnskap er positivisme og hermeneutikk. Der positivismen stiller strenge krav til etterprøvbarhet som målinger, årsak/virkning-sammenhenger og objektivitet, gir hermeneutikken en mulighet til å fortolke meningsfulle fenomener og nærme oss disse med vår egen førforståelse, hvor våre tanker, inntrykk og følelser og den kunnskap vi har om emnet er en ressurs (Dalland, 2000). I denne oppgaven har vi tolket og forklart våre observasjoner og analysert datamaterialet med henblikk på aktuell teori og tidligere forskning, med en hermeneutisk tilnærming.

Forskningsdesignet er en overordnet plan for studien som forteller hvordan problemstillingen skal belyses og forklares. Det finnes flere typer forskningsdesign hvor valg av problemstilling og forskningsspørsmål avgjør valget av forskningsmetode:

- Et utforskende design brukes ofte til pilotundersøkelser når problemstillingen er uklar og man ønsker å skaffe seg bakgrunnsinformasjon.
- Et beskrivende design brukes til å kartlegge forskjellige variabler og eller sammenhengen av dem.
- Et forklarende design brukes for å avdekke virkning eller forhold mellom to eller flere variabler.

Disse tre typene design er mangelfulle når man skal undersøke sosiale fenomener gjennom observasjon og intervjuer. Man finner derfor andre typer design som f.eks.

casestudier eller utvalgsstudier som gjør en grundig analyse av en eller flere enheter eller personer (Cresswell & Cresswell, 2017). En casestudie er en undersøkelse som benytter en allerede eksisterende grense for hva og hvem undersøkelsen inkluderer og ekskluderer (Tjora, 2012). Den er også begrenset av tid og sted som gjør det til et bundet system som oppfyller definisjonen av en kvalitativ casestudie (Postholm, 2010). Vår studie har noen likheter med casestudiet som undersøker en liten gruppe elever, men forskere som f.eks. Yin (2018) setter som kriterium for en casestudie at forskeren har liten eller ingen innflytelse på resultatet. I vår studie har vi noe innflytelse gjennom valg av oppgaverekkefølge og påvirkning av samtalen underveis, og vi velger derfor å heller kalle dette et undervisningseksperiment. Forskere bruker eksperimentell undervisning for å teste ut hypoteser om hvordan elever lærer og resonnerer. Disse hypotesene er testet ut ved observasjon og innsamling av data. Disse data kan gi forskerne større forståelse av hvordan elevene, i vårt tilfelle, konstruerer matematiske begreper og operasjoner. Disse funnene danner da basen for utvikling av påfølgende undervisningsøkter (Lamb & Geiger, 2012).

Man skiller ofte mellom induktiv og deduktiv forskningsprosess. En induktiv prosess innebærer å ta utgangspunkt i de situasjonelle betingelsene, og å gå inn i prosessen med et åpent sinn, uten å være forutinntatt på noe sett og vis. En deduktiv prosess innebærer at forskeren har et sett med hypoteser som brukes gjennom hele prosessen. Man går inn i prosessen på jakt etter bevis for disse. (Postholm & Jacobsen, 2014).

Som lærer går man sjeldent inn i et møte med elever uten å ha en forventning til hva som skal skje. Selv om vi hadde et ønske om å gå inn i oppgaven hvor elevene skulle arbeide med grafer med et åpent sinn, men merket at hypoteser og antakelser vi tar med oss fra læreryrket la føringer for f.eks. rekkefølge på oppgavene elevene fikk og til hvilke misoppfatninger vi var på utkikk etter. Vi fikk derfor en interaksjon mellom det induktive og det deduktive i selve undervisningseksperimentet vårt. Når man blander disse to, får man det Postholm og Jacobsen (2014) kaller pragmatisk tilnærming til undersøkelsesprosessen.

Det skilles også mellom kvalitative og kvantitative metoder i forskningsdesign. De kvantitative metodene kjennetegnes av man tar sikte på å forme informasjonen man har om til målbare enheter. De kvalitative metodene prøver å fange opp mening og opplevelse som ikke lar seg tallfeste eller måle og benyttes for å få data som kan karakteriseres som et fenomen (Dalland, 2000). Når man har som hensikt å forstå hvordan informantene oppfatter og forstår, passer kvalitative metoder best (Postholm, 2010). Valget vårt av problemstilling tilsier derfor at en kvalitativ metode vil være naturlig, gjennom at det er elevenes praktiske handlinger, dialog, meninger og resonnementer som analyseres i etterkant.

Forskningsdesignet vårt besto av tre deler:

- En individuell fortest for å kartlegge elevenes forkunnskaper om koordinatsystemer, tolkning av grafer, og representasjonen av funksjoner gjennom situasjon til graf og omvendt, og på den måten finne aktuelle elever til å delta i den videre forskningen.
- Et undervisningseksperiment hvor de utplukkede informantene ble delt inn i to grupper utfra resultatet på fortesten. Gruppevis skulle de utforske grafer gjennom bevegelse foran en sensor koblet til et dataprogram som tegner grafer. De første oppgavene var ferdige grafer som de skulle kopiere, mens de siste oppgavene var

historier der de først måtte tegne grafen på papir før de kunne «gå grafen» digitalt.
- Et gruppeintervju med informantene om opplevelsen, oppgavene og deres tanker rundt undervisningseksperimentet. Underveis i gruppeintervjuet ble det også gjennomført en individuell ettertest, tilsvarende siste halvdel av fortesten. Informantene fikk deretter sammenligne resultatene sine på for- og ettertestene.

Fordi flere av prosessene foregikk parallelt, og påvirket hverandre, kan vi si at vi har et fleksibelt design.

3.2.1 Fortest

Fortesten (Vedlegg nr. 3) er designet av oss, og vi hentet inspirasjon og oppgaver fra nasjonal prøve for 8.trinn (Utdanningsdirektoratet, 2019b), læringsstøttende prøve om funksjoner (Utdanningsdirektoratet, 2012), samt grafer og situasjoner (MARS, 2015).

Fortesten besto av to oppgaver knyttet til punkter i koordinatsystemet, hvor de skulle lese av koordinatene til ulike punkt, og sette inn punkter etter å ha fått oppgitt koordinatene. Deretter en oppgave hvor de fikk presentert en graf og spørsmål hvor de måtte lese svarene utfra grafen. Videre to lukkede oppgaver der eleven skulle velge riktig graf til situasjon, og riktig situasjon til graf. Til slutt hadde vi to åpne oppgaver, der elevene selv måtte skrive situasjonen til grafen, og tegne grafen til situasjonen.

3.2.2 Undervisningseksperiment

Vi har designet undervisningsøkten selv, og det var også vi som gjennomførte den. Undervisningsøkten ble gjennomført enkeltstående, men ble designet med tanke på å kunne være en del av et større undervisningsopplegg om funksjoner ved 8. trinn

Siden elevene som deltok i eksperimentet kjente den ene læreren fra før, omhandlet introen til undervisningsøkten en introduksjon av den andre læreren, en beskrivelse av hva som skulle foregå under undervisningsøkten, en forklaring av sensoren og hvordan den fungerte sammen med datamaskinen, gjennom at vi viste dem hvordan bevegelsen foran sensoren ble avtegnet som en graf, i sanntid, på skjermen. Elevene ble delt inn i to grupper. For å oppfatte hva elevene tenkte, ble de oppfordret til å diskutere med hverandre under hele økten, og vi forklarte at det ville bli tatt lydopptak av hele økten slik at vi hadde dokumentasjon til vårt videre arbeid med masteroppgaven. Til slutt under oppstarten fikk elevene et kandidatnummer de skulle bruke til registrering av grafene under utprøvingen.

Vi hadde på forhånd skrevet ut 9 oppgaver (vedlegg nr. 4) som elevene fikk utdelt en etter en. Elevene fikk lov til å bruke så mange forsøk de ville for å få sine grafer mest mulig lik den utdelte, men måtte rullere på hvem som skulle «gå grafen». Dette for å engasjere alle elevene på alle oppgaver. Når de som gruppe var fornøyd med en løsning fikk de utdelt neste oppgave, og styrte på den måten selv progresjonshastigheten.

Oppgave 1 – 6 bestod av grafer som de skulle kopiere, mens oppgave 7 og 8 var situasjonsbeskrivelser som elevene først måtte tegne grafer til, før de gikk foran sensoren for å løse oppgaven. Oppgave 9 var en graf som ikke hadde noen gyldig løsning med våre hjelpemidler, men som kunne åpne for matematiske diskusjoner.

3.2.3 Ettertest/intervju

I intervjuene ønsket vi informasjon om elevenes erfaring fra timen. Først og fremst fokuserte vi på det matematiske aspektet, men også om deres opplevelse av en praktisk og utforskende tilnærming til emnet. Vi hadde utarbeidet en intervjuguide (Vedlegg nr. 7) på forhånd, med åpne spørsmål.

Kvale & Brinkmann (2015) karakteriserer et forskningsintervju om læring på følgende måte:

> *Formålet med det kvalitative forskningsintervjuet er å forstå sider ved intervjupersonens dagligliv, fra hans eller hennes perspektiv. Forskningsintervjuets struktur er lik den dagligdagse samtale, men som et profesjonelt intervju inneholder det også en bestemt metode og spørreteknikk.*
>
> (Kvale & Brinkmann, 2015 s. 42).

Vi hadde et ønske om at gruppeintervjuet skulle bli mer en samtale enn et intervju. Vår oppgave som intervjuere var å strukturere det slik at vi fikk lagt inn de planlagte spørsmålene som en naturlig del av samtalen. Intervjuet ble også påvirket av episoder fra observasjonen, selv om vi hadde en intervjuguide som skjelett. For å komme i gang med samtalen, åpnet vi intervjuet med å spørre elevene om hva de syntes om timen, og for å få alle med på praten ble dette spørsmålet stilt til hver enkelt elev. Etter hvert var ikke det nødvendig å spørre hver av dem direkte, og intervjuet fikk en mer dagligdags samtale-struktur.

Underveis i intervjuet gjennomførte elevene en ettertest (Vedlegg nr. 6), som var en kopi av de siste fire oppgavene fra fortesten, med oppgaver direkte knyttet til overganger *fra situasjon til graf*, og *fra graf til situasjon*.

3.3 Datainnsamling

Datainnsamlingen foregikk i ulike former:

- For- og ettertestene ble gjort på papir. (Vedlegg nr. 3 og nr. 5). Elevene brukte et kandidatnummer, og var i så måte anonymisert. Resultatet på disse ble registrert i Excel, for å få oversikt over elevenes svar.
- Under undervisningsøkten tok vi lydopptak for å sikre oss at vi fikk med oss det elevene snakket om underveis i gjennomføringen. Undersøkelsen ble gjennomført i to grupper på 4 og 5 elever, som gjennomførte undervisningsøkten samtidig, i samme rom.
- Under gruppeintervjuene i etterkant tok vi også lydopptak. Intervjuene foregikk i de samme gruppene som vi brukte under undervisningsøkten, og ble gjort parallelt i hvert sitt rom med en av oss på hver gruppe.

3.3.1 Fortest

Fortesten ble delt ut til alle elevene i klassen. Det ble understreket at dette ikke var en tellende vurdering i faget matematikk, men at vi ønsket å se hvilke forkunnskaper de hadde i dette temaet, for å kunne bruke det i et forskningsprosjekt vi jobbet med.

Gjennom en kvantitativ tilnærming, ville vi kunne skaffe oss et større datamateriell som kunne gi oss en systematisk oversikt over de grunnleggende forkunnskapene om koordinatsystem, avlesing av grafer, sammenhengen mellom graf og situasjon, og misoppfatninger elevene hadde fra før. Med grunnleggende forkunnskaper om koordinatsystem og avlesing av grafer mener vi kompetansemålene fra matematikk etter 7.trinn knyttet til dette temaet. (Utdanningsdirektoratet, 2006)

3.3.2 Utvelgelse av informanter

For å velge ut kandidater gjennomførte vi fortesten i to ulike klasser. Elevresultatene ble skåret, og resultatet satt inn i Excel. I etterkant innså vi at datamateriale fra en klasse var nok for å få en fornuftig analyse av opplegget, og valgte å fortsette med bare denne. Vi hadde tilgang på 2 sensorer, og ønsket derfor ikke ha mer enn to grupper samtidig.

Gjennom tidligere forskning (Gjøvik & Sikko, 2019; Arzarello & Robutti, 2004) om praktisk tilnærming til funksjonsbegrepet blir det påstått at alle elever kan få en endret forståelse gjennom å benytte en bevegelsessensor og et grafprogram, også de lavt-presterende. Inspirert av dette, plukket vi en lavt-presterende og en høyt-presterende gruppe fra forsøksklassen. Lavt-presterende var i vårt tilfelle de elevene som hadde mindre enn 30% riktige svar på fortesten, mens høyt-presterende var de elevene som hadde mer enn 70% riktige svar på den samme testen. I utgangspunktet ble det plukket ut fem elever til hver av gruppene, men på gjennomføringsdagen var en av disse borte. Studien begrenser seg derfor til ni utvalgte elever på 8. trinn. Vi tok ikke hensyn til resultater elevene ellers hadde i matematikk eller andre fag.

Den ene av oss er lærer for disse elevene, mens den andre ikke kjente noen av elevene fra før. Vi valgte å bruke den kjente læreren på den lavt-presterende gruppa, mens den ukjente læreren tok seg av den høyt-presterende gruppa gjennom prosessen.

3.3.3 Observasjoner

Forutsetningen for å kunne gjennomføre observasjon er at man er til stede i situasjonen hvor informatørene er. Som observatør kan man likevel ha ulik interaksjon med informantene. Ifølge Gold finnes det fire ulike roller innenfor observasjon; *fullstendig deltaker, observerende deltaker, deltakende observatør og fullstendig observatør* (Tjora, 2012). Dette gir et spekter fra å opptre som «en av dem», til å være helt på utsiden av handlingen.

Så lenge forskeren er fysisk til stede i rommet, vil det kunne dukke opp situasjoner der han må interagere med de han observerer. Tjora (2012) kaller dette *interaktiv observasjon* og beskriver det med at det alltid vil forekomme interaksjon mellom observatør og observert, uansett hvilken rolle man i utgangspunktet har tenkt seg. Dette kan for eksempel være gjennom samtale eller hjelp, som skjer ad hoc i situasjonen.

Observasjoner	Synlig	Skjult
Aktiv	Interaktiv observasjon	Fullstendig deltakelse
Passiv		Fullstendig observasjon

Tabell 1: Ulike observasjonsroller (Tjora, 2012, s 56)

En observasjon kan være synlig eller skjult. Skjult observasjon, hvor den observerte selv ikke er klar over at han blir observert, oppfattes som uetisk. Denne formen er i liten grad brukt, men i noen bestemte situasjoner som kan gi viktig kunnskap, kan det forsvares

(Thagaard, 2010). I synlig observasjon/åpen observasjon er informantene opplyst om hvem forskerne er og hvorfor de er til stede.

I introduksjonen til timen med graf-gåingen, ble elevene opplyst om hvem vi var. Det ble også gitt en kort informasjon om bruk av sensoren, rekkevidden av den og hvordan de lagret de forskjellige grafene underveis.

Vi ledet hver vår gruppe, simultant. Vi ønsket en god flyt på hele økta, og ville være tilgjengelig for elevene hele tiden. Vi tok lydopptak av hele denne økten, slik at vi hadde muligheten til å gå tilbake og se hvilken kommunikasjon elevene hadde hatt seg imellom. Siden vi kun tok opp lyd, ble det viktig for oss å observere alt som foregikk visuelt. Vi valgte derfor å ikke skrive feltnotater underveis i den praktiske økten, men heller i etterkant. Alle grafene elevene produserte ble lagret, slik at vi også har dokumentasjon på hvem som gikk de ulike grafene, og hvordan utviklingen i elevenes forsøk var. I tillegg tegnet og noterte elevene noe på ark. Disse tok vi også vare på slik at de kunne brukes videre i analysen av opplegget.

Gjennom visuell og auditiv observasjon av økten ønsket vi å se hvordan elevenes matematiske kompetanse utviklet seg, finne ut hvilke misoppfatninger elevene hadde, om de oppdaget disse selv gjennom å bruke dataloggeren, og hvordan de i tilfelle reagerte på det.

Stedet som ble brukt til å gjennomføre undervisningsopplegget var et stort åpent rom, hvor elevgruppene var på hver sin del av rommet, med ca. 5 meters avstand mellom seg. Avlesing av grafene gjorde gruppene på hver sin pc, med hver sin sensor.

3.3.4 Intervju

Vi gjennomførte intervjuene som gruppeintervjuer med de samme gruppene som vi hadde i undervisningsøkten. Den sterkeste siden ved gruppeintervjuer er at den ikke bare får frem enkeltpersoners isolerte meninger og oppfatninger, men også hvordan ulike oppfatninger diskuteres og utdypes (Postholm, 2010). Et fokusgruppeintervju kjennetegnes av en ikke-styrende intervjustil, der det først og fremst er viktig å få frem mange forskjellige synspunkter om emnet som er i fokus for gruppen (Kvale & Brinkmann, 2015)

Intervjuene våre ble gjennomført på et grupperom, og vi benyttet lydopptaker slik at dialogen kunne flyte, uten unødvendige avbrudd for at man måtte notere viktige funn. Et gruppeintervju kan også bringe frem flere spontane synspunkter enn det individuelle og reduserer kontrollen til den som intervjuer (Kvale & Brinkmann 2015).

Elevene fikk en ettertest underveis i gruppeintervjuet, og svarene elevene gav her, ble sammenlignet med det de hadde svart i fortesten, og ble dermed gjenstand for videre samtale og diskusjon.

3.4 Analysemetode

3.4.1 Koding og kategorisering

Deskriptiv analyse innebærer å strukturere det innsamlede datamaterialet gjennom å kategorisere og kode. Under retting av fortesten, kategoriserte vi resultatene i riktig, noe riktig og uriktig, med henholdsvis 1, ½ og 0 poeng. Der vi fant feil som enten eleven gjorde gjentakende ganger eller som flere elever gjorde, ble disse tilleggskodet. Eksempler på slike gjentakende feil var å bytte x- og y-koordinaten, lese av tabellens nest laveste verdi, og å se på grafen som et bilde.

Kodingen for dette ble ført i et excel-dokument, for å gi oss en god oversikt over elevgruppen før utvelgelsen av informanter til undervisningseksperimentet.

	219	220	221	222	223	224	225
1a	0	1	1	1	1	0	1
1b	0	1	1	0	1	0	0
1c	1	1	1	0	1	0	1
1d	1	1	1	0	1	0	0
1e	0	1	1	1		0	1
2a	0	1	1	0	0	0	1
2b	1	1	1	0	0	0	1
2c	1	1	1	0	1	0	1
2d	1	1	1	0	1	0	1
2e	0	1	1	0		0	0
3a	1	0	1	0	1	0	1
3b	1	1	1	0	1	1	1
3c	1	1	1	0	1	1	1
3d	1	1	1	0	1	1	1
4	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	1	0	0	1
6	0	0,5	0	0	0	0	0,5
7	0	0,5	0,5		0	0	0,5
	10	14	15,5	3	10	3	13
kom 1 og 2	M(0)					M(0)	M(0)
kom 3		2002		B & S		2002	
kom 4	B	A	A	A	A	C	A
kom 5	A	A				A	
kom 6							
kom 7		M(p)	M(p)			s	

Figur 5: Eksempel på koding av fortest

Etter å ha observert undervisningsøkten og gjennomført intervjuet, transkriberte vi lydfilene til normert skriftspråk. Dette valgte vi å gjøre i Excel for å få en struktur det var lett å jobbe i videre. Vi tok utgangspunkt i Kilpatrick et al. (2001) sin trådmodell for å kategorisere hovedfunn. Kategoriene våre var konseptuell forståelse, prosedyreflyt, strategisk kompetanse, resonnering og engasjement. I tillegg til disse fem kategoriene har vi valgt å gå på jakt etter elevenes misoppfatninger knyttet til temaet.

3.5 Validitet og reliabilitet

Kvaliteten til studien avhenger om studien ser på det den er ment å undersøke. Dette gjør man ved å se på validiteten og reliabiliteten til studien. For å begrense og eliminere feilkilder gjennom hele forskningsprosessen, er det nødvendig at validitet og reliabilitet er til stede hele tiden (Cohen, Manion & Morrison, 2007). Ved å undersøke feilkildene kan man sjekke validiteten, og gjennom å avkrefte og bekrefte påstander, vil kunnskapen bli mer gyldig og troverdig (Kvale & Brinkmann, 2015).

Tjora (2012) bruker de norske begrepene pålitelighet, gyldighet og generaliserbarhet som kriterier for kvaliteten på kvalitativ forskning, i tillegg legger han til transparens og refleksivitet som kvalitetsindikatorer. Med pålitelighet menes at det er en klar sammenheng mellom empiri, analyser og resultater i en undersøkelse, og at dette ikke er styrt av personlige, politiske eller andre faktorer det ikke er gjort rede for. Gyldighet er om de svarene som er funnet i vår forskning, faktisk er svar på de spørsmål som er forsøkt stilt, mens generaliserbarhet er en undersøkelses gyldighet utover de tilfeller som har vært utforsket.

Kvalitetsindikatoren transparens handler om alle de forskjellige valgene som tas underveis og hvor godt disse er formidlet i forskningen. Dette kan f.eks. være hvordan undersøkelsen er utført, hva slags teorier som vi har benyttet og hvordan de har virket. Eventuelle problemer som har oppstått må også blitt gjort rede for. Refleksivitet er hvordan vi som forskere har evne og vilje til å undersøke eget forskningsarbeid og hvordan personlige interesser og kunnskaper kan ha formet det (Tjora 2012)

Funn fra kvalitative undersøkelser og deres pålitelighet vil alltid være omdiskuterte og et problem vil være at identiske omstendigheter ikke vil være mulig å gjenskape om man ønsker å gjennomføre undersøkelsen på nytt (Robson & McCartan, 2017).

Gyldigheten av forskningen avhenger av om den undersøker det den hevder den skal undersøke, og at tolkningene og konklusjonene vi har kommet til, kan forsvares ut ifra de data som er utvalgt og teorien som er tilgjengelig.

Metoder og vår forståelse av teori er beskrevet, og vi har gjort rede for vår rolle under innsamling av datamateriale. Vi har brukt observasjoner og intervju for innhenting av datamateriale til vår undersøkelse, og redegjort for våre metodevalg. For å kunne beskrive hva vi har hørt og sett har vi brukt lydopptak underveis og feltnotater i etterkant av observasjonen. Dette sikrer at det som har blitt sagt er blitt nøyaktig gjengitt. Imidlertid vil kroppsspråk brukt av deltakerne underveis ikke blitt registrert, så tegn, gester og ansiktsuttrykk brukt under undervisningsøkten vil være gjenstand for usikkerhet.

Informantene ble valgt ut fra en åttendeklasse. En av oss er til vanlig lærer i denne klassen, og satt etter de første 10 skoleukene på noe kunnskap om elevene og deres prestasjonsnivå i matematikk. Når det allerede er opprettet en relasjon mellom elevene og lærerforskeren, vil det alltid forekomme en viss form for partiskhet; bias. Vi la likevel bare informasjon innhentet i fortesten til grunn i utvelgelsen av informanter.

Utvalget av elever var begrenset, bare ni elever, og vil derfor kunne være problematisk å generalisere til andre grupper av elever eller 8. trinnselever generelt. Andre elever vil ha andre forutsetninger enn våre, og blandingen av elevgruppene vil kunne skille seg fra våre elever.

Tolkning av funn vil i vårt tilfelle avhenge av om vi har kvaliteten på spørsmålene og om vår fortolkning er logisk. Intervjupersonenes troverdighet, og intervjuingens kvalitet spiller også en stor rolle i forhold til hvilke funn som er blitt gjort.

Når det gjelder reliabilitet til undersøkelsen har vi lagt ved alle testene, grafene som ble brukt i undervisningsøkten, oppgitt programvaren og hvilken type sensorer som ble brukt og intervjuguiden som ble laget i forkant av intervjuene. Dette gjør at andre kan bruke dette til å gjennomføre den samme undersøkelsen i etterkant. Dette er med på å øke reliabiliteten til studien.

Intervjuene vi gjennomførte var semistrukturerte. Vi stilte oppfølgingsspørsmål til eleven ut fra hvilke svar vi fikk, og vil dermed ha mindre reliabilitet enn et strukturert intervju (Cohen et al., 2007). Dermed vil andre som gjennomfører intervjuene med vår intervjuguide kunne få andre svar enn de vi fikk og dermed stille andre oppfølgingsspørsmål.

3.6 Forskningsetikk og troverdighet

Forskningsprosjektet vårt er meldt inn og godkjent av norsk senter for forskningsdata, NSD (Vedlegg nr. 1). Ett av kravene for å få prosjektet godkjent er å sende ut samtykkedata til alle deltakerne. Siden elevene er under 18 år, måtte disse signeres av både elevene og deres foresatte (Vedlegg nr. 2). Dette skjemaet ga informasjon om forskningen vår, hva som skulle foregå og hvordan dataene skulle samles inn og behandles i ettertid. Dette skjemaet ble sendt hjem til alle elevene i de to klassene i forkant av fortesten. Vi fikk også en del spørsmål som vi prøvde å besvare på en så nøytral måte som mulig, slik at ingen skulle føle seg presset til å delta.

Under fortesten ble alle elevene tildelt et kandidatnummer som sikret anonymitet, dette nummeret ble brukt på nytt under registrering av grafene og ved ettertestene slik at data kunne sammenkobles på en sikker måte. Elevene ble også informert om at de når som helst kunne trekke seg fra forskningsprosjektet hvis de ønsket det, og uten å oppgi noen grunn.

Elevene hadde gitt samtykke om å delta i forskningen gjennom samtykkeskjema, som også opplyste om hva deltakelse innebar. For å sikre oss at elevene forstod hva de skulle være med på, ble informasjonen om lydopptak og dets sikring gjengitt i forkant av undervisningsøkten. Vi har fulgt NTNU sine retningslinjer i forhold til lydopptak, brukt deres lydopptaker og slettet materialet etter overføring til en kryptert ekstern minnepinne. Lydopptakene blir også slettet etter at masteroppgaven er sensurert slik at de ikke kommer på avveie.

4 Resultat og analyse

Hensikten med undervisningseksperimentet vårt var å se på bruk av datalogger og utforskende oppgaveløsning som introduksjon til funksjonsbegrepet. Gjennom eksperimentet ønsket vi å avdekke misoppfatninger elevene hadde, og se om vi kunne finne endringer i elevenes forståelse underveis i undervisningseksperimentet.

I analysen av observasjonen gjort under undervisningsøkten og i intervjuet etterpå vil vi bruke Kilpatrick et al. sin trådmodell (2001) for matematisk kompetanse som utgangspunkt. Modellen består av fem komponenter som flettes sammen for å oppnå matematisk kompetanse. Komponentene er *konseptuell forståelse, prosedyreflyt, strategisk kompetanse, resonnering* og *engasjement*. I sammenheng med oppgavene hvor elevene tolker situasjon til graf, vil vi i tillegg bruke Janviers tabell (1978) og hans forklaring på elevers tolkningsprosess av overgangen graf til situasjon og situasjon til graf.

Analysen vår tar utgangspunkt i observasjonen gjort under gjennomføringen av undervisningsøkten. Intervjuet vi hadde med elevene i etterkant vil vi bruke til ytterligere å belyse funn fra observasjonen. For å utdype noen av funnene, vil vi også knytte for- og ettertesten elevene gjennomførte til funn.

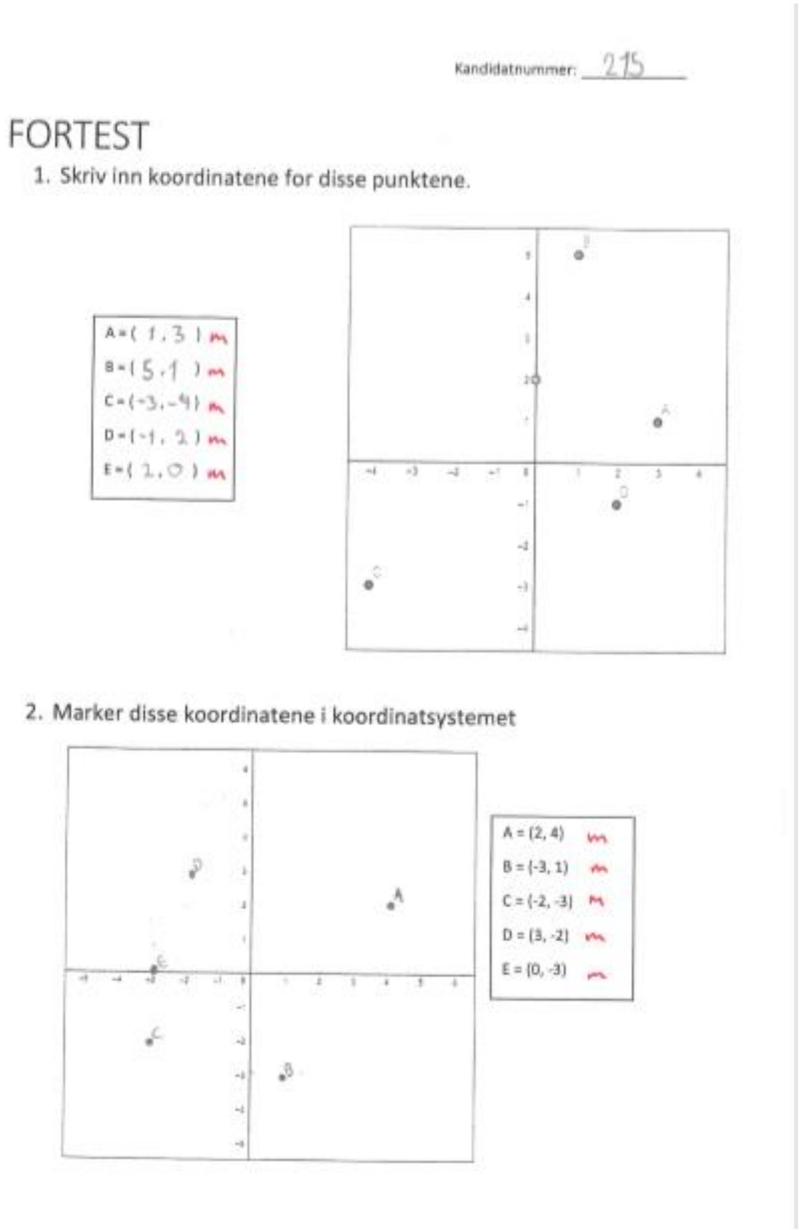
Observasjonsøkten under undervisningseksperimentet og intervjuet er transkribert og kodet. Vi har brukt de fem komponentene i trådmodellen som hovedkoder. Elevene er nummerert fra 1 – 9 der elev 1 – 5 var i gruppe A som lærer A fulgte, og elev 6 – 9 var i gruppe B som lærer B fulgte. Der det i transkriberingen står LA eller LB viser dette til oss to.

