Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

Anne Oline Hågenvik

Problemer med prosentbegrepet hos elever i den videregående skolen

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Heidi Strømskag
Juli 2020

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Anne Oline Hågenvik

Problemer med prosentbegrepet hos elever i den videregående skolen

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Heidi Strømskag
Juli 2020

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Med denne masteroppgaven i matematikkdidaktikk avsluttes min 5-årige lektorutdanning i realfag ved NTNU, som ble påbegynt høsten 2012. Som følge av et friår med jobbing, og ca. to år i ulik gradering av permisjon etter å ha fått barn, kan jeg se tilbake på hele 8 spennende, artige, utfordrende og slitsomme år som student i Trondheim.

Våren 2020 har vært en spesiell tid, med koronaepedimien som traff Norge (og verden). Jeg hadde avtalt å få gjennomføre datainnsamling på tre skoler på Sørlandet i Uke 12. Togbilletter var bestilt, og jeg var klar for ei uke hjemme hos mor, med fri fra både mann og barn. Jeg hadde store planer om å både få gjennomført de planlagte skolebesøkene, og komme godt i gang med analysearbeidet. Så stengte skolene, kollektivtrafikk, barnehage og resten av landet ned. Som følge av forsinket og endret datainnsamling og nedstengt barnehage måtte innleveringsfristen utsettes, og nå har familiens sommerferie gått med til å få denne oppgaven ferdig.

Jeg vil benytte anledningen til å takke de som har bidratt til å få denne masteroppgaven i havn. Først vil jeg rette en stor takk til den videregående skolen som lot meg gjennomføre datainnsamlingen digitalt hos dem. Takk til alle elevene som deltok, for både innsatsen og tiden dere la ned. Takk til lærerne, som lot meg låne av tiden som ellers kunne vært brukt til viktig og god matematikkundervisning.

Takk til veileder Heidi Strømskag, for hjelp til å finne tema for oppgaven, for innspill på oppgavene jeg laget, hvordan en endret datainnsamling kunne se ut (når jeg var nær med å gi opp), samt for kommentarer og tilbakemeldinger på både språk og innhold i oppgaven.

Takk til familie og venner, for fine opplevelser og mange gode minner fra studietiden. En spesiell takk til dere som har bidratt med korrekturlesning. Til slutt noen ord til mannen min, Hans Olaf, og vår 3-åring, Sven Olaf. Å kombinere familieliv og studier har ikke bare vært lett for meg. Dere har gitt meg fantastisk støtte og masse gode minner denne våren. Det har vært mange tårer og masse latter i arbeidet, men våren ble en fin tid hjemme, til tross for litt få arbeidstimer på dagtid. Sven Olaf: Nå er mamma ferdig med å «jobbe med prosent».

Anne Oline Hågenvik, Trondheim, juli 2020

Sammendrag

Hensikten med denne masteroppgaven har vært å kartlegge problemer elever i den videregående skolen har i arbeid med ulike typer av prosentoppgaver. Oppgaven skal besvare forskningsspørsmålet «Hvilke aspekter ved prosent er vanskelig for elever i videregående skole?». Prosent er et begrep fra matematikken som hyppig anvendes i hverdagslivet, og det er derfor viktig at alle har en god forståelse av dette begrepet. Samtidig peker flere internasjonale studier på prosent som et av de vanskeligste emnene i grunnleggende matematikk, og er noe både elever og samfunnsborgere forøvrig strever med. Det finnes lite forskning som tar for seg prosentbegrepet i Norge, selv om det finnes enkelte studier og undersøkelser som indikerer at temaet er problematisk også her i landet. Denne masteroppgaven er ment å bidra til å gi ytterligere innsikt i hvordan det står til med prosentforståelsen hos norske elever i den videregående skolen. Som det fremgår av forskningsspørsmålet har fokuset vært på å kartlegge aspekter ved prosent som er spesielt vanskelig.

Reviewartikkelen til Parker og Leinhardt (1995) er hovedkilden bak det som presenteres i denne studien, og den ble benyttet som grunnlag for design av prosentoppgavene. Studien følger et kvalitativt forskningsdesign. Jeg designet oppgaver med prosent som tema, hvor de forskjellige oppgavene var ment å teste elevenes forståelse av ulike aspekter ved prosentbegrepet. Oppgavene ble designet basert på hva tidligere studier har pekt på som krevende med prosent. Datainnsamlingen har basert seg på skriftlige besvarelser fra 49 elever fra fem ulike matematikkurs (1T, 1P, 2P, 2PY og R2). Gjennom en kvalitativ analyse ble feilene som elevene gjorde kodet, og visse fellestrekk ble funnet.

Studien min er med på å vise at prosent er et vanskelig tema, også for elever i den videregående skolen i Norge. Den er også med på å vise at enkelte språklige fraser som ofte brukes i prosentsammenheng, som har vist seg å være problematisk i internasjonale studier (hvor det var de *engelske* frasene som var problematiske), også er problematiske på norsk. Et annet funn er at elevene ikke virker kjente med forskjellen mellom å sammenlikne to prosentopplysninger i prosent og prosentpoeng. Enda en ting som viste seg problematisk for elevene var å bruke riktig referansemengde når de skal regne ut en relativ sammenheng i prosent.

Summary

The purpose of this master's thesis has been to investigate problems Norwegian high school students have in working with different types of percent problems. The research question I have attempted to answer is: « What aspects of percent are difficult for high school students? ». Percent is a concept from mathematics that is frequently used in everyday life, and it is therefore important that everyone has a good understanding of this concept. At the same time, several international studies point to percent as one of the most difficult subjects in elementary mathematics, and is something that both students and citizens otherwise struggle with. There is little research that addresses the percent concept in Norway, although there are some studies and surveys that indicate that the topic is problematic in this country as well. This master's thesis is intended to help provide further insight into how the percent understanding of Norwegian high school students is. As can be seen from the research question, the focus has been on mapping aspects of the percent concept that are particularly difficult.

The review paper by Parker and Leinhardt (1995) is the main source of this study, and the design of the percent problems were inspired by this paper. The study follows a qualitative research design. I designed problems with percent as a theme, where the different problems were meant to test the students' understanding of different aspects of the percent concept. The problems were designed based on what previous studies have pointed out as demanding with a percent. The data collection has been based on written answers from 49 students from five different mathematics courses (1T, 1P, 2P, 2PY and R2). Through a qualitative analysis, the errors made by the students were coded, and certain common features were found.

My study helps show that percent is a difficult topic, also for high school students in Norway. It also helps to show that some linguistic phrases that are often used in percent contexts, which have proven to be problematic in international studies (where it was the *English* phrases that were problematic), are also problematic in Norwegian. Another finding is that the students do not seem familiar with the difference between comparing two percent values in percent and percentage points. Another thing that proved problematic for the students was to use the correct base reference when calculating a percent relation.

Innhold

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for studien

Prosent er et begrep fra matematikken som kommer opp i dagliglivet og i media. Prosentnotasjon brukes for eksempel til å formidle hvor mye prisen på en tilbudsvare er satt ned, hvor mye du må betale i renter på boliglånet eller hvor stor andel av befolkningen som er smittet av en sykdom (mer om prosents rolle i samfunnet i Seksjon 2.1). Prosent er derfor et viktig begrep som alle å burde ha en god forståelse av. I Læreplanverket for Kunnskapsløftet [LK06] inngår prosent som en del av kompetansemålene for matematikk i grunnskolen fra 5.-7. trinn og for 8.-10. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013). Relevante kompetansemål og utdypninger om prosent i skolen blir gitt i Seksjon 2.5.

Siden prosent kommer inn i pensum allerede på mellomtrinnet, er dette gjerne dette første møtet elevene får med proporsjonalitet og multiplikative strukturer. Hvis undervisningen om prosent er hensiktsmessig, kan den være med å legge grunnlag for kunnskap og forståelse for matematiske ideer som brukes mye i matematikken i grunnskolen, og også i videregående skole. Ved å gjøre en grundig jobb her, kan en altså få mye igjen senere. Flere studier (Parker & Leinhardt, 1995; Parker, 1997) påpeker derimot at disse egenskapene ved prosent ikke blir tydeliggjort fra starten av, men at man har en tilnærming til prosent som er forenklet i undervisningen.

Ifølge Parker og Leinhardt (1995) er prosent et av de vanskeligste emnene i grunnleggende matematikk. Denne påstanden underbygges ved å henvise til forskning som dokumenterer dårlig måloppnåelse på temaet både av elever, lærere og lærerstudenter. Parker og Leinhardt sin reviewartikkel ble publisert for 25 år siden, og tar for seg studier utført internasjonalt, og mangler derfor resultat fra norske skoler. Studien har fremdeles stor verdi for denne oppgaven, da de tar for seg nesten 7 tiår med forskningsforsøk på å kartlegge elevers forståelse av prosent. I denne perioden har forskere sett på tre problem: hvordan elever lykkes, hva som er typiske feil elever gjør, og hvorfor elevene gjør disse feilene. Denne reviewartikkelen har dannet teorigrunnlaget for denne masteroppgaven, og oppgavene som ble laget.

1.2 Formål og forskningsspørsmål

Internasjonale studier viser tydelig at prosent er noe elever finner vanskelig (Parker & Leinhardt, 1995). Strømskag (2020) finner også at prosentnotasjon er med å komplisere problemet som hennes informanter (norske lærerstudenter) skal løse. Da det er lite forskning med prosent som tema på norsk, er dette et område som er relevant å forske på. Fokus for denne masteroppgaven har vært å undersøke elever i den videregående skole sin forståelse av prosentbegrepet, ettersom elevene i Norge er «ferdig» med prosentbegrepet etter grunnskolen. Studiens hensikt er å være med på å kartlegge hvilke problemer elever har i arbeid med ulike typer av prosentoppgaver. Gjennom arbeidet håper jeg å være med å bidra til å vise hvordan det står til med forståelse av prosentbegrepet hos elever i den videregående skolen, og være med og vise vei for videre studier. Jeg har derfor formulert følgende forskningsspørsmål:

Hvilke aspekter ved prosent er vanskelig for elever i videregående skole?

For å besvare forskningsspørsmålet har jeg designet et oppgavehefte med oppgaver som er ment å teste for ulike aspekter ved prosentbegrepet. Oppgavene er basert på hva tidligere internasjonale studier har identifisert som spesielt vanskelig for elevene knyttet til dette temaet. Flere av studiene peker på noen språklige aspekt som kan være spesielt utfordrende (tas opp i Seksjon 2.6 og 2.8). Noen av disse utfordringene kan være direkte knyttet til bestemte språklige fraser, som kan ha spesiell betydning når de brukes i prosentsammenheng. Min studie kan derfor være med å gi en indikasjon på om de tilsvarende norske frasene er problematisk for norske elever. På grunnlag av dette valgte jeg derfor i design av oppgavene å bruke mange ulike språklige formuleringer.

Datainnsamlingen har basert seg på elevers skriftlige besvarelser (tilsendt meg som scannede løsninger). Jeg har valgt å bare basere meg på skriftlige besvarelser, fordi det var det beste vi fikk til gitt den spesielle situasjonen med nedstengte skoler i vår. Alle informantene er elever ved en videregående skole på Sørlandet, fordelt utover ulike matematikklasser (1T, 1P, 2P, 2PY og R2). Datamaterialet jeg fikk inn tolkes gjennom en tematisk analyse, for å forsøke å identifisere hvilke aspekt ved prosent som er vanskelig for disse elevene. Jeg vil utdype mer i Kapittel 4.

1.3 Oppgavens oppbygning

Denne oppgaven er bygd opp av syv kapitler. I Kapittel 2, vil jeg ta for meg teori som ligger til grunn for denne studien, og som brukes for å diskutere mine resultater.

I Kapittel 3 vil jeg presentere og begrunne de oppgavene som er blitt designet og benyttet i studien. Det matematikkfaglige innholdet i oppgavene blir analysert. Der jeg finner det hensiktsmessig trekker jeg inn funn fra tidligere studier som støtte i begrunnelsene for noen av oppgavene.

Kapittel 4 er metodekapittelet. Her vil jeg beskrive hvordan studien er gjennomført, hvordan datamaterialet er innsamlet, og analysert. Jeg vil begrunne valgene jeg tok utifra metodisk teori. Jeg vil også drøfte ulike etiske betraktninger jeg gjorde meg underveis i studien.

I Kapittel 5 presenterer jeg resultatene fra den gjennomførte analysen. Kapittelet vil bestå av de mest aktuelle funnene som knyttes til problemstillingen min, med utdrag fra elevbesvarelser for å støtte opp om kodene.

Kapittel 6 tar for seg de viktigste funnene presentert i analysekapittelet (Kapittel 5) og diskuterer disse. Jeg har drøftet dem opp mot tidligere forskning. Til slutt vil jeg gjøre noen betraktninger rundt kvaliteten av studien.

Avslutningsvis, i Kapittel 7 har jeg oppsummert studien, og gitt noen forslag til hva jeg tenker kan være interessant og nyttig å forske på videre, samt kommer med noen didaktiske betraktninger for egen lærerpraksis. Det er i dette kapittelet at jeg har besvart mitt forskningsspørsmål.

2 Teori

Formålet med denne oppgaven kan sies å være todelt. Målet er å sette fokus på prosentbegrepet, dette igjennom å belyse hvilke aspekter ved prosentbegrepet som er problematiske. Samtidig vil jeg også legge frem bakgrunn til prosentbegrepet da lite av forskningen på området er på norsk. Reviewartikkelen til Parker og Leinhardt (1995) er hovedkilden bak det som presenteres i dette kapittelet[1].

2.1 Prosent i samfunnet

Vi møter prosent mange steder i samfunnet. Chen og Rao 2007 trekker blant annet frem hvordan prosent brukes aktivt av bedrifter, styresmakter og på børsen. Bedrifter bruker prosent til å formidle informasjon til både forbrukere og investorer. Tilsvarende brukes det aktivt av regjeringen og andre offentlige organ til å formidle synspunkter og informasjon, og naturlig nok oppgis det meste i prosent om daglige oppganger og nedganger på børsen.

Prosentvise avslag, fortjeneste, tap, sparing og økninger er en integrert del av samfunnet som vi tydelig ser ut i fra aviser, nyhetssendinger, reklamer, og annen markedsføring. Det er uten tvil nødvendig for en person å ha en forståelse av prosent for å fungere i samfunnet (Dole et al., 1997). Prosent er et anerkjent konsept, men vanskelig å lære. I videre skolegang er det spesielt aktuelt i både kjemi, algebra og samfunnsfaglige studier (Parker & Leinhardt, 1995). Prosent knytter sammen situasjoner fra den virkelige verden og matematiske konsepter som multiplikative strukturer (Strømskag, 2020).

Historisk har prosent sine tidlige røtter i handelspraksis fra Babylonia, India og Kina. Der hadde de blant annet prosent-liknende konsepter som inkluderte additiv betydning av renter og skatt, for eksempel tolv mynter på hver hundrede mynt. Begrepet har også sine parallelle røtter i gresk proporsjonal geometri, som kan spores tilbake til 300 f. Kr (Parker & Leinhardt, 1995). Vedlegg A viser Parker og Leinhardt (1995) sin tabell for prosents historiske tidslinje i større detalj. Den oppsummerer hovedidéene, tid og steder. Videre oppsummerer de det følgende:

> To accommodate the many current applications and contextual uses, percent

[1] Dette er en reviewartikkel som sammenfatter forskning på prosentbegrepet over syv tiår. Denne artikkelen danner også grunnlaget for design av prosentoppgavene som presenteres i Kapittel 3.

> has changed from a simple monetary amount of tax or interest per hundred to a function used in conjunction with the Rule of Three, to a non-monetary use as a fraction comparing parts to wholes, to a ratio comparison between different objects and sets, and, finally, to a number used for comparison of data expressed in relative form. The notational system for percent has changed along with its meanings. (s. 434)

Prosentbegrepet slik det er i dag har altså mangesidige betydninger, og jeg vil gå inn i ulike tilnærminger til prosentbegrepet i Seksjon 2.4. Før det vil jeg beskrive kort hva som menes med begrep i matematikken (i Seksjon 2.2), og gi én mulig definisjon av prosentbegrepet i Seksjon 2.3.

2.2 Begrep i matematikk

Ut ifra Duval (2006) så eksisterer matematiske begreper bare som idéer. Med dette mener de idéer inni oss, og som dermed ikke trenger å være de samme fra én person til den neste. Når en snakker om begrep i matematikken er det aktuelt å trekke frem Tall og Vinner (1981) sin artikkel, hvor de kommer med to ulike ord knyttet til begrep i matematikk som de legger forskjellig innhold i; *begrepsbilde* og *begrepsdefinisjon*. *Begrepsbilde* betegner den enkelte person/elev sin forståelse og oppfatninger knyttet til et begrep. Et begrepsbilde kan inneholde både riktige og gale oppfatninger matematisk. *Begrepsdefinisjon* omtaler de som en formell matematisk definisjon av et begrep. I artikkelen påpeker de viktigheten for at lærere må reflektere over hvilke mulige begrepsbilder elever vil kunne utvikle, som følge av måtene det undervises på. De legger frem argumenter for at elevers begrepsbilde er noe som kan endres, det er dynamisk. Begrepsbildet påvirkes og endres med bakgrunn i eksempler og erfaringer elevene eksponeres for i tilknytning med begrepet. Tall og Vinner (1981) konkluderer blant annet med at valg av eksempler i undervisningen er viktig, og må gjøres bevisst av lærere for å få elevers begrepsbilde til å samsvare med begrepsdefinisjonen til begrepet.

Basert på blant annet dette var et fokus da jeg designet oppgavene som presenteres i Kapittel 3, å lage oppgaver som i så så stor grad som mulig hadde ulike kontekster. Jeg tilstrebet også at oppgavene skulle teste for flest mulig av aspektene ved prosent som presenteres videre i dette kapittelet.

2.3 Begrepsdefinisjon og terminologi

Terminologien i denne seksjonen er inspirert av den som er benyttet i Strømskag (2020). Basert på betraktningene i min hovedlitteratur Parker og Leinhardt (1995) er det naturlig med følgende begrepsdefinisjon av hva prosent er:

> Definisjon: Prosent er et forholdstall som sammenlikner to matematiske størrelser q og r av samme type, med base hundre[2].

Dette forholdstallet kan regnes ut med formelen

$$p\,\% = \frac{q}{r} \cdot 100\,\%. \tag{2.1}$$

Her er $p\,\%$ forholdstallet uttrykt i prosent, der r er referansestørrelsen, q er den proporsjonale størrelsen som bestemmes av forholdet og p står for prosenttallet[3]. Med utgangspunkt i denne formelen kan vi si at «q er $p\,\%$ av r». Hva de to størrelsene q og r representerer vil avhenge av konteksten til sammenlikningen som gjøres, og spesifiseres gjerne med gitte språklige fraser. Dette vil utdypes gjennom eksempler underveis i oppgaven.

Hvis en størrelse r øker med p % blir resultatet den nye størrelsen:

$$r' = r + p\,\% \cdot r = (1 + p\,\%) \cdot r. \tag{2.2}$$

Denne formelen beskriver hvordan størrelsen r øker med vekstfaktoren $(1 + p\%) = (1 + p/100)$, for en gitt vekstrate på p %[4]. For å beskrive en minking istedenfor øking må vekstraten være negativ. Ved å snu om på formel (2.2) finner vi at

$$p\,\% = \frac{r' - r}{r} \cdot 100\,\%. \tag{2.3}$$

Denne formelen viser hvordan vekstraten for en prosentvis økning kan beregnes med

[2] Med «base hundre» menes her at en prosentvis sammenlikning av q og r vil uttrykke q som et antall hundredeler av r.

[3] Her er referansestørrelsen, den proporsjonale størrelsen som bestemmes av forholdet og prosenttallet mine oversettelser av begrepene/frasene *reference quantity*, *the proportional quantity determined by the rate* og *percent numeral* fra (Strømskag, 2020, s. 7)

[4] *Vekstfaktor* og *vekstrate* er mine oversettelser av *multiplying factor* og *rate of increase* i (Strømskag, 2020).

formelen (2.1), ved å sette $q = r' - r$. Med andre ord beskriver en vekstrate (i prosent) en proporsjonal relasjon mellom «forskjellen mellom ny og opprinnelig størrelse» og «den opprinnelige størrelsen».

Formel (2.3) kan også benyttes til å beregne en prosentvis forskjell mellom to ulike størrelser r' og r, hvor r er referansestørrelsen som den prosentvise forskjellen relateres til. I en slik sammenlikning vil p ha positivt fortegn hvis r' er større enn r, og negativt fortegn hvis r' er mindre enn r.

2.4 Tilnærminger til prosentbegrepet

I denne seksjonen vil jeg presentere ulike tilnærminger til prosentbegrepet; prosent som tall (Seksjon 2.4.1), prosent som intensiv størrelse (Seksjon 2.4.2), prosent som en statistikk eller funksjonsoperator (Seksjon 2.4.3) og prosent som en andel eller et forholdstall (Seksjon 2.4.4). Dette er fem meninger som prosent kan inneha, og flere studier (blant andre Dole et al., 1997; Strømskag, 2020) henviser til Parker og Leinhardt (1995) for å forklare prosentbegrepets betydninger. I den siste delseksjonen (Seksjon 2.4.5) vil jeg også presentere de fire typene forholdsammenhengene hvor prosent brukes, med eksempler på oppgaver. Felles for disse tilnærmingene er at prosent beskriver et proporsjonalt forhold mellom to størrelser. Dersom ikke annet presiseres er det som presenteres i denne seksjonen basert på forklaringene gitt av Parker og Leinhardt (1995).

2.4.1 Prosent som et tall

Mange steder defineres prosent som en oversettelse av prosentsymbolet, det vil si hundredeler, eller en viss størrelse ut av 100, per hundre eller for hver hundre. At prosent defineres på denne måten blant mange forfattere har ført til et resulterende fokus i skolen på å skulle omforme mellom ulike representasjonssystem for tall (prosent, brøk og desimaltall).

Noen vil hevde at dette kan være problematisk - det å kreve at prosent skal oversettes til desimaltall kan føre til at elevene mister forståelsen for den *sammenliknende naturen* til prosenttallet. Det er for eksempel ikke uvanlig at elever oversetter prosenttall til desimalform (spesielt for penger), og legger sammen med de oppgitte størrelsene. For eksempel om prisen på en vare som før kostet 300 kr øker med 25 %, vil disse elevene svare at den nye prisen blir (300 + 0,25) kr = 300,25 kr. I dette eksempelet er prosenttallet konvertert riktig til desimaltall, men i utregning av ny pris er den sammenliknende naturen til prosenttallet ikke tatt hensyn til. Et prosenttall (for eksempel 25 %) vil *alltid* innebære en sammenlikning av to størrelser. Det blir derfor viktig at når man lærer elevene hvordan de konverterer 25 % til desimaltallet 0,25, å samtidig lære dem at dette er 0,25 *av* en annen størrelse. Jeg har bevisst valgt å ikke lage oppgaver som tester for konverteringsproblemer i denne studien, men ønsker å få frem at litteraturen peker på det som en utfordring[5].

Parker og Leinhardt (1995) mener at denne debatten om prosents tallstatus kanskje er overdrevet, og oppsummerer dette slik:

> Percents can be changed to real numbers, which then obey the axiomatic rules of the real number system. This «translation of representation» effectively changes the hypothetical unit of reference for percent from 100 to 1, allowing, for example, the expression 50% to be used in the decimal form 0.5 or the fractional form 1/2 in computations (Risacher, 1992). Indeed, since 1860, textbooks have devoted considerable attention to translations between numerical systems, as if knowing percent meant knowing conversions (Cole & Weissenfluh). (s. 437)

2.4.2 Prosent som en intensiv størrelse

Schwartz (1988) deler inn matematiske størrelser i to typer: ekstensive og intensive størrelser. *Ekstensive størrelser* er antall, mål og verdier. *Intensive størrelser* på sin side beskriver sammenhenger, de er relasjonelle. Slike intensive størrelser kan være *eksterne forhold* som relaterer størrelser av ulik type, og *interne forhold* som relaterer størrelser av samme type[6]. Eksterne forhold har dermed en enhet, for eksempel km/t, mens interne forhold har ingen enhet, siden enhetene forkortes når forholdstallet regnes ut. Innen denne kategoriseringen vil (ifølge Risacher, 1992, som referert i Parker & Leinhardt, 1995) et uttrykk som 5,6 % være en intensiv størrelse som måler et internt forhold. Forholdstall uttrykt i prosent (p %) måler altså et internt forhold og er en intensiv størrelse. Parker og Leinhardt beskriver fordelene ved å bruke prosentnotasjon til å beskrive denne type størrelser som følger:

[5] Siden undersøkelsen ble gjort blant videregåendeelever valgte jeg å ikke ta med oppgaver som gikk direkte på konverteringer, ettersom jeg regnet med de hadde kontroll på dette.

[6] Eksterne og interne forhold er min oversettelse av internal and external ratios.

> percent enables us to (a) locate on a scale from 0 to 100 the size of a part as it relates to its whole, (b) locate on an unbounded scale the multiplicative relationships between two referent quantities, and (c) compare the magnitude of these relationships quickly based upon the natural ordering of the decimal numeration system. (s. 438)

Ved å uttrykke intensive størrelser på prosentform kan en altså gjøre visuelle sorteringer tilsvarende som for desimaltall. Nettopp dette er én av fordelene med desimaltallsystemet vårt som gjerne trekkes frem; at det gjør det mulig å visuelt sortere ekstensive størrelser, basert på plasseringen til hvert enkelt siffer som utgjør tallet ved bare et blikk. For intensive størrelser som uttrykkes på brøkform så er en slik visuell sortering ikke mulig (for eksempel 1/2, 2/5, 4/7, 7/9, 7/11), mens for intensive størrelser oppgitt i prosent blir det mulig (for eksempel 50 %, 20 %, 75 %, som er raskt å se hvordan skal sorteres). En fordel ved å bruke prosentnotasjon fremfor desimaltall til å beskrive intensive størrelser er at symbolet % forteller oss at dette tallet uttrykker en intensivt sammenheng, som kvantifiserer et internt forhold.

2.4.3 Prosent som en statistikk eller funksjonsoperator

Prosenttall brukes gjerne til å beskrive forholdet mellom to kjente mengder som en *statistikk*. I andre anvendelser, som utregning av skatt, renter eller tilbud er prosenttallet et låst tall, som kan ansees som en *funksjonsoperator*.

Sammenhenger som rapporteres i media er gjerne statistikker, for eksempel påstanden «9,7 % av barnehageansatte i Norge er menn». For å regne ut forholdstallet p % i denne påstanden, må de to størrelsene «antall barnehageansatte i Norge som er menn» og «antall barnehageansatte totalt i Norge» settes inn som nevner og teller i formelen (2.1). Statistikker som uttrykkes i prosent er lett å sammenlikne opp mot hverandre. Ved å se på de to påstandene «17,0 % av barnehageansatte i Oslo er menn» og «5,6 % av barnehageansatte i Møre og Romsdal er menn» ser en umiddelbart at andelen menn blant de som jobber i barnehager er en god del høyere i Oslo enn i Møre og Romsdal. En drar nytte av de egenskapene vi er vant med fra desimaltallsystemet.

Dersom én av referansestørrelsene for en statistikk rapportert på prosentform er kjent er det mulig å regne ut den andre referansestørrelsen fra formel (2.1). Dersom ingen av referansestørrelsene oppgis er det derimot mulig å gjemme bort eller forvrenge informasjon. Dersom Ole fikk en lønnsøkning på 1 %, mens Kari fikk en lønnsøkning på 2 % betyr ikke dette nødvendigvis at Kari får mer å rutte med enn Ole etter lønnsoppgjøret, ettersom lønnsøkningen hver av de får i kroner avhenger av deres opprinnelige lønn.

Blant annet i økonomien brukes gjerne prosenttall som en *funksjonsoperator*, til å beskrive en konstant endringsrate. I slike sammenhenger er prosenttallet et gitt tall, som sier noe om hvordan en endelig størrelse skal beregnes basert på en opprinnelig størrelse. Et eksempel er om en butikk har salg og lover 30 % rabatt på alle varene i butikken. Denne konstante rabatten kan da ansees som en funksjonsoperator, som kan brukes til å regne ut rabatten som gis på hver enkelt vare (i kroner) ved å gange opprinnelig pris på varen med 30 % (eller $0,3$ på desimalform). Et annet eksempel kan være i utregning av hvor mye skatt en person skal betale. Skattesatsen kan her ansees som en funksjonsoperator, som kan brukes til å beregne hvor mye skatt som skal betales basert på inntekten.

2.4.4 Prosent som en andel eller et forholdstall

Parker (1994, som sitert i Parker & Leinhardt, 1995)[7] deler opp sammenlikninger som kan uttrykkes med prosent i to typer. De to typene kaller de andel og forholdstall[8]. Den første typen, *andel*, er når en sammenlikner en mengde med en annen, der den første mengden er en delmengde av den andre. Den andre typen, *forholdstall*, er «alle andre sammenlikninger som kan beskrives med prosent», for eksempel til å beskrive sammenlikning av to ulike mengder, ulike aspekt ved samme mengde eller hvordan en gitt mengde endrer seg med tiden. Jeg vil ta for meg de fire ulike forholdssammenhengene i Seksjon 2.4.5.

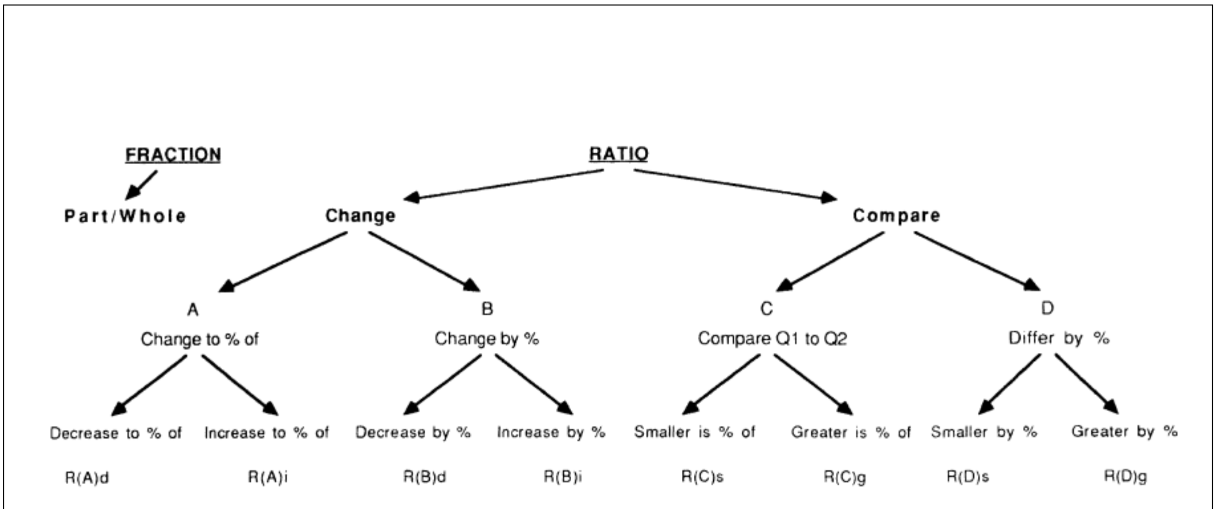
Elever introduseres gjerne til prosentbegrepet gjennom forholdstall som beskriver en sammenheng mellom en delmengde og mengde som en «del av hel»[9]. En delmengde uttrykkes som en andel av den hele mengden med en lineær skala, hvor 0 % betyr tomt og 100 % betyr fult. Summen av alle disjunkte delmengder skal til sammen utgjøre den hele mengden (100 %).

