Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Oppgaveheftet

# Anvendelse av programmering i matematikk:

**Matematisk modellering, algoritmer og programkoder som støtter matematikklærere i programmerings undervisning på den norske videregående skolen**

Utarbeidet av Sara Mohammadi

20. mai 2021

# Innhold

# Figurer

## Tabeller



## Programmer

# 1 Introduksjon

I dette dokumentet har vi forsøkt å samle inn oppgaver fra matematikkfag på videregående skole. Vi har satset på å tilpasse oppgavene med nye læreplaner etter fagfornyelsen. Dermed har fokuset vært mest på tema som algoritmisk tenkning, problemløsning, modellering, og analyse av data ved hjelp av programmering, og mer spesifikt Python programmering. Dokumentet begynnes med en kort introduksjon til programmering i Python. Videre består dokumentet av følgende kapitler:

- Matematikk 1P: Praktisk matematikk på Vg1.
- Matematikk 1T: Teoretisk matematikk på Vg1.
- Matematikk 2P: Praktisk matematikk på Vg2.
- Matematikk R1: Matematikk for realfag på Vg2.
- Matematikk R2: Matematikk for realfag på Vg3.
- Matematikk S1: Matematikk for samfunnsfag på Vg2.
- Matematikk S2: Matematikk for samfunnsfag på Vg3.

I hvert kapittel tar vi for oss noen tema innen faget som underkapitler. Disse delene for det meste, består av en kort teoridel, noen oppgaver relatert til temaet, utdypning av oppgavene, og strategier og algoritmer for programmering av løsninger. Det har også blitt lagt til kildekode og output av løsningsforslaget for hver oppgave.

Til slutt håper vi at dett dokumentet vil være en liten hjelp for matematikklærere til å anvende programmering i matematikk. Dokumentet dekker selvfølgelig ikke alle temaene og kompetansemålene for de nevnte fagene, men kan uansett benyttes som eksempel i andre temaene også.

# 2 Programmering i Python

Vi antar at lesere av dette dokumentet er allerede kjent med Python, og vet om grunnleggende begreper og funksjoner i dette programmeringsspråket. I tilfellet leseren er en nybegynner, anbefales å lese Python Tutorial for litt forberedelse. Det finnes også flere gode nettsider som W3Schools som tilbyr in-browser koding for de som vil lære Python. Her nevnes noen av de grunnleggende begrepene og funksjonene, men vi går ikke så dypt i forklaringer.

## 2.1 Variabler

Variabler brukes for lagring av verdier. Det finnes ikke noen kommandoer for deklarering av variabler i Python; Variabler blir til når vi setter verdi for dem (W3Schools, udatert-c). Når vi oppretter en variabel i en funksjon, kalles variabelen, en *lokal variabel*, og kan bare brukes i den funksjonen. Variabler som lages utenfor en funksjon er kjent som *globale variabler*. Globale variabler kan brukes både inn i funksjoner og utenfor.

## 2.2 Datatyper

Variabler kan lagre data av forskjellige typer. De viktigste datatyper i Python er:

- Strenger: str
- Tall:
  - int →heltall
  - float →flyttall/desimaltall (desimaltall kan også defineres med å importere *decimal*-biblioteket. Forskjellen mellom decimal.Decimal og float er i deres rekkevidde)
  - complex →komplekse tall
- Sekvenstyper: liste, tupel, range
- Mapping-type: dict (dictionary)
- Settyper: set, forzenset
- Boolsk type: bool
- Binære typer: byte, bytearray, memoryview

## 2.3 Operatorer

Operatorer deles i forskjellige grupper:

- Regneoperatorer: Tabellen 2.1 viser de regneoperatorene som brukes oftest i matematisk programmering.

| Operasjon | Operator |
|---|---|
| Addisjon | + |
| Subtraksjon | - |
| Multiplikasjon | * |
| Divisjon | / |
| Potens | ** |
| Kvadratrot | **(1/2) |
| Nte-rot | **(1/n) |
| Heltallsdivisjon | // |
| Restdivisjon | % |
| Parentes | () |

Tabell 2.1: Regneoperatorer i Python

- Assignment-operatorer: I Python brukes = for tilordning mellom variabler og verdier, for eksempel:

```
x = 5
x, y, z = 1, -1, 1
navn = 'Sara'
```

  Det finnes også noen sammensatte operatorer i Python som +=, −=, ∗=, /=, %=, //=, ∗∗= , &=, |=, ∧=, >>=, <<=. For eksempel $x \mathrel{+}= 5$ legger 5 til variabelen $x$ og lagrer den nye verdien i den; uttrykket tilsvarer altså $x = x + 5$.

- Sammenlignings operatorer: Tabellen 2.2 viser disse operatorene.

| Matematikk | Python | Beskrivelse |
|---|---|---|
| $<$ | $<$ | Mindre enn |
| $>$ | $>$ | Større enn |
| $=$ | $==$ | Lik |
| $\leq$ | $\leq$ | Mindre enn eller lik |
| $\geq$ | $\geq$ | Større enn eller lik |
| $\neq$ | != | Ulik |

Tabell 2.2: Sammenlignings operatorer i Python

## 2.4 Regnerekkefølgen

Regnerekkefølgen har betydning i Python, tabellen 2.3 lister operatorprioriteten fra høyeste til laveste. Operatorer i samme rad har samme prioritet.

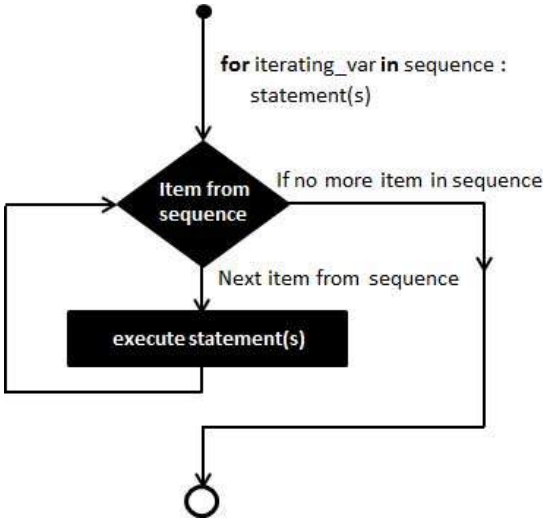
| Operator | Beskrivelse |
|---|---|
| () | Parenteser |
| ** | Potenser |
| *, /, //, % | Multiplikasjon, Divisjon, Heltallsdivisjon, Restdivisjon |
| +, - | Addisjon, Subtraksjon |

Tabell 2.3: Regnerekkefølge i Python

## 2.5 Løkker

Python har to typer løkker:

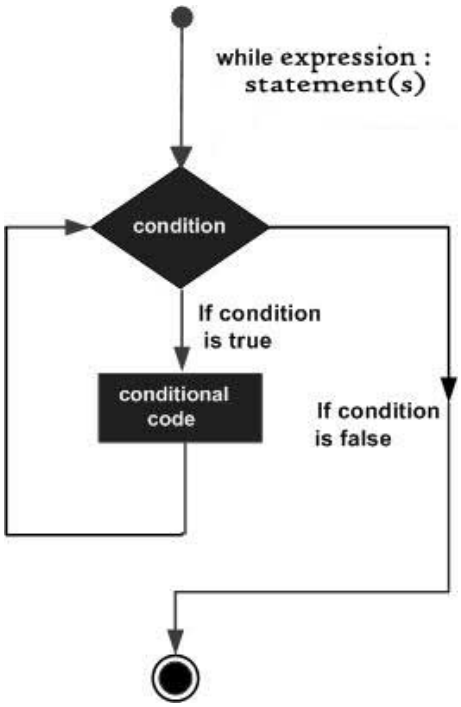
- For-løkke: I Python går for-løkken over elementene i en sekvens som kan være en liste eller en streng, i den rekkefølgen de vises i sekvensen.




Figur 2.1: Flytdiagram for for-løkke

Source: tutorialspoint

- While-løkke: I en while-løkke utfører vi en rekke instruksjoner så lenge en betingelse er sant.




Figur 2.2: Flytdiagram for while-løkke

Source: tutorialspoint

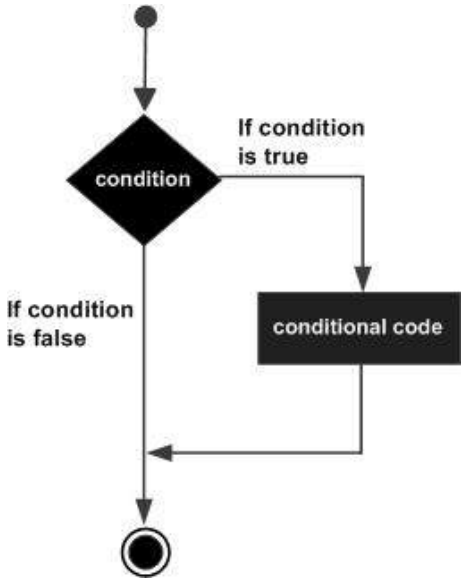
- Nestet while-løkke: Når vi har flere while-løkker inn i hverandre, kalles det en nestet while-

løkke.

## 2.6 Betingelser

I programmering er det ofte behov for programmer der vi tar en eller annen beslutning som følge av en betingelse. I Python benyttes følgende setninger når vi skal programmere slike situasjoner:

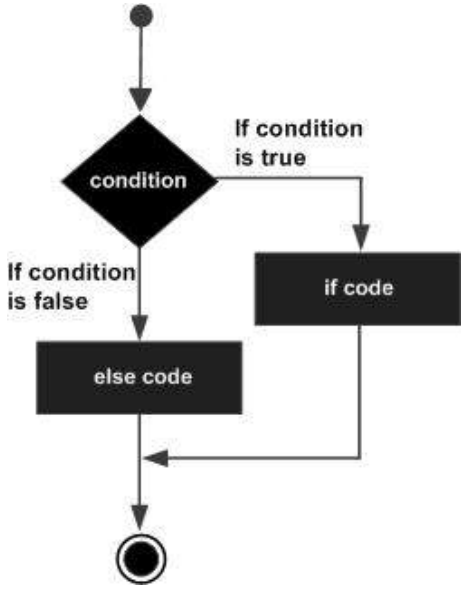
- If-setning




Figur 2.3: Flytdiagram for if-setning

Source: tutorialspoint

- If-else-setning




Figur 2.4: Flytdiagram for if-else-setning

Source: tutorialspoint

- Nestet if-setning (if-elif-elif-...-else): Når vi har flere betingelser, bruker vi nestet if-setning.

## 2.7 Built-in funksjoner

Python-interpreter har en rekke funksjoner innebygd i den som alltid er tilgjengelige (Python-Software-Foundation, 2021). Tabell 2.4 viser de av dem som antas å brukes mest i dette dokumentet.

| Funksjon | Beskrivelse |
|---|---|
| abs() | Returnerer absoluttverdi av et tall |
| float() | Returnerer et flyttall |
| input() | For å få input fra bruker |
| int() | Returnerer et heltall |
| len() | Returnerer lengde av et objekt |
| list() | Returnerer en liste |
| Print() | Skriver ut data |
| range() | Returnerer en sekvens av tall, som standard starter fra 0 og inkrementerer tallene med 1 |
| round() | Returnerer rundverdi av et tall |
| str() | Returnerer et string objekt |

Tabell 2.4: Noen eksempler av Python built-in funksjoner

## 2.8 Egendefinerte funksjoner

Det er også mulig å definere egne funksjoner i Python som i alle andre programmeringsspråk. En funksjon er en blokk av koder som kan utføre en handling. Fordelen med funksjoner er at de er gjenbrukbare, og gir bedre modularitet og den nødvendige funksjonaliteten til programmet (tutorialpoint, udatert).

Følgende regler gjelder ved definering av en funksjon i Python (tutorialpoint, udatert):

1 Funksjoner defineres med nøkkelordet «def», navn til funksjonen og parenteser.

2 Det er mulig å legge til parameter(e) inn i parentesene.

3 Etter på kan vi skrive en eller flere linjer av instruksjoner som vi ønsker å utføres via funksjonen.

4 Hver blokk for en funksjon startes med en kolon (:), og neste linjene er innrykket.

5 Hvis vi ønsker at funksjonen returnerer noe, bruker vi «return»-uttrykket etterfulgt av et uttrykk.

Syntaks:

```
def funksjonsnavn(parameter):
    en linje med instruksjon
    ...
    return [uttrykk]
```

# 3 Matematikk 1P

### Kompetansemål etter matematikk 1P

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- bruke prosent, prosentpoeng, promille og vekstfaktor i utrekningar og presentere og grunngi løysingar
- tolke og bruke samansette måleiningar i praktiske samanhengar og velje eigna måleining
- tolke og bruke funksjonar i matematisk modellering og problemløysing
- bruke digitale verktøy i utforsking og problemløysing knytt til eigenskapar ved funksjonar, og diskutere løysingane

Kilde

## 3.1 Tallregning

**Oppgave** Lag et program som tar et antall sekunder som input. Programmet skal ta tallet, og regne det om til dager, timer, minutter og sekunder. Til slutt skal du skrive ut hvor mange dager, timer, minutter og sekunder det ble.

Prøv å lag koden slik at kun det som er relevant, blir oppgitt. For eksempel, hvis det bare er 34 minutter og 10 sekunder, trenger vi ikke få oppgitt at det er 0 dager og timer.

Oppgaven er hentet fra (ProFag, 2021).

**Løsning** For å løse oppgaven trenger vi følgende informasjon:

- ett *minutt* er 60 sekunder
- én *time* er 60 minutter
- én *dag* er 24 timer

Disse verdiene definerer vi som konstanter. Det å definere slike faste variabler som konstant, hjelper oss å skrive mer oversiktlige koder.

Neste steg er å finne hvor mange minutter som finnes i det antallet sekunder, så finne hvor mange timer som finnes i det antallet minutter, og til slutt finne hvor mange dager som finnes i det antallet timer.

For å finne for eksempel antall minutter, benytter vi *heltallsdivisjon*-operatoren i Python. Og får å finne de gjenværende sekunder, benytter vi *restdivisjon*-operatoren.

Videre skal vi skrive ut bare ikke-null verdier som resultat, for dette trenger vi sette betingelser med bruk av $if - elif - else$-setninger.

### Algoritme

1 Definere konstanter for antall sekunder per minutt, antall minutter per time, og antall timer per dag.

2 Få antall sekunder fra brukeren ved å kalle *input()*-funksjonen, og konvertere verdien til heltall.

3 Finne antall **minutter** ved å bruke heltallsdivisjon.

4 Finne antall sekunder vi har igjen ved å bruke restdivisjon.

5 Finne antall **timer** ved å bruke heltallsdivisjon.

6 Finne antall minutter vi har igjen ved å bruke restdivisjon.

7 Finne antall **dager** ved å bruke heltallsdivisjon.

8 Finne antall timer vi har igjen ved å bruke restdivisjon.

9 Hvis både antall dager, timer og minutter er lik null,

  9.1 skrive ut bare antall sekunder.

10 Eller hvis både antall dager og timer er lik null,

  10.1 skrive ut antall minutter og sekunder.

11 Eller hvis bare antall dager er lik null,

11.1 skrive ut antall timer, minutter og sekunder.

12 Ellers

12.1 skrive ut alle verdiene.

```
'''
Programmet konverterer antall sekunder til dag, timer, minutter og sekunder
'''

# definerer konstanter
sekund_minutt = 60
minutt_time = 60
time_dag = 24

# får input fra brukeren
antall_sekunder = int(input("Hvor mange sekunder ønsker du å konvertere? Skriv et heltall: "))

# bruker heltallsdivisjon for å finne antall minutter
minutter = antall_sekunder // sekund_minutt

# bruker restdivisjon for å finne antall sekunder vi har igjen
sekunder = antall_sekunder % sekund_minutt

# bruker heltallsdivisjon for å finne antall timer
timer = minutter // minutt_time

# bruker restdivisjon for å finne antall minutter vi har igjen
minutter = minutter % minutt_time

# bruker heltallsdivisjon for å finne antall dager
dager = timer // time_dag

# bruker restdivisjon for å finne antall timer vi har igjen
timer = timer % time_dag

# sjekker om både minutter, timer og dager er null
if (minutter==0 and timer==0 and dager==0):
    print(f'{antall_sekunder} sekunder er {sekunder} sekunder')

# sjekker om både timer og dager er null
elif (timer==0 and dager==0):
    print(f'{antall_sekunder} sekunder er {minutter} minutter og {sekunder} sekunder')

# sjekker om dager er null
elif dager==0:
    print(f'{antall_sekunder} sekunder er {timer} timer, {minutter} minutter og {sekunder} sekunder')

# ellers har alle variablene en ikke-null verdi
else:
    print(f'{antall_sekunder} sekunder er {dager}dager,{timer}timer,{minutter}minutter og {sekunder}sekunder')
```

Program 3.1: Programmet konverterer antall sekunder til dag, timer, minutter og sekunder.

Eksempel output:

```
Hvor mange sekunder ønsker du å konvertere? Skriv et heltall: 57834
57834 sekunder er 16 timer, 3 minutter og 54 sekunder
```

## 3.2 Prosentregning

**Oppgave** Lag et program som spør hvor mange meter over havet noen befinner seg, og deretter printer "n er m% av høyden til Mount Everest". for eksempel: "345.60 m er 3.91 prosent av Mount Everest"

Oppgaven er hentet fra (ProFag, 2021).

**Løsning** Høyden til Mount Everest er 8848 meter. Vi finner prosentandelen ved følgende formel:

$$Prosentandel = \frac{hoyde}{mount\_everest\_hoyde} * 100 \tag{3.1}$$

**Algoritme**

1 Definere høyden til Mount Everest som konstant.

2 Få høyde-verdien fra brukeren ved hjelp av *input()*-funksjonen; og konvertere den til flyttall.

3 Beregne prosentandelen ved å bruke formelen 3.1.

4 Avrunde prosentandels verdien til to desimaler nøyaktighet ved å kalle *round()*-funksjonen. Dette er valgfri; grunnen for avrunding er å ha mer oversiktlig resultat.

5 Skrive ut resultatet.

```
'''
Programmet finner prosentandelen ift. høyden for Mount Everest
'''

# definerer konstanter
mount_everest_hoyde = 8848

# får høyde i meter fra brukeren, og konverterer input-verdien til float
hoyde = float(input("Hvor mange meter over havet befinner du deg? "))

# regner ut prosentandelen
prosentandel = (hoyde/mount_everest_hoyde)*100

# runder av prosentandelen med 2 desimal nøyaktighet
prosentandel = round(prosentandel,2)

# skriver ut resultatet
print(f'Du er på {prosentandel}% av Mount Everest ved {hoyde} meter over havet')
```

Program 3.2: Programmet finner prosentandelen til en gitt posisjon over havet ift. høyden for Mount Everest.

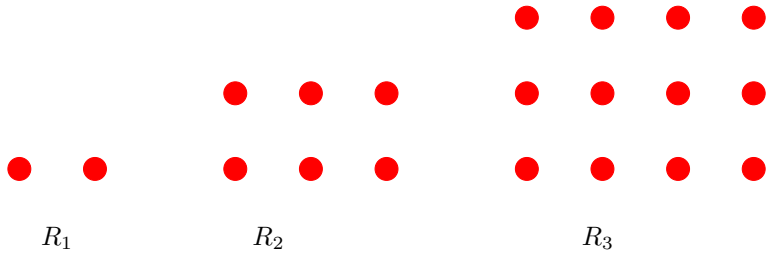
Eksempel output:

```
Hvor mange meter over havet befinner du deg? 10
Du er på 0.11% av Mount Everest ved 10.0 meter over havet
```

## 3.3 Matematisk modellering og problemløsning

### 3.3.1 Rektangeltall

**Oppgave** Rektangeltallene kan framstilles slik figuren viser:



$R_1$ $R_2$ $R_3$

Vi kaller det første rektangeltallet $R_1$, det neste rektangeltallet kaller vi $R_2$, det tredje rektangeltallet kaller vi $R_3$ og så videre.

Finn en matematisk modell som beskriver antall prikker i rektangeltallene. La $x$ være nummeret på rektangeltallet, og $P(x)$ være antall prikker i tallet, plott funksjonen $P(x)$.

Oppgaven er hentet fra (Kristensen mfl., 2021).

**Løsning** For å lage hvert neste rektangel, legger vi til en kolonne og en rad til det forrige rektangelet. Vi kan betrakte her to mønstre:

- Mønster 1:

$$\begin{aligned}
R_1 &= 0+1=1 \quad \times \quad 1+1=2 \implies 2 \\
R_2 &= 1+1=2 \quad \times \quad 2+1=3 \implies 6 \\
R_3 &= 2+1=3 \quad \times \quad 3+1=4 \implies 12 \\
&\vdots \\
R_n &= (n-1)+1 \quad \times \quad n+1 \implies n(n+1)=n^2+n
\end{aligned}$$

- Mønster 2:

$$\begin{aligned}
R_1 &= 1\times 1+1=2 \\
R_2 &= 2\times 2+2=6 \\
R_3 &= 3\times 3+3=12 \\
&\vdots \\
R_n &= n\times n+n \to \quad n^2+n
\end{aligned}$$

Altså:

$$P(x)=x^2+x$$

Vi kan nå plotte funksjonen $P(x)$.

### Algoritme

1 Importere *matplotlib.pyplot*-modulen og *Numpy*-biblioteket.

2 Definere en funksjon som returnerer $P(x)$. Funksjonen tar $x$ som parameter.

3 Definere en funksjon *plott_funksjon()* for å plotte $P(x)$.

- 3.1 Definere en liste av $x$-verdier ved hjelp av *linspace()*-funksjonen fra *Numpy*-biblioteket; funksjonen tar startpunkt, sluttpunkt og antall punkter som parametere.
- 3.2 Beregne $y$-verdier ved å kalle *P()*-funksjonen; funksjonen tar $x$-verdier som parameter.
- 3.3 Sette tittel for plottet ved å kalle *title()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot*-modulen.

3.4 Sette $x$- og $y$-label for plottet ved å kalle henholdsvis *xlabel()*- og *ylabel()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot*-modulen.

3.5 Sette rutenett for plottet ved å kalle *grid()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot*-modulen.

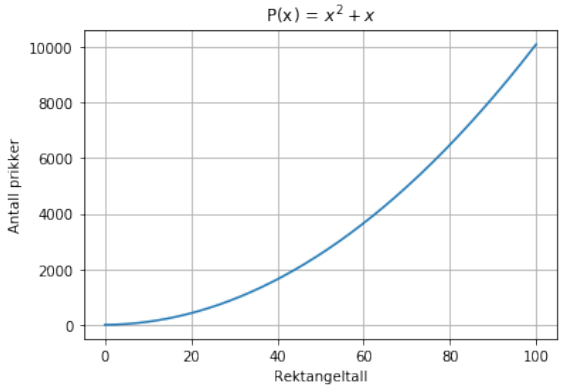
3.6 Plotte funksjonen ved å kalle *plot()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot*-modulen.

4 Kalle *plott_funksjon()*.

```
'''
Programmet finner antall prikker for et rektangeltall R_n
'''

# importerer biblioteker/moduler
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# definere funksjonen P(x)
def P(x):
    return x**2+x

# funksjon for å plotte P(x)
def plott_funksjon():

    # definere x_verdier
    x_verdier = np.linspace(0, 100, 1000)

    # beregne y_verdier med å kalle funksjonen P(x)
    y_verdier = P(x_verdier)

    # sette title, x-label og y-label
    plt.title('P(x) = $x^2 + x$')
    plt.xlabel('Rektangeltall')
    plt.ylabel('Antall prikker')

    # setter rutenett for plottet
    plt.grid()

    # plotter funksjonen
    plt.plot(x_verdier, y_verdier)

plott_funksjon()
```

Program 3.3: Programmet finner antall prikker for et rektangeltall $R_n$.

Output:




Figur 3.1: Grafen viser antall prikker for et rektangeltall $R_n$.

Vi kan lese antall prikker for et rektangeltall $R_n$ fra grafen 3.1.

### 3.3.2 Funksjoner og modellering

#### Oppgave

a Lag en funksjon som regner ut kokepunktet til vann i en gitt høyde over havet: Vi velger en forenklet modell:

$$T_c = 100 - 0.0032h \tag{3.2}$$

der $h$ oppgis i meter, og temperaturen kommer ut i celsius.

Sjekk at funksjonen returnerer riktig verdi ved havnivå (100 C) og på toppen av Mount Everest (ca. 72 C). Mount Everest er 8848 m høyt.

b Vi skal nå koke egg. Tiden $t$ i minutter det tar å oppnå en plommetemperatur på $T_{plomme}$ kan modelleres som:

$$t = A * ln[\frac{2(T_{vann} - T_0)}{T_{vann} - T_{plomme}}] \tag{3.3}$$

Der $A$ er en konstant som kommer an på egget, $T_{vann}$ er vanntemperaturen i kjelen (typisk kokepunktet), $T_0$ er temperaturen i egget før det går i gryta og $T_{plomme}$ er temperaturen vi ønsker i plommen. For et vanlig egg er $A = 3.75$ minutter en fornuftig verdi. Lag en funksjon som implementerer denne modellen, og sjekk at den gir rimelige resultater for bløtkokt (65 C) og hardkokt (85 C) egg.

Koketid for egg er typisk 4-7 minutter for bløtkokt, og 7-10 minutter for hardkokt.

c Endre funksjonen fra del *b* slik at den tar inn høyde over havet og bruker funksjonen fra del *a* til å regne ut temperaturen i vannet.

Hva skjer om man ber om et hardkokt egg på Mount Everest? Kan du endre programmet slik at det oppfører seg penere?

d Plott tiden det tar å koke egg som funksjon av hvor varm man ønsker plommen. Plott flere linjer, der hver linje representerer en gitt høyde over havet.

Oppgaven er hentet fra (ProFag, 2021).

#### Løsning

a Vi lager en funksjon *finn_kokepunkt()*, som tar høyde $h$ som parameter og returnerer kokepunkt $T_c$. Deretter tester vi metoden for $h = 0$ dvs. ved havnivå, og for $h = 8848$ som er høyden til Mount Everest.

**Algoritme**

1 Definere en funksjon *finn_kokepunkt()*.
   1.1 Beregne kokepunkt ved å bruke formelen 3.2.
   1.2 Returnere kokepunktet.
2 Definere en funksjon *main()* som klientprogram.
   2.1 Få høyde fra brukeren ved å kalle *input()*-funksjonen, og konvertere den til flyttall.
   2.2 Beregne kokepunkt ved å kalle *finn_kokepunkt()*-funksjonen.
   2.3 Skrive ut resultatet.

3 Kalle *main()*-funksjonen.

```
# a: programmet finner kokepunkt til vann ved høyden h over havet

'''
funksjonen finner kokepunkt for vann ved høyden h
parameter: høyde h
return: kokepunkt T_c
'''
def finn_kokepunkt(h):

    # beregner kokepunkt med å bruke formelen som er oppgitt
    T_c = 100 - 0.0032 * h

    # returnerer resultatet
    return T_c

# klient-metoden
def main():

    # får høyde-verdien fra brukeren, konverterer den til float
    h = float(input('Skriv inn høyden du vil finne kokepunkt på: '))

    # finner kokepunktet ved å kalle finn_kokepunkt()-funksjonen
    T_c = finn_kokepunkt(h)

    # Skrive ut resultatet
    print(f'Kokepunkt ved høyden {h} m er {T_c} celsius.')

main()
```

Program 3.4: Programmet finner kokepunkt til vann ved høyden $h$ over havet.

Tester metoden for kokepunkt til vann ved havnivå:

```
Skriv inn høyden du vil finne kokepunkt på: 0
Kokepunkt ved høyden 0.0 m er 100.0 celsius.
```

Tester metoden for kokepunkt til vann på toppen av Mount Everest:

```
Skriv inn høyden du vil finne kokepunkt på: 8848
Kokepunkt ved høyden 8848.0 m er 71.69 celsius.
```

b Vi definerer en funksjon *beregn_koketid()* som tar $T_0$ og $T_{plomme}$ som parametere. Så definerer vi $A$ og $T_{vann}$ som konstanter, og deretter beregner vi koketiden ved å bruke formelen gitt i oppgaven.

Vi lager videre en funksjon for å løse oppgaven, dvs. å finne koketid for et bløtkokt egg, og hardkokt egg.

**Algoritme**

1 Importere biblioteket *Numpy*.

2 Definere en funksjon kalt *beregn_koketid()*.

2.1 Definere konstanter $A$ og $T_{vann}$.

2.2 Beregne koketiden ved å bruke formelen 3.3.

2.3 Returnere koketiden.

3 Definere *main()*-funksjon som klientprogram.

3.1 Få $T_0$ og $T_{plomme}$ som input fra brukeren; konvertere input-verdiene til flyttall.

3.2 Beregne koketiden ved å kalle *beregn_koketid()*-funksjonen.

3.3 Skrive ut resultatet.

4 Kalle *main()*-funksjonen.

```
# b: programmet implementerer modellen for koketiden til egg

# importere numpy-biblioteket
import numpy as np

'''
funksjonen beregner koketid til egg
parametere: T_vann, T_plomme, T_0
return: tid
'''
def beregn_koketid(T_0, T_plomme):

    # definerer konstanter
    A = 3.75
    T_vann = 100

    # beregner tiden med bruk av formelen
    tid = A * np.log((2*(T_vann - T_0)) / (T_vann - T_plomme))

    # returnerer resultatet
    return tid

def main():
    T_0 = float(input('Oppgi temperaturen til egget ved tiden 0: '))
    T_plomme = float(input('Oppgi temperaturen du ønsker i plommen: '))

    #Kaller på funksjonen for å finne koketid
    koketid = beregn_koketid(T_0, T_plomme)

    # Skriver ut resultatet
    print(f'Koketid for egget er {koketid:.2f} minutter')

main()
```

Program 3.5: Programmet implementerer modellen for koketiden til egg.

Tiden for et bløtkokt egg:

```
Oppgi temperaturen til egget ved tiden 0: 5
Oppgi temperaturen du ønsker i plommen: 65
Koketid for egget er 6.34 minutter
```

Tiden for et hardkokt egg:

```
Oppgi temperaturen til egget ved tiden 0: 5
Oppgi temperaturen du ønsker i plommen: 85
Koketid for egget er 9.52 minutter
```

c Vi modifiserer *beregn_koketid()*-funksjonen ved å legge til et parameter $h$ for høyde.

Vanntemperaturen $T_{vann}$ (som var konstant i tidligere deloppgaven) finner vi nå ved å kalle *finn_kokepunkt()*-funksjonen.

Algoritmen for programmet er altså nesten den samme som forrige deloppgave.

**Algoritme**

1 Importere biblioteket *Numpy*.

2 Definere en ny funksjon for å beregne koketid; funksjonen tar høyde $h$, $T_0$ og $T_{plomme}$ som parametere.

- 2.1 Definere konstanten $A$.
- 2.2 Definere en variabel for koketiden, her kaller vi variabelen *tid*.
- 2.3 Finne vanntemperaturen for eggkoking ved å kalle funksjonen *finn_kokepunkt()*.
- 2.4 Bruke *try-except*-uttrykk for å håndtere eventuelle feil [1]. (Eventuelt kan vi bruke *if-else*-setning for å sette betingelse om *nevneren* <= 0).
- 2.5 Prøve å
  - 2.5.1 beregne koketiden ved å bruke formelen 3.3.
- 2.6 I unntatte tilfeller
  - 2.6.1 Skrive ut en melding for brukeren at programmet feiler.
- 2.7 Returnere koketiden.

3 Definere *main()*-funksjon som klientprogram.

- 3.1 Få høyden $h$, starttemperaturen $T_0$ og plommetemperaturen $T_{plomme}$ som input fra brukeren.
- 3.2 Beregne koketiden ved å kalle *beregn_koketid_gitt_høyde()*-funksjonen. (Funksjonen kan selvfølgelig kalles hva som helst.)
- 3.3 Skrive ut resultatet.

4 Kalle *main()*-funksjonen.

[1] Dette er fordi oppgaven ber om å finne kokepunkt for et hardkokt egg på Mount Everest der kokepunkt er 72 celsius mens temperaturen for et hardkokt egg er på ca. 85 celsius. Dette fører til at vi får negativ verdi i nevneren og programmet vil gi feil beskjed.

```python
# c: programmet beregner koketid til egg ved gitt vanntemp.

# importere numpy-biblioteket
import numpy as np

'''
funksjonen beregner vanntemperaturen i høyde h, og koketid til egg
parametere: h, T_plomme, T_0
return: tid
'''
def beregn_koketid_gitt_høyde(h, T_0, T_plomme):

    # definerer konstant A
    A = 3.75

    # definerer en variable tid
    tid = 0

    # finner vanntemperaturen med å kalle finn_kokepunkt()
    T_vann = finn_kokepunkt(h)

    # bruker try-except for å håndtere eventuelle feil
    try:
        # beregner koketiden med bruk av formelen
        tid = A * np.log((2*(T_vann - T_0)) / (T_vann - T_plomme))

    except:
        print('Noe gikk galt!')


    '''
    eventuelt kan vi bruke if-else-setning for å sette betingelse om nevneren <= 0:

    if (T_vann - T_plomme) <= 0:
        print('Nevneren er mindre enn eller lik 0')

    else:
        tid = A * np.log((2*(T_vann - T_0)) / (T_vann - T_plomme))
    '''

    # returnerer resultatet
    return tid

def main():

    # får høyde-verdien fra brukeren, konverterer den til float
    h = float(input('Skriv inn høyden du vil finne kokepunkt på: '))

    T_0 = float(input('Oppgi temperaturen til egget ved tiden 0: '))
    T_plomme = float(input('Oppgi temperaturen du ønsker i plommen: '))

    #Kaller på funksjonen for å finne koketid
    koketid = beregn_koketid_gitt_høyde(h, T_0, T_plomme)

    # Skriver ut resultatet
    print(f'Koketid for egget er {koketid:.2f} minutter')

main()
```

Program 3.6: Programmet beregner koketid til egg ved gitt vanntemperatur.

Output:

```
Skriv inn høyden du vil finne kokepunkt på: 8848
Oppgi temperaturen til egget ved tiden 0: 5
Oppgi temperaturen du ønsker i plommen: 85
Koketid for egget er nan minutter
```

Vi ser at det ikke er mulig å ha et hardkokt egg på Mount Everest!

d Vi skal i denne deloppgaven bruke *matplotlib.pyplot*-modulen sammen med *Numpy*-biblioteket for å plotte koketiden mot plommetemperaturen.

For å ha flere linjer beregner vi koketiden ved forskjellige høyder, dvs. vi lager flere sett av $y$-verdier.

**Algoritme**

1 Importere modulen *matplotlib.pyplot*, og biblioteket *Numpy*.

2 Lage en liste av $x$-verdier ved hjelp av *linspace()*-funksjonen. Funksjonen tar startpunkt, sluttpunkt og antall punkter for plotting som parametere.

Vi setter start- og sluttpunkt lik henholdsvis 0 og 100, antall punkter velger vi å sette lik 1000 punkter.