Under gjennomføringen ble det oppdaget at særlig den ene sensoren ikke målte like langt som den faktisk skulle. Derfor fikk den ene gruppa en del «hakkete» registrering innimellom. Sammen med elevene ble vi enige om å se «det store bildet»; se på det som faktisk var registrert. Både elevene og vi godkjente derfor en del grafer som var noe «hakkete», da poenget var forståelsen og ikke hvordan det digitale fungerte. Elevene fikk også tidlig i prosessen vite at det ikke er mulig å få til skarpe overganger/kanter med disse sensorene.

4.1 Fortestene

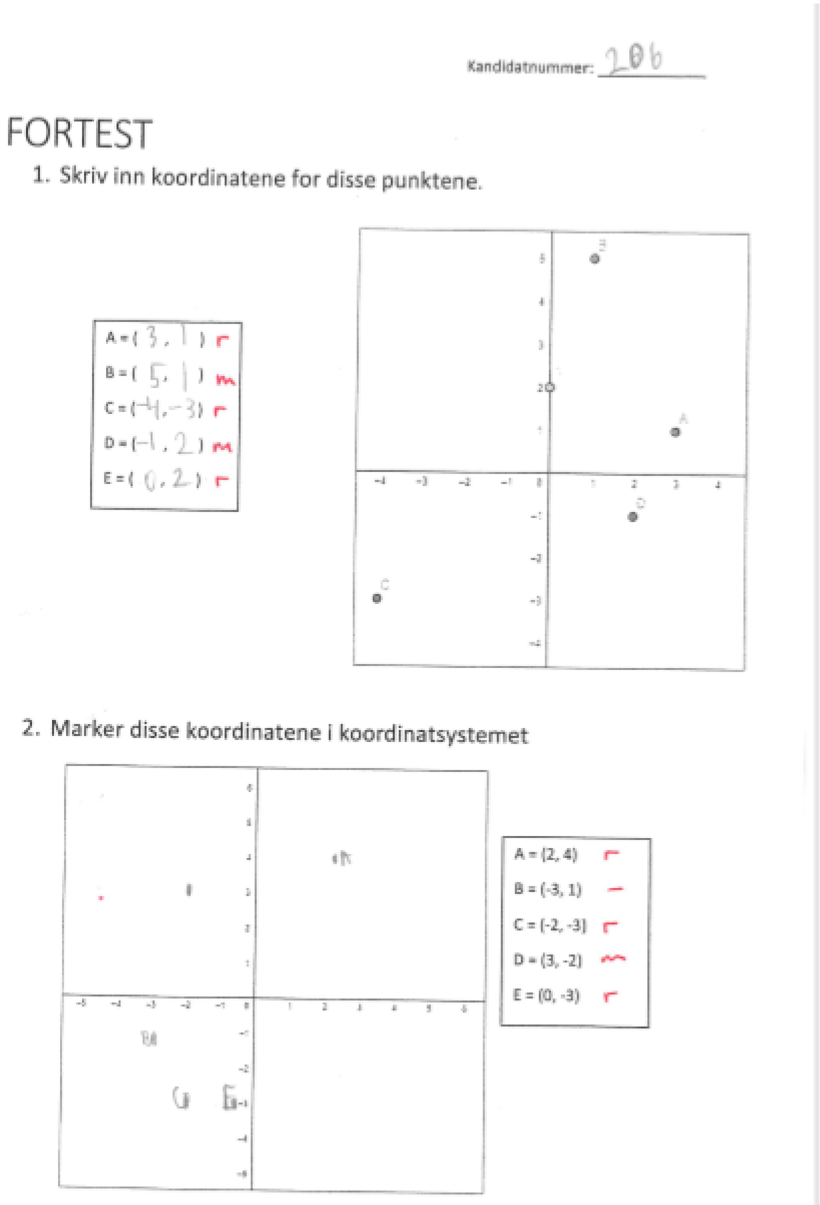
Fortesten (se vedlegg nr. 3) har to hoveddeler; oppgaver knyttet til koordinater og koordinatsystem og avlesing av grafer, og oppgaver knyttet til forståelse av sammenhengen mellom situasjon/graf.

Den første delen av fortesten går på forkunnskap vi forventer at elevene skal ha fra barneskolen. Den mest fremtredende misoppfatningen vi fant i denne delen, var at mange av elevene byttet om på x- og y-koordinaten, noen konsekvent, andre mer tilfeldig. I den lavtpresterende gruppen var det to elever som hadde byttet om på alle disse oppgavene. Se eksempel fra elev 215 under på figur 6.



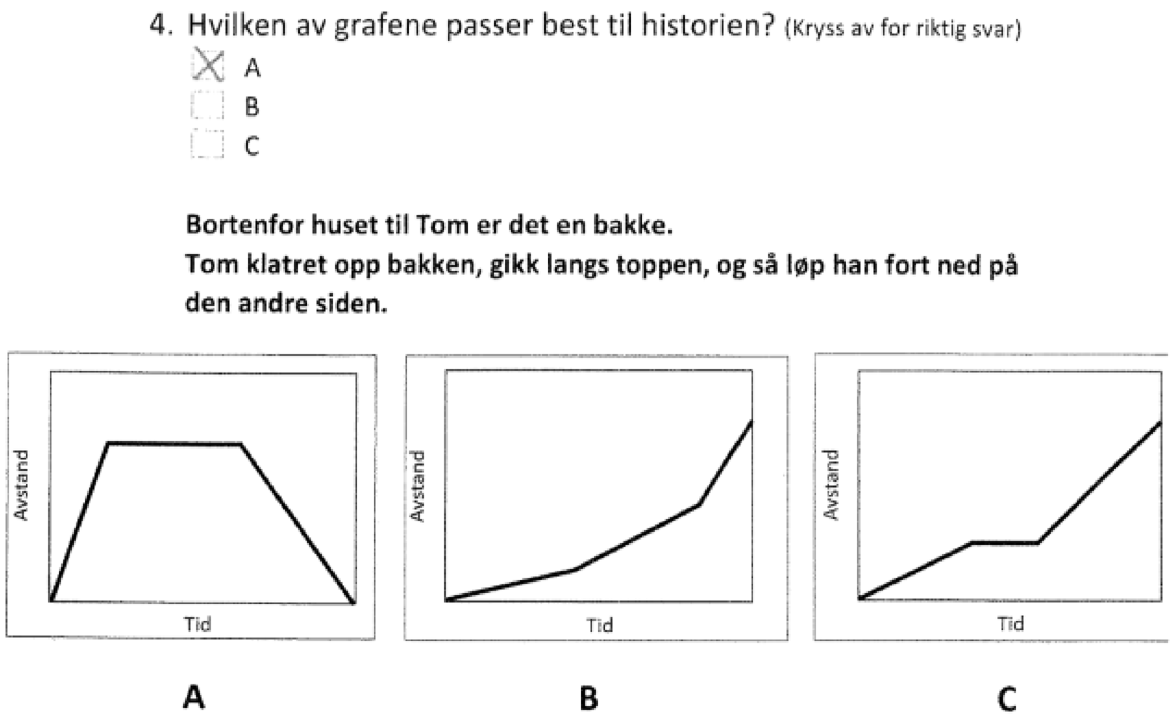
Figur 6: Eksempel fra elev 214

En elev hadde byttet om på A og B i oppgave 1 og unnlatt å svare på resten av oppgavene. En annen elev hadde byttet om på omtrent annethvert svar (Se figur 7), mens den siste eleven i denne gruppen hadde svart riktig på 6 av oppgavene, svart feil på to av oppgavene og ikke besvart de to siste. De elevene som ble plukket ut som høyt-presterende viste gode forkunnskaper knyttet til denne delen av fortesten og svarte riktig på alle oppgavene.



Figur 7: Eksempel fra elev 206

Vi valgte å legge mer vekt på den andre delen av fortesten, da denne var knyttet direkte opp mot undervisningseksperimentet vårt. Her hadde de fleste elevene en lav score. I den lavtpresterende gruppen hadde tre elever ingen riktige svar på de fire siste spørsmålene, mens de to siste hadde svart henholdsvis rett på oppgave 5 og oppgave 7. I den høyt-presterende gruppen hadde en elev riktig svar på oppgave 4, to elever riktig svar på oppgave 5. På oppgave 6 hadde en elev svart helt riktig, mens en elev hadde svart delvis riktig, og i den siste oppgaven, oppgave 7, hadde to elever svart delvis riktig. Den mest fremtredende misoppfatningen vi fant her var at de oppfattet grafen som bilde.


4. Hvilken av grafene passer best til historien? (Kryss av for riktig svar)

- [x] A
- [ ] B
- [ ] C

Bortenfor huset til Tom er det en bakke.
Tom klatret opp bakken, gikk langs toppen, og så løp han fort ned på den andre siden.

Figur 8: Eksempel fra fortesten

8 av 9 elever vi hadde med i de to gruppene valgte alternativ A på oppgave 4, se figur 8 under. De velger altså det som ligner på historien rent visuelt, og tar ikke hensyn til hva aksene står for. Denne misoppfatningen går også igjen på de andre oppgavene på fortesten.

4.2 Observasjon av undervisningsøkt med elevene

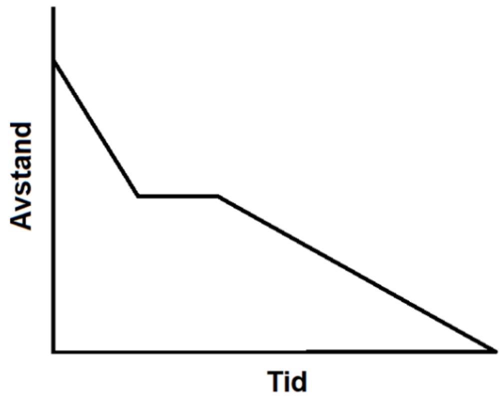
4.2.1 Konseptuell forståelse

Konseptuell forståelse er som tidligere nevnt det å bygge begrepsmessige strukturer gjennom bruk av matematiske begrep og operasjoner, og å se sammenhenger mellom disse. Det handler om å skape bindende relasjoner mellom ulike matematiske ideer, og kunne bruke disse til å tolke, forstå og benytte ulike representasjoner.

4.2.1.1 Konseptuell forståelse i observasjon

Vi observerte at elevene først og fremst brukte begreper som omhandler avstand, tid og hastighet. Elevene snakket ikke bare om i hvilken retning, hvor langt og hvor lenge, men også hvor fort de skulle bevege seg.

Under utprøvinga av oppgave 4, som er den første oppgaven elevene møtte som ikke begynte med avstand 0 meter, utvekslet følgende dialog seg mellom to av elevene.



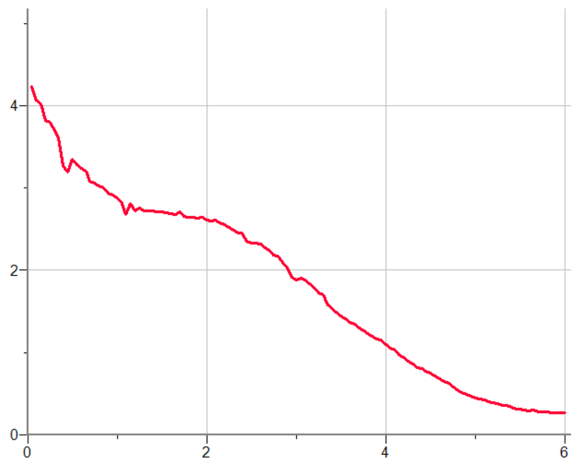
Figur 9: Oppgave 4

Elev 3	Hvor mange meter er det den stopper på sånn ca.?
Elev 3	Tre
Elev 4	I sekund så er det sånn ca. 1
Elev 4	Du må klare å gå det på ett sekund
Elev 3	Derfor må jeg springe

Her foretar elevene overslag som går på tid, avstand og hastighet, og begrepene meter og sekund som beskriver avstand og tid. Springe gir ikke en eksakt hastighetsbeskrivelse, men i forhold til de to første grafene som de gikk, ser de at de må bevege seg raskere i dette tilfellet.

Gjennom denne dialogen, viser disse to elevene at de bygger en begrepsmessig struktur ved å bruke ulike matematiske begreper, og hvordan disse kan ses i sammenheng med hverandre. Elevene hadde før utprøvingen fått informasjon om at sensoren målte en maksavstand på 6 meter. Under samtalen om den første delen av grafen, anslår de en bevegelse mot sensoren på 3 meter i løpet av det første sekundet. Dette gjenkjenner vi som et stigningstall på -3. De anslår også at de ikke klarer å tilbakelegge denne avstanden på 3 meter ved å gå og må dermed springe. Ved å se et bilde av en graf tolkes dette raskt til informasjon som kan brukes praktisk i neste operasjon.

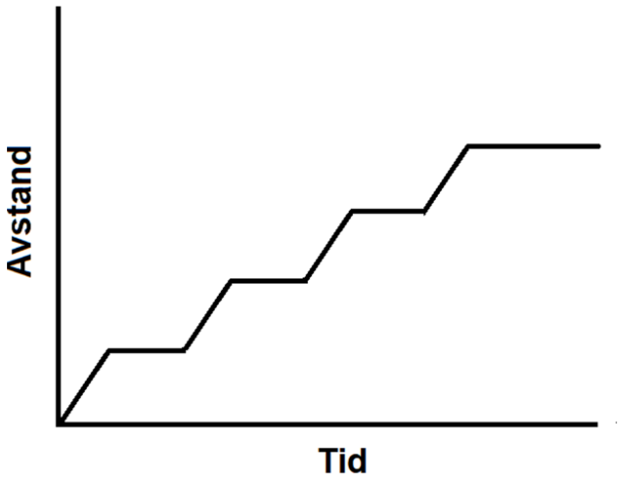
Resultatet av forsøket på å gå denne grafen, ble seende slik ut:



Figur 10: Forsøk på å gå graf 4

Sammenligner man med grafen som ble gitt som oppgave og grafen i figur 2, finner man nok likhetstrekk til at elevene sa seg godt fornøyde med gjennomføringen. Elevene har ikke møtt på begrepet stigningstall ennå og vet ikke hvordan dette regnes ut. Dermed vil den visuelle sammenlikningen være deres referansepunkt. Stigningstallene kan se noenlunde like ut. Ideelt sett skulle grafen hatt et horisontalt parti. Dette har ikke elevene fått helt til, antakelig fordi de ikke klarer å stå helt stille mellom de to kjappe bevegelsene de utfører.

Noen elever viser en større konseptuell forståelse allerede fra start. Her viser 2 av elevene stor forståelse for hvordan de skal utføre oppgaven allerede fra start. Oppgaven ser slik ut:



Figur 11: Oppgave 1

Elev 7	Der er man jo veldig nære, siden den er i bunnen, så avstanden blir lenger jo høyere den kommer. Hvis man starter der så er man helt nær. Og så går man lenger og lenger unna
Elev 9	Så må man ta pause
Elev 7	Ja, så må man ta pause mens man går bortover

Dette er det aller første som blir kommunisert i denne gruppa etter at første oppgave er gitt. Konseptet om hvordan sensoren fungerer har de skjønt som følge av introen, og det er tydelig at begge to leser grafen som en bevegelse som knytter avstand og tid sammen.

4.2.2 Prosedyreflyt

Beregninger er å utvikle matematiske prosedyrer slik at de kan brukes nøyaktig, fleksibelt og hensiktsmessig.

4.2.2.1 Prosedyreflyt i observasjon

I observasjonen ser vi at elevene utvikler ulike strategier for å løse de ulike oppgavene. Da dette er deres første møte med det å gå en graf, bruker de en del tid på utforsking underveis, og utvider repertoaret sitt for hver oppgave de gjennomfører. De utvikler derfor også prosedyrer som gjør at de så nøyaktig som mulig kan løse oppgavene.

Elevene jobber her med oppgave 4, og har blitt enige om at de først må gå fort, så stoppe helt opp, og så gå sakte til de kommer frem til sensoren. Mens tre av elevene begynner å gjøre seg klare til å forsøke, blir en elev sittende igjen og begynner å tegne streker på arket med grafen på. Læreren er nysgjerrig på hva eleven holder på med og spør.

LB	Hva gjør du nå?
Elev 9	Jeg sjekket hvor langt hun skulle gå først og sånt

Eleven har tegnet streker både opp fra tidsaksen og bort fra avstandsaksen, og viser tegn til å se sammenhengen mellom aksene. Ved å tegne disse strekene beregner han ganske nøyaktig hvor de skal være når. Han beregner hvor lenge de skal bevege seg, hvor lenge de skal stå rolig, og hvor stor avstand de skal ha fra sensoren på de ulike tidspunktene. Elev 7 reagerer på at læreren spør hva elev 9 holder på med, kommer bort og skyter inn i samtalen.

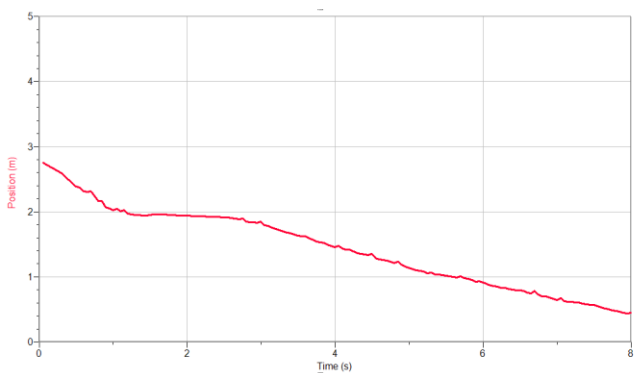
Elev 7	Ca. 2 sekunder
Elev 9	Nesten 2 sekunder. Eller 1,5 sekund da.
LB	Så 1,5 - 2 sekunder skal hun gå fort?
Elev 9	Ja, og så 1,5-2 sekund pause, og så gå
LB	Og resten sakte?
Elev 9	Ja

Det kan virke som elev 7 allerede har gjort denne beregningen i hodet, for kommentaren kommer kontant. Elev 9 virker ikke helt fornøyd med «ca. 2 sekunder», og påpeker at det bare er nesten det, kanskje nærmere 1,5 sekund. Deretter påpeker elev 9 at de også skal stå stille omtrent like lenge. Han viser til strekene sine på arket.

De andre to på gruppa virker ikke klar for å bruke energi på utregning. De står fortsatt klare ved sensoren for å gjennomføre forsøket.

LB	Fikk du med deg det du nå? (til eleven som skal prøve)
Elev 8	Ja, hører godt.

Elev 8 vil egentlig bare komme i gang med gåinga, men godtar den beregninga de to andre har gjort, og prøver å gjennomføre den.



Figur 12: Forsøk på å gå graf 4

Da elevgruppe B jobbet med oppgave 8 senere bruker elevene nok en gang streker for å forklare resten av gruppa hvordan de skal gå. Oppgave 8 handler om å først lage en graf av historien, for deretter å gå denne.

Tom klatret opp bakken, gikk langs toppen og så løp han fort ned på den andre siden.

Figur 13: Oppgave 8

Gruppa er på det tidspunktet samtalen foregår, fornøyd med at de har klart å komme frem til en graf, og er klare til å prøve seg frem med å bare gå den. Elev 9 påpeker nok en gang at de må bli enige om *hvordan* de skal gå den før de kan begynne med det. Lærerens kommentar er her for å få de andres oppmerksomhet. Denne gangen er hele gruppa ved grafen ennå, og elev 7 velger å bruke streker for å forklare de andre.

Elev 8	Da begynner vi nærme, så går vi litt sakte, og så litt fortere og så…
Elev 9	Men vi må bli enig om hvordan vi skal gå den da.
LB	Hvis vi begynner å tenke tid nå?
Elev 7	Hvis vi tenker at det er 8 da. Så 3, 6, 8. Ca. 3 sekunder sakte, ca. 4 eller 3,5 sekund gå
Elev 9	Men da har vi 1 sekund på å løpe
Elev 7	Men han går ganske kjapt ned da
Elev 9	Ja, det er sant
	(Elev 7 tegner på streker)
LB	Hvor lenge skal han gå sakte?
Elev 9	Nesten 3
LB	Ja, ca. 3. Og så litt fortere i?
Elev 9	I 4
LB	Og så springe i 1?
Flere	Ja

Elev 7 tenker høyt og deler grafen inn i biter uten å tegne på papiret. Eleven starter med å si «Hvis vi tenker at det er 8 da», og viser at hun tar utgangspunkt i at tidsaksen grafene de har gått så langt har vært 8 sekunder lange. Videre sier hun «3, 6, 8». Her antas det at hun tar utgangspunkt i 3-gangen for å dele det hele i litt mindre biter.

Hadde hun kunne sagt 3, 6, 9 hadde det blitt tre like store biter. Men det er bare 8 sekunder, så hun må dele det i to like store og en litt mindre bit. Utfra dette, som foreløpig bare er visualisert i elevens hode, beregner hun at det blir 3 sekunder sakte bevegelse, så 4, eller kanskje bare 3,5 sekunder litt kjappere.

Her blir hun avbrutt av elev 9 som synes 1 sekund til å løpe blir veldig lite. Elev 7 argumenterer med at det går ganske kjapt å løpe nedover fjellet. Her velger elev 7 en strategi elev 9 brukte i oppgave 4, og viser at det stemmer ved å tegne streker på grafen. Denne gangen virker det også som de andre to på gruppa følger tankegangen.

Gjennom tidligere matematisk prosedyre har elevgruppa utviklet en hensiktsmessig strategi, som gjør at de ikke bare har en hypotese om hvordan det kanskje kan være, men at de har beregnet at det blir riktig. De blir på den måten enige om at fordelingen på sakte, litt fortere og raskt skal være tre, fire og ett sekund.

Elevene i gruppe A velger en annen strategi i den samme oppgaven. De bruker sandalene sine for å beregne hvor de skal endre retning, gå kjappere, stå i ro osv.

LA	Hvis dere ser på grafoppgaven, hvor høyt oppe er dere på avstand i forhold til denne
Elev 3	4 meter, kanskje, jeg vet ikke
Elev 4	Da må vi nesten springe da
LA	Hvor langt er det bort til veggen
Elev 2	(Teller mens han går) 5,5 m
Elev 1	Jeg kan stå her (men legger ut sandalen sin isteden)

Elevene sammenligner den grafen de har fått utdelt, med den strekningen de har tilgjengelig, og bruker dette som mål på grafen. Derfra gjør de beregninger som er til hjelp for elevene til å være mer nøyaktige når de går grafene. Sandalen er også veldig fleksibel i den forstand at den enkelt kan flyttes frem og tilbake for å perfeksjonere resultatet mest mulig, og ikke minst hensiktsmessig ved at den også er lett synbar.

Elev 2	Skal jeg springe til sandalen?

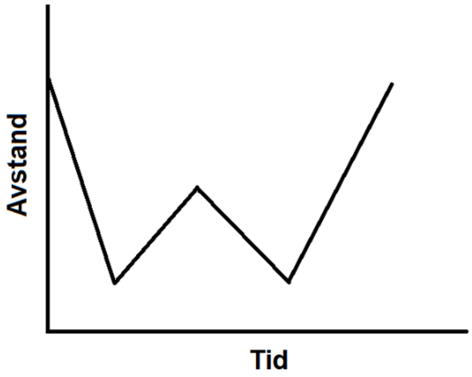
Elevene bruker også sandalene i senere grafer, og er et godt eksempel på en praktisk matematisk prosedyre.

4.2.3 Strategisk kompetanse

Strategisk kompetanse er å gjenkjenne og formulere matematiske problem slik at man kan oversette fra hverdagsspråk til matematisk språk. Herunder velge passende representasjoner, planlegge og gjennomføre løsninger, gjennom logisk tankegang og bruk av gyldig argumentasjon.

4.2.3.1 Strategisk kompetanse i observasjon

Siden dette var elevenes første møte med funksjonsbegrepet der man brukte det til noe annet enn å lese av en graf, var det få eksempler på matematisk korrekt språk å finne i løpet av timen. De viser likevel en start på å forklare med et mer konkret, og etter hvert mer matematisk språk.



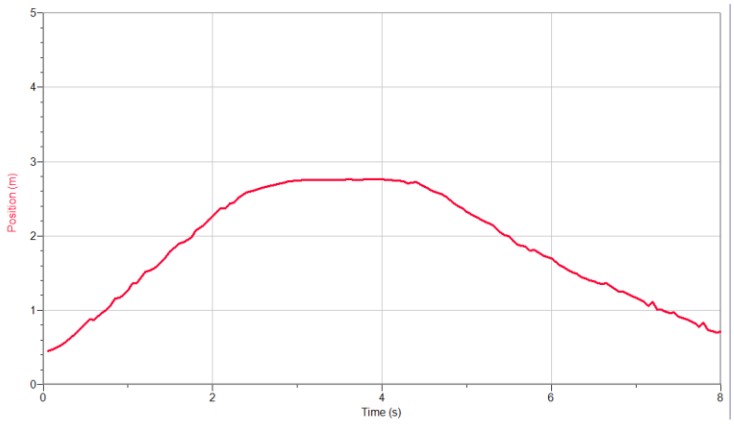
Figur 14: Oppgave 6

Elevene i gruppe B har allerede gjort to forsøk på å gå denne grafen, da denne diskusjonen finner sted:

Elev 9	Den er jo ikke like rett som de andre (sammenligner den siste med den første streken)
LB	Nei, den er jo ikke det
Elev 7	Den der er litt slakere
Elev 6	Den der er litt spissere (peker på den første spissen i figuren), og den går liksom utover litt (peker på den siste streken) Så den blir litt tregere.
Elev 8	Så ikke gå like kjapt tilbake
LB	Så den er kjappere enn den, er det det dere sier? (henviser til den første linja i forhold til den siste)
Elev 8	Mm
Elev 6	Ja
Elev 9	Den er mere skrå
LB	Hvem av dem er saktest?
Elev 9	Den tredje
LB	Hvorfor det
Elev 7	Fordi den er slakere, så det betyr at den tar lengre tid
Elev 8	Vinkelen liksom
LB	Hvilken er kjappest?
Elev 9	Den første

Elevene har til nå bare sett på det som en figur som ligner en «W», men begynner å se at de ulike strekene er forskjellige, og argumenterer for at de ulike bevegelsene dermed må ha ulik fart. Elev 9 starter med å si at den ikke er like rett som den andre. Han peker på den første og den siste streken. På tegningen er alle strekene rette streker, så det må antas han mener noe annet enn det han sier. Elev 7 beskriver den siste streken som slakere, mens elev 6 beskriver at den første spissen er spissere (enn den siste), og refererer til vinkelen mellom første og andre linjen i denne grafen. Deretter påpeker hun at den siste streken peker mer utover. Elev 6 argumenterer med at det betyr at der må de gå tregere, før elev 8 sier at det betyr at de ikke skal gå like kjapt tilbake. De har utvidet kunnskapen sin om at strekene på grafen blir slakere om de går tregere. Læreren prøver å få dem til å forklare enda mer, og elev 7 forklarer at den er slakere fordi den bruker lengre tid på forflytningen. Elev 8 slenger på at det er vinkelen som gjør at det blir slakere, og viser at den er større der enn den første. Elevene bruker uttrykk som slakere, spissere, peker mer utover, mer skrå. Når de får spørsmål om å sammenligne de fire strekene og si noe om hvem som har saktest og kjappest bevegelse, viser de at de har kontroll på dette. Til sammen klarer de å kombinere det de har lært i løpet av denne økten så langt gjennom å bruke ord de kjenner fra før, og finner derfor strategier hele gruppa forstår for å løse oppgaven. De sier ingenting om retningen, da dette virker å være helt selvfølgelig for dem.