[7] Parkers doktorgradsavhandling.
[8] Andel og forholdstall er mine oversettelser av *fraction* og *ratio* i (Parker & Leinhardt, 1995).
[9] Del av hel er min oversettelse av *part-whole* i (Parker & Leinhardt, 1995)).

Eksempel: Dersom Per, Kari og Ole sammen har spist en kake, hvor Per spiste 15 % og Kari spiste 25 %, må altså Ole ha spist 60 % for at det skal stemme at hele kaka ble spist opp.

I denne typen prosentsammenlikning er det ikke mulig med prosenttall større enn 100. For eksempel vil påstanden «200 % av elevene i en klasse var til stede i timen» være meningsløs, ettersom 100 % tilsvarer at alle elevene var til stede, og det er dermed ikke fysisk mulig at flere av elevene i klassen er til stede. Det at prosentbegrepet introduseres (og kanskje utelukkende læres bort) som et forholdstall som kan beskrive en «del av hel» kan være en forklaring på hvorfor så mange elever synes det er spesielt vanskelig med prosenttall større enn 100. Denne spesielle rollen «del av hel» har hatt i undervisning av prosentbegrepet er en mulig forklaring for hvorfor Parker og Leinhardt (1995) velger å kategorisere ut andel som en helt egen type prosentsammenlikning.

2.4.5 Fire ulike forholdssammenhenger



Figur 2.1: Illustrerer de ni ulike sammenhengene som prosentoppgaver kan etterspørre (hentet fra Parker & Leinhardt, 1995, s. 439).

Prosent kan brukes til å uttrykke også andre sammenhenger mellom to mengder enn en «del av hel». Som et forholdstall beskriver prosent sammenheng eller forskjell mellom én mengde og en annen. Figur 2.1 er hentet fra Parker og Leinhardt (1995) og illustrerer de ni ulike sammenhengene som prosentoppgaver kan ha. De deler inn forholdssammenhenger i 4 ulike typer, som er gjengitt med eksempler nedenfor. Eksemplene tar for seg både øking og minking for de to sammenhengene som beskriver *endring* av en størrelse, og tilsvarende hvordan en *sammenlikning* av to ulike størrelser a og b både kan uttrykkes som at a er større enn b, og at b er mindre enn a[10]. Eksemplene er i stor grad bare oversatt, men med endringer som «$» byttet til «kr» og lignende, fra figuren[11] i Parker og Leinhardt (1995) på side 441. For å illustrere at forskjellen mellom to prosenttall kan uttrykkes på to ulike måter: i prosent (relativ forskjell) eller i prosentpoeng (absolutt forskjell) (Kristiansen, 2009), har jeg også lagt til et eksempel under forholdssammenheng B, og to eksempler under forholdssammenheng D.

Forholdssammenheng A: en mengde endrer størrelse, hvor en sammenlikner den nye mengde med den opprinnelige mengden.

- Dersom prisen på en vare øker fra 120 kr til 150 kr vil den nye prisen utgjøre 125 % av den opprinnelige.
- Dersom prisen på en vare minker fra 120 kr til 90 kr vil den nye prisen utgjøre 75 % av den opprinnelige.

Forholdssammenheng B: en mengde endrer størrelse, hvor en sammenlikner størrelsen av en *endring* med opprinnelig mengde. For de to eksemplene ovenfor kan endringen uttrykkes som

- Prisen økte med 30 kr, som tilsvarer 25 % av opprinnelig pris.
- Prisen ble redusert med 30 kr, som tilsvarer 25 % av opprinnelig pris.

Et eksempel hvor det er et prosenttall som endrer størrelse kan være at oppslutningen som et politisk parti fikk økte fra 20 % til 25 % fra en meningsmåling til en annen. Vi kan omtale dette med at oppslutningen økte med 5 prosentpoeng (den absolutte forskjellen 25 - 20), eller som at oppslutningen økte med 25 % (den relative økningen $(25 - 20)/20 = 0,25 = 25\,\%$).

Forholdssammenheng C: sammenlikner størrelsene på to ulike mengder. I en gruppe på 24 gutter og 6 jenter kan en gjøre to slike sammenlikninger:

- Antallet gutter er 400 % av antallet jenter.
- Antallet jenter er 25 % av antallet gutter.

[10]Forholdssammenheng A og B er to måter å beskrive hvordan en størrelse endrer seg. Forholdssammenheng C og D er to ulike måter å sammenlikne to ulike mengder.

[11]Nevnte figur er tatt med i Vedlegg B.

Forholdssammenheng D: sammenlikner forskjellen mellom to ulike mengder. I eksempelet ovenfor har vi at

- Antallet gutter er 300 % flere enn antallet jenter.
- Antallet jenter er 75 % færre enn antallet gutter.

Et eksempel hvor det er forskjellen mellom to prosenttall som sammenliknes kan være to banker (bank A og bank B) som tilbyr boliglån med henholdsvis 2,0 % og 2,5 % rente. Vi kan omtale denne forskjellen som at:

- Renten er 0,5 prosentpoeng høyere i bank B enn i bank A, eller som at renten er 25 % høyere i bank B enn i bank A.
- Renten er 0,5 prosentpoeng lavere i bank A enn i bank B, eller som at renten er 20 % lavere i bank A enn i bank B.

Et annet eksempel kan være å sammenlikne den økonomiske veksten i Danmark (2,0 %) og Norge (0,5 %) i 2018[12]. Denne forskjellen kan uttrykkes på flere måter:

- Vekstraten var 1,5 prosentpoeng høyere i Danmark enn i Norge, eller som at vekstraten var 300 % høyere i Danmark enn i Norge.
- Vekstraten var 1,5 prosentpoeng lavere i Norge enn i Danmark, eller som at vekstraten var 75 % lavere i Norge enn i Danmark.

2.5 Prosent i skolen

Som nevnt innledningsvis finnes det flere internasjonale studier som konkluderer med at prosent oppleves som vanskelig, både blant elever, lærerstudenter og befolkningen for øvrig. Prosent blir gjerne presentert som et av de (om ikke det) vanskeligste emnene i grunnleggende matematikk (Parker & Leinhardt, 1995; Lembke & Reys, 1994). Dole (2000) trekker frem at til tross for at studier viser at elever stort sett har god kontroll på prosent som del av 100 og enkle konverteringer, så viser det seg samtidig også ofte i studier at elever gjør det dårlig på oppgaver og problemer som inneholder prosent. I Norge er det svært få som tar for seg prosentbegrepet, og hvordan det står til med forståelsen av begrepet her i landet. Strømskag (2020) viser hvordan løsningen av en generaliseringsoppgave som

[12] Endringen i prosent av BNP pr innbygger fra år til år

handler om økning, kompliseres ved bruken av prosent. Dette bygger på en studie der lærerstudenter arbeidet med en algebraoppgave med prosentnotasjon. Med dokumentasjon fra en matematikktest gjennomført av Norsk matematikkråd annethvert år siden 1984, hevder hun videre at prosent er vanskelig for norske studenter generelt (Strømskag, 2020, s. 4). Denne testen måler forkunnskapene til begynnerstudenter på matematikktunge studier[13]. De siste årene har en prosentoppgave (som har vært med på testen siden 1984) vært brukt som eksempel i rapportene fra denne undersøkelsen. Oppgaven ber studentene regne ut (uten bruk av kalkulator) hvor stor andel (%) jenter det er på «Dahl skole» etter at de har fått oppgitt antall gutter og antall jenter på skolen. I 2017[14] var det kun 44,5 % av studentene som fikk til denne tilsynelatende enkle prosentoppgaven (Nortvedt & Bulien, 2018, s. 15). De tre foregående gangene undersøkelsen ble gjennomført (2011, 2013 og 2015) var tilsvarende andel som svarte riktig 40, 44 og 46 % (Nortvedt & Bulien, 2016, s. 23).

2.5.1 Prosent i læreplanen

Prosent inngår som en del av kompetansemålene for matematikk i grunnskolen både etter 7. årstrinn og etter 10. årstrinn. Ettersom alle informantene mine er elever i den videregående skolen er det kompetansemålene etter 10. årstrinn som er relevante for denne oppgaven[15]. Her inngår prosent direkte i to av kompetansemålene. Elevene skal kunne «samanlikne og rekne om mellom heiletal, desimaltal, brøkar, prosent, promille og tal på standard form, uttrykkje slike tal på varierte måtar og vurdere i kva for situasjonar ulike representasjonar er formålstenlege» (under «Tal og algebra») (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 8), og «beskrive utfallsrom og uttrykkje sannsyn som brøk, prosent og desimaltal» (under «Statistikk, sannsyn og kombinatorikk») (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 9). Begge disse kompetansemålene presenterer prosent som en av flere måter å representere en tallstørrelse på, og stadfester at elevene skal kunne omforme mellom prosent og andre representasjonsformer (brøk og desimaltall).

[13]Dette vil si studietilbud der studentene må ta minst 60 studiepoeng i matematikk, utenom studenter ved grunnskolelærerutdanning, Lærer 1 –7., hvor kravet er minst 30 studiepoeng.

[14]I 2017 besto utvalget av 7170 studenter.

[15]Informantene følger ulike matematikkurs i videregående skole, og har dermed alle vært gjennom ungdomsskolepensum. Studien var opprinnelig tiltenkt gjennomført blant elever som tar 1T, hvor prosent ikke eksplisitt inngår som et kompetansemål. I de praktiske matematikkursene inngår derimot prosent blant kompetansemålene, men jeg har ikke innsikt i om de hadde vært gjennom temaet før studien ble gjennomført (Utdanningsdirektoratet, 2013).

I den nye læreplanen (som trer i kraft høsten 2020) er prosent direkte nevnt i ett kompetansemål etter 10. trinn, hvor elevene skal kunne «utforske samanhengen mellom konstant prosentvis endring, vekstfaktor og eksponentialfunksjonar» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 14). Prosent vil også være relevant i de to etterfølgende punktene:

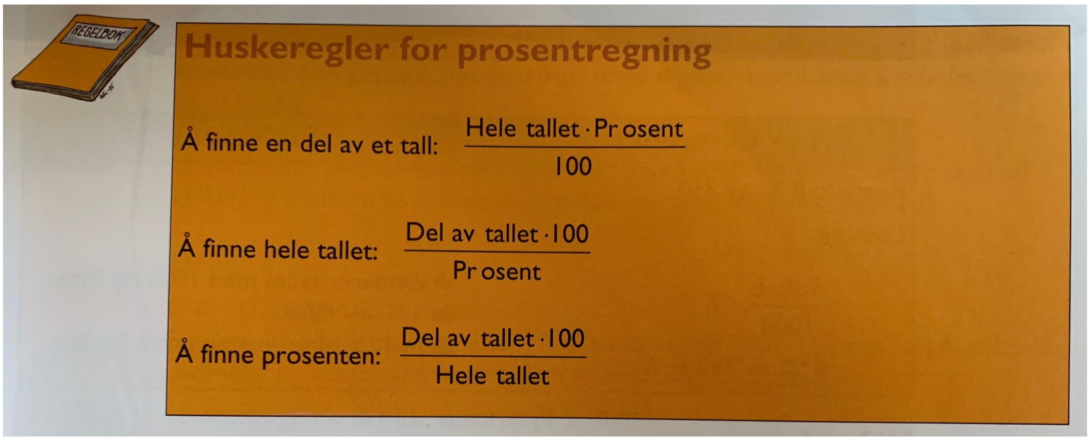
- hente ut og tolke relevant informasjon frå tekstar om kjøp og sal og ulike typar lån og bruke det til å formulere og løyse problem.
- planleggje, utføre og presentere eit utforskande arbeid knytt til personleg økonomi. (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 14)

2.5.2 Prosent i Læremiddelforlagets emnehefte

Det er utenfor omfanget til denne studien å gå inn i aktuelle læreverk som benyttes i grunnskolen, og analysere disse. Jeg har derimot hatt tilgjengelig Læremiddelforlagets emnehefte (Lohne & Knudsen, 2006), som tar for seg brøk og prosent, med utgangspunkt i de de relevante kompetansemålene fra Kunnskapsløftet for 10. årstrinn. Det er relevant å vise til et eksempel for å kunne gi et innblikk i hvordan norske elever møter begrepet i skolen. I dette emneheftet defineres prosent som følger:

> Ordet prosent betyr *av hundre*. Hvis vi deler noe i hundre deler, så forteller prosenttallet oss hvor mange av de hundre delene vi har. Dette forteller oss at det er en sammenheng mellom prosent og brøk. Tegnet for prosent er %. 1 % = 1/100. (Lohne & Knudsen, 2006, s. 31)

De påfølgende sidene brukes til å beskrive hvordan man skal omforme mellom brøk, desimaltall og prosent. Deretter presenteres prosentformelen (2.1), hvor «hele tallet» blir brukt om r, og «del av tallet» om q (se Seksjon 2.3 hvor formelen og størrelsene som inngår i den presenteres.). Seksjonen om prosent oppsummeres med huskereglene som er vist i Figur 2.2. Disse tre huskereglene er tre varianter av prosentformelen (2.1), hvor én av dem kan benyttes avhengig av hvilken størrelse i formelen som er den ukjente. Disse tre ulike situasjonene klassifiseres i litteraturen (blant annet av Parker & Leinhardt, 1995; Dole, 2000) som Type I («Del av et tall» i Figur 2.2 er ukjent), Type II («Prosenten» i Figur 2.2 er ukjent) og Type III («Hele tallet» i Figur 2.2 er ukjent). Om dette er representativt for hvordan elever møter prosentbegrepet i norsk skole, så er tilnærmingen til prosent forenklet i undervisningen. Dette samsvarer i så fall med hva Parker og Leinhardt (1995) peker på som trenden i undervisning. Her kommer det blant annet dårlig frem at prosent er et proporsjonalt forhold mellom to størrelser. Jeg mener også det er lite hensiktsmessig å fokusere i så stor grad på at det er tre *ulike* regler, ettersom dette legger opp til at elevene skal pugge formler som skal brukes i ulike situasjoner, fremfor å fokusere på at elevene skal *forstå* konseptet prosent.



Figur 2.2: Huskeregler for prosentregning (hentet fra Lohne & Knudsen, 2006, s. 43).

2.5.3 Prosentoppgaver i undervisning

I prosentoppgaver brukt i undervisningen kreves det sjeldent mange mellomregninger eller bearbeiding av opplysninger. Veldig ofte handler det om å velge ut de to riktige tallene fra oppgaveteksten, og bruke formelen (2.1) til å regne ut svaret som skal finnes. Fokuset i undervisningen er gjerne ikke på hva prosent *er*, men hvordan det kan regnes ut fort. Denne forenklingen i undervisningen kan være en av hovedgrunnene til hvorfor så mange elever strever med prosent (Parker & Leinhardt, 1995). Her er det relevant å peke tilbake på hvordan prosent presenteres i Læremiddelforlagets emnehefte, spesielt hvordan de oppsummerer huskeregler for prosentregning (se Figur 2.2 i Seksjon 2.5.2).

Parker og Leinhardt (1995, s. 424) trekker frem fire ulike typer av prosentoppgaver i undervisning, som de omtaler som tradisjonelle prosentoppgaver. De fire typene tradisjonelle prosentoppgaver er:

- *Konvertering*: Å omforme mellom tre notasjonssystem (prosent, desimaltall og brøk). For eksempel $12,5\% = 0,125 = 1/8$.

- *Øvingsoppgave*: Å finne én av tre ukjente ($x = 15$ % av 120, x % av $120 = 18$ eller 15 % av $x = 18$).
- *Skraveringsoppgave*: Eleven skal skravere deler av en figur eller et gitt antall av objekter som tilsvarer en gitt prosentandel av en mengde diskrete objekt.
- *Anvendelse på praktiske problem*: Eleven må hente ut relevant informasjon for så løse problemet ved hjelp av matematikk.

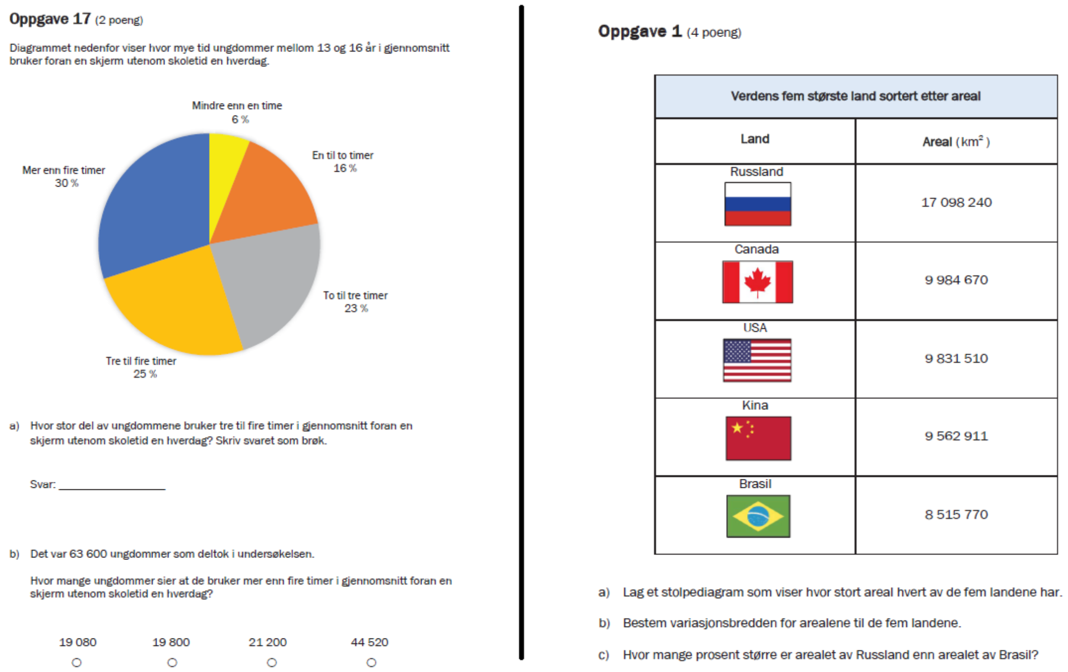
De peker på at i skolen brukes det mye tid på konverteringsoppgaver, og at øvingsoppgaver er gjerne de oppgavene elever har mest kontroll på. Spesielt gjelder dette oppgaver av typen regn ut $x = 15$ % av 120, med prosenttall mindre enn 100.

2.5.4 Prosentoppgaver i eksamensett for matematikk 10.trinn

I de to siste eksamenssettene i matematikk (2018 og 2019) gitt til elever på 10. trinn i Norge er det flere oppgaver hvor prosent blir nevnt med ord eller symbol (%) i oppgaveteksten, enten som opplysninger eller hva oppgaven ber elevene regne ut. Disse oppgavene (lagt ved i Vedlegg C og D) går ut på å enten omforme en gitt opplysning mellom brøk og prosent, eller å bruke formel (2.1) til å regne ut en ukjent størrelse. På noen av oppgavene vil en av disse operasjonene kunne brukes direkte på opplysningene i oppgaveteksten for å komme frem til det endelige svaret, og noen oppgaver krever noe mer mellomregning.

To av prosentoppgavene fra vedleggene er tatt med i Figur 2.3. I oppgavene til venstre skal elevene hente ut en andel (25 %) fra et sektordiagram, og konvertere dette til brøk (1/4). Deretter skal en annen andel (30 %) hentes ut fra diagrammet, hvor så antallet ungdommer som denne andelen tilsvarer skal regnes ut ved å gange andelen med det totale antallet ungdommer (63 600).

I oppgave c) til høyre i Figur 2.3 skal det regnes ut hvor mye større arealet av Russland er enn arealet av Brasil. Her kreves en mellomregning for å finne differansen mellom de to oppgitte arealene. Deretter kan den prosentvise forskjellen (p %) i areal regnes ut ved å dele denne differansen på «arealet av Brasil». I denne oppgaven skal det altså regenes ut et prosenttall av typen forholdssammenheng D (dette er også den eneste av denne typen).



Oppgave 17 (2 poeng)

Diagrammet nedenfor viser hvor mye tid ungdommer mellom 13 og 16 år i gjennomsnitt bruker foran en skjerm utenom skoletid en hverdag.

a) Hvor stor del av ungdommene bruker tre til fire timer i gjennomsnitt foran en skjerm utenom skoletid en hverdag? Skriv svaret som brøk.

Svar: ______________

b) Det var 63 600 ungdommer som deltok i undersøkelsen.

Hvor mange ungdommer sier at de bruker mer enn fire timer i gjennomsnitt foran en skjerm utenom skoletid en hverdag?

19 080 ○ 19 800 ○ 21 200 ○ 44 520 ○

Oppgave 1 (4 poeng)

Verdens fem største land sortert etter areal	
Land	**Areal** (km^2)
Russland	17 098 240
Canada	9 984 670
USA	9 831 510
Kina	9 562 911
Brasil	8 515 770

a) Lag et stolpediagram som viser hvor stort areal hvert av de fem landene har.

b) Bestem variasjonsbredden for arealene til de fem landene.

c) Hvor mange prosent større er arealet av Russland enn arealet av Brasil?

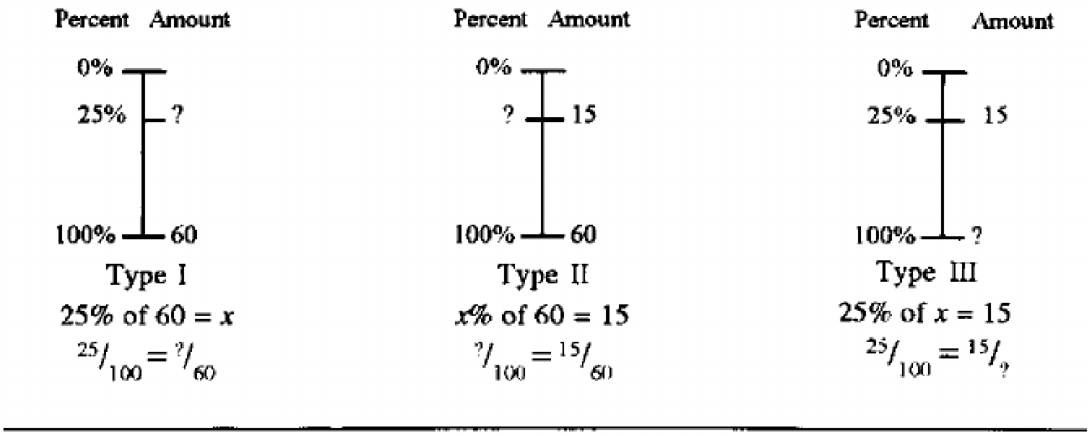
Figur 2.3: To prosentoppgaver gitt på eksamen i matematikk for 10. trinn. Til venstre: Oppgave 17, del 1, 2018 (gjengitt i Vedlegg C). Til høyre: Oppgave 1, del 2, 2019 (gjengitt i Vedlegg D).

2.5.5 To-skala tallinje: en proporsjonal problemløsningsstrategi

Dole et al. (1997) konkluderer i sin studie med at det er et behov for å undervise elevene løsningsmetoder[16]. De foreslår å lære elevene om prosent igjennom å instruere dem i en problemløsningsstrategi som tar hensyn til de proporsjonale egenskapene som prosent innehar. Dole (2000) presenterer en proporsjonal tilnærming til løsning av prosentoppgaver, som baserer seg på en to-skala tallinje[17]. Metoden består av 4 steg: a) identifiser elementene i en prosentsituasjon, b) representer prosentsituasjonen som en proporsjon på en to-skala tallinje, c) oversett den visuelle informasjonen til en proporsjons-påstand og d) utregning av proporsjonsformelen[18]. Bruk av metoden til utregning av de tre mulige ukjente i formelen (2.1) er demonstrert i Figur 2.4. På den to-skala tallinjen sammenliknes mengder med tilhørende prosenttall på en lineær måte, for å gi et klart bilde av det proporsjonale forholdet i en prosentsituasjon. Prosentsituasjonen som er brukt til dette eksempelet er 25 % av 60 = 15, hvor et av de tre tallene byttes ut med den ukjente x for å få de tre ulike problemene 25 % av 60 = x, x % av 60 = 15 og 25 % av x = 15 (henvist til som

[16]Studien tar for seg forståelsen av prosent og problemløsningsstrategier til elever på 8.-10. trinn.
[17]Denne to-skala tallinjen er tilsvarende sammenliknende skalane fra Dewar (1984) og Haubner (1992), som presenteres i Parker og Leinhardt (1995, s. 466). Dole (2000) selv påpeker også dette.
[18]Denne metoden ble opprinnelig presentert i Doles doktoravhandling fra 1999.

henholdsvis Type I, Type II og Type III). Hvordan metoden kan benyttes for oppgaver om prosentvis endring blir bli tatt opp i Seksjon 2.7.



Figur 2.4: Bruk av den to-skala tallinjen for å representere: Type I, Type II, Type III prosentsituasjoner (hentet fra Dole, 2000, s. 382).

Jeg valgte å ta med denne denne metoden som et eksempel på en løsningsstrategi for prosentoppgaver, fordi jeg har tro på at denne kan være nyttig som en visuell hjelp til å få frem prosent sin proporsjonale natur. Metoden er forholdsvis enkel og raskt å skissere opp for elever. Jeg støtter også Dole (2000) som fremlegger at den tidlig kan introduseres for elever, noe jeg tenker er en styrke.

2.6 Språkproblematikk med prosentbegrepet

Det har vist seg at prosentbegrepet har noen språklige vanskeligheter, hvor Parker og Leinhardt (1995) trekker frem tre aspekter. Det ene er at prosentspråket er veldig presist, som kan gjøre det vanskelig å tolke for noen som ikke har god kontroll på prosentbegrepet (Seksjon 2.6.1). Det andre er at preposisjonen *av* har flere betydninger (Seksjon 2.6.2)[19]. Det siste er at prosents multiplikative forhold skjules av det additive språket (Seksjon 2.6.3).

2.6.1 Presist språk

Prosentnotasjon er en veldig kompakt måte å skriftlig relatere to størrelser på, for eksempel vil «en og en halv ganger størrelsen til» bli til «150 % av» med prosentnotasjon. Selv om den komprimerte prosentnotasjonen er mer elegant, kan den være vanskeligere å tolke for

[19]Det er den engelske preposisjonen *of* som diskuteres i artikkelen, men ser for meg ut til at *av* brukes konsekvent likt i tilsvarende fraser på norsk.

elever som ikke har god kontroll på prosentbegrepet. Med andre ord skaper det problemer for elever som har et ufullstendig begrepsbilde av prosent, og som har utfordringer knyttet til å gjennomføre en transformasjon fra naturlig språk til notasjon. Notasjonen er så kompakt at hvilke referansestørrelser som sammenliknes ofte utelates, og gjerne må tolkes (Parker & Leinhardt, 1995). Et eksempel kan være at «arbeidsledigheten er for øyeblikket 8 %». For å forstå hvilke to tall som er målt opp mot hverandre for å finne prosenttallet oppgitt i denne påstanden må man vite hva arbeidsledighet er for noe.

2.6.2 Preposisjonen *av* har flere betydninger

Preposisjonen *av* brukes hyppig innen flere tema i matematikken, som i dagligtale. Det bidrar til å skape problemer da dette ordet, som prosentbegrepet, har mer enn en betydning (Parker & Leinhardt, 1995). Prosent læres også på et *av* - språk, noe som blant annet er med på å skape problemer for elever i oppgaver hvor *av* ikke er tilstede (Mueller, 1958; Parker & Leinhardt, 1995).

Et eksempel på én betydning *av* kan ha er ved multiplikasjon, hvor «7+7» kan sees på som «to av denne gruppen på syv», som kan regnes ut «$2 \cdot 7$». Matematisk kan altså *av* tolkes som at to tall skal ganges sammen. En annen bruk kan være «syv av elevene i klassen», hvor *av* brukes til å beskrive at de syv elevene tilhører klassen. En slik tolkning hvor man bruker *av* i betydningen *del av* er med å fremheve «del av hel»–betydningen til prosent. Denne språklige vanskeligheten kan derfor også være med å forklare hvorfor så mange elever har problemer med prosenttall større enn 100. Spesielt oppgaver hvor prosenttall større enn 100 skal regnes ut har vist seg å være vanskelige[20] (Parker & Leinhardt, 1995; Mueller, 1958). For å illustrere hvordan den inkluderende betydningen til ordet *av* kan gjøre det å løse en oppgave vanskelig, kan en ta for seg følgende oppgave:

> Eksempel: En ny parkeringsplass har areal 1000 m^2, mens den gamle var 700 m^2. Hvor mange prosent *av* den gamle utgjør den nye?

Den inkluderende betydningen til ordet *av*[21] kan gjøre en oppgave som den ovenfor vanskelig å forstå, siden de nye 1000 kvadratmeterne er *mer enn*, og dermed ikke kan være en *del av* de opprinnelige 700.

[20]Oppgaver av typen «finn 800 % av 25» er ikke et like stort problem, ettersom referansestørrelsen som 800 % baserer seg på er oppgitt.

[21]Syv elever *av* klassen...

2.6.3 Prosents multiplikative forhold skjules av det additive språket

De språklige formuleringene kan noen ganger være forvirrende når to størrelser relateres med et prosenttall. Prosent har et additivt språk, da vi sier «mer enn», «mindre enn», «øker med», «minker» og så videre. Derimot er dette med på å gjemme vekk den *multiplikative* naturen til prosent. Det er også med på å forsterke en antakelse (som ikke stemmer) om at prosentvis øking og minking er symmetriske, slik som for heltall. Jeg vil gå mer inn i dette i Seksjon 2.7. Her vil jeg ta opp problematikk knyttet til oppgaver om prosentvis endring, da en god del studier (Chen & Rao, 2007; Mueller, 1958; Parker, 1997; Kruger & Vargas, 2008) peker på denne type oppgavekontekster som utfordrende både for elever, men også for oss som forbrukere i hverdagen.

2.7 Problematikk knyttet til oppgaver om prosentvis endring

Som nevnt tidligere i kapittelet er prosent aktuelt i mange sammenhenger, og gjennomsyrer samfunnet vårt. På tross av dette blir prosent ofte brukt feil og misforstått (Dole, 2000). Parker (1997) trekker frem at elever fra dagligtale er vant til en additiv verden. Dette skaper problemer med prosentbegrepet, hvor det kan bli vanskelig å forstå at en prosentvis økning med påfølgende samme prosentvise nedgang ikke ender på samme sted (og kan ende langt fra hverandre om prosenttallet er stort).

I studien av Kruger & Vargas (2008) trekkes det blant annet frem at forskjeller i pris kan uttrykkes (og blir uttrykt) på mange ulike måter. Denne studien ser på forbrukeres forståelse av prosentvise forskjeller. Artikkelen innledes med et eksempel de har hentet fra (Dewdney, 1993). Eksempelet er fra California på 1970-tallet, hvor resultatene fra noen standardiserte skoleprøver falt med 60 %. På 80-tallet hadde resultatene økt med 70 % igjen. For å sette det offentlige skolesystemet i et godt lys ble dette lagt frem som om ting aldri hadde stått bedre til. Fra en nedgang på 60 % ville det derimot kreve en god del større oppgang enn 70 % for å komme tilbake til utgangspunktet (faktisk 150 %). Fokuset i studien er hvor viktig prosent er i forbrukermarkedet, da pris er den viktigste faktoren for om en forbruker velger å kjøpe en vare eller ikke.

