Rikke Overvik Aasander

Objekt eller prosess

En kvalitativ studie av elevers oppfatning av negative tall på 7. trinn

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Trondheim, mai 2018

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Da er masteroppgaven ferdig, og et stort og viktig kapittel i mitt liv er avsluttet. Jeg er nå ferdig med å være lærerstudent, og fra fem år på lærerskolen tar jeg med meg utallige erfaringer, minner og gode historier når jeg nå begynner livet som barneskolelærer. Arbeidet med masteroppgaven har til tider vært frustrerende og vanskelig, men også svært spennende og givende. Jeg sitter igjen med en følelse av glede og stolthet fordi jeg er ferdig, og en følelse av vemod av samme grunn.

Det er noen jeg ønsker å takke litt ekstra for det de har gjort for å hjelpe meg gjennom arbeidet med masteroppgaven. Først og fremst vil jeg takke min dyktige veileder Heidi Dahl. Gjennom hele året har hun vært en uvurderlig støttespiller som har bidratt med gode tilbakemeldinger og tips. En stor takk rettes også til de to skolene som tok godt imot meg og satte av tid til å delta på prosjektet mitt. Jeg vil også takke de flotte studentene jeg har delt kontor med i løpet av skriveprosessen. Uten gode tips, inspirasjon, latter og mat-, kaffe-, og ispauser, hadde jeg aldri kommet meg gjennom dette året. I hvert fall ikke med like godt humør. Til slutt fortjener samboeren min en stor takk for at han har holdt ut med meg, spesielt i innspurten av skrivinga. Takk for trøst, motivasjon og hjemmelagde middager.

Rikke Overvik Aasander

Trondheim, mai 2018

Innholdsfortegnelse

1 Innledning 1

1.1 Tidligere forskning på unge og eldre elever 2

1.2 Problemstilling 4

1.3 Teori- og metodevalg 6

1.4 Oppbygging av oppgaven 7

2 Teori 9

2.1 Historisk perspektiv på negative tall 9

2.2 Behandling av negative tall 10

2.2.1 Minustegnets funksjoner 10

2.2.2 Subtraksjon 11

2.2.3 Kobling til positive tall 12

2.3 Ulike tallsyn og negative tall 13

2.3.1 Modeller 15

2.4 Operasjonell og strukturell oppfatning 19

2.4.1 Hvordan elevenes oppfatning kommer til uttrykk 22

3 Metodekapittel 27

3.1 Forskningsdesign 27

3.2 Pilotstudie 28

3.3 Gjennomføring av datainnsamling 29

3.4 Analysemetode 32

3.5 Etiske betraktninger 34

3.6 Metodekritikk 35

4 Analyse av oppgavene 37

4.1 Oppgave 1: (-5) + 8 37

4.2 Oppgave 2 og 3: 9 – 9 og (-7) – (-7) 37

4.3 Oppgave 4: 7 – 10 38

4.4 Oppgave 5 og 6: □ + 5 = 2 og 5 – □ = 8 38
4.5 Oppgave 7: 9 + (-15) 39
4.6 Oppgave 8: (-4) – 7 40
5 Analyse av datamaterialet 41
5.1 Fordeling av riktig og feil svar 41
5.2 Behandling av negative tall 43
5.2.1 Minustegnets rolle 43
5.2.2 Oppgave 3 og subtraksjon av negative tall 47
5.3 Tallsyn 52
5.3.1 Tallinje 56
5.3.2 Telle på fingrene 58
5.3.3 Kontekst 59
5.3.4 Klosser 59
5.4 Oppsummering 60
6 Drøfting 63
6.1 Minustegnets funksjoner 63
6.2 Kobling til positive tall 66
6.3 Variasjon i tallsyn 68
6.4 Visuelle og ikke-visuelle modeller 70
7 Avslutning 73
8 Referanseliste 75
9 Vedlegg 79
9.1 Vedlegg 1: Godkjenning NSD 79
9.2 Vedlegg 2: Samtykkeskjema 80
9.3 Vedlegg 3: Intervjuguide 82
9.4 Vedlegg 4: Koder nVivo 83

Figuroversikt

Figur 1: Representasjon av oppgaven 5 + (-3) på tallinje. 17
Figur 2: Modellering av stykket 5 - (-3) ved hjelp av sorte og røde klosser 18
Figur 3: Representasjon av a + b ved hjelp av piler på tallinje 18
Figur 4: Representasjon av a – b ved hjelp av piler på tallinje 18

Tabelloversikt

Tabell 1: Oversikt over oppgavene 31
Tabell 2: Oversikt over riktig og feil svar 42
Tabell 3: Oversikt over riktige og feil svar basert på oppgave 42
Tabell 4: Oversikt over elevenes bruk av minustegnets roller 44
Tabell 5: Oversikt over ulike representasjoner og tenkemåter i oppgave 3 48
Tabell 6: Oversikt over elevenes tallsyn 52
Tabell 7: Oversikt over de ulike modellene elevene benytter seg av 56

1 Innledning

Negative tall er noe av det første jeg husker som virkelig utfordrende fra matematikktimene på barneskolen. Fram til da hadde matematikken for det meste handlet om ting vi kunne ta og føle på. Negative tall representerte noe som ikke var der i større grad enn de tidligere emnene hadde gjort. Det var det svært vanskelig å akseptere. Jeg klarte å regne med de negative tallene, og forstod kontekstene læreren presenterte for oss; termometeret hadde jeg et godt forhold til, og penger og gjeld var også uproblematisk. Problemet var at jeg ikke forstod hvorfor vi trengte negative tall til å regne med tallene i disse kontekstene. Hvis det var 6 varmegrader i går, og temperaturen sank med 8 grader neste dag, var det bare å telle seg ned til null og opp til 2 igjen, og svaret ble 2 kuldegrader. Det samme gjaldt for andre modeller, som penger og gjeld; jeg trengte ikke å forholde meg til de negative tallene. I senere tid har jeg skjønt at jeg ikke var den eneste som syntes dette var problematisk. Thomaidis (1993) har sett på de modellene som vanligvis brukes til å introdusere negative tall; kontekster om penger, temperatur eller gjeld. Han mener at slike modeller ikke hjelper elevene å komme over hindringene som negative tall presenterer, fordi det ikke er nødvendig å bruke negative tall i disse kontekstene. Kontekstene blir dermed en måte å unngå å jobbe med negative tall på, ikke en måte å møte dem på. Det at man ikke trenger negative tall i hverdagskontekster peker på en annen problemstilling som kan belyses historisk. Behovet for negative tall kom ikke fra situasjoner i hverdagen, men fra algebra og behovet for generalisering (Freudenthal, 2002). Det at negative tall introduseres for elever ved hjelp av hverdagskontekster hvor det ikke er nødvendig å bruke negative tall kan gjøre at de føles unødvendige og overfladiske.

Etter hvert i min skolegang ble negative tall mer avansert, og det ble enda vanskeligere å forstå logikken bak regnereglene med utgangspunkt i modellene. Hvorfor ble subtraksjon av negative tall gjort om til addisjon? Hvis jeg hadde 7 kroner i gjeld, og mistet den gjelden, så fikk jeg plutselig 7 kroner. Det hadde jeg aldri opplevd i virkeligheten. Det skulle vise seg at frustrasjonen over modeller som ikke gir mening til regning med negative tall opprørte flere enn meg. Blant annet matematikkdidaktikeren Freudenthal (2002) kritiserer de modellene som tradisjonelt brukes til å undervise negative tall. Han argumenterer for at negative tall blir passive i disse modellene, og at de ikke kan brukes til å forklare addisjon og subtraksjon av negative tall. I teorikapittelet går jeg gjennom de modellene han foreslår i stedet som en erstatning av de tradisjonelle modellene. Jeg lærte meg etter hvert å akseptere regnereglene, og tenkte ikke så mye mer på negative tall. Ikke før jeg begynte på lærerskolen og det igjen ble et tema. På lærerskolen fikk jeg høre at mange elever sliter med negative tall, nettopp fordi det er en så abstrakt idé, som gjerne kobles til konkrete eksempler (Kilhamn, 2011). I løpet av lærerstudiet ble jeg svært interessert i å lære mer om hvordan elever arbeider med og møter negative tall. Jeg har derfor valgt å undersøke negative tall og hvordan elever arbeider med temaet. Før jeg går nærmere inn på min studie vil jeg se på noen tidligere studier.

1.1 Tidligere forskning på unge og eldre elever

For å kunne snakke om elevers kunnskap om og arbeid med negative tall, kan det være relevant å se på hvordan elever møter negative tall for første gang. Har de en innebygd forståelse for negative tall, eller må alt læres fra bunnen av? Mange tidligere studier peker på at elever er i stand til å gi mening til negative tall før de har fått undervisning på emnet. Et eksempel på det er Peled, Mukhopadhyay og Resnick sin studie fra 1989 (referert i Kilhamn, 2011). De gjennomførte en studie hvor de intervjuet elever på første-, tredje- og femtetrinn, hvor ingen av elevene hadde hatt undervisning om negative tall. Elevene ble presentert for regneoppgaver som omhandlet negative tall. Noen av funnene i studien var at elevene hadde en mangelfull oppfatning av negative tall, men at de eldre elevene i større grad enn de yngre konstruerte modeller som inkluderte negative tall. De fikk ikke nødvendigvis riktige svar, men svarene viste at de aksepterte negative talls eksistens. Goldin og Shteingold (2001) har også sett på elever som ikke har møtt negative tall tidligere. De ønsket å se om konteksten de negative tallene ble presentert i hadde noe å si for elevenes møte med tallene. De gjennomførte en kvalitativ studie hvor de intervjuet 12 elever fra et blandet 1.- og 2.-trinn på en liten privatskole. Elevene var på ulikt nivå, og ingen hadde fått undervisning om negative tall. Elevene ble presentert for negative tall i to forskjellige kontekster. Det ene var en kardinal kontekst, som hadde mengdebegrepet i fokus, og det andre var en ordinal kontekst, som fokuserte på tallenes retning og rekkefølge. Den kardinale konteksten var et spill hvor eleven snurret en pil og enten fikk ett poeng eller mistet ett poeng. Den ordinale konteksten var en tallinje. Fem av elevene strevde med å akseptere negative tall i begge kontekstene. De resterende sju elevene var i noen grad i stand til å akseptere og bruke negative tall i minst en av kontekstene. Noen elever aksepterte negative tall i en kardinal kontekst, men ikke i en ordinal, mens andre aksepterte det i en ordinal kontekst, men ikke i en kardinal. Andre igjen aksepterte negative tall i begge kontekstene. Dette er en liten kvalitativ studie, men også større kvalitative studier peker på det samme (Goldin & Shteingold, 2001). Det kan med andre ord være avgjørende hvilken kontekst de negative tallene blir presentert i. Bofferding (2014) har sett på elever på første trinn sine mentale modeller, og hvordan modellene endrer seg som resultat av undervisning om de ulike betydningene av minustegnet. Hun gjennomførte oppgavebaserte intervju med 61 elever. Hun fant at elevene i møte med negative tall først i stor grad baserte seg på prinsipper for positive tall. Videre så hun at de elevene som fikk undervisning som inkluderte to betydninger av minustegnet, både som nominator (unary) og som operator (binary), hadde best utbytte av undervisningen. Det at elever bygger oppfatning av negative tall på oppfatning av positive tall har også Bofferding og Wessman-Enzinger (2017) sett på. Den studien vil jeg se nærmere på i teoridelen.