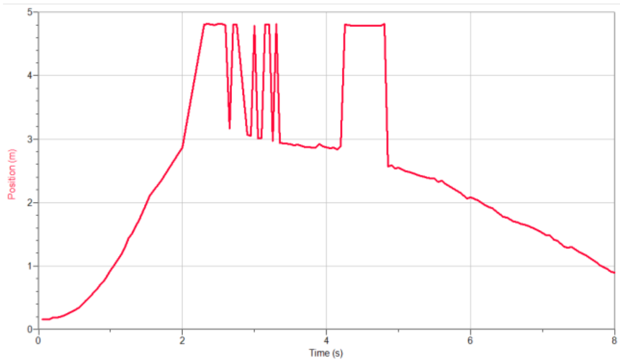
Da dette var et førstemøte, var forståelse viktigere enn matematiske begrep. Vi opplevde at elevene snappet opp måter læreren kommenterte på, og at de selv brukte dette videre i samtalene sine. De språklige bildene læreren bruker i samtalen under virker forstått av alle, og særlig tydelig kommer dette frem når en av elevene selv bruker det for å forklare et senere grafforsøk.



Figur 15: Forsøk på å gå graf 3

Elev 9	Du kom ikke hjem igjen
LB	Nei, kom bare til postkassa
Alle	(latter)

Elevene bruker utrykket «hjem» og «hjem igjen» i flere situasjoner gjennom undervisningsøkten som et uttrykk for å komme så nært sensoren som mulig. Dette dukket opp allerede under første oppgave, da de ble kjent med sensoren og hvordan den fungerte. Etter forsøket på å gå grafen i oppgave 3, sier en av de andre elevene at elev 7 ikke kom «helt hjem igjen». Læreren responderer med at eleven bare hadde kommet «til postkassa». Den lattermilde responsen fra elevgruppa tyder på at de skjønner det visuelle bildet på at avstanden eleven hadde da tiden var ute, var ikke den samme som oppstarten, og hun kunne ha kommet nærmere «hjem» enn det hun gjorde. Formen ellers på grafen er godkjent av gruppa, og kunne tas med til neste forsøk. De blir enige om at elev 8 som er den neste som skal prøve, må passe på å komme «helt hjem».



Figur 16: Forsøk på å gå grafen en gang til

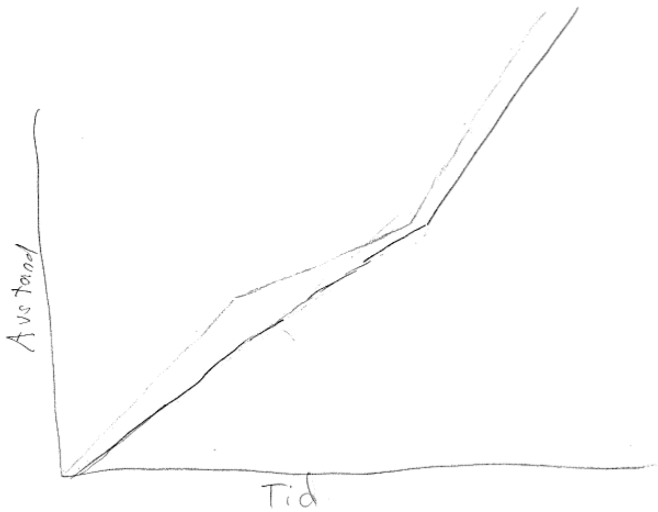
Elev 7	Du kom også bare til "postkassa"... ...til naboen

Elev 7 kommenterer «Du kom også bare til postkassa», ventet litt og legger til «til naboen». Elev 7 viser her forståelse av at grafen ikke ble riktig fordi elev 8 ikke kom nært nok sensoren. Hun velger å bruke et begrep som har blitt lansert tidligere, og som gruppa har en felles forståelse av hva betyr. Latteren og nikkingen som kom etter uttalelsen, gjør at det hersker liten tvil at elevene forsto hva hun mente.

Også i gruppe A finner vi eksempler på hvordan elevene har en felles forståelse av begrep som gjør at de kan formulere matematiske problem. Det matematiske språket som blir brukt i denne argumentasjonen blir en blanding mellom hverdagsspråk og matematisk språk, hvor i første rekke det matematiske språket gir seg utslag i grafen som blir tegnet. De forskjellige delene av grafen blir beskrevet med hverdagsspråk som vi ser under.

Elev 4	Tom klatret opp bakken, gikk langs toppen og så løp han fort ned på den andre siden
Elev 3	Men, han klatret opp?
Elev 4	Ja, han klatret opp
	(Elev 3 tegner)
Elev 4	Men han klatret
Elev 2	Det blir jo basically rett opp
Elev 3	Ja, men tida. Men han bruker ikke liksom 0,2 sekund på å klatre opp
Elev 1	Han bruker tid på å komme opp
Elev 4	Blir ikke dette veldig skrått, for dette er jo akkurat det samme som han sprang
Elev 3	Sånn kanskje (tegner)

Her leser Elev 4 opp situasjonen som skal gås, til de andre på gruppa. Elev 2 har ennå ikke korrigert misoppfatningen sin av grafen som et bilde, og vil at den første delen av grafen skal gå «basically rett opp», mens Elev 3 argumenterer at det er to akser og et tidsaspekt som må tas hensyn til, og får støtte av Elev 1. Elev 4 sammenligner med en av de tidligere oppgavene og ser at stigningstallet blir for høyt. Hun kjenner ennå ikke til begrepet stigningstall og bruker derfor ordene «veldig skrått» isteden. Elev 3 er på samme nivå begrepsmessig og endrer grafen slik at den første delen av den har et lavere stigningstall.



Figur 17: Forsøk på å tegne oppgave 8

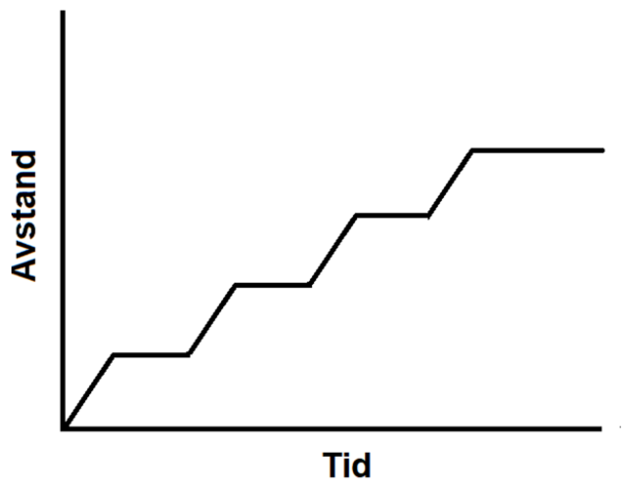
Elevene planlegger her sammen løsningen av oppgavene, argumentasjonen er gyldig for dem ved at de bruker et språk med begreper som er allmenne og forståelige for de andre på gruppa.

4.2.4 Resonnering

Resonnering er limet som holder matematikken sammen. Det dreier seg om å tenke logisk og bruke gyldig argumentasjon for å forklare og bevise en metode, en påstand eller en løsning. Videre handler det om å utforme hypoteser, teste dem, og eventuelt bevis eller forkaste dem.

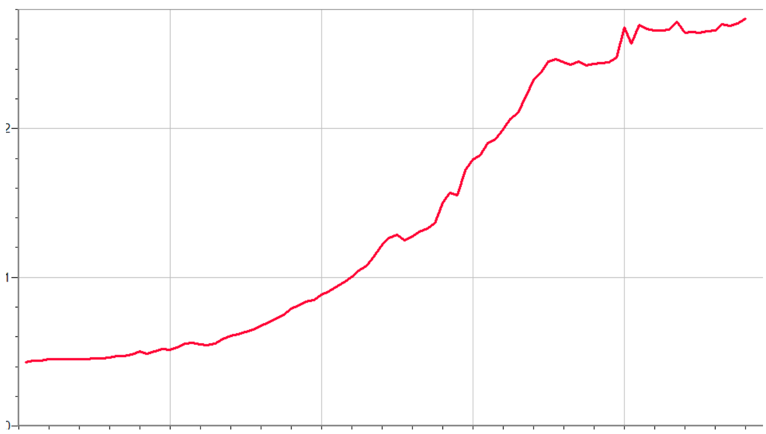
4.2.4.1 Resonnering i observasjon

I starten av arbeidet med oppgave 1 hadde elevene ennå ikke et forhold til hvordan bevegelsessensoren og grafprogrammet fungerte. Gjennom prøving og feiling ble de mer og mer kjent med hvordan grafen endret seg i tråd med de ulike bevegelsene de gjorde.



Figur 18: Oppgave 1

Elev 1 prøver og får opp denne grafen:



Figur 19: Første forsøk på å gå graf 1

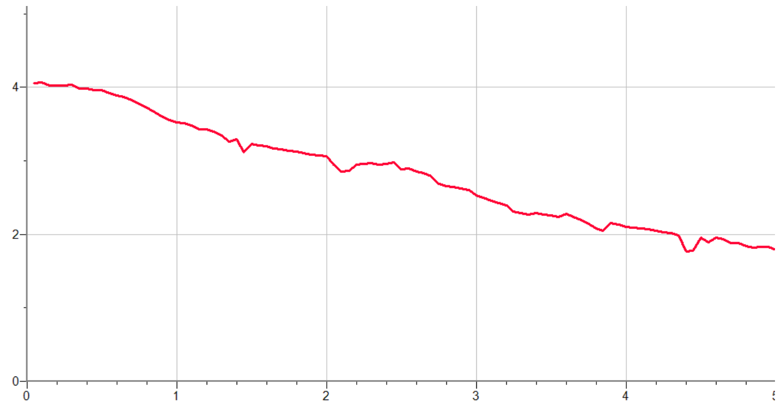
Elevene kom deretter opp med en rekke hypoteser.

Elev 3	Spring
Elev 2	Tror du det hjelper å slå hjul
Elev 4	Skal jeg prøve det
Elev 5	Bare prøv det
LA	Men den grafen dere gikk nå. Kan dere se hvor deres graf startet og hvor den utdelte grafen startet?
Elev 3	Kanskje vi må starte nærmere
Elev 2	Kanskje vi må starte med å gå fremover også ned
Elev 4	Den starter jo her
Elev 3	Hvis vi starter her, starter den oppi der da (går et stykke unna)
Elev 2	Nei

Elev 3	Prøv
Elev 4	Men hva skal jeg liksom gjøre
Elev 2	Du skal gå
Elev 4	Men hvordan skal jeg gå
Elev 4	Bare vanlig?
Elev 3	Kanskje gå vanlig også stopper du
Elev 1	Ja, bare gå, så stopper du
Elev 3	For da går den jo liksom ned
Elev 2	Går det ikke an å liksom gå litt frem også hopp liksom, da går jo den opp
Elev 4	(går grafen, men hopper for hvert andre skritt)

Elevene er tydeligvis i villrede, og er ennå i den første utforskningsfasen. Læreren prøver å gi dem hint om at de må begynne nærmere sensoren, og får gehør til å begynne med fra Elev 3, før hun vil finne ut hva som skjer om man starter enda lengre unna. Forslaget om å slå hjul virker løsrevet fra selve oppgaven, og er antakelig mer et forslag hvor eleven ønsker å utforske hvordan det å slå hjul vil se ut som en graf, fremfor et reelt forslag for å løse oppgaven.

Når Elev 4 ønsker forslag fra de andre på hvordan hun skal gå, så kommer Elev 3 med forslag om at hun kan gå og stoppe. Elev 2 ser grafen som et bilde og han ønsker at man skal først gå og så hoppe gjentatte ganger, for da vil den gå opp. Eleven kobler her grafen opp mot høyde fra bakken. Elev 3 sitt forslag faller derfor gjennom, men Elev 4 starter langt unna og hopper for hvert andre skritt mens hun stadig kommer nærmere sensoren.



Figur 20: Andre forsøk på å gå graf 1

Hypotesen om å starte lengre unna blir nå forkastet.

Elev 1	Åh, jeg tror du må starte her
LA	Da har dere i hvert fall funnet ut det

Hypotesen om å hoppe er ennå ikke forkastet, og er et tydelig eksempel på misoppfatningen om at han ser på grafen som et bilde av en situasjon.

Elev 2 er den neste som skal prøve og han hopper så høyt som han kan for hvert andre skritt.

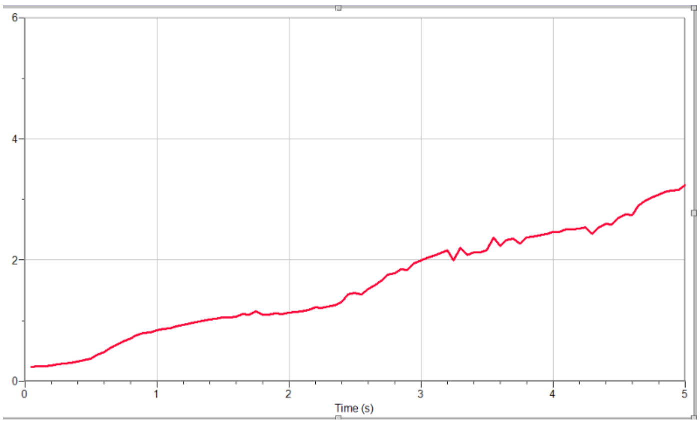
Elev 4	Det så bra ut i starten
LA	Hvorfor hoppet du?
Elev 2	Jeg tenkte kanskje den gikk oppover da
Elev 1	Kanskje vi skal prøve å ikke hoppe så høyt
LA	Hva står det på aksene deres
Elev 3	Tid
Elev 1	Avstand
LA	Kommer du lengre unna, når du hopper rett opp og ned
Elev 3	Hodet er lengre unna
LA	Hodet ja, men den måler jo bare i rett linje

Læreren prøver da å finne ut hvordan eleven tenker når han hopper underveis og får bekreftet at det er en misoppfatning av at grafen er et bilde av en situasjon.

Ved å peke på hva som er aksetitlene og hva som faktisk måles, håper læreren at andre hypoteser kan prøves ut.

Den neste hypotesen som prøves ut er å gå med jevn fart, men med lange skritt.

Elev 5	Skal jeg gå bare med store skritt?



Figur 21: Tredje forsøk på å gå graf 1

Responsen fra elevgruppa er positiv.

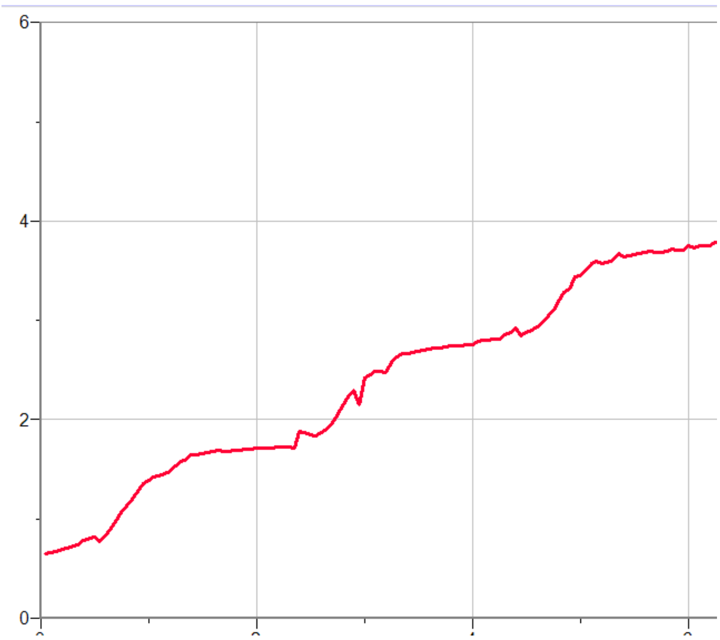
Elev 2	Bra
Elev 4	Bedre

Fortsatt har de ennå ikke helt skjønt hva som gjør de rette strekene, pausene hvor man står i ro, så læreren følger opp med neste spørsmål som er: «Hva mangler i forhold til den grafen dere fikk utdelt?».

Elevene begynner nå å forme nye hypoteser, en økt forståelse er på vei:

Elev 4	Buene
Elev 1	De rette strekene
LA	Hvordan kan man få til det
Elev 3	Stoppe

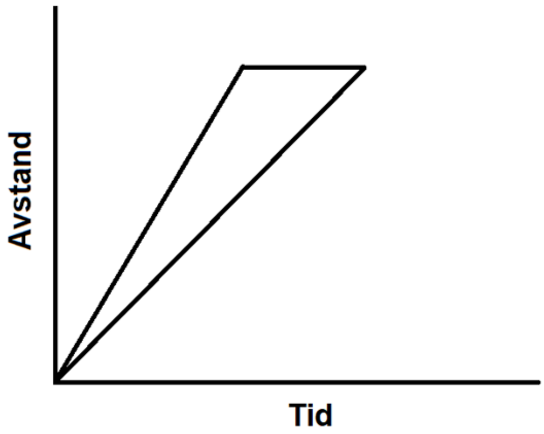
Etter flere forsøk med prøving og feiling på hvor lange pausene skal være, og hvor fort de skal gå/løpe imellom pausene ender de til slutt med denne grafen:



Figur 22: Ellevte forsøk på å gå graf 1

De sier seg fornøyde, men påpeker at om de kunne fått lengre tid eller brukt større avstand enn hva sensoren kunne måle, kunne de fått grafen mer lik den utdelte oppgaven.

Når det gjelder gruppe B resonnerer de godt gjennom store deler av undervisningsøkten og har klare hypoteser på hvordan de skal gå på de fleste oppgavene. Misoppfatningene blir derfor ikke så tydelige før de helt til slutt i undervisningsøkten fikk beskjed om å prøve å lage en historie til denne grafen.



Figur 23: Oppgave 9

Elev 9	Den går jo tilbake i tid
LB	Back to the future
Elev 9	Men da må du gå tilbake i tid, det går jo ikke
LB	Nei, hvorfor går det ikke?
Elev 9	Fordi du går tilbake i tid
LB	Så her måtte jeg gått tilbake i tid
Elev 8	Du kommer dit, så finner du opp en tidsmaskin, og så spoler du tilbake
LB	Å ja, så det er en videomaskin
Elev 9	Men du må kunne flytte deg til en annen plass også i tilfelle

Elev 9 forstår med en gang at dette ikke kan være mulig. Han virker å forstå sammenhengen mellom tid og avstand godt, og argumenterer for hvorfor det ikke kan være mulig. Det er først når han har forklart en runde, mens han peker på grafen, at en annen elev henger seg på og kommenterer at det kan være mulig om man spoler tilbake. Da forklarer elev 9 at det fortsatt ikke vil være mulig, for man måtte jo flyttet både tid og sted i tilfelle. Han viser til at man ikke kan gå en annen vei tilbake enn den man kom fra om man spoler tilbake.

Videre i samtalen kommer det frem at ikke alle har gått bort fra misoppfatningen om at dette er et kart.

Elev 6	Men hvis man tenker at dette er et fjell da
LB	Ja?
Elev 6	Så man starter ved bilen, så går man opp til toppen, og har pause der, og så går man ned igjen til bilen.
LB	Men hvor mye tid har du brukt da?
De andre	Ingen tid
Elev 6	Å JA! Det blir jo null tid ja.
LB	Ja, riktig
Elev 9	Så hvis det ikke hadde hatt noe med tida å gjøre så ville det jo gått andre veien

Elev 6 viser tydelige tegn på å se på grafen som et bilde over at noen går opp og ned noe. Samtidig kobler hun inn kunnskapen sin om at når man har pause, blir streken vannrett. Når læreren spør hvor mye tid denne personen har brukt når man har kommet tilbake til bilen, utbryter de andre i gruppa «Ingen tid» og først da virker det som det går opp for henne igjen at det ikke er mulig. Elev 9 legger til at om det ikke hadde hatt noe med tid å gjøre, så ville det gått andre veien, og viser ved peking at streken ville gått videre fremover på tidsaksen mens den går tilbake til null avstand. Her mener nok eleven at dersom historien til Elev 6 var den riktige ville streken gått videre i stedet for tilbake til utgangspunktet. Elev 9 sier at dette ville vært slik dersom det ikke hadde hatt noe med tid å gjøre, men i måten han peker og viser på antas det at han mener dersom det faktisk hadde hatt med tid å gjøre.

Men det skulle vise seg at misoppfatningen til elev 6 ikke var så lett å knekke.

LB	Er dere enige om at dette rett og slett ikke går an?
Alle	Ja.
Elev 6	Da må man eventuelt gjøre det veldig fort
LB	Nei, det går ikke
Elev 9	Ja, for du måtte hatt tidsmaskin OG noen som flytter deg

Nok en gang prøver elev 9 å forklare hvorfor det ikke er mulig, fordi du ikke bare flytter deg tilbake til å ha brukt null tid, men du har også flyttet deg tilbake en annen vei enn du kom.

Til slutt legges det spøkefullt til at det er det bare Harry Potter som kan klare, for han har slike nøkler som kan flytte deg både i tid og sted.

4.2.5 Engasjement

Engasjement er evnen til å se på matematikken som interessant, fornuftig, verdifull og nyttig.

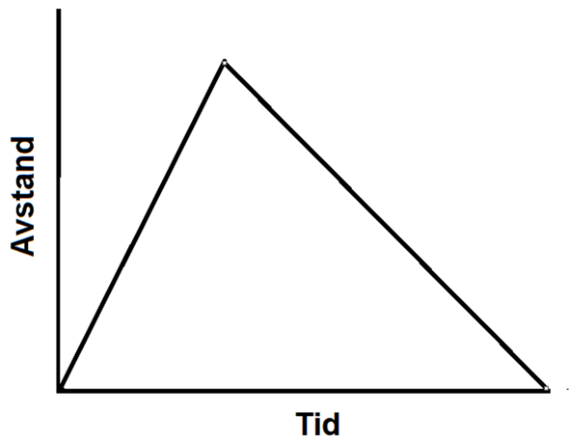
4.2.5.1 Engasjement i observasjon

Underveis i hele økta virket elevene engasjerte i oppgaven. Dette viste de på ulike måter. De oppmuntret hverandre underveis i selve grafgåinga, og tipset hverandre om når den som gikk skulle endre bevegelse. Det at de hele tiden byttet på å gå grafene, bidro til at alle var «på» hele tiden.

Elev 8	Stopp
Elev 6	Og så sakte tilbake
Elev 9	Bra, bra, bra. Bra «elev 7»
LB	Denne må vel være godkjent?
Alle	Ja!
Elev 8	Hvorfor er det bare «elev 7» som får det til?
Elev 7	Men alle har jo prøvd før meg da.

Her er hele gruppa involvert i at elev 7 skal få det til. Dette er fjerde forsøk på en av grafene, og de oppmuntrer og hjelper eleven gjennom slik at de alle er enige om at det var en godkjent graf. Selv da elev 8 spør litt humoristisk om hvorfor det er slik at elev 7 alltid får det til, svarer denne eleven at det er jo fordi alle andre har prøvd først. Det virker som de opplever det som en felles oppgave og en felles bragd å greie det.

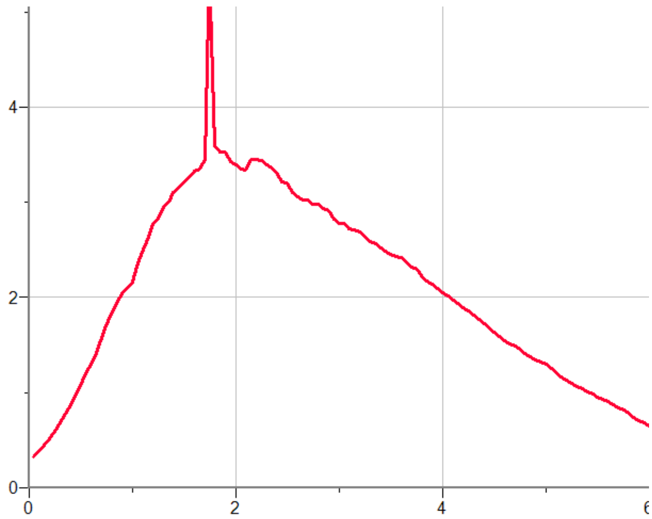
Det samme finner vi eksempel på i gruppe A. Elevene er stadig på jakt etter å perfeksjonere grafene sin og er flinke til å gi ros underveis i forsøkene. Den ene eleven i gruppe A er en mye mer introvert person enn de andre elevene i gruppa, men viser gjennom forsøkene sine at han er engasjert og får med seg det de andre sier og gjør. Under er et utdrag fra samtalen mellom elevene mens de gjennomførte det siste forsøket på oppgave nr.3.



Figur 24: Oppgave 3

LA	Elev 5 skal du prøve å gjøre den enda bedre
Elev 3	Ja, han kan prøve

Elev 5 går grafen:



Figur 25: Siste forsøk på oppgave 3

Elev 3, Elev 1	Den var bra, ja veldig bra,
Elev 4	Hvis vi bare ser bort fra den streken der
Elev 2	Dritbra

Som Elev 4 observerer, havnet Elev 5 utenfor sensorens område et lite øyeblikk, og selv om kommentaren kan virke kritisk, er den nok mer et bevisst valg i at man skal sette søkelys på alt det som er bra fremfor den lille detaljen som ikke var korrekt.

På flere av oppgavene opplevde vi at elevene ikke ville gi seg, men at de ønsket å få et resultat som stemte overens med den tegnede grafen. På gruppe B brukte de for eksempel 8 forsøk for å komme frem til en graf de kunne godkjenne som riktig, selv om de tidlig i løpet hadde vist en forståelse av hva som måtte til for å matche oppgaven.

På slutten av økta hadde vi en litt løsere samtale om hvordan de opplevde dette opplegget:

LB	Kanskje dere får testet ut om kunnskapen har satt seg i hodet, eller om den bare er inni rommet her, og at idet dere går, så er den borte
Elev 8	Hvem vet?
Elev 7	Jeg tror faktisk at den har satt seg
Elev 6	Det var en veldig gøy måte å lære på da
LB	Hvorfor er det morsommere?
Elev 7	Vi får prøvd det, vi får gjort det fysisk og ikke bare hørt på
Elev 6	Så får vi blitt med på hvordan grafen beveger seg jo lengre unna man går
LB	Så mere følelsen av hva det betyr
Elev 8	Og så husker vi det bedre fordi det er noe annet enn vanlige timer
LB	Så hvis alle timer var sånn, så hadde det ikke vært så morsomt?
Alle	Nei
LB	Så det er viktig at det er litt forskjellige? At det er noe annet enn "vanlige" timer
Elev 9	Ja, hvis ikke blir jo nesten de timene morsomst.

Læreren hadde her egentlig avsluttet økta, da elevene spontant forklarte hvorfor de syntes dette var en morsom måte å lære på. «Vi fikk prøvd det. Vi fikk gjort det fysisk og ikke bare hørt på», sier elev 7. Elevene har opplevd å lære gjennom å utforske og utprøve med egen kropp, og tror at de dermed vil huske dette bedre. Elev 6 responderer med «Så får vi blitt med på hvordan grafen beveger seg jo lengre unna man går». Eleven opplever ikke bare å ha prøvd noe, men å få «være med» grafen. De har utviklet graf-forståelsen sin gjennom fysisk å «være» den. En av grunnene til at dette har vært morsomt, var at det hadde vært noe annet enn det de er vant til. Hvis det bare hadde vært slik undervisning, ville antakelig det de nå anser som vanlig vært det som føltes morsomt. Elevene poengterer dermed at variasjon i undervisning er et viktig ledd i det å skape engasjement i matematikkundervisningen.

4.3 Intervju

4.3.1 Konseptuell forståelse, prosedyreflyt, strategisk forståelse og resonnering

Elevene kom til timen uten noe annen forkunnskap enn den de skulle hatt etter kompetansemål for 7.trinn. Ingen av elevene hadde jobbet med grafer på denne måten før, og det eneste noen av dem kunne huske at de hadde jobbet med på barneskolen var å lese av grafer, slik som en av oppgavene på fortesten. «Hvor mange ble født i 2018?» osv.

Elev 8	Jeg visste ikke hva det var jeg, helt seriøst. Jeg husket ikke hva en graf var en gang

Eleven sier at hun ikke husker hva en graf var en gang, men det virker som dette er et uttrykk for at hun ikke vet hva det er. De har kanskje hørt ordet før, men ikke jobbet med det på den måten som vi har gjort nå. Begrepet graf har fått et bedre grep hos alle etter denne økta, og de bruker det riktig og hensiktsmessig gjennom hele intervjuet.

I løpet av intervjuet ble elevene spurt om hvordan de kunne finne ut eksakt hvordan de skulle gå de ulike grafene:

LB	Men da hadde noen skjønt at det var noe med tid og avstand her
Elev 8	Ja, for han var jo veldig opptatt på det med tiden først
LB	Ja, du satte jo opp streker på avstander og slikt
Elev 9	Ja
Elev 7	Jeg begynte å skjønne det etter hvert, og så sa jeg det

Elev 8 påpeker at elev 9 tidlig begynte å se på tiden som viktig. Han brukte det for å fordele bevegelsene ut over de 8 sekundene de hadde til rådighet. Elev 7 sier at hun begynte å skjønne det etter hvert, og det var også tydelig i undervisningsøkten, da det var disse to som brukte denne metoden for å konkretisere når og hvor i grafen for de andre på gruppa si.

I gruppe A brukte de en litt annen teknikk:

Elev 1	I starten av den første så synes jeg det var vanskelig, men så forstod jeg hvordan vi skulle gjøre det, så var det lett
Elev 2	Vi fant ut en teknikk vi kunne bruke, så vi målte opp med sandaler, så vi kunne gå.
Elev 2	Hvis vi for eksempel går et skritt der og så jogger vi litt også springer vi neste

Elev 2 refererer her til undervisningsøkten, hvor de begynte å dele inn avstanden på grafen i meterverdier og satte ut sandaler på gulvet, for at de skulle vite hvor endringer i hastighet var, og i enkelte tilfeller hvor de skulle endre retning. Denne måten å dele inn grafene på, ble brukt av hele gruppa.