Dersom en pris øker med 5 kr for å så senkes med 5 kr blir den endelige prisen lik den opprinnelige. Derimot, hvis prisen økes med 5 % og deretter senkes med 5 % er symmetrien brutt. Prisen øker og minker med ulik mengde, fordi dette er en relativ påstand om en multiplikativ størrelse. Referansestørrelsen som den prosentvise prisendringen regnes ut basert på endrer seg (Parker & Leinhardt, 1995, s. 448).

> Eksempel: Etter en prisoppgang på 12 % koster skoene 350 kr. Hva kostet skoene opprinnelig?

På en slik oppgave er det i følge Parker og Leinhardt (1995) vanlig for elever å først finne 12 % av 350 kr, for deretter å trekke dette fra 350 kr for å finne den opprinnelige prisen. Dette blir feil, ettersom prisoppgangen på 12 % har opprinnelig (og ikke ny) pris som sin referanse. Med mindre en «setter prøve på svaret» er det derimot vanskelig å oppdage denne type feil, ettersom det å bruke ny pris som referanse vil gi et rimelig estimat på prisoppgangen (s. 448).

Et annet eksempel: I Norge er det 25 % moms på de fleste varer (15 % på dagligvarer). Hvis du betaler 1000 kr for en vare (inkl mva), hva var prisen butikken har satt på varen (eks mva)? Her er det fort gjort å trekke fra 25 % av totalprisen, og dermed svare 750 kr. Dette blir feil, ettersom man jo ikke betaler «moms på momsen». Det riktige blir å dele på vekstfaktoren $1 + 25\,\%$ (som igjen tilsvarer gange med 0,8) for å finne prisen eks mva. Dette kommer av at momsen på 25 % skal regnes ut basert på prisen butikken setter på varen eks mva. I prinsippet kunne heller staten valgt å oppgi en prosentsats for moms som skal beregnes med den totale utsalgsprisen som kundene betaler (inkl mva) som referanse. Moms-satsen måtte da ha vært 20 %, og ikke 25 % for å gi samme avgift til staten for en gitt utsalgspris. Regneteknisk ville ikke dette hatt noe å si, men til utregningen er det viktige å vite «25 % av *hva*».

Dette siste poenget er noe som også trekkes frem i (Kruger & Vargas, 2008). En av konklusjonene fra denne studien er at valg av referanse i prosentvise sammenlikninger påvirker forbrukeres mening om hva som er bra/beste valg/støtte. Artikkelen snakker om en *innrammingseffekt*, som går ut på at i en prosentvis sammenlikning av (for eksempel) prisen på to produkter, vil hvilken av prisene som benyttes som referanse kunne påvirke hva som føles som den beste dealen, og sannsynligheten for om en forbruker velger å kjøpe et gitt produkt[22]. Innrammingseffekten vil øke med differansen mellom størrelsene som sammenliknes. I et eksempel fra studien sammenliknes prisen på to PCer, hvor de konkluderer med at prisforskjellene virket større når den billigste PCen ble brukt som referanse, enn om den dyreste ble brukt som referanse i sammenlikningen (Kruger & Vargas, 2008).

Det er ikke uvanlig å overføre tankegangen som er gyldig for naturlige tall også når prosentvise endringer skal vurderes. For eksempel, på spørsmålet om hva som er det beste tilbudet: to påfølgende avslag på 20 % og 30 %, eller ett avslag på 45 %, vil mange svare at siden $20 + 30 = 50$ er mer enn 45 så er de to påfølgende rabattene det beste tilbudet. I dette tilfellet blir dette faktisk feil, da de to påfølgende tilbudene resulterer i en total rabatt på 44 %, som jo er mindre enn 45 %. Dette er et eksempel på en typisk feil forbrukere kan finne på å gjøre (Chen & Rao, 2007; Kruger & Vargas, 2008).

Chen og Rao (2007) er en annen studie med markedsfokus, som tar for seg totalpåvirkningen av en serie med forskjellige prosentvis endringer. De observerer at det stadig gjøres feil når det kommer til påfølgende prosentvise endringer, for eksempel det at to påfølgende avslag på 40 % feil resulterer i samlet avslag på 80 %, og ikke riktige 64 %. Studien demonstrerer også med en virkelig handelssituasjon, hvordan påfølgende prosentvise avslag gir mer salg og høyere omsetning enn et ekvivalent enkeltstående prosentvis avslag. En annen feil de fant at ikke var uvanlig å gjøre, var å glemme å endre referansestørrelse underveis mellom utregninger av påfølgende prosentvise avslag og økninger. Disse resultatene blir eksempler på det Parker og Leinhardt (1995) trekker frem om at prosents additive språk i det naturlige språket er med på å antyde at en symmetri som egentlig ikke er til stede.

I en artikkel fra 1958 legger Mueller frem følgende observasjon av studenters forståelse av prosentvise forskjeller:

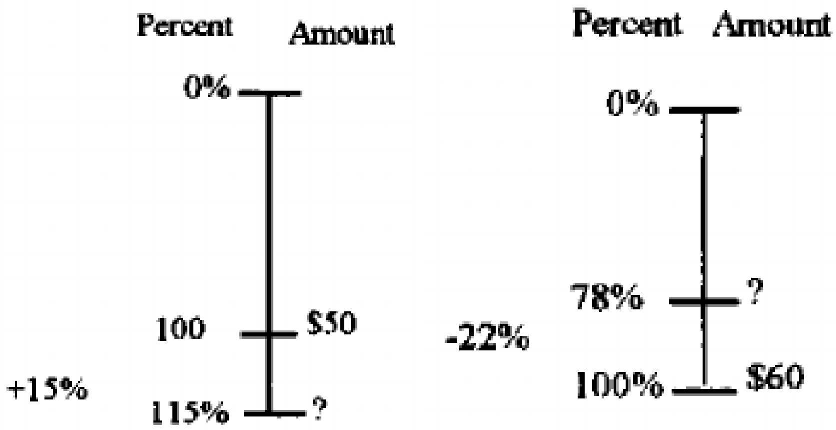
> Having taught the student a variety of percentage problems and their means of solution, teachers all too often fail to make specific mention of the important distinction between such statements as «175% of something» and «175% greater than something.» Among the college students that I teach there appears to be an ingrained notion that no difference exists between these two statements, that they are quite interchangeable. From what I can discern, my students –

[22]Innrammingseffekt er min oversettelse av «framing effect».

> and I have reason to believe they are not anomalous – were exposed to their share of work with percentage problems in their precollege training, both the per-cents-less-than-100% and the per-cents-greater-than-100% varieties. However, it would appear from the students' reactions that their teachers must have *assumed* they understood that «175% greater than» is obviously equivalent not to «175% of,» but to «275% of». (s. 475)

Det påpekes videre at det er naturlig at denne misoppfatningen ikke er like vanlig i tilfeller med prosentall mindre enn hundre, ettersom eleven da gjerne vil oppdage at dette ikke gir en mengde som er større enn det en hadde fra før. Når prosenttallet derimot er over hundre så får en jo uansett noe større enn en hadde, og en får dermed ikke denne enkle «aha»-sjekken for at noe må være feil. Mueller kommer med et forslag til hvordan forskjellen mellom de to formuleringene («175 % av noe» og «175 % større enn noe») kan læres til elever gjennom tre steg. Det første går ut på å få elevene til å forstå forskjellen mellom de to sammenliknende påstandene «så mange ganger mer enn» og «så mange ganger så mye som». Andre fase går på å oversette innholdet i disse påstandene til prosentnotasjon. Her er det ønskelig å få elevene til å se at «p % mer enn» eller «en økning av p %» blir til «(p + 100) % av». Den tredje fasen er ment å rette elevenes oppmerksomhet på at prosent undervises i et *av* språk. Istedenfor å lære seg en ny metode for tilfeller med prosentvis endringer mener Mueller derfor at det enkleste og mest hensiktsmessige er å heller lære å oversette tilfeller av prosent-større-enn til et av-språk. Dette kan enkelt gjøres ved å legge til 100 % før en fortsetter slik en ellers gjør det. Et tilsvarende argument kan selvsagt gjøres for «mindre enn» (Mueller, 1958).

Metoden presentert i Seksjon 2.5.5 kan også anvendes i situasjoner med prosentvis økning og minking. Opplysningene i oppgaveteksten må da først bearbeides for å kunne tolkes og representeres riktig med å bruke den to-skala tallinjen, som vist med eksempler i Figur 2.5. Situasjonen den venstre tallinjen baserer seg på er beregning av totalbeløpet som skal betales for en billett til \$50, med et bestillingsgebyr på 15 %. For å representere denne prosentvise økningen må tallinjen utvides lenger enn til 100 %. Den høyre tallinjen tar for seg utregning av beløp som skal betales om det er gitt 22 % rabatt på \$60 (Dole, 2000).



Figur 2.5: Bruk av den to-skala tallinjen for å representere prosentvis økning (til venstre) og minking (til høyre) (hentet fra Dole, 2000, s. 382)

.

Dole (2000) mener metoden kan være med å bidra til å øke elevers forståelse av den additive og multiplikative naturen til en prosentvis økning eller minking. I presentasjonen av disse eksemplene pekes det også på hvordan slike utregninger kan gjøres på to måter; enten kan beløpet som tilsvarer den prosentvise endringen først regnes ut, for deretter å legges til/trekkes fra det opprinnelige beløpet. Alternativt kan først det nye beløpet uttrykkes som en prosent av det opprinnelige beløpet, hvor det nye beløpet så finnes ved å gange med dette prosenttallet (115 % for økningen, og 78 % for minkingen).

Denne sistnevnte fremgangsmåten i avsnittet ovenfor samsvarer bra med metoden Mueller (1958) foreslår å undervise prosentvise endringer. Slik jeg ser det er essensen i disse fremgangsmåtene at en prosentvis endring skal regnes ut ved å gange med *vekstfaktoren* som den prosentvise endringsraten tilsvarer (se formel 2.2 og forklaring rundt i Seksjon 2.3). Det er her relevant å nevne at vekstfaktor er tatt inn som en del av kompetansemålene i matematikk for 8.-10. trinn i den nye læreplanen som blir gjeldende høsten 2020 (se seksjon 2.5.1).

2.8 Problemer med prosentoppgaver: elevene lager «tilfeldig algoritme»

I dette kapittelet presenteres noen av de typiske feilene elever gjør, samt hva de synes er vanskelig, gjengitt fra Parker og Leinhardt (1995) sin oppsummering av forskjellige studier. Tre veldig vanlige feil blant 7. og 8. klassinger (basert på studier gjort av Kircher (1926), Edwards (1930) og Bueckner (1930)) som de trekker frem er

1. Ignorerer prosenttegnet helt, dvs. skiller ikke mellom for eksempel $1/2$ og $1/2$ %.

2. Tror at prosenttegnet kan erstattes med et desimaltegn til venstre for prosenttallet. Elever som følger denne regelen konverterer 55 % til $0,55$ riktig, men også 110 % til $0,110$ og $0,9$ til 9 % som er feil.

3. Henger seg opp i gangetabellen, og for eksempel svarer $x = 4$ som løsning til $8 = x$ % av 32.

Studiene henvist til ovenfor viste at når elever løser prosentoppgaver blir det veldig ofte til at de manipulerer de gitte tallene ved hjelp av regler, istedenfor å bruke fornuft. Reglene som tas i bruk kan enten være noe de har lært, eller noe de tilsynelatende finner opp selv. Noen typiske slike feilaktige regler er gjengitt ovenfor. Payne og Allinger (1984, som sitert i Parker & Leinhardt, 1995) omtaler én slik tilfeldig fremgangsmåte som en «tilfeldig algoritme». Jeg vil benytte denne termen til å omtale tilsynelatende tilfeldige løsningsstrategier videre i oppgaven.

En annen slik feilaktig regel finnes for oppgaver hvor prosentvis økning/minking skal beregnes, hvor «det minste tallet deles på det største». Dette vil være en naturlig fremgangsmåte for en elev med en «del av hel» oppfatning av prosent. Etter å ha rekodet denne type oppgaver i dataen fra Guiler (1946b, s. 572) fant Parker og Leinhardt (1995) at over en tredjedel av elevene fulgte denne metoden.

3 Design og analyse av oppgaver

I dette kapittelet vil jeg presentere oppgavene som ble brukt i studiens datainnsamling. For å svare på mitt forskningsspørsmål (Hvilke aspekter ved prosent er vanskelig for elever i videregående skole?) designet jeg et oppgavehefte (se Vedlegg E), som består av to deler. Den første delen består av Oppgave 1, som inneholder 20 deloppgaver. Disse oppgavene skulle elevene jobbe med selvstendig. Fra og med nå vil jeg henvise til disse som Oppgave A1–A20, hvor nummereringen er kronologisk etter hvor oppgaven sto i oppgaveheftet. Det er disse som danner grunnlaget for analysen som er gjennomført i denne studien[23].

Disse 20 oppgavene ble designet med inspirasjon fra det Parker og Leinhardt (1995) skriver om prosent, og problemer de trekker frem elever har med begrepet. Jeg ønsket å designe oppgaver med relevante, aktuelle og reelle kontekster, ettersom prosent er et anvendt begrep. Jeg ønsket også å dekke flest mulig aspekter ved begrepet, slik at det var mulig å få et datagrunnlag på hvilke aspekter ved prosent elevene hadde kontroll på, og ikke kontroll på. Det er relevant å se hvordan elever i Norge løser ulike prosentoppgaver, da studiene Parker og Leinhardt (1995) refererer til er alle internasjonale. Elever i den videregående skolen var målgruppen, da jeg ønsket at de skulle være ferdige med å ha lært om temaet i den norske grunnskolen. Alle oppgavene jeg har laget skal derfor være mulig å løse med ungdomsskolepensum. Det er likevel noen av oppgavene som vil være på grensen av hva vi kan forvente elever har kompetanse til etter fullført ungdomsskole.

I designet av oppgavene var et av momentene jeg ønsket undersøke de *språklige vanskelighetene* knyttet til prosentbegrepet. Blant disse 20 oppgavene var hele 11 av de 20 deloppgavene i større eller mindre grad ment å se på hvordan informantene mine tolker begreper knyttet til prosentvis endring eller forskjell (Oppgave A5, A6, A10–A18). I følge tidligere forskning (se Seksjon 2.7) er prosentvis endring noe elever ofte har vanskeligheter med, som var hvorfor jeg designet så mange oppgaver som gikk på dette. Jeg valgte å ikke ta med oppgaver som gikk direkte på omdannelse mellom brøk, desimaltall og prosent, ettersom jeg regnet med at informantene (elever i den videregående skolen) hadde god kontroll på dette. Dersom det ikke skulle stemme, forventet jeg å kunne se det

[23]Andre del av oppgaveheftet består av Oppgave 2 og 3, som var tiltenkt å skulle arbeides med i grupper. Analysen i denne studien har ikke endt opp med å basere seg på disse oppgavene (begrunnes i Seksjon 4.2.1), og jeg har derfor valgt å ikke ta med presentasjonen av og løsningsforslag til disse oppgavene.

tydelig fra besvarelsene.

Jeg har valgt å gruppere Oppgave A1–A20 etter hvilken type prosentsammenlikning (fra Figur 2.1 i Seksjon 2.4.5) som er aktuell i oppgaven. De første seks oppgavene (A1–A6) er tradisjonelle øvingsoppgaver, og presenteres i Seksjon 3.1. Siden slike oppgaver ikke har noen kontekst er det ikke mulig å kategorisere hvilken type prosentsammenlikningen oppgaven tilhører. De resterende Oppgavene A7–A20 er fordelt ut på tre seksjoner: Prosent som en andel (Seksjon 3.2), Prosent som et forholdstall (forholdssammenheng B) (Seksjon 3.3), Prosent som et forholdstall (forholdssammenheng D) (Seksjon 3.4). For hver enkelt deloppgave vil jeg ta for meg hvilke(t) aspekt oppgaven er ment å teste, presentere én eller noen ulike måter oppgaven kan løses på, og eventuelle feil og misforståelser jeg forventet kunne dukke opp i elevbesvarelsene.

3.1 Tradisjonelle øvingsoppgaver: A1–A6

a) Regn ut x for at hver av de følgende påstandene skal stemme.

i) x er 23 % av 125.
ii) 138 er x % av 249.
iii) 981 er x % av 756.
iv) 756 er x % av 981.
v) 200 er x % mer enn 100.
vi) 100 er x % mindre enn 200.

Figur 3.1: Oppgave A1–A6

Oppgave A1–A6, vist i Figur 3.1, er seks tradisjonelle øvingsoppgaver (beskrevet i Seksjon 2.5.3). For å tilpasse vanskelighetsnivået til elever i den videregående skolen valgte jeg å bruke tallverdier som ikke nødvendigvis ga runde svar. Oppgavene A1 og A2 var ment å teste om elevene kunne gjøre slike «rett frem utregninger», og om det har noe å si hvilken av størrelsene som er den ukjente i en slik utregning. Oppgave A3 og A4 var sammen ment å teste om prosenttall større enn 100 var et problem i slike tradisjonelle øvingsoppgaver. I både Oppgave A5 og A6 er det en prosentvis forskjell mellom to mengder som skal finnes. Disse oppgavene undersøker blant annet om elevene tolker frasene *mer enn* og *mindre enn* riktig i prosentsammenheng.

I Oppgave A1-A4 kan ordet *er* byttes ut med likhetstegn, mens *av* kan byttes ut med gangetegn (se Seksjon 2.6.2 for ulike betydninger av ordet *av* i prosentsammenheng). For hver av de fire oppgavene får vi dermed en likning som kan løses:

- Oppgave A1: $x = 23\,\% \cdot 125 = 0,23 \cdot 125 = 28,75$.
- Oppgave A2: $138 = x\,\% \cdot 249$, som gir $x\,\% = 138/249 = 0,5542 = 55,42\,\%$.
- Oppgave A3: $981 = x\,\% \cdot 756$, som gir $x\,\% = 981/756 = 1,2976 = 129,76\,\%$.
- Oppgave A4: $756 = x\,\% \cdot 981$, som gir $x\,\% = 756/981 = 0,7706 = 77,06\,\%$.

I Oppgavene A3 og A4 ble samme tall brukt i motsatt rekkefølge, hvor den ansett vanskeligste (som gir prosenttall større enn 100) ble gitt først. Dette ble gjort bevisst, for å se om noen elever gjorde den vanlige feilen å dele minste på største tall, og eventuelt om de innså egen feil og justerte svaret på Oppgave A3 etter å ha løst Oppgave A4.

I Oppgave A5 viser ordene *mer enn* at en differanse må regnes ut. Forskjellen mellom 200 og 100 er $200 - 100 = 100$. Ettersom 100 kommer etter *enn* i oppgaveteksten, er det denne størrelsen som den prosentvise forskjellen skal relateres til. Vi finner dermed $x\,\% = 100/100 = 1 = 100\,\%$.

Tilsvarende som *mer enn* i Oppgave A5 viser *mindre enn* i Oppgave A6 at det ukjente prosenttallet skal regnes ut basert på en differanse, som kan finnes fra de oppgitte opplysningene ved en mellomregning: 100 er $200 - 100 = 100$ mindre enn 200. Her peker *enn* på at 200 er størrelsen som den prosentvise forskjellen skal relateres til. Dette gir oss $x\,\% = 100/200 = 0,5 = 50\,\%$.

En mulig feil som elevene kunne gjøre på Oppgavene A5 og A6 var å tolke *mer/mindre enn* som *ganger større/mindre enn*. En annen mulig feil vil være å relatere forskjellen mellom de to størrelsene til feil referansestørrelse.

3.2 Oppgaver med prosent som en andel

3.2.1 Oppgave A7

b) Det bor 37462 innbyggere i en by. Av disse er 1274 ikke vaksinerte. Hva er vaksinasjonsdekningen i prosent i denne byen?

Figur 3.2: Oppgave A7

I Oppgave A7 (Figur 3.2) blir elevene bedt om å regne ut vaksinasjonsdekningen i en by. Konteksten i oppgaven er blant annet aktuell fra debatt om vaksinemotstand de siste årene, og ble ikke mindre aktuell etter pandemiutrbruddet i vår. I oppgaven skal en *del av hel* regnes ut, men hvor denne andelen ikke kan finnes ved å direkte dele de oppgitte tallene i teksten på hverandre. Vaksinasjonsdekningen betyr andelen av befolkningen som *er* vaksinerte, og vi skal dermed relatere antall vaksinerte innbyggere til totalt antall innbyggere i byen. Det totale antall innbyggere (som er oppgitt til å være 37462) blir altså referansestørrelsen for denne prosentvise sammenlikningen. Antall innbyggerne som er vaksinerte er ikke oppgitt, men kan finnes fra en mellomregning ved å trekke de som ikke er vaksinerte fra det totale innbyggertallet. Dette gir oss at $37462 - 1274 = 36188$ av byens innbyggere er vaksinerte. Vaksinasjonsdekningen kan så regnes ut til å være $36188/37462 = 0,96599 \approx 96,6$ %.

Siden andel vaksinerte og andel ikke-vaksinerte er disjunkte mengder som til sammen utgjør alle innbyggere i byen kan svaret også finnes ved å først regne ut at $1274/37462 \approx 3,4$ % ikke er vaksinerte, og fra det finne at vaksinasjonsdekningen er 100 % - $3,4$ % = $96,6$ %.

3.2.2 Oppgave A9

d) Det er 73 gutter og 81 jenter i 1. klasse på en videregående skole. 37 % av elevene har valgt matematikk 1T. 48 % av guttene har valgt matematikk 1P. Hvor mange jenter har valgt matematikk 1T?

Figur 3.3: Oppgave A9

Den ukjente størrelsen som skal finnes i Oppgave A9 (Figur 3.3) er antallet jenter i 1. klasse på en videregående skole som har valgt matematikk 1T. For å komme frem til dette antallet må opplysningene i oppgaven behandles, og det kreves flere mellomregninger med formelen (2.1). Referansestørrelsene som inngår i formelen vil være forskjellig i hver av disse mellomregningene.

Alle elevene i 1. klasse må enten velge 1P eller 1T. De må også enten være gutt eller jente[24]. Det er $73 + 81 = 154$ elever i 1. klasse. Av disse har $37\,\% \cdot 154 = 0,37 \cdot 154 = 57$ elever valgt matematikk 1T.

[24] I dette eksempelet ser man bort fra elever som identifiserer seg som ikke-binær eller som er født intersex.

Fra opplysningen om at 48 % av de 73 guttene har valgt 1P, finner vi at de resterende $(100-48)\,\% = 52\,\%$ av guttene har valgt 1T. I antall blir dette $52\,\% \cdot 73 = 0,52 \cdot 73 = 38$.

Siden alle som har valgt 1T som ikke er gutter må være jenter har vi nå nok opplysninger til å regne ut at $57 - 38 = 19$ jenter har valgt matematikk 1T.

Denne oppgaven kan også løses ved regne ut sannsynligheten (statistikken) $P(T \cap J)$ for at en tilfeldig utvalgt førsteklassing tilhører mengden $T \cap J$. Her, og i det følgende, viser mengdene G og J til gutt og jente, mens P og T til 1P og 1T. Fra opplysningene i oppgaveteksten kjenner vi sannsynlighetene $P(G) = 73/154$, $P(J) = 81/154$, $P(P|G) = 48\,\%$ og $P(T) = 37\,\%$. Den ukjente sannsynligheten vi trenger finne er $P(T \cap J)$. Siden elevene som velger 1T må være enten gutt eller jente har vi $P(T) = P(T \cap J) + P(T \cap G)$, som kan snus til

$$P(T \cap J) = P(T) - P(T \cap G). \tag{3.1}$$

For å finne den ukjente $P(T \cap G)$ i likningen ovenfor kan vi bruke at alle gutter må velge enten 1P eller 1T, så vi har $P(G) = P(T \cap G) + P(P \cap G)$, som kan snus til $P(T \cap G) = P(G) - P(P \cap G)$. Bayes setning gir oss videre at $P(T \cap G) = P(G) - P(P|G) \cdot P(G) = P(G)[1 - P(P|G)]$. Ved å sette inn i likningen ovenfor får vi

$$P(T \cap J) = 1 - P(G)[1 - P(P|G)] = 37\,\% - (73/154) \cdot (1 - 48\,\%) \approx 12,35\,\%. \tag{3.2}$$

Det er altså $12,35\%$ sannsynlighet for å trekke en elev som er jente og har valgt matematikk 1T. Antallet jenter som har valgt 1T finnes til slutt ved å gange denne sannsynligheten med totalt antall elever: $154 \cdot 12,35\,\% = 19$ jenter.

Notasjonen og utregning i løsningen ovenfor baserer seg på Bayes setning og betinget sannsynlighet, som først er pensum i R1 i LK06. Siden dette oppgaveheftet i utgangspunktet var laget for 1T-elever, forventet jeg ikke å se henvisninger til disse begrepene i elevenes løsninger da jeg designet oppgaven. Å «...uttrykkje sannsyn som brøk, prosent og desimaltal» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 8) er blant kompetansemålene for 10. klasse. Alle sannsynlighetene som trengs kan finnes gjennom tilsvarende argumentasjon som i det første løsningsforslaget. Det ville derfor ikke være uventet å finne løsninger som baserte seg på sannsynligheter.

3.2.3 Oppgave A19

n) Cecilie ønsker å kjøpe en bolig som koster 2 490 000 kr. Hvor mye egenkapital trenger hun (kravet er minst 15 %)?

Figur 3.4: Oppgave A19

Oppgave A19 (Figur 3.4) handler om å finne ut hvor mye Cecilie trenger i egenkapital for å kjøpe en bolig. Boligprisen er oppgitt til 2 490 000, og frasen «kravet er minst 15 %» sier implisitt at hun trenger 15 % *av* boligprisen på 2 490 000 kr.

Ved å bytte ut *av* med gangetegn får en at Cecilie trenger $15\% \cdot 2\,490\,000$ kr $= 373\,500$ kr i egenkapital for å kjøpe boligen.

3.2.4 Oppgave A8 - ikke en del av datagrunnlaget

c) I en klasse fikk elevene følgende karakterer på en matteprøve.

Karakter	Antall	Prosent
6	3	
5	4	
4	7	
3		7
2	4	
1		3

Fyll ut resten av tabellen, både antall og prosent på alle karakterene. Hvor mange elever er det i klassen?

Figur 3.5: Oppgave A8

Denne oppgaven var ment som en litt vrien «del av hel»-oppgave, hvor den ukjente «hele» først må finnes for å kunne regne ut de resterende ukjente størrelsene. Oppgaven var tenkt å kunne løses som følger: Summen av alle prosenttallene skal bli 100. Med x elever i klassen får en da

$$100 \cdot 3/x + 100 \cdot 4/x + 100 \cdot 7/x + 7 + 100 \cdot 4/x + 3 = 100, \tag{3.3}$$

$$100 \cdot (3 + 4 + 7 + 4)/x = 90, \tag{3.4}$$

$$18 = 0,9x, \tag{3.5}$$

$$x = 18/0,9 = 20. \tag{3.6}$$

Det er 20 elever i klassen. Da kan resten av tallene regnes ut, som gir tabellen:

Karakter	Antall	Prosent
6	3	15
5	4	20
4	7	35
3	1,4	7
2	4	20
1	0,6	3

Den observante leser fikk nå med seg at denne deloppgaven dessverre inneholdt en feil. For å få oppgaven til å gå opp må antall elever som fikk karakterene 3 og 1 være desimaltall, og den matematiske løsningen er dermed ufysisk. Denne feilen var kjent for meg da jeg utarbeidet oppgaveheftet, men rettingen ble dessverre ikke med i heftet jeg sendte ut til elevene. Som følge av denne feilen valgte jeg å utelate besvarelser på denne oppgaven fra analysearbeidet.

Dersom oppgaven skal brukes igjen kan for eksempel prosenttallene 7 og 3 (for karakterene 3 og 1) oppgitt i tabellen i oppgaveheftet endres til 5 og 5. En annen justering kunne vært å gange alle oppgitte elevantall per karakter med 10 (6: 30, 5: 40, 4: 70 og 2: 40), men da burde kanskje «en klasse» også byttes ut med «et klassetrinn», siden 200 elever ikke er innenfor den nye lærernormen.

3.3 Oppgaver med prosent som forholdstall (forholdssammenheng B)

3.3.1 Oppgave A12

g) Du har et fult glass med vann, og heller ut halvparten. Hva blir den prosentvise endringen av mengde vann i glasset?

Figur 3.6: Oppgave A12

I Oppgave A12 (Figur 3.6)[25] reduseres vannmengden i et glass med halvparten av opprinnelig mengde. En slik prosentvis reduksjon kan beregnes med formel (2.3), hvor «den nye størrelsen» r' er 0,5 (halvparten av glassets volum), og den «opprinnelige størrelsen» r er 1,0 (hele glassets volum)[26]. Ved å sette inn disse størrelsene i formelen finner vi $p\,\% = -50\,\%$, hvor det negative fortegnet beskriver at dette er en reduksjon. Mengden vann i glasset reduseres altså med 50 %.

Oppgave A12 og A13 tester prosentvis endring, og om elevene relaterer denne endringen til riktig referansestørrelse. For en prosentvis endring skal endringen relateres til den opprinnelige mengden, om ikke annet spesifiseres. I denne oppgaven forventet jeg at elevene ville få til å bruke riktig referanse, ettersom utgangspunktet var en hel (det fulle glasset).

3.3.2 Oppgave A13

h) Du har et halvfult glass med vann, og fyller det helt fult. Hva er den prosentvise endringen av mengde vann i glasset?

Figur 3.7: Oppgave A13

Det riktige svaret i Oppgave A13 er at vannmengden øker med 100 %. Her kan vi bruke samme fremgangsmåte som i Oppgave A12. I dette tilfellet er «den nye størrelsen» $r' = 1,0$ (hele glassets volum), mens «den opprinnelige størrelsen» r er 0,5 (halvparten av glassets

[25] Merk at det er en skrivefeil her, skal stå halvfullt og fullt ikke «halvfult» og «fult» som det gjør i oppgaveteksten på Oppgave A12.

[26] I utregningene i Oppgave A12 og A13 benytter jeg «hele glassets volum» som en enhet.

volum). Utregning med formelen (2.3) gir en vekstrate på $p\,\% = 100\,\%$, og mengden vann i glasset øker altså med 100 %.

På denne oppgaven var jeg mer spent på om elevene kom til å bruke riktig referansemengde. En mulig forvirring her er at glasset som vannet ligger oppi utgjør *en enhet* (en hel). Det er ikke plass til mer enn et fullt glass vann, og dermed kan det være fort gjort å tenke på glassets volum som referansemengden. Oppgaven spør derimot om den prosentvise endringen av mengde vann. Etter konvensjonen skal en slik endring oppgis relativt opprinnelig mengde, som i denne oppgaven var et halvfult glass.

3.3.3 Oppgave A15

j) Ei skjorte kosta opprinnelig 899 kr. Prisen ble først satt ned med 20%, og deretter ble prisen satt ned med 20 % til. Hva er den totale rabatten jeg får om jeg kjøper denne skjorta? Hvor mye betaler jeg?