3 Definere flere sett av $y$-verdier ved å kalle funksjonen *beregn_koketid_gitt_høyde()*. Vi setter forskjellige høyder $h$, konstant starttemperatur lik 5, og $x$-verdier som parametere.

4 Sette tittel for plottet ved å kalle *title()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot*-modulen.

5 Sette $x$- og $y$-label for plottet ved å kalle henholdsvis *xlabel()*- og *ylabel()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot*-modulen.

6 Sette rutenett for plottet ved å kalle *grid()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot*-modulen.

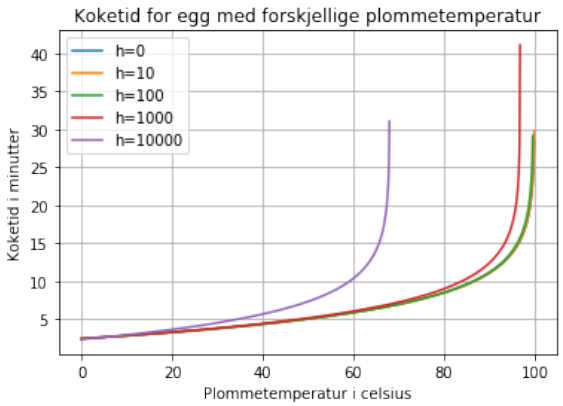
7 Plotte grafene ved å kalle *plot()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot*-modulen. Funksjonen tar $x$- og $y$-verdier som parametere.

8 Sette label for grafene ved å kalle *legend()*-funksjonen.

```python
# d: programmet plotter koketiden for egg avhengig av plommetemp.

# importerer moduler/biblioteker
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# setter start- og sluttpunkt lik koketid for et bløtkokt og hardkokt egg
x_verdier = np.linspace(0, 100, 1000)

# lager 4 sett y_verdier ved h=0, h=10, h=100, h=1000
y_verdier_0 = beregn_koketid_gitt_høyde(0, 5, x_verdier)
y_verdier_10 = beregn_koketid_gitt_høyde(10, 5, x_verdier)
y_verdier_100 = beregn_koketid_gitt_høyde(100, 5, x_verdier)
y_verdier_1000 = beregn_koketid_gitt_høyde(1000, 5, x_verdier)
y_verdier_10000 = beregn_koketid_gitt_høyde(10000, 5, x_verdier)

# setter tittel for grafen
plt.title('Koketid for egg med forskjellige plommetemperatur')

# setter navn til x-aksen
plt.xlabel('Plommetemperatur i celsius')

# setter navn til y-aksen
plt.ylabel('Koketid i minutter')

# rutenett (valgfri)
plt.grid()

# plotter grafene
plt.plot(x_verdier,y_verdier_0)
plt.plot(x_verdier,y_verdier_10)
plt.plot(x_verdier,y_verdier_100)
plt.plot(x_verdier,y_verdier_1000)
plt.plot(x_verdier,y_verdier_10000)

# viser høyden for hver linje
plt.legend(['h=0', 'h=10', 'h=100', 'h=1000', 'h=10000'])
```

Program 3.7: Programmet plotter koketiden for egg avhengig av plommetemperatur.

Output:




Figur 3.2: Figuren viser koketid til egg med forskjellige plommetemperaturer.

Vi ser fra grafen 3.2 desto høyere er høyden, desto lengre tid tar det å koke egget. Grafen viser også at kokepunktet (plommetemperaturen) ikke overstiger fra $60 - 70$ celsius når høyden er 10000 (omtrentlig høyde for Mount Everest), og dette stemmer med det resultatet vi fikk i forrige deloppgaver.

## 3.4 Geometri

**Oppgave** Lag et program som beregner den ukjente kateten når vi kjenner hypotenus og én katet i en rettvinklet trekant.

Oppgaven er hentet fra (Bueie, 2019).

**Løsning** Den ukjente kateten finner vi ved å bruke Pytagoras setningen:

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{3.4}$$

der $c$ er hypotenus, og $a$ og $b$ kateter i en rettvinklet trekant. Hypotenusen og en av katetene kjenner vi fra før, den andre kateten finner vi slik:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{3.5}$$

### Algoritme

1 Få lengden for hypotenusen fra brukeren ved å kalle *input()*-funksjonen; konvertere input-verdien til flyttall.

2 Få lengden for den kjente kateten fra brukeren ved å kalle *input()*-funksjonen; konvertere input-verdien til flyttall.

3 Bruke formelen 3.5 for å finne den andre kateten.

4 Skrive ut resultatet.

```
# importerer biblioteker/moduler
import math
import numpy as np

# får størrelse for hypotenusen
c = float(input('Oppgi lengden på hypotenusen: '))

# får størrelse for kateten
a = float(input('Oppgi lengden på den kjente kateten: '))

# bruker Pytagoras setningen for å finne den siste kateten
b = (c**2 - a**2)**0.5

'''
alternativt kan vi bruke sqrt()-funksjonen enten fra math-modulen eller NumPy-biblioteket
syntaks:
b = np.sqrt(c**2 - a**2)
b = math.sqrt(c**2 - a**2)
'''

print(f'Den siste kateten er {b:.3f} lang.')
```

Program 3.8: Programmet beregner den ukjente kateten når vi kjenner hypotenus og én katet i en rettvinklet trekant.

Eksempel output:

```
Oppgi lengden på hypotenusen: 5
Oppgi lengden på den kjente kateten: 2
Den siste kateten er 4.583 lang.
```

# 4 Matematikk 1T

### Kompetansemål etter matematikk 1T

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- formulere og løyse problem ved hjelp av algoritmisk tenking, ulike problemløysingsstrategiar, digitale verktøy og programmering
- utforske strategiar for å løyse likningar, likningssystem og ulikskapar og argumentere for tenkjemåtane sine
- bruke gjennomsnittleg og momentan vekstfart i konkrete døme og gjere greie for den deriverte

Kilde

## 4.1 Programmering

### 4.1.1 Tall og variabler

**Oppgave** Lag et program som lagrer to tall i variabler og skriver ut summen av de to tallene.

Oppgaven er hentet fra (ProFag, 2021).

**Løsning** Vi bruker symboler i matematikk for å representere tall. Det samme gjelder i programmering også, med forskjell at vi bruker symboler for flere forskjellige variabler enn tall som for eksempel strenger, lister, boolske parametere, osv.

Vi definerer to tall $a$ og $b$, og deretter summerer vi dem. Vi kan også få tallene fra brukeren ved å bruke *input()*-funksjonen. Det som brukeren skriver er en streng, og vi må passe på å konvertere strengen til tall, ellers vil man få feil melding ved kompilering.

#### Algoritme

1 Be brukeren om å oppgi et tall $a$, og konvertere det til flyttall.

2 Be brukeren om å oppgi et tall $b$, og konvertere det til flyttall.

3 Summere $a$ og $b$, og lagre resultatet i en variabel *resultat*.

4 Skrive ut resultatet.

Det går an å skrive ut resultatet direkte uten å definere en ny variabel for lagring siden programmet er enkelt.

```
'''
enkelt program for å summere to tall a og b
'''
# få tallene a og b fra brukeren
a = float(input('Oppgi et tall a: '))
b = float(input('Oppgi et tall b: '))

# definere en variabel resultat
resultat = a + b

# skrive ut resultatet med to desimaler nøyaktighet
print(f'Summen av {a} og {b} er {resultat:.2f}')
```

Program 4.1: Programmet summerer to tall a og b.

Eksempel output:

```
Oppgi et tall a: 3094
Oppgi et tall b: 2109
Summen av 3094.0 og 2109.0 er 5203.00
```

### 4.1.2 Euklidsk divisjon

Divisjons teorem (Euklidsk divisjon): Gitt to heltall $a$ og $b$ hvor $b \neq 0$, da finnes det to unike heltall $q$ og $r$ slik at:

$$a = bq + r \tag{4.1}$$

og

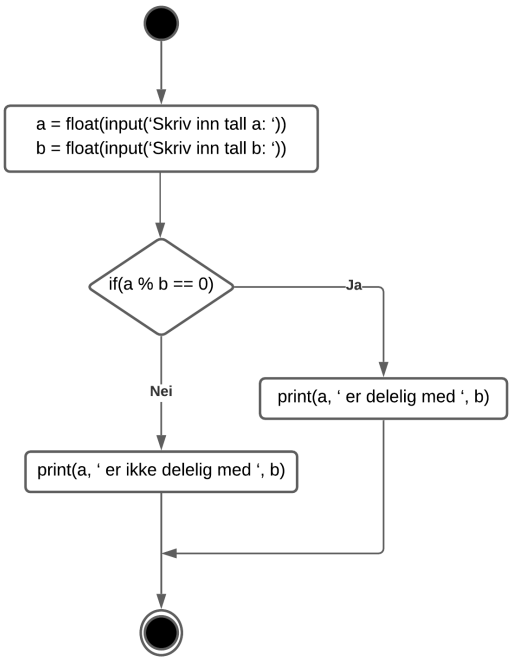
$$0 \leq r < |b|$$

Her kalles $a$ *dividend*, $b$ *divisor*, $q$ *kvotient* og $r$ *rest*.

Beregningen av kvotienten og resten fra $a$ og $b$ kalles divisjon eller euklidsk divisjon (I.T., udatert).

**Oppgave** Lag et program som tar to tall $a$ og $b$, og sjekker om $a$ er delelig med $b$.

**Løsning** Et tall er delelig med et annet tall dersom resten av divisjonen er lik null. I Python kan vi enkelt sjekke om delelighet med bruk av den aritmetiske operatoren modulus %. Et tall $a$ er delelig med et tall $b$ dersom $a\%b = 0$. Vi benytter dermed *if-else*-setningen for å programmere betingelsen for delelighet. Flytdiagrammet 4.1 viser algoritmen for å programmere oppgaven.




Figur 4.1: Flytdiagram for å sjekke om tall $a$ er delelig med tall $b$

#### Algoritme

1 Definere en funksjon *er_delelig()*.

1.1 Bruke *input()*-funksjonen for å få tallene $a$ og $b$ fra brukeren, samtidig som vi konverterer tallene til flyttall.

1.2 Hvis $a\%b$ er lik null

1.2.1 skrive ut at $a$ er delelig med $b$.

1.3 Ellers

1.3.1 skrive ut at $a$ ikke er delelig med $b$.

2 Kalle funksjonen *er_delelig()*.

```
'''
Programmet sjekker om a er delelig med b
'''

def er_delelig():

    # ber brukeren om å skrive inn tallene a og b, konverterer tallene til float
    a = float(input('Skriv inn tall a: '))
    b = float(input('Skriv inn tall b: '))

    # sjekker om a er delelig med b
    if a % b == 0:

        # skriver ut resultatet
        print(f'Tallet {a} er delelig med {b}')

    # ellers skriver ut det motsatte
    else:
        print(f'Tallet {a} er ikke delelig med {b}')

er_delelig()
```

Program 4.2: Programmet sjekker om et tall a er delelig med et annet tall b.

Eksempel output:

```
Skriv inn tall a: 4321
Skriv inn tall b: 1234
Tallet 4321.0 er ikke delelig med 1234.0
```

## 4.2 Algoritmisk tenkning og problemløsning

### 4.2.1 Kvadrattall

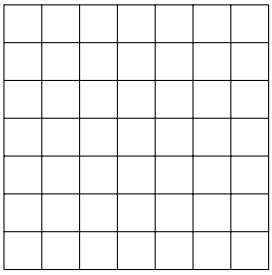
Kvadrattall er et figurtall på formen $S_n = n^2$, der $n$ er et heltall (Weisstein, 2002c).

De første kvadrattallene er:

$$
\begin{aligned}
1^2 &= 1 \\
2^2 &= 4 \\
3^2 &= 9 \\
4^2 &= 16 \\
5^2 &= 25 \\
6^2 &= 36 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Vi kaller disse tallene *kvadrattall* i og med at slikt antall prikker eller kuler kan arrangeres som et geometrisk kvadrat, dvs. det $n$-te kvadrattallet har $n$ prikker eller kuler i hver sin sidekant.

**Oppgave** Hvor mange kvadrater finnes det på figuren nedenfor?

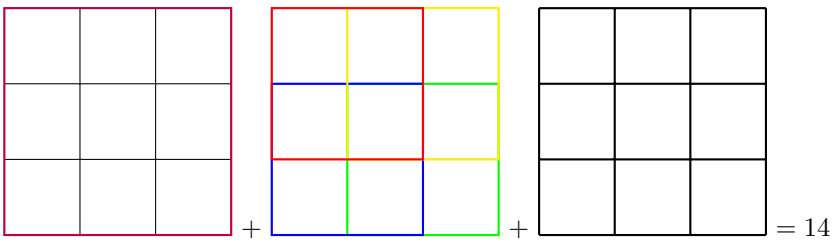


Oppgaven og problemløsnings strategien [2] er hentet fra (Kalvø mfl., 2020).

### Problemløsnings strategi

- **Forstå problemet:** Denne figuren består av langt flere kvadrater enn de 49 små kvadratene. Vi kan tegne kvadrater som har 2 i høyde og bredde, vi kan tegne kvadrater som har 3 i høyde og bredde osv. Så vi må forstå at problemet er mer komplekst enn å bare telle de små kvadratene. Når vi har forstått problemet, går vi i gang med å lage en plan.
- **Lage plan:** Vi kan lage et kvadrat på $2 \times 2$, og flytte dette rundt for å telle hvor mange slike kvadrater man kan lage. Man kan også tenke at hun har $3 \times 3$, og flytte disse rundt, men dette vil kanskje ta veldig lang tid.

  Det lønner seg dermed å forenkle problemet, dvs. at vi lager et problem som er enklere å løse. Vi kan lage en figur som er delt inn i $2 \times 2$ kvadrater der har vi 4 små ruter og 1 stor rute, og til sammen $1 + 4 = 5$ kvadrater. Nå er vi på det steget som heter å gjennomføre planen.
- **Gjennomføre planen:** Vi deler inn kvadratet i $3 \times 3$ ruter, og teller hvor mange kvadrater vi kan lage.



  Vi har nå 1 stort kvadrat som er hele figuren, 4 kvadrater som er $2 \times 2$ kvadrater, og 9 små kvadrater. Vi får altså $1+4+9 = 14$ kvadrater. Det finnes en sammenheng i denne metoden; vi ser at 1, 4, og 9 er kvadrattallene. Når vi har $2 \times 2$ ruter får vi summen av de 2 første kvadrattallene, og når vi har $3 \times 3$ ruter får vi summen av de 3 første kvadrattallene. Det betyr at med $7 \times 7$ ruter, vil summen av kvadrater være lik summen av de 7 første kvadrattallene, dvs. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 140$ kvadrater. Så kommer vi til det fjerde trinnet i problemløsnings strategien.
- **Se tilbake:** På dette trinnet skal vi bli sikre om at løsningen er riktig. Vi har vist at mønsteret vårt stemmer for figur med 1, 4 og 9 ruter. Vi kan se tilbake, og prøve med $4 \times 4$ ruter, og gjør vi det, ser vi at løsningen stemmer.

Vi bruker dette mønsteret for å programmere oppgaven.

[2] Problemløsnings strategien ble først definer av Pólya (1957).

**Algoritme**

1. Spørre brukeren om antall kvadrater for hver side.
2. Definere en variabel som kalles *resultat*, og sette den lik 0.
3. Vi kan videre bruke en *for*-løkke for å finne svaret. For hver rute $i = 1, 2, 3, ...$, så lange $i$ ikke er lik antallet av kvadrater per side, er $resultat \mathrel{+}= i^2$.
4. Skrive ut resultatet.

Vi må være oppmerksomme på at *for*-løkken begynnes med 0, så vi må sette antall kvadrater lik $antall\_kvadrater + 1$. Alternativt kan vi skrive koden slik:

```
for i in (i+1 for i in range(antall_kvadrater)):
...
```

```
'''
Programmet finner antall kvadrater på et kvadratisk rutenett
'''

# spør brukeren om antall kvadrater per side
antall_kvadrater = int(input('Skriv inn antall kvadrat per side: '))

# definerer variabelen resultat
resultat = 0

# bruker for-løkke for å summere kvadrattallene
for i in range(antall_kvadrater + 1):
    resultat += i**2

# skriver ut resultatet
print('Antall kvadrater er ', resultat)
```

Program 4.3: Programmet finner antall kvadrater på et kvadratisk rutenett.

Output:

```
Skriv inn antall kvadrat per side: 7
Antall kvadrater er  140
```

### 4.2.2 Palindromtall

"Et palindromtall er et tall som forblir det samme når det skrives fremover eller bakover, dvs. er på formen $a_1a_2...a_2a_1$"(Weisstein, 2002b).

**Oppgave** Lag et program som finner hvor mange palindromtall som finnes i intervallet $[a, b]$ hvor $a$ og $b$ er input-verdiene gitt av brukeren.

**Løsning** For å løse oppgaven må vi lage en funksjon som sjekker om et tall er et palindromtall. For dette reverserer vi tallet og sjekker om tallet og det reverserte er like.

Problemløsnings strategien er hentet fra (ManBearPig, 2016).

**Problemløsnings strategi** Vi fjerner det siste sifferet fra tallet og legger det til revers-tallet, vi fortsetter til det opprinnelige tallet er borte, og det reverserte tallet er fullført. Metoden forutsetter at tallet er et heltall.

- **Steg 1: Isolere det siste sifferet**

  ```
  rest = tall % 10
  ```

  *Restdivisjon*-operatoren returnerer resten av en divisjon. I dette tilfellet deler vi tallet med 10 og returnerer resten, dvs. det siste sifferet. Vi lagrer dette tallet i et heltall-variabel kalt *rest*.

- **Steg 2: Legge rest til revers**

  ```
  revers = (revers * 10) + rest
  ```

  Vi begynner å bygge det reverserte tallet ved å legge *rest* i *revers*-variabelen. Vi multipliserer *revers* med 10, grunnen er at vi har delt tallet vårt på 10. Så for å få riktig tall, ganger vi resten med 10 hver gang vi henter den fra det opprinnelige tallet.

- **Steg 3: Fjerne det siste sifferet fra tallet**

  ```
  tall = tall // 10
  ```

  For å fjerne det siste sifferet fra tallet deler vi det med 10. Vi benytter *heltallsdivisjon*-operatoren som avrunder resultatet ned til nærmeste heltall f.eks. $244//10 = 24$

- **Gjenta steg 1-3**

  ```
  while (tall > 0)
  ```

  Gjenta denne prosessen til tallet er redusert til null og revers-tallet er fullført.

**Algoritme**

1 Definere en funksjon *er_palindromtall()*; funksjonen tar et heltall som parameter, og sjekker om tallet er et palindromtall eller ikke.

  1.1 Definere en variable *revers*, og sette den lik 0.

  1.2 Definere en variabel *temp*, og sette den lik tallet vi fikk som parameter. Denne variabelen bruker vi som en hjelpevariabel.

  1.3 Benytte en *while*-løkke som looper og finner palindromtallene så lenge *temp* ikke er lik null.

  1.4 Definere en variabel *rest*, og sette den lik *temp*%10.

  1.5 Multiplisere *revers* med 10, og legge *rest* til den; vi setter *revers* lik dens nye verdi.

  1.6 Bruke heltallsdivisjon, og dele *temp* på 10; vi setter *temp* lik dens nye verdi.

  1.7 Sjekke om tallet og dets reverserte er like; funksjonen returnerer *True* dersom de er like, og *False* ellers.

2 Definere *main()*-funksjonen for å finne palindromtallene på intervallet $[a, b]$.

  2.1 Få input-verdiene $a$ og $b$ fra brukeren; og konvertere dem til heltall.

  2.2 Benytte en *for*-løkke som looper fra $a$ til $b$.

    2.2.1 Sjekke om tallet på indeks $i$ er et palindromtall ved å kalle *er_palindromtall()*-funksjonen.

      2.2.1.1 Skrive ut tallet hvis tallet er et palindromtall.

3 Kalle *main()*-funksjonen.

```python
'''
Programmet finner palindromtall på et intervall [a, b]
'''
# definerer funksjon som sjekker om et tall er palindrom
def er_palindromtall(tall: int):

    # definerer en variabel for den reversen av tallet
    revers = 0

    # temp brukes som hjelpetall
    temp = tall

    # looper så lenge tallet er større enn 0
    while temp > 0:

        # deler tallet på 10, og finner resten
        rest = temp % 10

        # gang revers med 10 og legg rest til den
        revers = revers * 10 + rest

        # sett tallet lik tallet del på 10
        temp //= 10

    # hvis tallet er lik revers returnerer true, ellers false
    return (tall == revers)


# main-funksjonen skriver ut alle palindromtallene i intervallet [a, b]
def main():

    # får startverdi fra brukeren
    a = int(input('Oppgi startverdien: '))

    # får sluttverdi fra brukeren
    b = int(input('Oppgi sluttverdien: '))

    # looper fra a til b; legger 1 til b siden løkken begynnes fra indeks 0
    for i in range(a, b+1):

        # sjekker om tallet på indeks i er et palindromtall
        if er_palindromtall(i):

            # skriver ut tallet, end = ' ' setter et mellomrom etter tallet (neste tall kommer etter)
            print(i, end = ' ')

main()
```

Program 4.4: Programmet finner palindromtall på et intervall [a, b].

Eksempel output:

```
Oppgi startverdien: 100
Oppgi sluttverdien: 1000
101 111 121 131 141 151 161 171 181 191 202 212 222 232 242 252 262 272 282 292 303 313 323 333
↪  343 353 363 373 383 393 404 414 424 434 444 454 464 474 484 494 505 515 525 535 545 555 565
↪  575 585 595 606 616 626 636 646 656 666 676 686 696 707 717 727 737 747 757 767 777 787 797
↪  808 818 828 838 848 858 868 878 888 898 909 919 929 939 949 959 969 979 989 999
```

## 4.3 Andregradslikninger

### 4.3.1 abc-formelen

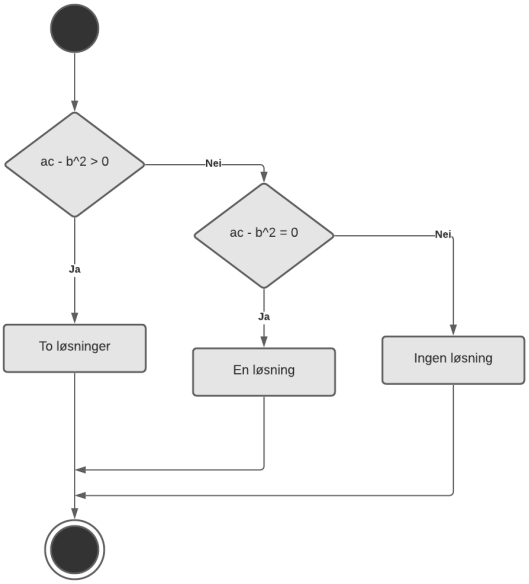
Andregradslikninger kan generelt skrives på formen:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4.2}$$

og kan løses med bruk av abc-formelen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.3}$$

Denne typen funksjoner har enten to løsninger, en løsning eller ingen løsning. Problemet kan derfor programmeres ved hjelp av betingelser. Bueie (2019, s. 65) bruker et flytskjema 4.2, og viser klart hvordan man kan skrive et program som løser andregradslikninger ved hjelp av *abc*-formelen.




Figur 4.2: Antall mulige løsninger for andregradsligninger

Source: Bueie, 2019

**Oppgave** Lag et program som løser en andregradslikning på formen 4.2 gitt koeffisientene $a$, $b$ og $c$.

Løsningsforslaget er hentet fra (Bueie, 2019, s. 66).

**Løsning** For å løse oppgaven bruker vi *if-elif-else*-setning siden vi har tre mulige løsninger.

**Algoritme**

1 Definere en funksjon *løs_andregrads_likning()*.

1.1 Få koeffisientene $a$, $b$ og $c$ fra brukeren som input; konvertere input-verdiene til flyttall.

1.2 Hvis $b^2 - 4ac > 0$, har likningen to løsninger der $x$ er gitt ved formelen 4.3.

1.2.1 Definere en variabel $x_1$, og sette den lik $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

1.2.2 Definere en variabel $x_2$, og sette den lik $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

1.2.3 Skrive ut svarene med bruk av *print()*-funksjonen.

1.3 Eller hvis $b^2 - 4ac = 0$, har likningen én løsning.

1.3.1 Definere en variabel $x_1$ gitt ved $\frac{-b}{2a}$.

1.3.2 Skrive ut resultatet.

1.4 Ellers har likningen ingen løsning;

1.4.1 Skrive ut at likningen ikke har noen løsninger.

2 Kalle *løs_andregrads_likning()*-funksjonen.

```
'''
Programmet løser andregradslikningen f(x) vha. abc-formelen
'''

def løs_andregrads_likning():

     # får koeffisientene a, b og c fra brukeren
    a = float(input('Skriv inn a-koeffisienten:'))
    b = float(input('Skriv inn b-koeffisienten:'))
    c = float(input('Skriv inn c-koeffisienten:'))

    # hvis b^2-4ac > 0, har likningen to løsninger
    if((b**2)-(4*a*c)) > 0:
        x_1 = (-b + (b**2-4*a*c)**0.5)/(2*a)
        x_2 = (-b - (b**2-4*a*c)**0.5)/(2*a)

        print('Løsningene på andregradslikningen er x_1 = ', x_1, ' og x_2 = ', x_2)

    # hvis b^2-4ac = 0, har likningen én løsning
    elif((b**2)-(4*a*c)) == 0:
        x_1 = (-b/2*a)

        print('Løsningen på andregradslikningen er x = ', x_1)

    # ellers har ikke likningen noen løsning
    else:
        print('andregradslikningen har ingen reelle løsninger')

løs_andregrads_likning()
```

Program 4.5: Programmet løser andregradslikningen $f(x)$ vha. abc-formelen.

Eksempel output:

```
Skriv inn a-koeffisienten:1
Skriv inn b-koeffisienten:2
Skriv inn c-koeffisienten:-3
Løsningene på andregradslikningen er x_1 =  1.0  og x_2 =  -3.0
```

### 4.3.2 Halverings metoden

Når vi skal løse en andregradslikning med halverings metoden, ordner vi likningen med 0 på høyre side:

$$f(x) = 0$$

I halverings metoden tar vi utgangspunkt i et intervall $[a, b]$, og finner et midtpunkt $m$ ved å halvere intervallet. Se I.1.

Etter halveringen, sjekker vi om $f(a)$ eller $f(b)$ ligger på motsatt side av $x$-aksen som $f(m)$ (dvs. om de har forskjellige fortegn). Hvis $f(b)$ og $f(m)$ ligger på samme side, setter vi $b = m$, og halverer intervallet på nytt. Hvis dette ikke er tilfelle så vet vi at $f(a)$ og $f(m)$ ligger på samme side av $x$-aksen, og setter $a = m$. Vi fortsetter med å halvere så langt vi kommer til et intervall som har en lengde som er mindre enn en gitt nøyaktighetsverdi. Midtpunktet til dette intervallet, vil være vår løsning.

**Oppgave** Skriv et program i Python som løser likningen $x^2 - 3 = 0$ for $x \in [1, 2]$. Bruk halverings metoden med en tusendels nøyaktighet.

Oppgaven og løsningsforslaget er hentet fra (Kalvø mfl., 2020).

#### Algoritme

1 Definere en funksjon $f()$ som returnerer likningen $f(x) = x^2 - 3$.

2 Definere nedregrense $a = 1$, øvregrense $b = 2$, og nøyaktighets verdi $toleranse = 0.001$ som konstanter.

3 Definere midtpunktet $m$ som vi finner ved bruk av formelen I.1.

4 Bruke en *while*-løkke, og fortsette halveringen så lenge $b - a > 0.001$.

- 4.1 Sjekke om $f(a)$ ligger på motsatt side av $x$-aksen som $f(m)$, for dette sjekker vi om $f(a) * f(m) < 0$, grunnen er at dersom de to verdiene ligger på samme side vil produktet av dem være positivt, ellers er produktet negativt.
  - 4.1.1 hvis ja, da er $b = m$.
- 4.2 Ellers
  - 4.2.1 er $a = m$.
- 4.3 Finne midtpunktet $m$ for det nye intervallet ved å bruke formelen I.1 på nytt.

5 Skrive ut resultatet.

```
'''
Programmet løser andregradslikningen f(x) vha. halverings metoden
'''

def f(x):
    return x**2-3

# definerer nedregrense a, øvregrense b og nøyaktighetsverdien
a = 1
b = 2
toleranse = 0.001

# definerer midtpunktet m
m = (a+b)/2

# bruker while-løkke for halvering, fortsetter så langt b-a > toleranse
while b-a > toleranse:

# dersom produktet av f(a) og f(m) er mindre enn 0 betyr det at de ligger på motsatt side av x-aksen
    if f(a) * f(m) < 0:
        # setter b lik m
        b = m

        # dersom f(m) og f(b) ligger på motsatt side av x-aksen
    else:
        # setter a lik m
        a = m

    # og finner midtpunktet på nytt
    m = (a+b)/2


# Skriver ut svaret med tre siffer nøyaktighet
print(f'Løsningen av likningen er x = {m:.3f}')
```

Program 4.6: Programmet løser andregradslikningen $f(x)$ vha. halverings metoden.

Output:

```
Løsningen av likningen er x = 1.732
```

## 4.4 Vekstfart og derivasjon

### 4.4.1 Gjennomsnittlig vekstfart

**Oppgave** Vi fyller kakao i en kopp. Kakaotemperaturen etter $x$ minutter er gitt ved:

$$T(x) = 65 * 0.97^x + 20 \quad x \in [0, 70]$$

a Tegn grafen til $T(x)$.

b Hva er kakaotemperaturen når vi fyller kakao i koppen?

c Hvor mye faller temperaturen fra 30 til 60 minutter etter at vi fylte koppen?

d Hva er den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[30, 60]$?

Oppgaven er hentet fra (Kalvø mfl., 2020).

**Løsning** Vi definerer først en funksjon $f(x)$ som returnerer likningen. Denne funksjonen skal vi benytte i andre del-oppgaver også.

```
def f(x):
    return 65*0.97**x+20
```

Program 4.7: Kodesnutt som definerer funksjonen $f(x)$.

a) **Algoritme**

1 Importere biblioteket *Numpy* og modulen *matplotlib.pyplot*.

2 Definere en funksjon *tegn_graf()*.

2.1 Kalle *linspace()*-funksjonen fra *NumPy*-biblioteket for å definere $x$-verdier, (fra, til, antall sampler).

2.2 Sette $y = f(x)$ hvor $x$-verdier er parameter til funksjonen $f$.

2.3 Kalle *plot()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot* for å tegne grafen.

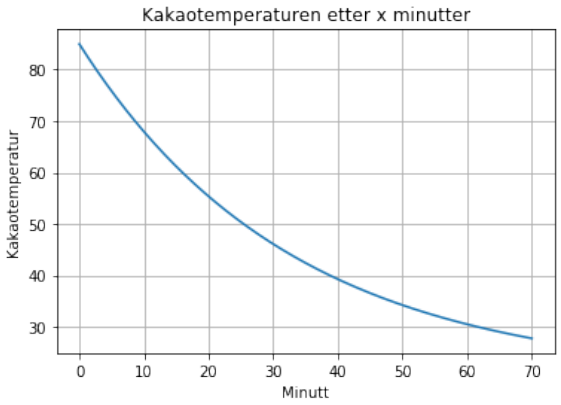
Man kan gjerne sette $x$-label, $y$-label og tittel for plottet, dette hjelper med å forstå grafen bedre. Det er også mulig å sette rutenett for plottet.
For disse kaller vi henholdsvis *xlabel('x-label')*, *ylabel('y-label')*, *title('tittel')*, og *grid()* fra *matplotlib.pyplot*-modulen.

3 Kalle *tegn_graf()*-funksjonen.

```
# a: tegner grafen til f(x)

# importerer biblioteker
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def tegn_graf():
    # definerer x-verdier
    x = np.linspace(0, 70, 1000)

    # alternativ kan vi bruke numpy.arange([start, ]stop, [step, ]dtype=None, *, like=None)
    # x = np.arange(0, 70, .001)

    # definerer y-verdier
    y = f(x)

    # tegner grafen
    plt.xlabel('Minutt')
    plt.ylabel('Kakaotemperatur')
    plt.title('Kakaotemperaturen etter x minutter')
    plt.grid()
    plt.plot(x, y)

tegn_graf()
```

Program 4.8: Programmet plotter grafen til funksjonen $f(x)$.

Output:




Figur 4.3: Grafen viser kakaotemperaturen etter $x$ minutter.

På grunn av at de neste deloppgavene er relatert til hverandre, løser vi resten av oppgaven ved å lage en funksjon for hver deloppgave, og kalle funksjoner ved behov i andre deloppgavene. Dermed legges det inn funksjonen som løsning uten utskrift, og vi skriver ut resultatet til slutt.

b) Når vi fyller koppen er $x = 0$, verdien ved denne tiden kan vi finne ved å skrive ut $f(0)$. En mer fleksibel måte er å lage en funksjon som mottar $x$-verdi, og returnerer resultatet.

**Algoritme**

1 Definere en funksjon *finn_temp()*.
  1.1 Få $x$-verdien som input fra brukeren, samtidig konverterer vi input-verdien til flyttall.
  1.2 Finne temperaturen ved å kalle *f()*-funksjonen hvor $x$ er parameter til funksjonen.
  1.3 Returnere temperaturen samt $x$-verdien.

```
# b: definerer en funksjon som finner temperatur ved et gitt tidspunkt (x-verdi)

def finn_temp():

    # få x-verdi fra brukeren via input
    x = float(input('Skriv inn en x-verdi: '))

    # bruker funksjonen vi har definert til å finne temperaturen ved tiden x
    temp = f(x)

    # returnerer både x-verdi og temperaturen
    return x, temp
```

Program 4.9: Programmet finner temperatur ved et gitt tidspunkt.

c) Vi lager en funksjon som bruker *finn_temp()*-funksjonen ved hvert tidspunkt, finner differansen mellom dem, og returnerer resultatet. Vi returnerer både tidsdifferansen og temperaturdifferansen, for vi har behov for disse to for å løse deloppgaven $d$.

**Algoritme**

1 Definere en funksjon *finn_differanse()*.
  1.1 Kalle *finn_temp()*-funksjonen to ganger; funksjonen *finn_temp()* returnerer temperaturen gitt ved en $x$-verdi, og selve $x$-verdien.

1.2 Finne differansen mellom $x$-verdiene (tidsendring).
1.3 Finne differansen mellom temperatur-verdiene (temperaturendring).
1.4 Returnere tidsendring og temperaturendring.

```
# c: funksjon for å finne differansen av temperatur mellom to tidspunkter

def finn_differanse():

    # vi kaller funksjonen finn_temp for å finne først temperatur-verdiene
    x_1, temp_1 = finn_temp()
    x_2, temp_2 = finn_temp()

    # vi beregner differansen mellom x-verdiene også dette er pga vi vil bruke funksjonen mest effektivt
    x_differanse = x_2 - x_1

    # finner differansen av temperatur-verdiene
    temp_differanse = temp_2 - temp_1

    return x_differanse, temp_differanse
```

Program 4.10: Programmet finner temperaturendring mellom to tidspunkter.

d) Gjennomsnittlig vekstfart på et tidsintervall er lik temperatur per tidspunkt. Dette finner vi ved følgende formel:

$$gjennomsnittlig\, vekstfart = \frac{temperaturendring}{tidsendring} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{4.4}$$

Vi kaller *finn_differanse()*-funksjonen for å finne de verdiene vi har behov for, og returnerer resultatet.