Mot slutten av intervjuet fikk elevene en oppgave de ikke hadde sett før, som de fikk i oppgave å tegne grafen til. Oppgaven var:

Tom gikk hjemmefra sammen med noen venner. Plutselig oppdaget han at han hadde glemt lommeboken hjemme. Han sprang hjem for å hente den, og så måtte han springe for å nå igjen vennene sine igjen.

Figur 26: Tekstoppgave gitt muntlig under intervjuet

Elevene kastet seg ut i oppgaven, og hjalp hverandre så godt det lot seg gjøre:

Elev 7	Han starter hjemme.
Elev 8	Sprang vennene?
LB	Nei, de gikk hjemmefra sammen
Elev 8	Så da blir det på skrå
Elev 6	Ja, litt sånn
Elev 7	Og så sprang han hjem, så da blir det rett ned, eller ikke rett ned, men litt sånn, og så opp igjen.
Elev 9	Hva glemte han? Vent, vent.
LB	Han glemte lommeboka si
Elev 9	Det tar litt tid. Det tar litt tid.
Elev 6	Ja, og så opp igjen.
Elev 9	Men han må lengre for han må ta dem igjen.
LB	Ja, For de har gått i mellomtiden de også?
Elev 7	Hvis de har gått sånn ca…
LB	Hvis dem hadde gått i samme farta kan dere finne ut hvor han kan møte dem.
Elev 9	Da går jo de, så de har kommet halvveis så langt som de har gjort her. Eller altså. Halvveis der. (peker på punktet der Tom måtte snu for å hente lommeboken)
Elev 7	Da blir det ca sånn.
LB	Fortsett, fortsett, fortsett. Hvis de hadde fortsatt like fort hadde de fortsatt så fort
Elev 9	Ja, de kommer hit
Elev 7	Sånn da

Elev 7 har vist gjennom undervisningsøkten at hun har en god forståelse av sammenhengen mellom situasjon og graf. Sammen med elev 8 kommer de i gang med å tegne den første biten. Elev 9 virker å være den i gruppa som har best kontroll på å se sammenhengen mellom tid og avstand, men han velger å avvente med å si noe, slik han har gjort på mange av oppgavene i undervisningsøkten også. Det er mulig han avventer fordi han er usikker før han har hørt hva de andre mener, eller kanskje vil han at de andre skal få muligheten til å legge frem sine tanker. Først når elev 9 oppdager at elev 7 og 8 glemmer noe vesentlig, stopper han dem. Men i stedet for å si direkte hva han mener, prøver han å få de andre med på tankegangen sin. «Hva glemte han?» spør han, før han sier at de må vente med å fortsette på tegningen. Så forklarer han at det tar litt tid å hente lommeboken også. Det han vil få frem her er at grafen vil være en horisontal strek på avstand null i litt tid mens han henter lommeboken. Videre resonnerer han også rundt at de andre har gått videre, og at han derfor må løpe lenger enn til den avstanden hvor de skiltes.

4.3.2 Engasjement

Elevenes engasjement både i undervisningsøktens oppbygging og i intervjuet etterpå viser tydelig at dette har falt i smak. De viser også tydelig at de ønsker at dette skulle vært noe alle fikk prøve.

LA	Hva synes dere om timen som dere hadde i går?
Elev 2	Jeg synes det var ganske artig jeg
Elev 4 og Elev 1	Ja
Elev 4	Ja det var en artig måte å lære på om mere grafer
LA	Hva var det som var artig med det?
Elev 3	Man slipper å sitte liksom rolig
Elev 1	Man sitter ikke på en stol, men gjør noe aktivt
Elev 2	Man kunne gå lengdene istedenfor å sitte og måle
Elev 3	Jeg synes i hvert fall det var litt enklere å forstå, når vi gjorde det sånn
LA	Få høre fra dere også, hva synes dere var artig med timen i går
Elev 5	Det var litt artigere enn vanlig, for vi kunne være i aktivitet, mens vi holdt på å lære fortsatt
Elev 4	Hvis du har en veldig tung dag, så kommer du til en mattetime hvor du bare sitter og skriver og regner ut så er det bedre å få litt aktivitet i timen og

Det som først og fremst blir trukket frem er den positive opplevelsen av å få være i aktivitet og at det foregår læring samtidig som man beveger seg. En variasjon av undervisningsaktiviteter blir også trukket frem som positivt. Å gjøre noe som er annerledes enn den læringsaktiviteten som blir mest benyttet.

Elevene ønsker også at andre elever burde få ta del i de samme erfaringene som de hadde gjort seg.

Elev 2	Synes vi bør gjøre dette oftere jeg, liksom hele klassen
Elev 1	Lærer bedre

Når elevene er så klare på at de andre også må få prøve, tyder det på at de opplever det som meningsfylt. De kommer også med flere forslag til organisering for at det skal kunne gjennomføres. De nevner gruppestørrelse, antall sensorer, flere lærere og hvilke rom på skolen som kan benyttes til formålet.

Elev 2 synes at han har hatt så stort utbytte av undervisningsopplegget og kan dette så godt at han tilbyr seg å være medhjelper sammen med de andre som har fått tatt del i undervisningseksperimentet.

Elev 2	Så kunne vi jo, hvis du holder på med ei gruppe da, så kunne jo noen av de som er fra de to gruppene fra B nå, kunne hjulpet ei anna gruppe. For eksempel. Sånn at du ikke må stresse med ei gruppe og så må rett på andre gruppa

Under intervjuet prater vi om hva de kunne om dette fra før av og hva de hadde lært i løpet av økten, og da viser det seg at elevgruppene også har snakket sammen mellom undervisningseksperimentet og intervjuet (som ble holdt dagen etterpå).

Utdraget under er fra samtalen om grafen i oppgave 9:

Elev 6	Noen i den andre gruppa skjønte det ikke, så en av dem spurte meg om det etterpå.
LB	Forklarte du det til henne da? Skjønte hun det da?
Elev 6	Ja.
LB	Så det at vi fikk det til, og de sleit litt med å forstå det, men så forklarte du det til dem etterpå, så forsto de det
Elev 6	Ja
LB	Da hadde vi en videreutvikling etter skoletimen i går. Det var kult.

Det at elevene spør hverandre etter timen, fordi de virkelig har lyst til å forstå, og at en annen elev er interessert i å forklare, er gode tegn på at man har skapt både engasjement og interesse.

4.4 Overgangen mellom ulike representasjoner.

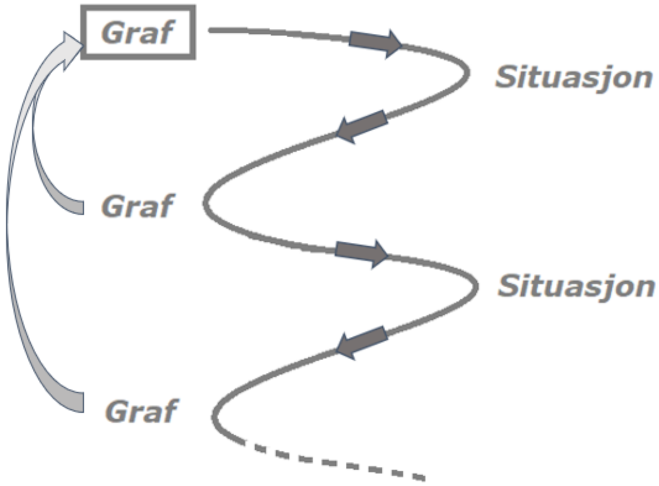
I løpet av undervisningsøkten jobbet vi kun med to av overgangene beskrevet av Janvier: *Fra graf til situasjon*, og *fra situasjon til graf*. De første 6 oppgavene var i utgangspunktet knyttet til *fra graf til situasjon*. Den første delen av oppgaven var å tolke den tegnede grafen og gå denne fysisk i rommet. Siden de skulle gjøre dette som gruppe, måtte de resonnere seg frem til en felles forståelse for hva de skulle prøve ut.

Figur 27: Elevene går fra graf til situasjon (Janvier, 1978, s 10.2, oversatt av oss)

Etter at gruppa hadde gjennomført et forsøk var den andre delen av oppgaven å se om deres graf visuelt sett lignet på den opprinnelige tegnede grafen (oppgaven).

Figur 28: Elevene går fra situasjon til graf (Janvier, 1978, s 10.2 oversatt av oss)

For hver graf de arbeidet med, hadde de flere forsøk, og hvert forsøk ga en graf til situasjon-erfaring, men også en slags fysisk situasjon til graf-erfaring, idet de så grafen bli til på datamaskinen mens de gikk. Elevene starter med å prøve å omsette en graf til en situasjon. Idet de går denne grafen, utspiller det seg en ny graf på skjermen. Likheter og ulikheter fra den nye grafen opp mot den originale (i oppgaven) påvirker elevenes videre forsøk. Slik beveger elevene seg fra graf til situasjon, så fra situasjon til graf, før ny runde fra graf til situasjon.

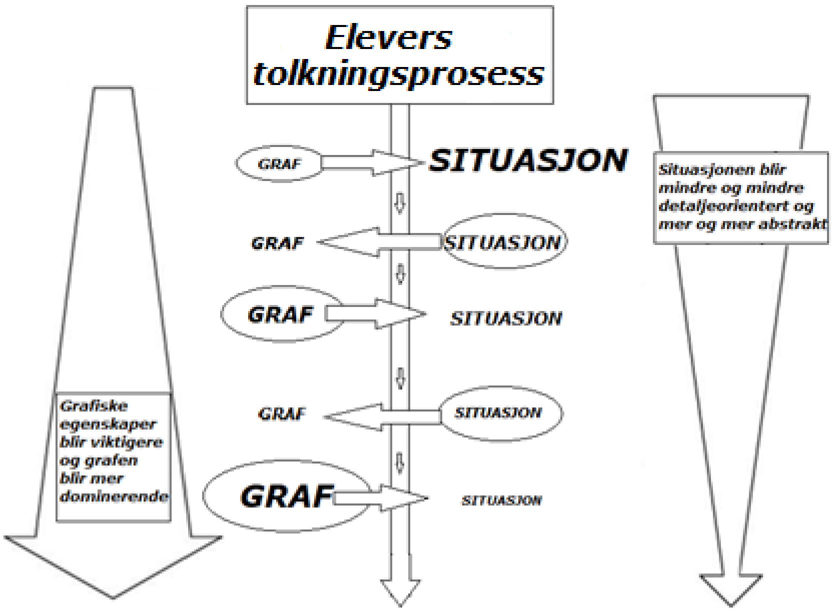


Figur 29: Gjennom flere forsøk går elevene fra graf til situasjon og fra situasjon til graf. Etter hvert forsøk sammenlignes grafen elevene har fått på datamaskina med den opprinnelige i oppgaven.

Elevene går fra den opprinnelige tegnede grafen til den fysiske situasjonen i utprøvingen, og deretter sammenligner de den grafen som de får opp på datamaskinen med den opprinnelige. Dersom de ikke er fornøyd med resultatet sitt, prøver de en gang til. Og slik fortsetter de til de mener de har en graf på datamaskina som tilsvarer den opprinnelige tegnede.

Oppgave 7 og 8 var todelte oppgaver. I hver oppgave fikk elevene en historie som skulle tolkes til en graf. Erfaringene de hadde gjort seg tidligere i undervisningsøkten ble tatt i bruk, og sammen skulle gruppa bli enige om en graf de tegnet. Deretter skulle de gå denne grafen, slik som de hadde gjort i de første oppgavene.

Janvier (1978) mener at elevenes tolkningsprosess utvikler seg slik at jo større fokus man får på de grafiske egenskapene og selve grafen, jo mindre betydningsfulle blir detaljene i situasjonen og man klarer å gjøre den mer abstrakt.



Figur 30: Janvier (1978) visuelle fremstilling av elevers tolkningsprosess, s 10.4, oversatt av oss

Hos våre elever fant vi ut at de er tidlig i denne utviklingen. Elevenes fokus er på detaljer, som i dette eksemplet fra arbeid med oppgave gitt under intervjuet.

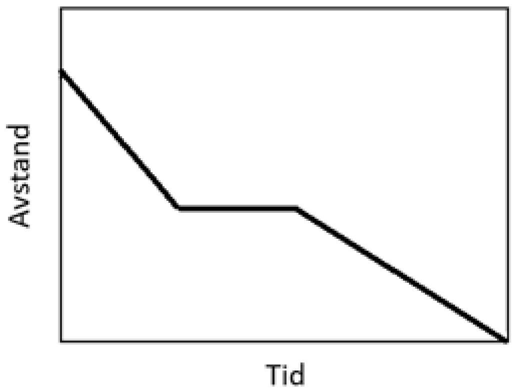
Elev 9	Hva glemte han? Vent, vent.
LB	Han glemte lommeboka si
Elev 9	Det tar litt tid. Det tar litt tid.

Selv om elevene på dette tidspunktet vet at det ikke er mulig å bråsnu grafen når de skal gå den med sensoren, er han likevel opptatt av at det må vises på grafen at denne personen er hjemme og henter lommeboka. Eleven forstår hvordan en graf lages, men viser her tegn til at graf-forståelsen ikke er godt nok utviklet ennå, da fokus på små detaljer ennå tar stor plass.

4.5 Ettertesten og samtale rundt disse.

Ettertesten ble gjennomført under intervjuet og ga oss en mulighet til å snakke med elevene om det de oppfattet de hadde endret forståelse for. Et av funnene våre knyttet til ettertesten er at elevene etter hvert begynte å se sammenhengen mellom x- og y-aksen, eller i vårt tilfelle tids- og avstandsaksen. Elevene uttrykte dette gjennom å bruke begrepene fra undervisningsøkten, som «hjem» og «hjem igjen».

I samtalen som følger diskuterer elevene denne grafen:



Figur 31: Ettertest oppgave 3

LB	Hvor er sluttpunktet på denne grafen her?
Elev 7	Hjem
LB	Ja, hjem. Eller null avstand.
Elev 7	Ja, og da vil det jo si hjem da, hvis man tenker…
LB	Ja, ofte så sier man hjem. Hvis ikke oppgaven er at man skal ro fra ei øy til ei annen og så tilbake igjen, for da vil det jo være den første øya som er "hjem"
Elev 8	Ja, så det er på en måte der man starter som er hjem.
LB	Ja, hvis klassen skal på skoletur da?
Elev 9	Da blir skolen "hjem"

Gjennom samtalen har de kommet frem til at det kan være lurt å se på hvilke punkter man har underveis, og læreren spør elevene om de kan si noe om hvor sluttpunktet på denne grafen må være.

Både elev 7, 8 og 9 bruker her begrepet «hjem». Etter at læreren snakker om en oppgave der noen skal ro fra ei øy til ei annen og så tilbake, så ville den første øya vært hjem, kommenterer elev 8 at det på en måte er der man starter som er hjem. Dette stemmer ikke overens med den grafen elevene egentlig snakker om, men det virker som hun mener at utgangspunktet for grafen, ikke nødvendigvis det faktiske startpunktet, er det man kan kalle hjem. Læreren åpner for flere forklaringer gjennom å spørre om hvordan det hadde blitt om dette omhandlet klassen som skulle på skoletur. Ganske spontant svarer elev 9 at da hadde skolen vært «hjem».

Gjennom samtalen etter ettertestene, fikk vi også avdekket at det fortsatt var flere elever som først ser grafen som et bilde. Oppgaven under handlet om å lage en historie til grafen i figur 31.

Elev 8 presenterer denne:

Elev 8	Tom løp ned fra toppen av bakken. Tok seg en pause, og gikk ned den siste delen.
LB	Det er nesten rett. Hva er det som mangler? Han gikk ned den siste delen før han kom…
Elev 8	Hjem
LB	Men det er en liten fare med historien din, fordi du virker som ser for deg at han går ned fra en topp, som ser omtrent slik ut.
Elev 8	Ja

Historien fungerer til grafen, men det er lett å misoppfatte om det er slik fjellet ser ut, eller om det er bevegelsen til Tom den handler om. Elev 8 har vist denne misoppfatningen tidligere, og innrømmer at hun har sett for seg det her også.

Elev 6 presenterer denne:

Elev 6	Tom løp fort ned fjellet, stoppet og så på klokka og jogget sakte hjem igjen.
LB	Ja, du har hjem igjen
Elev 6	Ja, jeg skrev ikke igjen, men hjem da.
LB	Du skrev hjem, men ikke hjem igjen? Det var bra, for hvis ikke ville det vært en annen historie.
Elev 9	Da måtte den gått opp her (peker på den første delen av grafen)
LB	Ja, da måtte han ha startet hjemme.

Denne eleven har gjennom undervisningsøkten og gjennom intervjuet så langt vist at det finnes en misoppfatning om å se grafen som bilde. Den har kommet og gått litt, og viser seg fortsatt å være vanskelig å knekke helt.

Her blir det også et spørsmål til om det er «hjem» eller «hjem igjen» og forskjellen på disse to begrepene. Elev 9 bryter inn og sier at da måtte grafen gått opp her. Altså måtte den første delen gått fra null avstand og opp, i stedet for å starte på maks avstand og gå nedover. Elev 9 viser nok en gang at han forstår sammenhengen mellom tid og avstand.

Han presenterer videre sin egen historie:

Elev 9	Jeg glemte å skrive hjem på slutten, men Tom sprang fra butikken, mistet varene og gikk rolig hjem. Eller gikk rolig da

LB	Ja, så skulle du ha hatt med hjem på slutten. Der har dere en annen historie som kanskje er bedre å bruke til å forklare denne grafen, enn at man ser for seg fjellet.

Elev 9 sin historie fungerer bedre enn de andre historiene, fordi den tar for seg selve bevegelsen til Tom, ikke hvor forflytningen finner sted. Alle elevene viser dog at de forstå at en bratt graf betyr at forflytningen skjer fortere enn om den er slakere.

Under intervjuet ble gruppe B utfordret til å lage en historie som ikke handlet om Tom, men om dem selv. Den skulle fortsatt passe til grafen i figur 31 som både hadde vært med på de skriftlige testene, og som de hadde gått under undervisningsøkten.

Elev 6	Skal vi lage en graf til den historia?
LB	Nei, lage historie til denne grafen.
Elev 8	Men skal vi starte eller slutte på skolen?
LB	Hvor er "hjem"?
Elev 7	Skolen
LB	Så skolen er sluttpunktet (på grafen) Hvor begynner vi da?
Elev 7	Et annet sted
LB	Rett og slett et annet sted. For eksempel?
Elev 6	På tur?
Elev 9	I skogen
Elev 7	Eller gymsalen da
LB	Gymsalen. Ok. Klassen var ferdig med gymtimen sin. Og skulle gå tilbake til skolen.
Elev 9	Sprang til skøytehallen
Elev 9	Mistet gymbaggen, plukket den opp og gikk videre
LB	Ja, der har dere en historie som fungerer veldig fint, men som ikke inneholder et fjell
Elev 8	Og gikk til skolen igjen.

Når elevene skal gå tilbake fra idrettshallen de har gym i, må de passere en skøytehall. Det var derfor naturlig for dem å bruke det som et holdepunkt på returen fra gymtimen. Her viser elevene at de forstår konseptet med denne grafen ved at de overfører det de har gått selv og de historiene de har laget på fortesten og ettertesten til noe hverdagslig som kunne ha skjedd hvem som helst av dem. Utviklingen av den matematiske kompetansen rundt graf-forståelsen er godt i gang.

4.6 Misoppfatninger

Hadjidemetriou og Williams (2002) har fem kategorier misoppfatninger som de opererer med når det gjelder funksjonsbegrepet. I vår undervisningsøkt er det hovedsakelig det å se grafen som et bilde som opptrer, og den kommer tilbake ganske hyppig. Gjennom testene vi brukte ved utvelgelse av elevgruppene var det også den vi fant ved flest tilfeller. At en slik misoppfatning er vanskelig å avlære kan man se gjennom dialogen under en av de siste oppgavene som elevene fikk:

Tom klatret opp bakken, gikk langs toppen og så løp han fort ned på den andre siden.

Elevgruppa skulle her tegne en passende graf til denne situasjonen og så gå grafen etterpå. Dialogen utspiller seg mens elevene diskuterer hvordan grafen skal se ut når *Tom løper fort ned på den andre siden*:

Elev 2	Også løp han fort ned på den andre siden
Elev 3	Men det blir vel rett opp
Elev 2	Løp fort ned!
Elev 3	Ja, for tida…
Elev 2	Men hvordan skal man komme seg ned igjen da?
Elev 2	Han løp ned bakken på andre sida
Elev 3	Avstanden blir jo liksom mere da
Elev 1	Ja
Elev 3	Det blir som når han sprang her (peker på forrige tegnede graf)
Elev 3	Hvis det går nedover, drar han tilbake

Her gjengir først Elev 2 siste del av oppgaveteksten. Elev 3 som også hadde feil på testen når det gjaldt denne oppgaven, har fått korrigert denne misoppfatningen gjennom erfaringene hun har gjort med de tidligere oppgaven, og ser at avstanden øker fra utgangspunktet når Tom springer ned på andre siden, mens Elev 2 fokuserer på «ned» og ønsker at grafen skal synke igjen, og ønsker at grafen skal se ut som et fjell.

For å finne ut hvordan Elev 2 tenker og for å korrigere denne misoppfatningen griper læreren inn i diskusjonen:

LA	Hvorfor ville du at han skulle gå nedover der?
Elev 2	Ja, for hvis han klatrer opp ikke sant, også går han langs toppen, også springer han ned på andre siden
LA	Kommer han til samme plassen som han startet på da?
Elev 3	Nei, og det gjør han hvis grafen går ned
Elev 4	Ja, men han springer jo ned på andre siden
Elev 3	Hvis vi tegner den sånn da, så kommer han tilbake
Elev 2	Er ikke det han skal da
Elev 3	Han springer ned på andre siden
Elev 2	Å ja

Under denne dialogen ser vi også at Elev 4 vender tilbake til den samme misoppfatningen, og gir sin støtte til Elev 2. Elev 3 føler seg faglig trygg og fortsetter å argumentere for sitt syn, og ved ledende spørsmål fra LA, godtar Elev 2 og Elev 4 hennes argumentasjon.

Misoppfatningen med blandingen av x- og y-koordinatene opplevde vi bare på fortesten, da dette ikke var et tema i undervisningsøkten. Den siste misoppfatningen vi hadde funn av var forvirring mellom stigning og høyde. Elev 2 ønsket i oppgave 8 at grafen skulle gå «basically rett opp», når Tom skulle klatre til toppen av bakken. Dette er også en sammenblanding med grafen som et bilde, da eleven ser for seg toppen av bakken, som grafens høyeste punkt, og stigningen opp dit må dermed være størst.

4.7 Oppsummering

Gjennom undervisningsøkten så vi at elevenes prosedyreflyt økte. Hos flere av eleven kunne man også se at de begynte å bygge konseptuell forståelse, og at jo større dette nettverket ble, jo lettere var det for dem å velge en god strategi for å løse oppgavene underveis. Elevenes engasjement var upåklagelig, og de poengterte også selv at det var gøy å gjøre noe fysisk. De støttet hverandre og fant løsninger sammen. Etter hvert som de utviklet forståelsen for hvordan bevegelsessensoren fungerte, og hvordan ulike bevegelser ga utslag i dataloggeren, utviklet også resonnementene seg, og de forklarte tankene sine for hverandre i mer og mer detaljer. Særlig kom dette tydelig frem da de skulle gjøre om en skrevet historie til en tegnet graf før de skulle gå den. Grunnlaget som hadde blitt lagt under de første 6 oppgavene; de ulike prosedyrene de hadde jobbet med, ble til gode strategiske valg, forståelse på tvers av ulike prosedyrene og forklaringer til hverandre som gjorde at hele gruppa var med på løsningsforslagene.

Gjennom intervjuet i etterkant ble det enda tydeligere at dette var en undervisningsøkt elevene likte. Flere av dem kommenterte at dette burde flere elever fått være med på, og de kom også med forslag til hvordan dette kunne gjennomføres i full klasse; et tegn på at de så det som meningsfylt.

Vi så tre typer misoppfatninger underveis i forskningen vår. Under fortesten så vi at flere av elevene blandet x- og y-koordinaten når de skulle tegne inn punkter i et koordinatsystem, eller skulle skrive koordinatene til et punkt allerede plassert i koordinatsystemet. Denne har vi ikke drøftet noe videre, da plassering av punkter i koordinatsystem ikke var en del av selve undervisningsøkten.

De to andre misoppfatningene vi fant, kan det være vanskelig å skille. Den ene omhandler en forvirring mellom grafstigning og høyde, den andre det å oppfatte grafen som et bilde. På den første grafen begynte noen av elevene å hoppe. De mente de måtte opp fra bakken for å få til riktig graf. Om elevene her viser en forvirring mellom grafstigning og høyde, eller om de også her ser på grafen som et bilde på for eksempel ei trapp, er vanskelig å vite med sikkerhet. Det som derimot var ganske tydelig var at flere elever så på flere av grafene som et bilde av et fjell. De knyttet negativt stigningstall til at man gikk ned fra noe, og positivt stigningstall som at man gikk opp noe, og selv om denne misoppfatningen ble oppklart flere ganger underveis, var det elever som hadde «tilbakefall» både underveis i undervisningsøkten og under gruppeintervjuet. Det var likevel lettere og lettere å få dem tilbake på rett spor igjen, da man kunne bruke erfaringene de selv hadde gjort under undervisningsøkten som begrunnelse.

5 Diskusjon

I dette kapittelet vil vi ta for oss underspørsmålene til problemstillingen og diskutere hele undervisningseksperimentet opp mot tidligere presentert teori. Vi vil først ta for oss designet på undervisningsopplegget sett i lys av Ball et al. (2008) sine seks hovedelement for undervisningskunnskap. Videre vil vi diskutere funnene fra selve undervisningsøkten og hvordan de fem trådene fra trådmodellen (Kilpatrick et al., 2001) kom til syne i elevenes utprøving. Deretter vil vi drøfte de misoppfatningene vi fant hos elevene (Sierpinska, 1992; Hadjidemetriou & Williams, 2002), hvordan disse gjorde seg gjeldende, og endringer vi opplevde hos elevene underveis i undervisningsopplegget, før vi til slutt vil si noe om datateknologibruk i et slikt undervisningseksperiment.

5.1 Hva bør man legge vekt på når man skal designe et undervisningsopplegg som tilnærmer seg et emne praktisk?

5.1.1 Fagkunnskap

5.1.1.1 Allmenn fagkunnskap

I selve undervisningseksperiment tok vi utgangspunkt i fiktive historier om figuren Tom. Oppgavene var basert på hverdagslige historier som elevene kunne kjenne seg igjen i, og som de kan dra nytte av gjennom å overføre til lignende situasjoner senere. Under intervjuet ble f.eks. den ene gruppa utfordret til å ta for seg en av grafene fra ettertesten og lage en passende situasjon fra sitt eget liv. De laget da historien om å gå fra gymmen og tilbake til skolen. Janvier (1978) beskriver elever som skal bli gode på å tolke grafer, må kunne løsrive seg fra situasjonen. Gjennom at våre elever forstår at én graf faktisk kan beskrive flere ulike situasjoner, viser de en begynnende forståelse for dette også utenfor skolen og matematikkfaget.

Ifølge Ball et al. (2008) er allmenn fagkunnskap den kunnskapen alle som jobber med matematikk har, men som ikke er spesiell for lærere. De fleste av våre 8.trinnselever vet ikke hva de skal jobbe med når de blir store, men de kommer til å møte funksjoner i en eller annen form uansett yrkesvalg, og dessuten generelt i hverdagen. Et eksempel på dette fikk vi da korona-pandemien kom i vår, og elevene ble sendt hjem for å få undervisning online. Da fikk vi bruk for denne forståelsen «utenfor klasserommet». For å forklare elevene hvorfor de som styrer landet hadde bestemt å stenge, brukte vi ulike grafer og animasjoner for å forklare ulike retninger pandemien kunne ta. Sierpinska (1992) beskriver funksjonsbegrepet som å se mønster mellom ulike variabler, og mener det er nødvendig for å forstå ulike sammenhenger. Funksjonsbegrepet kan bli sett på som et resultat av menneskets ønske om å sette disse forandringene i system. Både for å se hvorfor endringer har oppstått, men også for å kunne forutsi fremtidige endringer. Gjennom at mange av elevene oppfattet sammenhengen mellom de ulike scenariene og tilfallende grafer for smitteutvikling, fikk de også en forståelse for hvorfor Norge stengte ned i noen uker, og vi måtte drive skole hjemmefra.

5.1.1.2 Spesialisert fagkunnskap

Ball et al. (2008) beskriver spesialisert fagkunnskap som kunnskap matematikklærere bør ha, men som ikke er like interessant for andre yrkesgrupper. I undervisningseksperimentet ønsket vi å ta utgangspunkt i noe vi visste elevene synes er vanskelig, og ut fra vår spesialiserte fagkunnskap falt valget på funksjoner. Både KIM-prosjektet på 90-tallet og TIMSS-undersøkelser i 2007 og 2015 avdekket misoppfatninger elever i norsk skole har i dette temaet, og dette sammenfaller med kjente misoppfatninger Hadjidemetriou og Williams (2002) har funnet i sin forskning. For oss var det derfor interessant å se om vi fant noen av de samme misoppfatningene blant våre informanter, og om vi kunne skape et undervisningsopplegg som kan bidra til en endring av disse.