Figur 3.8: Oppgave A15

Oppgave A15, som kan sees i Figur 3.8, spør om den totale rabatten og prisen til en skjorte etter to påfølgende rabatter på 20 %. En rabatt på 20 % tilsvarer en vekstfaktor $0,8$. Prisen som betales kan dermed finnes ved å skalere opprinnelig pris på skjorta med $0,8$ to ganger. Dette vil si prisen skaleres totalt ned med faktoren $0,8 \cdot 0,8 = 0,64 = 64$ %. Den totale rabatten blir da $100\,\% - 64\,\% = 36\,\%$, og prisen å betale blir $0,64 \cdot 899$ kr $= 575$ kr. En annen måte jeg forventet at elevene kunne løse oppgaven på var ved å bruke flere mellomregninger, og finne prisen som betales på følgende måte:

Det første avslaget er på $20\,\% \cdot 899 = 0,2 \cdot 899 = 179,80$ kr, som gir den nye prisen $899 - 179,80 = 719,20$ kr. Det er denne prisen utregningen av det neste avslaget skal basere seg på. Det andre prisavslaget blir derfor på $20\,\% \cdot 719,20 = 0,2 \cdot 719,20 = 143,84$ kr. Ved å trekke fra dette avslaget fra 719,20 kr får vi den endelige prisen på 575 kr. Den totale rabatten i kroner blir $179,80 + 143,84$ kr $= 323,64$ kr, som gir en total rabatt i prosent på $232,64/899 = 36\,\%$.

Denne oppgaven tester om elevene har forstått at to etterfølgende tilbud på 20 % ikke tilsvarer en total rabatt på $20\,\% + 20\,\% = 40\,\%$, ettersom referansestørrelsen (prisen det prosentvise avslaget baserer seg på) endres etter den første rabatten er gitt. Den typiske feilen jeg var ute etter her var altså at total rabatt var 40 %. I denne oppgaven var det også interessant å observere om elevene oppgir totale rabatten i kroner eller i prosent, ettersom dette ikke blir presisert av spørsmålet.

3.3.4 Oppgave A16

k) En mandag var bensinprisen 12,50 kr/liter. Tirsdag var den satt ned med 7 %. Hvor mye må den settes opp igjen onsdag for å være tilbake på 12,50 kr/liter?

Figur 3.9: Oppgave A16

Konteksten til Oppgave A16, som vist i Figur 3.9, er bensinpriser. Elevene blir spurt om hvor mye bensinprisen må *settes opp*, etter at den først er *satt ned* med 7 %, for å komme tilbake til samme prisnivå. Her kan oppgaven løses ved å regne ut følgende:

På tirsdag ble bensinprisen satt ned med $7\,\% \cdot 12,50$ kr/liter $= 0,875$ kr/liter, som betyr at bensinprisen var $12,50 - 0,875 = 11,625$ kr/liter denne dagen. For at bensinprisen skal være tilbake på 12,50 kr/liter på onsdag må prisen settes opp igjen med $0,875$ kr/liter. Prosentvis blir denne endringen $0,875/11,625 \approx 0,0753 = 7,53\,\%$, hvor tirsdagens pris er brukt som referanse, ettersom dette er «opprinnelig mengde» for denne endringen. I oppgaveteksten spesifiseres det ikke om «hvor mye» skal oppgis i prosent eller kroner per liter. Det blir derfor riktig å svare både at prisen må settes opp igjen 0,875 kr/liter eller 7,53 % for at bensinprisen igjen skal være 12,50 kr/liter på onsdag.

En annen måte for elevene å tilnærme seg denne oppgaven er ved å observere at den opprinnelige prisen egentlig er en irrelevant opplysning. Oppgaven kan løses direkte ved å finne vekstfaktoren $(1 + x\,\%)$ som oppfyller likningen $(1 - 7\%) \cdot (1 + x\,\%) = 1$. Etter noen mellomregninger finner vi $x = 1/0,93 - 1 = 0,0753 = 7,53\%$, som vil si at bensinprisen må øke med $7,53\,\%$ på onsdag for å komme tilbake til mandagens pris.

Hensikten med oppgaven er først og fremst å kontrollere om elevene er klar over at en må ned og opp *ulik* prosent for å ende på samme sted. Jeg så for meg at det her ville være fort gjort for noen av elevene å svare 7 %, og dermed ikke ta hensyn til at prisen den prosentvise økningen skal refereres til er en annen enn den nedjusteringen på 7 % refererte til. Oppgaven var litt ute etter å se om elevene gjorde nettopp denne feilen.

3.3.5 Oppgave A17

l) Strømregningen til Arne i januar var på 1297 kr. I februar økte den med 12 %. Dersom den går ned med 12 % i mars, hva blir strømregningen til Arne i mars?

Figur 3.10: Oppgave A17

Oppgave A17 (Figur 3.10) handler om strømregninger. Prisen er oppgitt for januar, og elevene får beskjed om at prisen går ned i februar for så opp igjen med samme prosent i mars. Denne oppgaven var ment å illustrere at ved å gå opp og ned samme prosenttall, ender du ikke opp samme sted. Denne oppgaven er bevisst plassert etter Oppgave A16, for å få elevene til å virkelig ta stilling til om de løste Oppgave A16 riktig. Tilsvarende som Oppgave A15 og A16 er det viktig for elevene å få med seg at den prosentvise økningen av strømregningen i februar baseres på strømregningen i januar, mens den prosentvise nedgangen av strømregningen i mars baserer seg på strømregningen i februar.

Tilsvarende som for Oppgave A15 og A16 kan også denne oppgaven løses *direkte* ved gange sammen vekstfaktorene for økningen i februar og nedgangen i mars, som gir $(1 + 12\,\%) \cdot (1 - 12\,\%) \cdot 1297$ kr $= 1278,32$ kr. En mer stegvis måte å løse denne oppgaven på er som følger:

Strømregningen i februar er 12 % høyere enn i januar, da den var på 1297 kr. Dette tilsvarer en økning på $12\,\% \cdot 1297$ kr $= 155,64$ kr. Prisen i februar var dermed $1297 + 155,64$ kr $= 1452,64$ kr. I mars gikk den ned igjen 12 %. Dette tilsvarer en nedgang på $12\,\% \cdot 1452,64$ kr $= 174,32$ kr. Prisen i mars blir dermed $1452,64 - 174,32 = 1278,32$ kr.

3.3.6 Oppgave A18

m) Bjarne hadde en lønnsøkning på 40 000 kr i året i fjor. Dette var en oppgang på 3 %. Hva ble den nye lønna hans?

Figur 3.11: Oppgave A18

I Oppgave A18, som er vist i Figur 3.11, blir elevene bedt om å finne ny lønn til Bjarne utfra informasjon om hans lønnsøkning året før. De får oppgitt lønnsøkningen i kroner, og at dette tilsvarte en *oppgang* på 3 %. Det vil her være viktig å huske på at en lønnsøkning oppgis relativt den opprinnelige lønna.

Elevene kan løse oppgaven ved å først finne opprinnelig årslønn x fra likningen $40\,000 = 3\% \cdot x = 0,03x$. Dette gir $x = 40\,000/0,03 = 1\,333\,333$ kr i opprinnelig årslønn. Den nye lønna blir dermed $1\,333\,333 + 40\,000 = 1\,373\,333$ kr.

Det hadde også vært mulig å la den nye lønna være den ukjente x i utregningen, men da må også en annen likning settes opp: $40\,000 = 3\% \cdot (x - 40\,000) = 0,03(x - 40\,000)$, som gir $x = 1,03 \cdot 40\,000/0,03 = 1\,373\,333$ kr. I denne fremgangsmåten er x den nye lønna, hvor den opprinnelige lønna uttrykkes ved å trekke fra lønnsøkningen fra ny lønn $(x - 40\,000)$.

3.3.7 Oppgave A20

o) Cecilie finner ut hun må spare litt, og setter sine 100 000 kr i banken, med en årlig rente på 3 %. Hvor mye har hun på konto etter ett år? Hvor mye har hun på konto etter fem år?

Her skal det beregnes renter på rentene (renters rente).

Figur 3.12: Oppgave A20

Konteksten for Oppgave A20 (se Figur 3.12) er, som den var for A18 og A19, personlig økonomi. Denne oppgaven handler om sparing, og består av to spørsmål. Innskudd og årlig rente blir oppgitt i oppgaveteksten. For å svare på det første spørsmålet, om hvor mye det står på konto etter ett år, kan elevene regne ut direkte ved å bruke vekstfaktor: $(1 + 3\%) \cdot 100\,000$ kr $= 103000$ kr. De kan også først regne ut at hun får $3\,\% \cdot 100\,000$ kr $= 3000$ kr i renter det første året, og deretter legge dette til hva beløpet som sto på kontoen ved starten av året. Begge fremgangsmåter gir samme svar: hun har 103 000 kr på konto etter ett år.

For å finne svaret på det andre spørsmålet, om hvor mye som står på konto etter fem år, blir en nødt til å ta hensyn til renters renter. Dette innebærer at «input» til operatoren 3 % vil endre seg for hvert år. Oppgaven kan løses ved å gange det opprinnelige beløpet 100 000 kr med vekstfaktoren $1 + 3\,\%$ fem ganger, som gir: $(1 + 3\%)^5 \cdot 100\,000$ kr $= (1,03)^5 \cdot 100\,000$ kr $\approx 1,15927 \cdot 100000$ kr $= 115927$ kr. Det vil også være mulig å gjenta prosedyren med å regne ut rentene for det gitte året basert på beløp på konto ved starten av året, og legge til dette for å finne beløpet på konto ved slutten av året. Siden vi skal finne beløp på konto etter fem år må prosedyren gjentas 5 ganger. Begge fremgangsmåter gir at hun har 115 927 kr på konto etter 5 år.

Her har jeg bevisst valgt å bruke et så lite antall år som 5 i det andre spørsmålet, da jeg så det som sannsynlig at en del elever ikke nødvendigvis var kjent med å regne med eksponenter[27], og dermed ville regne steg for steg. Ettersom jeg ikke var ute etter å teste regnetekniske ferdigheter, men forståelsen for prosentbegrepet, fant jeg det fornuftig å holde antall år lavt, og ikke benytte type «etter 30 år». Sett i etterkant kunne det i oppgaveteksten også vært presisert at rentene kun avregnes en gang i året[28].

3.4 Oppgaver med prosent som forholdstall (forholdssammenheng D)

3.4.1 Oppgave A10

e) I Sverige var den årlige befolkningsveksten 1.4 % i 2017, mens den i Norge var 0.9 %. Hvor mye større (i %) var befolkningsveksten i Sverige enn i Norge dette året?

Figur 3.13: Oppgave A10

I Oppgave A10 (Figur 3.13) skal befolkningsveksten i Sverige og Norge i 2017 sammenliknes. Frasen «Hvor mye større..» impliserer at forskjellen mellom de to opplysningene må regnes ut. De to vekstratene som skal sammenliknes er 1,4 % og 0,9 %, og differansen mellom disse er dermed $0,5\,\%$. Frasen «enn i Norge» forteller oss at det er vekstraten i Norge denne differansen skal relateres til, i utregningen av den *prosentvise* forskjellen. Vi finner dermed at befolkningsveksten var $0,5\,\%/0,9\,\% \approx 0,556 = 55,6\,\%$ større i Sverige enn i Norge i 2017. Denne utregningen kunne også vært gjort med formelen (2.3), ved å la $r' = 1,4\,\%$ og $r = 0,9\,\%$ representere henholdsvis vekstraten i Sverige og Norge.

Denne oppgaven tester om elevene er kjent med forskjellen mellom å sammenlikne to vekstrater i prosent, og prosentpoeng. Hvis oppgaven spurte hvor mye mange prosentpoeng større befolkningsveksten var i Sverige enn i Norge ville det riktige svaret vært 0,5 prosentpoeng. Elever som svarer 0,5 % på denne oppgaven vil derimot vise en mulig misforståelse av den sammenliknende naturen til prosentnotasjonen. Siden forskjellen

[27] Oppgavene ble opprinnelig laget for 1T-elever. Eksponenter er pensum i 1T, men jeg var ikke kjent med om dette var gjennomgått da undersøkelsen skulle gjennomføres.

[28] Basert på gjennomgang av elevbesvarelser var det derimot ikke et problem.

(«større enn») her skal oppgis i prosent må den regnes ut som et *forholdstall*, hvor forskjellen i befolkningsvekst mellom Sverige og Norge *sammenliknes* med vekstraten i Norge.

3.4.2 Oppgave A11

f) På NTNU er det 4978 vitenskapelige ansatte som arbeider med undervisning, forskning og formidling. Av disse er 42 % kvinner. Hvor mange % flere menn enn kvinner tilsvarer dette?

Figur 3.14: Oppgave A11

Jeg vil her presentere to måter jeg finner sannsynlig at elevene kan løse Oppgave A11 (Figur 3.14) på. I det første løsningsforslaget sammenlikner jeg de to *andelene* menn og kvinner. «Hvor mange % flere..» forteller oss at vi først må finne *forskjellen* mellom de to andelene menn og kvinner. Siden de ansatte som ikke er kvinner er menn, vil andelen menn være $100\,\% - 42\,\% = 58\,\%$, og den absolutte forskjellen blir dermed $58\,\% - 42\,\% = 16\,\%$. Fra frasen «flere menn *enn* kvinner» viser at denne differansen skal relateres andelen kvinner, i utregningen av den *prosentvise* forskjellen, som gir $16\,\%/42\,\% = 0,38 = 38\,\%$. Det er altså 38 % flere menn enn kvinner blant de vitenskapelige ansatte på NTNU.

Forholdstallet som etterspørres kan også finnes ved å dele *antall flere menn enn kvinner* på antall kvinner. Da må disse antallene finnes ved å bearbeide opplysningene i oppgaven. Det er $42\ \% \cdot 4978 = 2091$ kvinner. Vi dere er det $4978 - 2091 = 2887$ menn. Det tilsvarer $2887 - 2091 = 796$ flere menn enn kvinner. I prosent blir det $796/2091 = 0,38 = 38\ \%$. Forskjellen relateres til antall kvinner, nok en gang siden det ble spurt etter «... flere menn *enn* kvinner ...».

Det er verd å merke seg at opplysningen «4978 vitenskapelige ansatte» egentlig er overflødig, men uten denne ville kun den første av de to fremgangsmåtene kunne vært benyttet.

3.4.3 Oppgave A14

i) Du har 120 kr. Dette er 300 % mer enn hva jeg har. Hvor mye har jeg?

Figur 3.15: Oppgave A14

I Oppgave A14 (Figur 3.15) er det referansestørrelsen som 300 % relateres til (hvor mye jeg har) som skal finnes. Forskjellen mellom hvor mye du og jeg har kan uttrykkes som: $120 - x$, hvor den ukjente x er introdusert for hvor mye jeg har. Vi kan også uttrykke denne forskjellen som $300\,\% x$, ettersom oppgaveteksten forteller oss at «du har 300 % mer enn hva jeg har». Ved å sette de to uttrykkene for den samme forskjellen like hverandre får vi likningen:

$$120 - x = 300\,\% \cdot x = 3x. \tag{3.7}$$

Ved å løse likningen finner vi at jeg har $x = 30$ kr.

Denne oppgaven tester forståelse av prosentvis endring, og spesifikt hvordan elevene tolker frasen «mer enn». Oppgaven er veldig lik i ordlyd som A5 og A6. Det er likevel noen ting som muligens gjør denne oppgaven mer krevende. For det første er det en tekstoppgave, hvor riktig informasjon må hentes ut fra teksten. For det andre er det referansestørrelsen som 300 % relateres til som er ukjent, og ikke prosenttallet (som det var i A5 og A6).

For å få riktig svar må elevene, som i A5, unngå misforståelsen hvor *mer enn* byttes ut med *ganger større enn*. Her så jeg for meg at en del elever kom til å sette opp

$$120 = 300\,\% \cdot x = 3x, \tag{3.8}$$

og ende opp med svaret «jeg har $x = 40$ kr». Dette svaret stemmer ikke overens med opplysningene i oppgaveteksten, ettersom forskjellen mellom 120 kr og 40 kr er 80 kr, som er 200 % (og ikke 300 %) av 40 kr. Denne feilen skyldes at en overser en prosentvis forskjell har både en multiplikativ og en additiv natur. Prosent mer enn «hva jeg har» skal altså oversettes med: «prosent av hva jeg har» *mer enn* «hva jeg har»; og ikke *prosent av* «hva jeg har».

4 Metode

I dette kapittelet vil jeg gjøre rede for de metodiske valgene jeg har gjort for min studie. Disse valgene begrunnes ut ifra mitt forskningsspørsmål og teori om forskning. Situasjonen med korona fikk en stor innvirkning på datainnsamlingen og datagrunnlaget i denne masteroppgaven. Jeg vil derfor først (i Seksjon 4.1) beskrive kort hva som var tenkt og noen utfordringer som oppstod som følge av nedstengingen av skoler, men vil legge hovedvekt på å presentere utvalget, datainnsamlings-prosessen og datamaterialets omfang slik den ble gjennomført. Videre vil jeg (i Seksjon 4.2) gi en beskrivelse av hvordan datamaterialet er bearbeidet og analysert, før jeg til sist i kapittelet (i Seksjon 4.3) gjør rede for noen etiske betraktninger jeg har gjort ved studien.

4.1 Metode for datainnsamlingen

4.1.1 Tiltenkt metode for datainnsamling

Hensikten med studien har vært å få innsikt i hvilke aspekter ved prosent som er vanskelig, gjennom å se på hvordan elever løser ulike typer av prosentoppgaver. Fokus er på elevenes perspektiv, og derfor er en kvalitativ forskningsmetode[29] ifølge Postholm (2010) sentral og naturlig å benytte for å besvare forskningsspørsmålet mitt: **Hvilke aspekter ved prosent er vanskelig for elever i videregående skole?** Den opprinnelige intensjonen var derfor å gjennomføre en kvalitativ studie. Jeg ønsket å la tre elevgrupper på tre elever fra ulike videregående skoler arbeide med oppgavene i oppgaveheftet (se Vedlegg E), mens det ble tatt opp video av arbeidet.

Prosentbegrepet kommer inn i skolen alt i 5. klasse, og kommer igjen som et kompetansemål i 8–10. klasse. Undersøkelsen min blir altså en sjekk på hva elever i den videregående skolen kan om prosent etter at det har vært undervist i grunnskolen. Dette var hvorfor jeg ønsket å ha elever fra videregående som mine informanter i denne studien. Jeg opplevde at skolene i Trondheim hadde stor pågang av studenter. Da jeg i utgangspunktet var ute etter tre elever fra tre ulike videregående skoler valgte jeg å kontakte flere videregående skoler i Agder og innlandet per telefon og/eller epost, med kort informasjon om studien.

[29]Hensiktsmessig når har et fokus på elevenes perspektiv i forskningen (Postholm, 2010).

Jeg fikk gjort avtale ved tre ulike skoler om å få låne én elevgruppe på tre 1T-elever ved hver skole. Avsatt tid til arbeid med oppgavene var en dobbelttime.

Oppgavene A1–A20 skulle elevene løse individuelt. Deretter skulle elevene jobbe i felleskap med to oppgaver[30], hvor jeg hadde mulighet til å observere og stille oppfølgingsspørsmål. Planen var å gjennomgå det som er kort oppsummert i hintet øverst på side 4 i oppgaveheftet (se Vedlegg E) før elevene gikk i gang med disse oppgavene.

All datainnsamling skulle foregå i Uke 12. På grunn av omstendighetene rundt nedstenging av skoler denne våren måtte datainnsamlingen gjøres om, og en alternativ datainnsamling ble gjennomført istedenfor. Selv om informanter og datainnsamlingsmetode ble endret fra intensjonen, er denne studien fortsatt en kvalitativ studie, og jeg har valgt å gjennomføre en kvalitativ analyse av datamaterialet. Dette begrunnes i hovedsak med oppgavens problemstilling. Kvalitativ dataanalyse handler blant annet om å betrakte, organisere og forklare dataene (Cohen et al., 2013, s. 537), med fokus på å få en dyp og detaljert forståelse av et innhold. Hvordan datamaterialet er bearbeidet og kodet beskrives mer inngående i Seksjon 4.2.

4.1.2 Alternativ datainnsamling

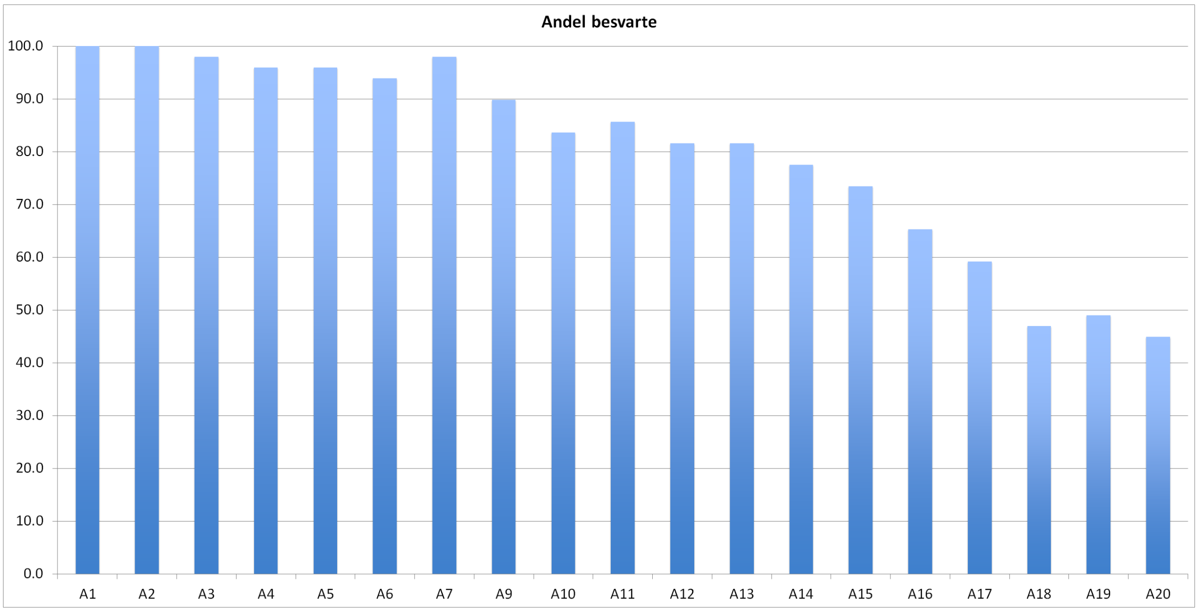
Etter at landet stengte ned tok jeg kontakt med de tre skolene for å avklare om en alternativ datainnsamling fortsatt kunne organiseres, og eventuelt hvordan. Sammen kom vi frem til at det for to av skolene ikke lengre var aktuelt å kunne si ja til å forholde seg til noen datainnsamling. Én av de tre skolene var derimot fortsatt innstilte på å samarbeide. Gjennom to av lærerne ved denne skolen ble oppgavene formidlet til elevene og klassene som datagrunnlaget til denne oppgaven hviler på.

Fra å skulle observere små grupper i et oppgavebasert intervju, valgte jeg å sende ut oppgaveheftet digitalt til flere hele matematikklasser. Det opprinnelige oppgaveheftet ble justert til å egne seg for en digital datainnsamling. Elevene (som var i hjemmeskole) arbeidet selvstendig med oppgavene i en tidsramme på to timer. De tok bilde av besvarelsene, og sendte til meg per epost. Måten datamaterialet ble innsamlet kan ikke begrunnes utover at «dette var det beste vi fikk til», gitt situasjonen som inntraff. Refleksjoner rundt studiens kvalitet vil presenteres i Seksjon 6.2.

[30] Oppgave 2 og Oppgave 3 i oppgavehefte (se Vedlegg E).

Totalt består datagrunnlaget av skriftlige besvarelser fra fem ulike matematikkurs, over alle trinn på VGS. Antall og hvilke oppgaver elevene har løst varierer, men som Figur 4.1 viser, så er det betydelig færre besvarelser mot slutten av oppgavene. Antakelig er grunnen at tiden ikke strakk til for en del av elevene. Til tross for dette er det en stor andel av elevene som har besvart de fleste oppgavene, og selv over førtifem prosent betyr at over 22 elever har besvart oppgaven. Jeg har valgt å inkludere alle besvarelsene som datagrunnlag, da jeg får et større grunnlag for å se fellestrekk for feil. Datagrunnlaget er på 49 besvarelser som fordeler seg slik:

- 15 besvarelser fra 1T elever på VG1 studiespesialiserende
- 7 besvarelser fra 1P elever på VG1 studiespesialiserende
- 6 besvarelser fra 2P elever på VG2 studiespesialiserende
- 8 besvarelser fra R2 elever på VG3 studiespesialiserende
- 13 besvarelser fra 2PY elever på VG3 påbygging



Figur 4.1: Grafen illustrer andelen av de 49 elevene som besvarte den enkelte oppgave.

4.2 Tematisk analyse

Nilssen (2012) skriver at «Koding og kategorisering av datamaterialet er kjerneaktiviteter i den kvalitative analyseprosessen» (s. 78). Kvalitativ datanalyse innebære altså å organisere, forklare og gjøre rede for datamaterialet, se etter mønstre, tema, kategorier og fellestrekk. Det er viktig å få redusert datamaterialet i en analyseprosess for å gjøre det mer oversiktlig og håndterbart (Postholm, 2005, s. 86). En måte å gjøre dette på er ved å gjennomføre en tematisk analyse. En tematisk analyse er å systematisere datamaterialet ved å se på tematiske mønstre som er i datamaterialet (Braun & Clarke, 2006, s. 79). For å analysere datamaterialet mitt har jeg tatt utgangspunkt i en tematisk analyse, slik dette er fremstilt av Robson og McCartan (2016, s. 466–480). En slik tematisk analyse kan bestå av fem hovedfaser, eller avsluttes etter den tredje hovedfasen. I de påfølgende delseksjonene vil jeg forklare de tre hovedfasene og hva jeg har gjort, basert på denne kilden (om ikke annet tydelig kommer frem).

4.2.1 Fase 1: Bli kjent med datamaterialet

For å bli kjent med datamaterialet i denne studien gjorde jeg en første gjennomgang av alle elevbesvarelsene der jeg noterte om oppgaven var løst riktig eller feil inn i et Excel ark, systematisert for hver oppgave og elev. I prosessen med denne gjennomgangen førte jeg en (uformell) logg hvor jeg noterte ned observasjoner og assosiasjoner og erfaringer jeg gjorde meg under gjennomgangen. Loggen hjalp meg til å kunne se sammenhenger i datamaterialet, og fange opp fellestrekk i feilene som elevene gjorde. På denne måten mener jeg at jeg fikk en god oversikt over datamaterialet.

Det viste seg at elevene hadde gjort en god del feil, som gav meg et stort datamateriale. For å begrense datamaterialet bestemte jeg meg tidlig for å ikke ta med besvarelser på Oppgave 2 og 3 fra oppgaveheftet (se Vedlegg E) i analysearbeidet[31]. Som følge av feilen i oppgaveteksten på Oppgave A8 (se Seksjon 3.2.4 for forklaring) valgte jeg å heller ikke ta med denne oppgaven i det videre arbeidet med koding av feilene som ble gjort.

[31]Etter å ha mottatt besvarelser fra de første klassene innså jeg tidlig at tidsomfanget til oppgaveheftet ble for stort for flere av elevene. Jeg ba derfor lærer om å gi beskjed til elevene i klassene som enda ikke hadde arbeidet med oppgavene om å fokusere på oppgave A1-A20

4.2.2 Fase 2: Lage koder

Den andre fasen går ut på å lage *koder*. Kodene skal identifisere de interessante delene av datamaterialet med tanke på analysen. De kan være styrt både av det teoretiske rammeverket og av datamaterialet, der hensikten er at de skal vise til de mest grunnleggende delene av datamaterialet. I mitt tilfelle har jeg gjort begge deler. I denne prosessen med å kode alle besvarelsene endte jeg opp med mange koder, der flere av disse senere i analyseprosessen har fått nye navn, blitt forkastet, eller byttet ut. Se opptellingstabellen for de forskjellige kodene i Vedlegg F[32]. Av praktiske årsaker ble kodene koblet opp mot hver sin bokstav i alfabetet.

Jeg erfarte også det som Nilssen (2012) trekker frem at «kodene overlapper hverandre, og at det alltid vil finne sted dobbelkodinger (s. 82)». Jeg benyttet flere steder dobbel - og trippelkoder. Et eksempel i mitt materiale er koden: AN[33]. Den står for at eleven har endt opp med å følge den tilfeldige algoritmen[34] om å *dele største på minste* samt at eleven har *forenklet* (altså at det ikke ble gjort mellomregninger når dette kreves i oppgaven for å bruke riktig referanse).

4.2.3 Fase 3: Finne tema fra kodene

Tredje fase går ut på å samle kodene fra fase to i *tema* med felles trekk. Målet er at disse temaene skal reflektere datamaterialet som helhet. Braun og Clarke (2006) trekker frem at et tema skal kunne velges ut fra datamaterialet for å hjelpe til med å besvare forskningsspørsmålet (s. 82). Med utgangspunkt i mitt forskningsspørsmål har jeg endt opp med følgende hovedtema for feil grunnet problemer med prosentbegrepet: (1) Språk, (2) Referanse og (3) Tro på tilfeldig algoritme.

[32]Jeg har valgt å ikke vise Excel ark over all kodingene, ettersom jeg mener elevene som deltok i undersøkelsen vil kunne dedusere hvem som er hvem. Selv om jeg mener det ikke ville vært mulig ellers.

[33]Dette er den dobbelkoden som ble brukt mest.

[34]Se Seksjon 2.8 for forklaring av dette begrepet

4.3 Etiske betraktninger for studien

I løpet av arbeidet med masterprosjektet har det vært flere etiske betraktninger å ta stilling til. De etiske betraktninger som presenteres her baserer seg i første rekke på retningslinjene utviklet av Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsfag, jus og humaniora (NESH, 2016).

4.3.1 Godkjennelse av prosjekt

Ettersom prosjektet mitt krevde at jeg sendte inn meldeskjema til Norsk senter for forskningsdata [NSD] ble dette gjort ved oppstart av prosjektet. Prosjektnummeret mitt hos NSD er 959954. Godkjenning var på plass for tiltenkt datainnsamling da nedstengning av skolene grunnet korona skjedde i Uke 11. Siden det måtte gjøres endringer av prosjektet, og alternative innsamlingsmetoder måtte benyttes for å samle inn data for studien, var dette noe jeg var i dialog med NSD om. Godkjennelse for gjennomføring av prosjektet med endring forelå før datainnsamlingen startet.

4.3.2 Informert samtykke

Informert samtykke er viktig når en forsker, og jeg mener det er overholdt i denne studien. Forskningsdeltakerne i denne studien var elever i aldersgruppen 17–19 år. De var derfor i stand til å selv gi samtykke om å delta. Som følge av situasjonen om nedstengte skoler ble dette bekreftet til meg per epost. Jeg fikk bekreftelse fra NSD om at det var tilstrekkelig med tanke på min studie og alternative datainnsamlingsmetode. Elevene fikk informasjon om studien og at materialet skulle benyttes i en masteroppgave av sine lærere. De har hatt mulighet til å stille spørsmål og være i kontakt med meg per epost og telefon. De har også vært klar over at de når som helst kan trekke tilbake samtykket til å delta.