Det er med andre ord mye som tyder på at barn kan være i stand til å akseptere og tilnærme seg negative tall før de har fått undervisning på emnet. Men hva kan de etter å ha hatt undervisning? Murray (1985) har sett på regning med negative tall, og funnet noen typiske feil og tankemåter som går igjen hos mange elever. Han så både på elever som hadde hatt undervisning om negative tall, og elever som kun hadde fått et raskt kurs på 20 minutter. Han gjennomførte individuelle intervju med 52 elever fra 9- til 13-årsalderen og skriftlige tester med 849 elever på 9. trinn. Han konkluderer blant annet med at elevene mest sannsynlig ikke trenger så mye undervisning på emnet som det de får, og at problemene elevene har med negative tall ikke kun kan knyttes til undervisningen. Gallardo og Novoa (2000) har sett på elever ved 8. trinn sitt arbeid med brøk og hele tall. De gjennomførte oppgavebaserte spørreundersøkelser med 41 elever og intervju med 9 av de elevene. Målet med studien var å finne ut: hvordan elevene løste oppgaver med brøk og hele tall; representasjon av slike oppgaver på tallinjen; og hvordan de løste tekstoppgaver. De fant at mange av elevene plasserte de hele tallene i rekkefølge på bakgrunn av absoluttverdien til tallene. Mange elever hadde problemer med subtraksjon fordi de fokuserte på multiplikasjonsregelen som sier at (-) (-) = +. Gallardo (2003) tok for seg intervjuet av en elev fra studien til Gallardo og Novoa (2000). Intervjuet dreide seg om en tekstoppgave som gikk ut på beregning av alderen til Sokrates som ble født og døde før Kristus. Gallardo (2003) fant at selv om eleven gjorde det best av alle på spørreundersøkelsen, hadde hun store problemer med å subtrahere to negative tall fra en tekstoppgave. Küchemann (referert i Thomaidis, 1993) fant i 1981 at halvparten av 14-åringer i England ikke løste oppgaver som -2 – (-5) og -6 – (+3) riktig. Hovedparten av elevene prøvde å finne på regler i stedet for å modellere oppgavene. Dette er verdifull kunnskap om elevers arbeid med og strategier i møte med negative tall. Problemet med en del av disse studiene om eldre elevers kunnskap er at det er lenge siden de ble gjennomført. Det er derfor utfordrende å dra slutninger om hvordan det står til med elevens kunnskap i dag. Mange av disse studiene har også hovedfokus på hva barn får til og ikke får til, og ikke på hvordan de tolker og behandler negative tall. En studie som har sett mer på hvordan elever gir mening til negative tall er Kilhamn (2011). Hun har skrevet en doktorgrad om elevers meningsskaping i møte med negative tall. I den empiriske delen av avhandlingen ser hun på undervisning av negative tall og på hvordan denne undervisningen kan endre elevenes tallforståelse. Jeg ønsker ikke å se på undervisningen eller elevenes tallforståelse, men på hvordan elevene møter negative tall. For å finne ut av det er det nødvendig å gå mer i dybden på elevenes besvarelser, og se på hva som ligger bak besvarelsene. Da trenger man et begrep som sier noe om hvordan elevene tolker og behandler de negative tallene. Videre vil jeg se på flere slike begrep, og presentere og begrunne det begrepet jeg har valgt som utgangspunkt i min oppgave.

1.2 Problemstilling

Når det snakk om hvordan elever behandler og møter et emne i matematikk, er det fristende å bruke begrep som forståelse og kunnskap. Disse begrepene handler ikke bare om hvorvidt elevene svarer riktig eller feil på en oppgave; de forteller noe om hva som foregår inne i hodet på elevene i møtet med det matematiske emnet. Begge disse begrepene er flittig brukt i matematikkdidaktikken, og har mange ulike definisjoner og inndelinger (Anderson, 1996; Hiebert, 2009; Skemp, 2006). For eksempel blir forståelsesbegrepet delt inn i relasjonell og instrumentell forståelse (Skemp, 2006), og kunnskapsbegrepet delt inn i forklarende og prosedyremessig kunnskap (Anderson, 1996). En slik todeling kan være problematisk og kunstig, da det i virkeligheten sjeldent er snakk om enten eller når det kommer til forståelse og kunnskap. På grunn av at begrepene forståelse og kunnskap har mange forskjellige definisjoner og ofte innebærer en kunstig todeling, har jeg valgt å bruke et annet begrep som kan si noe om hvordan elever møter et matematisk emne. De gangene begrepene forståelse og kunnskap dukker opp i denne oppgaven er det derfor i gjengivelse av andres funn og teorier. Begrepet jeg har valgt å bruke er matematisk *oppfatning*. Begrepet oppfatning er min oversettelse av Sfard (1991) sitt begrep conception. Hun skiller oppfatning fra det hun kaller concept, som jeg har valgt å oversette til *begrep*. Et begrep er den offisielle, formelle definisjonen og betydningen av en matematisk idé. Oppfatning defineres som: «(…) the whole cluster of internal representations and associations evoked by the concept – the concept's counterpart in the internal, subjective "universe of human knowing"» (Sfard, 1991, s. 3). Matematisk oppfatning av noe er altså en persons interne representasjoner og assosiasjoner som er koblet til det matematiske begrepet. Oppfatning blir derfor all subjektiv informasjon knyttet til det objektive, formelle begrepet. Videre deler hun denne oppfatningen inn i to typer; operasjonell og strukturell. Den operasjonelle oppfatningen er hovedsakelig knyttet til utregning og prosessen som fører fram til den matematiske idéen. Mens med en strukturell oppfatning ser man på idéen som et eget objekt, og er i stand til å behandle den som det. Disse to typene oppfatning utelukker ikke hverandre, og elevene må ha begge for å ha en fullstendig oppfatning av et begrep. Det er gjerne slik at den operasjonelle oppfatningen utvikles før den strukturelle, både historisk og individuelt. Denne inndelingen i operasjonell og strukturell oppfatning vil jeg komme tilbake til i teoridelen, i tillegg til at den blir styrende for diskusjonen.

Med utgangspunkt i tidligere forskning på elevers arbeid med negative tall og min interesse for å utforske dette emnet mer nøye, har jeg kommet fram til følgende problemstilling: *«Hva kjennetegner oppfatningen av negative tall hos noen elever på 7. trinn?»* Jeg vil bruke Sfard sin definisjon av oppfatning, og hennes inndeling i strukturell og operasjonell oppfatning som utgangspunkt for å besvare problemstillingen. Målet med oppgaven er ikke å kartlegge hver enkelt elev sin oppfatning av negative tall, men å se overordnet på noen aspekt som kan si noe om oppfatningen til elevene som en gruppe. I analysen ser jeg derfor ikke på elevenes oppfatning, men på to viktige hovedemner som kan si noe om oppfatningen. Disse to emnene har jeg valgt med utgangspunkt i funn i datamaterialet mitt. Jeg har formulert to forskningsspørsmål som er utformet for å se på de to emnene, og som styrer analysen av datamaterialet:

1. Hvordan behandler elevene negative tall og minustegn?
2. Hva slags tallsyn bygger elevene utregningen og begrunnelsen sin på, kardinalt, ordinalt eller formalt?

Jeg vil dermed ikke se på alle aspekter av elevenes oppfatning av negative tall, men på elevenes oppfatning av negative tall innenfor de to hovedemnene. Det første forskningsspørsmålet representerer hovedemnet behandling av negative tall og handler om hvordan elevene møter de negative tallene. I den delen av analysen ser jeg på hvilke funksjoner elevene tillegger minustegnene, om elevene tar i bruk negative talls funksjoner og egenskaper, og hvilke strategier de bruker i utregningen. Det andre forskningsspørsmålet omhandler elevenes tallsyn. I den delen analyserer jeg elevenes besvarelser i lys av hvilket tallsyn som er styrende for hvordan de løser oppgavene. Hvilke modeller elevene bruker kan si noe om hvilket tallsyn de bygger sin oppfatning på. Derfor vil jeg også se på bruk av modeller i dette hovedemnet. I drøftingen vil jeg gå tilbake til problemstillingen, og se på hva funnene i analysen kan si om elevenes oppfatning av negative tall. Problemstillingen har et teoretisk opphav, mens de to forskningsspørsmålene hovedsakelig har et empirisk opphav, fordi de har oppstått på bakgrunn av funnene i datamaterialet. I drøftingsdelen ser jeg derfor på hva forskningsspørsmålene kan fortelle meg om elevenes oppfatning.

1.3 Teori- og metodevalg

For å svare på problemstillingen gjennomførte jeg oppgavebaserte intervju med 23 elever på 7. trinn fordelt på to skoler, Skole 1 og Skole 2. I intervjuene ga jeg elevene aritmetikkoppgaver med addisjon og subtraksjon av positive og negative tall. Intervjuene foregikk i skoletiden til elevene, og varte i gjennomsnitt mellom 15 og 16 minutter. Det korteste varte i litt over fem minutter og det lengste varte i 40 minutter. Jeg søkte om og fikk godkjenning fra NSD for å gjennomføre intervjuene, og jeg samlet inn samtykke fra foreldrene til elevene. Godkjenning fra NSD og samtykkeskjema ligger som vedlegg 1 og 2. Jeg valgte å intervjue elever på 7. trinn fordi jeg ønsket elever som hadde vært gjennom undervisning om negative tall. Jeg synes det er interessant å se på hva elevene tar med seg om negative tall fra barneskolen til ungdomsskolen.

Jeg har valgt å bruke Sfard (1991) som styrende rammeverk for oppgaven min. Det er flere grunner til at jeg ønsker å gi akkurat denne artikkelen en så viktig rolle i oppgaven. Som jeg har skrevet mener jeg at begrepet oppfatning er et godt begrep å bruke for å beskrive elevers møte med og tolkning av en matematisk idé. Også dette begrepet er delt i to, men de to delene komplimenterer hverandre, og representerer til sammen en fullstendig oppfatning. Jeg mener at å se på elevenes arbeid i lys av hvor operasjonell eller strukturell oppfatning de viser et godt utgangspunkt for å forstå mer om hvordan de møter negative tall. En annen grunn er at Sfard (1991) sin artikkel er viktig for matematikkdidaktikken. Teorien har påvirket mange senere forskningsartikler, og har over 400 siteringer på SpringerLink. Det at den ene oppfatningen ofte kommer før den andre, både i historisk og i individuell utvikling, gjør at man til en viss grad kan se hvor langt elevene har kommet i utviklingen, noe som er spennende. Jeg synes det er interessant å bruke et rammeverk som ikke i utgangspunktet er tiltenkt kun negative tall, men all form for meningsskaping i matematikk.