Sierpinska (1992) sier at elever har problemer med å mestre sammenhengen mellom forskjellige representasjoner av funksjoner, og at man finner epistemologiske hindringer i bruk av formler, grafer, tabeller, situasjonsbeskrivelser eller sammenhenger, i å tolke grafer og å manipulere symboler relatert til funksjoner. I dette eksperimentet fikk elevene direkte og umiddelbar tilbakemelding på forsøkene sine. Vi kunne se at elevenes strategi for å løse oppgavene ble bedre og bedre, og at der de manglet en måte å kommunisere matematisk på, utviklet de sine egne måter med hverdagsspråk de hadde en felles forståelse av for å forklare hvordan de tenkte. Elevene poengterte også selv at de syntes det var vanskelig i starten, men at det ble lettere etter hvert, noe som tyder på at de følte mestring. Mestring fører til engasjement, som er motoren i all utforskning.

Å jobbe med alle overgangene man finner i Janviertabellen (Janvier, 1978) hadde blitt for mye for et undervisningsopplegg som skulle gjennomføres på 1 time. Vi ønsket å designe et undervisningsopplegg vi, og andre rundt oss, kunne bruke senere, og ville ta «problemet ved roten». Clement (2001) viser at elever opplever det som enklere å jobbe med overgangene mellom tabell, graf og formel, enn med overganger som er knyttet opp mot situasjon. Siden vi ønsket å jobbe praktisk med dataloggere, valgte vi å ta for oss sammenhengene *graf til situasjon* og *situasjon til graf*.

For å ikke bite over for mye, spisset vi det også til å bare omhandle avstand og tid. Vi fikk spørsmål fra elevene underveis om det alltid var avstand og tid, som ga en fin samtale om andre sammenhenger man kunne ha. Vi tror likevel at det å skulle trekke inn flere sammenhenger (for eksempel fart/tid, pris/antall osv.) akkurat i denne økten kunne ført til forvirring. Vi ønsket å gjøre elevene så trygge på én slik sammenheng, i håp om at det senere kunne føre dette konseptet over til andre sammenhenger.

Elevene var ikke klar over at dette var antatt som et «vanskelig tema», og vårt inntrykk av gjennomføringen var at de heller ikke syntes det var så vanskelig etter hvert som de utforsket i de ulike oppgavene.

5.1.1.3 Matematisk horisontkunnskap

Ifølge Piaget knytter elever nye erfaringer opp mot gammel kunnskap, og bygger på den måten videre på skjema de allerede har. Skulle derimot ny kunnskap ikke passe inn i det gamle skjemaet, må det bygges om (Imsen, 2014). I jobben som lærer må man derfor alltid ha en tanke om hvor elevene kommer fra og hvor de er på vei, slik at matematikken kan gi mening for dem. Horisontkunnskap handler om å se sammenhengen mellom kompetansemål på ulike trinn knyttet til samme tema, men også om å se sammenhengen mellom ulike tema som knyttes sammen. (Ball et al., 2008)

Som bakoverblikk i denne forskningsoppgaven valgte vi å gi alle de aktuelle elevene en fortest. Fortesten ble laget med inspirasjon fra oppgaver fra ulike diagnostiske prøver og oppgaver (Brekke, 2002; MARS, 2015; Utdanningsdirektoratet, 2019b). Første del tok for seg kompetanse knyttet til koordinatsystem og avlesing av graf, mens den andre delen besto av oppgaver knyttet opp mot overgangen mellom representasjonene situasjon og graf, og visa versa. Den siste delen besto av oppgaver elevene i utgangspunktet ikke skulle ha forutsetning for å løse ennå. Målet var å få en oversikt over elevenes kompetanse, slik at vi kunne være bedre rustet til å designe en undervisningsøkt som ga mening for elevene.

Dersom vi bare skulle ha brukt fortesten i tilknytning til vår undervisningsøkt, og ikke som et ledd i et større undervisningsløp i temaet, hadde det ikke vært nødvendig å ta med oppgavene om koordinater og koordinatsystem i fortesten. Dette fordi denne forkunnskapen ikke var direkte knyttet opp mot det å gå grafer. Vi valgte derfor å kutte disse i ettertesten som vi gjennomførte under intervjuet. Imidlertid var det nyttig for oss som lærere når vi skulle jobbe videre med temaet funksjoner å vite hvilke elever som hadde grafiske misoppfatninger og en blanding av x- og y-koordinatene (Hadjidemetriou & Williams, 2002), eller hvilke elever som hadde andre manglende kunnskaper knyttet til koordinatsystem som f.eks. negative tall. Denne typen oppgaver vil derfor være til stor hjelp om man skal planlegge et lengre og helhetlig undervisningsopplegg i emnet funksjoner.

For at denne økten ikke bare skulle bli en engangsforeteelse for elevene som deltok, men heller et ledd i et læringsløp om funksjoner, måtte vi også tenke på hvordan dette kunne føre til at elevene ble bedre rustet til å jobbe videre med temaet både på 8.trinn, og på 9. og 10. trinn.

Gjennom at elevene fikk arbeide med å utvikle alle de fem trådene i trådmodellen, så vi at de utviklet sin matematiske kompetanse underveis. Slik dybdelæring vil kunne hjelpe elevene både i møte med funksjoner i videregående skole og høyere utdanning, og ikke minst i møte med fremstillinger i hverdagen som voksne (Kilpatrick et al.,2001; Nosrati & Wæge, 2015; Kunnskapsdepartementet, 2017).

Som lærerspesialister har vi et ansvar til å bidra til utvikling av matematikkfaget i vår kommune, og som en del av horisontkunnskapen kan man også tenke seg omhandler endring av undervisningsmetoder i kollegiet. Gjennom å ha fått kollegiet med på å teste ut undervisningsopplegget i ettertid, og ved å jobbe med de store linjene i faget, bidrar vi til en undervisning som kan gi elevene dybdelæring og mer utviklet matematisk kompetanse.

5.1.2 Fagdidaktisk kunnskap

5.1.2.1 Kunnskap om faglig innhold og elever

Elevene kommer til skolen med forskjellig forståelse og tolkninger basert på tidligere erfaringer. Gjennom samarbeid og diskusjoner vil elevene få utfordret sine tolkninger, utvikle en bredere og dypere forståelse hver for seg, og læreren vil kunne tilstrebe en «felles forståelse». Vi ønsket at elevene skulle være i den proksimale utviklingssonen (Vygotsky, 1978). Siden vi hadde mulighet til å være en lærer pr. gruppe, kunne vi være den medierende hjelperen dersom gruppa sto fast. Vi valgte derfor å sette elevene sammen i grupper som hadde omtrent samme nivå. I et klasserom med en til to lærere med mange grupper, vil ikke dette være like enkelt, og gruppeinndelingene burde kanskje vært mindre homogene i den situasjonen, slik at elevene driver prosessene videre mer på egenhånd.

I vårt undervisningsopplegg tok vi i bruk kroppen som et verktøy og tidligere forskning tilsier at dette gir elevene enda et forståelsesaspekt gjennom den kroppslige hukommelsen (Nemirovsky & Borba, 2003). Elevene som deltok i vårt undervisningseksperiment hadde allerede en felles forståelse om hva det betyr å gå, å løpe, å stå stille og å endre retning som fysisk aktivitet. Funksjonsbegrepet var helt ukjent for dem og de hadde dermed ikke noe felles språk som vil dekke de matematiske utfordringene de møtte. Elevene brukte sin felles forståelse om fysisk bevegelse til å beskrive handlinger gjennom undervisningsøkten.. Vi hadde bevisst valgt å ikke bruke tid på matematiske begrep under eksperimentet, fordi vi ville at elevene skulle utforske og forstå utfra den kunnskapen de allerede hadde. De matematiske begrepene, som f.eks. stigningstall og ekstremalverdier, ble derfor lansert først i det videre arbeidet med temaet. Gjennom å knytte de matematiske begrepene opp mot sin felles forståelse om fysisk bevegelse i arbeidet med å gå grafer, fikk elevene som hadde deltatt i eksperimentet en dypere forståelse som de kunne bruke i det videre arbeidet med temaet.

5.1.2.2 Kunnskap om faglig innhold og undervisning

Vi ønsket å gjennomføre en praktisk økt som tok tak i noen av funnene våre fra fortesten og målet var å utvide og utvikle elevenes matematiske kompetanse gjennom å flette prosedyreflyt, konseptuelle forståelse og strategiske kompetanse gjennom resonnering og engasjement (Kilpatrick et al., 2001).

Den praktiske tilnærmingen til undervisningsprosessen bygger på John Deweys «Learn to know by doing, and to do by knowing», eller «Learning by doing», som det som oftest blir referert til (Vanderstraeten, 2002). Prinsippet går ut på at elevene utfører en handling og høster erfaringer fra den. Handlingen og resultatet av denne gir dermed læring. Læringsaktiviteten vår var en elevsentrert og deltakerstyrt problemløsningsmetode. Vi opplevde at elevenes engasjement var til stede fra første stund. Elevene påpekte selv at det å jobbe på en annerledes måte, å måtte samarbeide, ikke jobbe i egen bok eller ved egen pult, var spennende, og dermed lystbetont. En elev påpekte at dersom alle timer hadde hatt slike oppgaver, hadde dette blitt det vanlige, og bekreftet med dette at det er viktig at vi som lærere skaper variasjon i undervisningen.

Ingen av elevene kunne noe om det å bruke sensor fra før av, så her stilte alle elevene likt. Elevene utvekslet erfaringer og informasjon med hverandre underveis, og stilte medelevene spørsmål løpende, uten å være bundet av klasserommets regler. De to gruppene hadde dessuten fri tilgang til å stille spørsmål til læreren.

Den første graf-oppgaven elevene fikk var den mest komplekse og utfordrende. Det var bevisst av oss å begynne med en kompleks oppgave, da denne ga større åpning for utforskning av hele konseptet. Gjennom en så kompleks oppgave fikk elevene mulighet til å utvikle flere redskaper de trengte for å løse oppgavene som kom etterpå. Det er mulig elevene ville fått den samme forståelsen om de stegvis fikk forståelse av hva som skjedde om de gikk vekk fra sensoren, sto stille foran sensoren, gikk mot sensoren eller snudde underveis. Vi tror at gjennom å måtte utforske mange ulike prosedyrer samtidig, forkaste eller velge ut hvilke bevegelser som ga de forskjellige delene av grafen, for deretter å få bekreftet sine antakelser i progresjonen som fulgte i oppgavene, fikk elevene en dypere forståelse for sammenhengen mellom avstand og tid i grafgåinga.

5.1.2.3 Generell læreplankunnskap

Det faglige innholdet bestemmes i stor grad av kompetansemålene i læreplanene. I de nye læreplanene (Utdanningsdirektoratet, 2020) blir funksjonsbegrepet introdusert på 8.trinn. Det var derfor naturlig for oss å bruke elever fra det trinnet som informanter. Fagfornyelsen gir også klare føringer for hvilke arbeidsmåter som bør tilstrebes gjennom kjerneelementene og sier at man skal forberede elevene på et samfunnsliv og arbeidsliv i utvikling ved å gi de kompetanse blant annet i utforskning og problemløsing. Gjennom å bruke kjent kunnskap skal elevene se etter system, mønster og underliggende prinsipper. Elevenes felles forståelse for fysisk bevegelse gjorde at de kunne bruke kjent kunnskap for videre å vurdere nye ideer, drøfte tanker med hverandre og reflektere over egen forståelse og læringsprosess. Dermed skaptes en dybdelæring hvor elevene gradvis utviklet sin matematiske kompetanse. (Kilpatrick, 2001; Nosrati & Wæge, 2018)

Gjennom utformingen av dette undervisningseksperimentet har vi tatt høyde for alle seks hovedelementene til Ball et al. (2008), selv om noen ble mer fremtredende enn andre slik som spesialisert fagkunnskap, og kunnskap om elever og undervisning.

5.2 Hvordan kommer de fem trådene i trådmodellen frem i elevenes utprøving?

Tradisjonelt har skolen i Norge hatt en undervisning med vekt på å lære seg ulike algoritmer (Alstad et al., 2003; Nosrati & Wæge, 2015). Ifølge fagfornyelsen skal man tilstrebe dybdelæring. Gjennom utforskende undervisning, hvor elevene møter åpne problemløsningsoppgaver, kan de med argumentasjon og resonnement finne løsninger sammen. I vår undervisningsøkt opplevde vi at elevene var innom alle de fem trådene i trådmodellen (Killpatrick et al., 2001).

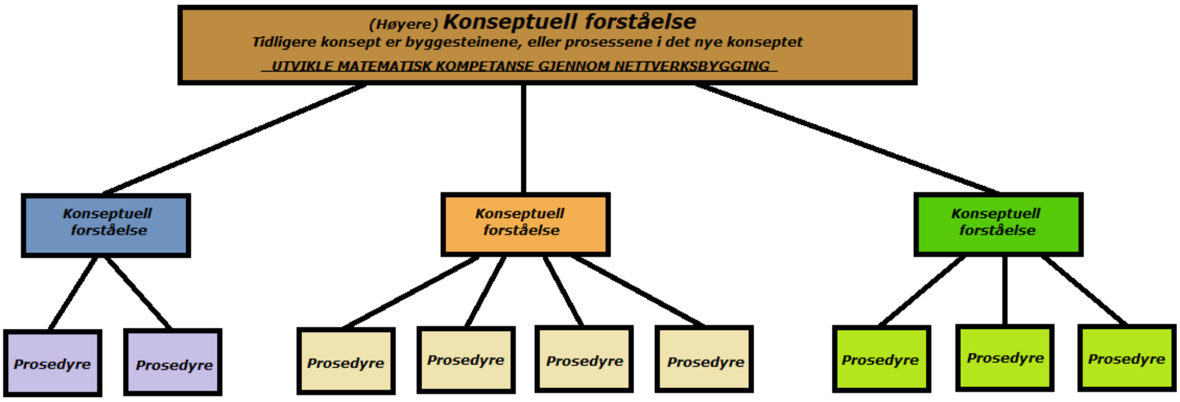
5.2.1 Konseptuell forståelse

Kilpatrick et al. (2001) forklarer konseptuell forståelse som det nettverket elever skaffer seg når de knytter ulike prosedyrer sammen og dermed kan velge den som er mest hensiktsmessig. Det er en flytende overgang mellom prosedyreflyt og konseptuell forståelse.

Mens elevene er på vei mot en konseptuell forståelse for hele funksjonsbegrepet kan man se for seg at det er mindre konsepter som må forståes underveis. Et av disse konseptene var stigningstall. Vi brukte ikke ordet stigningstall en eneste gang underveis i gjennomføringen, men likevel kan vi si at elevene fikk en forståelse av hva det var. De brukte hverdagslige ord som brattere, nedover, oppover, vannrett og skrå for å beskrive stigningen, og gjorde også utregninger som at det er 3 meter på 1 sekund. Vi kan si at de har en begynnende forståelse på konseptet stigningstall, og har funnet ulike prosedyrer på hvordan de skal komme frem til hvordan de fysisk skal løses det.

Et annet konsept omhandler å forstå hvordan sensoren fungerer og å knytte ulike fysiske bevegelser til grafene de fikk se bilde av. For gruppe A tok det lengre tid enn for gruppe B å se en slik sammenheng, men begge gruppene oppdaget en sammenheng mellom tid og avstand, og viste det gjennom å endre hastighet, retning og avstand til sensoren.

Gjennom vårt undervisningsopplegg kunne vi se at elevene gjennom utprøving lærte seg ulike prosedyrer for å løse oppgavene, og etter hvert kunne de knytte flere og flere av disse sammen og bruke dem kombinert i oppgavene som kom etterpå. Elevene brukte f.eks. mye tid på utprøving i den første oppgaven, men da de hadde løst den, hadde de allerede en viss forståelse av hvordan sensoren fungerte, hvordan det ble til en graf på datamaskina, og hvilken innvirkning fart og avstand hadde.



Figur 32: Utvikle matematisk kompetanse gjennom nettverksbygging

Nettverksbygging starter med at man lærer seg noen grunnleggende prosedyrer. Når disse kobles sammen og gir mening i forhold til hverandre, bygges konseptet. Når disse konseptene så knyttes sammen og gir mening, bygges konsepter på høyere plan. De «gamle» konseptene kan da oppleves som prosedyrer i den nye konseptbyggingen. På denne måten bygges et nettverk av konsept på ulike nivå, og jo større nettverk, jo større grunnlag å plukke smarte strategier for å løse oppgaver på. Elevene opplever å få en dypere forståelse (NOU, 2015: 8; Nosrati & Wæge, 2018).

I intervjuet viste elevene en forståelse for sammenhengen mellom avstand og tid. De forklarte hvordan de brukte streker på grafen og slipperser på bakken for å beregne så nøyaktig som mulig. Tydeligst kom den konseptuelle forståelsen frem under samtalen om arbeidet med oppgave 4 (Vedlegg nr. 4), når elevene benyttet seg av den konseptuelle forståelsen de hadde opparbeidet gjennom å løse oppgavene, og overførte grafen til noe hverdagslig. Elevene valgte å knytte det til en tur fra skolens gymsal tilbake til skolen. Gjennom å forstå konseptet av hvordan grafen endrer seg utfra hvor fort personen beveger seg og i hvilken retning, forklarte elevene at grafen ikke hadde noe med faktisk tid og faktisk avstand å gjøre, men disse to i relasjon til hverandre.

5.2.2 Prosedyreflyt

Kilpatrick et al. (2001) beskriver prosedyreflyt med at elevene skal lære seg hensiktsmessige måter for hver enkelt oppgave. Gjennom å gjøre mange liknende oppgaver etter hverandre, kan elevene skaffe seg prosedyreflyt, noe de er avhengige av dersom de skal bygge funksjonelle og begrepsmessige strukturer av matematikken. Ved å knytte slike nettverk, bygger elevene en konseptuell forståelse.

Å jobbe utforskende med sensor var ukjent for elevene, og det var derfor viktig å få satt i gang et begrepsapparat og en forståelse for «hva» de skulle gjøre og «hvordan» det fungerte i første omgang. Under den første oppgaven ble det derfor mye utprøving for å forstå sensoren og hvordan den reagerte på ulike bevegelser de gjorde. Oppgaven i seg selv krevde flere av de bevegelsene som senere ville komme enkeltvis, men ved å bruke en såpass komplisert førsteoppgave måtte elevene diskutere, utforske og finne måter de kunne beregne hvordan de skulle gjennomføre. Dette er i tråd med kjerneelementene i Kunnskapsløftet 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Siden prosedyreflyt henger så tett opp mot konseptuell forståelse, så vi også at elevene fikk noen aha-opplevelser underveis som førte til at de for eksempel forsto sammenhengen mellom avstand og tid. En av elevene tegnet horisontale og vertikale streker på grafen, og forklarte for de andre på gruppa si at han slik kunne beregne akkurat hvor langt man måtte gå, og samtidig hvor lang tid man hadde brukt. På en senere oppgave kunne man se at flere hadde adoptert måten å tenke på, og at de hadde skapt en felles forståelse for hvordan de fant ut nøyaktig hvordan de skulle beregne. Elevene hadde lært av hverandre, og opplevde at summen av deres kunnskaper var høyere enn deres individuelle kunnskap (Vygotsky, 1978)

En elev på den andre gruppa, hadde behov for fysiske mål knyttet opp mot hvor grafen skulle endre hastighet eller retning. Gruppa ble enige om å bruke sandaler som hjelpemiddel. Sandalene var fleksible i den grad at de var lett flyttbare, og de var dessuten godt synlige, slik at det ble lett å vite hvor man skulle endre hastighet/retning. Sandalene ble et praktisk eksempel på en matematisk prosedyre, som elevene hadde en felles, eller i alle fall lignende forståelse av, og den ble derfor brukt i flere sammenhenger gjennom utprøvinga.

5.2.3 Strategisk kompetanse

Gjennom utprøving i den første oppgaven skaffet elevene seg en referanseramme som de kunne bruke i de kommende oppgavene. Strategisk forståelse er knyttet opp mot problemløsingsoppgaver og krever at eleven selv bidrar med tanker om hva man holder på med og hvordan de bruker det de lærer underveis til å jobbe videre med oppgavene. For å kunne skaffe seg en god strategisk kompetanse er man avhengig av å kunne koble sammen ulike prosedyrer og ulike konsept.

Da elevene skulle jobbe med oppgaven som så ut som en slags W, kunne vi se at de koblet ulike tidligere metoder sammen. For eksempel begynte de å se på at de ulike rette strekene hadde ulik stigning. Elevene hadde ennå ikke utviklet noe matematisk språk for stigningstall, men brukte forklaringer som «Den er ikke like rett», «Den er litt slakere» eller «Den er mer skrå». Nøyaktigheten i språket er ikke der ennå, men fordi de har skaffet seg en felles forståelse av hva dette går ut på gjennom de fem foregående oppgavene, kunne de lete i en fellesbank av prosedyrer. Kilpatrick et al. (2001) sier at dersom elever skal bli dyktige problemløsere må de både oppdage ulike prosedyrer, sammenhengen mellom disse, og lære seg å utforme nye løsningsmetoder ved hjelp av disse. Gjennom å koble erfaringer fra de fem foregående oppgavene sammen, fant de den beste strategien for å kunne løse denne oppgaven. De kunne knytte denne oppgaven opp mot prosedyrer de hadde testet ut og funnet riktige i tidligere oppgaver, og slik velge en hensiktsmessig strategi.

Det å skaffe seg et felles språk viste seg å være en viktig strategi for elevene. Argumentasjon var ikke nødvendigvis knyttet opp mot et matematisk språk, men likevel gyldig da de hadde fått en felles referanseramme gjennom å være en del av undervisningseksperimentet. «Hjem» og «hjem igjen» ble brukt gjentatte ganger. For elevene ble dette et begrep om hvor nært sensoren de var, og de brukte «hjem» om sluttpunktet i situasjoner der starten var et annet sted (for eksempel oppgave 4), og «hjem igjen» om sluttpunktet når start- og sluttpunkt var på samme sted nært sensoren.

Elevene uttalte selv at de syntes det var vanskelig i begynnelsen, men at de «fant en teknikk» og etter det var det lett. Etter hvert som de hadde en større prosedyreflyt, og en begynnende konseptuell forståelse for f.eks. stigningstall, føler elevene seg tryggere på å velge riktig strategi etter hvert som de får jobbet med nye oppgaver. Kilpatrick et al. (2001) sier at konseptuell forståelse, prosedyreflyt og strategisk kompetanse henger tett sammen. Det kan derfor være vanskelig å skille mellom disse trådene. Alle tre foregår på det mentale planet, og de flyter litt over i hverandre. Det å plutselig forstå én prosedyre kan være nøkkelen som gjør at man forstår et helt konsept, som igjen gjør det lettere å velge riktig strategi for videre arbeid. Dette opplevde også vi i denne undervisningsøkten, da noen elever utviklet konseptuell forståelse før andre, og dermed resonnerte på andre måter enn de som fortsatt jobbet med å få oversikt over ulike prosedyrer. Dette ville kanskje kommet enda tydeligere frem dersom det hadde vært en mindre homogen gruppe elever.

5.2.4 Resonnering

Under resonneringsfasen i hver oppgave kom det tydeligere frem at elevene hadde ulike forkunnskaper. Gruppa med svakest resultat på fortesten (Gruppe A) brukte mye tid på å resonnere rundt hvordan sensoren fungerte. De testet ut mange ulike hypoteser som å løpe, hoppe, starte nært, starte langt unna, og utviklingen underveis i undervisningsøkten gikk i stor grad ut på å endre på og koble de ulike prosedyrene de fant logiske underveis, slik at den kunne passe til den neste oppgaven de skulle jobbe med. Etter å ha prøvd ut en hypotese argumenterte de for om den fungerte eller ikke, og forkastet de løsninger som ikke fungerte. Hos denne gruppen var det et større behov for at læreren stilte veiledende spørsmål som «Hva er det som mangler på deres graf?» for å lede dem videre til neste hypotese de ville teste ut.

Gruppen med sterkest resultat på fortesten (Gruppe B) fikk kjapt et overblikk over hvordan sensoren virket, og skjønte også kjapt at avstand og tid hadde med hverandre å gjøre. De hadde derfor en del prosedyrer inne tidlig i undervisningsøkten, og mange av resonnementene deres havnet derfor på et høyere plan. Elevene oppfattet fakta ulikt, og de hadde også tilegnet seg prosedyreflyt på ulike nivå. Å kunne diskutere og utveksle tanker og løsningsstrategier, gir elevene mulighet til å se andres vinkling på oppgaven. Det å kunne resonnere blir derfor limet i matematikken, og er et av kjerneelementene i matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2020). Mot slutten av økta resonnerte flere av elevene på et konseptuelt nivå og kunne forklare at graf kunne passe til flere ulike situasjoner.

Det var noen forskjeller innad i gruppa også. Dette resulterte i at elevene med størst matematisk kompetanse på hver gruppe ble utfordret til å argumentere, beskrive og resonnere høyt for at de andre skulle forstå hvordan de tenkte. Et eksempel på dette var da elever i gruppe B tegnet streker på grafen og brukte dem til å forklare de andre på gruppa at det er sammenheng mellom hvor lang tid som har gått og hvor stor avstand man har fra sensoren.

Resonnering ble i stor grad brukt for å argumentere for hvorfor en løsning fungerte eller ikke. I oppgave 9 (vedlegg nr. 4) fikk elevene utdelt en graf som ikke var mulig å gjennomføre med vår sensor og dataprogram, så her måtte de resonnere på en litt annen måte. De måtte argumentere for at det ikke var mulig. Ulikhetene i konseptuell forståelse hos elevene var tydelige og viste et bredt spenn. Under er tre av forslagene:

- Det handler om en person som går et sted, så til et annet sted, og til slutt tilbake til utgangspunktet.
- Dette er mulig om man kunne spole tilbake.
- Dette er ikke mulig fordi selv om man går tilbake i tid måtte man gått en annen vei tilbake enn den man kom fra.

Gjennom å argumentere og forklare for hverandre hvordan de tenkte, kom elevene seg til slutt frem til at det ikke er mulig å få til denne grafen fordi tiden uansett går fremover. «Vi kan jo ikke gå tilbake i tid» forklarte en av elevene. Språket ble brukt som et medierende hjelpemiddel og gjennom samarbeid og dannelse av en felles forståelse, foregikk det læring (Vygotsky, 1978).

I følge Janviers tolkningsmodell (1978) vil elever bli mindre og mindre opptatt av detaljer jo større forståelse de får for hvordan en graf visualiserer en situasjon, og hva den faktisk beskriver. Under intervjuet fikk den ene gruppa i oppgave å lage en graf til en historie om en som måtte løpe hjem igjen for å hente lommeboka si. (Vedlegg nr. 7) Her ble «hente lommeboka» en viktig detalj for en elev, som mente at det tok litt tid. I den store sammenhengen ville dette antakelig ikke vært tydelig på grafen som noe annet enn at den på et tidspunkt hadde en avstand på 0, før den øker igjen. Elevens graf-forståelse var ikke helt på plass ennå, noe som ikke var å forvente etter en 70 minutters undervisningsøkt, men man kan likevel se at eleven har forstått både noen prosedyrer og noen konsept knyttet til temaet.

5.2.5 Engasjement

Elevene viste tydelig engasjement gjennom både undervisningsøkten og intervjuet. Elevene beskrev selv at denne undervisningsøkten var annerledes enn det de var vant til, og at det i seg selv gjorde det mer spennende og morsomt å være med på. De påpekte dog at dersom alle timer hadde vært slik som denne, så kan det være at vanlig oppgaveløsing hadde blitt spennende i stedet. De fikk dermed frem viktigheten av variasjon i matematikkundervisninga.

Nemirovsky & Borba (2003) omtaler det å bruke kroppen som verktøy, og elevene kommenterte det å *gjøre* noe fremfor å *høre* som positivt. Elevene mente at det er lettere å huske når de har «blitt med på hvordan grafen beveger seg, jo lengre unna man går» som en elev uttalte. De opplevde at de brukte kroppen som verktøy og at de *var* grafen mens de gikk foran sensoren. Gjennom undervisningsøkten hadde elevene et mål om å få til en «perfekt» løsning, og flere ganger hvor de har laget en ganske riktig graf, ville de likevel prøve en gang til for å perfeksjonere. En slik driv skapes når matematikken føles nyttig og meningsfull for elevene (Kilpatrick et.al, 2001). De hadde troen på at de skulle klare å løse oppgavene, og opplevde mestring når de gjorde det.

Siden de hele tiden byttet på å gå neste forsøk, ble de involvert i hverandres gjennomføringer. Det å jobbe i grupper ble poengtert som positivt, da de fikk en følelse av å jobbe mot et felles mål. Dette var med på å styrke engasjementet. Kommentarer som «Bra», «Ja, fortsett sånn» og lignende viste at de var støttende til hverandres forsøk. Da en elev f.eks. fikk spørsmål om hvorfor akkurat hun fikk til dette hver gang, svarte hun at det var fordi alle andre har prøvd før henne. Hun responderte dermed med at de hadde fått til dette sammen, og at hun løste det nettopp fordi de andre har testet ulike hypoteser før henne. Elevene opplevde altså dette som en felles prosess og hadde som mål at de *som gruppe* skal få det til, uten at det handler om hvem som faktisk gikk den løsningen de til slutt ble fornøyde med.