**Algoritme**

1 Definere en funksjon *finn_vekstfart()*.
1.1 Finne temperatur- og tids differansen ved å kalle *finn_differanse()*-funksjonen.
1.2 Finne gjennomsnittlig vekstfart ved å bruke formelen 4.4.
1.3 Returnere gjennomsnittlig vekstfart.

```
# d: definerer en funksjon som finner vekstfart på et intervall, vekstfart=temperatur per minutt

def finn_vekstfart():

    # kaller funksjonen finn_differanse for å finne differanse-verdier
    x_differanse, temp_differanse = finn_differanse()

    # finner gjennomsnittlig vekstfart
    snitt_vekstfart = temp_differanse/x_differanse
    return snitt_vekstfart
```

Program 4.11: Programmet finner vekstfart på et tidsintervall.

Klientprogram:

```python
# klientprogram for å løse oppgavesettet

def main():

    # b. Hva er kakaotemperaturen når vi fyller kakao i koppen?
    print('Oppgave b: ')

    # kaller finn_temp()-funksjonen for å finne temperaturen ved tiden x=0
    x, temp = finn_temp()

    # skriver ut resultatet med tre-siffer-nøyaktighet
    print(f'Kakaotemperaturen ved tiden x = {x} er: {temp:.3f}')

    # c. Hvor mye faller temperaturen fra 30 til 60 minutter etter at vi fylte koppen?
    print('\nOppgave c: ')

    # finner temperaturdifferansen med å kalle finn_differanse()-funksjonen,
    x_differanse, temp_differanse = finn_differanse()

    # bruker abs (absoluttverdi) for å skrive ut tallet positivt, (med tre-siffer-nøyaktighet)
    print(f'Etter {x_differanse} minutter, faller temperaturen {abs(temp_differanse):.3f} grader.')

    # d. Hva er den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet [30, 60]?
    print('\nOppgave d: ')

    # finner gjennomsnittlig vekstfart ved å kalle finn_vekstfart()-funksjonen
    snitt_vekstfart = finn_vekstfart()

    # skriver ut resultatet med tre-siffer-nøyaktighet
    print(f'Gjennomsnittlig vekstfarten er {snitt_vekstfart:.3f}')

main()
```

Program 4.12: Klientprogram for å løse oppgaven.

Output:

```
Oppgave b:
Skriv inn en x-verdi: 0
Kakaotemperaturen ved tiden x = 0.0 er: 85.000

Oppgave c:
Skriv inn en x-verdi: 30
Skriv inn en x-verdi: 60
Etter 30.0 minutter, faller temperaturen 15.613 grader.

Oppgave d:
Skriv inn en x-verdi: 30
Skriv inn en x-verdi: 60
Gjennomsnittlig vekstfarten er -0.520
```

### 4.4.2 Numerisk derivasjon

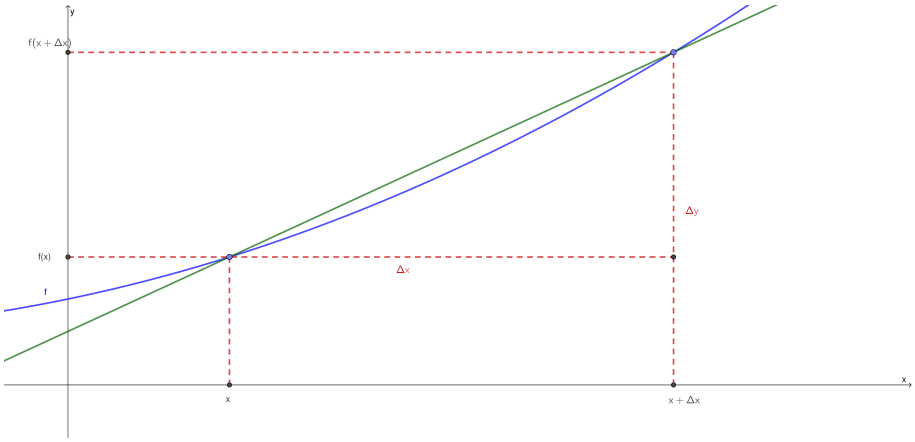
**Oppgave** La $f$ være funksjonen gitt ved:

$$x^2 + 3x + 6$$

Regn ut en tilnærmingsverdi for $f'(5)$ med $\Delta x = 0.01$.

Oppgaven og løsningsforslaget er hentet fra (Kalvø mfl., 2020).

**Løsning** Når vi vil finne den deriverte av en funksjon (gjennomsnittlig vekstfart), deler vi endring i $y$ på endring i $x$ over et intervall. Se figur 4.4.




Figur 4.4: Illustrasjon for gjennomsnittlig vekstfart for funksjonen $f$.

$$gjennomsnittlig\ vekstfart = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{4.5}$$

**Algoritme**

1. Definere en funksjon $f()$ som returnerer likningen $f(x)$; funksjonen tar $x$ som parameter.
2. Definere konstanter $\Delta x = 0.01$, og $x = 5$.
3. Finne $f'(5)$ ved bruk av formelen 4.5.
4. Skrive ut resultatet.

```
'''
Programmet finner den deriverte til f(x) numerisk
'''

def f(x):
    return x**2+3*x+6

# definerer konstanter
delta_x = 0.01
x = 5

# finner den deriverte av f i punkt x=5
derivert = (f(x+delta_x) - f(x)) / delta_x

# skriver ut resultatet med 3 siffer nøyaktighet
print(f'Tilnærmings verdien er lik: {derivert:.3f}')
```

Program 4.13: Programmet finner numerisk den deriverte til $f(x)$.

Output:

```
Tilnærmings verdien er lik: 13.010
```

# 5 Matematikk 2P

### Kompetansemål etter matematikk 2P

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- forklare og bruke prosent, prosentpoeng og vekstfaktor til modellering av praktiske situasjonar med digitale verktøy
- utforske strategiar for å løyse likningar, likningssystem og ulikskapar og argumentere for tenkjemåtane sine
- vurdere val knytte til personleg økonomi og reflektere over konsekvensar av å ta opp lån og å bruke kredittkort

Kilde

## 5.1 Likninger

"To likninger med samme ukjente størrelser, kalles for et likningssett"(Kristensen & Aanensen, 2020). Vi løser et likningssett ved å finne verdier som passer for alle likningene i likningssettet.

**Oppgave** Løs følgende likningssettet:

$$\begin{cases} f_1(x) = sin(x) \\ f_2(x) = cos(x) \end{cases} \tag{5.1}$$

**Løsning** For å løse oppgaven setter vi de to likningene lik hverandre:

$$sin(x) = cos(x) \iff sin(x) - cos(x) = 0$$

Vi kaller denne funksjonen $f()$, og løser den ved hjelp av *fsolve()*-funksjonen fra *scipy.optimize*-modulen. Funksjonen tar funksjonen $f()$ og en startgjett $x_0$ som parametere og returnerer $x$-verdien til roten dvs. skjæringspunktet mellom de to funksjonene. Vi setter denne verdien inn i en av funksjonene for å finne $y$-verdien til skjæringspunktet. $x_0$ kan være enten ett tall eller en $n$-dimensjonal *array* av flere tall (The-SciPy-community, 2021b).

Etter at vi løste oppgaven algebraisk, plotter vi grafen til de to funksjonene, samt skjæringspunktene mellom dem.

**Algoritme**

1 Importere biblioteket *Numpy*, modulen *pyplot*, og funksjonen *fsolve()* fra *scipy.optimize()*-modulen.

2 Definerer en funksjon *f_1()* som returnerer $sin(x)$; funksjonen tar $x$ som parameter.

3 Definerer en funksjon *f_2()* som returnerer $cos(x)$; funksjonen tar $x$ som parameter.

4 Definere en funksjon $f()$ som returnerer $sin(x) - cos(x)$; funksjonen tar $x$ som parameter.

5 Definere startgjett $x_0$, vi velger her to startgjetter $[0, 4]$.

6 Finne $x$-koordinat til skjæringspunkter ved hjelp av *fsolve()*-funksjonen, vi definerer en variabel $x_1$ for lagring av resultatet.

7 Sette $x_1$ i *f_1()*-funksjonen, og finne $y_1$.

8 Bruke en *for*-løkke som looper to ganger; antall ganger løkken looper setter vi lik lengden til startverdi-listen.

  8.1 Skrive ut koordinaten til skjæringspunktet $(x_i, y_i)$.

9 Lage en liste av $x$-verdier ved å kalle *linspace()*-funksjonen.

10 Sette $x$-verdiene i funksjonene *f_1()* og *f_2()*, og lage to sett av $y$-verdier.

11 Sette tittel for plottet ved å kalle *title()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot*.

12 Sette label for $x$- og $y$-aksen ved å kalle henholdsvis *xlabel()*- og *ylabel()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot*.

13 Plotte funksjonene og skjæringspunktene ved å kalle *plot()*-funksjonen; funksjonen tar $x$- og $y$-verdier som parametere. Det er også mulig å legge til farge for grafen, syntaksen kan se slik ut:

```
plot(x-verdi, y-verdi, 'g')
```

her 'g' står for grønn-farge.

14 Sette rutenett for plottet ved å kalle *grid()*-funksjonen.

15 Sette label for grafene ved å kalle *legend()*-funksjonen; funksjonen tar en liste av strenger (label) som parameter.

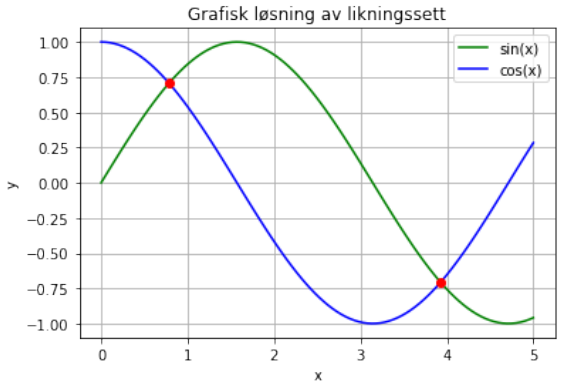
16 Vise plottet ved å kalle *show()*-funksjonen.

```
'''
programmet viser hvordan løse et likningssett algebraisk og grafisk
'''

# importerer biblioteker
from scipy.optimize import fsolve
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# definerer en funksjon f_1 som returnerer sin(x)
def f_1(x):
    return np.sin(x)

# definerer en funksjon f_2 som returnerer cos(x)
def f_2(x):
    return np.cos(x)

'''
funksjon f er definert som f_1 = f_ 2 -> sin(x) = cos(x)
parameter: x
returnerer f_1 - f_2
'''
def f(x):
    return f_1(x) - f_2(x)

# start gjett av rot
x_0 = [0, 4]

# finner x-verdi til skjæringspunkt mellom f_1 og f_2
x_1 = fsolve(f, x_0)

# setter x_1 i f_1 og finner y_1
y_1 = f_1(x_1)

# skriver ut koordinater til skjæringspunkter
for i in range(len(x_0)):
    print(f'({x_1[i]}, {y_1[i]})')


# data for plotting

# x_verdier for plottet
x = np.linspace(0, 5, 100)

# y_verdier for plottet
y_verdier1 = f_1(x)
y_verdier2 = f_2(x)

# setter tittel for plottet
plt.title('Grafisk løsning av likningssett')

# setter x- og y-label for aksene
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

# plotter funksjoner sin(x) og cos(x) samt skjæringspunkter
plt.plot(x, y_verdier1, 'g', x, y_verdier2, 'b', x_1, y_1,'ro')

# setter rutenett for plottet
plt.grid()

# setter label for grafer
plt.legend(['sin(x)', 'cos(x)'])

# viser grafen
plt.show()
```

Program 5.1: Programmet løser et likningssett algebraisk og grafisk.

Output:

```
(0.7853981633882219, 0.7071067811800235)
(3.9269908169864465, -0.7071067811859854)
```




Figur 5.1: Figuren viser grafisk løsning av likningssettet 5.1 på intervallet $[0, 5]$.

Vi ser både fra outputen og grafen 5.1 at det finnes to skjæringspunkter mellom 0 og 5, dvs. likningssettet har to løsninger $x = 0.79$ og $x = 3.93$ på dette intervallet.

## 5.2 Prosent og vekstfaktor

### 5.2.1 Prosentregning

**Oppgave** En butikk gir kunden 30% rabatt på totalprisen dersom kunden kjøper tre eller flere enheter av et spesielt produkt. Lag et program som beregner hvor mye kunden skal betale avhengig av hvor mange enheter kunden kjøper.

Oppgaven er hentet fra (Bueie, 2019).

**Løsning** Kunden får rabatt for kjøp av et produkt dersom antall produkter er mer enn 3. Dette er en betingelse som vi programmerer den ved hjelp av *if-else*-setning.

#### Algoritme

1 Definere en funksjon *beregn_beløp()*, funksjonen tar pris og antall produkter som parametere.

- 1.1 Definere konstanten *rabattfaktor*.
- 1.2 Definere en variabel *beløp* for å lagre det endelige beløpet i.
- 1.3 Hvis kunden kjøper mer enn 3 produkter
  - 1.3.1 beregne rabatt for kjøpet,
  - 1.3.2 trekke rabatten fra totalprisen, og lagre resultatet i *beløp*-variabelen.
- 1.4 Ellers
  - 1.4.1 beregnes beløpet med normalpris.

1.5 Returnere beløpet.

2 Definere *main()*-funksjonen som klientprogram.

2.1 Få prisen for produktet fra brukeren, og konvertere den til flyttall.
2.2 Få antall kjøpte produkter fra brukeren, og konvertere den til heltall.
2.3 Beregne beløpet ved å kalle *beregn_beløp()*-funksjonen.
2.4 Skrive ut resultatet.

3 Kalle *main()*-funksjonen.

```
'''
Programmet beregner sluttbeløp for kjøp av et produkt ved gitt rabattfaktor
'''

def beregn_beløp(pris, antall):

    # definerer rabattfaktoren som konstant
    rabattfaktor = 0.3

    # definerer en variabel totalpris for å lagre prisen
    beløp = 0

    # dersom kunden kjøper mer enn 3 av et produkt
    if antall > 3:

        # rabatt som skal trekkes ut fra totalprisen
        rabatt = antall * pris * rabattfaktor

        # beløp etter rabattberegning
        beløp = (antall * pris) - rabatt

    # ellers betaler kunden normal pris
    else:

        # beløp uten rabatt
        beløp = antall * pris

    # returnerer beløpet
    return beløp

def main():

    # får prisen for produktet fra brukeren
    pris = float(input('Oppgi pris for produktet: '))

    # får antall av et produkt
    antall = int(input('Oppgi antall produkter: '))

    # beregner beløpet ved å kalle beregn_beløp()-funksjonen
    beløp = beregn_beløp(pris, antall)

    # skriver ut beløpet
    print(f'Totalpris for ditt kjøp er {beløp:.2f} kr.')

main()
```

Program 5.2: Programmet beregner sluttbeløp for kjøp av et produkt ved gitt rabattfaktor.

Eksempel output:

```
Oppgi pris for produktet: 23.5
Oppgi antall produkter: 5
Totalpris for ditt kjøp er 82.25 kr.
```

### 5.2.2 Vekstfaktor

**Oppgave** Verdien til en leilighet er 2 500 000 kr., og den øker med 12% hvert år. Hva var verdien til leiligheten for 4 år siden?

Oppgaven er hentet fra (Kalvø mfl., 2020).

**Løsning** Det er fornuftig å alltid skrive kode så fleksibel som mulig, på den måten kan vi bruke én og samme kode for å løse flere andre oppgaver av samme type. Så vi skal i denne oppgaven tilpasse løsningen slik at den kan benyttes på flere oppgaver av denne typen.

#### Beregning av vekstfaktoren

- Hvis verdien minker, er vekstfaktoren gitt ved: $a = 1 - a$
- Hvis verdien øker, er vekstfaktoren gitt ved: $a = 1 + a$

#### Verdien etter en periode $t$, beregnes slik:

- Verdien etter $1 * t = startverdi * a$
- Verdien etter $2 * t = startverdi * a * a$
- ...
- Verdien etter $n * t = startverdi * a^n$

**Dersom vi vil finne verdien for $n$ perioder siden, beregner vi verdien slik:**

$$resultat = \frac{startverdi}{a^n}$$

Følgende informasjon skal tas via input:

- Startverdi
- Vekstfaktor
- Antall perioder

Vi trenger å vite om verdien *avtar* eller *øker*, og om vi vil beregne verdien i *fremtiden* eller *fortiden*. Når det gjelder programmering av slike tilfeller, trenger vi å spørre brukeren om det, og avhengig av input-svaret, regner vi ut verdien.

#### Algoritme

1. Få startverdi fra brukeren via *input()*-funksjonen, og konvertere verdien til flyttall.
2. Få vekstfaktoren i prosent fra brukeren via *input()*-funksjonen, og konvertere verdien til flyttall.
3. Spørre brukeren om verdien avtar

3.1 Hvis ja er vekstfaktoren lik $1 - a$.

4. Ellers

   4.1 er vekstfaktoren lik $1 + a$.

5. Få antall perioder fra brukeren, og konvertere verdien til heltall.

6. Spørre brukeren om hun/han vil finne verdien i fortiden.

   6.1 Hvis ja, er resultatet lik $startverdi/a^n$.

7. Ellers

   7.1 er resultatet lik $startverdi * a^n$.

8. Skrive ut resultatet.

```
'''
Programmet beregner prisen til en leilighet ved gitt pris, periode, og rentefot
i fortiden og fremtiden
'''

# får startverdien fra brukeren (samtidig konverterer streng til float)
startverdi = float(input('Skriv inn startverdi: '))

# får vekstfaktoren fra brukeren, og deler den på 100 siden vekstfaktoren er i prosent
a = float(input('Skriv inn vekstfaktoren i prosent: '))/100

# spør brukeren om verdien avtar
q_1 = input('Avtar verdien? (ja/nei)')

# sjekker både med stor og små bokstav for å unngå feil
if q_1 == 'Ja' or q_1 == 'ja':
    a = 1 - a                   # vekstfaktor dersom verdien avtar
else:
    a += 1                      # vekstfaktor dersom verdien øker

# spør brukeren om antall perioder
n = int(input('Skriv inn antall perioder t: '))

# spør brukeren om han vil beregne verdien i fortiden
q_2 = input('Vil du finne verdien i fortiden: (ja/nei)')

if q_2 == 'Ja' or q_2 == 'ja':
    resultat = startverdi/a**n   # sluttverdi i fortiden
else:
    resultat = startverdi*a**n   # sluttverdi i fremtiden

# skrive ut resultat
print(f'Verdien til leiligheten var/er {resultat:.3f} kroner.')
```

Program 5.3: Programmet beregner prisen til en leilighet ved gitt pris, periode, og rentefot i fortiden og fremtiden.

Output:

```
Skriv inn startverdi: 2500000
Skriv inn vekstfaktoren i prosent: 12
Avtar verdien? (ja/nei)nei
Skriv inn antall perioder t: 4
Vil du finne verdien i fortiden: (ja/nei)ja
Verdien til leiligheten var/er 1588795.196 kroner.
```

## 5.3 Økonomi

### 5.3.1 Forrentning

**Oppgave** Lag et program som beregner differansen mellom årlig og kontinuerlig forrentning, og som runder av differansen til to desimaler.

Oppgaven er hentet fra (Bueie, 2019).

**Løsning** Formel for årlig forrentning er gitt ved:

$$k_n = k_0 * (1 + r)^n \tag{5.2}$$

hvor $k_n$ er beløpet etter $n$ år, $k_0$ er innskutt beløp, og $r$ er rentefoten.

Formel for kontinuerlig forrentning er gitt ved:

$$k_n = k_0 * e^{rn} \tag{5.3}$$

For å løse oppgaven, beregner vi årlig og kontinuerlig forrentning med gitte verdier fra brukeren, og så finner vi differansen mellom de to forrentningene.

#### Algoritme

1 Importere *math*-modulen.

2 Definere en funksjon *finn_differanse_forrentning()* som tar innskutt beløp, rentefot, og antall år som parametere.

- 2.1 Omforme rentefoten fra prosent til desimaltall.
- 2.2 Beregne årlig og kontinuerlig forrentning ved å bruke henholdsvis formlene 5.2 og 5.3.
- 2.3 Finne differansen mellom de to forrentningene; Vi tar absoluttverdi av differansen for å unngå negative verdier ved å kalle *abs()*-funksjonen; runder av resultatet til to desimaler ved å kalle *round()*-funksjonen.
- 2.4 Returnere årlig forrentning, kontinuerlig forrentning, og differansen.

3 Definere *main()*-funksjon som klientprogram.

- 3.1 Be brukeren om å oppgi verdiene innskutt beløp, rentefot og antall år; konvertere verdiene til flyttall.
- 3.2 Beregne årlig og kontinuerlig forrentning og differansen mellom dem ved å kalle *finn_differanse_forrentning()*-funksjonen.
- 3.3 Skrive ut resultatet.

4 Kalle *main()*-funksjonen.

```
'''
Programmet beregner differansen mellom årlig og kontinuerlig forrentning
'''

# importerer biblioteket math
import math

'''
funksjon for å finne differansen mellom årlig og kontinuerlig forrentning
funksjonen tar innskudd:k_0, rentefot:r, og antall år:n som parametere
funksjonen returnerer differansen med to desimaler nøyaktighet
'''
def finn_differanse_forrentning(k_0, r, n):

    # omformer fra prosent til desimal
    r = r/100

    # beregner årlig og kontinuerlig forrentning
    aarlig_forrentning = k_0 * (1 + r)**n
    kontinuerlig_forrentning = k_0 * math.e**(r*n)

    # finner differansen og runder av til to desimaltall; vi tar absoluttverdi for å unngå negative tall
    differanse = round(abs(aarlig_forrentning - kontinuerlig_forrentning), 2)

    # returnerer de beregnede verdier
    return aarlig_forrentning, kontinuerlig_forrentning, differanse

def main():

    # får verdier som trengs fra brukeren
    k_0 = float(input('Oppgi innskutt beløp: '))
    r = float(input('Oppgi rentefoten: '))
    n = float(input('Oppgi antall år: '))

    # beregner årlig og kontinuerlig forrentning og differansen mellom dem
    aarlig_forrentning, kontinuerlig_forrentning, differanse = finn_differanse_forrentning(k_0, r, n)

    # skriver ut resultatet
    print(f'Årlig forrentning: {round(aarlig_forrentning)} kr.\
    \nKontinuerlig forrentning: {round(kontinuerlig_forrentning)} kr.\
    \nDifferansen mellom årlig og kontinuerlig forrentning: {differanse}')

main()
```

Program 5.4: Programmet beregner differansen mellom årlig og kontinuerlig forrentning.

Eksempel output:

```
Oppgi innskutt beløp: 5000
Oppgi rentefoten: 4
Oppgi antall år: 3
Årlig forrentning: 5624 kr.
Kontinuerlig forrentning: 5637 kr.
Differansen mellom årlig og kontinuerlig forrentning: 13.16
```

### 5.3.2 Sparing

**Oppgave** Kari har 100 000 kroner på sparekontoen, som hun har tjent på sommerjobber de siste årene. Hun planlegger å spare disse pengene i banken for å få råd til leilighet en dag. For å få råd til leilighet trenger hun 300 000 kroner i egenkapital.

a Beregn hvor mange år tar det før Kari har nok penger med en rente på 3%.

b Kari bestemmer seg for å spare 15 000 kroner til per år. Modifiser programmet, hvor mange år tar det nå?

Oppgaven er hentet fra (ProFag, 2021).

**Løsning**

a Når man setter penger på en sparekonto i en bank, får hun en *avkastning* på innskuddet i form av renter. Rentefoten forteller hvor stor del av innskuddet man får som rente for en viss periode.

Kari setter et beløp på 100 000 kroner i banken til en fast rente på 3% per år. Vekstfaktoren er:

$$1 + 0.03 = 1.03$$

Etter ett år vil Kari ha:

$$100\,000 * 1.03 = 103\,000 \quad kr.$$

Hvor lang tid det tar for at hun skal ha 300 000 kr. på kontoen sin, kan vi beregne ved å bruke en *while*-løkke. Løkken looper helt til vi når sluttbeløpet. For å løse oppgaven lager vi en funksjon som tar startbeløp, rentefot og sluttbeløp som parametere, og returnerer saldo og antall år.

**Algoritme**

1 Definere en funksjon *beregn_tid_gitt_innskudd()* som tar startbeløp, rentefot, og sluttbeløp som parametere.
   1.1 Definere vekstfaktoren gitt ved $1 + rentefoten/100$.
   1.2 Definere en variabel saldo; Saldoen i starten er lik startbeløp.
   1.3 Definere en variabel for å telle antall år, og sette den lik null.
   1.4 Bruke en *while*-løkke som looper så lenge saldoen er mindre enn sluttbeløp.
      1.4.1 Beregne saldoen, og sette ny verdi for den.
      1.4.2 Inkrementere antall år med 1.
   1.5 Returnere antall år og saldoen.
2 Definere *main()*-funksjon som klientprogram.
   2.1 Skrive ut funksjonaliteten til programmet for brukere (valgfri).
   2.2 Få startbeløp, rentefot og sluttbeløp fra brukeren, og konvertere verdiene til flyttall.
   2.3 Beregne antall år og saldoen ved å kalle *beregn_tid_gitt_innskudd()*-funksjonen.
   2.4 Skrive ut resultatet.
3 Kalle *main()*-funksjonen.

```python
# a

'''
funksjon for å beregne tid for en sluttverdi med innskudd
funksjonen tar startbeløp, rentefot, og sluttbeløp som parametere
funksjonen returnerer antall år, og saldoen
'''
def beregn_tid_gitt_innskudd(startbeløp, rentefoten, sluttbeløp):

    # definerer vekstfaktorvariabelen
    vekstfaktor = 1 + rentefoten/100

    # definerer en variabel saldo og setter den lik startbeløpet
    saldo = startbeløp

    # definerer en variabel år
    antall_år = 0

    # løkken looper frem til saldoen er >= sluttbeløp
    while saldo < sluttbeløp:

        # saldoen øker hvert år med vekstfaktoren
        saldo *= vekstfaktor

        # etter hver loop inkrementerer antall år med 1
        antall_år += 1

    # returnerer resultatet
    return antall_år, saldo


def main():

    print('Oppgave a: Antall år for å spare et sluttbeløp med innskudd')

    # får verdier fra brukeren
    startbeløp = float(input('Oppgi startbeløpet: '))
    sluttbeløp = float(input('Oppgi sluttbeløpet: '))
    rentefoten = float(input('Oppgi rentefoten: '))

    # kaller metoden beregn_tid_gitt_innskudd() for å beregne tiden
    antall_år, saldo = beregn_tid_gitt_innskudd(startbeløp, rentefoten, sluttbeløp)

    # skriver ut resultatet
    print(f'\nDet tar {antall_år} år for å ha {sluttbeløp} kr. på kontoen.\
    \nSaldoen skal være {round(saldo)} kr.')

main()
```

Program 5.5: Programmet beregner tiden for en sluttverdi med innskudd.

Output:

```
Oppgave a: Antall år for å spare et sluttbeløp med innskudd
Oppgi startbeløpet: 100000
Oppgi sluttbeløpet: 300000
Oppgi rentefoten: 3

Det tar 38 år for å ha 300000.0 kr. på kontoen.
Saldoen skal være 307478 kr.
```

b Vi kan modifisere funksjonen ved å legge til en parameter kalt *utbetaling*, og summere den med saldoen i hver loop. Algoritmen for programmering er derfor den samme som forrige oppgave.

**Algoritme**

1 Definere en funksjon *beregn_tid_gitt_innskudd_utbetaling()* som tar startbeløp, rentefot, sluttbeløp og utbetaling som parametere.
   1.1 Definere vekstfaktoren gitt ved $1 + rentefoten/100$.
   1.2 Definere en variabel saldo; Saldoen i starten er lik startbeløp.
   1.3 Definere en variabel for å telle antall år, og sette variabelen lik 0.
   1.4 Bruke en *while*-løkke som looper så lenge saldoen er mindre enn sluttbeløp.
      1.4.1 Beregne saldoen, og sette ny verdi for den.
      1.4.2 Inkrementere antall år med 1.
   1.5 Returnere antall år og saldoen.
2 Definere *main()*-funksjon som klientprogram.
   2.1 Skrive ut funksjonaliteten til programmet for brukere (valgfri).
   2.2 Få startbeløp, rentefot, sluttbeløp og utbetaling fra brukeren, og konvertere verdiene til flyttall.
   2.3 Beregne antall år og saldoen ved å kalle *beregn_tid_gitt_innskudd_utbetaling()*-funksjonen.
   2.4 Skrive ut resultatet.
3 Kalle *main()*-funksjonen.

```
# b

'''
funksjon for å beregne tid for en sluttverdi med innskudd og årlig utbetaling
funksjonen tar startbeløp, rentefot, sluttbeløp og utbetaling som parametere
funksjonen returnerer antall år, og saldoen
'''
def beregn_tid_gitt_innskudd_utbetaling(startbeløp, rentefoten, sluttbeløp, utbetaling):

    # definerer vekstfaktorvariabelen
    vekstfaktor = 1 + rentefoten/100

    # definerer en variabel saldo og setter den lik startbeløpet
    saldo = startbeløp

    # definerer en variabel år
    antall_år = 0

    # løkken looper frem til saldoen er >= sluttbeløp
    while saldo < sluttbeløp:

        # saldoen øker hvert år med vekstfaktoren, utbetalingen legges til
        saldo = saldo * vekstfaktor + utbetaling

        # etter hver loop inkrementerer antall år med 1
        antall_år += 1

    # returnerer resultatet
    return antall_år, saldo

def main():

    print('\nOppgave b: Antall år for å spare et sluttbeløp med innskudd og årlig utbetaling')

    # får utbetaling fra brukeren
    startbeløp = float(input('Oppgi startbeløpet: '))
    sluttbeløp = float(input('Oppgi sluttbeløpet: '))
    rentefoten = float(input('Oppgi rentefoten: '))
    utbetaling = float(input('Oppgi utbetalingsbeløpet: '))

    # kaller metoden beregn_tid_gitt_innskudd_utbetaling() for å beregne tiden
    antall_år_2, saldo_2 = beregn_tid_gitt_innskudd_utbetaling(startbeløp, rentefoten,
                                                               sluttbeløp, utbetaling)

    # skriver ut resultatet
    print(f'\nDet tar {antall_år_2} år for å ha {sluttbeløp} kr. på kontoen.\
    \nSaldoen skal være {round(saldo_2)} kr.')

main()
```

Program 5.6: Programmet beregner tiden for en sluttverdi med innskudd og årlig utbetaling.

Output:

```
Oppgave b: Antall år for å spare et sluttbeløp med innskudd og årlig utbetaling
Oppgi startbeløpet: 100000
Oppgi sluttbeløpet: 300000
Oppgi rentefoten: 3
Oppgi utbetalingsbeløpet: 15000

Det tar 10 år for å ha 300000.0 kr. på kontoen.
Saldoen skal være 306350 kr.
```

# 6 Matematikk R1

### Kompetansemål etter matematikk R1

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- bestemme den deriverte i et punkt geometrisk, algebraisk og ved numeriske metoder, og gi eksempler på funksjoner som ikke er deriverbare i gitte punkter
- modellere og analysere eksponentiell og logistisk vekst i reelle datasett
- forstå begrepet vektor og regneregler for vektorer i planet, og bruke vektorer til å beregne ulike størrelser i planet

Kilde

## 6.1 Numeriske metoder

**Oppgave** Undersøk om det er halverings metode eller Newton-Raphsons metode som bruker kortest tid på å løse en likning $f(x)$ med et avvikskrav på $10^{-5}$. Bruk *time()*-funksjonen for å måle tiden.

Oppgaven er hentet fra (Bueie, 2019, s. 138).

**Løsning** Newton-Raphsons metode I.2 tar utgangspunkt i en initial gjetning $x_0$ for en funksjon $f(x)$ for å finne $f(x+1)$ . Vi gjentar metoden helt til $f(x+1) = 0$.

Halverings metode I.1 er basert på å halvere et intervall $[a, b]$ til å finne roten til en likning $f(x)$, vi fortsetter halveringen til vi finner en verdi $x$ hvor $f(x) = 0$.

Kildekoden for Newton-Raphsons metode og halverings metode er lånet fra GeeksforGeeks (2021a, 2021b).

Vi løser oppgaven ved å ta i bruk de to metodene for å finne løsningen for likningen $f(x) = x^3 - x^2 + 2$, mens vi måler kjøretiden for de to metodene.

### Algoritme for Newton-Raphsons metode

1 Definere *Newton_Raphsons_metode()*-funksjonen; funksjonen tar $x$ som parameter.

1.1 Definerer en variabel *iterasjon* for å telle antall iterasjoner, og sette den lik 0.

Vi teller iterasjoner for hver metode og til slutt sammenligner vi iterasjonene for de to metodene.

1.2 Beregne $\frac{f(x)}{f'(x)}$ og lagre verdien i en variabel kalt $h$.

1.3 Bruke en *while*-løkke og loope så lenge $h$ er større eller lik toleransen for feil (avvikskrav).

1.3.1 Beregne $h$ ved å dele $f(x)$ på $f'(x)$.

1.3.2 Beregne verdien til $x$ ved å trekke $h$ fra $x$. (Se formelen for Newton-Raphsons metode I.2).

1.3.3 Inkrementere iterasjoner med 1.

1.4 Returnere $x$-verdien og antall iterasjoner.

```
'''
Programmet implementerer Newton-Raphsons metode,
kildekoden for er lånet fra GeeksforGeeks.
'''

def Newton_Raphsons_metode(x):

    # definerer en variabel iterasjon for å telle iterasjoner
    iterasjon = 0

    # definerer en verdi h som er lik f/f'
    h = f(x) / f_derivert(x)

    # bruker while-løkke for å finne nullpunktet, løkken looper så lenge h >= toleranse
    while abs(h) >= toleranse:

        h = f(x) / f_derivert(x)

        # Newton-Raphsons metode -> x(i+1) = x(i) - f(x) / f'(x)
        x = x - h

        # inkrementerer iterasjoner med 1
        iterasjon += 1

    # hvis verdien er funnet, skriver ut resultatet
    # print(f'Løsningen av f(x) er {x:.5f}')

    # returnerer resultatet
    return x, iterasjon
```

Program 6.1: Programmet implementerer Newton-Raphsons metoden.