4.3.3 Anonymitet og konfidensialitet

Konfidensialitet handler om at en ikke skal oppgi informasjon av en slik karakter at den kan avsløre deltakerens (elevens) identitet (Robson & McCartan, 2016, s. 220). Jeg har i det skriftlige arbeidet i denne studien holdt skolen, læreren og elevene anonyme. I mitt tilfelle har jeg gitt hver elev en kode for hvilket fag og et tall, for eksempel så står $R2_{01}$ for «elev 1 som tar R2 matematikk» og $2PY_{05}$ står for «elev 5 som tar 2PY matematikk». Jeg ønsket å beholde muligheten til å kunne se om det oppstod noen skiller ut fra hvilke klasser og type matematikk elevene hadde når jeg arbeidet med analysen av datamaterialet mitt. Tallet jeg gav hver elev var helt tilfeldig, bare i kronologisk rekkefølge når jeg gjorde første gjennomgang av datamaterialet. På den måten ble elevenes navn ikke en del av mine notater og skjema i analysearbeidet. Da det også finnes mange videregående skoler på Sørlandet som har fagene 1T, 1P, 2P, R2 og 2PY skal det ikke være mulig å spore tilbake hvem deltakerne i denne studien er.

4.3.4 Mulige konsekvenser ved å delta i studien

Deltakelse i denne studien har innebåret oppgaveløsning i 2 skoletimer, som tilsvarer tiden til en matematikkøkt. En konsekvens for både lærere og elever ble derfor å ofre denne tiden, som for eksempel kunne vært brukt til undervisning i andre deler av pensum. Som nevnt ble denne studien gjennomført i en spesiell tid, og det var viktig for meg å ikke legge noe ekstra press på verken lærere eller elever. Det ble derfor besluttet å ikke be om noe mer av elevenes eller lærerenes tid, i form av for eksempel intervjuer for å gi økt innsikt i hva elevene har tenkt. For å minske tidsbruken for lærerene i matematikklassene som deltok ble elevene bedt om å sende besvarelsene, sammen med bekreftelse på sin deltakelse som informanter i studien, direkte til meg[35].

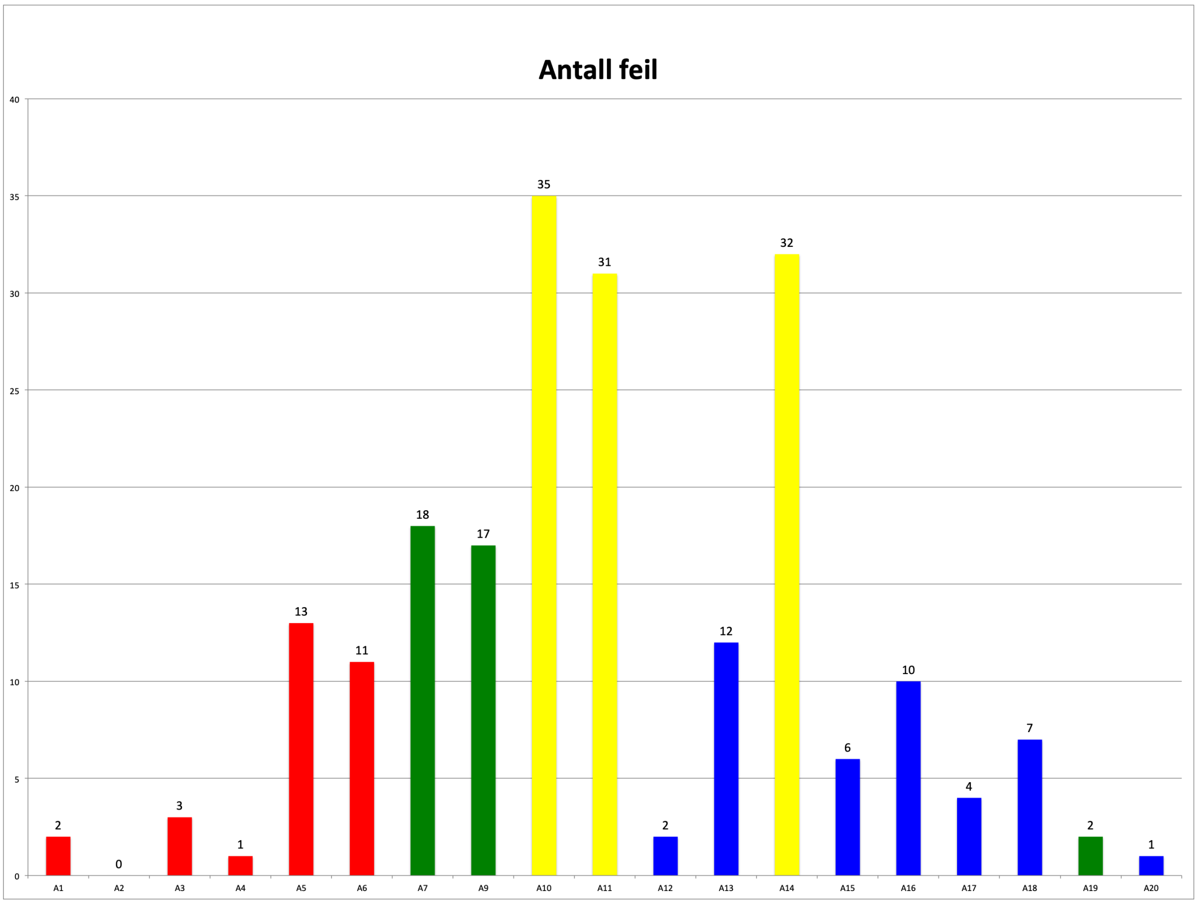
En utfordring i arbeidet med å presentere funnene fra analysearbeidet i tekst er å ikke virke negativ ladet. Studiens intensjon har vært å kartlegge aspekter ved prosentbegrepet som er utfordrende, for å gjøre dette er det naturlig å se på feilene som ble gjort på oppgavene. Hensikten er å peke på feil med et konstruktivt kritisk blikk. Dette for å kunne ha et utgangspunkt for videre arbeid rundt dette begrepet i matematikk, og med mål om å kunne undervise og belyse prosentbegrepets ulike betydninger bedre ved å være klar over hvilke sider og egenskaper som kan være mest problematiske.

[35]Dette var etter ønske fra lærerkontakt ved skolen.

5 Analyse og funn

I dette kapittelet vil jeg presentere resultater fra analysearbeidet med elevenes besvarelser. Først vil jeg presentere en figur som viser en oversikt over antall feil gjort på hver av oppgavene, og gi noen kommentarer basert på denne figuren. Videre vil jeg i seksjonene som følger legge frem funn fra analysen med støtte i eksempler fra elevbesvarelsene. Avslutningsvis vil jeg også trekke inn en relevant observasjon fra analysearbeidet som indirekte har med forskningsspørsmålet mitt å gjøre. Observasjonen som tas opp her peker på at elever foretrekker å regne om prosentopplysninger til antall der hvor dette er mulig.

5.1 En oversikt over antall feil på oppgavene



Figur 5.1: Grafen presenterer antall feil på de ulike oppgavene. Her er Oppgave A8 fjernet bevisst. Fargene viser hvilken seksjon oppgavene er presentert under: rød (Seksjon 3.1), grønn (Seksjon 3.2), blå (Seksjon 3.3) og gul (Seksjon 3.4).

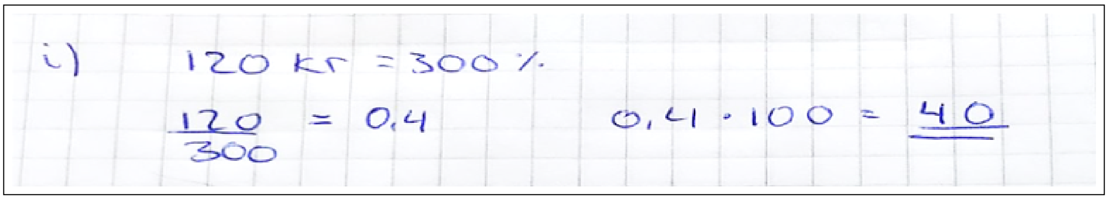
Figur 5.1 viser en oversikt over antall feil som ble gjort på hver enkelt oppgave. Oppgavene A5, A6 og A10–A18 omhandler prosentvise forskjeller. Fra figuren fremgår det at det ble gjort betydelig flest feil på Oppgavene A10, A11 og A14. Alle disse tre oppgavene tar for seg prosentvise forskjeller mellom to ulike størrelser (forholdssammenheng D, se Seksjon 2.4.5). Det er verdt å merke seg at det ble gjort få feil på de tradisjonelle øvingsoppgavene som ikke går på prosentvise forskjeller (A1–A4). At det ble gjort forholdsvis få feil (spesielt få feil som resulterte i tilfeldige algoritmer[36]), gjelder også for Oppgavene A15–A20, med unntak av Oppgave A16[37]. Oppgavene A15-A20 har alle en økonomisk kontekst. En mulig forklaring på hvorfor elevene gjorde det så bra på disse oppgavene kan være at dette er en kontekst de er spesielt vant med fra prosentoppgaver i undervisningen.

5.2 Meningsbærende ord i prosentoppgaver

5.2.1 Elevene tolker *mer enn* som *ganger mer enn*

En av de gjentakende feilene som ble funnet igjen blant flere elever fra alle trinn, skyldtes at de tolket *mer enn* som *ganger mer enn*. Denne feilen var spesielt fremtredende på Oppgave A14, hvor over 80 % av elevene gjorde feil, og alle utenom 3 av disse skyldtes denne misforståelsen av *mer enn*.

Med dette mener jeg at elevene tolker opplysningen i oppgaveteksten: «Du har 120 kr. Dette er 300 % *mer enn* hva jeg har. Hvor mye har jeg?» som at «du har 300 % *ganger mer enn* hva jeg har»[38]. I transformasjonen fra oppgaveteksten til elevenes valg av notasjon for utregning ender de dermed opp med å regne på noe annet enn hva oppgaveteksten spør om. Et eksempel på en besvarelse som illustrerer dette er vist i Figur 5.2. Utregningen eleven gjør her er veldig representativ for hvordan flertallet av elevene kom frem til det feilaktige svaret 40 kr på denne oppgaven, og som dermed er blitt kodet med denne merkelappen. Én måte å regne ut det riktige svaret 30 kr på denne oppgaven er presentert i Seksjon 3.4.3.

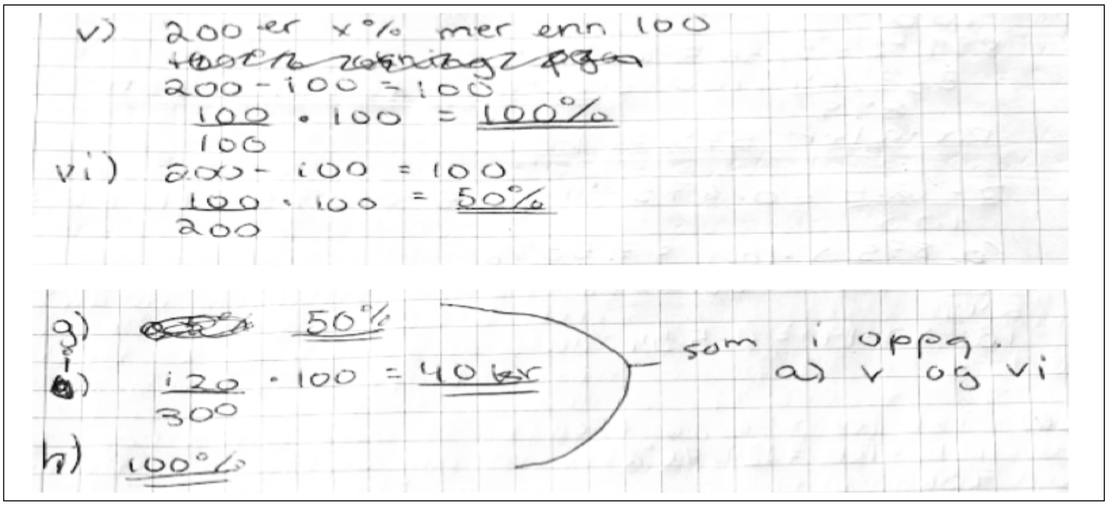


Figur 5.2: Elevbesvarelse fra Oppgave A14 (i på besvarelsen).

[36] Dette begrepet ble beskrevet i Seksjon 2.8.
[37] A16 går på ned og opp ulik prosent for å havne på samme sted.
[38] Eller eventuelt «du har 300 % *av* hva jeg har», som også ville gitt samme betydning.

Oppgave A14 peker seg ut ved at nesten samtlige elever gjorde samme feil, men jeg ønsker også å trekke frem at det var 6 elever (om tydelig mindretall) som også fikk til denne oppgaven[39]. Medregnet denne oppgaven har jeg kodet for tilsvarende feilaktige tolkninger av *mer enn* som *ganger mer enn* i over 60 tilfeller, hvor feilen også er aktuell for Oppgavene A5, A10, A11 og A13. Det er bare i Oppgavene A5 og A14 at den eksplisitte frasen *mer enn* er brukt, men jeg har kodet for den *samme* grunnen for feil i de andre oppgavene[40].

Figur 5.3 viser en av elevenes besvarelse på Oppgavene A5, A6 og A12–A14. Eleven har oppgitt riktige svar på Oppgavene A12 og A13. Svarene er ikke begrunnet, men henviser til at de er løst tilsvarende som Oppgavene A5 og A6. Basert på besvarelsen av disse to oppgavene viser eleven tydelig at han/hun har forstått at *prosent mer/mindre enn* innebærer en differanse, og at prosenttallet som beskriver forskjellen skal regnes ut basert på referansestørrelsen som *enn* peker på. Det at eleven har kommet frem til riktige svar på Oppgavene A12 og A13 med henvisning til hvordan han/hun løste Oppgavene A5 og A6, tyder på at han/hun forstår at det samme gjelder om det er *en prosentvis endring* som skal finnes. Likevel har eleven gjort samme feil som alle andre på Oppgave A14, hvor «mer enn» tolkes som «ganger mer enn» (se i på Figur 5.3, som er mellom g og h på bildet).



Figur 5.3: Én elevs besvarelse på Oppgavene A5 (v), A6 (vi), og A12 (g), A13 (h) og A14 (i). Parentesene bak hvert oppgavenummer henviser til oppgavene på besvarelsen. Figuren består av to bilder klippet sammen fra elevbesvarelsen.

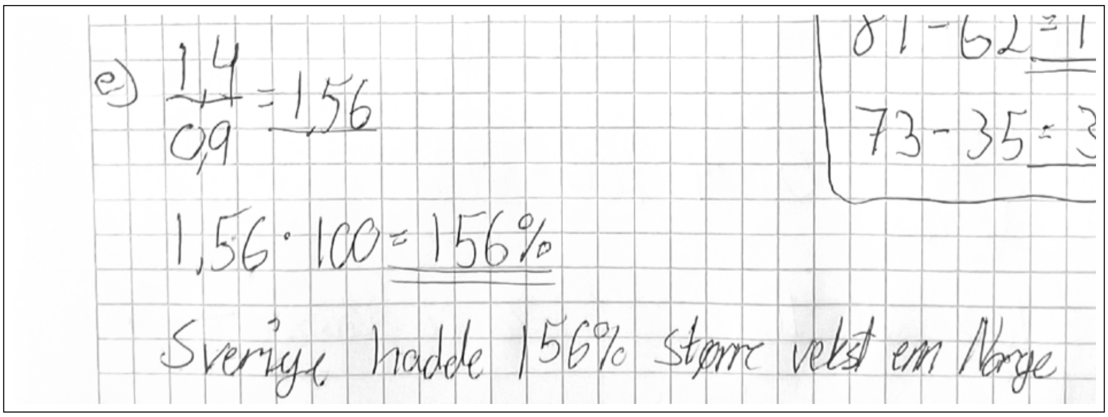
[39] De 6 elevene som fikk til Oppgave A14 var fordelt på de ulike matematikkursene på følgende måte: 1 elev (R2), 3 elever (1T), 1 elev (2P), 1 elev (2PY) og ingen elever med 1P.

[40] Eksemplene fra de andre oppgavene jeg har tatt med videre i analysen skyldes stort sett andre feil som ble gjort. Besvarelsen vist i Figur 5.4 illustrerer likevel en feil som ble kodet med «Prosent mer enn».

5.2.2 Prosentvis forskjell uttrykkes på flere måter

I dette avsnittet ønsker jeg å presisere og tydeliggjøre at når det kommer til oppgaver som innebærer prosentvise forskjeller eller endringer er det ikke bare frasen *mer/mindre enn* som benyttes. I noen av disse oppgavene i denne studien er forskjellene uttrykt eksplisitt med fraser som «hvor mye større enn» (A10), «hvor mange prosent flere» (A11), «prosentvis endring av» (A12 og A13) og «en oppgang» (A18), mens i andre oppgaver er det at størrelser som endrer seg opp og/eller ned implisitt gitt av konteksten til oppgaven (Oppgavene A15, A16, A17 og A20).

På Oppgave A10 ble det gjort noen feil som muligens kan forklares med at elevene tolker «hvor *mye større* enn» som «hvor *mange ganger større* enn». Elevene det gjelder regner ut svaret $1,4\,\%/0,9\,\% \approx 156\,\%$, som altså tyder på at de tolker den prosentvise forskjellen som skal finnes som *faktoren* $1,4\,\%$ er ganger større enn $0,9\,\%$. Et eksempel fra en elev som gjorde dette er vist i Figur 5.4. Hvis disse elevene hadde spesifisert at vekstraten i Sverige er $156\,\%$ *ganger større enn* i Norge ville dette svaret vært riktig. Ingen av elevene spesifiserte dette i teksten, men svarte bare med utregning og streker under prosentsvaret. Disse elevene ville funnet *forskjellen* i prosent som oppgaven mente å etterspørre om de hadde «husket å trekke fra $100\,\%$ til slutt». Her er riktignok et annet ord «større» brukt istedenfor «mer», men denne språklige misforståelsen tolker jeg til å være tilsvarende som den presentert i Seksjon 5.2.1. Derfor ble disse feilene kodet med samme merkelapp (som jeg gav navnet «Prosent mer enn», basert på hvor koden hyppigst ble brukt).



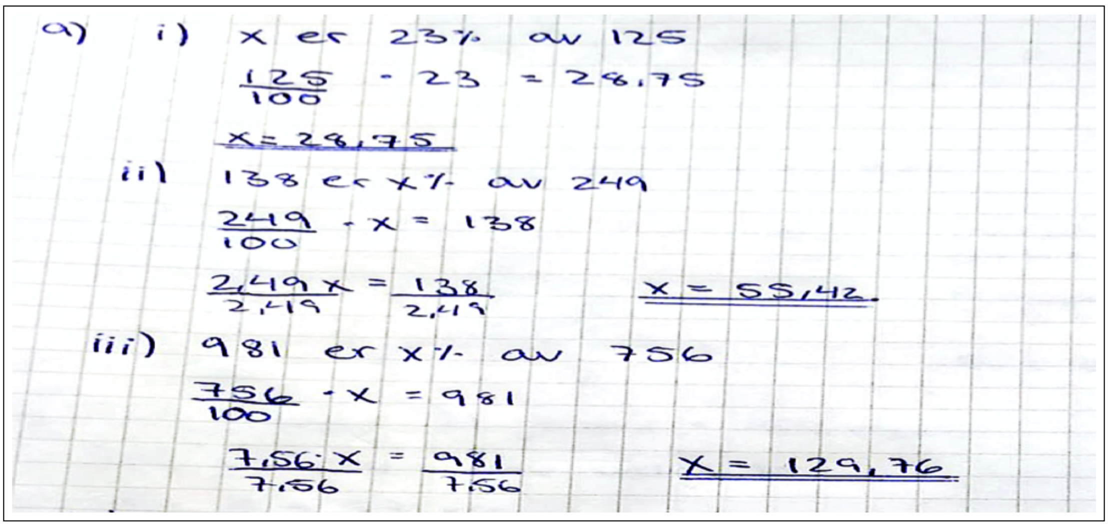
Figur 5.4: Eksemel på elevbesvarelse som regner ut «% ganger større enn» istedenfor «% større enn» på Oppgave A10 (e på figuren).

En betydelig andel av de registrerte feilene hos informantene ble gjort på oppgavene som gikk på å uttrykke en prosentvis forskjell mellom to størrelser. Feilene som er gjort på alle disse oppgavene er ulike, men veldig ofte blir feil opplysninger fra enten oppgaveteksten eller mellomregninger brukt i utregning av et ukjent prosenttall med formel (2.1). Disse feilene, som går på andre ting enn direkte feilaktig tolking av språklige fraser som beskriver endringer eller forskjeller, presenteres i Seksjon 5.3.

5.2.3 Prosent og *av*

Som nevnt i teorien og kapittelet hvor elevoppgavene ble presentert har ordet *av* en spesiell betydning i prosentsammenheng. Ettersom jeg var interessert i språklige problemer knyttet til prosent, var en av tingene jeg ønsket undersøke hvordan elevene tolker dette ordet. Oppgavene A1–A4 og A9 er blant annet med å kartlegge om de har kontroll på bruk av *av* i prosentsammenheng.

Jeg fant det derfor interessant at jeg ingen steder i datamaterialet kodet for feil knyttet til misforståelse av ordet *av* i oppgaveteksten. Det ble gjort feil også på oppgaver med *av*, men når jeg går inn i besvarelsene er det ikke misforståelsen av dette ordet som har forårsaket feilene elevene gjør. Informasjonen er benyttet riktig i forhold til det. Basert på besvarelsene ser det for meg ut til at elevene er i stand til å sette opp et prosentregnestykke der de oversetter *av* med gangetegn. Dette er eksemplifisert med en elevbesvarelse i Figur 5.5. Eleven har konsekvent byttet ut *er* med likhetstegn og *av* med gangetegn i Oppgavene A1–A3.

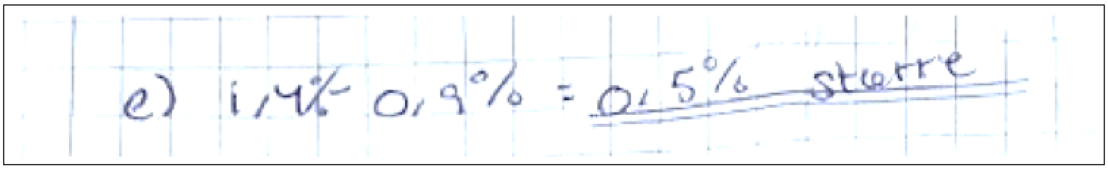


Figur 5.5: Elevbesvarelse som eksempel på en god forståelse av ordet *av*.

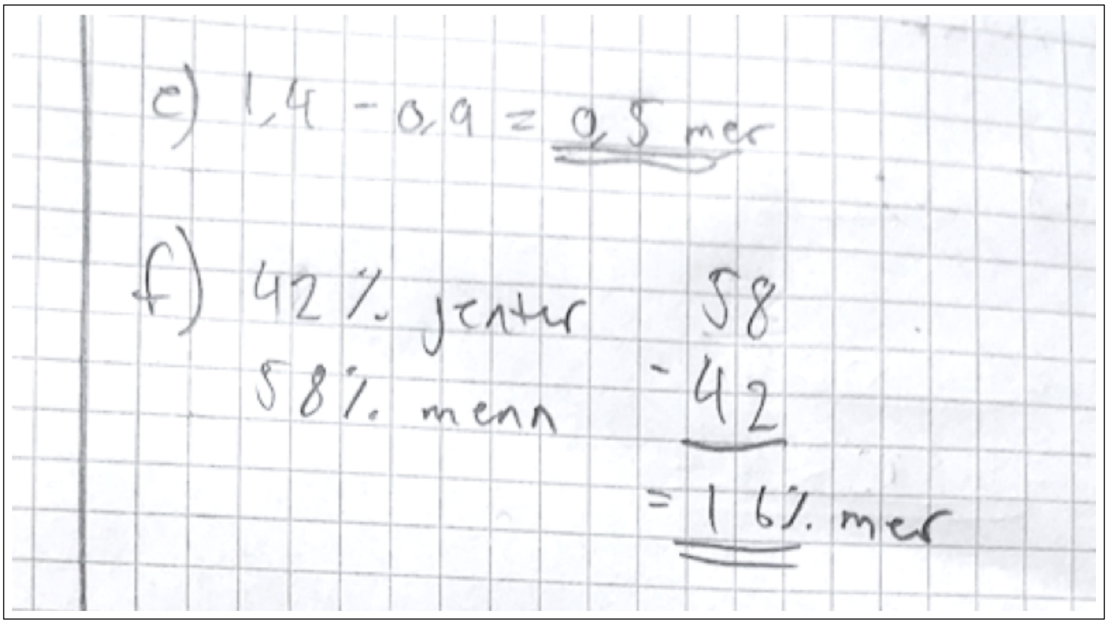
5.3 Referanse

5.3.1 Prosentsvaret gis ikke en referanse

Når en forskjell mellom to størrelser skal uttrykkes *prosentvis* må prosenttallet som regnes ut relateres til en av de to størrelsene. I tilfeller hvor størrelsene som skal sammenliknes i seg selv er prosenttall, tyder datamaterialet mitt på at elever (et stort flertall av informantene i denne studien) enten glemmer ut dette, eller at de ikke er klar over det. Mange av elevene gjorde denne feilen på Oppgavene A10 og A11. Elevbesvarelsene som er vist i Figur 5.6 og Figur 5.7 er begge eksempler som representerer hva som er kodet med merkelappen «prosentsvaret har ingen referanse».



Figur 5.6: Elevbesvarelse fra Oppgave A10 (e på figuren), hvor den utregnede prosentvise forskjellen ikke relateres til noen referansestørrelse.



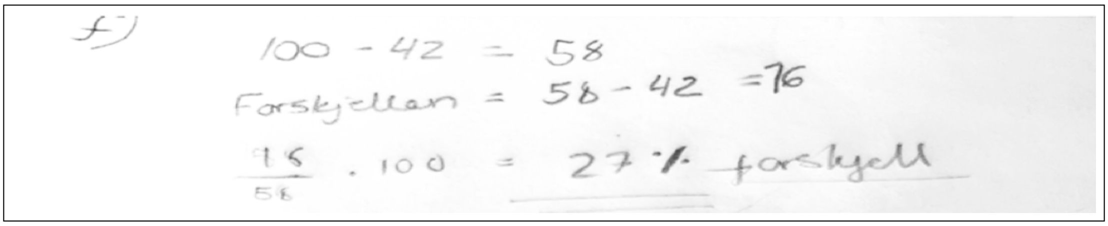
Figur 5.7: Elevbesvarelse fra Oppgave A10 og A11 (e og f på figuren), hvor de utregnede prosentvise forskjellene ikke relateres til noen referansestørrelse.

På Oppgave A10 var det veldig mange av elevene som svarte $1,4\,\% - 0,9\,\% = 0,5\,\%$ (eksempel fra elevbesvarelse er vist i Figur 5.6). Siden differansen («større enn») de regner ut blir et prosenttall, stopper de her. En riktig formulering av forskjellen basert på denne utregningen kunne vært «befolkningsveksten i Sverige var 0,5 *prosentpoeng* større enn i Norge». Prosenttallet $0,5$ er ikke relatert til noen størrelse, og vil være et meningsløst tall å oppgi med «enhet» prosent. Tallet er kun meningsfylt i utregningen av den riktige prosentvise forskjellen mellom $1,4\,\%$ og $0,9\,\%$, som er $0,5\,\%/0,9\,\% = 55,6\,\%$.

Et eksempel fra en besvarelse som ble kodet for feilen «prosentsvaret har ingen referanse» på Oppgave A11 er vist i Figur 5.7. Dette var den mest utbredte feilen på denne oppgaven, og eksempelet i Figur 5.7 er representativ for hvordan flertallet gikk frem: først regner de ut andel menn til å bli 58 %, basert på den oppgitte andelen kvinner på 42 %. Fra dette finner de at det er 58 % - 42 % = 16 % flere menn enn kvinner. Tilsvarende som for Oppgave A10, siden differansen («flere enn») de regner ut blir et prosenttall, stopper mange av elevene her. De «glemmer» bort at alle sammenlikninger som skal oppgis i prosent må ha en *referanse*[41]. Siden forskjellen er regnet ut i prosent, blir det *andelen* kvinner (42 %) som blir riktig referanse. Ved å regne ut forholdet differanse / referanse ville disse elevene funnet at det er 16 % / 42 % $= 0,38 =$ 38 % flere menn enn kvinner, som er samme svar som funnet i løsningsforslaget.

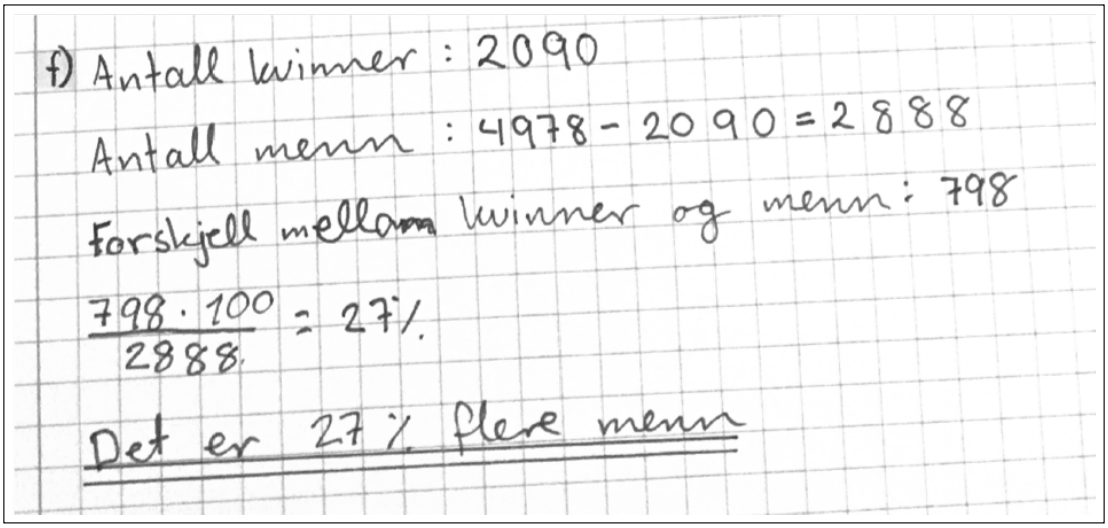
5.3.2 Bruker feil referanse

Det finnes veldig mange eksempler i datamaterialet fra de oppgavene som går på prosentvise endringer eller forskjeller, hvor elevene regner ut differansen som skal finnes riktig, men hvor denne differansen relateres feil størrelse når prosenttallet som beskriver endringen eller forskjellen skal regnes ut. Noen elevbesvarelser som illustrerer det jeg har basert denne slutningen på, og som ble kodet med merkelapp «bruker feil referanse», er vist i Figurene 5.8, 5.9, 5.10 og 5.11.

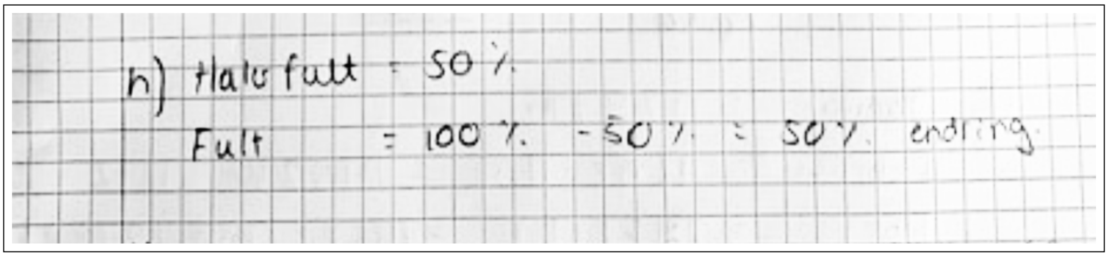


Figur 5.8: Elevbesvarelse fra Oppgave A11 (f på besvarelsen) som regner ut riktig differanse, men bruker feil referanse i utregning av prosentvis forskjell. Eleven regner med prosentopplysninger.