I intervjuet fikk vi bekreftet at elevene likte denne måten å jobbe på. Ikke bare syntes de det var morsomt å ha en slik undervisningsøkt, men de opplevde at de lærte mens de var i aktivitet og at det gjorde det enklere å forstå. Alle elevene i begge gruppene påpekte dette på en eller annen måte. I gruppe A kom de også med forslag på hvordan dette kunne gjennomføres i full klasse, og de tilbød seg å være med som hjelpere, noe som tyder på at de føler de har fått en kunnskap de kan ta med seg videre. I gruppe B var det en elev som hadde fått spørsmål fra en elev i gruppe A etter undervisningsøkten (men før intervjuet) om hun kunne forklare noe hun ikke hadde skjønt da de holdt på med det. Dette tyder på at engasjementet ikke bare gjaldt i selve økta, men at den faktisk gikk ut over skoletimen og kanskje matematikkfaget også.

5.3 Hvilke misoppfatninger ser vi hos elevene, og endres disse underveis i undervisningsøkten?

Hadjidemetriou og Williams (2002) operer med fem misoppfatninger når det gjelder funksjonsbegrepet. Vi opplevde at to av disse opptrådte blant våre informanter under undervisningsøkten; grafen som bilde og forvirring mellom grafstigning og høyde. Arzarello et al. (2007) pekte også særlig på disse to misoppfatninger som kom til syne med arbeid med grafer.

Allerede i den første oppgaven opplevde vi at enkelte elever så på grafen som et bilde. De så den som en trapp og skulle man da komme til neste trinn i trappa, var det for noen av elevene naturlig å tenke seg at de skulle hoppe for å komme til neste trappetrinn.

Vi møtte også på misoppfatninger i de oppgavene som ble gitt som situasjoner som skulle oversettes til grafer. Vi så at selv om elevene hadde gjort seg erfaringer med at positivt stigningstall utløste en bevegelse bort fra sensoren og negativt stigningstall en bevegelse mot sensoren, ble ordene «opp» og «ned» i situasjonsbeskrivelsen tolket som at grafen også skulle gå oppover eller nedover. Her kom resonnering og argumentering sterkt inn da andre elever i gruppen henviste til tidligere grafer som var gått og fikk overbevist medelevene om hvordan det måtte bli. Misoppfatninger er ofte dypt rotfestet og det kreves mange situasjoner hvor elevene opplever at deres tidligere erfaringer og oppfatninger ikke stemmer med virkeligheten, for at misoppfatningen snus til en «riktig» oppfatning (Brekke, 2002).

Konstruktivistisk læringsteori sier at hver elev vil danne seg oppfatninger ut fra tidligere erfaring og at man aldri kan være sikker på at elevene har dannet seg en lik oppfatning, selv om de i utgangspunktet har gjort akkurat den samme oppgaven eller utført samme bevegelsesmønster (Von Glasersfeld, 2013). I oppgave 8, fikk elevene en oppgave om Tom som klatret opp bakken, gikk langs toppen, og sprang ned på den andre siden. En elev hadde tidligere i økten gjort seg erfaringer med at når han beveget seg raskt, hadde grafen en bratt stigning. Likevel argumenterte han her for at grafen måtte stige raskt på begynnelsen, fordi han skulle opp på toppen av bakken, og tok ikke hensyn til at det å klatre er en bevegelse som tar lengre tid enn å gå eller å løpe. Dette er også en av misoppfatningene som beskrives av Hadjidemetriou og Williams, 2002, hvor man har en forvirring mellom grafstigning og høyde.

Elevene mistet tidvis sammenhengen mellom variablene avstand og tid som vi jobbet med. Spesielt kom dette til syne i den siste oppgaven, hvor det å gå hjem igjen ble tolket som at grafen måtte vende tilbake til utgangspunktet. At man da samtidig gikk bakover i tid igjen ble ikke tatt med i beregningen. Grafen ble sett på som en kombinasjon av et kart og tidligere gjorte erfaringer med at en vannrett strek betød at man stod i ro. Dette stemmer godt med Sierpinskas (1992) sine epistemologiske hindringer som sier at elever ser på endringer som et fenomen, at de gjenkjenner hvordan noe endrer seg, men ikke hvorfor det endrer seg eller hva det endrer seg til.

I resultatene fra fortesten, opplevde vi at alle elevene hadde en del misoppfatninger knyttet til grafen som bilde. Det vi opplevde underveis i økta var at elevene i gruppe B langt raskere brukte grafene de gikk som korreksjon til sine tidligere erfaringer og klarte å sette bevegelsene sine i sammenheng med grafene de gikk. De klarte også på en helt annen måte å relatere dette til dagligdagse situasjoner, som å gå fra gymsalen til skolen igjen. I gruppe A var det en elev som opplevde den samme utviklingen som i den høyt-presterende gruppa. Denne eleven argumenterte for sine meninger på en overbevisende måte og var sterkt medvirkende til at de andre elevene fikk korrigert sine misoppfatninger underveis. Vi så likevel at denne typen misoppfatninger kan være vanskelig å korrigere og er lett å falle tilbake på.

Under intervjuet hadde vi også en ettertest med de siste fire oppgavene fra fortesten. Her så vi tydelig at det hadde foregått en læringsprosess hos elevene i begge gruppene. Mange av elevene endret på løsningene sine fra fortesten til ettertesten, og de kunne i samtalen rundt oppgavene etterpå forklare hvorfor de hadde gjort disse endringene..

5.4 Datateknologi

Bruken av en bevegelsessensor i kombinasjon med en bærbar pc gjorde at elevene fikk umiddelbare svar på hvordan deres bevegelser foran sensoren ga seg utslag i en graf. De kunne sammenligne deres egen graf med den tegnede grafen gitt i oppgaven. De hadde muligheten til å bruke tid på å gjøre mange forsøk, fremfor å bruke tid på å samle inn tallmateriale og tegne grafer for hånd. Dette ga elevene mer tid til utforskning, og på enkelte oppgaver kunne de bruke 10-11 forsøk før de var fornøyde. Hvis elevene skulle registrert alle forsøkene med blyant og papir, tror vi de ville ha vært langt mindre utholdende.

Vi hadde med hensikt laget oppgavene slik at elevene måtte eksperimentere med både retning, hastighet og pauser allerede i oppgave 1, og ved hjelp av umiddelbare svar på skjermen, kunne elevene forkaste eller beholde hypoteser de laget seg underveis. Dette ga elevene mer rom for analyse og resonnering, og den visuelle fremstillingen er for mange elever lettere å forholde seg til enn en mengde tall i en tabell.

Monitor 2019 (Fjørtoft et al.) viser til at digitale hjelpemidler kan være positive for undervisningen, ved at man kan gjøre den mer variert, motiverende og utforskende. Våre elever ga også uttrykk for dette under intervjuet, hvor de nevner at det å være i bevegelse og ikke sitte ved pulten og løse oppgaver, gjorde det mer morsomt og motiverende. Det at alle elevene også opplevde mestring og faktisk fikk til oppgavene påvirket nok engasjementet og motivasjonen. Programvaren var enkel å bruke, og alle elevene hadde nok digital kompetanse til å skjønne hvordan man lagret grafene etter hver gang. Vi hadde opprettet mapper og skrevet opp et enkelt system for hvordan man skulle lagre etter kandidatnummer og oppgavenummer. Ellers var det bare å trykke på start i programvaren og dermed registrerte sensoren tid og avstand. Det skal riktignok nevnes at noen få grafer ble lagret med samme koding slik at vi ikke fikk et fullstendig bilde av prosessen på hver oppgave, men det var bare snakk om noen få. Sensoren, sammen med programvare og bærbare pc-er, gjør også opplegget veldig fleksibelt med tanke på utprøvingssted. Utstyret er lite og lett, og enkelt å frakte med seg, slik at man ikke er avhengig av et fast tilholdssted.

Ved at vi kun konsentrerte oss om variablene avstand og tid, kan det være en fare for at elevene danner seg et inntrykk av at alle grafer og funksjoner har bare disse variablene, og at man må være oppmerksom at det kan oppstå «oversettingsproblemer» når andre variabler brukes.

6 Avslutning

6.1 Hva bør man legge vekt på når man skal designe et undervisningopplegg som tilnærmer seg et emne praktisk?

Når vi ser på vårt undervisningseksperiment opp mot de seks hovedelementene til Ball et al. (2008), ser vi at noen punkter blir mer fremtredende enn andre.

For elever på 8.trinn kan det virke langt frem til et yrkesaktivt liv som voksen hvor man kan få bruk for kompetanse i temaet funksjoner. Likevel fikk de allerede denne våren et konkret eksempel på at det kan være greit å forstå sammenhengen mellom grafer og situasjoner da korona-pandemien kom. I selve undervisningseksperimentet var målet om forståelse knyttet til å se sammenhenger mellom ulike situasjoner og grafer. Gjennom å ha jobbet med fiktive hverdagssituasjoner i undervisningsøkten, samt å ha arbeidet videre med temaet på trinnet i ettertid, hadde elevene opparbeidet seg nok matematisk kompetanse til å kunne forstå nyhetssaker som omhandlet smittespredning.

Forskning som KIM-prosjektet (1995-2002) og TIMSS-undersøkelser (2007; 2015) ga oss bekreftelse på egne erfaringer med at elever synes temaet funksjoner er vanskelig og komplekst. Sierpinska (1992) og Hadjidemetriou og Williams (2002) lister opp ulike misoppfatninger som er vanlig blant elever. Som lærere er det vår jobb å legge opp til en undervisning som kan avdekke og oppklare slike misoppfatninger for elevene, og denne kunnskapen var også bakgrunnen for valg av oppgavene elevene besvarte skriftlig, muntlig eller praktisk gjennom undervisningseksperimentet.

Generell kunnskap om hvordan elever tenker og lærer har vi opparbeidet oss gjennom mange år som lærere, men hvilke personlige kunnskaper og egenskaper våre informanter kom med hadde vi liten kunnskap om. Den ene av oss hadde kjent elevene i noen få uker, mens den andre kjente dem ikke i det hele tatt. Gjennom å bruke en fortest fikk vi et lite innblikk i elevenes forkunnskaper knyttet direkte til dette temaet. Denne informasjonen ble nyttig for å legge opp til et undervisningsopplegg som kunne treffe elevene der de var. Det var også viktig for oss at utprøvingen ikke bare opplevdes som en engangsforeteelse; en happening, slik at elevene kunne ta med seg det de erfarte videre arbeid med funksjoner. Det å se på sammenhengen mellom tema på barneskolen og det de skal jobbe med videre på ungdomsskolen ble derfor viktig for oss.

Vår generelle læreplankunnskap plasserte dette undervisningseksperimentet på 8.trinn. Med vårt ønske om å designe en praktisk undervisningsøkt, og med fagfornyelsens økte fokus på dybdelæring ble kjerneelementer som utforsking og problemløsing, og resonnering og argumentasjon viktige for oss. Arbeid med datalogger var nytt for alle elevene, slik at alle stilte med lik kompetanse, noe vi tror førte til en god start på utforskingen. Vi valgte også bevisst en kompleks førsteoppgave, som gjorde at utforskingen måtte begynne bredt, for deretter å snevre seg inn til de aktuelle bevegelsene de skulle bruke.

6.2 Hvordan kommer de fem trådene i trådmodellen frem i elevene utprøving?

Det kan være vanskelig å skille mellom de ulike trådene til Kilpatrick et al. (2001), men analysen vår viser er at det foregår aktivitet både på prosedyrenivå, konseptnivå og strategisk nivå. Elevene resonnerer og argumenterer for hypoteser og mulige løsninger, og kommer gjerne med forklaringer på hvorfor noe ikke ble helt som de hadde tenkt det. De utviklet et felles språk seg imellom for nødvendige matematiske begrep de ennå ikke hadde lært, og brukte hverdagsspråk der det var mulig.

For å få konseptuell forståelse trengs en stor mengde kunnskap om ulike metoder og prosesser. Først når elevene har en viss prosedyreflyt kan disse kobles sammen og føre til konseptuell forståelse. For elevene i gruppa A ble det mest jobbing for å skaffe seg prosedyreflyt, mens hos gruppe B så man at de opparbeidet seg prosedyreflyt kjapt, og at denne ble til konseptuell forståelse, særlig knyttet til sammenhengen mellom tid og avstand. Matematisk kompetanse er noe som utvikles hele tiden, uansett hvilket nivå man starter på, og alle elevene i dette eksperimentet hadde en utvikling i løpet av økta.

Strategisk kompetanse var synlig etter hvert som elevene kom lenger ut i oppgaverekka. I begynnelsen var strategien stort sett basert på prøving og feiling, men etter hvert som de fikk på plass ulike prosedyrer, kunne de koble disse opp mot et hensiktsmessig valg av strategi. Gjennom å resonnere høyt til hverandre fikk de øvd på å argumentere for de ulike prosedyrene og dermed fikk alle en mulighet til å være med og bidra. Resonnering ble derfor limet i hele prosessen og nøkkelen for at engasjementet ble stort. Elevene samarbeidet om å komme frem til løsninger og gjorde hverandre gode gjennom å motivere og applaudere det de andre gjorde.

Det var ikke alltid like enkelt å vite hvilken «tråd» elevene egentlig arbeidet med, for vi opplevde at elevene hoppet mellom prosedyreutvikling, konseptutvikling og strategisk utvikling gjennom sine resonnement. Dette sammenfaller med Kilpatrick et al. (2001) som sier at det kan være vanskelig å skille trådene, særlig prosessflyt, konseptuell forståelse og strategisk forståelse, fordi de er gjensidig avhengig av hverandre. Når trådene utvikles sammen, endres den matematiske forståelsen og læringen blir varig.

Fire måneder etter vår utprøving skulle trinnet begynne med temaet funksjoner. Mest av egen interesse ønsket vi å legge inn en ekstra ettertest da, for å se om noe hang igjen. Denne har vi ikke tatt med i analysen, da den kom sent inn i vårt arbeid. Resultatet var likevel så interessant at det kan være aktuelt for noen å forske videre på dette ved en annen anledning. Elevene som hadde vært med på undervisningsøkten viste en annen forståelse enn de andre elevene på trinnet, og de som hadde hatt misforståelser rundt det med graf som kart/bilde, hadde ikke lenger disse.

6.3 Hvilke misoppfatninger ser vi hos elevene, og endres disse underveis i undervisningsøkten?

Den misoppfatningen som kommer klarest frem hos elevene gjennom undervisningseksperimentet var å tolke grafen som et bilde. Dette kom godt til syne allerede i den første oppgaven elevene fikk, hvor de nærmest så på grafen som trappetrinn, og forsøkte å hoppe for å komme til neste nivå. Selv om elevene brukte den første oppgaven til eksperimentering og utprøving, kom misoppfatningen om grafen som et bilde igjen til syne når elevene skulle tegne en graf til en situasjon. Elevene oversetter situasjonsuttrykk som «opp et fjell» og «ned en bakke», med at grafen skal ha positivt (opp) og negativt stigningstall (ned), selv om avstanden fra utgangspunktet øker når man springer ned bakken. Vi opplevde at disse begrepene hadde en mer markant innvirkning på fortestene, hvor de aller fleste tolket begrepene *opp* og *ned* som om grafen skulle stige og synke i møte med tekst som «Tom klatret *opp* bakken» og «løp fort *ned*», mens under selve undervisningsøkten ble dette til en diskusjon om hvor raskt grafen skulle stige og i hvilken retning de skulle gå.

Å tolke grafen som et kart, ble gjort i den siste oppgaven, hvor en elev tolket grafen som å springe til butikken og så gå hjem igjen. Dette er en misoppfatning som er av samme type som grafen som et bilde, hvor mange elever ikke klarer å tolke grafen som en abstrakt representasjon av forhold, men ser ut til å tolke det bokstavelig som et bilde eller kart av en underliggende situasjon. Samtidig knyttet den samme elvene samtidig nyerfart kunnskap om at en graf blir vannrett dersom man står stille inn i tolkningen.

Den andre misoppfatningen vi opplevde, var hvor vi opplevde forvirring mellom grafstigning og høyde. Når elevene skulle tegne grafen til «klatret opp fjellet», ville noen elever at denne skulle ha et høyt stigningstall, eller «basically rett opp» som en av elevene beskrev den, til de nådde toppen.

Vi så en tydelig endring av misoppfatningene hos elevene underveis i undervisningsøkten, og selv om enkelte elever falt tilbake til sine gamle oppfatninger, ble de raskt korrigert av sine medelever. De brukte selve undervisningsøkten som eksempel, og refererte til grafene som var gått underveis og bevegelsene som ble i gjort i forhold til om man gikk, løp eller stod stille. Dette fikk vi også bekreftelse på under ettertesten som ble foretatt under intervjuet.

6.4 Konklusjon

Hvordan vil et undervisningsopplegg med vekt på en utforskende tilnærming til overgangen mellom ulike representasjoner av funksjoner, utvikle 8.trinnselevers matematiske kompetanse knyttet til funksjonsbegrepet?

For å kunne svare på problemstillingen må vi først si noe om det i det hele tatt kunne dokumenteres en utvikling av elevenes matematiske kompetanse knyttet til funksjonsbegrepet. Ved å sammenligne elevenes resultater på fortesten og ettertesten, ser vi at elevene valgte å endre på svarene sine på oppgaver de hadde feil på i fortesten, og kunne i tillegg begrunne det nye valget. Vi fikk dessuten bekreftet dette 4 måneder senere, da trinnet skulle begynne arbeid med dette temaet.

Underveis i undervisningsøkten og i intervjuet opplevde vi at det foregikk utvikling av alle de fem trådene i trådmodellen (Kilpatrick et al., 2001):

Tidlig i utprøvingen utviklet elevene kunnskap om de ulike prosedyrene som skulle til for å løse oppgavene. Gjennom samarbeid og utforsking i en førsteoppgave som tok for seg flere prosedyrer, opparbeidet elevene begynnende forståelse for hva som skjedde når de beveget seg fremover, bakover, sto stille eller endret retning foran sensoren. Sammenhengen mellom bevegelsen foran dataloggeren og grafen de fikk frem på datamaskinen ble bekreftet gjennom arbeidet med de påfølgende oppgavene. Gjennom å knytte ulike prosedyrer til hverandre og således bygge et nettverk, utviklet elevene en konseptuell forståelse for sammenhengen mellom tid og avstand.

Gjennom å bruke streker på papiret eller slipperser i selve gåinga av grafen, beregnet de hvor fort de måtte gå, i hvor lenge de skulle stå stille og hvor langt unna sensoren alt foregikk.

I problemløsningsoppgaver handler det ofte om å velge en strategi som fungerer. Dette kom tydelig frem da elevene jobbet med oppgavene som startet med situasjoner gitt som tekst. Gjennom å benytte konseptuell forståelse og prosedyreflyt valgte de strategisk gode hypoteser for å løse oppgavene. Det kan være vanskelig å skille mellom de ulike trådene, da de er gjensidig avhengig av hverandre og bør utvikles samtidig. Særlig ble det vanskelig å skille når elevene jobbet med prosess, konseptuell forståelse og strategisk kompetanse etter hvert som de hadde opparbeidet seg en del grunnkunnskap og et nettverk mellom disse.

For å kunne drive med utforskende undervisning, kreves det at elevene bidrar ved å kommunisere med hverandre. Våre ni informanter var klar over at det skulle forskes på dem, og dette kan ha påvirket deres engasjement. Men vi opplevde det som ekte, særlig siden flere av elevene påpekte at dette ønsket de at andre medelever fikk prøve også. Ingen av dem kunne noe om det å anvende en sensor fra før av, og vi tror at det å oppleve å starte med likt grunnlag gjorde det lettere å føle at alle kunne bidra med noe. Elevenes respons var at det var positivt å *gjøre* fremfor å *høre*. Det å få bevege seg, og «være» grafen, som en av elevene sa, gjør at erfaringen ikke bare er knyttet til det mentale, men også fysisk til kroppslig bevegelse. De opplevde at det var lettere å huske, og dermed å kunne bruke senere.

Et annet aspekt er at ingen elever fikk prøve to ganger etter hverandre, så det var alltid en av de andre som skulle prøve neste gang. Dette kan ha tvunget frem behov for å resonnere og argumentere for løsningsforslag, og å bruke et språk som alle forsto, og samtidig en følelse av at dette løste de sammen.

Gjennom dette undervisningseksperimentet ser vi en tydelig utvikling hos elevenes matematiske kompetanse i temaet funksjoner. Elevene starter på ulike nivå, og er fortsatt på ulike nivå etter undervisningsøkten, men alle elevene som deltok hadde en endret forståelse for sammenhengen mellom tid og avstand. Det at vi valgte en utforskende, og praktisk tilnærming opplevdes som velfungerende, og flere av elevene forklarte at det var lettere å huske når de hadde vært med på bevegelsene. Det å bruke kroppen som verktøy, sammen med språket i samtalene og diskusjonene forsterket hver enkelt elevs opplevelse og læring.

Fire måneder etter at undervisningseksperimentet ble gjennomført, begynte 8.trinnet med temaet funksjoner. Elevene på trinnet fikk en test, hvor noen av oppgavene var hentet fra fortesten i eksperimentet, mens andre var ukjente for alle elevene. Våre informanter hadde ingen feil som kan karakteriseres som graf/bilde-misoppfatning. Utviklingen av matematisk kompetanse hos disse elevene ble antakelig forsterket av at vi intervjuet dem dagen etter selve undervisningsøkten, der de måtte dele sine erfaringer og sette ord på hva de hadde gjennomført. Det var overraskende og spennende at de lett kunne trekke frem kunnskapen fire måneder senere.

Oppmuntret av disse resultatene, og gjennom vår rolle som lærerspesialister, fikk vi kollegiet både 8. og 9. trinn med på å prøve ut undervisningsøkten i egne klasser. På 8. trinn ble det gjennomført i små elevgrupper som oppstart i temaet, mens på 9. trinn ble det gjennomført i halve klasser, og elevene hadde allerede noe kjennskap til temaet. Undervisningsopplegget fungerte best på 8. trinn, hvor det ble brukt slik det er tenkt; en introduksjon til temaet. Læringsutbyttet, særlig på 8.trinn antyder at dette er en gunstig måte å tilnærme seg funksjonsbegrepet på. Vi tror at ved å gå en graf som introduksjon, vil det føre til at elevene har en felles opplevelse som kan brukes som referanse til senere problemstillinger de møter på i arbeidet med de forskjellige representasjonene av funksjonsbegrepet, og samtidig kunne være en basis for å kunne oppnå en «felles forståelse» i klasserommet under matematiske samtaler i emnet.

Våre resultater medfører at vi kommer til å bruke denne undervisningsøkten videre i undervisningen ved våre skoler, og at vi vil fortsette å dele den med kolleger og oppmuntre dem til å bruke den også. Vårt forskningsgrunnlag er selvsagt alt for tynt til at vi kan trekke bombastiske konklusjoner, så det ville vært svært interessant med et større sammenligningsgrunnlag knyttet til langtidseffekten hos elevene. Sitter den matematiske kompetansen om funksjoner like godt om 2 år? Om 4 år? Og klarer de å bruke den i den videre utviklingen av kompetanse om funksjoner?

7 Referanseliste

Alseth, B., Breiteig, T., & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering-matematikkfaget som kasus*. Telemarksforsking Notodden.

Arzarello, F., & Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics*, 57(3)

Arzarello, F., Pezzi, G., & Robutti, O. (2007). Modelling body motion: An approach to functions using measuring instruments. In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 129-136). Springer, Boston, MA.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. *In Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton Alberta: CMESG/GDEDM

Ball, D.L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?, *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.

Brekke, G. (2002). Introduksjon til diagnostisk undervisning I matematikk: Kartlegging av matematikkforståelse. Oslo: Læringssenteret.

Claro, S., Paunesku, D., & Dweck, C. S. (2016). Growth mindset tempers the effects of poverty on academic achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(31), 8664-8668.

Clement, L. (2001). What do students really know about functions. *Mathematics teacher*, *94*(9), 745-748.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.

Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2017). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Sage publications.

Dalland, O. (2000). *Metode og oppgaveskriving for studenter*. Gyldendal akademisk.

Egeberg, G., Hultin, H., & Berge, O. (2016). *Monitor skole 2016*. Senter for IKT i utdanningen, Oslo. Hentet fra https://www.udir.no/globalassets/filer/tall-og-forskning/rapporter/2016/monitor_2016_nn_-_2_utgave_lav.pdf

Fjørtoft, S. O., Thun, S., & Buvik, M. P. (2019). *Monitor 2019-En deskriptiv kartlegging av digital tilstand i norske skoler og barnehager*. SINTEF, Trondheim. Hentet fra https://sintef.brage.unit.no/sintef-xmlui/bitstream/handle/11250/2647343/Monitor%2B2019%2Bsluttrapport%2Bfra%2BSINTEF%2Bpublisert%2B20191021.pdf?sequence=1

Gjøvik, Ø., & Sikko, S. A. (2019). Walking a Graph: Developing Graph Sense Using Motion Sensor Technology. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 5(3), 179-202.

Gravemeijer, Koeno (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1: 2, 155 — 177.

Hamilton, A. G. (1982). *Numbers, sets and axioms: the apparatus of mathematics*. Cambridge University Press, 83

Hadjidemetriou, C., & Williams, J. (2002). Children's graphical conceptions. *Research in Mathematics Education*, *4*(1), 69-87.

Harel, G., & Dubinsky, E. (Eds.). (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Mathematical Association of America.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. *Conceptual and procedural knowledge; The case of mathematics*, 1-23.

Høines, M. J., Rinvold, R., & Selvik, B. K. (2007). *Matematiske sammenhenger: Algebra og funksjonslære*. Casper forlag, 58

Imsen, G. (2014). *Elevens verden* (4. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Janvier, C. (1978). *The Interpretation Of Complex Cartesian Graphs Representing Situations: Studies and Teaching Experiments.* Ph. D. thesis, University of Nottingham, Nottingham

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (Vol. 2101). National research council (Ed.). Washington, DC: National Academy Press.

Kunnskapsdepartementet. (2016). *Fag – Fordypning – Forståelse — En fornyelse av Kunnskapsløftet* (Meld. St. 28 (2015–2016)). Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Verdier og prinsipper for grunnskoleopplæringen – overordnet del av læreplanverket.* Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Oslo: Gyldendal Norske Forlag AS

Lamb J., Geiger V. (2012). Teaching Experiments and Professional Learning. In: *Seel N.M. (eds) Encyclopedia of the Sciences of Learning*. Springer, Boston, MA. Hentet fra https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6_1017

Mathematics Assessment Resource Service. (2015). Interpreting Distance-Time Graphs, *Mathematics Assessment Project. CLASSROOM CHALLENGES. A Formative Assessment Lesson.* Mathematics Assessment Resource Service, University of Nottingham & UC Berkeley. Hentet fra: https://www.map.mathshell.org/download.php?fileid=1680

Nemirovsky, R., & Borba, M. (2003). Perceptuo-motor activity and imagination in mathematics learning. In *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 103-135).

Nosrati, M., & Wæge, K. (2015). Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk. *Matematikksenteret, Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen*. Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/product/Oppdatert%20september%202019%20Sentrale%20kjennetegn%20p%C3%A5%20god%20l%C3%A6ring%20og%20undervisning%20i%20matematikk.pdf

Nosrati, M., & Wæge, K. (2018). *Dybdelæring i matematikk*. Hentet fra http://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-04/MN%20KW%20dybdel%C3%A6ring%2015.04.18_0.pdf

NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole – Fornyelse av fag og kompetanser.* Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/sec1?q=2015

Nygaard, O., & Zernichow, A. G. (2006). Den blokkerende misoppfatning. *Publisert i Spesialpedagogikk* (2006). Temanummer Matematikkvansker.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, 3(2).

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2014). *Læreren med forskerblikk: innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. (1. utg.). 6. opplag. Høyskoleforlaget

Quale, A. (2012). Konstruktivisme i naturvitenskapen: kunnskapssyn og didaktikk. *Nordic Studies in Science Education,* 3(2), 175-188.

Rasmussen, C., Nemirovsky, R., Olszewski, J., Dost, K., & Johnson, J. L. (2004). On forms of knowing: The role of bodily activity and tools in mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*.

Reikerås, E., Moser, T., & Tønnessen, F. E. (2017). Mathematical skills and motor life skills in toddlers: do differences in mathematical skills reflect differences in motor skills?, *European Early Childhood Education Research Journal*, 25(1), 72-88.

Robson, C., & McCartan, K. (2017). *Real world research*. Fourth Edition, John Wiley & Sons.

Robutti, O. (2009). Space-time representations in young children: Thinking through gestures in motion experiments. *In Representational systems and practices as learning tools* (pp. 59-75). Brill Sense.

Schoenfeld, A. H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. *Educational researcher*, *43*(8), 404-412.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. The concept of function: *Aspects of epistemology and pedagogy*, 25, 23-58.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education*, 114-145.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. doi:10.3102/0013189X015002004

Smith, M. K. (2002). Jerome S. Bruner and the process of education. *The encyclopedia of informal education, 7*(6), 2008. Hentet fra https://infed.org/mobi/jerome-bruner-and-the-process-of-education/

Spurkland, S., & Blikstad-Balas, M. (2016). De største utfordringene ved digitalisering av skolen. *Bedre Skole, 2*, 2016.

Thagaard T. (2010). *Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitativ metode*. (3. utg.). Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad Bjørke AS.