### Algoritme for halverings metode

1 Definere *halverings_metode()*-funksjonen; funksjonen tar $a$ og $b$ som parametere.

- 1.1 Definerer en variabel *iterasjon* for å telle opp iterasjoner.
- 1.2 Sjekke om $f(a) * f(b) >= 0$;
  - 1.2.1 hvis ja, informerer brukeren om at løsningen ikke finnes på intervallet, og returnerer.
- 1.3 Definere en variabel $m$ som står for *midtpunkt*, og sette den lik $a$.
- 1.4 Bruke en *while*-løkke, og loope så lenge $(b - a)$ (rekkevidde til intervallet) er større eller lik toleransen.
  - 1.4.1 Finne midtpunktet $m$ på intervallet $[a, b]$.
  - 1.4.2 Sjekke om $f(m)$ er lik 0;
    - 1.4.2.1 hvis ja, $m$ er løsningen av $f(x)$, og vi slutter løkken med *break*.
  - 1.4.3 Sjekke om $f(a) * f(m)$ er mindre enn 0;
    - 1.4.3.1 hvis ja, det betyr at $f(a)$ og $f(m)$ ligger på forskjellige sider av $x$-aksen, altså ligger nullpunktet mellom punktene $a$ og $m$. Sette $b = m$, dvs. vi lager et nytt intervall.
  - 1.4.4 Ellers
    - 1.4.4.1 setter vi $a = m$. Det betyr at nullpunktet ligger mellom punktene $m$ og $b$.
  - 1.4.5 Inkrementere iterasjoner med 1.
- 1.5 Returnere $m$ og antall iterasjoner.

```
'''
Programmet implementerer halverings metode,
kildekoden er lånet fra GeeksforGeeks.
'''

def halverings_metode(a, b):

    # definerer en variabel iterasjon for å telle iterasjoner
    iterasjon = 0

    # hvis f(a) og f(b) ligger på samme side av x-aksen
    if (f(a) * f(b) >= 0):

        # skrive ut info til brukeren
        print('Du har ikke valgt riktig intervall')

        # og returnerer
        return

    # setter midtpunktet lik startpunkt på intervallet
    m = a

    # bruker while-løkke, og går i løkken så lenge lengden av intervallet er >= toleranse
    while ((b-a) >= toleranse):

        # finner midtpunkt av intervallet
        m = (a+b) / 2

        # sjekker om f(m) = 0, altså hvis m er nullpunktet
        if (f(m) == 0.0):

            # slutter løkken
            break

        # hvis f(m) og f(a) ligger på forskjellige sider av x-aksen
        if (f(m)*f(a) < 0):

            # setter b=m
            b = m

        # ellers setter a=m
        else:
            a = m

        # inkrementerer iterasjoner med 1
        iterasjon += 1

    # dersom f(m)=0, skriver ut resultatet
    # print(f'Løsningen av f(x) er {m:.5f}')

    # returnerer resultatet
    return m, iterasjon
```

Program 6.2: Programmet implementerer halverings metoden.

### Algoritme for å løse oppgaven

1 Importere modulen *time*.

2 Definere avvikskrav som konstant.

3 Definere en funksjon *f()* som returnerer funksjonen $f(x) = x^3 - x^2 + 2$; funksjonen tar $x$ som parameter.

4 Definere en funksjon *f_derivert()* som returnerer den deriverte til $f(x)$; funksjonen tar $x$ som parameter.

5 Definere funksjonen *main()* som klientprogram.

5.1 Definere $x_0$, $a$ og $b$ som variabler, og sette verdi for dem.

5.2 Sette starttidspunkt for kjøring av Newton-Raphsons metoden ved å kalle *time()*-funksjonen fra *time*-modulen.

5.3 Finne løsningen til likningen $f(x)$ for $x_0$, samt antall iterasjoner ved å kalle *Newton_Raphsons_metode()*-funksjonen.

5.4 Skrive ut resultatet (svar, tid, og iterasjoner).

5.5 Sette starttidspunkt for kjøring av halverings metoden ved å kalle *time()*-funksjonen fra *time*-modulen.

5.6 Finne løsningen til likningen $f(x)$ for $x_0$, samt antall iterasjoner ved å kalle *halverings_metode()*-funksjonen.

5.7 Skrive ut resultatet (svar, tid, og iterasjoner).

6 Kalle *main()*-funksjonen.

```
'''
programmet sammenligner kjøretiden av Newton-Raphsons metode og Halverings metode
programmet finner løsning for f(x)=x^3 - x^2 + 2
'''

# importerer modulen time
import time

# definerer toleranse som konstant
toleranse = 0.00001

# definerer en funksjon f som returnerer funksjonen vår
def f( x ):
    return x**3 - x**2 + 2

# definerer en funksjon f_derivert som returnerer den deriverte av f
def f_derivert( x ):
    return 3*x**2 - 2*x

# metoden for å beregne kjøretiden for de to metodene
def main():

    # setter startverdier
    x_0 = -20
    a = -200
    b = 300

    # tester Newton-Raphsons metoden
    starttid_1 = time.time()
    resultat_1, iterasjon_1 = newton_Raphsons_metode(x_0)

    print(f'Løsningen av f(x) er {resultat_1:.5f}, \
    kjøre tiden for Newton-Raphsons metode er \
    {time.time() - starttid_1} med {iterasjon_1} iterasjoner')

    # tester Halverings metoden
    starttid_2 = time.time()
    resultat_2, iterasjon_2 = halverings_metode(a, b)

    print(f'Løsningen av f(x) er {resultat_2:.5f},\
    kjøre tiden for Halverings metode er\
    {time.time() - starttid_2} med {iterasjon_2} iterasjoner')

main()
```

Program 6.3: Programmet sammenligner kjøretiden av Newton-Raphsons metode og halverings metode.

Eksempel output:

```
Løsningen av f(x) er -1.00000, kjøre tiden for Newton-Raphsons metode er 0.0 med 11 iterasjoner
Løsningen av f(x) er -1.00001, kjøre tiden for Halverings metode er 0.001001596450805664 med 26 iterasjoner
```

Vi får forskjellige verdier for tid og iterasjoner avhengig av hvilke startverdier vi velger. Kjøretiden for begge metodene er veldig kort slik at vi får 0 som kjøretid i de fleste av kjøringene. I eksempeloutputen over fikk vi tall for halverings metoden, men fortsatt 0 for Newton-Raphsons metoden. Det betyr at kjøretiden for den sist nevnte er kortere, noe som vi kan betrakte fra antall iterasjoner for de to metodene også. I alle kjøringene av programmet får vi flere iterasjoner for halverings metoden enn for Newton-Raphsons metoden.

Vi kan derfor konkludere at kjøretiden for Newton-Raphsons metoden er kortest.

## 6.2 Derivasjon

Derivasjon er blant de matematiske begrepene som har flere regler og teknikker. Dette kan føre til at elever blir distrahert fra å forstå hva derivasjon faktisk er. Som løsning for dette kan numerisk derivasjon gi en bedre forståelse av hva vi gjør når vi deriverer en funksjon, i og med at numerisk derivasjon viser faktisk definisjonen for den deriverte (Haraldsrud mfl., 2020, s. 211).

Vi beregner den deriverte av en funksjon analytisk gitt ved formelen:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{6.1}$$

Vi kan beregne en tilnærming for denne grensen der $\Delta x$ går mot 0 med en svært liten $\Delta x$. Denne metoden kalles *Newtons kvotient* (Haraldsrud mfl., 2020, s. 211):

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{6.2}$$

**Oppgave** Finn den deriverte til funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$ i punkt $x = 3$.

**Løsning** Bueie (2019, s. 100) bruker følgende kode for å finne den deriverte til en gitt funksjon i et gitt punkt:

```
'''
Programmet finner den deriverte til f(x) numerisk i punkt x=3
'''

# definerer en funksjon f som returnerer vår funksjon
def f(x):
    return np.sqrt(x)

# definerer en funksjon som returnerer den deriverte av f
def derivert(x):

    # definerer steglengde
    delta_x = 0.001

    # finner endringer i y-verdier
    endring = f(x + delta_x) - f(x)

    # finner veksthastigheten ved å dele endringen i y på endringen i x
    vekst = endring/delta_x

    # returnerer veksthastigheten
    return vekst

# finner den deriverte av f in punkt x=3 med en steglengde=0.001
print(f'Den deriverte av funksjonen f i punkt x = 3 er lik {derivert(3):.3f}')
```

Program 6.4: Programmet finner den deriverte til $f(x)$ numerisk i punkt $x = 3$.

Output:

```
Den deriverte av funksjonen f i punkt x = 3 er lik 0.289
```

Vi kan utvide koden ved å legge til tegning av grafene $f(x)$ og $f'(x)$ samt å spørre brukeren om i hvilket punkt og med hvilken steglengde programmet skal finne den deriverte av $f$.

### Algoritme

1 Importere *NumPy*-biblioteket, og *matplotlib.pyplot*-modulen.

2 Definere en funksjon som returnerer funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$; funksjonen tar $x$ som parameter.

3 Definere en funksjon kalt *derivert* som tar $x$ og $\Delta x$ som parametere.

3.1 Benytte formelen 6.2 for å finne den deriverte av $f()$. Her kan vi enten definere en variabel *vekst* (Du kan kalle variabelen hva du ønsker) og finne den deriverte med en gang,

```
vekst = (f(x + delta_x) - f(x)) / delta_x
```

eller vi kan finne først telleren av formelen og så dele den på nevneren.

```
endring = f(x + delta_x) - f(x)
vekst = endring/delta_x
```

3.2 Returnere vekst.

4 Definere funksjonen *main()* som klientprogram.

4.1 Få $x$-verdien fra brukeren (Hvilket punkt programmet skal finne den deriverte for); konvertere input-verdien til heltall.

4.2 Spørre brukeren om steglengde. Denne størrelsen må defineres som *float* fordi som regel er det ønskelig å defineres små verdier for $\Delta x$.

4.3 Beregne den deriverte av $f(x)$ ved å kalle *derivert()*-funksjonen.

4.4 Skrive ut resultatet.

4.5 Spørre brukeren om start- og sluttpunkt på $x$-aksen samt antall punkter for tegning av grafer. Denne verdien er som standard lik 50. Konvertere input-verdiene til heltall.

4.6 Definere $x$-verdier ved å kalle *linspace()*-funksjonen fra *NumPy*-biblioteket. Sette de verdiene som er mottatt fra brukeren som parameter inn i funksjonen.

4.7 Definere $y$-verdier for $f()$-funksjonen. Funksjonen tar *x-verdier* som parameter.

4.8 Definere $y$-verdier for den deriverte av $f()$, $(f'(x))$ ved å kalle *derivert()*-funksjonen. Funksjonen tar *x-verdier* og *delta_x* som parametere.

4.9 Sette størrelse for plottet ved å kalle *figure()*-funksjonen fra *pyplot*. Vi definerer figurstørrelse som parameter til funksjonen:

```
figure(figsize=(x,y))
```

4.10 Sette tittel for plottet ved å kalle *title()*-funksjonen fra *pyplot*.

4.11 Sette label for $x$- og $y$-aksen ved å kalle henholdsvis *xlabel()*- og *ylabel()*-funksjonen.

4.12 Kalle *plot()*-funksjonen for å tegne grafer for $f(x)$ og $f'(x)$. Vi kan kalle funksjonen to ganger og hver gang sette inn $x$- og $y$-verdier for funksjonen, eller vi kan kalle *plot()*-funksjonen én gang og sette $x$- og $y$-verdier for begge funksjoner etter hverandre. Det er også mulig å definere forskjellige farger for grafer ved å skrive fargekode som streng etter $x$ og $y$:

```
plot(x_verdier, y_verdier,'r')
```

her står 'r' for rødfarge.

For å vise punktet som brukeren ønsker å finne den derivert i, setter vi $x$ og $y$-derivert inn i *plot()*-funksjonen. For punktet bruker vi 'o' eller '*farge* o' som parameter etter $x$- og $y$-verdi.

4.13 Vise koordinater for det deriverte punktet på plottet ved hjelp av *text()*-funksjonen fra *pyplot*-modulen. Funksjonen tar $x$- og $y$-verdi og teksten som parametere. Syntaksen for å skrive koordinater som tekst er som følger:

```
text(x, y,'({},␣{})'.format(x, y))
```

4.14 Kalle *legend()*-funksjonen og skrive navnene til funksjoner (som en liste av strenger) som parameter.

4.15 Sette rutenett på plottet ved å kalle *grid()*-funksjonen.

4.16 Vise plottet ved å kalle *show()*-funksjonen.

5 Kalle *main()*-funksjonen.

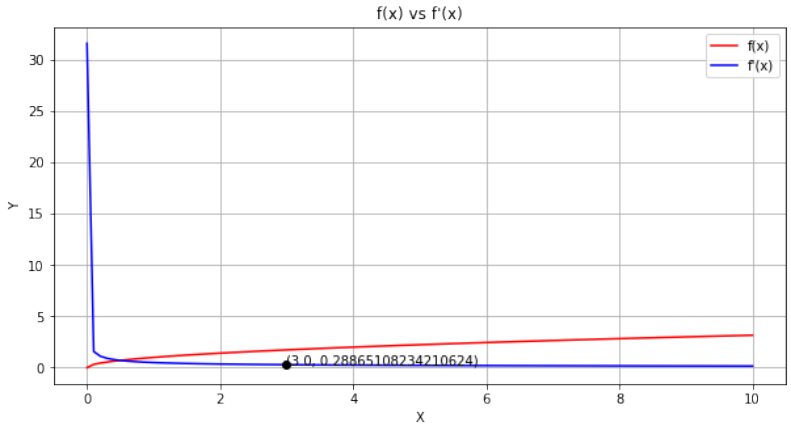
```
'''
utvidet kode for numerisk derivasjon, programmet tegner grafen til f(x) og f'(x),
og finner den derivert til f(x) i x=x_i grafisk
'''

# importerer biblioteker
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# definerer en funksjon f som returnerer vår funksjon
def f(x):
    return np.sqrt(x)

# definerer en funksjon som returnerer den deriverte av f
def derivert(x, delta_x):

    endring = f(x + delta_x) - f(x) # finner endringer i y-verdier
    vekst = endring/delta_x   # finner veksthastigheten ved å dele endringen i y på endringen i x

    return vekst  # returnerer veksthastigheten

# funksjonen for å teste metoden samt tegning av grafer
def main():
    '''
    data for beregning av f'(x)
    '''
    # får x-verdien og steglengde fra brukeren
    x = float(input('Skriv inn x-verdien: '))
    delta_x = float(input('Skriv inn steglengde: '))

    # kaller derivert()-metoden for å finne den deriverte av f
    f_derivert = derivert(x, delta_x)

    # skrive ut resultatet
    print(f'\nDen deriverte av funksjonen f i punkt x = {x} er lik {f_derivert:.3f}\n')

    '''
    data for tegning av grafer
    '''
    # får startpunkt, sluttpunkt og antall punkter for x-aksen fra brukeren
    x_start = int(input('Skriv inn startverdi: '))
    x_slutt = int(input('Skriv inn sluttverdi: '))
    antall_punkter = int(input('Skriv inn antall sampler: '))

    # definerer x-verdier for grafen
    x_verdier = np.linspace(x_start, x_slutt, antall_punkter)

    # definerer y-verdier for f(x) og f'(x)
    y_verdier = f(x_verdier)
    y_derivert = derivert(x_verdier, delta_x)

    plt.figure(figsize=(10,5))   # setter størrelse for plottet

    # setter tittel for plottet, og label for aksene
    plt.title('f(x) vs f\'(x)')
    plt.xlabel('X')
    plt.ylabel('Y')

    # tegner grafen for f(x) og f'(x)
    plt.plot(x_verdier, y_verdier, 'r', x_verdier, y_derivert, 'b', x, f_derivert, 'ko')
    # viser koordinat for derivert punkt på plottet
    plt.text(x, f_derivert, '({}, {})'.format(x, f_derivert))

    plt.legend(['f(x)', 'f\'(x)'])  # legger til label for funksjoner
    plt.grid()  # setter rutenett på plottet
    plt.show()  # viser plottet

main()
```

Program 6.5: Programmet tegner grafen til $f(x)$ og $f'(x)$, og finner den derivert til $f(x)$ i $x = x_i$ grafisk.

Output:

```
Programmet finner den deriverte av f(x) = -x

Skriv inn x-verdien: 3
Skriv inn steglengde: .001

Den deriverte av funksjonen f i punkt x = 3.0 er lik 0.289

Nå tegner grafen til f(x) og f'(x)

Skriv inn startverdi: 0
Skriv inn sluttverdi: 10
Skriv inn antall sampler: 100
```

Tilnærmet verdi for den deriverte av $f(x) = \sqrt{x}$ i punkt $x = 3$, med tre desimaler nøyaktighet er 0.289. Figur 6.1 viser også den samme løsningen grafisk.




Figur 6.1: Grafisk løsning av $f(x) = \sqrt{x}$ i punkt $x = 3$.

## 6.3 Vektorregning

"En størrelse som har en bestemt lengde og en bestemt retning kalles en *vektor*. Eksempler på vektorer er forflytning, fart og kraft.

En skalar er en størrelse uten retning. Eksempler på skalarer er temperatur, areal og volum"(Kristensen & Aanensen, 2018f).

Summen av to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{u}$ er en ny vektor lik:

$$\vec{v} + \vec{u} = [v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3] \tag{6.3}$$

Skalarproduktet mellom to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{u}$ er et reelt tall definert ved:

$$\vec{v}.\vec{u} = |\vec{v}|.|\vec{u}|.\cos\theta = v_1.u_1 + v_2.u_2 + v_3.u_3 \tag{6.4}$$

her $|\vec{v}|$ er lik størrelse til lengden av $\vec{v}$, og $\theta$ er vinkelen mellom de to vektorene.

Skalarproduktet er null dersom de to vektorene står vinkelrett på hverandre, og vektorene sies da å være *ortogonale*.

Vi kan skrive lengden av en vektor som:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{6.5}$$

**Oppgave** Lag et program som tar inn to vektorer, og bruker arealsetningen til å finne arealet til trekanten utspent av de to vektorene.

Hint: Dere vil trenge å lage en funksjon som regner ut lengden til en vektor, og en funksjon som finner vinkel mellom de to vektorene.

Oppgaven er hentet fra (Haraldsrud mfl., 2020).

**Løsning** Arealsetning brukes når vi vil finne areal til en vilkårlig trekant når to av sidelengdene og vinkelen mellom dem er kjent. Formelen for arealsetningen er gitt ved:

$$A = \frac{1}{2} a.h. \sin\theta \tag{6.6}$$

her $a$ er lengden til grunnlinjen i trekanten og $h$ er hypotenusen (Matematikk.org, udatert).

Vi bruker skalarproduktet for å finne vinkelen mellom de to vektorene. Omformulering av skalarproduktet med hensyn til vinkelen $\theta$ gir:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}.\vec{u}}{|\vec{v}|.|\vec{u}|}\right) \tag{6.7}$$

For å løse oppgaven på en strukturert måte, velger vi å opprette en *class* for *vektor*. Det betyr at vi lager et objekt av vektor som har egne egenskaper og metoder.

### Algoritme

1 Importere modulen *math*.

2 Opprette en klasse *Vektor*.

  2.1 Bruke *__init__()*-funksjonen for å definere konstruktøren til *Vektor* [3].
  For klassen *Vektor* setter vi $x$, $y$, og $z$ koordinater som verdier til en instans av vektor-objektet. Disse verdiene defineres som parametere til Vektor.

  2.2 Definere *lengde* som en egenskap av *Vektor*. Vi bruker formelen 6.5 for lengde til en vektor for å beregne lengden.

3 Definere en *dot_produkt()*-funksjon som beregner produktet av to vektorer. Funksjonen tar to vektor-objekter som parametere.

[3] Alle klasser har en funksjon kalt *__init__ ()*, som alltid genereres ved oppretting av en klasse. Vi bruker *__init__()*-funksjonen til å tilordne verdier til objektets egenskaper (W3Schools, udatert-a).

3.1 Beregne produktet av de to vektorene ved hjelp av formelen 6.4, og lagre verdien i en variabel kalt *produkt*.

3.2 Returnere *produkt*.

4 Definere en funksjon kalt *vektor_vinkel()* for å finne vinkelen mellom to vektorer. Funksjonen tar to vektorer som parametere.

4.1 Beregne vinkelen mellom de to vektorene ved hjelp av formelen 6.7, og lagre verdien i en variabel kalt *theta*.

4.2 Returnere *theta*.

5 Definere en funksjon kalt *areal_utspent()*; funksjonen tar to vektor-objekter som parametere og beregner arealet til trekanten utspent av de to vektorene.

5.1 Beregne grunnlinjen, og hypotenusen til trekanten. For dette finner vi lengde til vektorene $\vec{v}$ og $\vec{u}$ ved å bruke *v.lengde* og *u.lengde*.

5.2 Finne vinkelen mellom de to vektorene ved å kalle *vektor_vinkel()*-funksjonen.

5.3 Bruke arealsetningen 6.6 for å finne arealet til trekanten utspent av de to vektorene, og returnere resultatet.

6 Definere en funksjon *main()* som klientprogram.

6.1 Få $x$, $y$ og $z$-verdiene for to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{u}$ fra brukeren; konvertere alle input-verdiene til flyttall.

6.2 Opprette vektorene $\vec{v}$ og $\vec{u}$ ved å bruke *Vektor*-klassen.

6.3 Finne arealet til trekanten utspent av de to vektorene ved å kalle *areal_utspent()*-funksjonen.

6.4 Skrive ut resultatet.

7 Kalle *main()*-funksjonen.

```python
'''
Programmet finner areal av trekanten utspent av to vektorer v og u
'''
# importerer modulen math
import math

# oppretter en klasse for vektorobjekt
class Vektor:

    '''
    konstruktør for vektor-objektet
    verdier til vektorobjektet: x, y og z koordinater

    Self-parameteren er en referanse til foreløpig instans av klassen,
    og brukes til å få tilgang til variabler som tilhører klassen.
    Du kan endre self til et hva som helst navn, men den må være den første parameteren i alle metoder
    '''
    def __init__(self, x, y, z):

        # definerer x, y og z-koordinater til en vektor
        self.x = x
        self.y = y
        self.z = z

        # definerer lengden av en vektor
        self.lengde = math.sqrt(self.x**2 + self.y**2 + self.z**2)

# metoden for å finne dot-produkt av to vektorer
def dot_produkt(v, u):

    # beregner produktet
    produkt = v.x * u.x + v.y * u.y + v.z * u.z

    # returnere resultatet
    return produkt

# funksjon for å finne vinkelen mellom to vektorer
def vektor_vinkel(v, u):

    # bruker omformulert skalarprodukt-formelen til å finne vinkel mellom v og u
    theta = math.acos(dot_produkt(v, u) / (v.lengde * u.lengde))

    # returnerer resultatet
    return theta

# funksjon for å finne arealet til trekanten utspent av to vektorer
def areal_utspent(v, u):

    # definerer grunnlinje til utspent trekant
    grunnlinje = v.lengde

    # definerer hypotenus til trekanten
    hypotenus = u.lengde

    # finner vinkelen mellom grunnlinjen og hypotenusen
    theta = vektor_vinkel(v, u)

    # beregner arealet ved hjelp av arealsetning
    areal = 0.5 * grunnlinje * hypotenus * math.sin(theta)

    # returnerer resultatet
    return areal
```

Program 6.6: Programmet finner areal av trekanten utspent av to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{u}$.

.

```python
# klientprogram
def main():

    # får verdier fra brukeren for vektor v
    x_1 = float(input("Oppgi x-verdien til vektoren v: "))
    y_1 = float(input("Oppgi y-verdien til vektoren v: "))
    z_1 = float(input("Oppgi z-verdien til vektoren v: "))

    # får verdier fra brukeren for vektor u
    x_2 = float(input("Oppgi x-verdien til vektoren u: "))
    y_2 = float(input("Oppgi y-verdien til vektoren u: "))
    z_2 = float(input("Oppgi z-verdien til vektoren u: "))

    # lager vektor v
    v = Vektor(x_1, y_1, z_1)

    # lager vektor u
    u = Vektor(x_2, y_2, z_2)

    # beregner arealet til trekanten utspent av de to vektorene
    areal = areal_utspent(v, u)

    # skriver ut resultatet
    print(f'Arealet til trekanten utspent av vektorene v og u er {areal:.2f}')

main()
```

Program 6.7: Klientprogram for å finne areal av trekanten utspent av to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{u}$

Eksempel output:

```
Oppgi x-verdien til vektoren v: 1
Oppgi y-verdien til vektoren v: 2
Oppgi z-verdien til vektoren v: 3
Oppgi x-verdien til vektoren u: 3
Oppgi y-verdien til vektoren u: 2
Oppgi z-verdien til vektoren u: 1
Arealet til trekanten utspent av vektorene v og u er 4.90
```

## 6.4 Regresjonsanalyse

Regresjonsanalyse handler om å finne ut hvilken sammenheng det finnes mellom to fenomener. For eksempel å finne ut hvilken sammenheng det finnes mellom snorlengden og svingetiden til en pendel. Vi kan studere en regresjonsmodell enten som en *lineær regresjon* eller som en *ikke-lineær regresjon*.

**Oppgave** Tabellen viser utslippene av karbondioksid $CO_2$ i verden målt i millioner tonn.

| Årstall | 1980 | 1990 | 2000 | 2005 | 2006 |
|---|---|---|---|---|---|
| Utslipp av CO2 i millioner tonn | 18 054 | 20 988 | 23 509 | 27 146 | 28 003 |

Plott punktene i tabellen i et koordinatsystem, og finn en matematisk modell som beskriver utslippene av $CO_2$. La $x$ være antall år etter 1980 og $U(x)$ utslippene av $CO_2$.

Mange land har vedtatt å senke utslippet av $CO_2$ i tiden framover. Vurder gyldigheten framover i tid av modellen du fant.

Oppgaven er hentet fra (Kristensen & Aanensen, 2018a).

**Løsning** Vi finner både lineære og ikke-lineære regresjonsmodeller, og så sammenligner vi modellene for å vise hvilken regresjonsmodell gir bedre nøyaktighet.

Vi setter først dataene i form av punkter i koordinatsystemet hvor $x$-verdier skal være antall år etter 1980, og $y$-verdier utslippene av $CO_2$. Vi definerer dermed følgende liste som $x$-verdier:

[0, 10, 20, 25, 26]

Vi skal finne eksponential regresjon, lineær regresjon og polynomisk regresjon av grad $2, 3, ...$, og konkludere til slutt hvilken modell tilpasser best dataene.

### Eksponential regresjon

### Algoritme

1 Importere *Numpy*-biblioteket, modulen *matplotlib.pyplot*, og funksjonen *curve_fit()* fra *scipy.optimize*-modulen.

2 Definere $x$- og $y$-verdier som *NumPy-array*er.

3 Definerer en funksjon kalt *eksp_funksjon()* som returnerer en eksponential funksjon på formen $a.e^{b.x}$ [4]; funksjonen tar to konstanter $a$ og $b$, og $x$ som parametere.

4 Benytte funksjonen *curve_fit()* for å finne koeffisienter til regresjonsfunksjonen.

Funksjonen tar følgende parametere (funksjonen tar flere parametere, men vi går bare gjennom de som blir brukt i programmet):

- **f:** Modellens funksjon
- **xdata:** $x$-verdier i datasettet
- **ydata:** $y$-verdier i datasettet

her modellens funksjon er vår eksponential funksjon.

5 Sette koeffisientene samt $x$-verdiene i *eksp_funksjon()*, og lage en ny liste av $y$-verdier. Vi trenger disse verdiene for å plotte regresjonslinjen.

6 Sette tittel for plottet ved å kalle *title()*-funksjon fra *matplotlib.pyplot*-modulen.

7 Sette label for $x$- og $y$-aksen ved å kalle henholdsvis *xlabel()*- og *ylabel()*-funksjon fra *matplotlib.pyplot*-modulen.

8 Bruke *scatter()*-funksjonen for å sette dataene i koordinatsystemet.

*scatter()* tar $x$- og $y$-verdiene (koordinat) som parametere, og finner punkter med gitte $x$- og $y$-koordinater.

9 Bruke *plot()*-funksjonen for å plotte regresjonslinjen. Funksjonen tar $x$- og $y$-verdier som parametere.

Det er også mulig å sette farge for grafen ved å legge for eks. 'r' som parameter i funksjonen. 'r' står for rødfarge.

10 Benytte *show()*-funksjonen for å vise plottet.

11 Skrive ut funksjonen til regresjonslinjen.

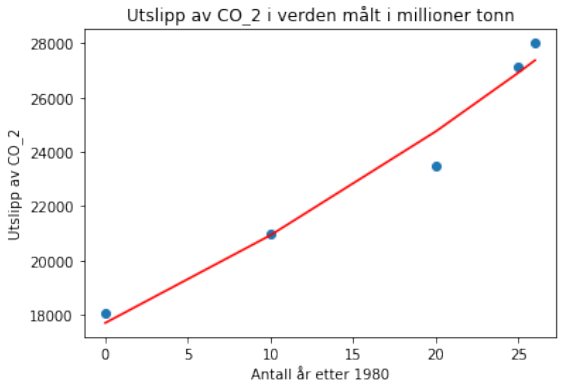
[4] I programmet har vi brukt *lambda*-funksjon i stedet for å definere en egen funksjon. En *lambda*-funksjon er en liten anonym funksjon som kan ta et hvilket som helst antall argumenter, men kan bare ha ett uttrykk (W3Schools, udatert-b).

```
'''
program for å finne eksponential regresjon for CO_2 utslipp i verden
'''

# importerer biblioteker
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit
import matplotlib.pyplot as plt

# definerer x-verdier
x = np.array([0, 10, 20, 25, 26])

# definerer y-verdier
y = np.array([18054, 20988, 23509, 27146, 28003])

# definerer eksponential funksjonen på formen y = a.e^b.x
eksp_funksjon = lambda x1, a, b: a * np.exp(b * x1)

# kaller på funksjonen curve_fit() for å finne koeffisienter til regresjonsfunksjonen
[a, b], res1 = curve_fit(eksp_funksjon, x,  y)

# beregner y-verdier til regresjonsfunksjonen
y_verdier = eksp_funksjon(x, a, b)

# setter tittel, x- og y-label
plt.title('Utslipp av CO_2 i verden målt i millioner tonn')
plt.xlabel('Antall år etter 1980')
plt.ylabel('Utslipp av CO_2')

# kaller scatter()-funksjonen for å sette punkter
plt.scatter(x, y)

# kaller plot()-funksjonen for å plotte regresjonsfunksjonen
plt.plot(x, y_verdier, 'r')

'''
alternativ metode
plt.plot(x, y, '.', x, y_verdier, '-')
'''
# viser plottet
plt.show()

# skriver ut regresjonsfunksjonen
print(f'U(x) = {a:.3f} * e^{b:.3f}.x')
```

Program 6.8: Programmet finner eksponential regresjon for $CO_2$ utslipp i verden.

Output:

```
U(x) = 17705.027 * e^0.017.x
```




Figur 6.2: Figuren viser eksponential regresjon for utslipp av $CO_2$ i verden.

Grafen 6.2 viser at eksponential funksjonen ikke tilpasser dataene nøyaktig.

### Lineær regresjon

### Algoritme

1 Importere biblioteket *Numpy*, og modulen *matplotlib.pyplot*.

2 Definere $x$- og $y$-verdier som *NumPy-array*er.

3 Bruke *polyfit()*-funksjonen fra *NumPy*-biblioteket for å finne koeffisienter til polynomisk regresjon. Funksjonen tar følgende parametere (funksjonen tar flere parametere, men vi går bare gjennom de som blir brukt i programmet):

- **xdata:** $x$-verdier i datasettet
- **ydata:** $y$-verdier i datasettet
- **deg:** Graden til funksjonen

Vi velger grad til polynomet lik 1 for å få lineær regresjon. Rekkefølgen for koeffisientene er fra koeffisienter med lavest grad til koeffisienter med høyest grad.

4 Bruke *poly1d()*-funksjonen fra *NumPy*-biblioteket for å lage en polynomisk funksjon. Funksjonen tar koeffisientene som parametere og returnerer en funksjon av grad $n$. Avhengig av antall koeffisienter, får vi andregradsfunksjon, tredjegradsfunksjon, osv.

5 Definere en liste av $x$-verdier ved å kalle *linspace()*-funksjonen. Disse verdiene skal vi bruke som input-verdi til regresjonslikningen for å plotte den.

6 Sette tittel for plottet ved å kalle *title()*-funksjon fra *matplotlib.pyplot*-modulen.

7 Sette label for $x$- og $y$-aksen ved å kalle henholdsvis *xlabel()*- og *ylabel()*-funksjon fra *matplotlib.pyplot*-modulen.

8 Kalle *scatter()*-funksjonen for å sette dataene i koordinatsystemet. *scatter()*-funksjonen tar $x$- og $y$-verdiene (koordinat) som parametere, og setter data som punkter i plottet.

9 kalle *plot()*-funksjonen for å plotte regresjonslinjen. Vi velger også farge til linjen ved å legge til 'r' som parameter i funksjonen. 'r' står for rødfarge.

10 Benytte *show()*-funksjonen for å vise plottet.

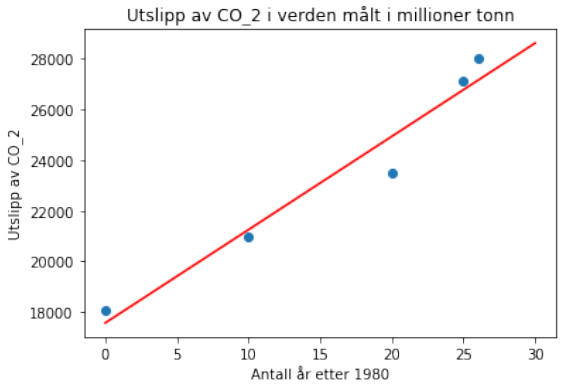
11 Skrive ut funksjonen til regresjonslinjen.

```
'''
program for å finne lineær regresjon for CO_2 utslipp i verden
'''

# importerer biblioteker
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# definerer x-verdier
x = np.array([0, 10, 20, 25, 26])

# definerer y-verdier
y = np.array([18054, 20988, 23509, 27146, 28003])

# polyfit()-funksjonen finner koeffisienter til polynomisk regresjon med grad=1 -> lineær regresjon
koeff = np.polyfit(x, y, 1)

# poly1d()-funksjonen tar koeffisienter og returnerer en n-te gradsfunksjon
U = np.poly1d(koeff)

# lager x-verdier for regresjonsfunksjonen
x_verdier = np.linspace(0, 30, 100)

# setter tittel, x- og y-label
plt.title('Utslipp av CO_2 i verden målt i millioner tonn')
plt.xlabel('Antall år etter 1980')
plt.ylabel('Utslipp av CO_2')

# kaller scatter()-funksjonen for å sette punkter
plt.scatter(x, y)

# kaller plot()-funksjonen for å plotte regresjonsfunksjonen
plt.plot(x_verdier, U(x_verdier), 'r')

# viser plottet
plt.show()

# skrive ut regresjonsfunksjonen
print('U(x)=\n', U)
```

Program 6.9: Programmet finner lineær regresjon for $CO_2$ utslipp i verden.

Output:

```
U(x)=

368.3 x + 1.757e+04
```




Figur 6.3: Figuren viser lineær regresjon for utslipp av $CO_2$ i verden.