De to forskningsspørsmålene har kommet på bakgrunn av datamaterialet jeg har samlet inn til denne oppgaven i tillegg til teori og tidligere studier. Disse emnene har ikke i utgangspunktet tilknytning til Sfard (1991) sin teori om oppfatning. Det første emnet handler om hvordan elevene forholder seg til de negative tallene, til minustegn, og hvilke strategier de bruker i møte med disse. For å belyse denne emnet har er hovedsakelig sett på Gallardo og Rojano (1994) sin tredeling av minustegnets funksjoner; som nominator (unary), som operator (binary) og en symmetrisk funksjon. Disse begrepene vil jeg komme nærmere inn på i teoridelen. Jeg ser også på en studie av Bofferding og Wessman-Enzinger (2017) om koblinger elever gjør mellom positive og negative tall. Det andre emnet undersøker jeg ved hjelp av Bishop, Lamb, Philipp, Whitacre og Schappelle (2014) sin teori om kardinalt, ordinalt og formalt tallsyn. I tillegg bruker jeg Goldin og Shteingold (2001), som har sett på hvordan elever kan vise forskjellig aksept av negative tall avhengig av om de presenteres i kardinale eller ordinale modeller.

1.4 Oppbygging av oppgaven

Oppgaven er bygd opp av seks kapitler: teori, metode, analyse av oppgavene, analyse av datamaterialet, drøfting og avslutning. I teorikapittelet tar jeg for meg de viktigste begrepene og teoriene i oppgaven. Først vil jeg se på de negative tallenes opprinnelse, og hvordan de ble akseptert i vesten. Dette er et viktig bakteppe for hvordan negative tall oppfattes og undervises i dag. Deretter presenterer jeg teori som kan brukes til å se på de to hovedemnene i analysen min: behandling negative tall og tallsyn. Til slutt i teorikapittelet vil jeg gå mer i dybden på Sfard (1991) sin teori om operasjonell og strukturell oppfatning, og se på hvordan dette kan knyttes til negative tall. I metodekapittelet presenterer jeg hvordan jeg gikk fram for å besvare problemstillingen. Jeg begrunner hvorfor jeg valgte en kvalitativ studie og oppgavebasert gruppeintervju og beskriver hvordan jeg gjennomførte intervjuene og analysen. I tillegg presenterer jeg noen viktige etiske betraktninger og avslutter med et kritisk blikk på de metodiske valgene jeg har tatt. Neste kapittel er analyse av oppgavene, hvor jeg går gjennom de åtte oppgavene jeg ga elevene. Her presenterer jeg begrunnelse for hver oppgave, hvor oppgaven er hentet fra, potensialet som ligger i oppgaven og ulike løsningsmetoder. I kapittelet om analyse av datamaterialet presenterer jeg de viktigste funnene fra analysen innenfor de to hovedemnene tallsyn og behandling av negative tall. Innenfor hver underkategori presenterer jeg tabeller med oversikt over hvor elevenes besvarelser plasserer seg innenfor de forskjellige kategoriene, før jeg går i dybden på typiske besvarelser innenfor hver kategori. På denne måten gir jeg både en oversiktskunnskap og et dypere innblikk i elevenes besvarelser. I drøftingskapittelet svarer jeg på problemstillingen min. Der trekker jeg frem de viktigste funnene fra analysen og ser på hva det kan fortelle meg om elevenes oppfatning av negative tall. I tillegg sammenligner jeg funnene med annen forskning på feltet. I det avsluttende kapittelet oppsummerer jeg funnene og drøfter hvilke implikasjoner denne studien kan ha for videre studier, og matematikk-klasserommet

2 Teori

Teorikapittelet i denne oppgaven har to viktige hensikter. Den første hensikten er å presentere den teorien som brukes videre i oppgaven og som er relevant for at jeg skal kunne tilnærme meg problemstillingen og forskningsspørsmålene. Den andre hensikten er å tolke og operasjonalisere de begrepene jeg skal bruke i analysekapittelet og drøftingskapittelet. Mange av begrepene jeg bruker er generelle, og ikke knyttet spesifikt opp mot arbeid med negative tall. Derfor er det viktig at jeg viser hvordan disse begrepene kan brukes til å analysere og drøfte datamaterialet.

2.1 Historisk perspektiv på negative tall

Et godt utgangspunkt for å se på vanskeligheter med et matematisk emne kan være å se på den historiske utviklingen av emnet. Dette er også noe av baktanken bak historisk genesis, som er et prinsipp i matematikkundervisningen (Mosvold, 2002). Genesis betyr opphav, og i didaktisk sammenheng handler det om å ta utgangspunkt i opphavet til et emne og bruke det i undervisningen. Det finnes flere former for genesis, og den vanligste og mest relevante i denne oppgaven er historisk genesis. Historisk genesis i matematikkundervisningen går ut på å ta utgangspunkt i det matematiske emnets historiske opphav. Tanken bak er at elevene skal lære matematikk fra det grunnleggende til det mer komplekse på samme måte som forfedrene våre gjorde (Mosvold, 2002). På bakgrunn av dette prinsippet vil jeg se kort på negative tall sin historiske utvikling og opphavet til disse tallene. Negative tall har ulik historie i ulike deler av verden, mye på grunn av hvilket fokus matematikerne hadde (Kilhamn, 2011). I Østen handlet matematikk i stor grad om telling og opptegning av telling, og tallene representerte både kvantitet og rekkefølge. Østen er på mange måter opprinnelsesstedet for algebra, noe som er et viktig poeng i negative tall sin historie. Tallene trengte ikke nødvendigvis å gi mening i seg selv, men i relasjon til andre tall. I Vesten derimot, var matematikk sterkt knyttet opp mot geometri, og tall ble brukt for å måle. Her hadde ikke tallene retning, kun mengde. Negative tall dukket opp i Kina rundt år 200 f.Kr – år 200 e.Kr. I Østen hadde null og negative tall mening fordi de var en del av matematiske rekker, som for eksempel $2 - 1 = 1$, $2 - 2 = 0$ og $2 - 3 = -1$. Hva tallene representerte i seg selv var ikke viktig, det var de matematiske prinsippene som var avgjørende. I Vesten, hvor tall var direkte representasjoner av størrelser og målinger, ga det ingen mening å snakke om null og negative tall, fordi man ikke opererte med lengder som ikke eksisterte eller som var negative. Null ble kun brukt som en representasjon av ingenting, og ble ikke tatt aktivt i bruk i matematikken på mange århundre. Rundt det 16. århundre ble algebra viktig i matematikken, og det spredte seg også til vestlig matematikk. Dette var trolig avgjørende for utviklingen av negative tall. Man begynte å skille mellom aritmetikk og algebra; negative tall trengte ikke å ha en fysisk mening, kun en algebraisk. I algebraisk tankegang kommer behovet for negative tall fra ønsket om å generalisere (Freudenthal, 2002). For eksempel ønsket man å generalisere ligninger som $ax + b = c$ ($a \neq 0$), slik at den fikk et gyldig svar for x under alle omstendigheter. Sakte men sikkert utviklet aksepten for negative tall seg, og rundt det 18. århundre ble negative tall brukt i stor grad i lærebøker (Kilhamn, 2011). Negative tall ble likevel ikke brukt i dagliglivet før på slutten av det 19. århundre. Fram til da ble gjeld og temperaturer ble representert ved hjelp av positive tall. Det var også rundt slutten av det 19. århundre at man fikk en formell matematisk definisjon av begrepet (Kilhamn, 2011). Negative tall er definert gjennom et sett aksiomer som gjelder for alle reelle tall (Lindstrøm, 2006). Et av disse aksiomene er at for et hvert tall x finnes det et motsatt tall y slik at $x + y = 0$. Det vil si at for ethvert tall x finnes $-x$ (Lindstrøm, 2006). Dette aksiomet inkluderer negative tall som en viktig del av alle reelle tall. Gjennom historien har negative tall gått fra å være sterkt knyttet til subtraksjon til å bli sett på som et objekt i seg selv. Dette understreker også Sfard (1991), blant annet som et forsvar for hennes teori om operasjonell og strukturell oppfatning. Hun viser både til historisk og individuell utvikling av oppfatning, som hun mener går fra fokus på prosess, her subtraksjon, til fokus på objekt, negative tall. Det er viktig å kjenne til at negative tall var problematisk i et matematikksyn som bygde på geometri, og at behovet for disse tallene kom fra algebra, ikke fra hverdagssituasjoner. Med dette som bakteppe, vil jeg videre se på teori som kan si noe om hvordan elevene behandler negative tall i dag.

2.2 Behandling av negative tall

I denne delen presenteres teorien som blir brukt til å se på det første forskningsspørsmålet: «Hvordan behandler elevene negative tall og minustegn?». Jeg ser først på en oppdeling av minustegnets funksjoner i tre deler. Deretter ser jeg nærmere på en av disse funksjonene, nemlig subtraksjon. Til slutt i denne delen tar jeg for meg en studie av Bofferding og Wessman-Enzinger (2017) om hvordan elever bruker regler og strategier fra regning med positive tall når de skal regne med negative tall.

2.2.1 Minustegnets funksjoner

Slik jeg skrev i innledningen presenterer Gallardo og Rojano (1994) en tredeling av minustegnets funksjoner: som nominator, som operator, og en symmetrisk funksjon. Minustegnet fungerer som *nominator* hvis det angir et negativt tall. For eksempel i oppgaven

(-2) + 4, hvor minustegnets funksjon er at det viser at -2 er et negativt tall. Den andre funksjonen til minustegnet er som *operator*, hvor tegnet angir operasjonen subtraksjon, som for eksempel i oppgaven 5 – 6. Den siste funksjonen handler om minustegnet som indikator på symmetri. Her er det minustegnets betegnelse av det motsatte som er i fokus. Det peker på operasjonen «å ta det motsatt av et tall», som det første minustegnet i – (-3) (Gallardo og Rojano referert i Vlassis, 2008). Det eksisterer svært lite empirisk data på minustegnets symmetriske funksjon (Kilhamn, 2011), noe som gjør det vanskelig å bruke denne funksjonen som utgangspunkt for analyse. Jeg har derfor ikke fokus på den funksjonen verken i analysen eller drøftingen.

På samme måte som minustegnet er konstruert av mennesker, er også meningene knyttet til minustegnet menneskeskapt. Dette blir tydelig når man ser på den historiske utviklingen av negative tall. I Kina opererte de ikke med minustegnet som enten operator eller nominator (Kilhamn, 2011). I deres matematikk var negative tall sett på som en mengde som skulle betales, eller subtraheres fra en mengde. Dette var ikke en kontroversiell tolkning av negative tall, og i det 17. århundre var det en kjent bok som behandlet negative tall som mengder som skulle subtraheres. Senere kom det motreaksjoner på dette, og i vestens matematikk i dag skilles det mellom de to funksjonene (Kilhamn, 2011). Det er viktig å ha i bakhodet at minustegnets ulike betydninger er ting elevene må lære, og noe som ikke har vært selvsagt oppgjennom historien.