Tjora, A. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis*. (2. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT01-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet. (2012). *Læringsstøttende prøver.* Hentet fra https://web01.usn.no/~panderse/KIMhefter/ressursheftefunk.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2019a). *Dybdelæring*. Hentet fra: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/dybdelaring/

Utdanningsdirektoratet. (2019b). *Eksempeloppgaver og tidligere nasjonale prøver*. Hentet fra https://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/eksempeloppgaver-tidligere-nasjonale-prover/8-9-trinn/regning/bokmal/?path=cefglhhcefglifcefglik

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplanverket.* Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/

Universitetet i Oslo. (2015). *TIMSS 2007*. Hentet fra https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/2007/index.html

Universitetet i Oslo. (2015). *TIMSS 2015*. Hentet fra https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/2015/index.html

Vanderstraeten, R. (2002). Dewey's transactional constructivism. *Journal of Philosophy of education*, *36*(2), 233-246.

Valenta, A. (2015). Matematikklærerkompetanse. Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Valenta%20Matematikkl%C3%A6rerkompetanse.pdf

Von Glasersfeld, E. (1998). Cognition, construction of knowledge, and teaching. In *Constructivism in science education* (pp. 11-30). Springer, Dordrecht.

Von Glasersfeld, E. (2013). *Radical constructivism* (Vol. 6). Routedge.

Vygotsky, L. (1978). Interaction between learning and development. *Readings on the development of children*, *23*(3), 34-41.

Yin, R. K. (2018). *Case Study Research and Applications. Design and Methods* (6. utg.). Los Angeles, CA: Sage.

8 Vedlegg

Vedlegg 1: Godkjenning Norsk Senter for Forskningsdata (NDS)

Vedlegg 2: Samtykkeskjema

Vedlegg 3: Fortesten

Vedlegg 4: Oppgavene til utprøvingen

Vedlegg 5: Ettertest 1 (brukt under intervjuet)

Vedlegg 6: Ettertest 2

(Ikke egentlig med i forskningseksperimentet, men er omtalt i avslutninga)

Vedlegg 7: Intervjuguide

Vedlegg 8: Refleksjonsnotat og prosessdokument

Vedlegg 1: Godkjenning Norsk Senter for Forskningsdata (NDS)

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Masteroppgave i matematikkdidaktikk - Funksjoner

Referansenummer

234629

Registrert

07.10.2019 av Randi Sandstad - randisa@stud.ntnu.no

Behandlingsansvarlig institusjon

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Svein Arne Sikko, svein.a.sikko@ntnu.no, tlf: 73559904

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Randi Sandstad, i_would_be@hotmail.com, tlf: 93618939

Prosjektperiode

05.09.2019 - 05.09.2020

Status

01.11.2019 - Vurdert

Vurdering (1)

01.11.2019 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 01.11.2019, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:

https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html

Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 05.09.2020.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Jørgen Wincentsen
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

Vedlegg 2: Samtykkeskjema

Vil du la ditt barn delta i forskningsprosjektet *"Praktisk innføring av funksjonsbegrepet"* ?

Dette er et spørsmål til deg om at ditt barn kan delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se på elevers læring ved praktisk innføring av funksjonsbegrepet. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål

Prosjektet er en del av en masterstudie Bjørnar Naalsund og Randi Sandstad gjennomfører dette året. Formålet med studiet er å se om praktisk arbeid med funksjonsbegrepet kan bidra til dypere forståelse og læring av funksjonsbegrepet.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

NTNU – institutt for lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet. Svein Arne Sikko er prosjektveileder

Hvorfor får du spørsmål om ditt barn kan delta?

I fagfornyelsen (med oppstart 2020) er innføring av funksjoner lagt til 8. trinn. Det er derfor interessant å se på elever på dette trinnet. Bjørnar underviser to klasser på dette trinnet, og av praktiske gjennomføringsårsaker er disse to klassene derfor plukket ut.

Hva innebærer det for ditt barn å delta?

Dette innebærer at de aktuelle elevene får delta i et designet undervisningsopplegg, som innebefatter spørreskjema, praktisk undervisning, samtale og intervju.

Alle elevene i de to klassene besvarer spørreskjemaet. Et utvalg deltar på et designet undervisningsopplegg og intervjuet etterpå. For elevene som blir plukket ut til å delta på alt vil tidsbruken være ca. 2 undervisningsbolker. Vi vil bruke lydopptak under intervju. Hvis det er ønskelig å se spørreskjema eller intervjuguide nærmere, ta kontakt.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å la ditt barn delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om ditt barn vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for ditt barn hvis han/hun ikke vil delta eller senere velger å trekke seg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Bjørnar Naalsund og Randi Sandstad, samt veileder ved NTNU er de eneste som vil ha tilgang til opplysningene. De vil bli lagret kryptert, og anonymisert i selve masteroppgaven.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes 5. september 2020, og innsamlede data vil da bli destruert.

Dine rettigheter

Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du og han/hun rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om han/henne
- å få rettet personopplysninger om seg
- å få slettet personopplysninger om seg
- å få utlevert en kopi av sine personopplysninger (dataportabilitet)
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av sine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om ditt barn?

Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU ved Svein Arne Sikko (svein.a.sikko@ntnu.no)
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen (thomas.helgesen@ntnu.no)
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Bjørnar Naalsund	Randi Sandstad
(Masterstudent)	(Masterstudent)

bjornar.naalsund@kristiansund.kommune.no
randi.sandstad@kristiansund.kommune.no

FORESATTE:

Vi har mottatt og forstått informasjon om prosjektet, og har fått anledning til å stille spørsmål.
Jeg samtykker til at mitt barn:

- ☐ kan delta i et designet undervisningopplegg (spørreskjema, praktisk undervisning, intervju)
- ☐ kan delta i aktivitet som krever lydopptak.

Jeg samtykker til at mitt barns opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, 5. september 2020

(Signert av foresatt, dato)

ELEV:
Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i et designet undervisningopplegg (spørreskjema, praktisk undervisning, intervju)
- ☐ å delta i aktivitet som krever lyd og bilde-opptak.

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, 5. september 2020

(Signert av elev, dato)

Vedlegg 3: Fortesten

FORTEST

1. Skriv inn koordinatene for disse punktene.

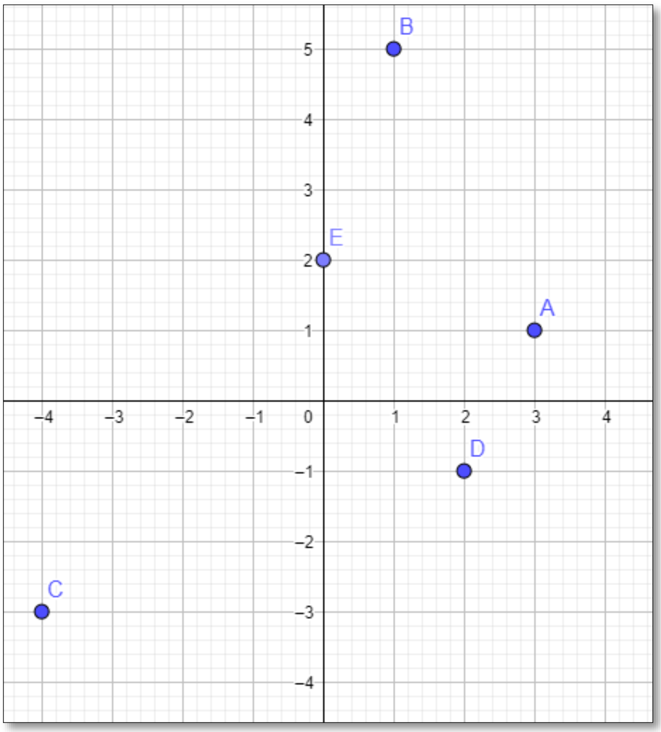
A = (,)

B = (,)

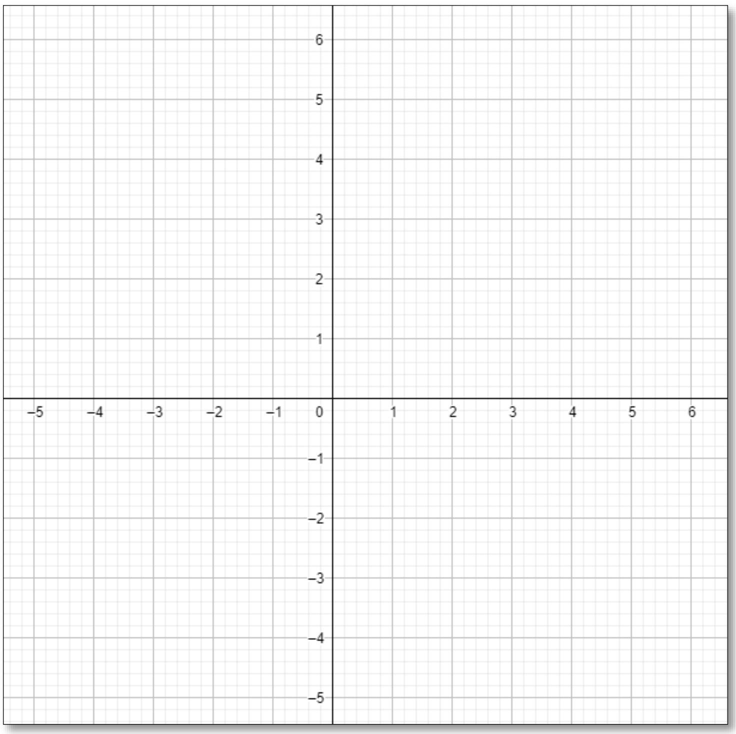
C = (,)

D = (,)

E = (,)



2. Marker disse koordinatene i koordinatsystemet



A = (2, 4)

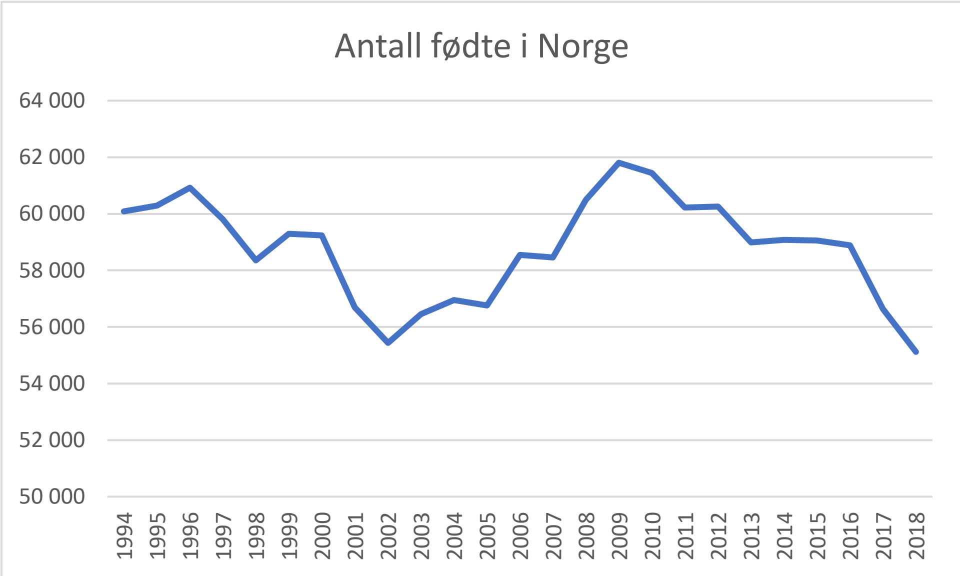
B = (-3, 1)

C = (-2, -3)

D = (3, -2)

E = (0, -3)

3. Bruk grafen til å svare på disse spørsmålene:



Kilde: Statistisk sentralbyrå (*https://www.ssb.no/statbank/table/09745/tableViewLayout1/*)

a. Hvilket år var det færrest fødte?

b. Hvor mange ble født dette året?

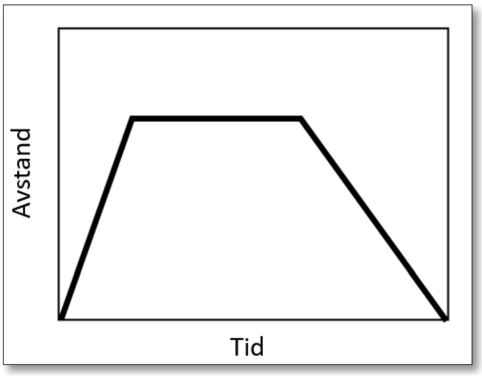
c. Hvilket år var det flest fødte?

d. Hvor mange ble født dette året?

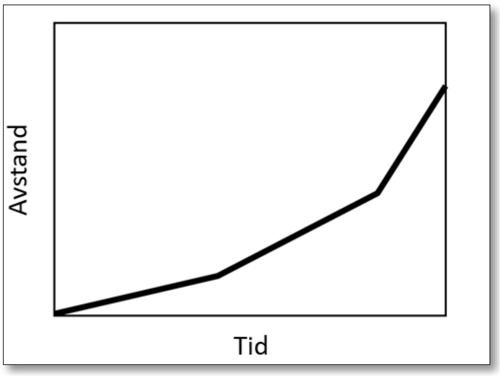
4. Hvilken av grafene passer best til historien? (Kryss av for riktig svar)

- [ ] A
- [ ] B
- [ ] C

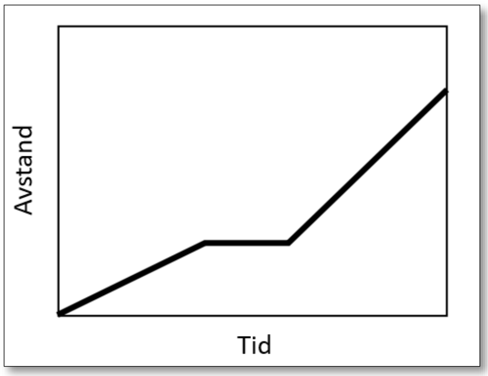
Bortenfor huset til Tom er det en bakke.
Tom klatret opp bakken, gikk langs toppen, og så løp han fort ned på den andre siden.



A



B



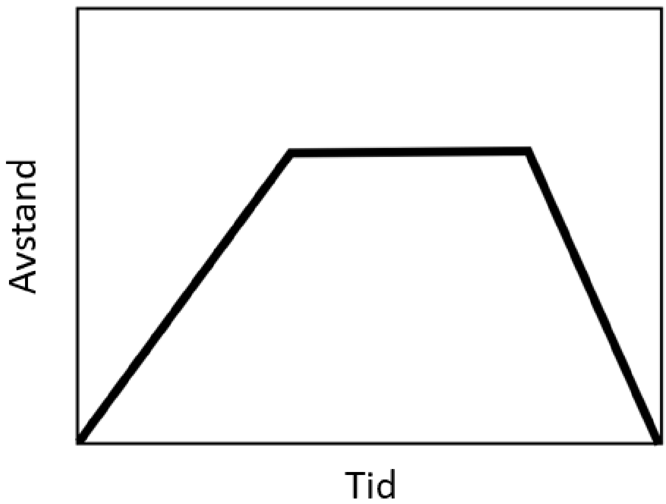
C

5. Hvilken historie passer til denne grafen? (Kryss av for riktig svar)

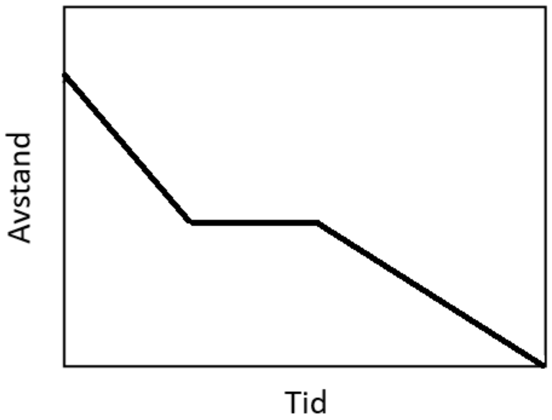
- [ ] A
- [ ] B

A: Tom gikk sakte langs veien. Han stoppet og så på klokka, og innså at han var sent ute, så han begynte å løpe

B: Tom gikk til butikken ved enden av gata, kjøpte ei avis og løp hele veien hjem igjen.

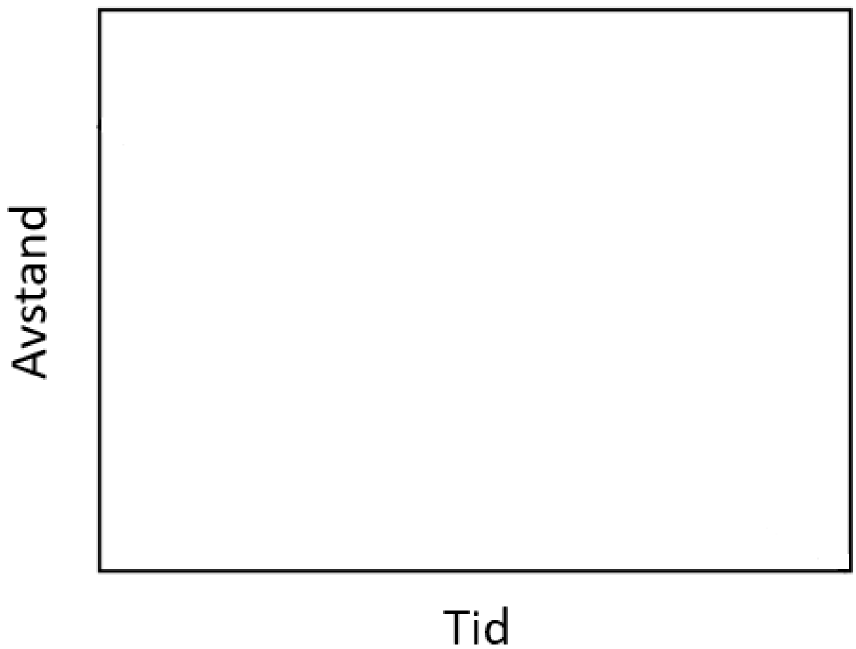


6. Lag en kort historie til denne grafiske fremstillingen

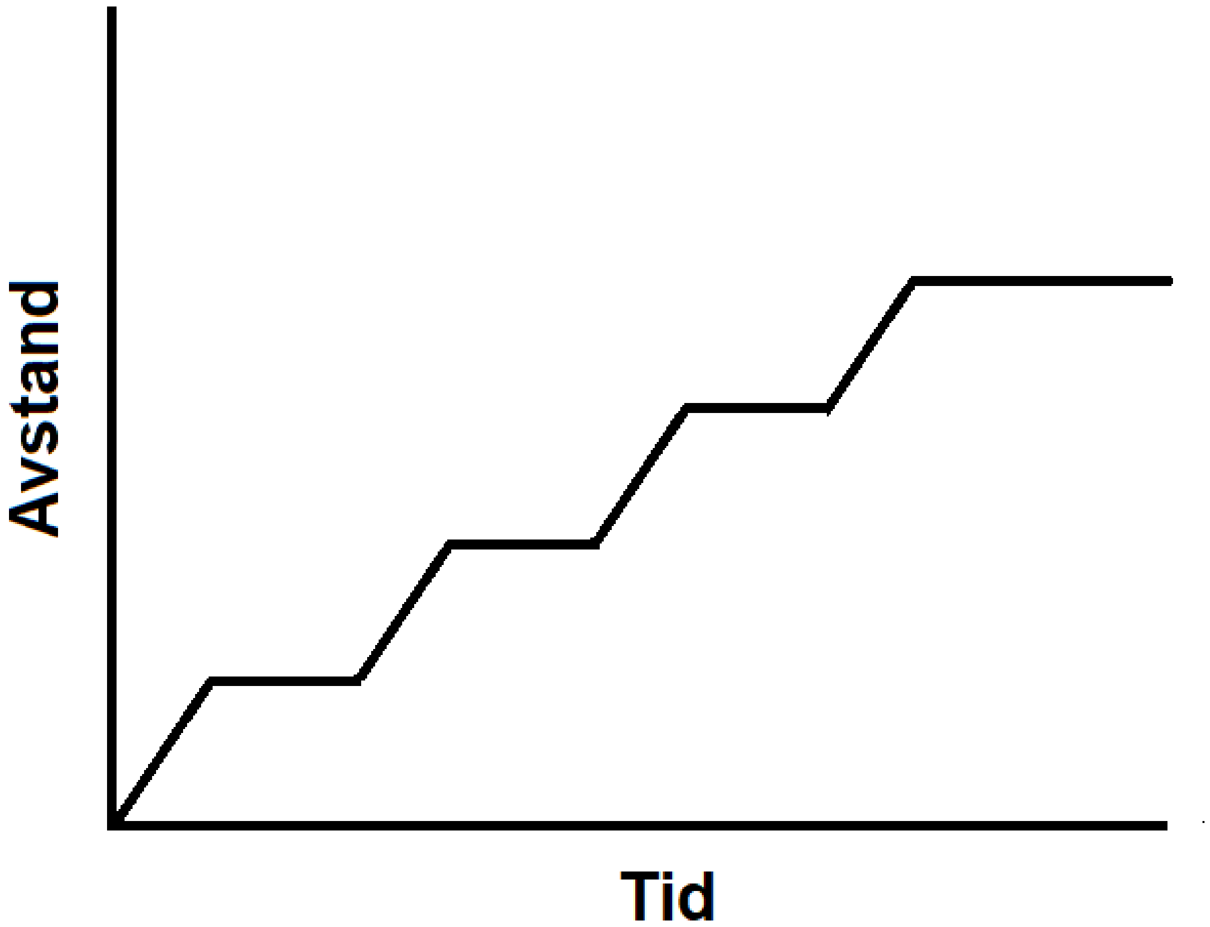


7. Tegn en grafisk fremstilling av denne historien.

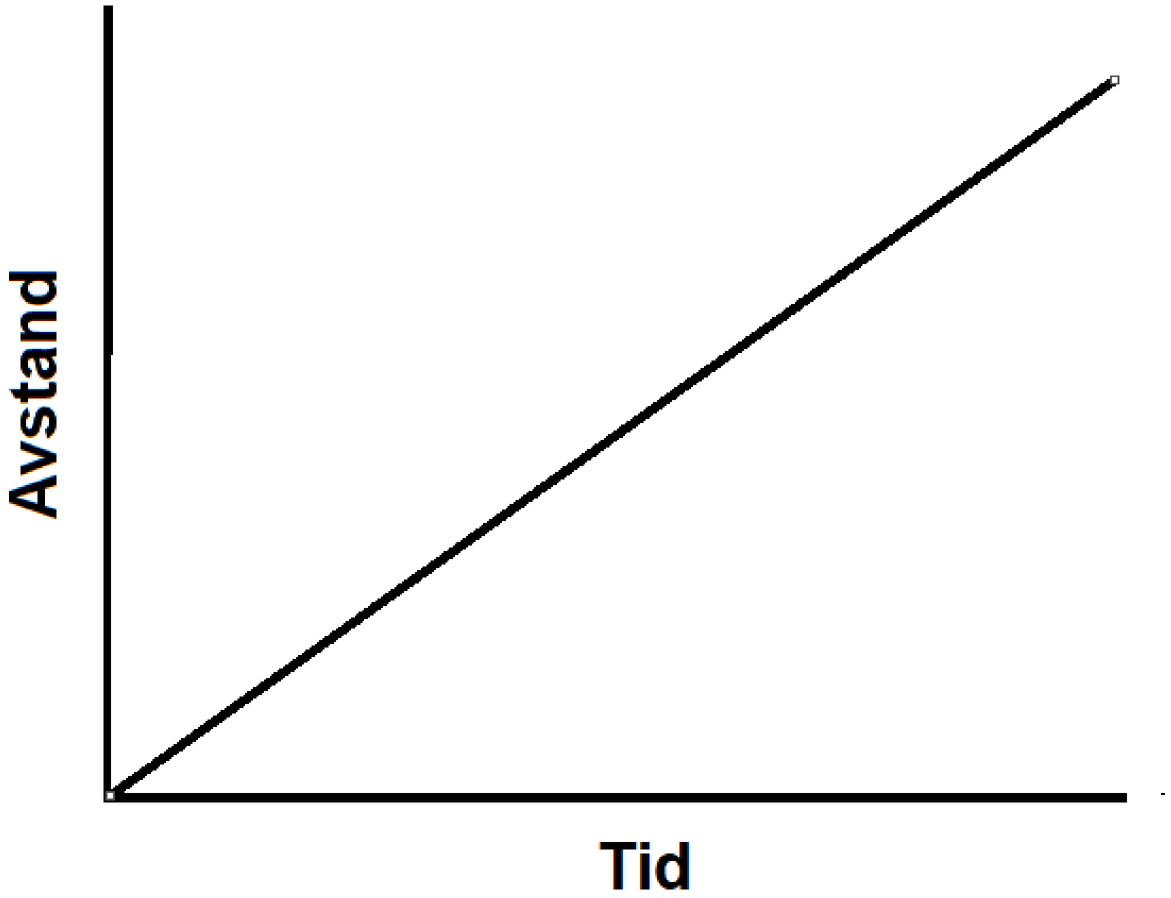
Tom sprang hjemmefra til busstoppet og sto der og ventet
Han innså etter hvert at bussen allerede var gått, så han gikk hjem igjen.