Slik vi ser fra grafen 6.3, tilpasser ikke lineær funksjonen dataene.

### Polynomisk regresjon

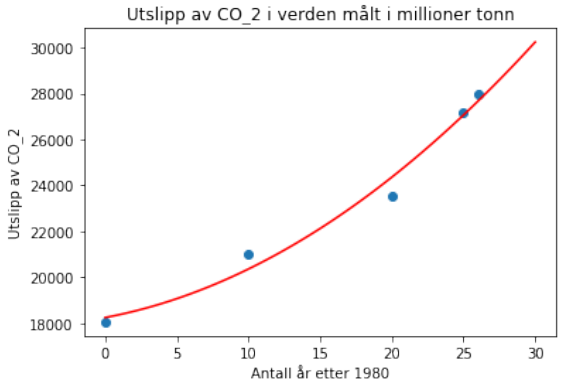
**Algoritme** Vi bruker samme programkode som vi brukte for lineær regresjon for polynomisk regresjon med forskjell at vi endrer graden til polynomet:

```
koeff = np.polyfit(x, y, n=1, 2, 3, ...)
```

Resten av programmet er den samme som for lineær regresjon. Derfor legger vi ikke til koden for de andre polynomiske regresjoner for å unngå gjentakelse, men Det legges til output for å vise resultater ved modelleringen.

Output av programmet for polynomisk regresjon av grad 2:

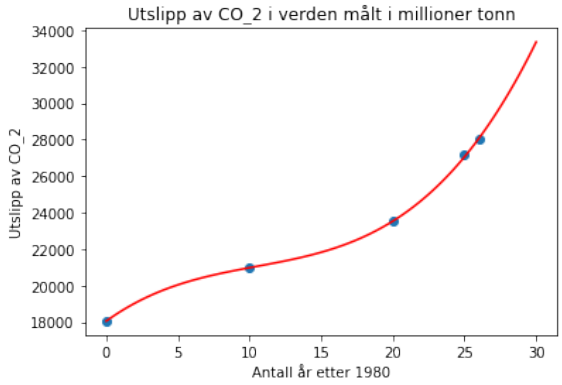
```
U(x)=
        2
9.419 x + 117.4 x + 1.825e+04
```




Figur 6.4: Figuren viser polynomisk regresjon av grad 2 for utslipp av $CO_2$ i verden.

Output av programmet for polynomisk regresjon av grad 3:

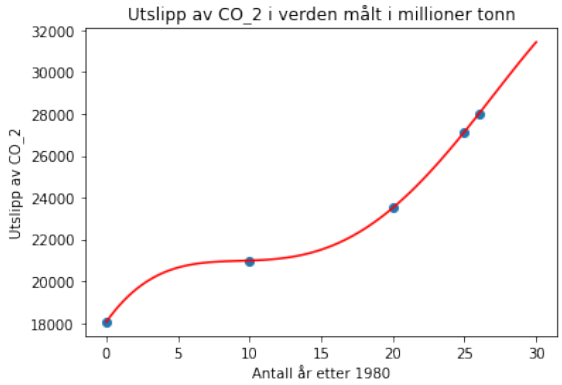
```
U(x)=
         3         2
1.273 x - 40.05 x + 565.8 x + 1.806e+04
```




Figur 6.5: Figuren viser polynomisk regresjon av grad 3 for utslipp av $CO_2$ i verden.

Output av programmet for polynomisk regresjon av grad 4:

```
U(x)=
           4         3          2
-0.07617 x + 5.54 x - 114.9 x + 964.9 x + 1.805e+04
```




Figur 6.6: Figuren viser polynomisk regresjon av grad 4 for utslipp av $CO_2$ i verden.

Vi ser fra figurene 6.4, 6.5, og 6.6 desto økes graden til polynomfunksjonen desto bedre tilpasser regresjonslinjen dataene. Vi kan sjekke dette ved å sette forskjellige $x$-verdier i funksjoner vi fikk ved modelleringen. Etter at vi sjekker dette ser vi at resultatet blir mer og mer nøyaktig mens graden til regresjonsfunksjonen øker. For eksempel gir fjerdegrads funksjonen veldig nære resultater som de opprinnelige tallene:

```
[18054.00000000001, 20988.000000000007, 23509.00000000004,
 27146.00000000008, 28003.000000000073]
```

Noe som vi ser også fra plottet for polynomisk regresjon av grad 4. Vi ser at linjen går gjennom alle punktene, dvs. punkt-dataene ligger (nesten) i funksjonens verdimengde.

Utfra dataene som er gitt i oppgaven, og det som vi ser fra grafene, har utslippet av $CO_2$ hatt en økende tendens. Det vil si det ser ikke ut at landene vil senke utslippet av $CO_2$ i årene fremover.[5]

[5]Det er mulig at denne modellen ikke viser virkeligheten siden dataene ikke dekker årene etter 2006.

# 7 Matematikk R2

### Kompetansemål etter matematikk R2

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- utforske egenskaper ved ulike rekker og gjøre rede for praktiske anvendelser av egenskaper ved rekker
- utforske rekursive sammenhenger ved å bruke programmering og presentere egne framgangsmåter
- utvikle algoritmer for å beregne integraler numerisk, og bruke programmering til å utføre algoritmene
- gi eksempler på ulike situasjoner som kan modelleres ved å bruke ulike matematiske funksjoner, og modellere og analysere slike situasjoner ved å bruke reelle datasett

Kilde

## 7.1 Følger og rekker

Ifølge Bueie (2019, s. 88), *for*-løkker i Python har mye i felles med følger i matematikken, og vi med datastrukturen *liste* kan lage tallfølger på en god måte.

```
en_liste = []  # oppretter en liste
for i in range(0,10,2):   # teller fom 0 tom 10 med steglengde 2
    en_liste.append(i)   # legger tallene i lista

print(en_liste)
```

```
    [0, 2, 4, 6, 8]
```

### 7.1.1 Aritmetiske tallfølger

**Oppgave** Lag en aritmetisk tallfølge i Python.

**Løsning** Vi velger å løse oppgaven ved å ta i bruk formelen II.2 for det $n$-te leddet i en aritmetisk tallfølge. Vi får første leddet $a_1$, siste leddet $a_s$ og steglengde $d$ fra brukeren, og bruker en *while*-løkke hvor vi beregner det $n$-te leddet i hver loop, og legger leddet i en liste. Til slutt skriver vi ut listen.

#### Algoritme

1 Definere en funksjon kalt *aritmetisk_tallfølge()*.

- 1.1 Få startverdi, sluttverdi, steglengde fra brukeren; konvertere input-verdiene til heltall.
- 1.2 Definere en tom liste for lagring av tallfølgen.
- 1.3 Definere en variabel $n$ som representerer indeksen til et ledd i listen; vi setter variabelen lik 1 i starten.
- 1.4 Definere en variabel $a_n$ for ledd nummer $n$; vi setter variabelen lik 0 i starten.
- 1.5 Bruke en *while*-løkke som looper så lenge $a_n$ er mindre enn det siste leddet.
  - 1.5.1 Bruke formelen II.2 for å finne $n$-te ledd i følgen.
  - 1.5.2 Inkrementere indeksen $n$ med 1.
  - 1.5.3 Legge $a_n$ inn i listen ved å bruke *append()*-funksjonen.
- 1.6 Skrive ut listen.

2 Kalle funksjonen *aritmetisk_tallfølge()*.

```
'''
Programmet lager en aritmetisk følge gitt ved intervall og steglengde
'''

def aritmetisk_tallfølge():
    a_1 = int(input('Skriv inn startverdi av tallfølgen: '))   # startverdi i følgen
    a_s = int(input('Skriv inn sluttverdi av tallfølgen: '))    #sluttverdi i følgen
    d = int(input('Skriv inn steglengde: '))    # steglengde

    en_liste = []  # oppretter en liste
    n = 1  # indeks til ledd
    a_n = 0   # n-te ledd i følgen

    while(a_n < a_s): # looper så lenge a_n er mindre enn det siste leddet
        a_n = a_1 + (n - 1) * d  # beregner n-te ledd i følgen
        n += 1 # inkrementerer indeksen med 1
        en_liste.append(a_n)   # legger tallet i lista

    print(en_liste) # skriver ut listen

aritmetisk_tallfølge()
```

Program 7.1: Programmet lager en aritmetisk tallfølge gitt ved intervall og steglengde.

Eksempel output:

```
Skriv inn startverdi av tallfølgen: 1
Skriv inn sluttverdi av tallfølgen: 10
Skriv inn steglengde: 3
[1, 4, 7, 10]
```

### 7.1.2 Aritmetiske rekker

**Oppgave** I følgende rekke øker hvert ledd med 4:

1 5 9 13 17 21 25 29 33 37 41 45 49 53 57 61 65 69 ...

Lag et program som finner summen av de 100 første tallene i rekka.

Oppgaven er hentet fra (ProFag, 2021).

**Løsning** Vi har en aritmetisk rekke der første leddet $a_1$, steglengde $d$ og antall ledd $n$ er kjent. For å finne summen av de 100 første leddene, må vi først finne $a_{100}$ , og så benytte formelen II.5 for summen av de $n$ første leddene i en aritmetisk rekke.

For å finne leddet $a_{100}$, bruker vi formelen II.2. Vi lager derfor en funksjon som finner ledd $a_n$ i en aritmetisk tallfølge, og en annen for å finne summen av de $n$ første leddene i en aritmetisk rekke.

#### Algoritme

1 Definere en funksjon *finn_nte_ledd()* som finner $n$-te ledd i en aritmetisk tallfølge. Funksjonen tar første ledd $a_1$, steglengde $d$, ledd-indeks $n$ som parametere.

1.1 Beregne $a_n$ ved å bruke formelen II.2.

1.2 Returnere $a_n$.

2 Definere *main()*-funksjon som klientprogram; funksjonen finner summen av de $n$ første leddene.

2.1 Få første ledd $a_1$, steglengde $d$, ledd-indeks $n$ som input fra brukeren; konvertere de to første input-verdiene til flyttall, og den siste til heltall.

2.2 Finne $a_n$ ved å kalle *finn_nte_ledd()*-funksjonen.

2.3 Finne summen av rekken ved å bruke formelen II.5.

2.4 Skrive ut resultatet.

3 Kalle *main()*-funksjonen.

```
'''
funksjonen finner n-te ledd i en aritmetisk tallfølge
parametere: første ledd a_1, steglengde d, ledd-indeks n'
return: ledd a_n
'''
def finn_nte_ledd(a_1, d, n):

    # beregner a_n med å bruke formelen for n-te ledd i en aritmetisk følge
    a_n = a_1 + (n - 1) * d

    # returnerer resultatet.
    return a_n

# funksjonen finner summen av n første leddene
def main():

    '''
    får input fra brukeren, og konverterer dem til float
    (metoden forutsetter at brukeren ikke skriver brøk-del tall)
    '''
    a_1 = float(input('Oppgi første leddet i rekken: '))
    d = float(input('Oppgi steglengde: '))
    n = int(input('Oppgi antall ledd: '))


    # finner a_n med å kalle på funksjonen finn_nte_ledd
    a_n = finn_nte_ledd(a_1, d, n)

    # finner summen med å bruke formelen for summen av aritmetiske rekker
    S_n = ((a_1 + a_n) / 2) * n

    # Skriver ut resultatet
    print(f'Summen av {n} første leddene i en aritmetisk rekke er {S_n:.2f}')

main()
```

Program 7.2: Programmet finner summen av de $n$ første leddene i en aritmetisk rekke.

Output:

```
Oppgi første leddet i rekken: 1
Oppgi steglengde: 4
Oppgi antall ledd: 100
Summen av 100 første leddene i en aritmetisk rekke er 19900.00
```

Alternativ løsning lånet fra ProFag (2021): Programmet bruker en *for*-løkke som looper 99 ganger; i hver loop brukes den rekursive formelen for $n$-te ledd i en aritmetisk tallfølge (Se II.1), samtidig som leddene summeres.

```
tall = 1    #definerer tall som 1 fordi rekken starter på 1
sum = 1     #definerer sum som 1 fordi første tall er gitt

for i in range(99):     #kjører 99 ganger
    tall = tall + 4           #legger til 4 på forrige tall-verdi
    sum = sum + tall         #legger til tall-verdi på forrige sum-verdi

print(sum)
```

Output:

```
19900
```

### 7.1.3 Geometriske rekker

**Oppgave** Lag et program som viser at summen av denne rekka er 4.5

$$3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$$

Oppgaven er hentet fra (Haraldsrud mfl., 2020).

**Løsning** Vi ser fra rekken at den er en geometrisk rekke, hvor $a_1 = 3$, $k = \frac{1}{3}$ og $n = 5$. Vi benytter formelen II.6 for å finne ut om summen av rekken er 4.5.

Vi lager en funksjon som tar $a_1$, $k$, og $n$ som parametere, og returnerer summen av rekken. I programmet må vi sørge for at $k$-verdien er forskjellig fra 1, i tilfellet $k = 1$, bruker vi formelen II.7. Dette fikser vi ved å bruke en *if-else*-setning.

#### Algoritme

1 Definere en funksjon *finn_sum()*, funksjonen tar første ledd $a_1$, kvotient $k$, og antall ledd $n$ som parametere.

- 1.1 Definere en variabel $S_n$, og sette den lik 0.
- 1.2 Hvis $k = 1$
  - 1.2.1 benytte formelen II.7 for å beregne summen.
- 1.3 Ellers:
  - 1.3.1 benytte formelen II.6.
- 1.4 Returnere resultatet.

2 Definere en funksjon *main()* som klientprogram.

- 2.1 Be brukeren om å oppgi første ledd $a_1$ i rekken, og konvertere den til flyttall.
- 2.2 Be brukeren om å oppgi kvotient $k$, her må vi sørge for situasjoner brukeren skriver kvotient som brøk. Vi benytter *try-except* for å håndtere *valueError*.
- 2.3 Prøve å

2.3.1 konvertere kvotient-inputen til flyttall.

2.4 Dersom det vil skje *valueError*

2.4.1 splitte strengen med '/', og hente ut telleren og nevneren som separate strenger.

2.4.2 konvertere dem til flyttall, og regne ut kvotient-verdien ved å dele telleren på nevneren.

2.5 Be brukeren om å oppgi antall ledd $n$, og konvertere den til heltall.

2.6 Beregne summen ved å kalle *finn_sum()*-funksjonen.

2.7 Skrive ut resultatet

3 Kalle *main()*-funksjonen.

```
'''
funksjonen finner summen av en geometrisk rekke
parametere: første ledd a_1, kvotient k, antall ledd n
return: summen av rekka
'''
def finn_sum(a_1, k, n):

    # definerer en variabel S_n for å lagre summen i
    S_n = 0

    # sjekker om k=1
    if k == 1:
        # bruker formelen for summen av geometriske rekker når k=1
        S_n = n * a_1

    else:
        # bruker formelen for summen av geometriske rekker når k er forskjellig fra 1
        S_n = a_1 * ((k**n - 1) / (k -1))

    # returnerer resultatet
    return S_n


# funksjonen kaller finn_sum() og løser oppgaven
def main():

    # får a_1 fra brukeren, konverterer input-verdiene til float
    a_1 = float(input('Skriv inn første leddet i rekken: '))

    # får k fra brukeren
    k = input('Skriv inn kvotienten: ')

    # bruker try-except for å sørge for situasjoner input-verdien er et brøk
    try:
        # hvis input-verdien er et heltall/desimaltall
        k = float(k)

    # håndtering av valueError
    except ValueError:

        # splitter kvotient-input delene
        teller, nevner = k.split('/')

        # konverterer hver del til float og deler teller til nevner
        k = float(teller) / float(nevner)

    # får n fra brukeren, konverterer til int
    n = int(input('Skriv inn antall ledd: '))

    # kaller funksjonen finn_sum() og beregner summen
    S_n = finn_sum(a_1, k, n)

    # skriver ut resultatet
    print(f'Summen av de {n} første leddene i rekken er {S_n:.1f}')

main()
```

Program 7.3: Programmet finner summen av en de $n$ første leddene i en geometrisk rekke.

Output:

```
Skriv inn første leddet i rekken: 3
Skriv inn kvotienten: 1/3
Skriv inn antall ledd: 5
Summen av de 5 første leddene i rekken er 4.5
```

## 7.2 Integrasjon

Begrepet integral refereres som regel til summering av uendelige stykker for å finne innholdet i et kontinuerlig område. Prosessen med å beregne en integral kalles integrasjon, og den tilnærmede beregningen av en integral kalles numerisk integrasjon (Weisstein, 2002a).

**Oppgave** Finn en numerisk tilnærming for det bestemte integralet ved hjelp av Rektangelmetoden.

$$\int_2^5 \sqrt{x}\, dx \tag{7.1}$$

**Løsning** Når vi skal løse bestemte integraler numerisk, kan vi regne ut arealet under en funksjonsgraf med utgangspunkt i en funksjon.

Fremgangsmåten for rektangelmetoden er å dele arealet under grafen i flere rektangler, og finne summen av disse rektanglene; desto flere rektangler setter vi inn, desto mer nøyaktig svar får vi. Vi benytter formelen for rektangelmetoden I.6 for å løse oppgaven.

Vi har allerede verdien til $a$ og $b$, det som ikke er oppgitt, er antall rektangler $n$. Denne verdien skal vi få fra brukeren, deretter kan vi regne ut bredden $h$ til rektangler. Lengden for hvert rektangel er lik $f(x_i)$ der $i = 1, 2, 3, \quad ..., n$. Summen av arealet til alle de $n$ rektanglene er det bestemte integralet av $f(x) = \sqrt{x}$ fra $a = 2$ til $b = 5$. Se figur 7.1 som illustrerer bruk av rektangelmetoden med 10 rektangler for å løse integralet.

Alternativt kan vi løse oppgaven ved å bruke *sum()*-funksjonen fra *NnmPy*-biblioteket. Vi løser oppgaven med begge metodene, også legger vi til et plott som viser rektangelmetoden grafisk. [6]

### Algoritme

1 Importere biblioteket *Numpy*, og *matplotlib.pyplot*-modulen.

2 Definere en funksjon $f()$ som returnerer $\sqrt{x}$.

3 Definere en funksjon *rektangelmetoden()*.

- 3.1 Få antall rektangler $n$ fra brukeren; konvertere input-verdien til heltall.
- 3.2 Definere variablene $a$ og $b$ med de gitte verdiene ($a = 2$, $b = 5$).
- 3.3 Definere en variabel $h$ som bredde for hvert rektangel. For dette bruker vi formelen I.5.
- 3.4 Definere en variabel *total_sum* for å lagre resultatet i.
- 3.5 Bruke en *for*-løkke som tar *range()*-funksjonen med $n$ som parameter.
  - 3.5.1 Definere $x$ lik $a + i * h$ der $a$ er startpunktet av intervallet, og $i$ indeksen for $x$.
  - 3.5.2 Beregne areal for hvert rektangel gitt ved lengden $f(x)$ $\times$ bredden $h$. Vi summerer arealene fortløpende mens vi looper gjennom løkken.
- 3.6 Skrive ut resultatet.
- 3.7 Definere og lage en liste for $x$-verdier ved å bruke *linspace()*-funksjonen. Funksjonen tar $a$, $b - h$ og $n$ som parametere. ($b$ er ikke inkludert i listen siden vi beregner venstre Riemann-sum).
- 3.8 Kalle funksjonen *sum()* fra *NumPy*; funksjonen returnerer summen av arealene til alle rektanglene. I vårt tilfelle er arealet lik $f(x\_verdier) * h$.
- 3.9 Skrive ut resultatet.

[6] Løsningsforslaget for denne delen er hentet fra (Walls, 2019b).

3.10 Definere og lage en liste for $y$-verdier; vi kaller *f()*-funksjonen og setter $x$-verdier som parameter for funksjonen.

3.11 Plotte grafen til $f(x)$ ved hjelp av *plot()*-funksjonen. Funksjonen tar $x$- og $y$-verdier som parametere. Det er også mulig å sette farge til grafen ved å skrive farge som streng som parameter.

3.12 Lage liste over venstre $x$- og $y$-verdier; for eksempel lager vi listen for venstre $x$-verdier med følgende syntaks:

```
x_venstre = x_verdier[:-1]
```

3.13 Sette tittel for plottet ved å kalle *title()*-funksjonen fra *pyplot*.

3.14 Sette label for $x$- og $y$-aksen ved å kalle henholdsvis *xlabel()*- og *ylabel()*-funksjonen.

3.15 Kalle *bar()*-funksjonen fra *Pyplot* for å plotte rektangler; funksjonen tar følgende parametere (Hunter mfl., 2021c):

- **x:** $x$-verdier
- **height:** $y$-verdier
- **width:** $h$, bredde for rektangler
- **alpha:** bestemmer gjennomsiktighets graden
- **align:** justerer stolpene, standard er 'center', med 'edge' tar vi venstre kant på stolpene
- **edgecolor:** farge til kantene

3.16 Vise plottet ved å kalle *show()*-funksjonen.

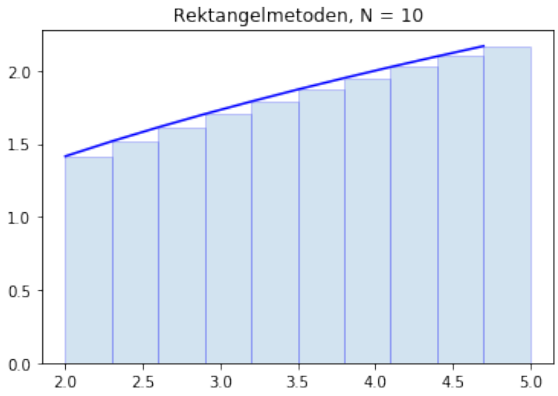
4 Kalle *rektangelmetoden()*.

```
'''
Programmet implementerer Rektangelmetoden (venstre Riemann-sum)
og løser funksjonen f(x) vha. metoden
'''

# importerer biblioteker
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# funksjon som skal integreres
def f(x):
    return np.sqrt(x)

# definerer funksjonen for rektangelmetoden
def rektangelmetoden():
    n = int(input('Skriv inn antall rektangler: ')) # får verdien for antall rektangler

    # setter opp innstillinger
    a = 2                       # startverdi
    b = 5                       # sluttverdi
    h = (b - a)/n               # bredde
    total_sum = 0               # variabel for å lagre total summen

    for i in range(n): # vi looper gjennom løkken fra 0 til n
        x = a + i * h  # verdien av x_i er lik startverdi + i * bredde

        # areal av en rektangel er lik lengde * bredde her f(x_i) = lengde for i-te rektangelet
        areal = f(x) * h

        # summerer areal for hver rektangel inn i variabelen total_sum
        total_sum += areal

    # skriver ut resultatet
    print(f'Numerisk verdi av integralet (beregnet av egendefinert funksjon) er lik {total_sum:.3f}')

    '''
    Alternativ metode samt tegning av grafen:

    Vi lager et sett av x- og y-verdier, disse verdiene brukes for både tegning av grafen og beregning av summen
    x_verdier lager vi ved å kalle linspace()-funksjonen;
    b er ikke inkludert i x-verdier siden vi beregner venstre Riemann-sum
    '''
    x_verdier = np.linspace(a,b-h,n)
    '''
    kaller funksjonen sum() fra NumPy, funksjonen returnerer summen av arealene til alle rektangler
    her  f(x_verdier) * h = arealet til rektangler
    '''
    venstre_riemann_sum = np.sum(f(x_verdier) * h)

    # skriver ut summen
    print(f'Numerisk verdi av integralet (beregnet av sum()-funksjonen fra NumPy) er lik {total_sum:.3f}')

    y_verdier = f(x_verdier)  # lager en liste av y-verdier
    plt.plot(x_verdier,y_verdier, 'blue')  # tegner grafen til f

    # lager liste over venstre x- og y-verdier
    x_venstre = x_verdier[:-1]
    y_venstre = y_verdier[:-1]

    # setter tittel for grafen, format()-funksjonen benyttes for å skrive ut n-verdien på grafen
    plt.title('Rektangelmetoden, N = {}'.format(n))

    # setter label for x- og y-aksen
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    '''
    bar-funksjonen tar følgende parametere:
    matplotlib.pyplot.bar(x, height, width=0.8, bottom=None, *, align='center', data=None, **kwargs)[source]
    x = x-verdier
    height = y_verdier
    width = h
    alpha = bestemmer gjennomsiktighetsgraden
    align = justerer stolpene, standard er 'center'. med 'edge' tar vi venstre kant på stolpene etter x-verdier
    edgecolor = farge til kantene
    '''
    plt.bar(x_verdier,y_verdier, h, alpha=0.2, align='edge',edgecolor='blue')
    plt.show()  # viser plottet

rektangelmetoden()
```

Program 7.4: Programmet implementerer Rektangelmetoden (venstre Riemann-sum).

Output:

```
Skriv inn antall rektangler: 10
Numerisk verdi av integralet (beregnet av egendefinert funksjon) er lik 5.444
Numerisk verdi av integralet (beregnet av sum()-funksjonen fra NumPy) er lik 5.444
```




Figur 7.1: Illustrasjon for bruk av rektangelmetoden for å løse integralet 7.1.

## 7.3 Differensiallikninger

"En differensialligning er en ligning som relaterer derivatene til en ukjent funksjon, selve funksjonen, variablene som funksjonen defineres med, og konstanter. Hvis den ukjente funksjonen avhenger av en enkelt reell variabel, kalles differensiallikningen en ordinær differensialligning"(Farlow, 2006, s. 10). En av de mest velkjente differensiallikninger er Bernoulli likning:

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2 \tag{7.2}$$

Her kalles den ukjente størrelsen $y = y(x)$ den avhengige variabelen, og den reelle variabelen $x$, kalles den uavhengige variabelen (Farlow, 2006).

Løsninger av differensiallikninger kan sees som modeller som beskriver forskjellige fenomener som en funksjon (ofte som en funksjon av tid). "Å sette opp og løse differensiallikninger kalles derfor også for å *modellere*"(Kristensen & Aanensen, 2018b).

Differensiallikninger er brukelig overalt innen vitenskap og samfunnsliv hvor vi har behov for å finne modeller som beskriver sammenheng mellom størrelser. Derfor regnes differensiallikninger som et av viktigste områdene innenfor matematikkfaget (Kristensen & Aanensen, 2018b).

"En løsning av en $n$-ordens differensialligning er en $n$ ganger differensierbar funksjon $y = y(x)$, som, når den substitueres i ligningen, tilfredsstiller den identisk over et intervall $a < x < b$, vil vi si at funksjonen $y$ er en løsning av differensiallikningen over intervallet $a < x < b$"(Farlow, 2006, s. 15).

### 7.3.1 Første ordens differensiallikninger

En første ordens differensiallikning har generell form som:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t) \tag{7.3}$$

hvor $dy/dt$ er endringer i $y$ med hensyn til tid $t$, og $f(y,t)$ er en hvilken som helst funksjon av $y$ og $t$.

Vi tar for oss en av de enkleste former for differensiallikninger for å vise hvordan vi kan løse en første ordens differensiallikning analytisk:

$$\frac{dy}{dt} = -y$$

Vi begynner med å omorganisere ligningen:

$$\frac{dy}{y} = -dt$$

Med å løse en differensiallikning, mener vi å finne et uttrykk for $y(t)$. Vi integrerer begge sider og får:

$$ln(y) = -t + C$$

tar eksponential av begge sider for å finne et uttrykk for $y$:

$$e^{ln(y)} = e^{-t+C}$$

og får:

$$y = Ce^{-t}$$

Hvis vi har en initialverdi for $y$, kan vi finne en verdi for $C$ også (Storey, udatert).

### 7.3.2 Andre ordens differensiallikninger

Det enkleste eksempelet av et andre ordens differensiallikning er et lodd med masse $m$ som henger i en fjær hvor tyngdekraften $mg$ er normal til bevegelses retningen.

Hvis vi trekker loddet nedover og slipper det, vil loddet svinge opp og ned om likevektsstillingen. Ifølge Newtons andre lov er likningen for systemet gitt ved:

$$F = ma \tag{7.4}$$

hvor $F$ er kraften (fjærkraften) som virker på masse $m$ og $a$ er akselerasjon. Fjærkraften, kraften

på loddet fra fjæren, er proporsjonal med lengden og er gitt ved:

$$F = -kx \tag{7.5}$$

Her $k$ er fjærkonstanten og $x$ er forskyvningen til fjæren fra likevektsstillingen. Vi erstatter $F$ med formelen for fjærkraften og får:

$$ma = -kx \tag{7.6}$$

Vi vet at akselerasjon er den andre deriverte av posisjon $\frac{d^2x}{dt^2}$, så vi vil ha en andre ordens differensiallikning som følger:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \iff \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-k}{m}x \tag{7.7}$$

Vi kan løse differensiallikningen analytisk ved å finne røtter til den karakteristiske likningen. Avhengig av hvor mange røtter vi får, vil den generelle løsningen for differensiallikningen være annerledes.

### 7.3.3 Built-in funksjoner i Python

I Python kan vi løse differensiallikninger numerisk ved hjelp av *ODEINT()*-funksjonen fra *scipy.integrate*-modulen.

*ODEINT()*-funksjonen tar flere parametere, men her tar vi de tre første parameterne som brukes oftest for å løse en differensiallikning:

```
scipy.integrate.odeint(func, y0, t)
```

- **func:** Funksjonen som returnerer verdier basert på $y$ ved tiden $t$.
- **y0:** Initialtilstand for $y$, kan også være en vektor av initialverdier.
- **t:** En rekke av tidspunkter som skal løses for $y$. Startpunktet bør være det første elementet i listen. Sekvensen må være monotont økende eller monotont synkende; gjentatte verdier er tillatt (The-SciPy-community, 2021a).

**Oppgave** En vannbeholder inneholder 6000 liter væske. Vi åpner en kran slik at 30 liter væske renner ut per minutt. La $y$ være den mengde væske som til enhver tid er igjen på tanken. Vi åpner kranen ved $t = 0$. Væsken renner ut med en konstant mengde på 30 liter per minutt, dvs.:

$$\frac{dy}{dt} = -30$$

Ved $t = 0$ var væskemengden 6000 L. Løs differensiallikningen, og beregn når tanken går tom.

Oppgaven er hentet fra (Kristensen & Aanensen, 2018b).

**Løsning** Vi bruker *ODEINT()*-funksjonen for å løse differensiallikningen, og så finner vi likningen $y(t)$ og setter den lik 0 for å finne ut når tanken går tom. Vi kan også plotte funksjonen og se fra grafen når tanken går tom.

**Algoritme**

1 Importere biblioteket *Numpy*, modulen *matplotlib.pyplot*, og funksjoner *odeint()* og *solve()* fra henholdsvis *scipy.integrate*-modulen og *SymPy*-biblioteket.

2 Definere en funksjon *f()*; funksjonen tar $y$ og $t$ som parametere.

2.1 Returnerer en funksjon på formen $dy/dt = f(y, t)$.

3 Definere initialverdien for $y$ ved tiden $t = 0$.

4 Definere en liste av tidspunkter ($t$-verdier); vi velger et intervall fra 0 til 200, med 10 punkter. Disse verdiene kan variere.

5 Løse differensiallikningen ved hjelp av *odeint()*-funksjonen; funksjonen tar funksjonen $f()$, initialverdi $y_0$, og tidsverdiene som parametere, og returnerer en liste av $y$-verdier.

6 Kalle funksjonen *polyfit()* fra *NumPy*-biblioteket for å finne koeffisientene til likningen $y(t)$. Vi velger her en polynomfunksjon av grad 1.

7 Bruke *poly1d()*-funksjonen fra *NumPy*-biblioteket for å få likningen $y(t)$. Funksjonen tar koeffisienter og variabel (til funksjonen) som parametere, og returnerer en $n$-te gradslikning.

8 Skrive ut likningen $y(t)$

9 Finne ut når tanken går tom, ved å benytte *solve()*-funksjonen fra *SymPy*-biblioteket. Funksjonen tar likning og variabel som parametere, og returnerer resultatet; skrive ut resultatet.

10 Plotte funksjonen ved å bruke *plot()*-funksjonen. Funksjonen tar $t$-verdier og $y$-verdier som parametere.

11 Sette label for $x$- og $y$-aksen ved å kalle henholdsvis *xlabel*- og *ylabel*-funksjonen.

12 Vise plottet ved å kalle *show()*-funksjonen.

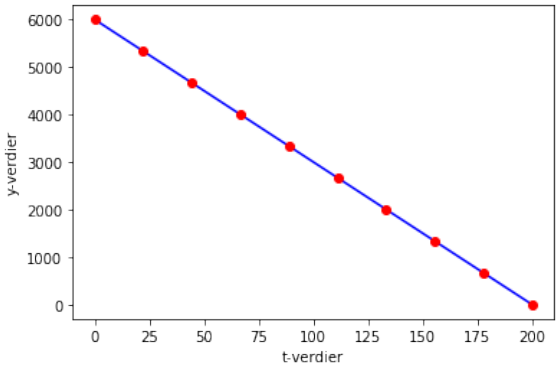
```
'''
Programmet løser første ordens differensiallikningen f(y, t)
'''

# importerer biblioteker
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np
from sympy import solve

# definerer funksjonen dy/dt=f(y, t), og returnerer den
def f(y, t):
    dydt = -30
    return dydt

# definerer initialverdi for y -> y(0)
y0 = 6000

# definerer t-verdier fra 0 til 200, antall punkter 10
t_verdier = np.linspace(0, 200, 10)

'''
løser differensiallikningen ved å kalle på odeint()-funksjonen
parametere: funksjonen f(y, t), initialverdi y0, 10 input-verdier(t-verdier)
returnerer y-verdier (for de 10 tidspunktene vi passerte som parameter)
'''
y_t = odeint(f, y0, t_verdier)

'''
finner koeffisienter til en funksjon som passer y-verdier (velger polynom av grad 1)
koeffisientene er en nx1 matrise avhengig av polynomgraden
'''
koeff = np.polyfit(t_verdier, y_t, 1)

'''
finner funksjonen y(t) ved å kalle på poly1d()-funksjonen
parametere: koeffisienter, variabel
returnerer funksjonen y(t)
'''
y = np.poly1d(koeff[:,0], variable='t')

# skriver ut funksjonen
print('y(t)=\n', y)

# setter y(t)=0, og finner t
print('\ny(t) = 0 -> t = ', solve(-30*t + 6000, t))

# første linjen plotter funksjonen i blå, andre linje plotter punkter for y-verdier i rød
plt.plot(t_verdier, y_t, '-b')
plt.plot(t_verdier, y_t, 'ro')

# setter label for x- og y-aksen
plt.xlabel('t-verdier')
plt.ylabel('y-verdier')

# viser plottet
plt.show()
```

Program 7.5: Programmet løser første ordens differensiallikningen $f(y,t)$.

Output:

```
y(t)=

-30 t + 6000
```

```
y(t) = 0 -> t =  [200]
```




Figur 7.2: Grafen viser at tanken er tom etter 200 minutter.

Vi ser både fra output av programmet og grafen 7.2 at vannbeholderen vil gå tom etter 200 minutter.