2.2.2 Subtraksjon

Jeg vil gå nærmere inn på en av de tre funksjonene minustegnet har, nemlig å betegne subtraksjon. Elevene i min datainnsamling møter flere subtraksjonsoppgaver i løpet av intervjuet. I tillegg handler Sfard (1991) sitt første nivå av oppfatning, indregjøring, om å være dyktig i subtraksjon. Jeg vil derfor gå litt i dybden på subtraksjon ved å se på to subtraksjonstyper: ta bort (take-away), og sammenligning (comparison) (Usiskin & Bell, 1983). Den formen for subtraksjon som elever møter mest av på skolen er av typen *ta bort*. Denne formen kan beskrives som: «Gitt mengde – mengde som blir tatt bort = mengde som er igjen» (Usiskin & Bell, 1983, s. 178, min oversettelse). En kontekst som passer til dette kan være «Lisa har 20 kroner. Hun kjøper en is som koster 16 kroner, hvor mange kroner har hun igjen?». Den andre formen for subtraksjon blir kalt sammenligning eller *differanse* (Usiskin, 2008). Den defineres slik: «Gitt tallene eller mengdene a og b, a – b forteller hvor mye som skiller a og b.» (Usiskin & Bell, 1983, s. 182, min oversettelse). Differansen mellom to tall er altså hvor mye som skiller tallene fra hverandre. Kan man sammenligne a med b, kan man også sammenligne b med a, og svarene vil være det motsatte av hverandre. En kontekst innenfor denne formen for subtraksjon er for eksempel: «Lisa har 20 kroner, og Marius har 16 kroner. Hvor mange flere kroner har Lisa enn Marius?». Her er det tallene 20 og 16 som sammenlignes, og svaret er 4, 20 – 16 = 4. Man kan også se på hvor mange flere kroner Marius har enn Lisa, 16 – 20 = -4. I tillegg til disse to addisjonsmodellene nevner Usiskin og Bell (1983) to addisjonsmodeller som kan endres til å bli subtraksjonsmodeller, men da de ikke er relevante for oppgaven går jeg ikke nærmere inn på dem. Å kun undervise ta bort-modellen kan føre til at elevene får et for ensidig bilde av hva subtraksjon er (Selter, Prediger, Nuhrenborger & Hussmann, 2012). Forskning har vist at elever sjelden bruker differansemodellen med mindre oppgaven ber om det. Dette til tross for at differansemodellen er en effektiv modell som kommer naturlig for barn, fordi den bygger på strategien om å telle oppover, som gjerne er den første strategien barn lærer seg. Årsaken til det kan være at ta bort-modellen er mer naturlig å bruke i hverdagskontekster. En annen årsak kan være at i de vanligste modellene, blant annet tallinje, må man jobbe fra høyre til venstre hvis man bruker differanse-modellen, noe som er unaturlig for elevene. Ta bort-modellen skal ikke forkastes helt fordi den er et godt redskap til å forklare en del hverdagssituasjoner, men differansemodellen bør mer inn i skolen og være den første modellen elevene lærer fordi de gjennom den møter på færre hindre (Selter et al., 2012).

2.2.3 Kobling til positive tall

Som jeg skrev i innledningen har Bofferding og Wessman-Enzinger (2017) sett på om elever kobler løsningsstrategier og regler de kjenner fra regning med positive tall til oppgaver med negative tall. De gjennomførte oppgavebaserte intervju med elever på 1., 2. og 5. trinn og lærerstudenter. Fokuset for intervjuene var negative tall. Selv om elevene hadde ulik alder og ulike forutsetninger for å løse oppgavene, fant Bofferding og Wessman-Enzinger (2017) mange likheter i elevenes resonneringer og i hvilke løsningsstrategier og regler de knyttet fra positive tall til oppgaver med negative tall. Forskjellen mellom elevene lå på at de eldre elevene for det meste hadde mer detaljerte forklaringer enn de yngre. De fant at koblingen mellom positive og negative tall var mest produktiv i subtraksjonsstykker hvor minuenden var like stor som eller større enn subtrahenden. For eksempel ble løsningsmetoder for oppgaver som 6 – 3 brukt til å løse oppgaver som (-6) – (-3), og løsningsmetoder for oppgaver som 6 – 6 ble brukt for å løse oppgaver som (-6) – (-6) (Bofferding & Wessman-Enzinger, 2017). Hvis man skal løse oppgaven (-6) – (-3) ved å bruke det man kan fra 6 – 3 kan man tenke at man har en mengde, og skal ta bort noe av den mengden, og det som blir igjen er svaret. Om mengden er positiv eller negativ har ikke noe å si, så lenge mengden man skal ta bort har samme fortegn som den mengden man har. Skal man løse oppgaven (-6) – (-6) kan man bruke regelen om at et tall subtrahert med seg selv er null, altså at 6 – 6 = 0. Dette gjelder også for (-6) – (-6), fordi begge tallene har samme fortegn. Denne koblingen krevde minst kunnskap om negative tall, og ble gjerne sett på som den enkleste (Bofferding & Wessman-Enzinger, 2017). Hvis tallene i oppgaven ikke har samme fortegn kan man ikke uten videre bruke de samme reglene som i oppgaver med positive tall. Bofferding og Wessman-Enzinger (2017) peker på at det er svært viktig at lærere tar tak i elevers koblinger og assosiasjoner mellom positive og negative tall, og videreutvikler dem til å gi mening for elevene. På den måten kan man unngå at elevene overgeneraliserer og bruker regler de har lært for positive i tall i situasjoner med negative tall og får feil svar (Bofferding & Wessman-Enzinger, 2017).

2.3 Ulike tallsyn og negative tall

I denne delen vil jeg presentere den teorien jeg bruker i analysen av det andre forskningsspørsmålet: «Hva slags tallsyn bygger elevene utregningen og begrunnelsen sin på, kardinalt, ordinalt eller formalt?». Jeg vil gå gjennom teori om de tre tallsynene, og se på hvordan de kan identifiseres i elevenes utregning. Videre vil jeg se på noen teoretikere sin drøfting rundt bruk av modeller, før jeg ser på hvordan de ulike modellene kan knyttes opp til tallsyn.

Alle tall består av to komponenter: mengde og retning (Ball, 1993). I positive tall peker disse to størrelsene på det samme. Når man arbeider med negative tall kan disse to vise to forskjellige ting. For eksempel kan -5 ses på som mengde 5, noe man gjerne bruker i hverdagssituasjoner hvor det er snakk om for eksempel gjeld. Da blir -5 sett på som 5 kroner i gjeld. Samtidig har det negative tallet en negativ retning. -5 har en plassering i en tallrekke eller på en tallinje. Å sammenligne to tall kan derfor gi forskjellig resultat avhengig av om man ser på mengde eller retning. Ser man på mengden -5, kan man argumentere for at -5 er mer enn -1 fordi det å ha 5 kroner i gjeld er mer enn å ha 1 krone i gjeld. Ser man derimot på retningen til tallene kan man argumentere for at -5 er et mindre tall enn -1, fordi det er lengre bort fra 0. Ifølge Ball (1993) er det å kjenne til denne todelingen utrolig viktig for forståelse av negative tall. Hun uttrykker det på denne måten: «Simultaneously understanding that -5 is, in one sense, more than -1 and, in another sense, less than -1 is at the heart of understanding negative numbers.» (Ball, 1993, s. 379). Man må med andre ord kunne se -5 både som et tall med en plassering i en tallrekke, og som et tall som representerer en mengde. Tzelgov, Ganor-Stern og Maymon-Schreiber (2009) har sett på hvordan voksne representerer negative tall, og funnet at de representerer tallets mengde og dets retning separat. Videre fant Ganor-Stern, Pinhas, Kallai og Tzelgov (2010) at hvis det trengs for oppgaven, viser voksne en helhetlig representasjon av negative tall. Det er ikke gjort slik forskning på barn enda (Brez, Miller & Ramirez, 2015). Disse funnene kan peke på at det å dele opp tallets funksjoner i retning og mengde kan være hensiktsmessig i noen tilfeller, men at man i andre tilfeller har behov for å sette disse funksjonene sammen. Det er derfor nødvendig å kunne bruke begge funksjonene for å ha en fullstendig og funksjonell oppfatning av negative tall.

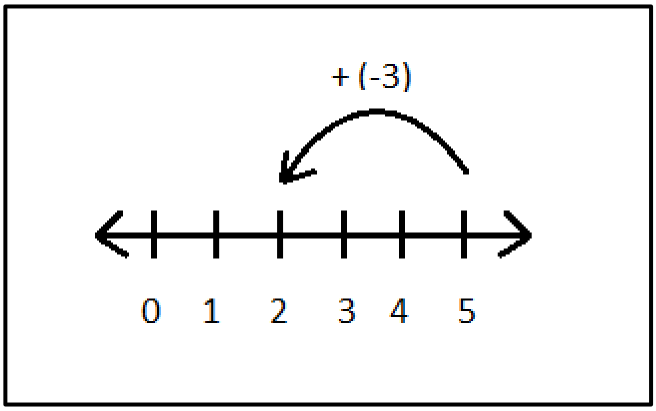
Denne oppdelingen av tallets komponenter i mengde og retning har også Bishop et al. (2014) skrevet om. Jeg har valgt å støtte meg hovedsakelig på Bishop et al. (2014) sin inndeling og definisjoner fordi de har fokus på negative tall. De presenterer en tredeling av syn på tall i ordinalt, kardinalt og formalt. Ifølge Bishop et al. (2014) er alle de tre tallsynene nødvendig for å kunne resonnere med tall på en god måte. Et *ordinalt* syn er knyttet til tallets retning og rekkefølge, og ikke nødvendigvis koblet opp til en tellbar mengde (Bishop et al., 2014). De definerer det slik: «We define an ordinal (or positional) view of number as related to the idea of ordering relations wherein learners impose some kind of ordering on Z (the set of all integers) and then use the ordinal, or positional, nature of numbers in their strategies» (Bishop et al., 2014, s. 41). Et ordinalt syn på tall innebærer med andre ord at eleven kjenner til og benytter seg av tallenes rekkefølge. Hvis en elev bruker uttrykk som «høyre», «venstre», «over null», «under null», «foran» og «etter» i utregning eller begrunnelse av utregning er det sannsynlig at han eller hun hovedsakelig støtter utregningen på et ordinalt tallsyn. Et *kardinalt* syn fokuserer på et talls mengde, altså antall objekter det representerer. Her er det snakk om en tellbar mengde (Bishop et al., 2014). Ord og uttrykk som peker på det å ha, miste eller skylde noe kan peke på en kardinal oppfatning. Det er viktig å understreke at disse to synene på tall ikke er to adskilte, uavhengige måter å se på tall på og at elever ofte benytter seg av begge to samtidig. (Bishop et al., 2014). Likevel kan elever i noen tilfeller bruke et tallsyn mer enn andre i arbeid med matematikk. Det eksemplifiserer Bishop et al. (2014) med sin studie av Violet som viser et tydelig ordinalt tallsyn i oppgaver med negative tall. Bishop et al. (2014) sine begrep kan ses på som noe av det samme som Ball (1993) skriver om. Begge uttrykker en oppfatning av tall som bestående av både mengde og retning, og begge snakker om disse to funksjonene som noe som opptrer samtidig. Det siste synet på tall er en *formal* tilnærming. Dette tallsynet tar utgangspunkt i en algebraisk tankemåte, og handler om å tilnærme seg nye matematiske objekt basert på det man kan fra før og generalisering av matematiske strukturer. Når det kommer til negative tall handler det om å bruke de regnereglene og prinsippene man kjenner fra de positive tallene for å gi mening til de negative tallene. Her kan tallene behandles abstrakt, som objekter som følger bestemte regler og relasjoner (Bishop et al., 2014). Både i teorien og i mitt datamateriale er det størst fokus på ordinalt og kardinalt tallsyn. Slik vil det også være i denne oppgaven, selv om jeg vil se noe på formalt tallsyn.