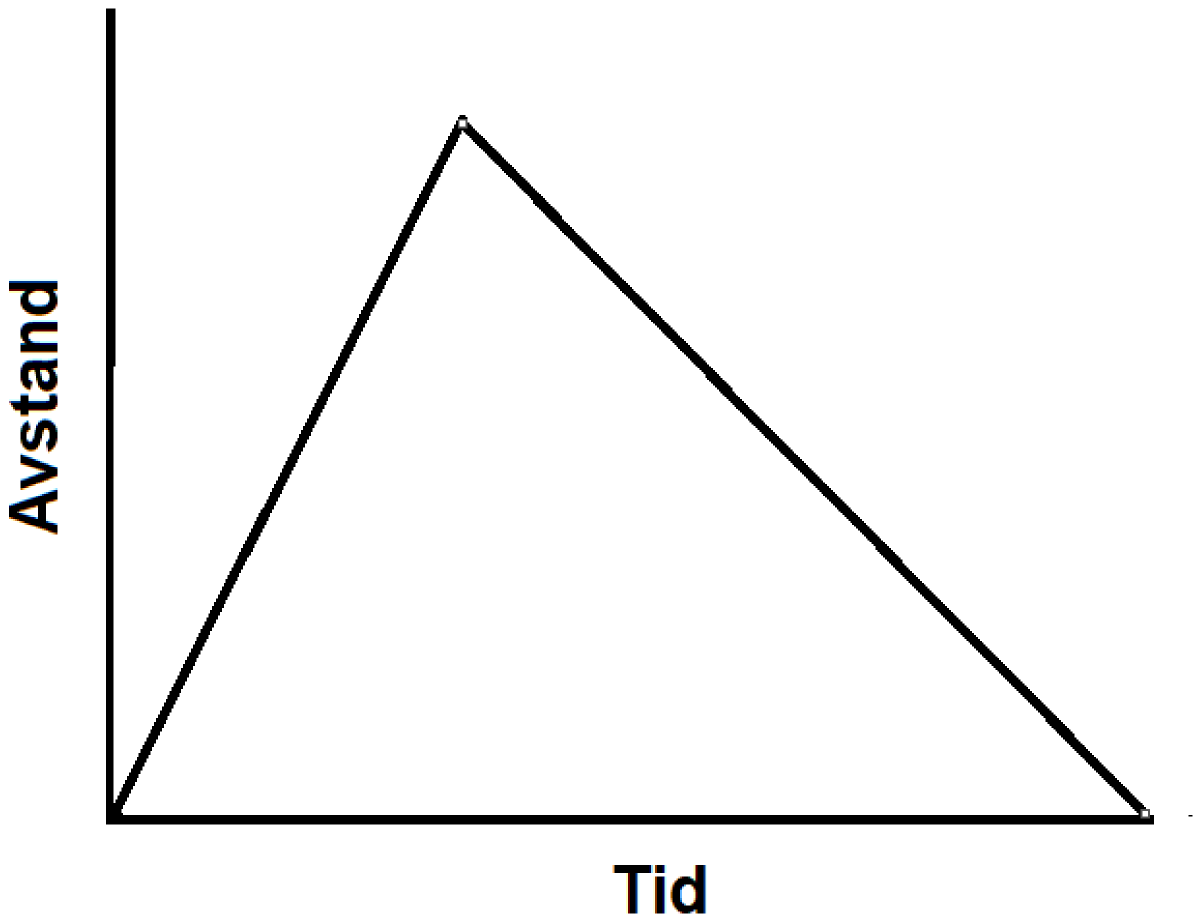
Vedlegg 4: Oppgavene til utprøvingen



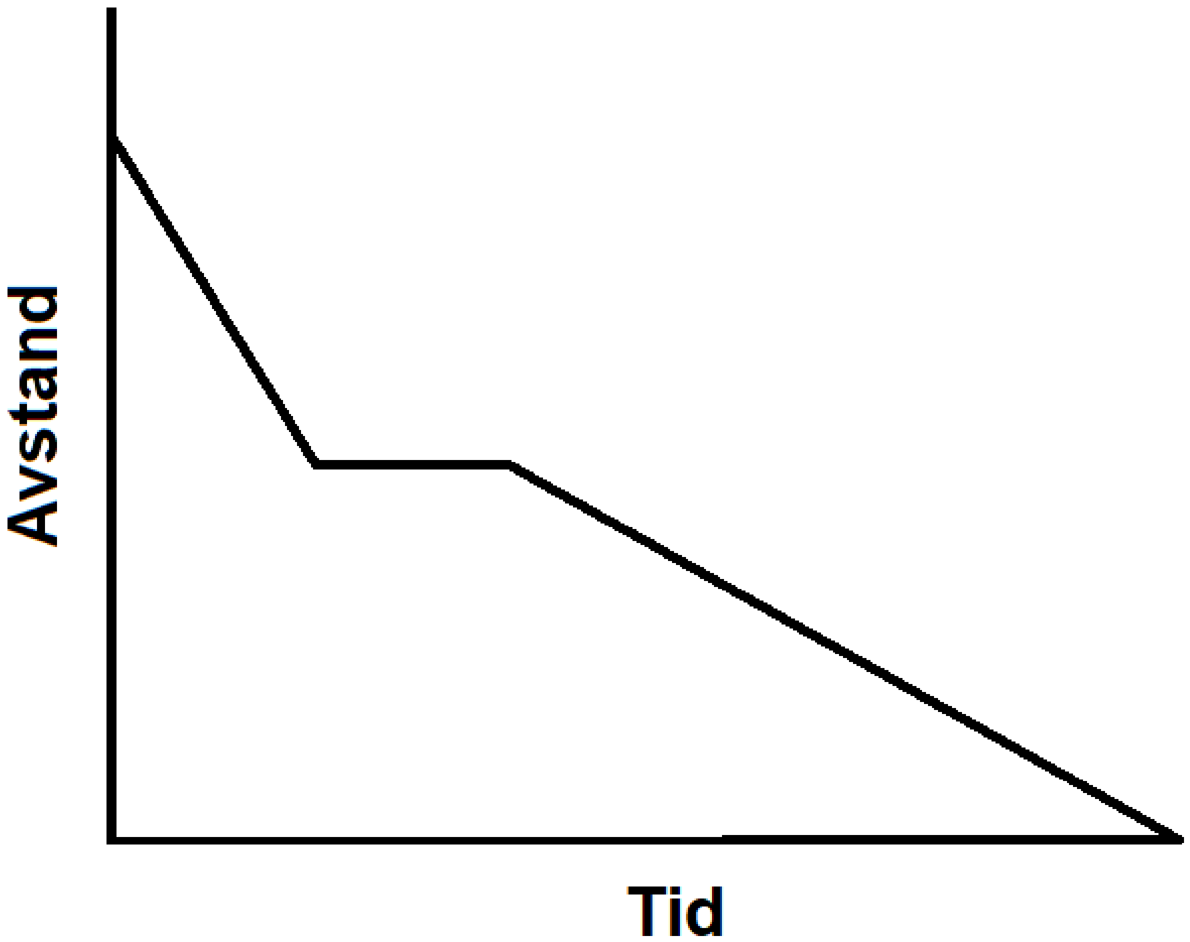
OPPGAVE 1



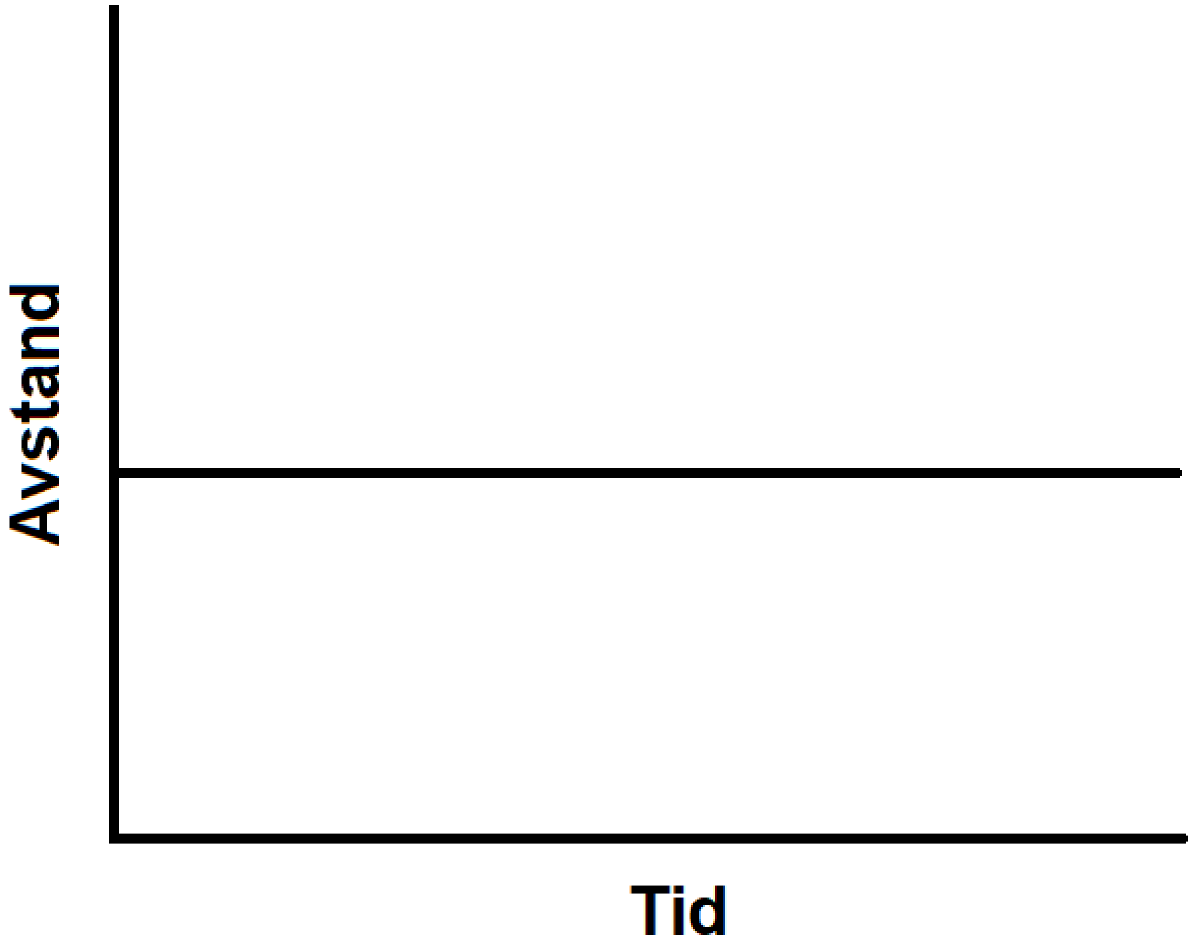
OPPGAVE 2



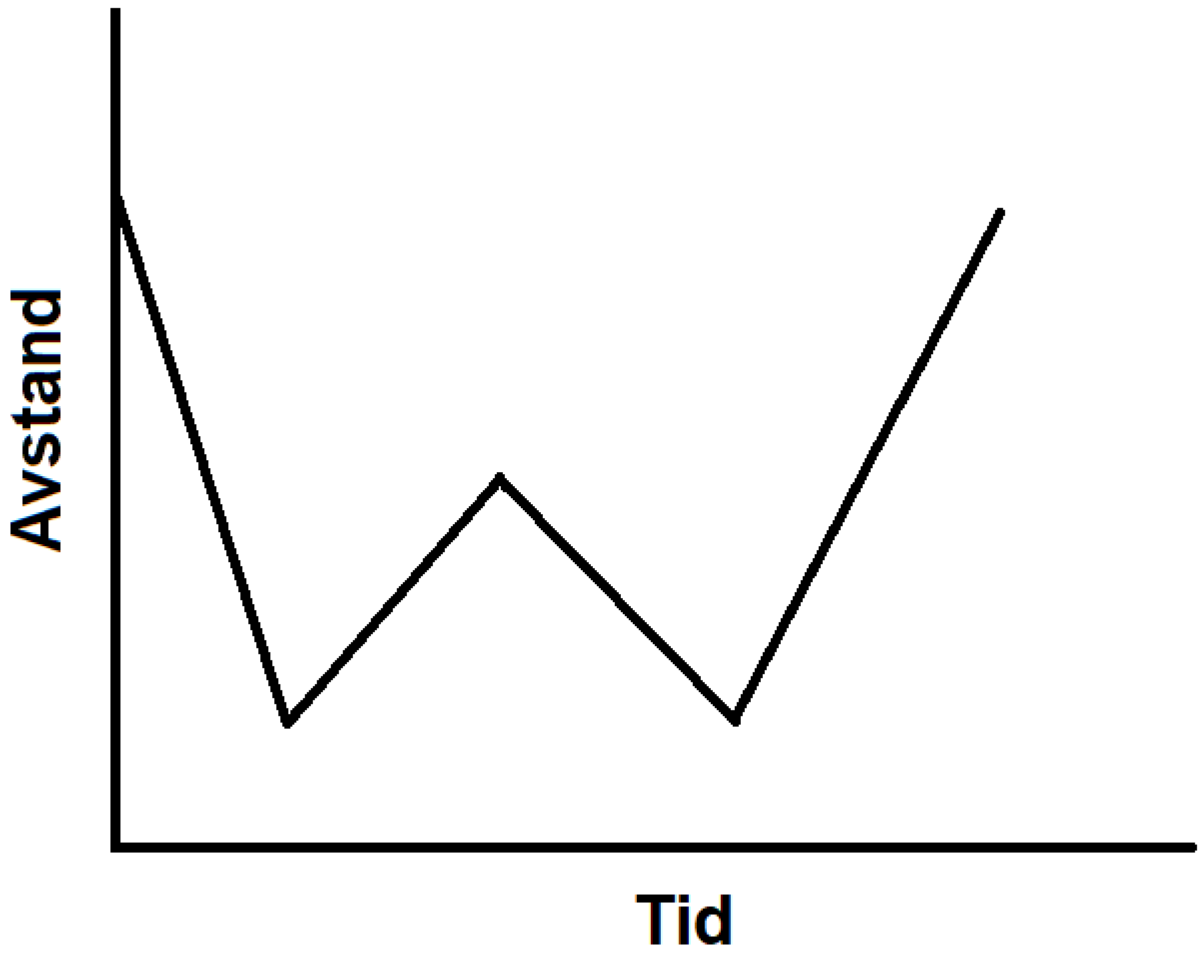
OPPGAVE 3



OPPGAVE 4



OPPGAVE 5



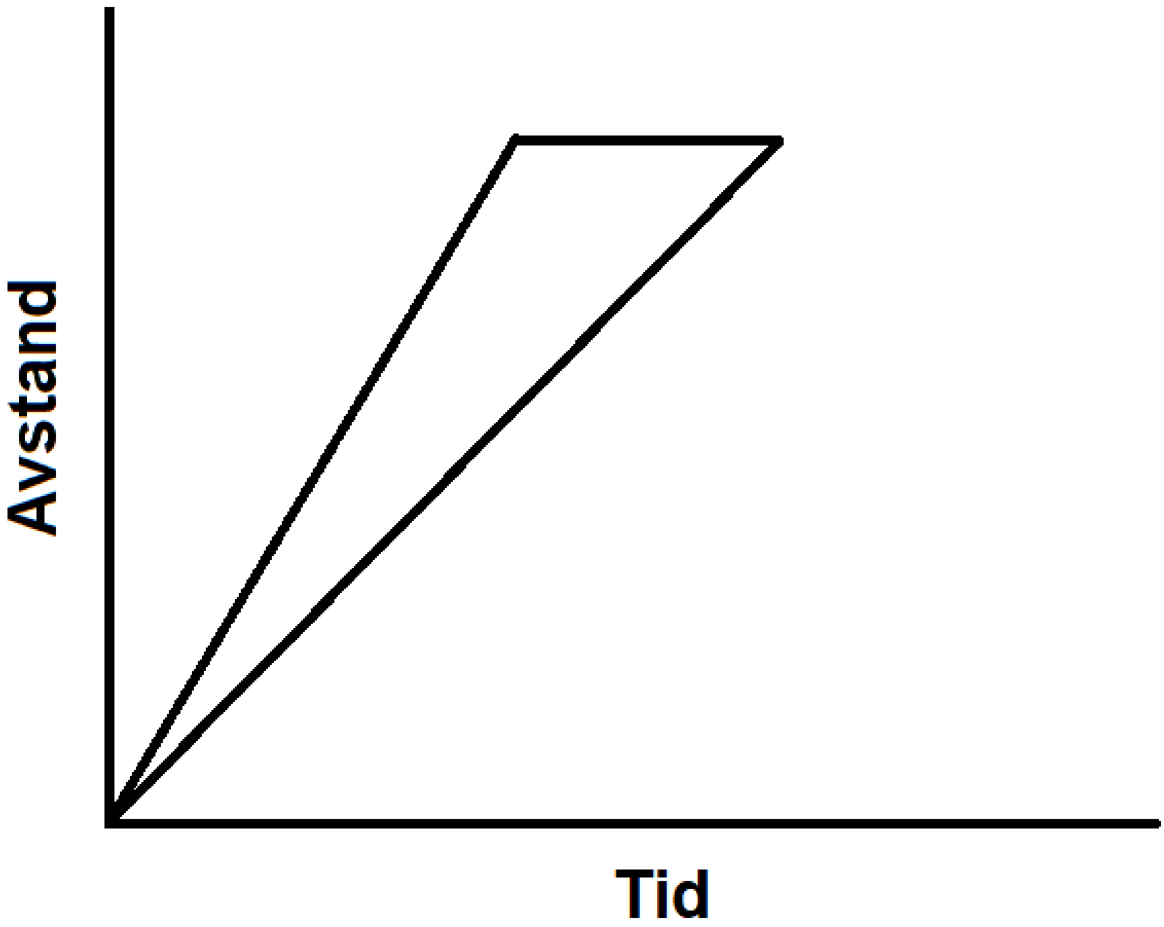
OPPGAVE 6

Tom sprang hjemmefra til busstoppet og sto der og ventet.
Han innså etter hvert at bussen allerede var gått, så han gikk hjem igjen.

OPPGAVE 7

Tom klatret opp bakken, gikk langs toppen og så løp han fort ned på den andre siden.

OPPGAVE 8



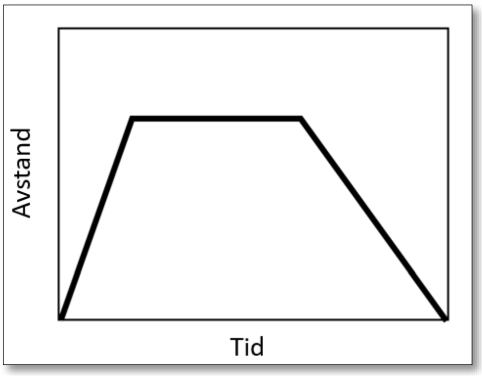
OPPGAVE 9

Vedlegg 5: Ettertest 1

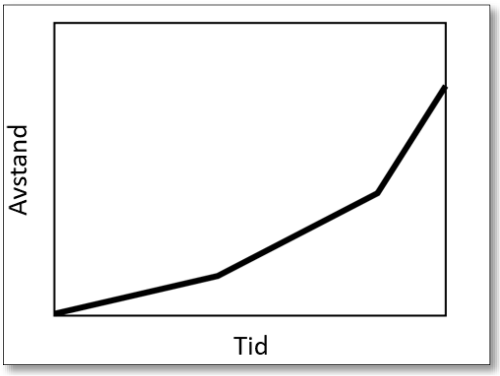
ETTERTEST 1

1. Hvilken av grafene passer best til historien? (Kryss av for riktig svar)
   - ☐ A
   - ☐ B
   - ☐ C

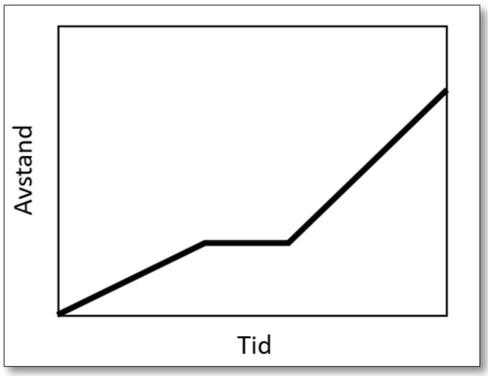
   Bortenfor huset til Tom er det en bakke.
   Tom klatret opp bakken, gikk langs toppen, og så løp han fort ned på den andre siden.



A



B

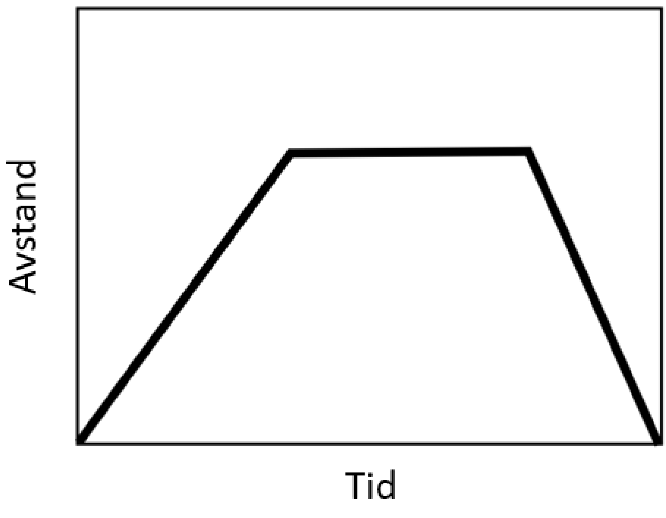


C

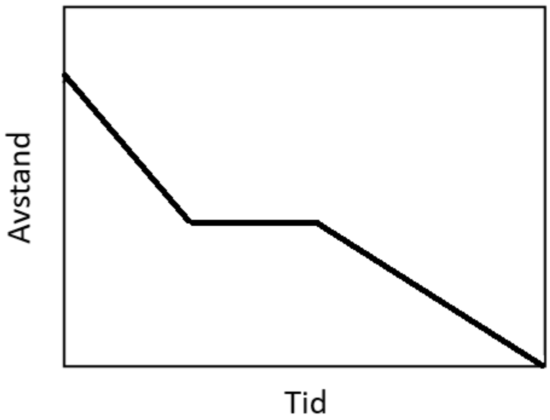
2. Hvilken historie passer til denne grafen? (Kryss av for riktig svar)
   - ☐ A
   - ☐ B

A: Tom gikk sakte langs veien. Han stoppet og så på klokka, og innså at han var sent ute, så han begynte å løpe

B: Tom gikk til butikken ved enden av gata, kjøpte ei avis og løp hele veien hjem igjen.

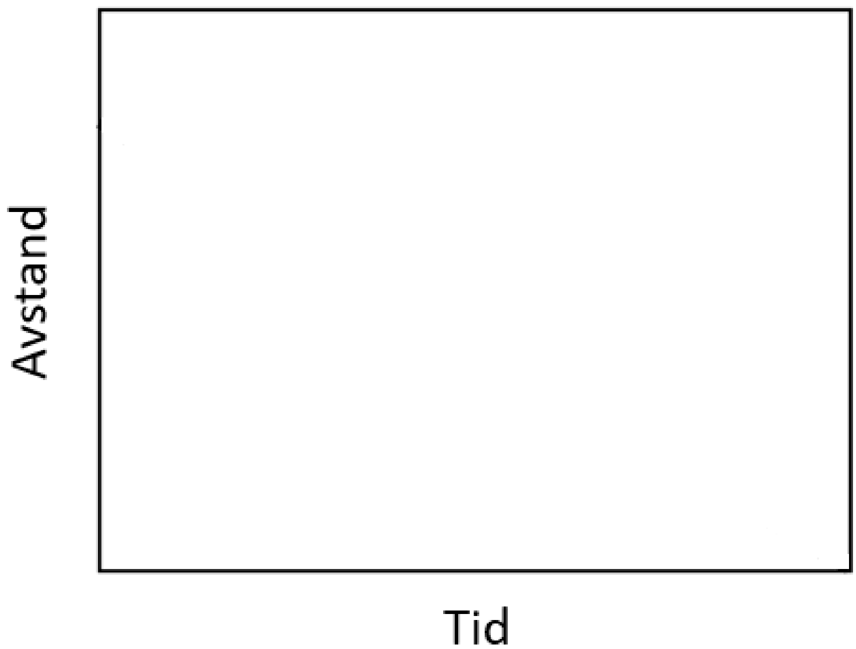


3. Lag en kort historie til denne grafiske fremstillingen



4. Tegn en grafisk fremstilling av denne historien.

Tom sprang hjemmefra til busstoppet og sto der og ventet
Han innså etter hvert at bussen allerede var gått, så han gikk hjem igjen.



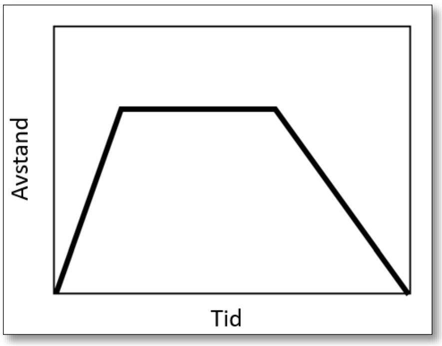
Vedlegg 6: Ettertest 2

ETTERTEST 2

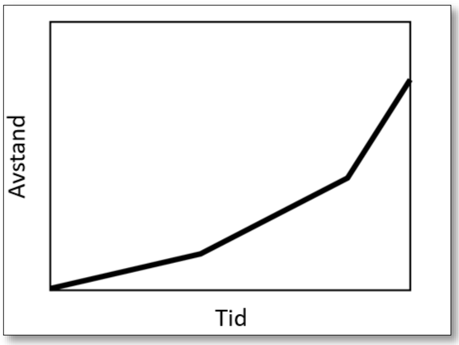
1. Hvilken av grafene passer best til historien? (Kryss av for riktig svar)

- ☐ A
- ☐ B
- ☐ C

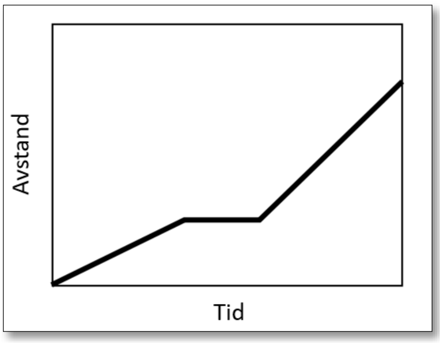
Bortenfor huset til Tom er det en bakke.
Tom klatret opp bakken, gikk langs toppen, og så løp han fort ned på den andre siden.



A



B

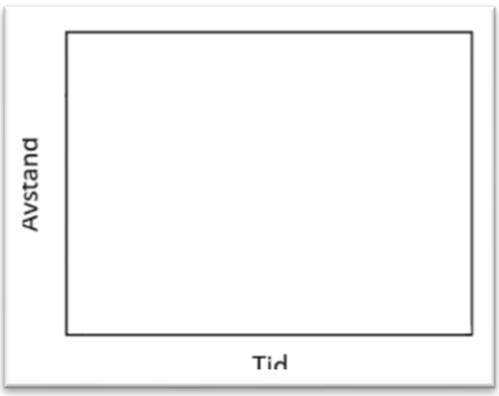


C

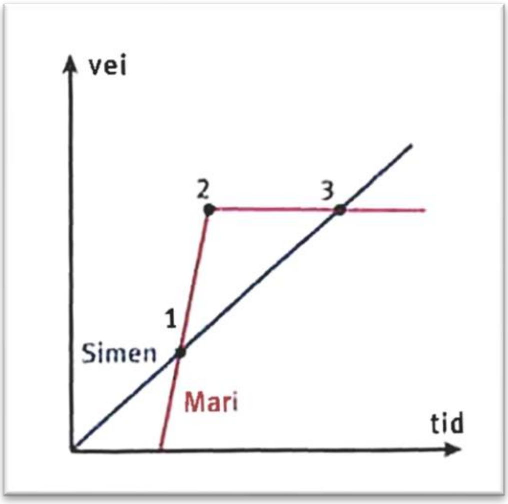
Forklar hvorfor denne passer:

2. Tegn en grafisk fremstilling av denne historien.

Tom sprang hjemmefra til busstoppet og sto der og ventet.
Han skjønte etter hvert at bussen allerede var gått, så han gikk tilbake til huset sitt.



3. Simen og Mari drar på sykkeltur.



Forklar generelt hvordan turen var for Simen og Mari

Hva skjer ved punkt 1, 2 og 3?

1:

2:

3:

Vedlegg 7: Intervjuguide

Intervjuguide

1. Hva synes dere om timen?
2. Har dere jobbet med dette før?
3. Var noe vanskelig?
4. Ser dere sammenhenger mellom de ulike aksene?
5. Forskjell på oppgaver. (tekst – figur)
6. Hvordan var det å starte med en praktisk oppgave i emnet?
7. Forslag til forbedringer av timen?
8. Gruppestørrelsen?

Oppgave hvis tid:

Tom gikk ut sammen med noen venner. Plutselig oppdaget han at han hadde glemt lommeboka si hjemme. Han løp hjem for å hente den, og måtte løpe for å nå igjen vennene sine igjen også.

Vedlegg 8: Refleksjonsnotat og prosessdokument

Vi har jobbet med denne oppgaven et helt kalenderår. Vi har jobbet tett, og står begge inne for alle deler av oppgaven. Helt i starten fordelte vi en del teori, for å komme over mest mulig. Det vi fant aktuelt å bruke leste den andre senere. Det gjorde at vi også arbeidet litt med hver våre deler i starten av skrivingen av teoridelen og metodedelen. Vi har etter hvert jobbet sammen, samtidig på det meste vi har skrevet og tekst har gått frem og tilbake mellom oss, eller blitt skrevet etter at vi har diskutert hva som skal stå der først.

I gjennomføringa av selve undervisningsopplegget, og også intervjuet etterpå, fordelte vi det slik at vi fulgte en gruppe hver. Det var derfor naturlig å videreføre dette i skrivingen av resultatene vi hadde fra eksperimentet. Siden vi hadde lydopptak av alt vi gjennomførte sammen med elevene, har vi hørt hva den andre gruppa sa og tenkte, slik at vi har et klart bilde av hva som foregikk i sin helhet. Videreutviklingen av analysedelen er derfor skrevet av oss begge, og vi har dessuten pratet mye om våre observasjoner underveis. Drøftingen og avslutningen har vi skrevet sammen, og snakket mye om også underveis i arbeide med de andre delene av oppgaven.

Samarbeidet med veileder har foregått gjennom samtaler på NTNU, samtaler via skype og Teams og via epost. Vi har begge vært med på all kommunikasjon med veileder, og har begge lest alle tilbakemeldinger fra han.

Vi har vært flinke til å benytte oss av hverandre styrker underveis i løpet, dratt hverandre når det har vært litt tungt, og har bidratt like mye til det ferdige produktet. Vi har begge to vært i full jobb under arbeidet med denne oppgaven. I tillegg er vi forholdsvis aktive på fritiden, med både kultur og idrett, så det har tidvis vært et tøft år. Og det ble ikke lettere da Covid-19 banket på døra i mars, skolene stengte, og vi bare kunne møtes digitalt – etter en full dag med digital undervisning. Uten det fantastiske samarbeidet vi har hatt, hadde vi rett og slett aldri kommet i mål. Vi er heldigvis like flinke til å finne tid, og til å bistå hverandre når det har vært nødvendig. Innimellom har vi vært en smule for flinke til å utsette så lenge vi kan, men har tatt igjen gjennom å jobbe effektivt når vi måtte. Og dessuten har vi hatt mange fine samtaler om helt andre ting når vi trengte en pause.

Det har blitt mange kopper kaffe, og utallige timer både på Teams og fysisk sammen, men det har resultert i en ferdig masteroppgave OG et samarbeide som strekker seg nå mye lenger enn til denne oppgaven – faktisk på tvers av to ungdomsskoler, og over flere fag.

Bjørnar Naalsund og Randi Sandstad

Skjematisk oversikt over hva vi har gjort når

Når?	Hva?
September -19	Valg av tema for oppgave Få oppnevnt veileder
Oktober -19	Muntlige veiledning Skrevet kontrakt Førsteutkast til problemstilling Søke etter og lese teori Søke NDS Innkjøp av sensorer
November -19	Mer lesing av teori Utvikling av fortest, planlegge og gjennomføre undervisningseksperiment, samt intervju med elevene
Desember -19	Mer lesing av teori, og start transkribering Kontakt med veileder
Januar -20	Transkribering fortsetter Skriveseminar i Trondheim Førsteutkast innledning Samtale med veileder
Februar -20	Førsteutkast teoridel Tilbakemelding fra veileder
Mars -20	Førsteutkast metodedel Skriftlig og muntlig tilbakemelding fra veileder Forberedelse av fremlegg til seminar 26. mars. Studentseminar online med veileder og kritisk leser (samt noen medstudenter)
April -20	Førsteutkast analyse Skriftlig tilbakemelding fra veileder Arbeid med å videreutvikle teoridel
Mai -20	Videreutvikling av metodedel og analysedel. Skriftlig tilbakemelding fra veileder Forsiktig start på Drøfting
Juni -20	Arbeid med førsteutkast på fullstendig oppgave Skriftlig tilbakemelding fra veileder
Juli -20	Videreutvikling av fullstendig oppgave Litt ferie =D
August -20	Gode innspill fra gode hjelpere som leste gjennom deler av oppgaven. Utvikling av et utkast til siste veiledning Tilbakemelding fra veileder og deretter. Videreutvikling av hele oppgaven, men særlig med vekt på drøftingsdelen. Egne gjennomlesinger, sjekk for grammatikk og rettskriving. Skriving av sammendrag og abstract
September -20	Skriving av refleksjonsnotat Levering

Bjørnar Naalsund og Randi Sandstad

"Men vi kan jo ikke gå tilbake i tid"

NTNU

Kunnskap for en bedre verden