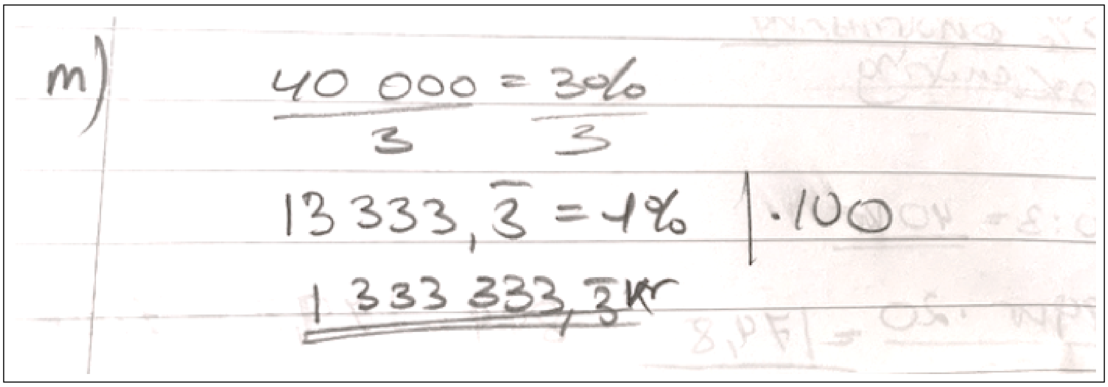
[41]I alle fall argumenterer de ikke for hvorfor de svarer som de gjør.



Figur 5.9: Elevbesvarelse fra Oppgave A11 (f på besvarelsen) som regner ut riktig differanse, men bruker feil referanse i utregning av prosentvis forskjell. Eleven regner med antall.



Figur 5.10: Elevbesvarelse fra Oppgave A13 (h på besvarelsen) som gjør feil ved å refererer prosentvis endring av mengde vann til glassets volum, istedenfor opprinnelig mengde vann.



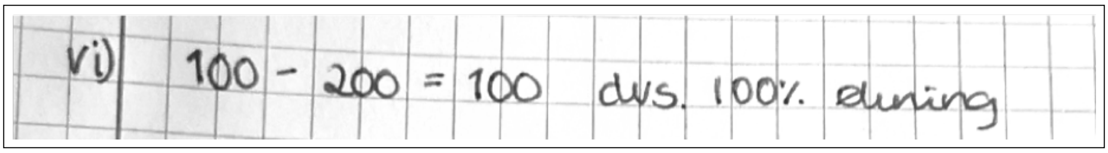
Figur 5.11: Elevbesvarelse fra Oppgave A18 (m på figuren), som muligens gjør feil ved å tro at en lønnsøkning oppgis relativt den nye lønna.

Figurene 5.8 og 5.9 viser to besvarelser som har løst Oppgave A11 ved å sammenlikne opplysninger i henholdsvis *prosentandel* og *antall* kvinner og menn. Begge disse elvene har regnet riktig frem til steget hvor de skal finne den prosentvise forskjellen, hvor de gjør feil ved å relatere forskjellen mellom menn og kvinner til mengden menn istedenfor kvinner.

Figur 5.10 viser en besvarelse fra Oppgave A13, hvor eleven tydelig er klar over at den absolutte endringen av vann (mengden vann som legges til for å fylle opp glasset) tilsvarer opprinnelig mengde vann. Når den prosentvise endringen skal oppgis refereres derimot denne absolutte endringen til glassets volum, og ikke opprinnelig vannmengde.

Figur 5.11 viser enda et eksempel på besvarelser som er blitt kodet med «bruker feil referanse» som mulig forklaring på hvorfor elevene ikke kom frem til riktig svar. Besvarelsen er fra Oppgave A18, hvor ny lønn skal beregnes basert på lønnsøkning oppgitt i både kroner og prosent. Siden 40 000 kr utgjør 3 % vil 1 % tilsvare 13 333,33 kr[42]. Dermed vil 100 % tilsvare 1 333 333,33 kr, og eleven oppgir det som svar på hva den nye lønna er. En lønnsøkning oppgis derimot relativt den opprinnelige lønna, og størrelsen disse elevene har regnet ut er dermed *opprinnelig lønn*. Flertallet som har svart feil på Oppgave A18 har gjort denne feilen, ved å følge tilsvarende fremgangsmåte som den vist i Figur 5.11.

Det virker som det ikke er klart for alle elevene at referansestørrelsen i en tekstoppgave gjerne styres av ordet *enn*. Dette blir for eksempel synlig fra besvarelsene ved at en del av elevene gjorde feil på Oppgave A6. Her er det typiske feil svaret 100 %, som tyder på at elevene har relatert differansen 100 til den nye mengden (100) istedenfor den opprinnelige mengden 200[43]. Forskjellen skal relateres til 200, siden denne størrelsen kommer etter «enn». Et eksempel fra en av besvarelsene som gjorde denne feilen er vist i Figur 5.12.



Figur 5.12: Eksempel fra elevbesvarelse hvor forskjellen «mindre enn» i Oppgave A6 (vi på besvarelsen) er regnet ut riktig, men forskjellen relateres til feil størrelse i utregning av prosentvis forskjell.

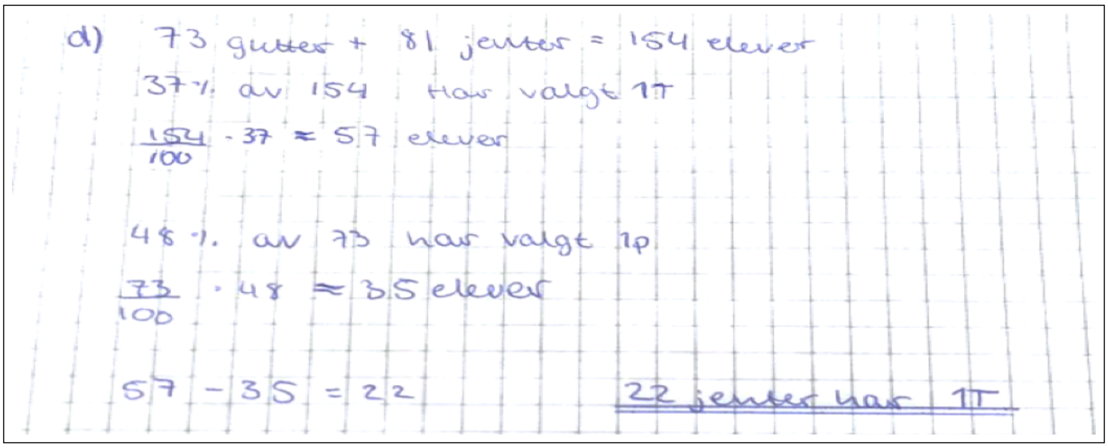
5.3.3 Feil når referansen endrer seg underveis

Prosentoppgaver der en må regne flere steg uten å ha den samme referansestørrelsen hele tiden har i mitt datamateriale resultert i flere feil. Dette gjelder blant annet på Oppgave A15 og A16. Det ble også gjort en del feil på oppgaver med mye informasjon, hvor det ble vanskelig å holde styr på hvilket prosenttall som henviser til hvilken referansestørrelse.

[42] Disse elevene har altså fulgt metoden å regne «via 1 %»

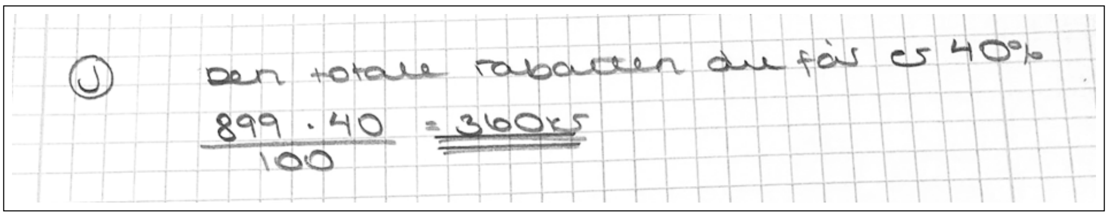
[43] Dette er en tradisjonell øvingsoppgave uten kontekst. I teksten her har jeg likevel valgt å ordlegge meg som om denne oppgaven beskriver en prosentvis endring.

Et eksempel fra Oppgave A9 er vist i Figur 5.13. Veldig mange elever har gjort akkurat samme feil som vist med eksempel her. I denne oppgaven er det mange opplysninger å holde styr på, og elevene gjør feil ved å behandle den utregnede størrelsen «antall gutter som har valgt 1P» som «antall gutter som har valgt 1T» i neste mellomregning. Da jeg ikke har hatt mulighet til å snakke med elevene om oppgaven, har jeg ikke grunnlag til å si om elevene er klar over at de gjør denne feilen, eller om den kommer av at ikke har fått med seg all informasjonen fra oppgaveteksten riktig.



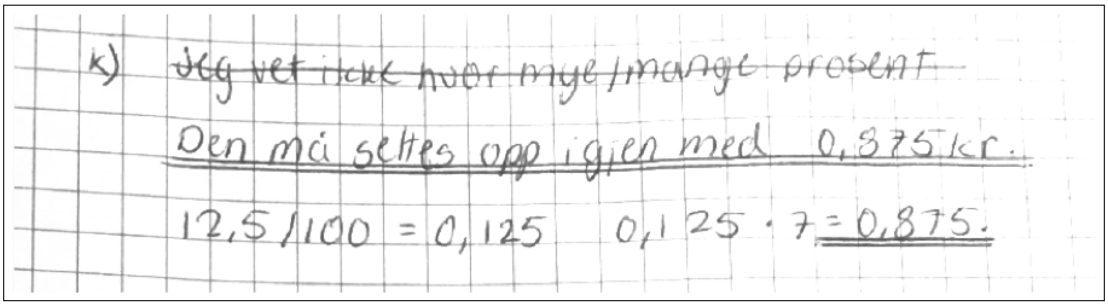
Figur 5.13: Elevbesvarelse på Oppgave A9 (d på besvarelsen). Her er det mange opplysninger å holde styr på, eleven gjør feil ved å behandle den utregnede størrelsen «antall gutter som har valgt 1P» som «antall gutter som har valgt 1T» i neste mellomregning.

Et eksempel som tydeligere illustrer en misforståelse ble gjort av flere elever på Oppgave A15, som handler om å finne total rabatt (%) fra to etterfølgende tilbud på n %. Figur 5.14 viser en elevbesvarelse (som er representativ for disse feilene) hvor eleven har svart at total rabatt etter to påfølgende tilbud på 20 % blir 40 %. Rabatt i kroner blir så regnet ut basert på 40 % av opprinnelig pris. Eleven har her glemt at etter den første rabatten er gitt, har varen fått en ny pris. Den neste rabatten på 20 % skal dermed beregnes basert på denne prisen: det vil si, referansestørrelsen til de to 20 %-avslagene er forskjellige.



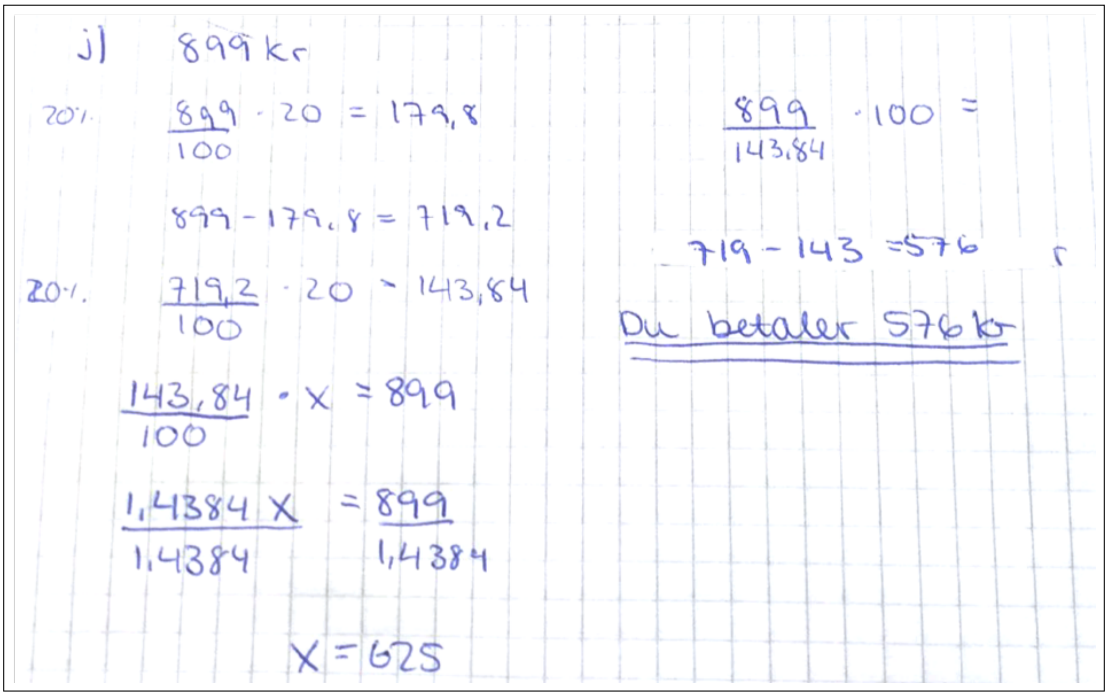
Figur 5.14: Elevbesvarelse på Oppgave A15 (j på besvarelsen). Eleven har glemt at den andre rabatten vil være på «ny pris» etter første rabatt.

Figur 5.15 viser et eksempel fra en elevbesvarelse på Oppgave A16. Eleven oppgir riktig beløp i kroner som bensinprisen må settes opp igjen med, men har kommenterer først (og strøket ut) at den er usikker på hvordan den prosentvise økningen kan regnes ut. Jeg har ikke grunnlag for å si noe om hva eleven tenkte eller kan, men besvarelsen kan tyde på at eleven er usikker på hvordan regne ut oppgangen i prosent.



Figur 5.15: Elevbesvarelse på Oppgave A16 (k på besvarelsen). Eleven oppgir riktig beløp i kroner som bensinprisen må settes opp igjen med, men kommenterer at han/hun er usikker på hvordan den prosentvise økningen regnes ut.

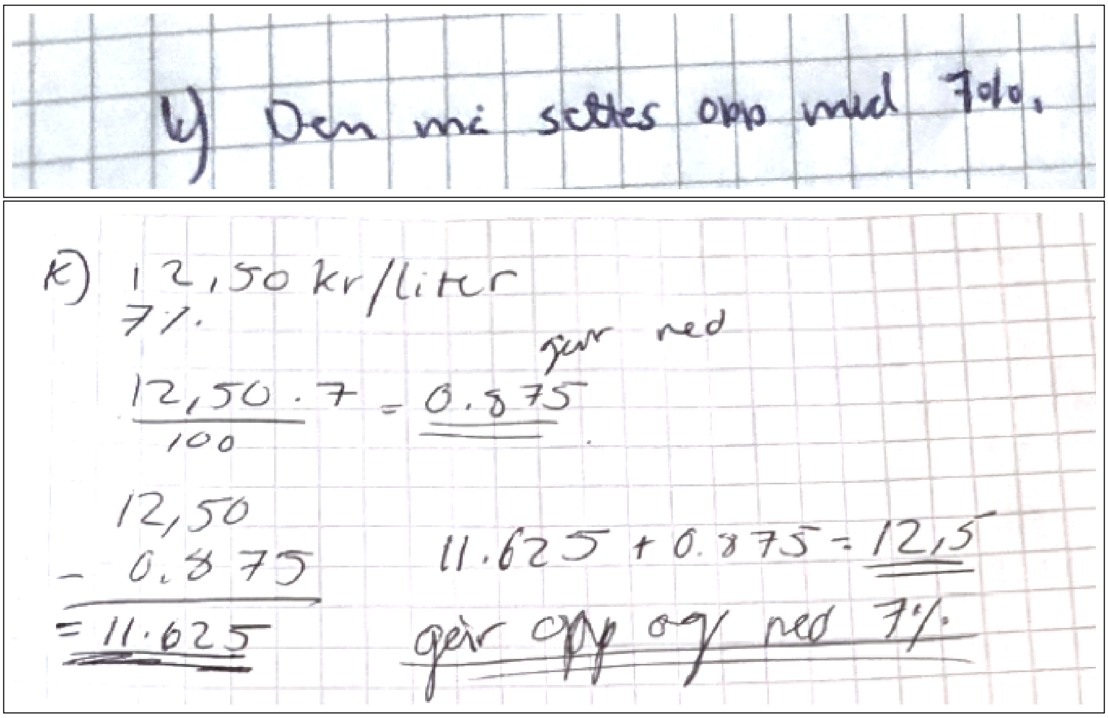
Gjennom analysen av datamaterialet ble jeg klar over at jeg ikke spesifikt ba elevene om at svaret måtte gis i prosentnotasjon på Oppgave A15 og A16. På Oppgave A15 var det noen av elevene som regnet ut rabatt i kroner riktig, som eksplisitt kommenterte at de ikke visste hvordan de skulle finne total rabatt i prosent. For elevene bak disse besvarelsene er det mulig å trekke slutningen at de ikke har full kontroll på prosentbegrepet. Derimot, for elevene som ikke eksplisitt skrev eller markerte at de ikke visste hva total rabatt ble i prosent (se eksempel i Figur 5.16) har jeg ikke grunnlag for å vite om de er i stand til å regne ut total rabatt i prosent eller ikke. Etter å ha blitt klar over denne mangelfulle presiseringen viste en ny gjennomgang av besvarelsene at hele 8 (av de opprinnelige 14 kodede feilene) ikke kunne sies å være feil likevel. Disse besvarelsene ble derfor registrert som riktige. Dette gjør at antall rapporterte «feil» på Oppgave A15 er noe usikkert, ettersom det muligens ville vært noe høyere om det ble spesifisert at total rabatt skulle oppgis i prosent. Den tilsvarende gjennomgangen av Oppgave A16 viste at eleven bak besvarelsen vist i Figur 5.15 var den eneste som hadde sett muligheten om at oppgaven ikke presiserte at svar skulle i prosentnotasjon. Figur 5.1 i Seksjon 5.1 viser resultatene etter disse justeringene.



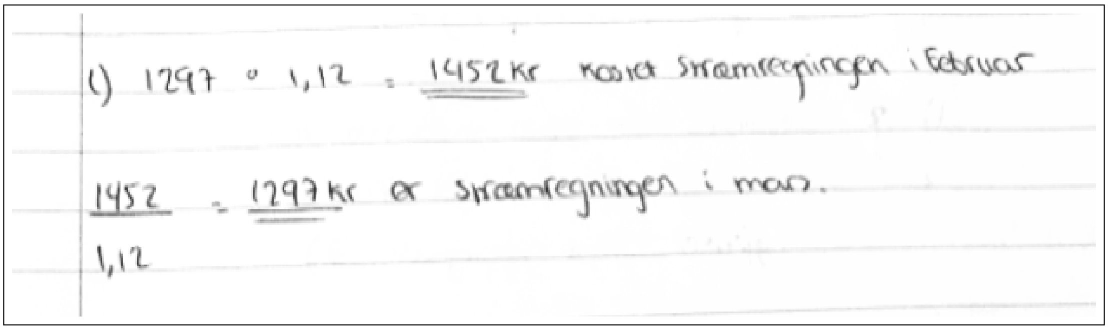
Figur 5.16: Elevbesvarelse på Oppgave A15 (j på besvarelsen). Dette er et eksempel som etter rekoding er blitt kategorisert som riktig, ettersom oppgaven ikke presiserer at total rabatt skal oppgies i prosent.

To besvarelser som er representative for feilkodingene på opp og ned med ulik prosent til Oppgave A16 vises i Figur 5.17. Her mener jeg at det tydelig kommer frem at eleven mener at prisen skal justeres opp igjen med den samme prosenten som den først ble justert ned, altså 7 %.

Elevbesvarelsen på Oppgave A17 vist i Figur 5.18 er nok et eksempel på hvordan referansemenger som endrer seg kan være et problem for elevene. Eleven finner strømprisen for februar riktig, ved å gange prisen i januar med vekstfaktoren 1,12. For å finne prisen i mars etter en 12 % nedgang prøver eleven å dele på 1,12 igjen, og ender dermed med samme pris som i januar. Dette blir ikke riktig, ettersom de 12 % nedgang i pris skal regnes ut basert på prisen i februar. Istedenfor å dele på (1+0,12) = 1,12 skulle det altså vært ganget med (1-0,12) = 0,88 i dette regnesteget. Slike feil kan være vanskelige å oppdage, spesielt for små prosenttall, ettersom $1/(1 + x) \approx 1 - x$ for små x.



Figur 5.17: To elevbesvarelse på Oppgave A16 (k på besvarelsen). Besvarelsene er representative for de feilene som er gjort.



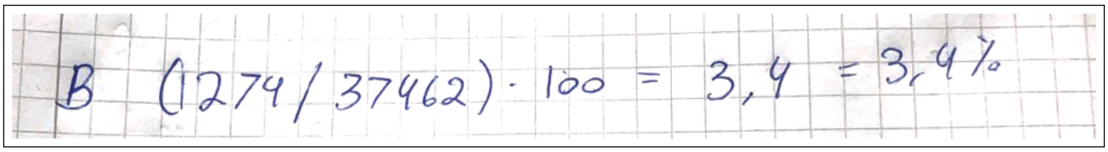
Figur 5.18: Elevbesvarelse på Oppgave A17 (l på besvarelsen). Eleven regner ut prosentvis oppgang med 12 % riktig, men prosentvis nedgang med 12 % feil.

5.4 Løsningsstrategier som blir en «tilfeldig algoritme»

Bruk av tilfeldige algoritmer (som ble beskrevet i Seksjon 2.8) var også noe utbredt i mitt datagrunnlag, til tross for at jeg ikke spesifikt så etter dem. Jeg mener derfor det er hensiktsmessig å presentere noen av de tilfeldige algoritmene som jeg observerte at ble brukt gjentatte ganger.

5.4.1 Deler minste tallet på det største

En av tingene som ble gjort var at det minste tallet ble delt på det største, når et prosenttall skulle regnes ut. En betydelig andel av elevene gjorde nettopp dette på Oppgave A7, vist med eksempel i Figur 5.19. Jeg er overbevist om at elevene som har fulgt denne fremgangsmåten er klar over at vaksinasjonsdekning betyr andelen som *er* vaksinert, og ikke andelen som ikke er vaksinert. Likevel er det sistnevnte andel de regner ut. Dette kan selvsagt skyldes en forhastelse, men det kan også skyldes at elevene slavisk følger prosedyren: «oppgaven inneholder to tall, og spør etter en prosentandel; da skal jeg dele det minste tallet på det største og gange med hundre».



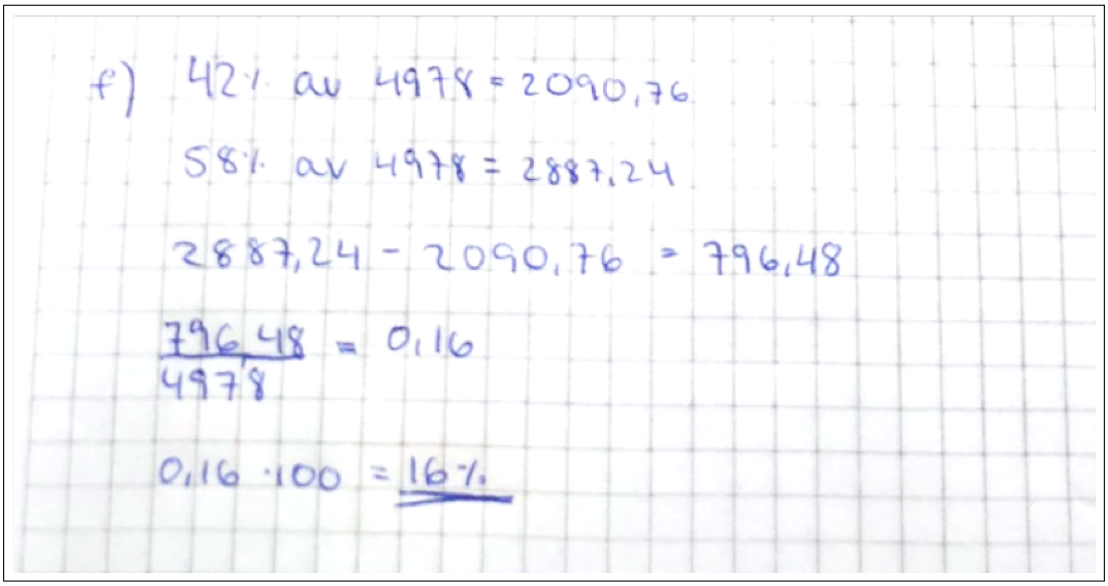
Figur 5.19: Elevbesvarelse på Oppgave A7 (b på besvarelsen), hvor eleven har delt det minste tallet på det største tallet i oppgaveteksten.

5.4.2 Deler største tallet på det minste

Et annet eksempel på en tilfeldig algoritme kan være at den største mengden blir delt på den minste. Fremgangsmåten vist i Figur 5.4 (i Seksjon 5.2.2) *kan* være et eksempel på dette.

5.4.3 Bruker «det hele» som referanse

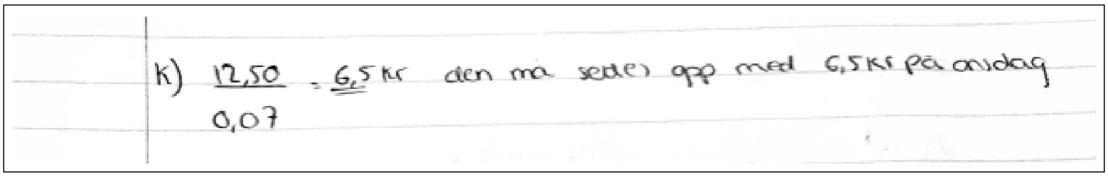
I besvarelsene på Oppgave A11 fins det eksempler hvor differansen som ble etterspurt ble regnet ut riktig, men hvor differansen ble delt på det totale antallet ansatte i utregning av prosentvis forskjell (eksempel i Figur 5.20). Dette valget av «det hele» som referanse kan være et resultat av en sterk «del av hel»-tankegang.



Figur 5.20: Elevbesvarelse på Oppgave A11 (f på besvarelsen), hvor eleven får feil prosenttall ved å dele forskjell mellom antall menn og kvinner på totalt antall ansatte.

5.4.4 Referansestørrelsen deles på prosent

En annen ting som ble gjort (av flere) var at referansestørrelsen ble delt på prosentopplysningen i oppgaveteksten. Et eksempel på dette er vist i Figur 5.21. De tilfellene hvor denne «algoritmen» ble brukt kan det se ut til at elevene ikke hadde skjønt hva oppgaven spurte etter, og dermed gjorde en tilfeldig regneoperasjon (dele) med de oppgitte tallverdiene. Elevene som «tok i bruk» denne tilfeldige algoritmen startet gjerne med å konvertere prosenten til desimaltall. Siden dette desimaltallet gjerne blir den minste blant de tilgjengelige opplysningene kan det også hende at tankegangens om følges er at det største tallet skal deles å det minste for å finne svaret. Det er verd å merke seg at elevbesvarelsen vist i Figur 5.21 også inneholder en regnefeil.



Figur 5.21: Elevbesvarelse på Oppgave A16 (k på besvarelsen), hvor eleven gjør feil ved å dele (istedenfor å gange) opprinnelig pris på prosentvis nedgang for å finne hvor mye prisen ble redusert med i kroner.

5.4.5 Løsningsstrategien «via 1 %» fører til feil

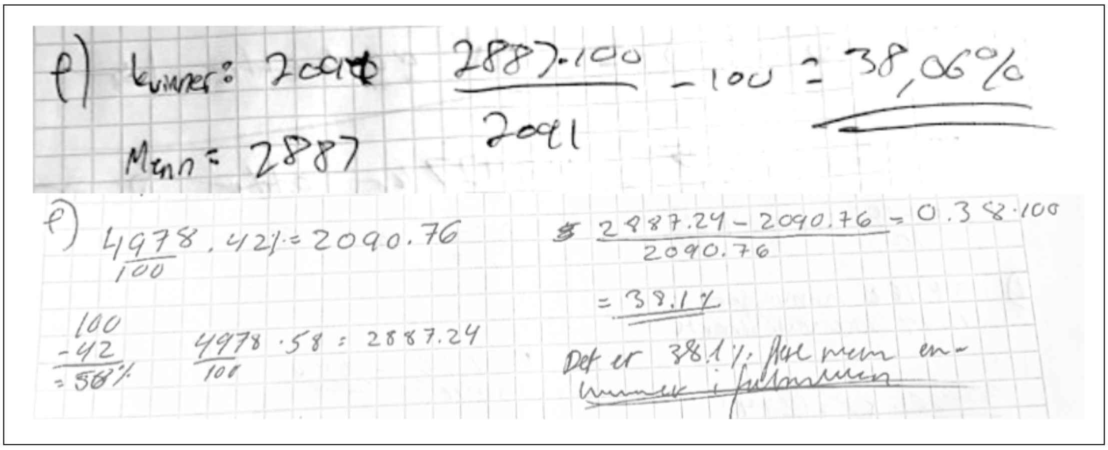
Det var også eksempler på hvor bruk av den utbredte metoden «via 1 %» (beskrevet i teorikapittelet) var med å forårsake feilen til elevene. Et eksempel fra Oppgave A18 er alt nevnt i Seksjon 5.3.2 (med eksempel fra besvarelse i Figur 5.11). Feilen som ble gjort her er det som typisk skjedde når elevene fikk feil ved bruk av «via 1 %»-metoden: Det å skulle direkte anvende en kjent metode ser ut til å være med å bidra til at elevene ikke reflekterer over hva de faktisk regner ut, og hva som blir spurt om i oppgaveteksten. Nå skal det sies at jeg har observert mye som er løst riktig ved at elever har fulgt en tankegang ved å finne hva 1 % er først, før de finner svaret de er ute etter, men det er ikke dette jeg har fokusert på i analysen.

5.5 Elever unngår prosent hvis mulig og går via antall

Jeg opplevde at det var gjennomgående at flere av elevene gikk via antall når de hadde muligheten til å ikke bruke prosent. Jeg vil utdype hva jeg mener med dette gjennom å vise to eksempler som illustrerer denne observasjonen. Det første eksempelet er knyttet til Oppgave A15, og det andre til Oppgave A11.