2.3.1 Modeller

Matematikk er abstrakt, og den eneste tilgangen vi har til det er gjennom representasjoner (Duval, 2017). Goldin og Shteingold (2001) definerer representasjoner slik: «A representation is typically a sign or a configuration of signs, characters, or objects. The important thing is that it can stand for (symbolize, depict, encode or represent) something other than itself» (Goldin & Shteingold, 2001, s. 3). En representasjon er altså et tegn eller en samling av tegn som står for, representerer, noe annet enn seg selv. Alle måter å uttrykke matematikk på er med andre ord representasjoner. Dette er en vid definisjon av representasjoner, og inkluderer også elementer som språk og følelser (Goldin & Shteingold, 2001). I denne oppgaven har jeg valgt å fokusere på representasjoner i form av modeller. Jeg bruker begrepet modeller som noe konkret man kan bruke til å representere og operer med de abstrakte størrelsene i matematikk. Eksempler på modeller som brukes til å representere negative tall er: tallinje, målestokk, tidslinje og hverdagskontekster, som for eksempel temperatur og penger (Kilhamn, 2011, s. 14). Som jeg skrev i innledningen, skriver Goldin og Shteingold (2001) at elever kan uttrykke forståelse for negative tall når de presenteres ved hjelp av kardinale modeller, men ikke ordinale, og omvendt. De fant også at kardinale og ordinale aspekt utvikles hver for seg og kobles sammen senere (Goldin & Shteingold, 2001).

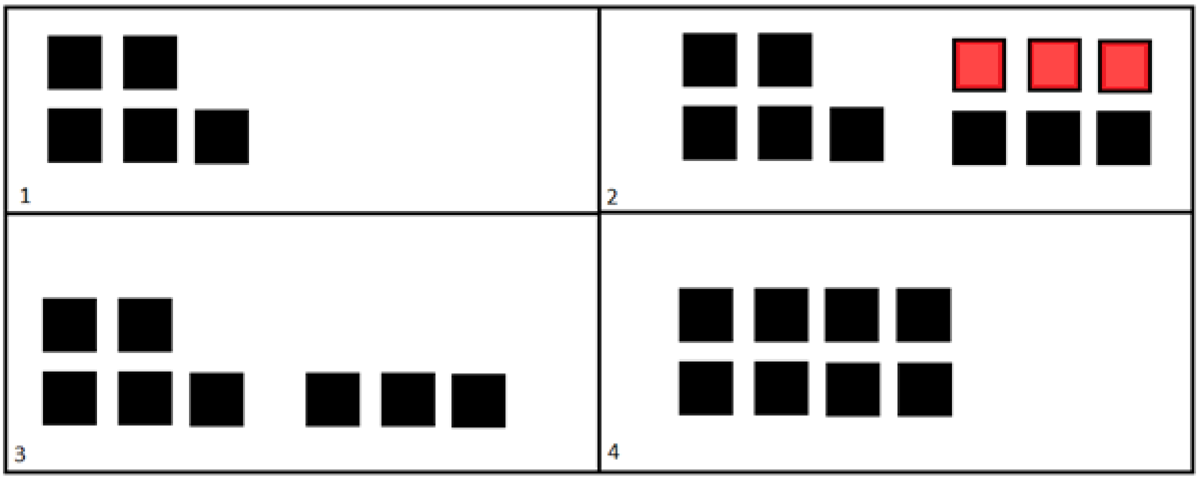
Freudenthal (2002) presenterer et skille mellom gamle og nye modeller. Gamle modeller er: spill hvor man taper og vinner, innunder her kommer også kontekster med penger og gjeld; trapper hvor man går opp og ned; og termometer. Alle modelltypene kan illustreres ved hjelp av tallinje, og de to siste er veldig lik en tallinje (Freudenthal, 2002). I og med at tallinjen er sentral i alle de gamle modellene, vil jeg se litt nærmere på den. Det var først i det 17. århundre at tallinjen for første gang ble brukt til å representere negative tall (Kilhamn, 2011). Dette ble både gjort av matematikeren Wallis og av Newton på denne tiden, og mot slutten av det 17. århundre hadde denne formen for representasjon av negative tall spredd seg (Kilhamn, 2011). Det er gjort en del forskning på mentale tallinjer, og det har blitt identifisert en effekt som på engelsk kalles Spatial-Numerical Association of Response Codes, og som gjerne forkortes til SNARC-effekten (Fischer, 2003). Denne effekten handler om at alle har en mental tallinje som er ordnet slik at lave tall er til venstre, og høye tall er til høyre. Denne effekten dukker opp rundt det tredje året på skolen, og påvirkes av leseretningen til eleven. Videre har Fischer og Rottmann (2005) sett på om denne effekten også opptrer med negative tall. De fant at negative tall ikke automatisk kobles til rom og mengde, slik positive tall gjør. De fant likevel at negative tall i utgangspunktet var knyttet til venstre side, slik lave tall også er. Resultatene for negative tall var mer varierende enn resultatene for positive tall, noe som kan peke på at negative tall prosesseres forskjellig hos forskjellige folk (Fischer & Rottmann, 2005). Det er interessant å se studier som peker på at negative tall kanskje ikke prosesseres og behandles på samme måte som positive tall. Dette gir enda flere argumenter for å forske på elevenes oppfatning av negative tall.

Videre vil jeg se hvordan addisjon og subtraksjon med positive og negative tall kan representeres ved hjelp av de gamle modellene. Den første modellen, spill hvor man taper og vinner, eksemplifiserer jeg med et spill hvor man kaster en terning med to farger. Lander terningen på en av sidene med sort farge får man ett poeng, og lander den på en av sidene med rød farge mister man ett poeng. Addisjon og subtraksjon av positive tall er uproblematisk i alle de tre modellene. Ta for eksempel 4 + 5 og 4 – 5. Innenfor den første modellen, spill hvor man taper og vinner, vil 4 + 5 være at man har 4 poeng og får 5 poeng til, som legges sammen til 9 poeng. 4 – 5 vil være at man har 4 poeng, og mister 5 poeng. Innenfor de to andre modellene vil det være bevegelse på termometer eller opp og ned trapper. Addisjon og subtraksjon av negative tall, derimot, er mer utfordrende. 5 + (-3) må bety det samme som å miste 3 poeng. Dermed betyr 5 – 3 og 5 + (-3) det samme i en slik modell. 5 – (-3) vil være det samme som å miste 3 tapte poeng. Man kan tenke seg at man har 8 poeng og får rød tre ganger, noe som tilsvarer 3 tapte poeng. Deretter skjer det noe som gjør at man går tre runder tilbake i tid. Da må man ta bort igjen de 3 tapte poengene: 5 – (-3), noe som gjør at man ender opp med 8 poeng igjen. Problemet er at dette er en svært kunstig og lite fleksibel representasjon av subtraksjon av negative tall. Innenfor de to andre modellene blir det helt meningsløst. Å gå opp eller ned et negativt antall trapper, eller at temperaturen øker eller minker negativt gir ikke mening. Addisjon og subtraksjon av negative tall kan likevel representeres på tallinjen. Problemet er at det ikke er et tydelig skille mellom tall og operasjoner. Oppgaven 5 + (-3) kan representeres på tallinjen ved at man begynner på tallet fem, og foretar et hopp på tre i negativ retning, og ender opp på 2. I en slik representasjon blir addisjon av negative tall representert på samme måte som subtraksjon av positive tall, se Figur 1. Det samme problemet oppstår i subtraksjon av negative tall, hvor det på tallinjen blir representert med samme type hopp som addisjon av et positivt tall.



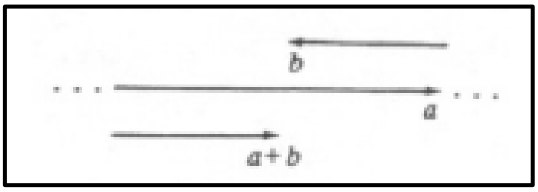
Figur 1: Representasjon av oppgaven 5 + (-3) på tallinje.

Freudenthal (2002) mener at negative tall i slike modeller blir passive, mens positive tall er aktive, og at det er nødvendig med modeller hvor negative og positive tall er likeverdige. Videre vil jeg presentere to av modellene han foreslår: røde og sorte klosser og piler på tallinje. Modellen med røde og sorte klosser kommer opprinnelig fra kinesisk matematikk fra rundt 250 år før vår tidsregning (Gallardo, 2002). I denne modellen bestemmer man at en av fargene, her rød, skal være negativ, og den andre fargen, sort, skal være positiv. En rød og en sort kloss annullerer hverandre, og et par med en sort og en rød kloss kan oppstå fra ingenting. Addisjon av positive tall vil i denne modellen tilsvare å legge til sorte klosser. Addisjon av negative tall vil si å legge til røde klosser. Subtraksjon av positive tall blir å ta bort sorte klosser, og subtraksjon av negative tall blir å ta bort røde klosser. Hvis man ikke har noen klosser å ta bort, legger man til tilsvarende par med sorte og røde klosser. Skal man løse oppgaven 5 – (-3) starter man med 5 sorte klosser, legger til tre par med røde og sorte klosser, og tar bort de tre røde klossene. Da står man igjen med 8 sorte klosser, se Figur 2. I denne modellen er positive og negative tall likeverdig, og det gir mening å subtrahere og addere negative tall.



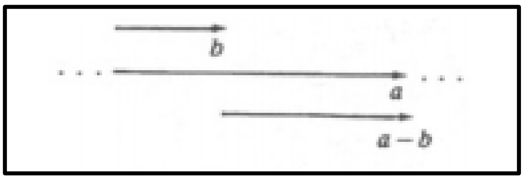
Figur 2: Modellering av stykket 5 - (-3) ved hjelp av sorte og røde klosser. 1: 5 representert ved fem sorte klosser. 2: Fortsatt 5, men det er lagt til 3 par med røde og sorte klosser. 3: Utførelse av subtraksjonen ved å fjerne de 3 røde klossene. 4: Resultatet av utregningen: 8 sorte klosser.