For å løse andre ordens differensiallikninger med *odeint()*-funksjonen, må vi først konvertere den til et system med første ordens differensialligninger.

**Oppgave** En vannbeholder inneholder 6000 liter væske. La $y(t)$ være den mengde væske som til enhver tid $t$ (i timer) er igjen på tanken. Vi åpner kran slik at differensiallikningen som modellerer det fenomenet er gitt ved:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -10, \quad y(0) = 6000, \quad y'(0) = 0$$

Løs differensialligningen, og beregn når tanken går tom.

Oppgaven er hentet fra (≪MAT20x Vår 2021≫, 2021).

**Løsning** Vi har
$y''(t) = -10$
setter
$y'(t) = u(t)$
$u'(t) = -10$

da har vi laget et system av likninger. Nå kan vi løse dette systemet i Python.

**Algoritme**

1 Importere biblioteket *Numpy*, modulen *matplotlib.pyplot*, og funksjoner *odeint()* og *Table()* fra henholdsvis *scipy.integrate*- og *astropy.table*-modulen.

2 Definere funksjonen $f(u, t)$ der $u$ er en to-dimensjonal liste (en liste av lister) av likninger; funksjonen tar altså $u$ og $t$ som parametere.

2.1 Returnere en funksjon på formen $dy/dt = f(u, t)$.

3 Definere initialverdier som en liste der den første verdien er initialverdien for $y$, og den andre verdien er initialverdien for $y'$.

4 Definere tidsverdier fra 0 til 35 med 700 punkter ved å kalle *linspace()*-funksjonen; disse verdiene kan variere.

5 Løse differensiallikningen ved å kalle *odeint()*-funksjonen, funksjonen tar funksjonen $f(u, t)$, initialverdi $y_0$, og $t$-verdier som parametere, og returnerer $u$-verdier (en liste av lister hvor hver av de listene har $y(t)$ og $y'(t)$ som elementer).

6 Definere en variabel for $y(t)$-verdier, og sette den lik første verdien i hver liste i $u_t$-listen.

7 Plotte $y$-verdier mot $t$-verdier ved hjelp av *plot()*-funksjonen.

8 Sette label for $x$- og $y$-aksen ved å kalle henholdsvis *xlabel()*- og *ylabel()*-funksjonen.

9 Vise plottet ved å kalle *show()*-funksjonen.

10 Sette $y$- og $t$-verdier i en tabell for å finne ut når tanken går tom. Vi benytter funksjonen *Table()* fra *astropy.table*-modulen. Funksjonen tar tidsverdier, $y$-verdier og navn for hver kolonne som parametere, og returnerer tabellen; Vi avrunder verdier til to desimaler.

11 Skrive ut tabellen.

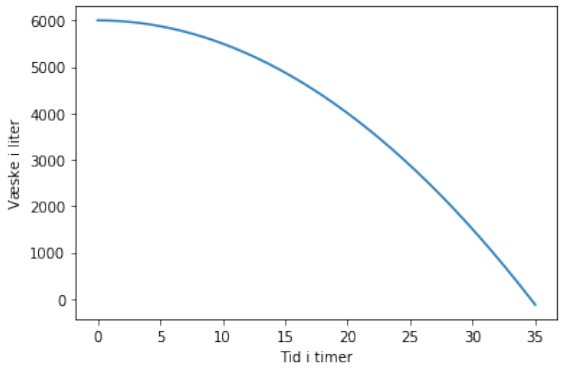
```
'''
Programmet løser andre ordens differensiallikningen f(u, t)
'''

# importerer biblioteker
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np
from astropy.table import Table

'''
definerer funksjonen f(u, t) der u er en to-dimensjonal liste (en liste av lister)
som består av u(t) og u'(t), vi laget følgende systemet:
y''(t)=-10
y'(t)=u(t)
u'(t)=-10
'''
def f(u, t):
    dydt = (u[1], -10)
    return dydt

# definerer initialverdier som en liste; y(0)=6000, y'(0)=0
y0 = [6000, 0]

# definerer t-verdier fra 0 til 35, antall punkter 700
t_verdier = np.linspace(0, 35, 700)

'''
løser differensiallikningen ved å kalle på odeint()-funksjonen
parametere: funksjonen f(u, t), initialverdi y0, t-verdier
returnerer u-verdier
'''
u_t = odeint(f, y0, t_verdier)

# løsningen y(t) er lik den første verdien fra hver liste
y_t = u_t[:,0]

# plotter y-verdier mot t-verdier
plt.plot(t_verdier, y_t)

# setter label for x- og y-aksen
plt.xlabel('Tid i timer')
plt.ylabel('Væske i liter')

# viser plottet
plt.show()

# setter verdier i en tabell for å finne ut når tanken blir tom
tabell = Table([np.round(t_verdier, decimals=2), np.round(y_t, decimals=2)],
names=('Tid i timer', 'Væske i liter'))

# skriver ut tabellen
print(tabell)
```

Program 7.6: Programmet løser andre ordens differensiallikningen $f(u,t)$.

Output:

```
Tid i timer Væske i liter
----------- -------------
        0.0        6000.0
       0.05       5999.99
        0.1       5999.95
       0.15       5999.89
        0.2        5999.8
       0.25       5999.69
        0.3       5999.55
```

```
 0.35      5999.39
  0.4       5999.2
 0.45      5998.98
  ...          ...
 34.5         49.0
34.55        31.71
 34.6         14.4
34.65        -2.94
 34.7        -20.3
34.75       -37.69
 34.8        -55.1
34.85       -72.54
 34.9        -90.0
34.95      -107.49
 35.0       -125.0
```




Figur 7.3: Grafen viser at tanken vil gå tom etter omtrent 34.60 timer.

Vi ser både fra tabellen og fra grafen 7.3 at tanken vil gå tom etter omtrent 34.60 timer. Vi har altså funnet en tilnærmet løsning for differensiallikningen.

### 7.3.4 Eulers metode

Vi bruker Eulers metode for å finne en tilnærmet løsning for en første ordens differensiallikning. Metoden kan brukes for differensiallikninger av høyere orden også, men vi må først omforme likningen til et system består av første ordens likninger. Generelt kan en differensiallikning av orden $n$ gjøres om til $n$ likninger av orden 1.

Vurder en første ordens differensialligning med en initialtilstand:

$$y' = f(y,t) \ , \quad y(t_0) = y_0 \tag{7.8}$$

Eulers metode tar utgangspunkt i en startverdi $y_n$, og finner en tilnærmet verdi for $y_{n+1}$:

$$y_{n+1} = y_n + f(y_n, t_n)(t_{n+1} - t_n) \tag{7.9}$$

Vi bruker denne formelen for å implementere en funksjon *Eulers_metode()* i Python. Funksjonen tar en differensiallikning $f(y,t)$, $y_0$, og $t$-verdier som parametere, og returnerer en liste av $y$-verdier. De verdiene er som sagt tilnærminger til den eksakte løsningen. Programkoden for implementasjon av Eulers metode er lånet fra Walls (2019a).

I delkapittelet om første ordens differensiallikninger så vi på likningen

$$\frac{dy}{dt} = -y$$

Likningen hadde en generell løsning lik

$$y = Ce^{-t}$$

Hvis vi setter en initialverdi $y(0) = 1$, får vi:

$$f(y,t) = e^{-t}$$

La løse differensiallikningen numerisk ved å bruke Eulers metode.

### Algoritme for Eulers metode

1 Definere en funksjon *Eulers_metode()*; metoden tar en funksjon $f()$, initialverdi $y_0$ og $t$-verdier som parametere.

1.1 Definere en liste (matrise) for å lagre $y$-verdier, ved å kalle *zeros()*-funksjonen fra *NumPy*-biblioteket. Funksjonen tar et heltall $n$ (eller en *tuple* $[n, n]$) som parameter og returnerer en $n \times n$ matrise. Her setter vi $n$ lik lengden for $t$-verdier.

1.2 Sette initialverdien $y_0$ lik startverdi i listen for $y$-verdier (på indeks 0).

1.3 Bruke en *for*-løkke som looper fra 0 til (lengde til t-verdier)-1; siden vi starter fra 0, trekker vi 1 fra lengden til $t$-verdi-listen.

1.3.1 Bruke formelen 7.9, og finne $y_{n+1}$.

1.4 Returnere $y$.

```
'''
Programmet implementerer Eulers metoden (lånet fra github-siden til Patrick Walls)
parametere: funksjon f(y, t), initialverdi y0, tidsverdier
returnerer en liste av y-verdier
'''
def Eulers_metode(f, y0, t):

    '''
    lager en matrise (liste) for y-verdier;
    alle verdiene er lik 0;
    lengden på listen er lik lengden for t-verdier
    '''
    y = np.zeros(len(t))

    # setter initialverdien y0 lik startverdi i listen (på indeks 0)
    y[0] = y0

    # looper fra 0 til (lengde til t-verdier)-1 (siden vi starter fra 0)
    for n in range(0, len(t)-1):

        # finner y_n+1 i hver loop med hjelp av formelen for Eulers metode
        y[n+1] = y[n] + f(y[n], t[n]) * (t[n+1] - t[n])
    return y
```

Program 7.7: Programmet implementerer Eulers metode.

**Algoritme for eksempel bruk av Eulers metode**

1 Importere biblioteket *Numpy*, og modulen *pyplot*.

2 Definere en funksjon $f(y, t)$ som returnerer funksjonen $\frac{dy}{dt} = -y$.

3 Definere en liste for $t$-verdier ved å kalle *linspace()*-funksjonen fra *Numpy*-biblioteket. Vi velger et tidsintervall fra 0 til 10, med 20 punkter.

4 Definere initialverdi $y_0$, og sette den lik 1.

5 Beregne tilnærmede $y$-verdier ved å kalle *Eulers_metode()*-funksjonen. Vi lagrer disse i en variabel kalt *y_approx*.

6 Beregne eksakte $y$-verdier ved å mate den eksakte løsningen $f(y, t) = e^{-t}$ med $t$-verdier. Vi lagrer disse i en variabel kalt *y_eksakt*.

7 Sette tittel for plottet ved å kalle *title()*-funksjonen fra *pyplot*.

8 Sette label for $x$- og $y$-aksen ved å kalle henholdsvis *xlabel()*- og *ylabel()*-funksjonen.

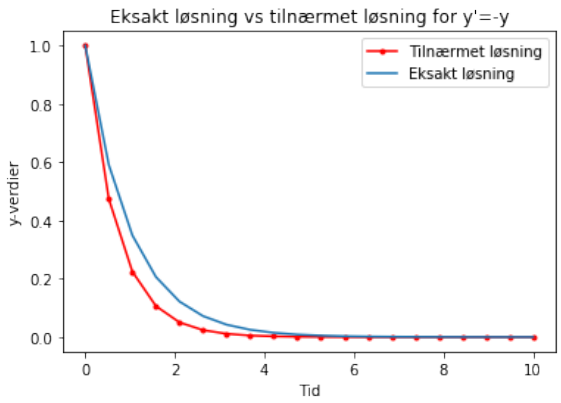
9 Plotte grafen for den eksakte løsningen mot den tilnærmede løsningen, for dette bruker vi *plot()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot*-modulen.

10 Sette label for grafene ved å kalle *legend()*-funksjonen; funksjonen tar en liste av strenger som parameter.

11 Vise plottet ved hjelp av *show()*-funksjonen.

```
'''
Programmet finner tilnærmet løsning for y'=-y vha. Eulers metode
'''

# importerer biblioteker
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# definerer en funksjon f(y, t) som returnerer vår funksjon
def f(y, t):
    dydt = -y
    return dydt

# lager en liste for t-verdier
t_verdier = np.linspace(0, 10, 20)

# initialverdi for y
y0 = 1

# kaller Eulers_metode() for å finne tilnærmede y-verdier
y_approx = Eulers_metode(f, y0, t_verdier)

# lager en liste av eksakte y-verdier
y_eksakt = np.exp(-t_verdier)

# setter tittel, og label for x- og y-aksen
plt.title("Eksakt løsning vs tilnærmet løsning for y'=-y")
plt.xlabel('Tid')
plt.ylabel('y-verdier')

# plotter grafen for den eksakte løsningen mot den tilnærmede løsningen
plt.plot(t_verdier, y_approx, 'r.-', t_verdier, y_eksakt)

# setter label for grafer
plt.legend(['Tilnærmet løsning','Eksakt løsning'])

# viser plottet
plt.show()
```

Program 7.8: Programmet finner tilnærmet løsning for $y' = -y$ vha. Eulers metode.




Figur 7.4: Figuren illustrerer eksakt løsning vs. tilnærmet løsning for likningen $y' = -y$.

Grafen 7.4 viser at Eulers metode har avvik fra den eksakte løsningen på tidspunkter fra 0 til 5, men etter på blir tilnærmingene veldig nære til de eksakte verdier.

Hvis vi velger steglengde for $t$-verdier så liten som mulig, vil feilen bli mindre.

## 7.4 Funksjoner og modellering

**Oppgave** I denne oppgaven skal vi modellere populasjonen til rein. Vi vet at:

- Vi har en reinstamme med 300 dyr.
- Bæreevnen er 200 dyr.
- Naturlig vekst er 10% per år.
- Vekstfarten er gitt ved:

$$y' = 0.10y * (1 - \frac{y}{200}) \tag{7.10}$$

Lag en graf som viser utviklingen til reinpopulasjonen de første 20 årene. Finn ut når tallet på rein er ca. 250, kommenter hva du ser.

Oppgaven er hentet fra (ProFag, 2021).

**Løsning** Ved tidspunkt $t = 0$ har vi 300 dyr, altså $y_0 = 300$. Oppgaven er å vise utviklingen for de 20 første årene, dvs. vi skal vise utviklingen på tidsintervallet $[0, 20]$. Vi bruker *linspace()*-funksjonen for å lage en liste for tidsverdier, vi setter startpunkt lik 0 og sluttpunkt lik 20 med 20 punkter.

Vi løser oppgaven både ved å bruke *odeint()*-funksjonen og ved å bruke *Eulers_metode()*-funksjonen fra forrige kapittelet om differensiallikninger. Så sammenligner vi svarene vi får fra de to metodene. Vi plotter også grafer til begge metodene.

### Algoritme

1 Importere biblioteket *Numpy*, modulen *matplotlib.pyplot*, og funksjoner *solve()*, *odeint()*, og *Table()* fra henholdsvis *sympy*-biblioteket, og *scipy.integrate*- og *astropy.table*-modulen.

2 Definere en funksjon $f(y, t)$ som returnerer funksjonen 7.10.

3 Lage en liste for tidsverdier ved å kalle *linspace()*-funksjonen; funksjonen tar startverdi, sluttverdi og antall punkter som parametere.

4 Definere en variabel $y_0$, og sette den lik 300.

5 kalle *Eulers_metode()* for å finne tilnærmede $y$-verdier, funksjonen tar $f$, $y_0$ og $t$-verdier som parametere.

6 Kalle *odeint()*-funksjonen for å finne eksakte $y$-verdier; funksjonen tar $f$, $y_0$ og $t$-verdier som parametere.

7 Finne koeffisienter til funksjonen som passer $y$-verdier ved å kalle *polyfit()*-funksjonen fra *NumPy*-biblioteket. Funksjonen tar $x$- og $y$-verdier, og polynomgraden som parametere. Vi velger polynomgraden lik 2.

8 Finne funksjonen $y(t)$ ved å kalle *poly1d()*-funksjonen; funksjonen tar koeffisientene og variabelen $t$ som parametere, og returnerer funksjonen $y(t)$. Syntaksen er som følger:

```
poly1d(koeff[:,0], variable='t')
```

9 Skrive ut funksjonen $y(t)$.

10 Sette størrelse for plottet ved å kalle *figure()*-funksjonen fra *pyplot*. Vi definerer figurstørrelse som parameter til funksjonen:

```
figure(figsize=(x,y))
```

11 Sette tittel for plottet ved å kalle *title()*-funksjonen fra *pyplot*.

12 Sette label for $x$- og $y$-aksen ved å kalle henholdsvis *xlabel()*- og *ylabel()*-funksjonen.

13 Plotte grafen for den eksakte løsningen mot den tilnærmede løsningen ved å kalle *plot()*-funksjonen.

Vi kan sette label for grafen også. Syntaksen kan se ut som følger:

```
plot(x, y,'r.-', label='label')
```

14 Plotte linjen for $y = 250$, denne linjen vil hjelpe oss for å finne når reinpopulasjonen er lik 250. For å plotte horisontal linje benytter vi funksjonen *xhline()* fra *pyplot*-modulen. Vi setter $y$-verdi, farge og label til grafen som parametere. Det er også mulig å definere intervall for grafen (Hunter mfl., 2021b):

```
axhline(y=0, xmin=0, xmax=1, **kwargs)
```

15 Sette label for grafer ved å kalle *legend()*-funksjonen.

16 Sette rutenett for plottet ved å kalle *grid()*-funksjonen.

17 Vise plottet ved å kalle *show()*-funksjonen.

18 Sette verdier i en tabell for å finne ut når reinpopulasjonen er 250. For dette kaller vi funksjonen *Tabell()*; funksjonen tar flere parametere (Astropy-Developers, 2021):

```
Table(data=None, masked=False, names=None, dtype=None, meta=
    None, copy=True, rows=None, copy_indices=True, units=None,
    descriptions=None, **kwargs)
```

Som data setter vi inn tidsverdier, og eksakte og tilnærmede verdier. På grunn av verdier har flere desimaler, avrunder vi verdiene ved å kalle *round()*-funksjonen fra *Numpy* siden vi har Numpy-arrayer. Vi setter også navn til hver kolonne som parameter. Syntaksen kan se slik ut:

```
Table([np.round(t_verdier, decimals=0), np.round(y_eksakt,
    decimals=0), np.round(y_approx, decimals=0)],names=(' Aar',
    'Eksakt verdi','Tilnaermet verdi'))
```

19 Skrive ut tabellen.

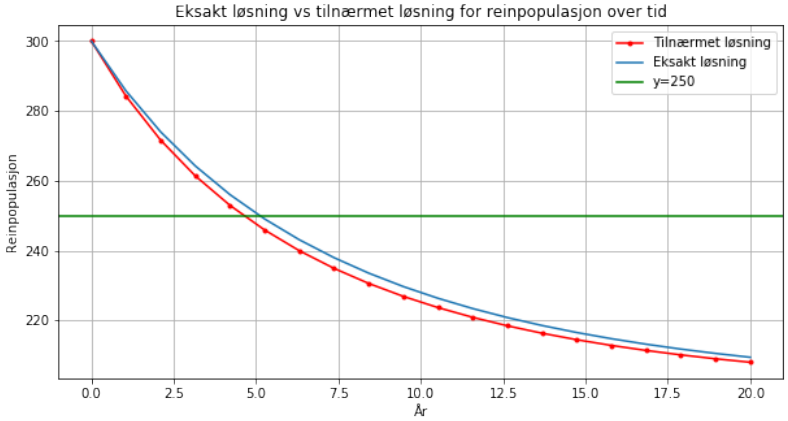
```
'''
programmet finner utviklingen av reinpopulasjon over tid
'''

# importerer biblioteker
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
from sympy import solve
import matplotlib.pyplot as plt
from astropy.table import Table

# definerer en funksjon f(y, t) som returnerer vår funksjon
def f(y, t):
    dydt = 0.10*y * (1-y/200)
    return dydt

# lager en liste for t-verdier
t_verdier = np.linspace(0, 20, 20)

# initialverdi for y
y0 = 300

# kaller Eulers_metode() for å finne tilnærmede y-verdier
y_approx = Eulers_metode(f, y0, t_verdier)

'''
løser differensiallikningen ved å kalle på odeint()-funksjonen
parametere: funksjonen f(y, t), initialverdi y0, t_veridier
returnerer en liste av y-verdier (eksakt løsning)
'''
y_eksakt = odeint(f, y0, t_verdier)

'''
finner koeffisienter til en funksjon som passer y-verdier (velger polynom av grad 2)
koeffisientene er en nx1 matrise avhengig av polynomgraden
'''
koeff = np.polyfit(t_verdier, y_eksakt, 2)

'''
finner funksjonen y(t) ved å kalle på poly1d()-funksjonen
parametere: koeffisienter, variabel
returnerer funksjonen y(t)
'''
y = np.poly1d(koeff[:,0], variable='t')

# skriver ut funksjonen
print('y(t)=\n', y)

# setter størrelse for plottet
plt.figure(figsize=(10,5))

# setter tittel, og label for x- og y-aksen
plt.title("Eksakt løsning vs tilnærmet løsning for reinpopulasjon over tid")
plt.xlabel('År')
plt.ylabel('Reinpopulasjon')

# plotter grafen for den eksakte løsningen mot den tilnærmede løsningen
plt.plot(t_verdier, y_approx, 'r.-', label='Tilnærmet løsning')
plt.plot(t_verdier, y_eksakt, '-', label='Eksakt løsning')
plt.axhline(250, color='green', label='y=250')

# setter label for grafer
plt.legend()

# setter rutenett
plt.grid()

# viser plottet
plt.show()

# setter verdier i en tabell for å finne ut når reinpopulasjonen er 250
tabell = Table([np.round(t_verdier, decimals=0), np.round(y_eksakt, decimals=0), np.round(y_approx, decimals=0)],
               names=('År', 'Eksakt verdi', 'Tilnærmet verdi'))

# skriver ut tabellen
print(tabell)
```

Program 7.9: Programmet finner utviklingen av reinpopulasjon over tid.

Output:

```
y(t)=
          2
0.2624 t - 9.271 t + 293.7
```

| År | Eksakt verdi | Tilnærmet verdi |
|---|---|---|
| 0.0 | 300.0 | 300.0 |
| 1.0 | 286.0 | 284.0 |
| 2.0 | 274.0 | 272.0 |
| 3.0 | 264.0 | 261.0 |
| 4.0 | 256.0 | 253.0 |
| 5.0 | 249.0 | 246.0 |
| 6.0 | 243.0 | 240.0 |
| 7.0 | 238.0 | 235.0 |
| 8.0 | 234.0 | 231.0 |
| 9.0 | 230.0 | 227.0 |
| 11.0 | 226.0 | 224.0 |
| 12.0 | 223.0 | 221.0 |
| 13.0 | 221.0 | 218.0 |
| 14.0 | 219.0 | 216.0 |
| 15.0 | 217.0 | 214.0 |
| 16.0 | 215.0 | 213.0 |
| 17.0 | 213.0 | 211.0 |
| 18.0 | 212.0 | 210.0 |
| 19.0 | 211.0 | 209.0 |
| 20.0 | 209.0 | 208.0 |




Figur 7.5: Grafen viser utviklingen av reinpopulasjon over 20 år.

Vi ser både fra tabellen og fra grafen 7.5 at tilnærmede verdier er litt forskjellige fra de eksakte verdier. Tabellen viser at reinpopulasjonen i år 5 er lik 249 blant de eksakte verdier, som er den nærmeste verdien til 250, mens blant de tilnærmede verdier er den nærmeste verdien til 250, i år 4 lik 253. Dersom vi øker antall punkter for $t$-verdier dvs. hvis vi velger $\Delta t$ mindre, vil den nærmeste verdien for begge deler (tilnærmede og eksakte verdier) være i år 5.

"Reinpopulasjonen avtar raskt de første årene. Etter ca. 15 år, når populasjonen kommer under 215 rein, avtar den mye saktere.

Hvis vi plotter utviklingen av populasjonen over et bredere intervall, for eksempel de første 100 årene, ser vi at etter $40 - 50$ år begynner reinpopulasjonen å stabilisere seg på 200 rein, som er bæreevnen til stammen"(ProFag, 2021).

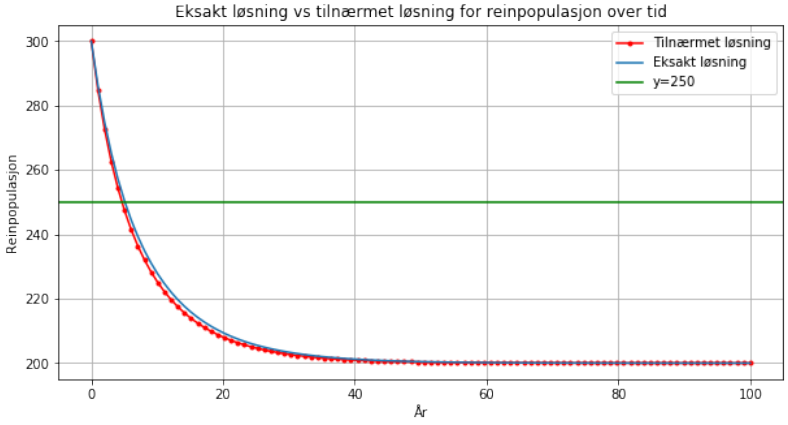
Vi endrer tidsintervallet, og løser likningen på nytt og ser at konklusjonen stemmer.

Output:

```
y(t)=
          2
0.01424 t - 1.841 t + 252.9
```

| År | Eksakt verdi | Tilnærmet verdi |
|---|---|---|
| 0.0 | 300.0 | 300.0 |
| 1.0 | 286.0 | 285.0 |
| 2.0 | 275.0 | 273.0 |
| 3.0 | 265.0 | 263.0 |
| 4.0 | 257.0 | 254.0 |
| 5.0 | 250.0 | 247.0 |
| 6.0 | 244.0 | 241.0 |
| 7.0 | 239.0 | 236.0 |
| 8.0 | 235.0 | 232.0 |
| 9.0 | 231.0 | 228.0 |
| ... | ... | ... |
| 90.0 | 200.0 | 200.0 |
| 91.0 | 200.0 | 200.0 |
| 92.0 | 200.0 | 200.0 |
| 93.0 | 200.0 | 200.0 |
| 94.0 | 200.0 | 200.0 |
| 95.0 | 200.0 | 200.0 |
| 96.0 | 200.0 | 200.0 |
| 97.0 | 200.0 | 200.0 |
| 98.0 | 200.0 | 200.0 |
| 99.0 | 200.0 | 200.0 |
| 100.0 | 200.0 | 200.0 |

Length = 100 rows




Figur 7.6: Grafen viser utviklingen av reinpopulasjon over 100 år.

Grafen 7.6 viser at utviklingen av reinpopulasjon stabiliserer seg på $y = 200$ som er bæreevnen til reinpopulasjonen.

# 8 Matematikk S1

### Kompetansemål etter matematikk S1

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- anvende derivasjon til å analysere og forstå optimaliseringsproblemer
- bruke digitale verktøy til å simulere og utforske utfall i stokastiske forsøk, og forstå begrepet stokastiske variabler
- analysere et problem der sannsynlighet og kombinatorikk inngår, og bruke ulike strategier i problemløsingen

Kilde

## 8.1 Økonomiske optimeringsproblemer

**Kostnadfunksjon** En kostnadfunksjon er en funksjon for kostnader ved produksjon av $x$ antall enheter av en vare. Vi viser en kostnadfunksjon med $K(x)$.

**Grensekostnad** Grensen som viser hvor mye koster å produsere én ekstra enhet ved en gitt produksjonsmengde.

**Inntektsfunksjon** En funksjon som viser inntekter ved salg av $x$ antall enheter av en vare. Vi viser en inntektsfunksjon med $I(x)$.

**Grenseinntekt** Grensen som viser hvor stor inntekt én ekstra produsert enhet gir.

**Overskuddsfunksjon** Overskuddsfunksjonen viser hvor mye en bedrift har tjent ved produksjon og salg av $x$ antall enheter. Vi viser en overskuddsfunksjon med $O(x)$. Overskuddet finner vi ved å trekke kostnader fra inntekter (Kristensen & Aanensen, 2018g):

$$inntekter - kostnader = overskudd \tag{8.1}$$

Overskudd kan være både positivt og negativt. Hvis overskuddet er positivt, sier vi at produksjon av varen er lønnsomt.

**Oppgave** En bedrift produserer og selger en vare. De totale kostnadene $K(x)$ kroner ved produksjon av $x$ enheter av varen per dag er gitt ved:

$$K(x) = 0.01x^3 + 0.08x^2 + 10.25x + 3000, \quad x \in [0, 100] \tag{8.2}$$

Inntekten i kroner ved salg av $x$ enheter av varen er:

$$I(x) = 550x - 5x^2, \quad x \in [0, 100] \tag{8.3}$$

a Ved hvilken produksjon vil kostnader og inntekter være like store?

b Undersøk om det lønner seg å øke produksjonen når $x = 50$.

c Bedriften vil tilpasse produksjonen slik at overskuddet $O(x)$ blir størst mulig. Bruk derivasjon til å finne den produksjonen som gir størst mulig overskudd per dag. Hvor stort er dette overskuddet?

Oppgaven er hentet fra (Kristensen & Aanensen, udatert, s. 48).

**Løsning**

a For å finne ut ved hvilken $x$-verdi er $K(x)$ og $I(x)$ like stor, setter vi de to likningene lik hverandre:

$$K(x) = I(x) \iff K(x) - I(x) = 0$$

Vi kaller denne funksjonen $f(x)$, og løser den ved hjelp av *fsolve()*-funksjonen fra *scipy.optimize*-modulen. Funksjonen tar funksjonen $f$ og en startgjett $x_0$ som parametere og returnerer $x$-verdien til roten dvs. skjæringspunktet mellom de to funksjonene. $x_0$ kan være enten ett tall eller en $n$-dimensjonal *array* av flere tall (The-SciPy-community, 2021b).

Etter at vi løste oppgaven algebraisk, plotter vi grafen til de to funksjonene, samt skjæringspunktene mellom dem.

**Algoritme**

1 Importere biblioteket *Numpy*, modulen *matplotlib.pyplot*, og funksjonen *fsolve()* fra *scipy.optimize*-modulen.

2 Definere en funksjon $K(x)$ for kostnader; funksjonen tar $x$ som parameter, og returnerer Kostnadfunksjonen 8.2.

3 Definere en funksjon $I(x)$ for inntekter; funksjonen tar $x$ som parameter, og returnerer Inntektsfunksjonen 8.3.

4 Definere en funksjon $f(x)$, funksjonen tar $x$ som parameter, og returnerer $I(x) - K(x)$.

5 Definere en variabel startgjett, vi setter denne variabelen lik en liste på intervall $[0, 100]$ med 2 punkter ved å kalle *linspace()*-funksjonen.

6 Finne $x$-koordinater til skjæringspunkter mellom $K$ og $I$ ved å kalle *fsolve()*-funksjonen. Funksjonen tar funksjonen $f()$ og startgjett $x_0$ som parametere, og returnerer $x$-koordinater til røtter. Vi lagrer resultatet i en variabel kalt $x_1$.

7 Sette $x_1$ i en av funksjonene $I$ eller $K$ og finne $y$-verdier.

8 Benytte en *for*-løkke som looper antall ganger lik lengde for startgjett-listen.

8.1 Skrive ut koordinatene til skjæringspunktene.

9 Definere og lage en liste for $x$-verdier ved å kalle *linspace()*-funksjonen; funksjonen tar startpunkt, sluttpunkt og antall punkter for plotting som parametere.

10 Definere og lage to sett av $y$-verdier ved å sette $x$-verdier i funksjonene for kostnad og inntekt.

11 Sette størrelse for plottet ved å kalle *figure()*-funksjonen fra *pyplot*. Vi definerer figurstørrelse som parameter til funksjonen:

```
figure(figsize=(x,y))
```

12 Sette tittel for plottet ved å kalle *title()*-funksjonen fra *pyplot*.

13 Sette label for $x$- og $y$-aksen ved å kalle henholdsvis *xlabel()*- og *ylabel()*-funksjonen.

14 Plotte grafer for kostnad og inntekt samt skjæringspunktene ved å bruke *plot()*-funksjonen.

15 Bruke en *for*-løkke sammen med *zip()*-funksjonen for å matche koordinatene to-og-to. Vi kaller også *around()*-funksjonen fra *NumPy*-biblioteket for å avrunde tallene; for dette bruker vi *np.around()* siden listene er av type *NumPy-array*. Syntaksen er som følger:

```
for i, j in zip(x, y)
```

15.1 Kalle *text()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot* for å sette tekst (koordinat) for punkter. Syntaksen er som følger:

```
text(i, j, '({},␣{})'.format(i, j))
```

16 Sette rutenett på plottet ved å kalle *grid()*-funksjonen.

17 Sette label for grafene ved å kalle *legend()*-funksjonen; funksjonen tar en liste av strenger som parameter.

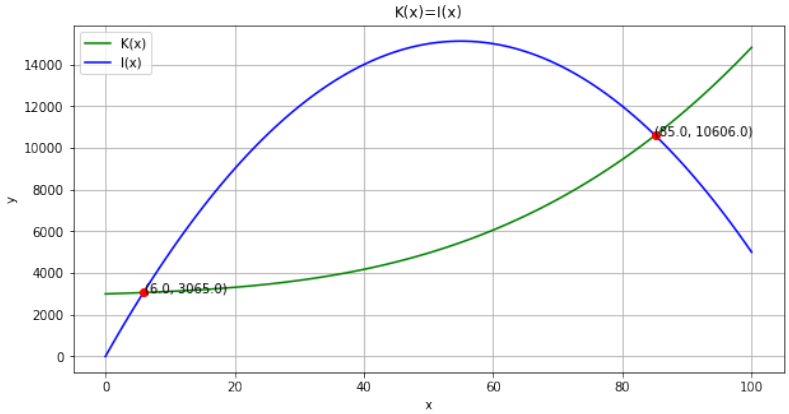
18 Vise plottet ved å kalle *show()*-funksjonen.

```
# a: finne produksjon x som har like store kostnader og inntekter

# importerer biblioteker
from scipy.optimize import fsolve
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# definerer en funksjon K(x) for kostnader
def kostnad(x):
    return 0.01*x**3+0.08*x**2+10.25*x+3000

# definerer en funksjon I(x) for inntekter
def inntekt(x):
    return -5*x**2 + 550*x

'''
funksjon f(x) er definert ved K(x) = I(x)
parameter: x
returnerer K(x) - I(x)
'''
def f(x):
    return inntekt(x) - kostnad(x)

x0 = np.linspace(0, 100, 2) # definerer startgjett
x_1 = fsolve(f, x0)         # finner x-verdier til skjæringspunkt mellom K og I
y_1 = kostnad(x_1)          # setter x_1 i K(x) (eller I(x)) og finner y_1

# skriver ut koordinater til skjæringspunkter
for i in range(len(x0)):
    print(f'({x_1[i]}, {y_1[i]})')

x = np.linspace(0, 100, 100) # definerer x_verdier

# definerer y_verdier for K og I
y_verdier1 = kostnad(x)
y_verdier2 = inntekt(x)

plt.figure(figsize=(10,5)) # setter størrelse for plottet
plt.title('K(x)=I(x)')     # setter tittel for plottet

# setter x- og y-label for aksene
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

# plotter funksjoner K(x) og I(x) samt skjæringspunkter
plt.plot(x, y_verdier1, 'g', x, y_verdier2, 'b', x_1, y_1,'ro')
'''
setter koordinat for punktene
zip()-funksjonen matcher to lister to-og-to
around()-funksjonen avrunder tallene,
vi bruker np.around() siden listene av type NumPy-array
text()-funksjonen setter tekst for punkter
'''
for i,j in zip(np.around(x_1, decimals=0), np.around(y_1, decimals=0)):
    plt.text(i, j, '({}, {})'.format(i, j))

plt.grid()                    # setter rutenett for plottet
plt.legend(['K(x)', 'I(x)'])  # setter label for grafer
plt.show()                    # viser plottet
```

Program 8.1: Programmet finner produksjon $x$ som har like store kostnader og inntekter.