Fra analysearbeidet observerte jeg at det oppstod et merkbart skille mellom hvordan elevene fra de ulike matematikklassene løste oppgaven A15. Alle R2- og 1T elevene som løste oppgaven riktig, regnet ut den «totale rabatten» i prosent, selv om dette ikke var spesifisert i oppgaveteksten. Tilsynelatende er derfor dette hva disse elevene finner naturlig. Derfor finner jeg det interessant at elevene fra 1P, 2P og 2PY som har løst oppgaven riktig, har i hovedsak oppgitt den totale rabatten i kroner. For flertallet av disse elevene var det altså naturlig at en «total rabatt» skulle oppgis i kroner. Som nevnt i Seksjon 5.3.3 var det noen elever som løste oppgaven på denne måten som spesifiserte at de ikke visste hvordan den totale rabatten i prosent skulle regnes ut. Selv om R2- og 1T-elevene oppgav den totale rabatten i prosent, fant også disse (med et par unntak) rabatten via å regne ut avslaget i kroner først, før de så fant det prosentvise avslaget ved å bruke formel (2.1).

Oppgave A11 er en av oppgavene som viste seg som spesielt utfordrende (Figur 5.1 viser 31 feil)[44]. Flertallet av elevene som løste den riktig regnet som første steg den oppgitte *andelen* kvinner om til et *antall* kvinner, for så å regne ut *antall menn*. Elevene som løste oppgaven riktig ved å regne via antall regnet ut den prosentvise forskjellen på en av to måter, hvor disse to måtene er vist med eksempel i Figur 5.22. Elevene som har gjort som den nederste besvarelsen i figuren har videre regnet ut forskjellen mellom antall kvinner og menn, før denne forskjellen relateres antall kvinner når den prosentvise forskjellen skal regnes ut. Elevene som har gjort som den øverste besvarelsen i Figur 5.22 regner også først ut antall kvinner og menn. Videre regnes det prosentvise forholdet antall menn utgjør *av* antall kvinner, og til slutt trekkes 100 % fra dette forholdstallet for å finne den prosentvise forskjellen.



Figur 5.22: To elevbesvarelser som løste Oppgave A11 (f på besvarelsene) riktig ved å regne via antall kvinner og menn.

[44]Det var kun 4 R2- og 7 1T-elever som løste Oppgave A11 riktig.

6 Diskusjon

Dette kapittelet er delt i to. Først vil jeg i Seksjon 6.1 oppsummere og drøfte resultatene fra studien opp mot teorien. Jeg vil også knytte funn fra analysen opp mot elevoppgavene som er presentert i Kapittel 3, og hva de ulike oppgavene var ment å teste, der hvor jeg finner det relevant. Ved å se de typiske feilene som ble gjort i sammenheng med tidligere forskning, vil jeg peke på noen aspekter ved prosent jeg mener er (og ikke er) problematisk for elevene som deltok i denne studien. Avslutningsvis vil jeg i Seksjon 6.2 ta for meg studiens kvalitet, og diskutere noen sider ved denne.

6.1 Resultatene sett i lys av teori

Som det fremkommer av Figur 5.1 (i Seksjon 5.1) ble det gjort en god del feil i informantenes arbeid med oppgavene i oppgaveheftet. I samsvar med flere studier (Parker & Leinhardt, 1995; Parker, 1997; Strømskag, 2020; Lembke & Reys, 1994; Dole, 2000) vil jeg derfor si at også denne studien viser at prosent er et tema som er utfordrende for elever, og kan skape problemer i arbeid med oppgaver. De forskjellige feilene som ble gjort i denne studien har mange ulike forklaringer, som vil diskuteres i Seksjon 6.1.1–6.1.4. I Seksjon 6.1.5 tar jeg opp noen sider ved prosent informantene i denne studien viste at de behersket. Avslutningsvis vil jeg i Seksjon 6.1.6 komme med en kort oppsummering.

6.1.1 Prosentvise forskjeller

På alle de tre oppgavene hvor det ble gjort flest feil (Oppgave A10, A11 og A14) er det en prosentvis forskjell mellom to ulike mengder som skal regnes ut (forholdssammenheng D). Dette kan tyde på at denne typen prosentsammenheng er spesielt vanskelig for elevene å forstå. Det kan også hende det rett og slett er uvant for dem å skulle løse oppgaver som omhandler slike forskjeller mellom to ulike mengder (se neste avsnitt). Feilene som ble gjort på disse oppgavene har derimot i hovedsak to vidt forskjellige forklaringer. Det første er at de språklige frasene *mer enn* og *større enn* tolkes feil (Oppgave A10 og A14). Det andre (som jeg vil diskutere i Seksjon 6.1.3) er at elevene ikke er klar over, eller glemmer, at den prosentvise forskjellen må relateres en av de to størrelsene, når de to størrelsene som sammenliknes selv er prosenttall (Oppgave A10 og A11).

Det er en kjent sak at aspekter ved begreper som fokuseres på i sluttvurdering påvirker hva lærerne fokuserer på i undervisningen. Blant de 10 eksamensoppgavene som omhandler prosent fra 2018 og 2019 er det kun på én av oppgavene hvor en prosentvis forskjell mellom to ulike størrelser (forholdssammenheng D) skal regnes ut (oppgave c til høyre i Figur 2.3 i Seksjon 2.5.3). Det at forholdssammenheng D (se Seksjon 2.4.5) tilsynelatende fokuseres lite på i sluttvurderingen (eksamen) etter 10. trinn kan dermed ha vært med å forårsake at elevene ikke er veldig klar over dette aspektet ved prosentbegrepet. Dette vil i så fall kunne være en del av forklaringen på hvorfor informantene fikk spesielt problemer på oppgavene der prosenttallet beskriver forskjellen mellom to ulike størrelser.

Feilaktig tolkning av «mer enn» og tilsvarende språklige fraser førte også til feil på oppgaver hvor en prosentvis endring av en mengde (forholdssammenheng B) skulle regnes ut. Dette indikerer at det er hva som ligger i disse språklige frasene som har vært problematisk for elevene på oppgavene A5, A6, og A14 (også i noen tilfeller på Oppgavene A10-A13) og ikke nødvendigvis hvilken prosentsammenheng som skulle regnes ut. Det er uansett tydelig at mange av elevene legger noe annet i fraser som *mer enn* når det kommer til prosent. At *prosent mer enn* er problematisk for elever støttes av at det samme problemet er trukket frem i internasjonale studier, da riktignok med «more than» som blir overført til «times more than» og så videre (se Seksjon 2.7). Det er derfor nyttig å kunne å fastslå at denne feilen overføres med språket, og også gjelder på norsk. Jeg ønsker å trekke frem at i mitt datamateriale ble denne feilen[45] gjort også på oppgaver hvor forskjellen eller endringen uttrykkes med andre språklige fraser enn «mer enn» (se Seksjon 5.2.2).

Som presentert i Seksjon 2.7 observerte Mueller (1958) tilsvarende feiloppfatninger blant studentene han underviste ved Maryland State Teachers College i Towson, M.D, USA[46]. Disse studentene hadde en felles forståelse av at det ikke er noen forskjell mellom de to påstandende «175 % av noe» og «175 % større enn noe». Han hevder at denne feiloppfatningen kan forklares ved at den viktige forskjellen mellom disse to påstandene aldri kan ha blitt fokusert på i prosentundervisningen.

I og med at en så betydelig andel av elevene valgte løse Oppgave A14 på samme feilaktige måte, er det verd å se nærmere på om oppgaven kunne vært formulert annerledes, for å enda tydeligere få frem at det er *differansen* som er oppgitt til å være 300 %. Etter å

[45] Å uttrykke en prosentvis endring eller forskjell med en *faktoren* istedenfor basert på en differanse
[46] I dag er dette Towson State University.

ha sett noen ganger på teksten mener jeg den er tydelig, og at den ikke trenger noe mer informasjon. Oppgaven tester godt akkurat dette, om elevene er konsekvente med at *mer enn* innebærer en differanse i oppgaver med prosent.

Det er relevant å se på resultatene fra oppgavene A5 og A14 i sammenheng. En betydelig lavere andel av elevene tolket samme frase «mer enn» som «ganger mer enn» i Oppgave A5 enn i Oppgave A14. I Oppgave A14 er det oppgitt et prosenttall, der det er referansestørrelsen dette prosenttallet relateres til som er den ukjente, mens på Oppgave A5 er det prosenttallet som skal finnes. For elevbesvarelsen vist i Figur 5.3 i Seksjon 5.2.1 mener jeg dette er forklaringen på hvorfor eleven gjorde feil på A14. Basert på elevens riktige svar på (A5, A6, A12 og A13) vil jeg påstå det er grunn til å tro at eleven også ville klart å regne ut riktig svar på A14 dersom oppgaveteksten var snudd om på som følger: «Du har 120 kr. Dette er x % mer enn hva jeg har. Jeg har 30 kr. Hva er x?». Ved å bruke samme fremgangsmåte som på A5 (øverst i Figur 5.3) ville eleven da ha fått: $120 - 30 = 90$, $x\,\% = (90/30) \cdot 100 = 300\,\%$, som gir $x = 300$. I Parker og Leinhardt (1995) og Dole (2000) er oppgaver der referansestørrelsen er den ukjente (Type III) mer utfordrende, noe som er tilfellet for Oppgave A14. Ettersom Oppgave A5 en tradisjonell øvingsoppgave uten kontekst er det ikke mulig å si om det er typen prosentsammenlikning som gjør at det ble gjort så mange flere feil på Oppgave A14 enn A5.

Enda annen faktor som kan ha vært med å bidra til at det ble gjort flere feil på Oppgave A14 er at det oppgitte prosenttallet her er større enn 100, mens det riktige svaret på Oppgave A5 er 100 %. I følge både Parker og Leinhardt (1995, s. 448) og (Mueller, 1958, s. 475) blir påstander av typen «mengde A er x % større enn mengde B» spesielt problematiske for prosenttall $x > 100$. Mueller (1958) mener det blir lettere for en student å innse at påstandene «75 % av» og «75 % større enn» ikke beskriver det samme, ettersom «75 % av noe» ikke vil gi et større tall en det han opprinnelig startet med. Med utgangspunkt i denne påstanden ville Oppgave A14 blitt forenklet om prosenttallet i oppgaveteksten ble endret fra 300 % til for eksempel 30 %. De to overnevnte foreslåtte justeringene av Oppgave A14 kunne vært interessant å følge opp i en videre studie.

6.1.2 Feil referansestørrelse i utregning av prosentvise endringer

Det ble også gjort en del andre feil på andre av oppgavene som gikk på prosentvis endring av en mengde, eller forskjeller mellom to ulike mengder. Som det fremkommer av analysekapittelet kan disse feilene gjerne forklares med at de deler forskjellen eller endringen på feil størrelse i utregningen av prosenttallet som etterspørres i den gitte oppgaven. Også dette samsvarer bra med funn fra tidligere studier. For eksempel fant Parker og Leinhardt (1995) at «Base misinterpretation — that is, dividing the increase or decrease by the wrong number—accounted for one fifth of the errors» (Parker & Leinhardt, 1995, s. 426) [47]. Parker og Leinhardt (1995) peker på asymmetrien som er til stede mellom en slik prosentvis øking og minking som en mulig kilde til disse vanskelighetene. Som en av forfatterene skriver i en publikasjon noen år senere: «Additive increase and decrease are opposites.... Percent increases and decreases are relative amounts — rates of change— and, as such, present an entirely different picture» (Parker, 1997, s. 406).

Som flere studier (Kruger & Vargas, 2008; Chen & Rao, 2007; Parker, 1997; Parker & Leinhardt, 1995) påpeker er det ikke uvanlig at elever, eller samfunnsborgere forøvrig, tenker feil når det kommer til påfølgende prosentvise endringer (prosentvis oppgang og nedgang, påfølgende avslag osv.). For utdypninger se Seksjon 2.7. Oppgavene A15, A16 og A17 ble laget bevisst for å teste nettopp dette, om elevene hadde et begrepsbilde av prosent som tillot dem (feilaktig) å tenke at prosent har en symmetrisk natur på samme måte som reelle tall, og som språket kan indikere (se Seksjon 2.6.3). Som kan sees fra Figur 5.1 i Seksjon 5.1 ble det gjort henholdsvis 6, 10 og 4 feil på disse oppgavene[48]. Sammenliknet med antall feil på noen av de andre oppgavene er ikke dette veldig store utslag. Likevel finnes det altså eksempler i mitt datamateriale som støtter at denne feiloppfatningen er til stede også blant elevene som deltok i min studie. Det ble gjort flest av denne type feil på Oppgave A16. Besvarelser som den vist øverst i Figur 5.15 i Seksjon 5.3.3 bærer preg av at elevene, uten å regne, raskt svarte at bensinprisen skulle settes opp igjen med 7 % for å komme til samme sted (etter først å satt ned 7 %). Feiloppfatningen er derimot også til stede i besvarelser som den vist nederst i den samme figuren. Denne eleven viser at han/hun har god kontroll på de to prisjusteringene i kroner, ved å ryddig sette opp alle

[47]Dette utsagnet er hentet fra en gjengivelse av feil de har funnet på oppgaver som gikk på økning og minking, etter å ha re-kodet datamaterialet fra (Guiler, 1946b).

[48]Se Seksjon 5.3.3 for en diskusjon rundt usikkerhet i antall feil på A15 og A16.

mellomregningene sine. Likevel svarer eleven tydelig at oppjusteringen av pris i prosent blir lik som nedjusteringen. Fra besvarelsen tolker jeg at eleven sier dette basert på at siden «kroner ned og opp» blir det samme, blir også «prosent ned og opp» det samme, og svarer: «går opp og ned 7 %». Som påpekt i teorikapittelet (Seksjon 2.7) kan en forklaring på hvorfor denne eleven ikke oppdaget feilen være at det riktige svaret (7,53 %) er såpass nært at det virker rimelig med det gale intuitive svaret. Dersom nedjusteringen hadde vært på 50 % ville den siste mellomregningen til eleven blitt $6,25 + 6,25 = 12,5$. Da ville det muligens vært lettere å oppdage at økningen på 6,25 ikke utgjør 50 % (men 100 %) av den opprinnelige verdien (6,25) for økningen. Det ble ikke gjort like mange tilsvarende feil på A15 og A17, men tilsvarende feil forekom også her (se Seksjon 5.3.3).

Gjennom analysen av datamaterialet ble jeg også oppmerksom på at oppgavene A15, A16 og A17 kanskje ikke var laget gode nok for å gi innsikt i elevenes forståelse for asymmetrien som er tilstede i påfølgende prosentvise endringer. På oppgavene A15 og A17 følger elevene en veldig stegvis prosedyre, hvor de i hvert steg bruker formel 2.1 til å oversette den prosentvise endringen til et antall (som for disse oppgavene blir et beløp i kroner). Som trukket frem i Seksjon 5.5 observerte jeg flere steder at elevene gjerne tyr til å regne «via antall» der hvor det er mulig. Ved at denne absolutte differansen trekkes fra/legges til den opprinnelige verdien, får elevene som følge av en slik stegvis prosedyre tallfestet referansestørrelsen som den påfølgende prosentvise endringen skal basere seg på. For meg virker det altså som at det å regne via antall hjelper elevene å bli klar over at en ikke bare kan regne sammen prosentene for så å regne ut den totale endringen basert på summen av de prosentvise endringene.

For å bekrefte/avkrefte om muligheten å regne via antall hjelper elevene til å huske at referansestørrelsen endrer seg underveis, kunne det derfor også vært interessant å etter disse tre oppgavene hatt med en mer generalisert oppgave for to påfølgende prosentvise endringer. Et eksempel på en slik oppgave kunne vært:

> Hva blir den totale prosentvise endringen av en størrelse a etter to påfølgende prosentvise endringer på p og q prosent? Her er fortegnene på prosenttallene p og q ment å angi om hver av endringene er en økning (positivt fortegn) eller minking (negativt fortegn).

Det riktige svaret blir her $p + q + p \cdot q/100$ prosent. Elever som her hadde svart $p + q$ prosent ville vist en mangelfull forståelse av asymmetrien som er til stede i en følge av prosentvise endringer, da dette bare stemmer dersom p og/eller q er 0.

6.1.3 Elevene regner ut differansen i prosentpoeng

En annen ting som fremkom fra analysen av datamaterialet var at det å sammenlikne to prosentopplysninger *prosentvis* er vanskelig for mange av elevene. Når to prosenttall trekkes fra hverandre får svaret «enheten» prosent. Siden svaret som skal finnes skal ha enhet prosent stopper elevene her, og «glemmer» at en prosentvis forskjell må være relativ en referanse (også når forskjellen som regnes ut er mellom to prosenttall!). Selv mener jeg dette er et veldig viktig aspekt ved prosentbegrepet å forstå godt: dersom to relative måltall fra ulike land (eller andre settinger) som er oppgitt som prosenttall skal sammenliknes, må forskjellene mellom disse prosenttall refereres til noe for å gi en meningsfull prosentvis (relativ) sammenlikning.

En mulig forklaring på hvorfor den overnevnte feilen blir gjort kan være at elevene ikke ser på prosent som en intensiv størrelse som måler et internt forhold, men at de tenker på prosent som et ekstert forhold (disse begrepene er forklar i Seksjon 2.4.2). Med det mener jeg at det kan tyde på at de ser på prosenttegnet, %, som en enhet, noe som kan deles bort når forholdstallet regnes ut. Nettopp derfor er det at prosent er et internt forhold og ikke har en enhet, siden en enhet vil kunne deles bort når forholdstallet regnes ut. Elevene som gjorde overnevnte feil på Oppgave A10 og/eller A11 kan trøste seg med at begrepene prosent og prosentpoeng gjerne brukes feil ellers i samfunnet[49]. At disse begrepene brukes feil både blant elever og ellers i samfunnet peker likevel på enda en ting som kan fokuseres mer på i prosentundervisningen i skolen.

Jeg mener den overnevnte feilen er med å peke på at elevene ikke er bevisste nok på den multiplikative naturen til prosent. En prosentvis sammenlikning av to størrelser vil *alltid* innebære at et forhold skal regnes ut.

[49]For eksempel i Marschhäusers artikkel i Aftenposten 17. november 2015, som i overskriften skriver «0,5 prosent lavere rente» når de mener «0,5 prosentpoeng lavere rente». En halv prosent lavere rente ville ikke utgjort så mye som artikkelen mener å få frem. Hvis eksempelvis renten synker med 0,5 prosentpoeng fra 3,0 til 2,5 prosent, har renten sunket med 17 prosent. Dersom renten synker med 0,5 prosent fra 3,0 prosent, vil den nye renten være 2,985 prosent.

6.1.4 Tilfeldig algoritme

I denne studien har det ikke direkte blitt fokusert på å se på eller å forstå hvilke løsningsstrategier elevene tar i bruk på de ulike oppgavene, ettersom dette ikke blir direkte relevant for å svare på forskningsspørsmålet mitt. Under kodingen av datamaterialet prøvde jeg å kode med så mange merkelapper som mulig, før jeg senere samlet dem. I denne prosessen oppstod det flere koder som beskrev gjentakende feil som var forårsaket av fremgangsmåter som ikke gav mening ut i fra hva oppgaven spurte om. For utdypninger rundt slike feilaktige fremgangsmåter se Seksjon 2.8. Det er altså flere studier som trekker frem hvordan elever gjerne tar i bruk en tilfeldig algoritme når de står fast på en prosentoppgave. Parker (1994, som sitert i Parker, 1997) beskriver dette med at «When students lose sight of the comparative nature of percent, they often develop flawed procedures, based upon the size of the numbers rather than the relationships in the problem.» (s. 406). Siden disse tilfeldige algoritmene stadig nevnes i forskningslitteraturen valgte jeg i analysen av datamaterialet å samle kodene som beskrev de gangene en tilsynelatende tilfeldig løsningsstrategi forårsaket feilene elevene gjorde under dette temaet med dette navnet. Noen av disse «tilfeldige algoritmene» jeg fant igjen i mitt datamateriale er presentert i analysekapittelet (Seksjon 5.4). Felles for disse tilfedige algoritmene er at elevene tilsynelatende bare prøver å gjøre noe med tallene de har tilgjengelig (typisk gange sammen eller dele på hverandre), fremfor å arbeide ut i fra hva oppgaveteksten etterspør. Jeg mener disse funnene er med å styrke Parker sin påstand i det overnevnte sitatet.

6.1.5 Sider ved prosent elevene behersker godt

Noe som derimot er veldig positivt å trekke frem er at elevene i denne studien ikke har problemer med å omforme mellom ulike notasjoner. I de seks tilfellende det ble kodet for et konverteringsproblem, var ikke konverteringsfeilen hovedårsaken til at svaret ble feil. Disse seks feilene er også fordelt utover alle klassenivå, og gjort av ulike elever på ulike oppgaver. Jeg føler meg derfor trygg på å si at de i større grad kan avskrives under kategorien som «slurv og regnefeil» enn som en forklaring til et problem elevene har knyttet til prosentoppgaver. Dette er i samsvar med det Dole (2000) trekker frem, om at studier gjerne viser at elever stort sett har kontroll på enkel konvertering. I teorikapittelet har jeg benyttet studier som blant annet har resultater på at dette er et forholdsvis stort problem, men som også er et stort fokus i skolen. For denne elevgruppen virker det som undervisningen av dette opp gjennom skolegangen har fungert godt, noe jeg vil si også gir mening dersom det er riktig at prosentundervisningen fokuserer mye på dette. Nå er det kanskje også naturlig å ta inn at informantene i min studie er videregående elever, og at det vil være naturlig at problemer knyttet til konvertering kan avhenge i stor grad av alderstrinn.

Til tross for at de siste oppgavene som gikk på økonomi innebar å måtte hente opplysninger fra tekstoppgaver, er elevene stort sett i stand til å løse disse uten problemer. Dette kan også muligens forklares ut i fra hva som fokuseres på i undervisningen, og at denne type oppgavesetting er noe elevene er vant med. Sånn sett pekte også de første 4 oppgavene seg veldig ut som noe de hadde god kontroll på[50].

6.1.6 Oppsummering

Avslutningsvis vil jeg hevde ut i fra denne studien at det å relatere prosenttall til riktig størrelse, basert på kontekst og språklige formuleringer i oppgaveteksten er problematisk for elever i videregående skole. Jo mer utydelig, eller flere valg det fins på hva referansestørrelsen i en oppgave kan være, jo flere feil virker det som de gjør, og jo flere «tilfeldige algoritmer» lager de seg for å finne et svar. Overgangene fra tekst til regnestykke er spesielt utfordrende på oppgaver som omhandler prosentvis endring. I tillegg mener jeg at det er uklart for elevene at prosenttegnet % ikke er en enhet som kan deles bort. Basert på hvordan flertallet av informantene løser oppgaver er det ikke tydelig at de ser på prosent som en intensiv størrelse som måler interne forhold. Dette er med å indikere at elevene mangler innsikt i prosents sammenliknende natur.

[50]Disse likner i stor grad på hvordan de møter prosent i oppgaver i skolen (ifølge blant annet Parker og Leinhardt, 1995).

6.2 Studiens kvalitet

I denne seksjonen vil jeg presentere en vurdering av denne studiens kvalitet, eller troverdighet, som det gjerne omtales i kvalitativ forskning. For å sikre troverdigheten i kvalitativ forskning trekker Guba (1981) frem fire hovedpunkter: kredibilitet, overførbarhet, pålitelighet, bekreftbarhet[51]. Jeg vil beskrive disse punktene kort og det jeg har gjort i denne studien i de påfølgende delseksjonene.

6.2.1 Kredibilitet

Ifølge Guba (1981) stiller studiens *kredibilitet* spørsmål om hvor sannsynlig (og på den måten troverdig) den virker. I stor grad går det ut på om forskningen er foregått i en så naturlig setting som mulig. I min studie kan det ikke påståes at datainnsamlingen er foregått i en naturlig situasjon. I perioden hvor jeg gjennomførte innsamlingen var elevene og lærerne inne i den første tiden med hjemmeskole, etter at skolene stengte ned i vår. Å arbeide slik er langt fra en naturlig situasjon for elevene.

En annen faktorene som øker kredibiliteten er motivasjon blant informantene (Cohen et al., 2013). Det er selvfølgelig vanskelig å kunne si noe sikkert om elevenes motivasjon, basert på at datamaterialet mitt kun består av skriftlige besvarelser. Både lengden på besvarelsene, og det at flertallet oppgav å ha arbeidet med oppgavene hele den avsatte tiden tyder på at dette ikke er noe elevene bare har *tatt lett på*. Jeg er veldig imponert og takknemlig over innsatsen og prioriteringen elevbesvarelsene vitner om. Elevene kunne virkelig ha hatt unnskyldninger nok til å prioritere arbeidet med disse oppgavene langt ned. Vedlagt i epostene med besvarelsene fikk jeg flere kommentarer om at de synes det var spennende og interessant å delta inn mot en masteroppgave. Dette var kommentarer som: «har nok glemt noe, men var gøy å få til masse også tror jeg», «trodde jeg kunne dette, men merker glemt en del», «kom ikke helt igjennom alt på de to skoletimene, men prøvde på det meste», «jeg har en avtale jeg må på, men fikk gjort så mye jeg klarte på 38 minutter» og mange flere[52]. Basert på dette mener jeg å ha grunnlag for å si at elevene har vist motivasjon i sin deltakelse i denne studien.

[51]Min oversettelse av de fire engelske ordne *credibility*, *transferability*, *dependability* og *confirmability*
[52]Jeg har i gjengitte sitat skrevet om dialekt til bokmål for å beskytte informantenes anonymitet.

Ifølge Guba (1981) er det å teste forskeren med spørsmål knyttet til studien, og på den måte øke innsikten over tid, med på å øke troverdigheten (og kredibiliteten) til en studie. Underveis i arbeidet med denne studien har jeg diskutert og fått tilbakemeldinger på tanker rundt tekst, samt analysering av data og resultater, både av en tidligere medstudent (som nå er lærer), og av en forsker innen teknologifag[53].

6.2.2 Overførbarhet

Overførbarhet handler, som det ligger i navnet, om evnen funnene har til å kunne anvendes i andre situasjoner (Guba, 1981). Altså om resultater og slutninger er overførbare, utover denne oppgaven. Alle informantene mine er fra samme skole, men de er fordelt utover fem ulike matematikkurs, samt alle trinnene. Det mener jeg gir et styrket grunnlag for å kunne peke på trekk i analyseresultatene som blir en fellesnevner blant feil som elevene gjorde på de ulike prosentoppgavene, og som kan grunnes misforståelse av ulike aspekter ved prosentbegrepet. For å styrke overførbarheten i studien har jeg forsøkt å gi grundige beskrivelser. Dette er én av årsakene til at jeg har valgt å gå så grundig inn i alle oppgavene i Kapittel 3, for at disse (om noen ønsker) kan benyttes videre, og også videreutvikles basert på hva de ønskes å brukes for. Til sammen danner dette konteksten til studien, og ifølge Guba (1981) kan en grundig beskrivelse av denne være med å styrke en studies overførbarhet. Resultater og funn er avhengige av den konteksten som forskningen ble gjort i (Cohen et al., 2013). Jeg har også under presentasjon av funn og i diskusjonen pekt på noen ting ved noen av oppgavene jeg vil anbefale å gjøre noe med om de skal brukes igjen, basert på erfaringer i denne studien. Så jeg vil ikke si at det i seg selv er et mål å gjenta denne studien nøyaktig likt igjen.

Det er også sentralt å presisere at innenfor kvalitativ forskning er det primært sett et mål om å overføre kunnskap, ikke å generalisere den (Postholm, 2010). Med støtte for funn også i litteratur mener jeg derfor at kunnskapen, som her i studien blir tydeliggjort, kan ha som formål å bevisstgjøre rundt hva som kan være nyttig å ha fokus på i matematikkundervisningen rundt prosentbegrepet.

[53]Jeg ønsker å presisere her at data som er diskutert har allerede vært anonymisert.

6.2.3 Pålitelighet

Studiens *Pålitelighet* handler om andre forskere vil kunne oppnå tilsvarende resultater dersom de gjennomfører studien med liknende (eller de samme) deltakere (Guba, 1981). En måte påliteligheten i en kvalitativ studie kan styrkes, er gjennom å gi det som heter tykke forklaringer. Altså jeg har prøvd å utdype og forklare hvordan innsamling av data har foregått og ble gjennomført, hvordan den var tiltenkt og hvordan det er blitt analysert. Jeg har også inkludert utdrag av elevbesvarelser i analysen, som eksempler for å underbygge det jeg sier, og for hva som er kodet som dette i de ulike tilfellene. I prosessen for å fremstille tekst i denne oppgaven har det vært spesielt nyttig for å øke påliteligheten at jeg førte en uformell logg i en kladdebok underveis i arbeidet, som jeg har kunnet gå tilbake til for å se hvor jeg stoppet opp, hva jeg tenkte på et tidligere stadie osv. Med alle endringene som skjedde denne spesielle våren, er jeg veldig glad for å ha gjort dette, og jeg har virkelig fått erfare nytteverdien av å føre logg under analysearbeidet. Å føre uformell logg er noe som anbefales fra flere hold (blant annet av Robson og McCartan, 2016). Målet mitt har altså vært å gi gode nok beskrivelser til at andre kan følge prosessen, og tolkningene som er blitt gjort underveis i den. Dette trekkes også frem av Robson og McCartan (2016) som styrkende for studiens troverdighet, men hvor de samtidig presiserer at det er ingen idiotsikker måte å garantere validitet (s. 172).

6.2.4 Bekreftbarhet

Bekreftbarhet går ut på om funnene i studien vil kunne bli gjentatt i en tilsvarende situasjon, med tilsvarende informanter og setting (Guba, 1981). Som nevnt i metodekapittelet trekkes det frem at siden forskeren i kvalitativ forskning er viktig, så vil alltid forskerens kunnskap og erfaringer være en faktor som er med å farger en kvalitativ studie (Postholm, 2005). Det er derfor viktig å stille spørsmål ved studiens bekreftbarhet, for å sikre at studiens funn kommer fra informantene og konteksten, og ikke forskeren. Jeg har vært bevisst på min rolle som forsker igjennom studien, og en ting jeg har gjort som er med å svare på dette (som beskrevet i Seksjon 6.2.1) er at jeg har diskutert med to andre underveis i studien. En annen ting jeg har gjort er å diskutere mine funn opp mot teori. Det styrker studiens bekreftbarhet at mine hovedfunn ikke er i konflikt med tidligere forskning på området, men kan sees i sammenheng med tidligere funn.

7 Avsluttende refleksjoner

Med denne studien har jeg arbeidet ut ifra følgende forskningsspørsmål:

Hvilke aspekter ved prosent er vanskelig for elever i videregående skole?

Jeg har forsøkt å besvare dette gjennom å kartlegge hvordan 49 elever i den videregående skolen løser 19 prosentoppgaver. Oppgavene som ble brukt i datainnsamlingen ble designet med tanke på å dekke ulike aspekter ved prosentbegrepet, og anvendelser av dette. Kartleggingen av elevbesvarelsene er gjort ved en tematisk analyse, som har fokusert på hva som forårsaket de ulike feilene elevene gjorde. Resultatene fra analysen peker på noen aspekter ved prosentbegrepet som er problematisk for elevene som deltok i denne studien. Det som er diskutert i det forrige kapittelet kan oppsummeres i følgende punkter:

- Elevene tolker den språklige frasen «mer enn» (eller tilsvarende fraser) i oppgaveteksten som «ganger mer enn», og benytter dermed opplysninger feil i utregningene sine.
- Elevene bruker feil referansestørrelse i utregning av prosentvise endringer og forskjeller. Med andre ord, de relaterer den prosentvise differansen til feil størrelse.
- Elevene regner ut differansen i *prosentpoeng*, når prosentvis forskjell mellom to prosentopplysninger skal regnes ut.