En annen modell som presenteres av Freudenthal (2002) er å bruke piler, eller vektorer, på en tallinje. Videre vil denne tallinjen bli kalt Freudenthals tallinje, mens tallinjen som gammel modell blir kalt klassisk tallinje. Punkt a på en tallinje tolkes her som en pil fra 0 til a, med enden på 0 og hodet på a. Et positivt tall a vil da representeres som en pil med hodet mot høyre, og et negativt tall representeres som en pil med hodet til venstre. Addisjon av a og b representeres ved å legge enden av b ved hodet til a, og finne lengden av pilen som går fra enden av a til hodet til b, se Figur 3, som viser addisjon av ett positivt tall a, og et negativt tall b.



Figur 3: Representasjon av a + b ved hjelp av piler på tallinje. Her er a et positivt tall og b et negativt tall. Figuren er hentet fra Freudenthal (2002, s. 442).

Subtraksjon, x = a – b, defineres i denne modellen som a = b + x. Dette gjøres for å unngå å tolke pilene som en operasjon i stedet for et tall, som lett kan skje hvis man representerer det som x = a – b. I denne modellen blir a – b pilen som går fra hodet til b til hodet til a, se Figur 4.



Figur 4: Representasjon av a – b ved hjelp av piler på tallinje. Her er a og b positive tall. Figuren er hentet fra Freudenthal (2002, s. 442).

En ekstra fordel med disse modellene er at minustegnets funksjoner som operator og nominator skilles i begge modellene. I modellen med klossene skilles de ved at negative tall representeres av røde klosser og subtraksjon representeres ved å ta bort klosser. I modellen med pilene skilles de to funksjonene ved at negative tall er piler med hodet mot venstre, og subtraksjon er avstanden mellom hodet til de to pilene når endene står i null. Det jeg tenker kan være utfordringene med disse modellene er at de krever at man husker de riktige prosedyrene. Det vil derfor kreve svært mye tid og fokus på at elevene kjenner til alle prosessene og hva alt står for, for at de skal kunne utføre operasjonene riktig. Det at det ikke er noen kjente kontekster å støtte seg på kan gjøre disse modellene utfordrende Likevel er dette modeller som tar utgangspunkt i tallene, og modeller hvor addisjon og subtraksjon av både positive og negative tall gir mening og hvor de positive og negative tallene er likeverdige. Begrepene gamle og nye modeller kan være noe misvisende, da de gamle modellene er noe vi fortsatt bruker i skolen. Poenget er at de gamle modellene var det som ble brukt i skolen da Freudenthal presenterte begrepene på 80-tallet, og de nye modellene var det han presenterte som et alternativ. Flere tiår senere er fortsatt i stor grad de gamle modellene som blir brukt i skolen (Kilhamn, 2011).

Ved å se på hvilke modeller elevene bruker i utregning og forklaring av oppgavene kan jeg se hvilket tallsyn de støtter seg på. Ordinale modeller er modeller som bygger på og representerer tallene i rekkefølge med en retning. Tallinjen er en typisk ordinal modell, fordi den tar utgangspunkt i at tallene har en bestemt rekkefølge og avstand. Kontekster som temperatur og bevegelse opp og ned trapper er også ordinale. Det samme gjelder for telling på fingre. Bruk av klosser, for eksempel på den måten som Freudenthal (2002) foreslår, er en typisk kardinal modell. Da er det ikke tallenes rekkefølge som er styrende, men den mengden de representerer, enten av røde eller sorte klosser. Andre kardinale modeller er kontekster som omhandler mengder, som for eksempel pengekontekster og andre kontekster som handler om å få eller miste noe. Det å telle på fingrene er en modell som kan støttes både av et kardinalt og et ordinalt tallsyn. Hvis eleven bruker det til å holde styr på en tallrekke støttes den av et ordinalt tallsyn. Samtidig kan fingrene brukes til å representere mengder, på samme måte som klosser. Da bygger modellen mer på et kardinalt tallsyn.

2.4 Operasjonell og strukturell oppfatning

I innledningen presenterte jeg en kort redegjørelse for Sfard (1991) sine uttrykk *begrep* og *oppfatning*, og skillet mellom *operasjonell* og *strukturell* oppfatning. Jeg vil nå gå videre inn på hva som ligger i de to formene for oppfatning, og se på hvordan dette kan belyse mitt datamateriale i drøftingen. Jeg vil også se på hvordan utviklingen fra en operasjonell til en strukturell oppfatning ofte foregår.

En *operasjonell oppfatning* innebærer at man ser på det matematiske begrepet som et potensial i stedet for et objekt (Sfard, 1991). Oppfatning av denne typen bygger på at den matematiske idéen er noe som eksisterer på bakgrunn av handlinger. Man har her fokus på algoritmer, prosesser og handlinger i stedet for objekter (Sfard, 1991). Tallet 5 kan for eksempel ses på som det tallet man ender på når man teller klinkekuler. 5 blir ikke nødvendigvis koblet til mengden klinkekuler. Her er handlingen å telle eller å si tallrekka. Et annet eksempel, som Sfard (1991) presenterer, er det matematiske begrepet symmetri. En operasjonell oppfatning av symmetri vil være at det er en transformasjon av en geometrisk figur. *Strukturell oppfatning* innebærer å være i stand til å se på det matematiske begrepet som et objekt og noe som eksisterer et sted i tid og rom. I tillegg kan en elev som har en strukturell oppfatning av et matematisk begrep gjenkjenne og manipulere det uten å fokusere på detaljene. Den strukturelle oppfatningen er mer abstrakt, helhetlig og mindre detaljert enn den operasjonelle oppfatningen. Her kan tallet 5 ses på som et objekt i seg selv med bestemte egenskaper, og ikke som et resultat av en telling. Symmetri i en strukturell oppfatning vil ikke være handlingen å transformere, men en egenskap ved geometriske figurer. Det er et viktig poeng at disse to formene for oppfatning ikke er gjensidig utelukkende, men komplementære. En elevs matematisk oppfatning består både av en operasjonell og en strukturell del. I noen tilfeller gir det mer mening med en operasjonell oppfatning, og andre ganger er det mer hensiktsmessig med en strukturell. Det er derfor viktig at eleven utvikler begge formene for oppfatning av et matematisk begrep for å være i stand til å behandle begrepet så fleksibelt som mulig (Sfard, 1991).

Sfard (1991) har identifisert tre steg i utviklingen av en matematisk oppfatning: indregjøring (interiorization), kondensering (condensation), og tingliggjøring (reification). Disse tre stegene har en hierarkisk oppbygging. I det første steget, *indregjøring*, er det prosessen som fører fram til begrepet som står i sentrum. En prosess er operasjoner som utføres på matematiske objekter på et lavere nivå. Begrepet indregjøring kommer fra Piaget (1970, referert i Sfard, 1991), og en prosess er indregjort hvis den kan gjennomføres ved hjelp av mentale representasjoner. Når prosessen er indregjort trenger ikke eleven å gjennomføre den for å kunne vurdere, analyse og sammenligne den med andre prosesser. For negative tall er denne prosessen subtraksjon fordi det er den operasjonen som fører til at man danner negative tall (Sfard, 1991). En elev som har indregjort subtraksjon er i stand til å subtrahere og til å sammenligne og reflektere rundt subtraksjonsstykker uten å regne dem ut. For eksempel kan eleven se at 68 – 45 er det samme som 69 – 46 bare ved å se på tallene. De laverestående objektene operasjonen utføres på er positive tall, og det nye matematiske begrepet er negative tall. Det neste steget i utviklingen er *kondensering*. En elev som er i denne fasen er i stand til å gjøre operasjonen med færre steg og klarer i større grad å tenke på prosessen som en helhet. Det er i dette steget at den nye matematiske idéen offisielt kommer til live. Det at prosessen kan gjøres ved hjelp av færre steg, og at eleven er i stand til å se på prosessen som en helhet, gjør det enklere å kombinere prosessen med andre prosesser, sammenlikne flere prosesser og generalisere. Et tegn på en overgang fra indregjøring til kondensering er at det blir enklere å bytte mellom forskjellige representasjoner av begrepet. Vanskeligheter med å avgjøre utfallet av prosessen blir en trigger for det nye matematiske objektet. Når det kommer til negative tall er triggeren for det nye matematiske objektet vanskeligheter med å avgjøre utfallet av subtraksjonsstykker hvor minuenden er lavere enn subtrahenden. Altså subtraksjonsstykker som resulterer i negative tall (Sfard, 1991). Elever som er på dette stadiet kan regne med negative tall, men begrepet er fortsatt tett knyttet til en spesiell prosess, og blir ikke sett på som et objekt i seg selv. Først når eleven kan løsrive begrepet fra prosessen, og se på det som et eget objekt, kommer han eller hun til det siste steget, *tingliggjøring*. Det er ikke en gradvis overgang fra kondensering til tingliggjøring, slik det er fra indregjøring til kondensering. Overgangen til tingliggjøring er et hopp i måten å se det matematiske objektet på; det er et ontologisk skifte. Det nye begrepet blir en egen ting og er ikke lengre knyttet til prosessen med å skape det. Det matematiske begrepet er en del av en spesiell kategori, og får sin mening gjennom nettopp det å være en del av denne kategorien. Begrepet kan brukes til å utvikle nye matematiske begrep gjennom de samme tre stegene. I samme øyeblikk som et matematisk begrep blir tingliggjort, starter man med et nytt begrep i indregjørings-fasen. En elev som er i tingliggjøringsfasen i sin oppfatning av negative tall er i stand til å behandle de negative tallene som en undergruppe av heltall. Det vil si at han eller hun ser på det negative tallet som et objekt i seg selv som har noen bestemte egenskaper fordi det er et negativt tall. De tre stegene viser tydelig et skifte fra en operasjonell oppfatning til en strukturell. Som sagt er det viktig å ha med seg at den operasjonelle oppfatningen ikke forsvinner eller byttes ut av den strukturelle. Dette er oppfatninger som eksisterer samtidig. Utviklingen går på at man inkluderer den strukturelle utviklingen i større grad (Sfard, 1991).

Siden den strukturell oppfatningen er krevende å lære seg, er det betimelig å stille spørsmål til hvorfor elevene trenger en strukturell oppfatning. Det finnes flere grunner til at operasjonell oppfatning ikke er tilstrekkelig for effektivt arbeid med matematiske begrep (Sfard, 1991). For det første er den operasjonelle oppfatningen vanskelig å prosessere, noe som gjør det vanskelig å utvikle oppfatning av nye matematiske begrep. En annen grunn er at det er vanskeligere å jobbe med utgangspunkt i denne oppfatningen, fordi det krever at man husker på mange ting samtidig, altså har god arbeidstidshukommelse. Strukturell oppfatning gir også bedre mulighet til å tilegne seg og lagre ny informasjon fordi en ved å se på det matematiske begrepet som et objekt kan manipulere det uten fokus på detaljene. Ifølge Sfard (1991) vil man i nesten all form for matematisk aktivitet bytte mellom den strukturelle og den operasjonelle oppfatningen.