Output:

```
(5.888228629025245, 3065.1695640255384)
(85.0637605961929, 10605.851494073984)
```




Figur 8.1: Illustrasjon for Produksjon av $x$ enheter når $K(x) = I(x)$.

Vi ser både fra output av programmet og grafen 8.1 at ved en produksjon på 6 enheter og 85 enheter vil inntektene og kostnadene være like store.

b Det er lønnsomt å øke produksjonen til $x$ enheter dersom grenseinntektene $I'(x)$ er større enn grensekostnadene $K'(x)$. For å sjekke om det lønner seg å øke produksjonen når $x = 50$, sjekker vi dermed om $I'(50) > K'(50)$

**Algoritme**

1 Importere bibliotekene *Numpy* og *SymPy*, og modulen *matplotlib.pyplot*.

2 Definere $x$ som symbol ved å kalle *Symbol()*-funksjonen fra *SymPy*-biblioteket. *Symbol* er den viktigste klassen i *SymPy*-biblioteket. Vi bruker denne klassen for symbolske beregninger (SymPy-Development-Team, 2021c).

3 Derivere $K(x)$ og $I(x)$ ved å kalle *diff()*-funksjonen fra *SymPy*-biblioteket.

4 Oversette derivert-uttrykk til *NumPy*-funksjon ved å kalle *lambify()*-funksjonen; dette trenger vi for å kunne mate den deriverte med tall, og beregne $y$-verdi for en gitt $x$-verdi. Funksjonen tar en variabel og funksjon som parametere, og returnerer en funksjon av type *SymPy*-funksjon (SymPy-Development-Team, 2021a).

5 Beregne $K'(50)$ og $I'(50)$, og skrive ut resultatet.

6 Definere og lage en liste for $x$-verdier på intervallet $[0, 100]$ ved å kalle *linspace()*-funksjonen.

7 Definere og lage $y$-verdier for $K'(x)$ og $I'(x)$ ved å mate funksjoner med $x$-verdier.

8 Sette størrelse for plottet ved å kalle *figure()*-funksjonen fra *pyplot*. Vi definerer figurstørrelse som parameter til funksjonen:

```
figure(figsize=(x,y))
```

9 Sette tittel for plottet ved å kalle *title()*-funksjonen fra *pyplot*.

10 Sette label for $x$- og $y$-aksen ved å kalle henholdsvis *xlabel()*- og *ylabel()*-funksjonen.

11 Plotte grafer for $K'(x)$ og $I'(x)$ samt skjæringspunktene ved å bruke *plot()*-funksjonen.

12 Sette $y$-verdi (koordinat) for punktene ved å kalle *annotate()*-funksjonen fra *Pyplot*-modulen. Funksjonen tar tekst, og $x$ og $y$ koordinater for annotasjon (Hunter mfl., 2021a). Syntaksen for funksjonen er som følger:

```
annotate(str(f(x)),xy=(x, f(x)))
```

13 Sette rutenett på plottet ved å kalle *grid()*-funksjonen.

14 Sette label for grafene ved å kalle *legend()*-funksjonen; funksjonen tar en liste av strenger som parameter.

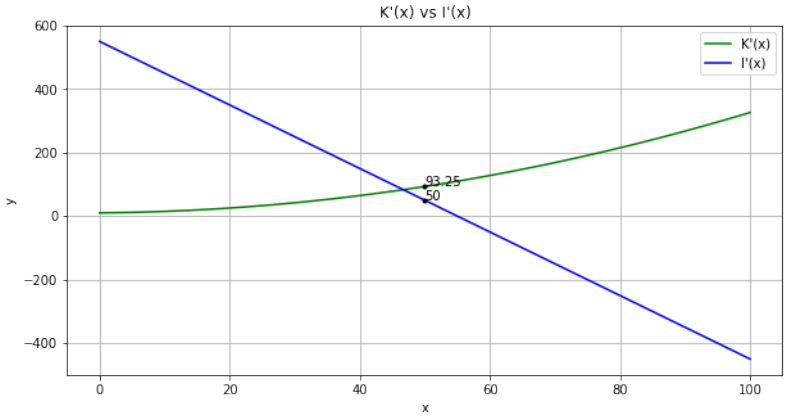
15 Vise plottet ved å kalle *show()*-funksjonen.

```
# b: programmet sjekker lønnsomheten for å øke produksjon når x=50

# importerer biblioteker
from sympy import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# definerer x som symbol ved å kalle Symbol()-funksjonen
x = Symbol('x')

# deriverer K(x) og I(x) ved å kalle diff()-funksjonen
K_derivert = kostnad(x).diff(x)
I_derivert = inntekt(x).diff(x)

# oversetter derivert-uttrykk til SymPy-funksjon
K_prime = lambdify(x, K_derivert)
I_prime = lambdify(x, I_derivert)

# beregner K'(50) og I'(50)
print(f'K\'(50): {K_prime(50)}\n\
I\'(50): {I_prime(50)}')

x = np.linspace(0, 100, 100)  # definerer x_verdier

# definerer y_verdier for K' og I'
y_verdier1 = K_prime(x)
y_verdier2 = I_prime(x)

plt.figure(figsize=(10,5))     # setter størrelse for plottet
plt.title('K\'(x) vs I\'(x)')  # setter tittel for plottet

# setter x- og y-label for aksene
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

# plotter funksjoner K'(x) og I'(x) samt skjæringspunkter
plt.plot(x, y_verdier1, 'g', x, y_verdier2, 'b', 50, K_prime(50), 'k.', 50, I_prime(50), 'k.')

# setter y-verdi for punkter på plottet
plt.annotate(str(K_prime(50)),xy=(50, K_prime(50)))
plt.annotate(str(I_prime(50)),xy=(50, I_prime(50)))

plt.grid()                          # setter rutenett for plottet
plt.legend(['K\'(x)', 'I\'(x)'])    # setter label for grafer
plt.show()                          # viser plottet
```

Program 8.2: Programmet sjekker lønnsomheten for å øke produksjon når x=50.

Output:

```
K'(50): 93.25
I'(50): 50
```




Figur 8.2: Grafen viser grensekostnaden vs grenseinntekten når $x = 50$.

Grafen 8.2 viser at grensekostnaden er betydelig høyere enn grenseinntekten når $x = 50$. Derfor vil det ikke lønne seg å øke produksjonen når $x = 50$.

c Overskudd er lik *inntekt* − *kostnad*. Vi har allerede definert funksjonen $f(x)$ i deloppgave *a* gitt ved $I(x) - K(x)$, men for å ha mer oversiktlig programkode, definerer vi en ny funksjon kalt $O(x) = I(x) - K(x)$. Så finner vi den deriverte til $O(x)$, og setter den lik null for å finne ekstremal punkter for $O(x)$. Overskuddet vil være størst på toppunktet av $O(x)$.

**Algoritme**

1 Importere bibliotekene *Numpy* og *SymPy*, og modulen *matplotlib.pyplot*.

2 Definere funksjonen $O(x)$; funksjonen tar $x$ som parameter og returnerer $I(x) - K(x)$.

3 Definere $x$ som symbol ved å kalle *Symbol()*-funksjonen.

4 Finne den deriverte av $O(x)$ ved å kalle *diff()*-funksjonen.

5 Skrive ut $O'(x)$.

6 Sette $O'(x) = 0$ for å finne $x$-koordinat av ekstremalpunkter. Vi kaller *solve()*-funksjonen for å gjøre dette.

Funksjonen tar en funksjon $f$ og en (eller flere) variabel som parametere, og løser funksjonen med hensyn til den variabelen (SymPy-Development-Team, 2021b).

7 Konverter $x$-verdiene til ekstremalpunkter til *Numpy*-array, og sette dem i $O(x)$ for å finne $y$-verdier av ekstremalpunkter.

8 Skrive ut resultatet.

9 Kalle *lambify()*-funksjonen for å oversette derivert-uttrykket for $O(x)$ til *NumPy*-funksjon; funksjonen tar $x$ og en funksjon (her $O'(x)$ som parametere.

10 Finne dobbeltderiverte av $O(x)$; vi skal sjekke om ekstremalpunktet er et toppunkt.

11 Skrive ut $O''(x)$.

12 Oversette uttrykket for den dobbeltderiverte av $O$ til *NumPy*-funksjon ved å kalle *lambify()*-funksjonen.

13 Finne $y$-verdi for den positive roten av $O''(x)$ ved å sette inn $x$-koordinat til ekstremalpunktet i $O''(x)$.

14 Skrive ut resultatet.

15 Definere og lage en liste for $x$-verdier ved å kalle *linspace()*-funksjonen; vi velger en bredere rekkevidde enn $[0, 100]$ fordi verdiene vi skal vise på plottet er store tall.

16 Finne $y$-verdier for $O(x)$, $O'(x)$, og $O''(x)$.

17 Sette størrelse for plottet ved å kalle *figure()*-funksjonen fra *pyplot*. Vi definerer figurstørrelse som parameter til funksjonen:

```
figure(figsize=(x,y))
```

18 Sette tittel for plottet ved å kalle *title()*-funksjonen fra *pyplot*.

19 Sette label for $x$- og $y$-aksen ved å kalle henholdsvis *xlabel()*- og *ylabel()*-funksjonen.

20 Plotte funksjoner $O(x)$, $O'(x)$, $O''(x)$, og ekstremalpunktene ved å kalle *plot()*-funksjonen.

21 Bruke en *for*-løkke sammen med *zip()*-funksjonen for å matche koordinatene to-og-to. Syntaksen er som følger:

```
for i, j in zip(x, y)
```

21.1 Kalle *text()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot* for å sette tekst (koordinat) for punkter. Syntaksen er som følger:

```
text(i, j, '({}, {})'.format(i, j))
```

22 Sette rutenett på plottet ved å kalle *grid()*-funksjonen.

23 Sette label for grafene ved å kalle *legend()*-funksjonen; funksjonen tar en liste av strenger som parameter.

24 Vise plottet ved å kalle *show()*-funksjonen.

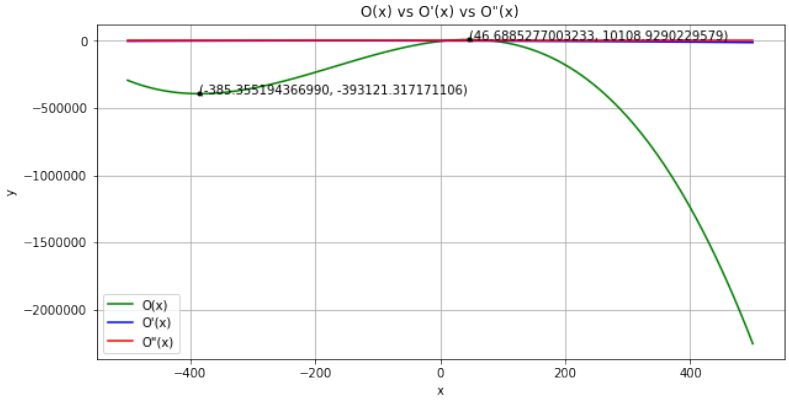
25 Skrive ut ved hvilket $x$-verdi er overskuddet størst.

```python
# c: programmet finner det største overskuddet

# importerer biblioteker
from sympy import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# definerer en funksjon for overskudd
def O(x):
    return inntekt(x) - kostnad(x)

# definerer x som symbol ved å kalle Symbol()-funksjonen
x = Symbol('x')

# finner den deriverte av O(x) ved å kalle diff()-funksjonen
O_derivert = O(x).diff(x)
print(f'O\'(x) = {O_derivert}')      # skriver ut O'(x)

# setter O'(x)=0 for å finne (x-koordinat til) ekstremalpunkter
ekst_punkter = solve(O_derivert)

# finner y-koordinat for ekstremalpunkter
y_ekst_punkter = O(np.array(ekst_punkter))
print(f'x-koordinat av ekstremalpunkter for O\'(x): {ekst_punkter}') # skriver ut resultatet

# oversetter derivert-uttrykk til NumPy-funksjon
O_prime = lambdify(x, O_derivert, 'numpy')

O_andrederivert = O_prime(x).diff(x)              # finner O"(x)
print(f'O\"(x) = {O_andrederivert}')              # skriver ut O"(x)

O_2prime = lambdify(x, O_andrederivert, 'numpy') # oversetter derivert-uttrykk til NumPy-funksjon
y_2prime = O_2prime(ekst_punkter[1])              # finner y-verdi for O"(positiv x-koordinat)
print(f'O\"({ekst_punkter[1]}) = {y_2prime}')     # skriver ut resultatet

x = np.linspace(-500, 500, 100)                   # definerer x_verdier

# definerer y_verdier for O(x), O'(x) og O"(x)
y_1 = O(x)
y_2 = O_prime(x)
y_3 = O_2prime(x)

plt.figure(figsize=(10,5))             # setter størrelse for plottet
plt.title('O(x) vs O\'(x) vs O\"(x)')  # setter tittel for plottet

# setter x- og y-label for aksene
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

# plotter funksjoner O(x), O'(x), O"(x), og ekstremalpunkter
plt.plot(x, y_1, 'g', x, y_2, 'b', x, y_3, 'r', ekst_punkter, y_ekst_punkter,'k.')

# setter koordinat for punkter
for i,j in zip(ekst_punkter, y_ekst_punkter):
    plt.text(i, j, '({}, {})'.format(i, j))

plt.grid()                                 # setter rutenett for plottet
plt.legend(['O(x)', 'O\'(x)', 'O\"(x)']) # setter label for grafer
plt.show()                                 # viser plottet

'''
siden vi fikk negativ verdi for O"(+ekstremalpunkt),
har bedriften størst overskudd for denne x-verdien.
skriver ut resultatet
'''
print(f'Bedriften har størst overskudd når x = {round(ekst_punkter[1])};\
 overskuddet er {round(y_ekst_punkter[1])} kr.')
```

Program 8.3: Programmet finner det største overskuddet.

Output:

```
O'(x) = -0.03*x**2 - 10.16*x + 539.75
x-koordinat av ekstremal punkter for O'(x): [-385.355194366990, 46.6885277003233]
O''(x) = -0.06*x - 10.16
O''(46.6885277003233) = -12.9613116620194

Bedriften har størst overskudd når x = 47; overskuddet er 10109 kr.
```




Figur 8.3: Grafen viser når bedriften har størst overskudd.

Slik output av programmet viser, og vi ser fra grafen 8.3, vil bedriften ha størst overskudd ved $x = 47$ enheter; overskuddet ved denne verdien er omtrent 10109 kr. per dag.

## 8.2 Sannsynlighet og kombinatorikk

### 8.2.1 Sannsynlighet

Det er vanlig å buke urnemodeller ved introduksjon av sannsynlighetsregning. I programmering av urnemodeller kan vi bruke datastrukturen *liste* for representasjon av en urne.

For eksempel anta at vi har tre svarte og to hvite kuler i en urne, da kan vi lage en liste på denne måten:

```
urne_liste = ['Svart', 'Hvit', 'Svart', 'Hvit', 'Svart']
```

Dersom vi skal lage en modell med tilbakelegging, trenger vi ikke å gjøre noen endringer på urnelisten underveis i kjøring av programmet. I modellering av trekkesituasjoner uten tilbakelegging, må vi fjerne elementer som trekkes ut, fra listen.

For at modellen vi lager, gir oss en god empirisk verdi, velger vi å foreta så mange trekninger som for eksempel 100 trekninger. Vi bruker *randint()*-funksjonen for å simulere trekningen fra urnen (Bueie, 2019).

**Oppgave** I en urne er det tre svarte kuler og sju hvite. I en annen urne er det tre hvite kuler og sju svarte. Det skal trekkes ti kuler uten tilbakelegging, fem fra hver urne, og legges opp i en tredje urne.

Lag et program som viser hvor stor andel hvite kuler og hvor stor andel svarte kuler det er mest sannsynlig at det havner i den tredje urnen.

Oppgaven er hentet fra (Bueie, 2019, s. 117).

**Løsning** Programmet er en modifisert versjon av løsningsforslaget for oppgaven fra boka «Programmering for matematikklærere» (Bueie, 2019, s. 188).

Programmet løser oppgaven og simulerer hvor stor andel hvite kuler og hvor stor andel svarte kuler det er mest sannsynlig å havne i vår tredje urne etter 100 trekninger.

**Algoritme**

1 Importere modulene *Random* og *Matplotlib.pyplot*.

2 Definere en variabel *teller* som teller antall forsøk, og sette den lik 0.

3 Definere en variabel *antall_trekninger* for å telle antall trekninger, og sette den lik 0.

4 Definere en variabel *antall_svart* for å telle antall svarte kuler som trekkes ut, og sette den lik 0.

5 Bruke en *while*-løkke som looper så lenge telleren er mindre eller lik 100.

- 5.1 Lage to liste av strenger som modellerer urnene.
- 5.2 Lage en tom liste for å sette elementene som trekkes ut inn i den.
- 5.3 Benytte en *for*-løkke som looper 5 ganger, denne løkken er for å trekke ut 5 elementer fra hver urne-liste.
  - 5.3.1 Generere et tilfeldig heltall ved å kalle *randint()*-funksjonen; funksjonen tar start- og slutt-verdi på det intervallet som tallet skal genereres på, som parameter. Lagre det genererte tallet i en variabel kalt *indeks_1*.
  - 5.3.2 Bruke det tilfeldige tallet som indeks i urne-listen 1, og lagre elementet ved indeksen i en variabel kalt *trekning_1*.
  - 5.3.3 Fjerne det elementet fra urne-listen 1 ved å kalle *pop()*-funksjonen. Funksjonen tar indeks som parameter, og sletter elementet ved indeksen fra listen.
  - 5.3.4 Generere et annet tilfeldig heltall, og lagre det genererte tallet i en variabel kalt *indeks_2*.
  - 5.3.5 Bruke det tilfeldige tallet som indeks i urne-listen 2, og lagre elementet ved indeksen i en variabel kalt *trekning_2*.
  - 5.3.6 Fjerne det elementet fra urne-listen 2.
  - 5.3.7 Legge de to trekningene i urne-listen 3, ved å kalle *extend()*-funksjonen; funksjonen tar en liste av elementer som parameter og setter dem inn i urne-listen 3.
- 5.4 Bruke en *for*-løkke som looper 10 ganger.
  - 5.4.1 Inkrementere antall trekninger med 1.
  - 5.4.2 Sjekke om det finnes noen svarte kuler i urne-listen 3, hvis ja
    - 5.4.2.1 inkrementere antall svarte med 1.
- 5.5 Inkrementere telleren (antall forsøk) med 1.

6 Finne andelen for svarte kuler ved å dele antall svarte på totalt antall trekninger.

7 Finne andelen for hvite kuler ved å trekke andelen for de svarte kulene fra 1 (siden den største verdien for sannsynlighet er 1.).

8 Multiplisere andelen for svarte kuler med 100 for å finne sannsynligheten for svarte kuler.

9 Multiplisere andelen for hvite kuler med 100 for å finne sannsynligheten for hvite kuler.

10 Skrive ut resultatet.

11 Lage data for simulering av trekninger; definere 4 tomme lister for $x$- og $y$-koordinater for hvite og svarte kuler.

12 Finne antall hvite kuler ved å trekke antall svarte fra totalt antall trekninger.

13 Bruke en *for*-løkke som looper antall ganger lik antall svarte kuler.

- 13.1 Generere et tilfeldig flyttall mellom 0 og 1 ved å kalle *random()*-funksjonen; lagre det tilfeldige tallet i en variabel kalt *x_1*.
- 13.2 Generere et tilfeldig flyttall mellom 0 og 1 ved å kalle *random()*-funksjonen; lagre det tilfeldige tallet i en variabel kalt *y_1*.
- 13.3 Legge *x_1* til listen for $x$-koordinater til svarte kuler.
- 13.4 Legge *y_1* til listen for $y$-koordinater til svarte kuler.

14 Bruke en *for*-løkke som looper antall ganger lik antall hvite kuler.

- 14.1 Generere et tilfeldig flyttall mellom 0 og 1 ved å kalle *random()*-funksjonen; lagre det tilfeldige tallet i en variabel kalt *x_2*.
- 14.2 Generere et tilfeldig flyttall mellom 0 og 1 ved å kalle *random()*-funksjonen; lagre det tilfeldige tallet i en variabel kalt *y_2*.
- 14.3 Legge *x_2* til listen for $x$-koordinater til hvite kuler.
- 14.4 Legge *y_2* til listen for $y$-koordinater til hvite kuler.

15 Sette størrelse for plottet ved å kalle *figure()*-funksjonen fra *pyplot*. Vi definerer figurstørrelse som parameter til funksjonen:

```
figure(figsize=(x,y))
```

16 Sette tittel for plottet ved å kalle *title()*-funksjonen fra *pyplot*.

17 Definere et subplott ved å kalle *gca()*-funksjonen fra *pyplot*-modulen; kalle subplottet *ax*.

18 Sette bakgrunnsfarge for subplottet ved å kalle *set_facecolor()*-funksjonen fra *matplotlib.pyplot* (*ax*); funksjonen tar farge med streng datatype som parameter.

19 Plotte svarte kuler ved å kalle *scatter()*-funksjonen; funksjonen tar to lister av $x$- og $y$-verdier som parametere.

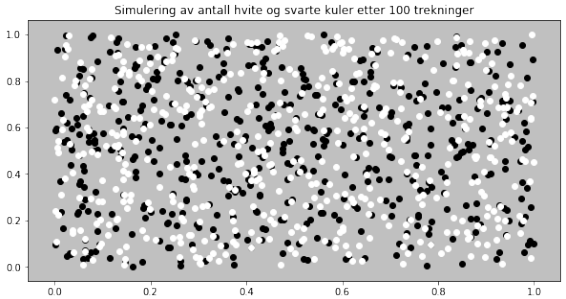
20 Plotte hvite kuler ved å kalle *scatter()*-funksjonen; funksjonen tar to lister av $x$- og $y$-verdier som parametere.

```
'''
programmet er en modifisert versjon av løsningsforslaget fra boka "programmering for matematikklærere"
'''
# importerer modulene random og matplotlib.pyplot
import random
import matplotlib.pyplot as plt

teller = 0              # definerer en variabel for å telle antall forsøk
antall_trekninger = 0   # definerer en variabel for å telle antall trekninger
antall_svart = 0        # definerer en variabel for å telle antall svarte kuler som trekkes ut

# bruker while-løkke som looper 100 ganger, i hver runde trekkes 10 kuler, 5 fra hver urne-liste
while teller <= 100:

    # lager liste for urne_lister (i hver runde lager vi listene på nytt)
    urne_liste_1 = ['Svart', 'Svart', 'Svart', 'Hvit', 'Hvit', 'Hvit', 'Hvit', 'Hvit', 'Hvit', 'Hvit']
    urne_liste_2 = ['Hvit', 'Hvit', 'Hvit', 'Svart', 'Svart', 'Svart', 'Svart', 'Svart', 'Svart', 'Svart']
    urne_liste_3 = []  # lager en tom urne_liste for å sette trekninger i

    for i in range(5): # for-loop for å trekke 5 kuler fra hver urne
        '''
        genererer et tall som indeks til et element i urne-liste 1 ved å kalle på randint()-funksjonen
        randint()-funksjonen tar to parametere start og stop i et intervall der begge er inkludert
        i intervallet, og genererer et tilfeldig tall
        '''
        indeks_1 = random.randint(0, len(urne_liste_1) - 1)
        trekning_1 = urne_liste_1[indeks_1]                 # trekker elementet ut fra urne-liste 1
        urne_liste_1.pop(indeks_1)                          # fjerner elementet fra urne-liste 1

        # genererer et tall som indeks til et element i urne-liste 2
        indeks_2 = random.randint(0, len(urne_liste_2) - 1)
        trekning_2 = urne_liste_2[indeks_2]                 # trekker elementet ut fra urne-liste 2
        urne_liste_2.pop(indeks_2)                          # fjerner elementet fra urne-liste 2

        # legger trekninger i urne-liste 3,extend()-funksjonen brukes for å legge elementer i en liste
        urne_liste_3.extend([trekning_1, trekning_2])

    # bruker for-løkke for å telle antall elementer av hver farge i urne-liste 3
    for j in range(10):
        antall_trekninger += 1                          # inkrementerer antall trekninger
        if urne_liste_3[j] == 'Svart':                  # sjekker om element på indeks j er en svart kule
            antall_svart += 1                           # og hvis ja, inkrementerer antall svarte kuler
    teller += 1                                         # inkrementerer antall forsøk

andel_svart =  antall_svart / antall_trekninger # finner andelen av svarte kuler fra totale trekninger
andel_hvit = 1 - andel_svart                # andelen av hvite kuler er 1 - andelen av de svarte kulene
svart_sannsynlighet = andel_svart * 100 # beregner sannsynligheten av svarte og hvite kuler i prosent
hvit_sannsynlighet = andel_hvit * 100

# skriver ut resultatet
print(f'Sannsynlighet for at det havner flest svarte kuler i den tredje urnen er {svart_sannsynlighet:.2f}')
print(f'Sannsynlighet for at det havner flest hvite kuler i den tredje urnen er {hvit_sannsynlighet:.2f}')

svart_liste_x = []  # lager x- og y-liste for hvite og svarte kuler
svart_liste_y = []
hvit_liste_x = []
hvit_liste_y = []
antall_hvit = antall_trekninger - antall_svart  # finne antall hvite kuler

# lager tilfeldige koordinater for svarte kuler, random() returnerer et tilfeldig float tall mellom 0 og 1
for i in range(antall_svart):
    x_1 = random.random()
    y_1 = random.random()
    svart_liste_x.append(x_1) # legger x og y koordinatene i lister for x- og y-verdier for svarte kuler
    svart_liste_y.append(y_1)

for i in range(antall_hvit):  # lager tilfeldige koordinater for hvite kuler
    x_2 = random.random()
    y_2 = random.random()
    hvit_liste_x.append(x_2)  # legger x og y koordinatene i lister for x- og y-verdier for svarte kuler
    hvit_liste_y.append(y_2)

plt.figure(figsize=(10,5))                                          # setter størrelse for plottet
plt.title('Simulering av antall hvite og svarte kuler etter 100 trekninger') # setter tittel for plottet

ax = plt.gca()  # bruker gca()-funksjonen for å plotte svarte og hvite punkter i samme plott
ax.set_facecolor('silver')  # setter background color for plottet
ax.scatter(hvit_liste_x, hvit_liste_y, color="black") # plotter svarte og hvite punkter
ax.scatter(svart_liste_x, svart_liste_y, color="white")
```

Program 8.4: Programmet finner sannsynligheten for andelen hvite og svarte kuler i den tredje urnen.

Output:

```
Sannsynlighet for at det havner flest svarte kuler i den tredje urnen er 49.80
Sannsynlighet for at det havner flest hvite kuler i den tredje urnen er 50.20
```




Figur 8.4: Simulering for andelen av hvite og svarte kuler.

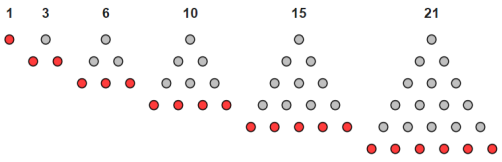
Modellen (se figur 8.4) viser at sannsynligheten for andelen av hvite og svarte kuler som vil havne i den tredje urnen er nesten like stor. Selv om i vårt tilfelle andelen for hvite kuler er større enn svarte kuler, er forskjellen uansett ikke så stor. Hvis vi kjører programmet flere ganger, vil det hende at andelen for svarte kuler øker. Dette er noe som stemmer med virkeligheten også siden vi har like stor hvite og svarte kuler totalt sett.

### 8.2.2 Kombinatorikk

"Trekanttallet $T_n$ er et figurantall som kan representeres i form av et trekantet rutenett av noder der den første raden inneholder et enkelt element og hver påfølgende rad inneholder ett mer element enn det forrige"(Weisstein, 2002d). De trekanttallene er derfor:

$\Delta_1 \to 1$
$\Delta_2 \to 1 + 2 = 3$
$\Delta_3 \to 1 + 2 + 3 = 6$
$\Delta_4 \to 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
.
.
.
$\Delta_n \to 1 + 2 + 3 + 4 + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

La $T_n$ være trekanttall nummer $n$. Vi ser at hvert trekanttall $T_n$ er summen av det forrige trekanttallet $T_{n-1}$ pluss $n$ prikker:




Figur 8.5: Figuren viser de fem første trekanttallene.

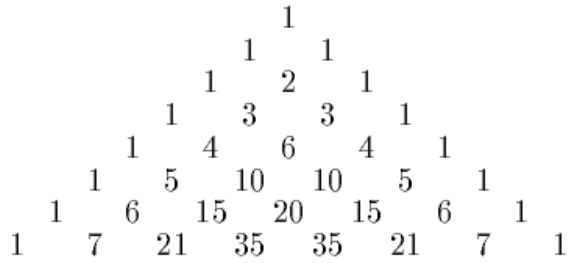
Source: Wikipedia

Vi kan derfor skrive den rekursive formelen for trekanttallet $T_n$ gitt ved:

$$T_n = T_{n-1} + n \tag{8.4}$$

**Pascals talltrekant** Pascals talltrekant er et trekant utvalg av binomialkoeffisienter som brukes i sannsynlighets teori, kombinatorikk og algebra.

Hver rad i talltrekantet starter og slutter med tallet 1, og de andre tallene som ligger inn i trekanten er lik summen av de to nærmeste oppstående tallene. Figur 8.6 viser illustrasjonen av Pascals talltrekant.




Figur 8.6: Pascals talltrekant

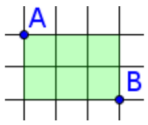
Source: Wikipedia

"Det viser seg at tallene i Pascals talltrekant forteller hvor mange ≪korteste veier≫ som leder fra toppen og fram til et krysningspunkt i talltrekanten"(Kristensen & Aanensen, 2018e).

**Oppgave** Gatebildet i sentrum av Kristiansand, kvadraturen, er regelmessig bygd opp med rette gater hvor gater som krysser hverandre danner vinkler på omtrent 90 grader. ≪Kvartalene≫, områdene avgrenset av gater, har tilnærmet form av rektangler.

Vi tenker oss nå byen enda mer regelmessig slik at alle ≪kvartaler≫ har en kvadratisk grunnflate.

Tenk deg at du skal gå fra gatehjørne $A$ til gatehjørne $B$.

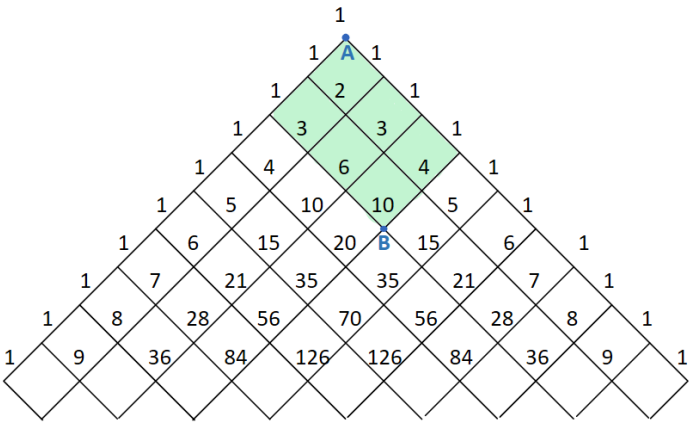



Source: NDLA

Hvor mange forskjellige ≪korteste veier≫ er det mellom $A$ og $B$?

Oppgaven er hentet fra (Kristensen & Aanensen, 2018e).

**Løsning** Vi bruker Pascals talltrekant for å løse oppgaven. Hvis vi setter figuren gitt i oppgaven på Pascals talltrekant slik at punkt $A$ ligger på toppunktet i trekanten, og hver node i figuren ligger på tilsvarende tallet i trekanten, vil trekanttallet som matcher punkt $B$ vise antall mulige korteste veier.




Figur 8.7: Kvadratisk Pascals talltrekant

Som sagt hver node i Pascals talltrekant, tilsvarer en binomialkoeffisient. Derfor kan vi bruke formelen for antall permutasjoner for å finne den $n$-te noden i Pascals talltrekantet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-1)!} \tag{8.5}$$

Vi kan tilpasse formelen med problemstillingen i oppgaven, og løse den. Anta $n$ er totalt antall noder til den korteste veien fra $A$ til $B$, og $k$ er lik antall noder enten til bredden eller til lengden av rektangelet (se på den grønne rektangelet i figur 8.7) avhengig av hvilken vei man ønsker å ta.

### Algoritme

1 Importere *factorial()*-funksjonen fra *math*-modulen.

2 Definere en funksjon kalt *finn_antall_korteste_veier()*; funksjonen tar $n$ og $k$ som parametere.

- 2.1 Definere en variabel *antall* for å lagre resultatet i; sette variabelen lik 0.
- 2.2 Bruke *try-catch*-uttrykk for å unngå eventuelle feil-verdier.
- 2.3 Prøve å
  - 2.3.1 finne antall veier ved å bruke formelen 8.5. Vi benytter operatoren *heltallsdivisjon* for å få heltall som resultat.
- 2.4 I unntatte tilfeller med feil-verdier
  - 2.4.1 returneres 0.
- 2.5 Returnere antall korteste veier.

3 Definere funksjonen *main()* som klientprogram.

- 3.1 Be brukeren om å oppgi tallene $n$ og $k$; konvertere input-verdiene til heltall.
- 3.2 Finne antall korteste veier ved å kalle funksjonen *finn_antall_korteste_veier()*; funksjonen tar $n$ og $k$ som parametere.
- 3.3 Skrive ut resultatet.

4 Kalle *main()*-funksjonen.

```
'''
Programmet finner antall korteste veier fra punkt A til B vha. binomialkoeffisienter
'''

# importerer biblioteker
from math import factorial as fac
import scipy.special

'''
funksjon for å finne antall mulige korteste vei fra A til B ved hjelp av Pascals talltrekant
parametere: totalt antall noder n, antall noder til bredde eller lengde
return: antall mulige korteste vei
'''
def finn_antall_korteste_veier(n, k):

    # definere en variable antall
    antall = 0

    # bruker formelen for binomial koeffisient, try-except vil hjelpe med å unngå eventuelle feil
    try:
        antall = fac(n) // fac(k) // fac(n - k)
    except ValueError:
        antall = 0

    # kan også kalle på binom()-funksjonen fra scipy-biblioteket
    # antall = scipy.special.binom(n,k)

    # returnerer resultatet
    return antall

# klient-programmet
def main():

    # får n og k verdier fra brukeren
    n = int(input('Skriv inn totalt antall noder fra A til B: '))
    k = int(input('Hvilken vei du ønsker å ta? Skriv inn antall noder til veien: '))

    # finner antall korteste veier ved å kalle finn_antall_korteste_veier()-funksjonen
    antall = finn_antall_korteste_veier(n, k)

    # skriver ut resultatet
    print(f'Fra punkt A til B, finnes det {antall} korteste veier.')

main()
```

Program 8.5: Programmet finner antall korteste veier fra punkt A til B vha. binomialkoeffisienter.