I samsvar med tidligere forskning viser også denne studien at prosent er et vanskelig tema. Studien er med å indikere at tilsvarende språklige fraser som har vist seg problematiske i internasjonale studier, også er problematiske på norsk. En annen ting som fremkom fra studien er at elevene har mangelfull forståelse for den sammenliknende naturen til prosent. Dette viser seg i mitt datamateriale gjennom det som er oppsummert i punkt 2 og 3 i listen ovenfor. Elevenes mangelfulle forståelse fører til at de utfører tilsynelatende tilfeldige regneoperasjoner på de oppgitte tallene, istedenfor å bruke fornuft, når de møter prosentoppgaver de ikke er kjent med hvordan skal løses.

Studien avdekket også at tradisjonelle øvingsoppgaver, omforminger mellom ulike notasjonssystem (brøk, desimaltall og prosent), samt oppgaver med økonomi-kontekst var ting elevene i denne studien (samlet sett) tilsynelatende hadde god kontroll på.

7.1 Tanker om undervisning og videre studier

I arbeidet med denne masteroppgaven har jeg gjort meg flere tanker og erfaringer som kan være nyttige å ta med meg inn i mitt kommende yrkesliv som lærer. Jeg har blitt enda mer bevisst på at prosent alltid innebærer et forhold, noe jeg ikke hadde tenkt så grundig gjennom i forkant av studien. En annen ting jeg har blitt mer klar over er hvordan prosentnotasjon kan brukes for å få en effekt man ønsker når informasjon legges frem. Jeg legger også nå stadig merke til hvordan prosent ikke blir brukt riktig, for eksempel ved at informasjon presenteres tungvindt i en artikkel, eller at TV- og radiosendinger presenterer meningsløse prosenter. Dette tror jeg spesielt kommer av at jeg har blitt veldig klar over hvor meningsløse prosenttall er om de ikke har en kontekst.

I undervisning av prosentbegrepet tenker jeg det blir viktig å fokusere på prosentvise forskjeller og endringer. Jeg fant det slående i hvor stor grad funn fra analysearbeidet stemte overens med hva Mueller (1958) skrev for over 60 år siden. Spesifikt er det blitt tydelig for meg hvor viktig det er å løfte frem betydningen til språklige fraser som «mer enn» i prosentsammenheng. Jeg håper jeg klarer å unngå å gjøre den type antakelser som Mueller påpeker i undervisningshverdagen som lærer. Jeg ønsker også å prøve ut den to-skala tallinjen som Dole (2000) legger frem i praksis. Denne metoden får frem prosent sin proporsjonale natur, og tydeliggjør dermed at prosent innebærer et forhold. Dette vil også kunne være en støtte for elevene, ved å lære dem å visuelt kunne representere matematiske objekter.

Denne studien peker på noen aspekter ved prosent som var problematisk for en gruppe elever i den videregående skolen. For å få mer innsikt i hva elevene har tenkt er det nærliggende å foreslå som et mulig videre forskningsarbeid, å gjennomføre en tilsvarende undersøkelse som det jeg har gjort, men hvor datainnsamlingsmetoder som egner seg bedre for å svare på denne type spørsmål benyttes. Dersom oppgavene jeg designet skal benyttes igjen, har jeg kommet med noen forslag til justeringer i diskusjonskapittelet. Det å se hvordan elever løser ulike varianter av Oppgave A14 (variere tallstørrelser, ukjente og kontekst i oppgaven) vil muligens kunne være med på å gi enda mer innsikt i akkurat hvorfor elevene overser at *mer enn* innebærer en differanse i prosentsammenheng. Et siste forslag for en videre studie fra min side er å enda mer spesifikt undersøke om det er noen av de 9 sammenhengene i Figur 2.1 på s. 11 som er spesielt problematiske for elevene.

Referanser

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology*, *3*(2), 77–101.

Chen, H. & Rao, A.R. (2007). When two plus two is not equal to four: Errors in processing multiple percentage changes. *Journal of Consumer Research*, *34*(3), 327–340.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2013). *Research methods in education.* Sted: Routledge.

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora [NESH]. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi.* Hentet 12.12.19 fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/60125_fek_retningslinjer_nesh_digital.pdf

Dole, S. (2000). Promoting percent as a proportion in eighth-grade mathematics. *School Science and Mathematics*, *100*(7), 380–389.

Dole, S., Cooper, T.J., Baturo, A.R. & Conoplia, Z. (1997). Year 8, 9 and 10 students' understanding and access of percent knowledge. I F. Biddulph & K. Carr (red.), *People in mathematics education (Proceedings of the 20th annual conference of the mathematics education research group of Australasia).* Sted: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131.

Guba, E.G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational Communication and Technology Journal*, *29*(2), 75–92.

Kristiansen, J.E. (2009). Praktiske prosenter: andeler og endringer. *Samfunnsspeilet*, *23*(3). Hentet 30.07.20 fra https://ssb.brage.unit.no/ssb-xmlui/handle/11250/179361

Kruger, J. & Vargas, P. (2008). Consumer confusion of percent differences. *Journal of Consumer Psychology*, *18*(1), 49–61. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/45105615

Lembke, L.O. & Reys, B.J. (1994). The development of, and interaction between, intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics Education*, 237–259.

Lohne, M. & Knudsen, D.A. (2006). *Matematikk 2 – Brøk og prosent.* Sted: Læringsmiddelforlaget.

Marschhäuser, S.H. (2015, 17. november). –Får du 0,5 prosent lavere rente, kan du spare flere tusener. *Aftenposten*. Hentet 20.07.20 fra https://www.aftenposten.no/

Mueller, F.J. (1958). A gratuitous extrapolation in the teaching of per cent. *The Mathematics Teacher*, *51*(6), 475–476. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/27955724

Nilssen, V.L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren.* Oslo: Universitetsforlaget.

Nortvedt, G.A. & Bulien, T. (2016). *Rapport norsk matematikkråds forkunnskapstest.* Hentet 22.06.20 fra https://matematikkradet.no/rapport2015/NMRRapport2015.pdf

Nortvedt, G.A. & Bulien, T. (2018). *Rapport norsk matematikkråds forkunnskapstest.* Hentet 22.06.20 fra https://matematikkradet.no/rapport2017/NMRRapport2017.pdf

Parker, M. (1997). The ups and downs of percent (and some interesting connections). *School Science and Mathematics*, *97*(8), 406–412.

Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421–481.

Postholm, M.B. (2005). Observasjon som redskap i kvalitativ forskning på praksis. *Norsk pedagogisk tidsskrift*, *89*(02), 146–159.

Postholm, M.B. (2010). *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier.* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Robson, C. & McCartan, K. (2016). *Real world research.* (4. utg.). Oxford: Blackwell.

Schwartz, J.L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. *Research Agenda for Mathematics Education Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, *2*, 41–52.

Strømskag, H. (2020). Shunning algebraic formalism: Student teachers and the intricacy of percents. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *40*(1), 55–96.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04).* Hentet 05.07.20 fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05).* Hentet 05.07.20 fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Vedlegg

A Kronologisk utvikling av prosentbegrepet

Tabell hentet fra Parker og Leinhardt (1995) over prosent sin kronologiske utvikling, fra s. 430-431.

TABLE 1
Chronological development of percent

Year	Place	Development
2100 B.C.	Babylon	Law of Hammurabi. State legislation for interest of 1/3 on barley (any grain) and 1/5 on silver (Delaporte, 1925, pp. 40–41, 126–127).
300 B.C.	Greece	Euclid's Elements. Theory of Proportion laid out, separately for numbers (integers) and measures (Heath, 1956, p. 114).
300 B.C.	India	Kautilya's *Arthasastra.* Interest rates given in panas per month per hundred (Kautilya, 1967).
200–100 B.C.	China	*K'iu-ch'ang Suan-shu* [Arithmetic in Nine Sections]. Section 2, the *Su-mi* [Calculating the Cereals] (Smith, 1923/1958a, p. 32), treats simple percentage and proportion (Mikami, 1974, p. 11). *Nine Chapters on the Mathematical Art.* The Rule of Three is used to solve problems (Boyer & Merzbach, 1989, p. 222). Chapter 3, *Shuai-fen* [Calculating the Shares], relates to partnership and the Rule of Three (Smith, 1923/1958a, p. 32).
499	India	Aryabhata. Trairasika [the Rule of Three Terms]. Multiply the fruit by the desire and divide by the measure. The result is the fruit of the desire. Compound interest: algebraic rule to find the interest on 100 given the time, total interest after 2 periods, and the final amount after 2 periods (Clark, 1930, pp. 38–39).
628	India	Brahmegupta. Mercantile Rule of Three. "In the Rule of Three, Argument, Fruit, and Requisition are the names of the terms. The first and last terms must be similar. Requisition multiplied by Fruit, and divided by Argument, is the Produce" (Colebrooke, 1817, p. 283; Smith, 1925/1958b, p. 483).
850	India	Mahavira. Interest on a hundred basis is used in complex problems in which the amount of interest for one month of 100 is found given an amount of compound interest earned after a longer time period (Datta & Singh, 1962, pp. 220–225).
1150	India	Bhaskara II. Lilavii. Rule of Three: "The first and last terms, which are the argument and the requisition, must be of like denomination; and that, being multiplied by the demand [that is, the requisition] and divided by the first term, gives the fruit of the demand (Colebrooke, 1817, p. 33). Rule of Five used for interest calculations (Datta & Singh, 1962, p. 213).
1186	Italy	Interest by the hundred found in the ledgers of Genoese moneylenders.
1202	Italy	Fibonacci, having traveled through Egypt, Syria, Greece, and Sicily, writes *Liber Abaci*, an arithmetic of wide scope, including prices of goods, barter, and partnership, probably utilizing the Rule of Three in these areas (Smith, 1923/1958a, pp. 215–216).

TABLE 1 *(continued)*

Year	Place	Development
1481	Italy	Earliest record available on the appearance of the word *perceto* (Smith, 1925/1958b, p. 248).
1545	Italy	Italian manuscripts use percent symbol and Rule of Three in commercial problems (Smith, 1925/1958b, p. 485).
c. 1650	Italy	Perceto, p.c., etc. begin the change to $\frac{\circ}{\circ}$, the precursor to the modern %.
1801	France	Playfair publishes the first pie chart in his *Statistical Breviary* (Funkhouser & Walker, 1935).
1830	United States	Individual commercial topics first subsumed under a common heading, "Centage," in F. Barnard's (1830) *A Treatise on Arithmetic* (of the 140 texts studied by Steiner, 1946, p. 215), thus recognizing the common structure of the topics.
1832	United States	First nonmonetary part-whole use of percent, in F. Emerson's (1832) *The North American Arithmetic* (of the 140 texts studied by Steiner, 1946, p. 306, and of the more than 25 texts studied by the authors of the present article).
1845	United States	First nonmonetary set-set comparison use of percent, in D. H. Cruttenden's (1845) *The Systematic Arithmetic* (of the 140 texts studied by Steinder, 1946, p. 307).
1849	United States	First appearance of the % symbol, in R. Putnam's (1849) *The American Common School Arithmetic* (of the 140 texts studied by Steiner, 1946, p. 218).
1853	Brussels	First International Statistical Congress
1860	United States	Percent as a topic is completely developed in the manner most common at the present time (Steiner, 1946).
1915–1918	United States	The pie chart makes its way into American textbooks (Beninger & Robyn, 1978).

B Figur over forholdsammenhenger

Billedlig representasjon av de åtte forholdssammenhengene for prosent. Hentet fra Parker og Leinhardt (1995, s. 441).

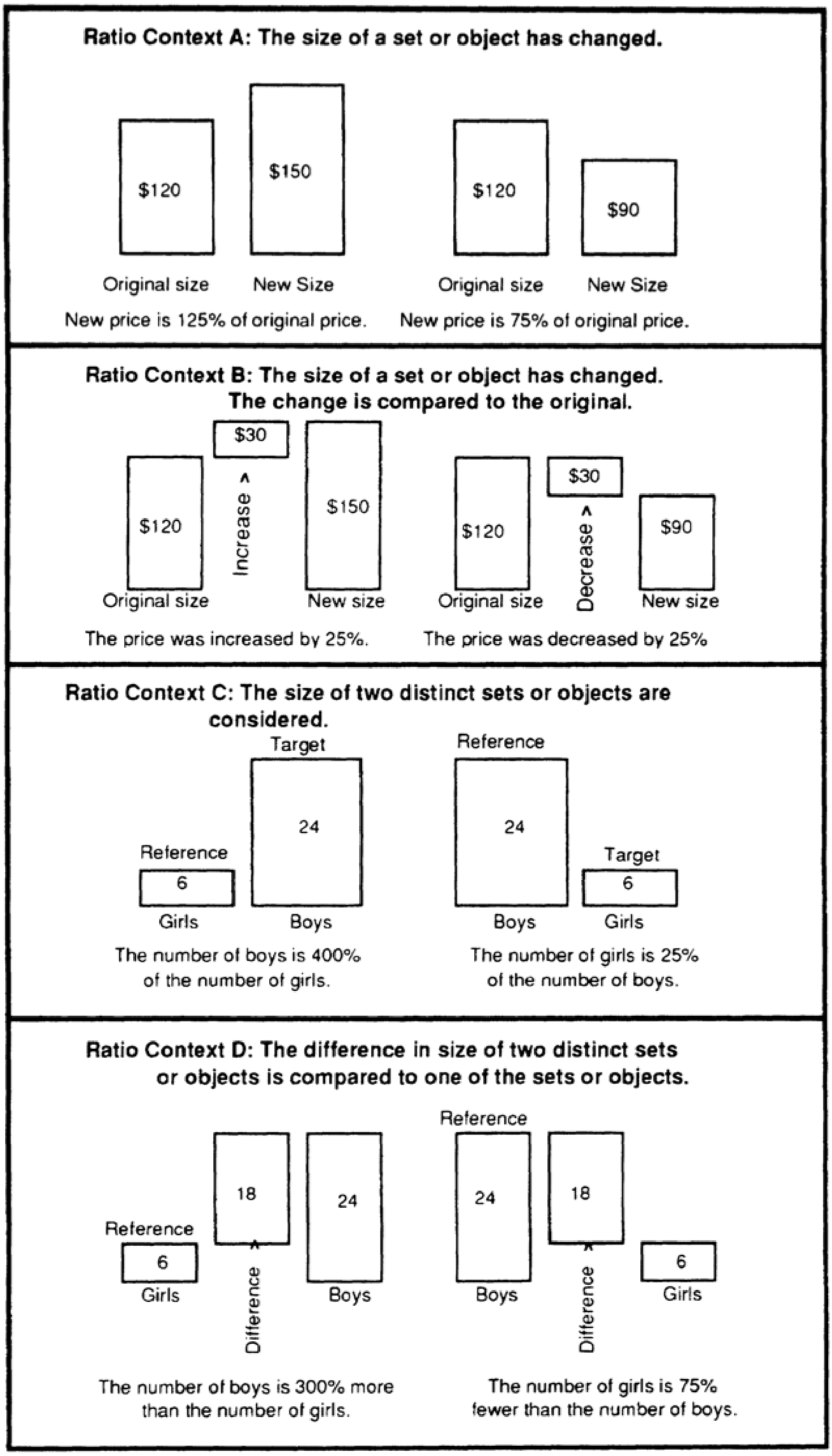


FIGURE 3. *Pictorial representations for the eight ratio contexts for percent*

C Eksamensoppgaver om prosent 2018 (matematikk, 10. årstrinn)

Oppgave 3 (4 poeng)

899 kroner

298 kroner

a) Michael skal kjøpe et par basketballsko og en basketballtrøye. Han får 20 % rabatt.

Hvor mye må Michael betale til sammen for et par basketballsko og en basketballtrøye?

Kandidatnummer: ________________

Oppgave 4 (2 poeng)

Adrian spiller PlayStation.

- $\frac{1}{5}$ av spillene hans er strategispill.
- $\frac{1}{4}$ av spillene hans er sportsspill.
- Resten av spillene hans er bilspill.

a) Hvor mange prosent av spillene er bilspill?

45 %	50 %	55 %	60 %
○	○	○	○

b) Adrian har til sammen 40 spill. Hvor mange strategispill har han?

Svar: ___________ strategispill

Oppgave 4 (4 poeng) REGNEARK

Frisk IL jenter 15 år skal samle inn penger for å kunne reise på Norway Cup. Jentene selger billetter, kioskvarer og parkeringsbevis på hjemmekampene til klubbens herrelag. For dette får jentene 35 % av inntektene fra salget.

Nedenfor ser du en tabell som viser prisene for billetter, kioskvarer og parkeringsbevis.

Billetter	
Voksen	80 kroner
Barn	50 kroner
Kioskvarer	
Kaffe	25 kroner
Brus	30 kroner
Pølse	30 kroner
Parkeringsbevis	
Per bil	50 kroner

Bruk opplysningene ovenfor. Lag og fullfør regnearket som er vist nedenfor.

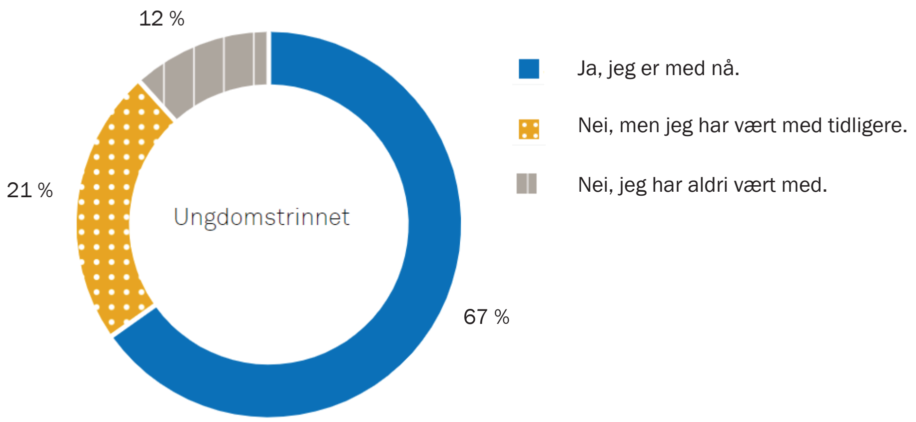
Vis hvilke formler du har brukt.

	A	B	C	D	E	F
1	**Salg og inntekter**					
2						
3	**Lagets prosent av inntektene**					
4						
5			**Antall**	**Pris**	**Totalt**	**Lagets inntekt**
6	**Billetter**	**Voksen**	**220**			
7		**Barn**	**120**			
8	**Kioskvarer**	**Kaffe**	**50**			
9		**Brus**	**60**			
10		**Pølse**	**120**			
11	**Parkeringsbevis**	**Biler**	**150**			
12						
13	**Sum**					

Kandidatnummer: ________________

Oppgave 8 (2 poeng)

I en undersøkelse ble elever på ungdomstrinnet spurt om de er med i en fritidsorganisasjon nå, eller om de har vært med tidligere. Diagrammet nedenfor viser den prosentvise fordelingen av svarene.



a) Omtrent hvor stor del av elevene er med i en fritidsorganisasjon nå?

$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$
○	○	○	○

b) 40 000 elever deltok i undersøkelsen.

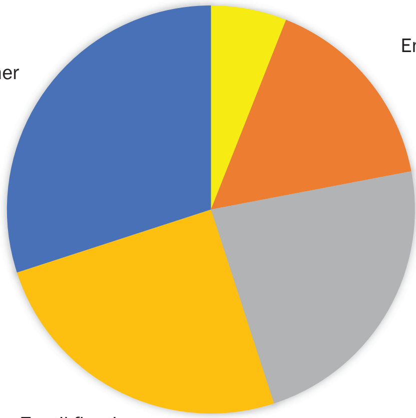
Hvor mange elever sier at de ikke er med nå, men at de har vært med i en fritidsorganisasjon tidligere?

4 800	8 400	13 200	31 600
○	○	○	○

Kandidatnummer: ________________

Oppgave 17 (2 poeng)

Diagrammet nedenfor viser hvor mye tid ungdommer mellom 13 og 16 år i gjennomsnitt bruker foran en skjerm utenom skoletid en hverdag.



a) Hvor stor del av ungdommene bruker tre til fire timer i gjennomsnitt foran en skjerm utenom skoletid en hverdag? Skriv svaret som brøk.

Svar: __________________

b) Det var 63 600 ungdommer som deltok i undersøkelsen.

Hvor mange ungdommer sier at de bruker mer enn fire timer i gjennomsnitt foran en skjerm utenom skoletid en hverdag?

19 080	19 800	21 200	44 520
○	○	○	○

D Eksamensoppgaver om prosent 2019 (matematikk, 10. årstrinn)

Del 2 skal leveres innen 5 timer
Maks 33 poeng
Hjelpemidler: Se side 2

Oppgave 1 (4 poeng)

Verdens fem største land sortert etter areal	
Land	Areal (km^2)
Russland 	17 098 240
Canada 	9 984 670
USA 	9 831 510
Kina 	9 562 911
Brasil 	8 515 770

a) Lag et stolpediagram som viser hvor stort areal hvert av de fem landene har.

b) Bestem variasjonsbredden for arealene til de fem landene.

c) Hvor mange prosent større er arealet av Russland enn arealet av Brasil?

Kandidatnummer: ________________

Oppgave 4 (2 poeng)

I en kasse ligger det 60 epler.

- 20 % av eplene er grønne.
- $\frac{7}{12}$ av eplene er røde.
- Resten av eplene er gule.

a) Hvor mange grønne epler ligger det i kassen?

Svar: ________ epler

b) Hvor stor del av eplene er gule?

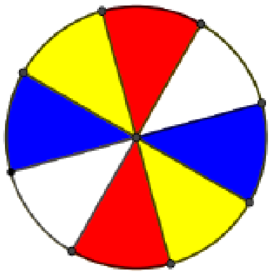
$\frac{13}{60}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
○	○	○	○

Kandidatnummer: ________________

Oppgave 6 (2 poeng)

Et lykkehjul har 8 like store felt

- 2 røde
- 2 gule
- 2 blå
- 2 hvite



a) Bestem sannsynligheten for at lykkehjulet stopper på et rødt felt.

Svar: ________

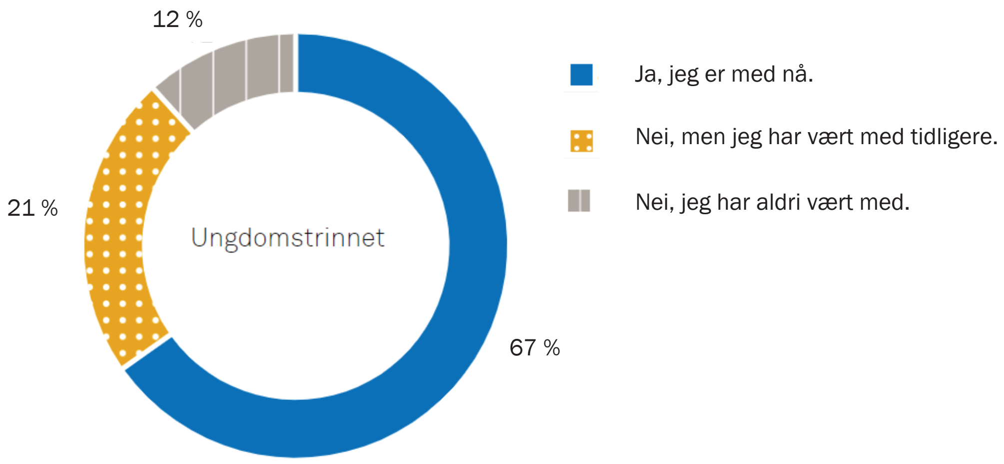
b) Bestem sannsynligheten for at lykkehjulet stopper på et gult felt to ganger på rad.

$\frac{2}{56}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{64}$
○	○	○	○

Kandidatnummer: ________________

Oppgave 8 (2 poeng)

I en undersøkelse ble elever på ungdomstrinnet spurt om de er med i en fritids-organisasjon nå, eller om de har vært med tidligere. Diagrammet nedenfor viser den prosentvise fordelingen av svarene.



a) Omtrent hvor stor del av elevene er med i en fritidsorganisasjon nå?

$\frac{3}{25}$ ○ $\frac{2}{5}$ ○ $\frac{3}{4}$ ○ $\frac{2}{3}$ ○

b) 40 000 elever deltok i undersøkelsen.

Hvor mange elever sier at de ikke er med nå, men at de har vært med i en fritidsorganisasjon tidligere?

4 800 ○ 8 400 ○ 13 200 ○ 31 600 ○

Oppgave 10 (1 poeng)

Adrian skal kjøpe ei bukse som før kostet 700 kroner. Han får 30 % i rabatt.

Hvor mye må Adrian betale for buksa?

210 kroner	400 kroner	490 kroner	670 kroner
○	○	○	○

E Oppgavehefte

Oppgavehefte om prosentregning

Anne Oline Hågenvik

Mars 2020

Ta bilde eller scan av besvarelsen og send på epost: **anneoli@stud.ntnu.no**. Bruk enme "Prosent", og skriv på omtrent hvor lang tid du har brukt.

Prosent er et begrep fra matematikken som man stadig kommer borti i dagliglivet og media. Oppgavene i dette heftet er ment å undersøke hvordan elever på VGS jobber med prosentoppgaver.

Dere står helt fritt med tanke på hvordan dere går frem i oppgavene, men jeg setter pris på at dere viser hva dere tenker. Figurer, tegninger og liknende er bare flott! Det er tillatt med bruk av kalkulator. Ikke bruk tid på å søke opp i bøker eller på nett. Skriv om du er usikker, eller at noe ble for vanskelig, men IKKE visk ut. Lykke til og tusen takk :-).

Oppgave 1

a) Regn ut x for at hver av de følgende påstandene skal stemme.

i) x er 23 % av 125.
ii) 138 er x % av 249.
iii) 981 er x % av 756.
iv) 756 er x % av 981.
v) 200 er x % mer enn 100.
vi) 100 er x % mindre enn 200.

b) Det bor 37462 innbyggere i en by. Av disse er 1274 ikke vaksinerte. Hva er vaksinasjonsdekningen i prosent i denne byen?

c) I en klasse fikk elevene følgende karakterer på en matteprøve.

Karakter	Antall	Prosent
6	3	
5	4	
4	7	
3		7
2	4	
1		3

Fyll ut resten av tabellen, både antall og prosent på alle karakterene. Hvor mange elever er det i klassen?

d) Det er 73 gutter og 81 jenter i 1. klasse på en videregående skole. 37 % av elevene har valgt matematikk 1T. 48 % av guttene har valgt matematikk 1P. Hvor mange jenter har valgt matematikk 1T?

e) I Sverige var den årlige befolkningsveksten 1.4 % i 2017, mens den i Norge var 0.9 %. Hvor mye større (i %) var befolkningsveksten i Sverige enn i Norge dette året?

f) På NTNU er det 4978 vitenskapelige ansatte som arbeider med undervisning, forskning og formidling. Av disse er 42 % kvinner. Hvor mange % flere menn enn kvinner tilsvarer dette?

g) Du har et fult glass med vann, og heller ut halvparten. Hva blir den prosentvise endringen av mengde vann i glasset?

h) Du har et halvfult glass med vann, og fyller det helt fult. Hva er den prosentvise endringen av mengde vann i glasset?

i) Du har 120 kr. Dette er 300 % mer enn hva jeg har. Hvor mye har jeg?

j) Ei skjorte kosta opprinnelig 899 kr. Prisen ble først satt ned med 20%, og deretter ble prisen satt ned med 20 % til. Hva er den totale rabatten jeg får om jeg kjøper denne skjorta? Hvor mye betaler jeg?

k) En mandag var bensinprisen 12,50 kr/liter. Tirsdag var den satt ned med 7 %. Hvor mye må den settes opp igjen onsdag for å være tilbake på 12,50 kr/liter?

l) Strømregningen til Arne i januar var på 1297 kr. I februar økte den med 12 %. Dersom den går ned med 12 % i mars, hva blir strømregningen til Arne i mars?

m) Bjarne hadde en lønnsøkning på 40 000 kr i året i fjor. Dette var en oppgang på 3 %. Hva ble den nye lønna hans?

n) Cecilie ønsker å kjøpe en bolig som koster 2 490 000 kr. Hvor mye egenkapital trenger hun (kravet er minst 15 %)?

o) Cecilie finner ut hun må spare litt, og setter sine 100 000 kr i banken, med en årlig rente på 3 %. Hvor mye har hun på konto etter ett år? Hvor mye har hun på konto etter fem år?

Her skal det beregnes renter på rentene (renters rente).

Hint: De neste oppgavene handler om størrelser som øker. Hvis størrelsen q øker med p % blir resultatet den nye størrelsen

$$q' = q + p\% \cdot q = (1 + p\%) \cdot q. \tag{1}$$

Denne likheten beskriver hvordan størrelsen q øker med vekstfaktoren $(1+p\%) = (1 + p/100)$.

Oppgave 2

a) Se for deg en linje med lengde s. Hvis lengden øker med en faktor r fra den opprinnelige, hva blir den nye lengden?

b) Se for deg et kvadrate med sidelengde s. Hvis sidelengden øker med en faktor r, hva blir det nye arealet? Med hvilken faktor økte arealet?

c) Se for deg en kube med sidelengde s. Hvis sidelengden øker med en faktor r, hva blir det nye volumet? Med hvilken faktor økte volumet?

Oppgave 3

a) Prosent er et forholdstall. Se igjen for deg en linje med lengde s. Hvis lengden øker med 50 %, hva blir den nye lengden?

b) Se igjen for deg et kvadrat med sidelengde s. Hvis sidelengden øker med 50 %, hva blir det nye arealet?

c) Se nå for deg at sidelengden økte med p %. Hvor mange prosent øker da arealet med?

d) Se for deg at sidelengden igjen økes med p %. Hvor mye må arealet på dette siste kvadratet reduseres med for å ende opp med det opprinnelige kvadratet (utgangspunktet i oppgave 3c)?

F Analysekoder

Analysekoder

Sist endret: 16/06/20 15:20

Tema	Kode	Antall	Forklaring
Tilfeldig algoritme	A	18	Minste dele på største
Prosentall > 100	B	20	Prosenttall > 100 - koblet til "mer enn"
Språk	C	0	Prosent av
Språk	D	59	Prosent mer enn
	E	3	Ignorerer prosenttegnets betydning
Konverteringer	F	2	Konvertering 1: prosent til desimal/brøk
	G	5	Konvertering 2: desimal/brøk til prosent
	H	0	Kommentert: mangler opplysninger for å løse
Tilfeldig algoritme	I	0	Gangetabellforvirring
Tilfeldig algoritme	J	3	Største mengde delt på minste mengde
	K	11	Regnefeil
Såråk	L	11	Prosent mindre enn
Tilfeldig algoritme	M	5	Største dele på prosent
Referanse	N	27	Forenkler til å passe
Via 1%	O	10	Via 1%
Referanse	P	1	Antar lik fordeling, for å forenkle
Referanse	Q	37	Prosentsvaret har ingen referanse
Referanse	R	8	Glemmer trekke fra 100 %
Referanse	S	48	Bruker feil referanse
	T	2	Ubegrunnet ganging/deling med 100,10,1000
Tilfeldig algoritme	U	2	Dele på "det hele"
Språk	V	6	Oppgang i prosent
	W	21	Ikke i havn
	X	18	For utydelig besvarelse
	Y	12	Markert at er usikker
	Z	169	Ikke prøvd på/besvart oppgaven

NTNU

Kunnskap for en bedre verden