Sfard (1991) understreker at denne teorien er nettopp det, en teori. Den kommer ikke hovedsakelig fra empiriske funn, men fra en tese om at matematiske objekter har et operasjonelt opphav. Hun peker på noe forskning hun selv har gjort som bekrefter teorien. Likevel er det viktig å ta med seg at Sfard sin teori er noe som har dukket opp i teorien, og behandle det som det. Sfard sin teori er ikke en fasit på hvordan elever utvikler sin oppfatning av et matematisk begrep; det er en linse, en forklaringsmodell, en synsvinkel, som kan hjelpe til med å få et større innblikk i elevers oppfatning. Det er i en slik kontekst jeg vil bruke denne teorien i denne oppgaven Som jeg har understreket tidligere vil ikke begrepene operasjonell og strukturell oppfatning bli brukt i analysedelen, men i drøftingen. Videre vil jeg se på hvordan de to hovedemnene kan brukes til å si noe om elevenes oppfatning.

2.4.1 Hvordan elevenes oppfatning kommer til uttrykk

Teorien til Sfard (1991) om operasjonell og strukturell oppfatning er styrende for drøftingsdelen i denne oppgaven. I analysen er det forskningsspørsmålene som handler om tallsyn og behandling av negative tall som er i sentrum. Derfor vil jeg i denne delen se på hvilke elementer som peker på en operasjonell eller en strukturell oppfatning i en besvarelse, og hvordan denne teorien knytter seg til teori om tallsyn og om behandling av negative tall.

Først vil jeg se på hvordan elevenes oppfatning kan knyttes opp til elevenes tolkning minustegnets funksjoner. Sfard (2000) har videreutviklet teorien om operasjonell og strukturell oppfatning til å handle om operasjonelle og strukturelle «signifiers». Det er imidlertid en viktig forskjell på artikkelen fra 2000 og artikkelen fra 1991 som jeg bruker som rammeverk i denne oppgaven. Artikkelen fra 1991 er basert på et kognitivt læringssyn, mens den fra 2000 er basert på et sosiokulturelt læringssyn. Min oppgave har et kognitivt utgangspunkt, og det er derfor ikke relevant å gå inn i teorien om ulike former for «signifiers». Årsaken til at jeg likevel nevner artikkelen fra 2000 er at Vlassis (2008) har videreutviklet begrepene til Gallardo og Rojano (1994) om minustegnets ulike funksjoner til å henge sammen med Sfard (2000) sin teori om strukturelle og operasjonelle signifiers. I videreutviklingen fremhever Vlassis (2008) minustegnets funksjon som nominator som mer strukturell enn minustegnets funksjon som operator og symmetri. Minustegnet som nominator peker på det negative tallet i seg selv, og har derfor fokus på det matematiske objektet «negativt tall». De to andre funksjonene peker på en prosess som kan føre til negative tall, men ikke på det negative tallet i seg selv. En utregning som bygger på en operasjonell oppfatning vil dermed vises ved at utregningen fokuserer på operasjoner, benytter seg av flere prosesser og omfattende utregningsstrategier, og ikke skiller mellom operasjonen subtraksjon og negative tall. En utregning basert på en strukturell oppfatning vil ta utgangspunkt i egenskapene til negative tall i utregningen, og skille mellom operasjonen subtraksjon og objektet negativt tall.

Både i kondenserings- og tingliggjøringsfasen kan eleven regne med negative tall. Jeg vil derfor se på hva som skiller de to formene for utregning fra hverandre med tanke på bruk av minustegnets funksjoner. I kondenseringsfasen er negative tall enda ikke blitt et matematisk objekt, men et resultat av en prosess. Selv om eleven er i stand til å regne med negative tall, er det rimelig å anta at hun eller han i større grad bruker minustegnet som operator enn som nominator i oppgaver med negative tall. Jeg vil presentere tre ulike løsninger av oppgaven (-5) + 8. Dette er den første oppgaven brukte i datainnsamlingen. Oppgaven består av et negativt tall addert med et positivt tall. En besvarelse som peker på en oppfatning i kondenseringsfasen kan være å tolke minustegnet som en operator, og regne ut oppgaven som 0 – 5 + 8 eller som 8 – 5. Da er det ikke det negative tallets funksjon som er utgangspunktet, men det sterke båndet det enda har til subtraksjon. Dette er en mer operasjonell løsning fordi eleven behandler det negative som en operasjon i stedet for å behandle det som et objekt i seg selv. En besvarelse som er mer strukturell er å ta utgangspunkt i det negative tallet, og regne med det. Da bruker eleven minustegnets funksjon som nominator, slik det står i oppgaven. En måte å gjøre det på er å starte på minus fem og regne seg åtte oppover til tre. Det er en utregning som peker på en strukturell oppfatning fordi eleven starter med det negative tallet, og dermed tar utgangspunkt i det som et eget tall, og ikke som et resultat av en operasjon. En annen metode, som jeg vil fremheve som mer strukturell, er å benytte seg av en kanselleringsstrategi. Da ser eleven på de to tallene og benytter seg av egenskapene deres. Det negative tallet minus fem kansellerer en del av det positive tallet åtte, slik at eleven står igjen med tre. Her benytter eleven seg av det faktum at negative og positive tall er motsatte mengder, som er en egenskap ved positive og negative tall. Jeg mener derfor at dette er det et steg opp fra å telle seg opp fra minus fem. Det er vanskelig å avgjøre hvilken fase eleven er i basert på én oppgave. Poenget er at jo mer eleven tar utgangspunkt i det negative tallets egenskaper, jo mer strukturell kan løsningen sies å være.

Hvis en elev ofte tyr til den ordinale funksjonen til minustegnet, selv i situasjoner hvor det er mer naturlig eller hensiktsmessig å benytte seg av minustegnet som nominator, kan det tyde på en mer operasjonell oppfatning av negative tall. Dette kan også brukes til å skille mellom utregning i kondenseringsfasen og tingliggjøringsfasen.

Jeg vil se på sammenhengen mellom tallsyn og bruk av modeller og oppfatning av negative tall. Et formalt tallsyn har etter min syn sammenheng med en strukturell oppfatning. Det formale tallsynet bygger på algebraiske relasjoner, og den algebraiske, generelle tankemåten er tydeligst knyttet opp til en strukturell oppfatning, fordi den tar utgangspunkt i det generelle og i tallenes egenskaper. De to andre tallsynene, derimot, har ingen tydelig kobling til operasjonell eller strukturell oppfatning. Det er likevel mulig å si noe om oppfatningen til elevene på bakgrunn av hvilke modeller de tar i bruk.

Sfard (1991) har identifisert et skille i type representasjoner som brukes innenfor operasjonell og strukturell oppfatning. Mentale bilder støtter strukturell oppfatning, fordi når man ser for seg noe visuelt kan man «flytte på det» som et eget objekt. Indre representasjon som ikke er støttet av bilder er derfor vanligere i en operasjonell tankemåte, fordi den gjerne inneholder flere detaljer, og ikke kan manipuleres og flyttes på. Dette er ikke en absolutt inndeling, men kan brukes som et utgangspunkt. Det finnes både visuelle og ikke-visuelle representasjoner og modeller innenfor både kardinalt, ordinalt og formalt tallsyn. Det er igjen viktig å påpeke at verken tallsyn eller oppfatning fungerer slik at eleven kun opererer med en type av gangen. De fungerer i kombinasjon med hverandre, og elevene kan bytte mellom dem. Årsaken til at jeg likevel presenterer et tydelig skille her er at det gjør det enklere å se hva elevene ligger nærmest.

Videre tar jeg for meg de vanligste modellene i arbeid med negative tall, og ser på om de hovedsakelig støtter en operasjonell eller strukturell oppfatning. Som sagt støtter en visuell modell en strukturell oppfatning i større grad, fordi eleven kan manipulere en slik modell enklere enn en ikke-visuell modell. En tallinje er en visuell modell fordi den baserer seg på et bilde eller en figur som kan manipuleres. Likevel mener jeg at ulik bruk av tallinjen kan vise ulik oppfatning av negative tall. Som jeg så i delen om ulike modeller blir addisjon av negative tall representert på samme måte som subtraksjon av positive tall. Det samme problemet oppstår i subtraksjon av negative tall, hvor det på tallinjen blir representert med samme type hopp som addisjon av et positivt tall. Det at det ikke skilles tydelig mellom subtraksjon som operator og subtraksjon som nominator gjør at det kan være vanskelig å bruke tallinjen i en strukturell løsning av addisjon eller subtraksjon av negative tall, fordi det ikke er mulig å skille mellom negative tall som objekt og subtraksjon som prosess. Som jeg skrev tidligere i teorikapittelet foreslår Freudenthal (2002) å bruke tallinjen på en litt annen måte enn den klassiske. I Freudenthals tallinje representeres tallene av piler, og operasjonene representeres av ulike avlesninger at avstand mellom pilene. Denne modellen skiller mellom tall og operasjoner på en tydeligere måte enn den klassiske tallinja. Dette er derfor en mer egnet modell for å løse oppgaver med addisjon og subtraksjon av negative tall. Begge disse modellene er visuelle, men ikke begge støtter en strukturell oppfatning i oppgaver med subtraksjon og addisjon av negative tall. Det er viktig å understreke at Sfard (1991) fremhever tallinjen som en viktig modell, og mener at den kan være vesentlig for at elevene skal være i stand til å gå fra kondenseringsfasen til tingliggjøringsfasen. Jeg sier derfor ikke at en tallinje ikke kan støtte en strukturell oppfatning, men at den i noen tilfeller kan komme til kort. Kontekster støtter i utgangspunktet ikke en strukturell oppfatning, fordi det er en ikke-visuell modell. En kontekst består av tekstbasert data, og er derfor ikke like enkel å komprimere og flytte på. Klosser som brukes på den måten Freudenthal (2002) foreslår kan støtte en strukturell oppfatning, fordi det er en visuell modell, og det er mulig å manipulere den både mentalt og fysisk. Det å telle på fingrene er en visuell modell fordi man kan se eller se for seg modellen. Denne modellen kan også støtte en operasjonell oppfatning, fordi den kan brukes på samme måte som røde og sorte klosser. Det kan virke som om Freudenthal (2002) sine nye modeller i større grad støtter en strukturell oppfatning av negative tall enn det de gamle modellene gjør. De nye modellene er visuelle, og de skiller mellom tall og operasjoner, noe som gjør det lettere å behandle de negative tallene som objekter i seg selv, og ikke operasjoner.