Output:

```
Skriv inn totalt antall noder fra A til B: 5
Hvilken vei du ønsker å ta? Skriv inn antall noder til veien: 2
Fra punkt A til B, finnes det 10 korteste veier.
```

# 9 Matematikk S2

### Kompetansemål etter matematikk S2

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- utforske egenskaper ved ulike rekker og gjøre rede for praktiske anvendelser av egenskaper ved rekker
- utforske rekursive sammenhenger ved å bruke programmering og presentere egne framgangsmåter
- modellere og analysere eksponentiell og logistisk vekst i reelle datasett
- forstå begrepene forventningsverdi, varians og standardavvik, og bruke disse størrelsene til å tolke stokastiske variabler

Kilde

## 9.1 Følger og rekker

### 9.1.1 Fibonacci-tallfølgen

"Fibonacci-tallene $F_n$ er leddene for sekvensen

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

hvor hvert ledd er summen av de to forrige leddene, som begynner med verdiene $F_0 = 0$, og $F_1 = 1$"(Falcon & Plaza, 2007, s. 38).

Formelt kan $a_n$-leddet i Fibonacci-tallfølgen uttrykkes som følger:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \tag{9.1}$$

**Oppgave** Lag et program som finner tall nummer $n$ i følgen.

Programkoden for Fibonacci-tallfølgen er lånet fra (Hafting & Ljosland, 2014).

**Løsning** For å finne ledd nummer $n$, trenger vi som nevnt i oppgaven, de to tidligere leddene i tallfølgen. Dermed bruker programkoden to lokalvariabler *temp_1* og *temp_2* som hjelpevariabler, og lagrer summen av de to som *resultat*; altså:

$$resultat = temp_1 + temp_2$$

Tabell 9.1 viser illustrasjon av tankegangen:

| $n$ | $ledd_{n-2}$ | $ledd_{n-1}$ | $ledd_n$ |
|---|---|---|---|
| | $temp_1$ | $temp_2$ | resultat |
| 0 | | | 0 |
| 1 | | | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 2 | 3 | 5 |
| 6 | 3 | 5 | 8 |
| . | | | |
| . | | | |
| . | | | |
| 10 | 21 | 34 | 55 |

Tabell 9.1: Fibonacci tallfølgen

**Algoritme**

1 Definere en funksjon kalt *fibonacci()*, funksjonen tar ledd-nummer som parameter.

1.1 Definere hjelpevariabler *temp_1* og *temp_2*, og sette dem lik henholdsvis 0 og 1; disse er altså startverdier for å finne ledd-nummer 2, og fortsette med å finne de neste tallene i

følgen.

1.2 Definere en variabel *resultat* for å lagre resultatet av beregningen.

1.3 Bruke en *for*-løkke som looper $n$ ganger.

1.3.1 Sette *temp_1* lik *temp_2*.

1.3.2 Sette *temp_2* lik *resultat*.

1.3.3 Sette *resultat* lik summen av *temp_1* og *temp_2*.

1.4 Returnere *resultat*.

2 Definere *main()*-funksjonen som klientprogram.

2.1 Spørre brukeren om hvilket ledd hun ønsker å finne i Fibonacci tallfølgen; konvertere input-verdien til heltall.

2.2 Finne leddet ved å kalle *fibonacci()*-funksjonen.

2.3 Skrive ut resultatet.

3 Kalle *main()*-funksjonen.

```
'''
funksjonen finner n-te ledd i Fibonacci tallfølgen.
metoden tar ledd-indeksen som parameter, og returnerer verdien til leddet
'''
def fibonacci(n):

    # definerer to hjelpevariabel for å finne ledd nummer n; tilordner temp_1 -> ledd_0 og temp_2 -> ledd_1
    temp_1 = 0
    temp_2 = 1

    # definerer en variabel resultat for å lagre summen av de to tidligere leddene inn i
    resultat = 0

    # for-løkke for å finne leddet
    for i in range(n):

        '''
        algoritmen for å finne ledd_n:

        tem_1 + temp_2 = resultat
                  ||        ||
        ->      temp_1 + temp_2 = resultat
                          ||      ||
                ->      temp_1 + temp_2 = resultat
        '''
        temp_1 = temp_2
        temp_2 = resultat
        resultat = temp_1 + temp_2

    # returnerer resultatet
    return resultat

# klient-programmet
def main():

    # får ledd-indeksen fra brukeren, konverterer den til heltall
    n = int(input('Skriv inn indeksen til leddet: '))

    # finner leddet med å kalle fibonacci()-funksjonen
    ledd_n = fibonacci(n)

    # skriver ut resultatet
    print(f'Ledd nummer {n} i Fibonacci tallfølgen er {ledd_n}')

main()
```

Program 9.1: Programmet finner n-te ledd i Fibonacci tallfølgen.

Eksempel output:

```
Skriv inn indeksen til leddet: 10
Ledd nummer 10 i Fibonacci tallfølgen er 55
```

## 9.2 Eksponential vekst

**Oppgave** Du skal nå lage en forenklet modell for harepopulasjonen på fjellet. I et avgrenset område på fjellet settes det ut $N_0$ harer. Anta at populasjonsveksten er gitt ved:

$$N(t) = N_0 * 1.4^t \tag{9.2}$$

Lag en funksjon som tar inn to argumenter: antall år gitt ved $t$ og antall harer vi starter med gitt ved $N_0$, og finner harepopulasjonen.

Plott deretter harepopulasjonen de første $x$ årene. Hvorfor er modellen urealistisk?

Oppgaven er hentet fra (ProFag, 2021).

**Løsning** Vi definerer først en funksjon *beregn_harepopulasjon()*; funksjonen tar inn de to verdiene som er bedt i oppgaven som parametere, og returnerer harepopulasjonen.

Deretter definerer vi en annen funksjon for å plotte harepopulasjonen ved hjelp av denne funksjonen.

### Algoritme

1 Importere *NumPy*-biblioteket, og *matplotlib.pyplot*-modulen.

2 Definere en funksjon *beregn_harepopulasjon()*; funksjonen tar antall harer ved tiden 0, og antall år som parametere.

- 2.1 Beregne harepopulasjonen $N_t$ ved å bruke formelen 9.2.
- 2.2 Returnere $N_t$.

3 Definere en funksjon *plot_harepopulasjon()* for å plotte grafen.

- 3.1 Få antall harer ved tiden 0, $N_0$, og antall år $t$ fra brukeren; konvertere input-verdiene til heltall.
- 3.2 Beregne harepopulasjonen $N_t$ ved tiden $t$ ved å kalle *beregn_harepopulasjon()*-funksjonen.
- 3.3 Skrive ut resultatet.
- 3.4 Lage en liste for $x$-verdier ved å kalle funksjonen *linspace()* fra *Numpy*-biblioteket; funksjonen tar startpunkt, sluttpunkt og antall punkter for plotting som parametere.
  Her setter vi startverdi lik 0 og sluttverdi lik $t$. Antall punkter kan være hva som helst.
- 3.5 Lage en liste for $y$-verdier ved å kalle *beregn_harepopulasjon()*-funksjonen, funksjonen tar startverdi $N_0$ og $x$-verdier som parametere.
- 3.6 Sette tittel for plottet ved å kalle *title()*-funksjonen fra *pyplot*.
- 3.7 Sette label for $x$- og $y$-aksen ved å kalle henholdsvis *xlabel()*- og *ylabel()*-funksjonen.
- 3.8 Sette rutenett på plottet ved å kalle *grid()*-funksjonen.

3.9 Tegne grafen ved å kalle *plot()*-funksjonen; funksjonen tar $x$- og $y$-verdier som parametere.

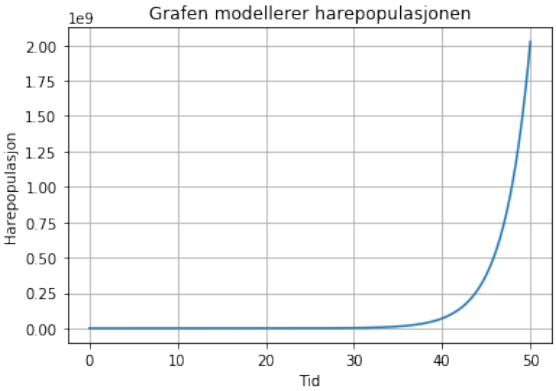
4 Kalle *plot_harepopulasjon()*-funksjonen.

```
'''
Programmet beregner harepopulasjonen N ved tiden t og tegner grafen til funksjonen
'''

# importerer biblioteker
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

'''
funksjonen beregner harepopulasjon
parameter: antall harer N_0 ved tiden 0, og antall år t
return: harepopulasjon ved tiden t
'''
def beregn_harepopulasjon(N_0, t):

    # beregner populasjon med bruk av formelen
    N_t = N_0 * 1.4**t

    # returnerer resultatet
    return N_t

# funksjonen for plotting
def plot_harepopulasjon():

    # Får startpopulasjon og antall år fra brukeren
    N_0 = int(input('Skriv inn antall harer ved tiden 0: '))
    t = int(input('Skriv inn antall år: '))

    # beregner harepopulasjonen
    N_t = beregn_harepopulasjon(N_0, t)

    # skriver ut harepopulasjonen
    print(f'Harepopulasjonen etter {t} år er {N_t}.')

    # lager en liste av x-verdier med hjelp av linspace()-funksjonen
    x_verdier = np.linspace(0, t, 1000)

    # beregner y-verdi for hver x-verdi med å kalle funksjonen beregn_harepopulasjon()
    y_verdier = beregn_harepopulasjon(N_0, x_verdier)

    # setter tittel for grafen
    plt.title("Grafen modellerer harepopulasjonen")

    # setter navn for x-aksen
    plt.xlabel("Tid")

    # setter navn for y-aksen
    plt.ylabel("Harepopulasjon")

    # lager rutenett i plottet
    plt.grid()

    # plotter grafen med å kalle plot-funksjonen() (fra pylab)
    plt.plot(x_verdier, y_verdier)

plot_harepopulasjon()
```

Program 9.2: Programmet beregner harepopulasjonen $N$ ved tiden $t$ og tegner grafen til funksjonen.

Eksempel output:

```
Skriv inn antall harer ved tiden 0: 100
Skriv inn antall år: 50
Harepopulasjonen etter 50 år er 2024891623.9764307.
```




Figur 9.1: Grafen viser utviklingen av harepopulasjonen som en eksponential funksjon.

"Grafen 9.1 viser en eksponential vekst av harer. Grunnen til at modellen er urealistisk er fordi den ikke tar hensyn til andre faktorer. En økende harepopulasjon ville ført til mangel på mat siden vi ser på et avlukket område. Det ville også ført til en økende populasjon av rovdyr, siden rovdyrene får mer mat. I et avlukket område ville altså harene hatt en begrenset bæreevne"(ProFag, 2021).

## 9.3 Statistikk

Statistikk hjelper oss med å undersøke store mengder av *enheter*. Ved statistiske undersøkelser er vi interessert i en *populasjon* av enheter, og i stedet for å undersøke hele populasjonen, velger vi ut noen få. Ut fra resultatet vi får fra dette *utvalget*, forsøker vi å konkludere noe om enhetene i hele populasjonen (Løvås, 2018).

I statistikk har vi to typer data:

- Diskrete data: "Diskrete data er observasjoner av diskrete variabler. Her er bare enkelte tall langs talls linjen aktuelle som kjennetegn"(Løvås, 2018, s. 41).
- Kontinuerlige data: "Kontinuerlige data er observasjoner av kontinuerlige variabler. Her kan alle tallverdier innen et gitt intervall brukes for å angi et kjennetegn"(Løvås, 2018, s. 42).

Vi jobber ofte med store datasett når vi undersøker et fenomen i en populasjon. Datasettet kan inneholde mange forskjellige verdier, og dette fører til kompleksitet i analysen av datasettet. Det finnes dermed metoder som hjelper oss med å holde oversikt over datasettet, og beregne nøkkeltall som beskriver dataene.

**Frekvensfordeling** En frekvensfordeling er en grafisk eller tabellarisk representasjon som viser antall observasjoner innen et gitt intervall. Størrelsen på intervallet er avhengig av dataene som analyseres, og analytikerens mål. Frekvensfordeling brukes vanligvis innenfor en statistisk sammenheng. Generelt kan frekvensfordeling være assosiert med kartleggingen av en normalfordeling (Young, 2020).

**Histogram** "Et histogram er et søylediagram som visualiserer innholdet i en frekvenstabell. Histogrammet er definert slik at arealet av alle søylene til sammen er lik 1"(Løvås, 2018, s. 44).

**Sentralmål** Sentralmål er en representativ målingsverdi i datasettet som befinner seg et sted sentralt i histogrammet (Løvås, 2018).

- Modus: Den verdien som forekommer flest ganger i datasettet (Løvås, 2018).
- Median: Den verdien som ligger i midten av et sortert datasett (Løvås, 2018).
- Utvalgets gjennomsnitt: Verdien lik summen av alle verdier delt på antall verdier i datasettet, og er gitt ved følgende formel (Løvås, 2018):

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{9.3}$$

**Spredningsmål** Spredningsmål viser variasjonen i datasettet:

- Variasjonsbredde: Differansen mellom størst observasjon og minst observasjon, dvs. variasjonsbredden beskriver bredden på utvalgets histogram (Løvås, 2018).
- Utvalgets standardavvik: "Standardavvik er et typisk avvik fra gjennomsnitts verdien. Målingen tar utgangspunkt i å se hvor mye hver enkelt verdi avviker i forhold til gjennomsnittet"(Løvås, 2018, s. 57). Formelen for standardavvik er gitt ved:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{9.4}$$

- Utvalgets varians: Hovedideen bak varians er at vi kvadrerer standardavvik, og finner noe som kalles avviks kvadrat. Den gjennomsnittlige verdien av avviks kvadratene er lik utvalgets varians, og er gitt ved:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{9.5}$$

I Python kan vi enkelt bruke NumPy-biblioteket for å beregne sentralmål og spredningsmål for et datasett. (For modus bruker vi *mode()*-funksjonen fra *scipy.stats*-modulen.)

```
'''
Programmet beregner statistiske målinger
'''

# importerer biblioteker
import random
from numpy import *
from scipy import stats

# definerer en tom liste
en_liste = []

# looper for å generere 20 tilfeldige tall
for i in range(20):

    # kaller i hver loop randint()-funksjonen som genererer heltall på intervallet [0, 100]
    random_tall = random.randint(0,100)

    # legger tallet til listen
    en_liste.append(random_tall)

# skriver ut listen
print(en_liste, '\n')

# sentralmål:

# kaller på mode()-funksjonen fra stats-modulen
modus = stats.mode(en_liste)

# kaller følgende funksjoner fra Numpy-biblioteket
median = median(en_liste)
gjennomsnitt = average(en_liste)
gjennomsnitt_2 = mean(en_liste)

# spredningsmål

# kaller på ptp()-funksjonen fra NumPy-biblioteket
variasjonsbredde = ptp(en_liste)

# kaller på var()- og std()-funksjonen

# varians for populasjon
varians = var(en_liste, ddof=0)

# varians for et utvalg
utvalgetsvarians = var(en_liste, ddof=1)

# standardavvik for populasjon
standardavvik = std(en_liste, ddof=0)

# standardavvik for et utvalg
utvalgetsstandardavvik = std(en_liste, ddof=1)

# skriver ut resultatet
print(f'Sentralmål:\n\
        Modus: {modus}\n\
        Median: {median:.2f}\n\
        Gjennomsnitt beregnet med average()-funksjonen: {gjennomsnitt:.2f}\n\
        Gjennomsnitt beregnet med mean()-funksjonen: {gjennomsnitt_2:.2f}\n')

print(f'Spredningsmål:\n\
        Variasjonsbredde: {variasjonsbredde}\n\
        Varians for populasjon: {varians:.2f}\n\
        Utvalgets varians: {utvalgetsvarians:.2f}\n\
        Standardavvik for populasjon: {standardavvik:.2f}\n\
        Utvalgets standardavvik: {utvalgetsstandardavvik:.2f}')
```

Program 9.3: Programmet viser funksjoner for å finne sentralmål og spredningsmål for et datasett i Python.

Eksempel output:

```
[22, 27, 20, 56, 61, 72, 63, 75, 67, 55, 25, 20, 96, 79, 49, 73, 79, 25, 69, 11]

Sentralmål:
        Modus: ModeResult(mode=array([20]), count=array([2]))
        Median: 58.50
        Gjennomsnitt beregnet med average()-funksjonen: 52.20
        Gjennomsnitt beregnet med mean()-funksjonen: 52.20

Spredningsmål:
        Variasjonsbredde: 85
        Varians for populasjon: 611.26
        Utvalgets varians: 643.43
        Standardavvik for populasjon: 24.72
        Utvalgets standardavvik: 25.37
```

### Noen oppmerksomheter om statistiske funksjoner i Python

- Forskjellen mellom *average()*-funksjonen og *mean()*-funksjonen er at vi kan beregne vektet gjennomsnitt ved å buke *average()*. Vektet gjennomsnitt er den verdien vi får fra multiplisering av hvert element i listen med en faktor som gjenspeiler dens betydning. Dersom vi ikke bruker vektfaktor for beregning av gjennomsnittet, fungerer *average()* lik som *mean()*-funksjonen.
- Siden *NumPy*-biblioteket ikke har noe innebygd funksjon for beregning av modus, beregner vi modus ved å benytte *mode()*-funksjonen fra *scipy.stats*-modulen.

**Oppgave** Ved en skole ble høyden til alle elevene på Vg2 målt. Resultatet er presentert i tabellen under:

Høyde til elevene

| Høyde i cm | Frekvens |
|---|---|
| $[150, 160\rangle$ | 6 |
| $[160, 165\rangle$ | 21 |
| $[165, 170\rangle$ | 60 |
| $[170, 175\rangle$ | 73 |
| $[175, 180\rangle$ | 64 |
| $[180, 185\rangle$ | 67 |
| $[185, 190\rangle$ | 24 |
| $[190, 200\rangle$ | 8 |
| Sum | 323 |

Finn søylehøyden (histogramhøyden) i hvert intervall, og tegn histogram som illustrerer resultatet.

**Løsning** Histogramhøyden finner vi ved å dele frekvens på klassebredde:

$$histogramhoyde = \frac{frekvens}{klassebredde} \tag{9.6}$$

Søylehøyden viser altså antall elever per centimeter. Vi får igjen frekvensen hvis vi multipliserer søylehøyden med klassebredde.

**Algoritme**

1 Importere biblioteket *NumPy*, og modulen *matplotlib.pyplot*.

2 Lage en liste av frekvenser. Vi velger å lage liste med *array()*-funksjonen fra NumPy. NumPy-arrayer er mer fleksible og gir oss mulighet for å utføre operasjoner som subtrahering og divisjon av to lister på samme måte som vi gjør med enkelte tall.

3 Lage to lister ut fra intervaller; en liste består av startverdier på hvert intervall, og den andre inkluderer sluttverdier på hvert intervall. Vi skal beregne klassebredde for intervaller for å finne søylehøyde. Dessuten vil vi ha behov for de to listene for plotting av histogrammer.

4 Definere en liste *klassebredde* ved å subtrahere startverdi-listen fra sluttverdi-listen.

5 Beregne søylehøyden ved å dele frekvens-listen på klassebredde-listen.

6 Skrive ut listen.

7 Definere et plott (figure) som består av to subplotter *ax1* og *ax2*. Plottet er et $1 \times 2$ plott, det betyr at plottene skal ligge horisontalt, og ved siden av hverandre. Vi definerer også størrelse for plottet. Syntaksen er som følger:

```
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(x, y))
```

8 Sette tittel for plottet (figuren) ved å kalle *suptitle()*-funksjonen.

9 Sette label for $x$- og $y$-aksen for subplottene ved å kalle *set()*-funksjonen; funksjonen tar *xlabel* og *ylabel* som parametere. Syntaksen for, f. eks. *ax1* er som følger:

```
ax1.set(xlabel='xlabel', ylabel='ylabel')
```

Merk at *ax1* her er den samme som *plot*. Vi har (som ble nevnt) definert et subplott, men funksjonaliteten er den samme som plott.)

10 Plotte diagrammer (histogrammer) ved hjelp av *bar()*-funksjonen. (og ikke *hist()*). Grunnen er at vi har allerede frekvenser. *hist()*-funksjonen brukes når vi ikke har telt frekvenser i datasettet. *hist()*-funksjonen finner automatisk frekvenser, og dette er veldig effektivt når vi jobber med store datasett.

*bar()*-funksjonen tar følgende parametere (Nelson, 2018):

```
bar(x, height, width=0.8, bottom=None, ec='k', align='center')
```

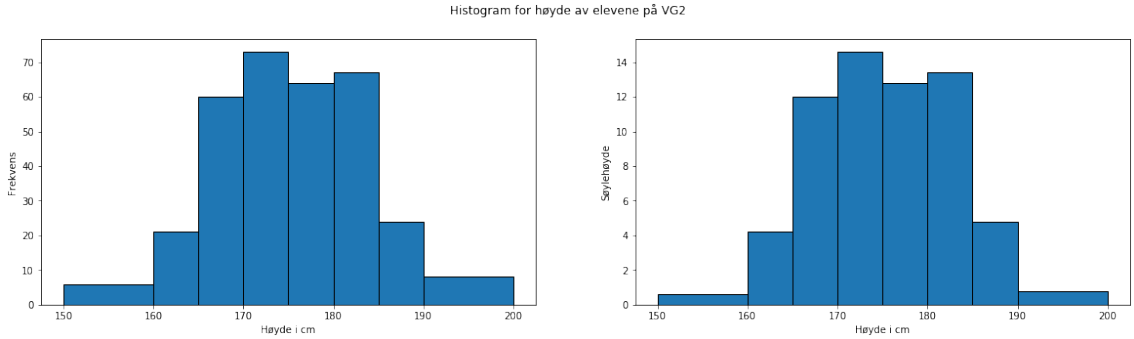
- **x:** $x$-koordinat for hver stolpe; i denne oppgaven setter vi $x$ lik startverdier i hvert intervall.
- **height:** Høyden for hver stolpe; her setter vi frekvens for plott 1 og søylehøyde for plott 2 som høyde.
- **widht:** Bredde til intervaller (sluttverdi - startverdi).
- **bottom:** $y$-koordinat for hver stolpe, og som standard er lik 0.
- **ec:** ec står for «edge color», og setter farge rundt stolpene. I denne oppgaven velger vi 'k' som står for svartfarge.
- **align:** Justerer stolpene med $x$-koordinat, og kan settes enten som 'center' eller 'edge'. Hvis man velger 'center', vil $x$-koordinater settes i midten av intervallet. I denne oppgaven velger vi 'edge' som setter $x$-koordinater til venstre.
  For å justere stolpene på høyre siden, setter vi *width* negativt, og velger 'edge'.

```
'''
Programmet tegner histogram for et datasett
'''

# importerer biblioteker
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# lager liste av frekvensverdier
frekvens = np.array([6, 21, 60, 73, 64, 67, 24, 8])

# startpunkter i hvert intervall
min_liste = np.array([150, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190])

# sluttpunkter i hvert intervall
max_liste = np.array([160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 200])

# lager en liste for klassebredde
klassebredde = max_liste-min_liste

# finner søylehøyden for hvert intervall
søylehøyde = frekvenser / klassebredde

# skriver ut resultatet
print(f'søylehøyden i hvert intervall: {list(søylehøyde)}')

# definere en 1x2 figur for plotting
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(20, 5))

# setter title for figuren
fig.suptitle('Histogram for høyde av elevene på Vg2')

# setter x- og y-label for plotter
ax1.set(xlabel='Høyde i cm', ylabel='Frekvens')
ax2.set(xlabel='Høyde i cm', ylabel='Søylehøyde')

# plott1: frekvenser mot klasser(intervaller)
ax1.bar(min_liste, frekvens, width=klassebredde, ec="k", align="edge")

# plott2: søylehøyde mot klasser(intervaller)
ax2.bar(min_liste, søylehøyde, width=klassebredde, ec="k", align="edge")
```

Program 9.4: Programmet finner søylehøyden, og tegner histogram for datasettet.

Output:

```
søylehøyden i hvert intervall: [0.6, 4.2, 12.0, 14.6, 12.8, 13.4, 4.8, 0.8]
```




Figur 9.2: Histogrammet til høyre illustrerer høyden vs frekvenser; og histogrammet til venstre illustrerer høyden vs søylehøyden.

# Referanser


Astropy-Developers. (2021). *Table* [Link].

Bueie, H. (2019). *Programmering for matematikklærere*. Universitetsforlaget.

Falcon, S. & Plaza, Á. (2007). The k-Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle. *Chaos, Solitons & Fractals*, *33*(1), 38–49.

Farlow, S. J. (2006). *An introduction to differential equations and their applications*. Courier Corporation.

GeeksforGeeks. (2021a). *Program for Bisection Method* [Link].

GeeksforGeeks. (2021b). *Program for Newton Raphson Method* [Link].

Hafting, H. & Ljosland, M. (2014). *Algoritmer og datastrukturer*. Gyldendal Akademisk.

Haraldsrud, A. D., Sveinsson, H. A. & Løvold, H. H. (2020). *Programmering i skolen*. Universitetsforlaget.

Hunter, J., Dale, D., Firing, E., Droettboom, M. & the Matplotlib development team. (2021a). *matplotlib.pyplot.annotate* [Link].

Hunter, J., Dale, D., Firing, E., Droettboom, M. & the Matplotlib development team. (2021b). *matplotlib.pyplot.axhline* [Link].

Hunter, J., Dale, D., Firing, E., Droettboom, M. & the Matplotlib development team. (2021c). *matplotlib.pyplot.bar* [Link].

I.T., P. (udatert). *The Euclidean division* [Link].

Kalvø, T., Opdahl, J. C. L., Weider, Ø. & Skrindo, K. (2020). *Mønster: Matematikk 1T*. Gyldendal Norsk Forlag.

Kristensen, O. & Aanensen, S. (udatert). *Funksjoner Løsninger S2* [Link].

Kristensen, O. & Aanensen, S. (2018a). *Eksponentialfunksjon som modell* [Link].

Kristensen, O. & Aanensen, S. (2018b). *Hva er en differensiallikning?* [Link].

Kristensen, O. & Aanensen, S. (2018c). *Tallfølger* [Link].

Kristensen, O. & Aanensen, S. (2018d). *Tallrekker* [Link].

Kristensen, O. & Aanensen, S. (2018e). *Trekanttall og Pascals talltrekant* [Link].

Kristensen, O. & Aanensen, S. (2018f). *Vektorer* [Link].

Kristensen, O. & Aanensen, S. (2018g). *Økonomiske optimeringsproblem* [Link].

Kristensen, O. & Aanensen, S. (2020). *Likningssett* [Link].

Kristensen, O., Aanensen, S. & Skurdal, B. (2021). *Andre typer modeller og mønstre* [Link].

Løvås, G. G. (2018). *Statistikk for universiteter og høyskoler*. Universitetsforlaget.

ManBearPig. (2016). *How to reverse a number mathematically* [Link].

MAT20x Vår 2021. (2021).

Matematikk.org. (udatert). *Arealsetningen* [Link].

Nelson, J. (2018). *The Perfect Multiple Bar Chart* [Link].

Pólya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

ProFag. (2021). *profag:vgs 20-21: Oppgaver til ProFag:VGS* [Link].

Python-Software-Foundation. (2021). *Built-in Functions* [Link].

Storey, B. D. (udatert). *Numerical Methods for Differential Equations* [Link].

SymPy-Development-Team. (2021a). *Lambdify* [Link].

SymPy-Development-Team. (2021b). *Solvers* [Link].

SymPy-Development-Team. (2021c). *What is Symbolic Computation?* [Link].

The-SciPy-community. (2021a). *scipy.integrate.odeint* [Link].

The-SciPy-community. (2021b). *scipy.optimize.fsolve* [Link].

tutorialpoint. (udatert). *Python - Functions* [Link].

W3Schools. (udatert-a). *Python Classes and Objects* [Link].

W3Schools. (udatert-b). *Python Lambda* [Link].

W3Schools. (udatert-c). *Python Variables* [Link].

Walls, P. (2019a). *First Order Equations* [Link].

Walls, P. (2019b). *Riemann Sums* [Link].

Weisstein, E. W. (2002a). Integral. *https://mathworld. wolfram. com/*.

Weisstein, E. W. (2002b). Palindromic Number. *https://mathworld. wolfram. com/*.

Weisstein, E. W. (2002c). Square number. *https://mathworld. wolfram. com/*.

Weisstein, E. W. (2002d). Triangular number. *https://mathworld. wolfram. com/*.

Young, J. (2020). *Frequency Distribution* [Link].

# Tillegg

# I Numeriske metoder

"Numerisk matematikk handler om å lage algoritmer for å tilnærme matematiske løsninger med minst mulig feil"(Haraldsrud mfl., 2020).

Vi kan løse matematiske problemer som for eksempel derivasjon og integrasjon med hjelp av numeriske metoder. Disse matematiske metoder er spesielt viktig når vi ønsker å løse mer realistiske problemstillinger som ikke lar seg å løses så enkelt med analytisk matematikk, eller de ikke har en eksakt løsning i det hele tatt. Numeriske metoder spiller også en sentral rolle for å finne nullpunkter i diskrete data og store datasett (Haraldsrud mfl., 2020).

## i Halverings metode

Halverings metode tar utgangspunkt i skjæringssetningen der vi har en kontinuerlig funksjon $f$, og to punkter $a$ og $b$ på $x$-aksen. Dersom $f(a)$ og $f(b)$ har forskjellige fortegn, finnes det ett (eller flere) nullpunkt $c$ på intervallet $[a, b]$.

I halverings metoden finner vi først et midtpunkt $m$ gitt ved:

$$m = \frac{a+b}{2} \tag{I.1}$$

Hvis $f(m)$ og $f(a)$ har forskjellige fortegn, lager vi et nytt intervall $[a, b]$ der $b = m$. Hvis $f(m)$ og $f(b)$ har forskjellige fortegn, lager vi intervallet $[a, b]$ der $a = m$. Vi repeterer, og finner midtpunkter helt til $f(m) = 0$.

## ii Newtons metode

Newtons metode finner et tilnærmet nullpunkt til en funksjon $f$ ved hjelp av nullpunktet til den $n$-te tangenten til funksjonen.

Vi bruker først en startgjett $x_0$, og deretter finner nullpunktet $x_{n+1}$ til den $n$-te tangenten ved å ta i bruk nullpunktet $x_n$ til den forrige tangenten. Vi gjentar prosessen helt til $f(x_{n+1}) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{I.2}$$

## iii Eulers metode

Eulers metode er spesielt brukelig for å løse første ordens differensiallikninger. Vi kan også løse høyere ordens differensiallikninger ved å bruke Eulers metoden flere ganger.

Gitt en initialtilstand $f(x)$, og en differensiallikning som angir $f'(x)$, kan vi finne en tilnærmet

verdi til $f(x+1)$:

$$f(x+1) = f(x) + f'(x).\Delta x \tag{I.3}$$

Der $\Delta x$ er steglengde, og regnes utfra et intervall $[a, b]$ med antall steglengde $n$:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \tag{I.4}$$

### iv Rektangelmetoden

Vi kan bruke *Riemann-summene* for å beregne integraler numerisk. Summen beregnes ved å dele området under grafen i geometriske former som rektangler, trapeser, paraboler eller kubikk. Deretter summerer vi arealet av de geometriske formene. Den endelige summen er en numerisk tilnærming for en bestemt integral.

Riemann-summene har forskjellige typer avhengig av beregning av $x_i$-verdier:

- Venstre Riemann-sum
- Høyre Riemann-sum
- Midtpunktmetoden

Når vi finner en tilnærmet verdi for en bestemt integral ved å summere et antall rektangler, kaller vi metoden for *rektangelmetoden*.

Rektangelmetoden (venstre Riemann-sum), tar venstre $x$-verdier i et intervall $[a, b]$, og beregner arealet av de $n$ venstre rektangler som ligger under en graf $f$.

Det bestemte integralet av en funksjon $f(x)$ over intervallet $[a, b]$ kan tilnærmes ved arealet av $n$ rektangler med bredden gitt ved:

$$h = \frac{b-a}{n} \tag{I.5}$$

Formelen for metoden er gitt ved (Haraldsrud mfl., 2020):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{k=1}^{n} f(x_i) \tag{I.6}$$

## II Følger og rekker

### i Aritmetiske tallfølger

En tallfølge der differansen mellom et ledd og leddet foran er konstant, kalles en aritmetisk tallfølge. Differansen mellom to ledd som følger etter hverandre i en aritmetisk tallfølge, er gitt ved:

$$d = a_n - a_{(n-1)} \quad n > 1$$

En rekursiv formel for en aritmetisk tallfølge blir derfor:

$$a_n = a_{(n-1)} + d \tag{II.1}$$

I en aritmetisk tallfølge er tall nummer n gitt ved formelen:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \tag{II.2}$$

Hvor $a_n$ er $n$-te ledd i følgen, $a_1$ er det første leddet og $d$ er konstant (Kristensen & Aanensen, 2018c).

## ii Geometriske tallfølger

En tallfølge der forholdet mellom et ledd og leddet foran er konstant, kalles en geometrisk tallfølge. I en geometrisk tallfølge kan vi alltid finne neste ledd i tallfølgen ved å multiplisere med kvotienten $k$. Den rekursive formelen for en geometrisk tallfølge blir derfor:

$$a_n = a_(n-1).k \tag{II.3}$$

I en geometrisk tallfølge er ledd nummer $n$ gitt ved formelen (Kristensen & Aanensen, 2018c):

$$a_n = a_1.k^{(n-1)} \tag{II.4}$$

## iii Aritmetiske rekker

"Når vi adderer leddene i en tallfølge, får vi en tallrekke"(Kristensen & Aanensen, 2018d).

Tallrekker eller bare rekker er enten *endelige* eller *uendelige*. Summen av de $n$ første leddene i en rekke vises med $S_n$.

"Når vi adderer leddene i en aritmetisk tallfølge, får vi en aritmetisk rekke"(Kristensen & Aanensen, 2018d).

Summen av de $n$ første leddene i en aritmetisk rekke er gitt ved:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}.n \tag{II.5}$$

## iv Geometriske rekker

"Når vi adderer leddene i en geometrisk tallfølge, får vi en geometrisk tallrekke. I en geometrisk rekke er forholdet mellom et ledd og det foregående leddet konstant. Vi kaller dette forholdstallet for rekkens kvotient, $k$"(Kristensen & Aanensen, 2018d).

Summen av de $n$ første leddene i en geometrisk rekke er gitt ved:

$$S_n = a_1.(\frac{k^n - 1}{k - 1}) \quad k \neq 1 \tag{II.6}$$

Dersom $k = 1$, er:

$$S_n = n.a_1 \tag{II.7}$$