Som jeg har sett peker Sfard (1991) på at et kjennetegn på at elevene er i kondenseringsfasen er at de representerer det matematiske begrepet ved hjelp av ulike representasjoner. Jeg tolker det i tillegg slik at det også gjelder ulike tallsyn. Å kunne representere en matematisk idé i flere tallsyn peker på en bredere kjennskap til idéen. Hvis elevene har en operasjonell oppfatning av en matematiske idé, er det nærliggende å tenke at denne oppfatningen er knyttet til én spesiell representasjon eller ett spesielt tallsyn. For eksempel kan en operasjonell oppfatning av negative tall være knyttet til at negative tall er det man får når man begynner på et tall på tallinjen, og hopper til venstre med et hopp som er lengre enn det tallet man startet med. Da vil oppfatningen av negative tall være tett knyttet opp mot tallinje og et ordinalt tallsyn. Derfor tolker jeg liten variasjon i tallsyn til å peke på en mer operasjonell oppfatning av den matematiske idéen.

3 Metodekapittel

I dette kapittelet går jeg i detalj på hvilke metoder jeg har brukt for å samle inn og analysere datamaterialet for å svare på problemstillingen. Jeg vil henvise kort til teori jeg har brukt for å avgjøre metodevalg, men hovedvekten vil ligge på valgene jeg har tatt, og ikke på teorien bak dem.

3.1 Forskningsdesign

Jeg har valgt å gjennomføre en kvalitativ studie. Det innebærer et fokus på forståelse, nærhet til de man forsker på, tekstbasert data framfor tallbasert og ofte en induktiv fremgangsmåte (Tjora, 2012). I tillegg har kvalitative studier ofte fokus på å tolke og på informantenes opplevelse og meningsdanning (Tjora, 2012). Grunnen til at jeg valgte kvalitativ forskningsmetode er at jeg er interessert i å gå i dybden på noen elevers oppfatning av negative tall. Datamaterialet mitt har et noe større omfang enn hva som er vanlig i kvalitative masteroppgaver (Tjora, 2012). Jeg intervjuet 23 elever, og analyserte besvarelsene til 21 av elevene. Siden problemstillingen min handler om hva som kjennetegner elevenes oppfatning, ble det naturlig inkludere flere elever enn i en vanlig kvalitativ studie, for å se om de trekkene jeg oppdaget gikk igjen flere ganger. 21 elever kan tilsvare liten skoleklasse, og jeg synes derfor at det var et passende antall. Selv om jeg har mange besvarelser, går jeg i dybden på besvarelsene og analyserer dem på en kvalitativ måte med blikk for det individuelle. Fordelen med å ha en noenlunde stor gruppe er at jeg lettere kan se om noe er vanlig eller ekstraordinært, selv om jeg ikke kan generalisere funnene til en større gruppe elever.

Jeg valgte å bruke et oppgavebasert intervju som metode for datainnsamling. Intervjuet bestod av åtte eller ti aritmetikkoppgaver, som jeg kommer tilbake til senere i dette kapittelet. Hensikten med oppgavene var å få et innblikk i elevenes oppfatning av negative tall. Hovedsakelig valgte jeg intervju fordi det gir større mulighet til å være med på elevenes tankeprosesser enn andre metoder. Et intervju gir også mulighet til å stille oppfølgingsspørsmål og utfordre elevenes tanker og påstander der og da, noe som kan gi mer innsikt i deres oppfatning. Intervju deles gjerne inn i tre typer ut fra grad av struktur (Greig, Taylor & MacKay, 2013). Intervjuet som ble brukt i denne oppgaven kan klassifiseres som et seminstrukturert intervju, som også er den vanligste formen for intervju (Greig et al., 2013). Intervjuguiden ligger som vedlegg 3. Intervjuet jeg brukte er seminstrukturert i den forstand at spørsmålene i stor grad var bestemt på forhånd samtidig som det var rom for å stille oppfølgingsspørsmål og å spille videre på det elevene kommer med. Jeg hadde blant annet mulighet til å gi elevene ekstraoppgaver for å undersøke noen tema nærmere. Et slikt intervju ga rom for at både jeg og elevene kunne stille spørsmål og utforske noen emner mer nøye. Samtidig hadde jeg en klar plan med intervjuet, og kunne forsikre meg om at intervjuene ble noenlunde like for alle elevene, fordi de fulgte den samme intervjuguiden. Det ga et bedre utgangspunkt for sammenligning og kategorisering enn et ustrukturert intervju hadde gjort. En annen viktig dimensjon ved intervju er hvorvidt det gjennomføres i grupper eller individuelt. I litteraturen finnes det mange begrunnelser for å benytte seg av gruppeintervju. Noen fordeler er at det kan gjøre maktforholdet mellom intervjuobjekt og intervjuer mindre tydelig fordi elevene er flere, og kan spille mer på hverandre og støtte hverandre (Eder & Fingerson, 2001). Når settingen er naturlig kan elevene snakke mer fritt og man kan dermed få mer valide resultater av intervjuet (Eder & Fingerson, 2001). Elevene kan også utfordre hverandre og lede hverandre inn på spor de ellers ikke ville ha kommet inn på (Lewis, 1992). Dermed kan man få svar som både går mer i bredden og dybden enn hva man vil fått i et individuelt intervju (Lewis, 1992). Selv om dette er gode begrunnelser var jeg bekymret for om elevene ville påvirke svarene til hverandre i så stor grad at jeg ikke kunne se på hver enkelt elevs besvarelser. Derfor valgte jeg å gjennomføre intervju med to og to for å få med mange av fordelene med gruppeintervju, samtidig som jeg lettere kunne forsikre meg om at alle elevene fikk svare og komme med selvstendige argument.

3.2 Pilotstudie

Før jeg gikk i gang med datainnsamlingen gjennomførte jeg en pilotstudie. Pilotstudien ble gjennomført med to jenter som var elever ved Skole 1 i samme klasse som resten av informantene fra den skolen gikk i. Jeg ba læreren deres om å foreslå to elever som hadde relativt gjennomsnittlige prestasjoner i matematikk. Jeg informerte dem om studien og de sa seg villig til å delta. Jeg hadde tre hovedfokus for pilotstudien. Det første var å se om oppgavene traff nivået til elever på 7. trinn. Derfor var det viktig at de to deltagerne ikke lå langt over eller langt under de andre elevene i klassen. I tillegg ville jeg se om elevenes respons kunne brukes til å besvare problemstillingen min. Det siste jeg ville sjekke var om min måte å stille spørsmål på kunne gi meg svar jeg kunne bruke. Jeg fant ut at nivået på oppgavene var bra. Jentene klarte å svare på de fleste spørsmålene og de oppgavene de ikke klarte å finne svar på genererte gode diskusjoner. For å finne ut av hvorvidt elevenes besvarelser kunne brukes opp mot problemstillingen kategoriserte jeg jentenes svar og gjorde en enkel, overfladisk analyse. Med utgangspunkt i den så jeg at jeg kunne danne kategorier på bakgrunn av hva de hadde svart, og at mye av det stemte overens med tidligere forskning på emnet. Innenfor det siste hovedfokuset, hvordan min presentasjon av oppgavene påvirket svarene, fant jeg flere interessante ting som jeg tok med meg videre. Jeg fant blant annet ut at ved å presisere for elevene at de skulle jobbe med negative tall kunne jeg forvirre dem. De hadde veldig fokus på at svarene skulle bli negative, noe de ikke blir på de to første oppgavene. Jeg fant også ut at det var lurt å ha noen ekstraoppgaver på lur hvis det var noe elevene ikke forstod, eller hvis de konkluderte med feil svar. For eksempel hadde jeg en ekstraoppgave til oppgave 3 i tilfelle elevene ble fort ferdig med den uten å komme til riktig svar, se vedlegg 3. Et annet utfall av pilotstudien ble at jeg kuttet ned fra tolv til ti oppgaver, da det var noen oppgaver som ikke ga mer utfyllende informasjon.

3.3 Gjennomføring av datainnsamling

Jeg samlet inn data fra elever på sjuende trinn på to forskjellige skoler, Skole 1 og Skole 2. Valg av skoler og elever ble gjort gjennom bekvemmelighetsvalg, noe som vil si at utvalget ble gjort på bakgrunn av hvilke deltakere jeg hadde lett tilgang på (Tjora, 2012). Jeg kjente til begge skolene fra før da jeg jobbet som vikar på den ene og hadde hatt praksis på den andre. Intervjuene på Skole 1 ble gjennomført i slutten av november, og på Skole 2 i starten av desember. Det gikk omtrent tre uker mellom intervjuene. Årsaken til det var at det tok litt tid å få bekreftelse fra foreldre på Skole 2. Jeg gjorde ingen store endringer på intervjuguiden fra Skole 1 til Skole 2. Valg av elever ble gjort tilfeldig; av de elevene som hadde sagt seg villig til å delta i studien, trakk jeg tilfeldig to og to elever. I noen tilfeller hadde jeg mulighet til å spørre læreren om sammensettingen for å forsikre meg om at jeg ikke satte sammen to som ikke gikk sammen eller var på svært ulikt nivå. I andre tilfeller var ikke matematikklæreren til stede, og jeg måtte sette sammen par helt tilfeldig. Jeg gjennomførte elleve intervjuer, hvor det første ble gjennomført med tre elever, og de resterende ti ble gjennomført med to. Gruppen på tre elever ble dannet fordi det var sju elever fra Skole 1 som ønsket å delta. Jeg har valgt å se bort fra ett av intervjuene, da jeg ikke fikk elevene i det intervjuet til å forklare tankene sine tilstrekkelig til at det var noe jeg kunne analysere. Antall elever i det ferdige datamaterialet ble dermed 21. Intervjuene varte i gjennomsnitt mellom 15 og 16 minutter. Det korteste varte i litt over fem minutter og det lengste varte i 40 minutter. Jeg hadde på forhånd bestemt meg for å avbryte hvis elevene ble umotivert eller lei, men det var ikke nødvendig i noen av intervjuene.

Intervjuene på Skole 1 ble gjennomført på et tomt klasserom, og intervjuene på Skole 2 ble gjennomført på matematikkrommet på skolen. Ifølge Tjora (2012) er det hensiktsmessig å velge et sted hvor informanten føler seg trygg. Elevene kjente godt til skolen sin fra før, og det var derfor et egnet sted å gjennomføre intervjuene på. I tillegg var det mest praktisk, da det ga meg mulighet til å gjennomføre mange intervju på en dag. Jeg forsikret meg om at ingen andre kom inn på rommet, og at det var godt isolert for lyd utenfra. Jeg tok elevene ut fra undervisningen, og var nøye med å ikke la de miste friminutt eller matpausen sin. Dette for at de skulle være motiverte og klare for å jobbe. I de tre første intervjuene brukte jeg kun lydopptaker, da kameraet jeg skulle bruke ikke fungerte. I de åtte andre intervjuene brukte jeg videokamera. Transkriberingen ble gjennomført av meg. Jeg bruker noen enkle transkripsjonskoder når jeg presenterer utdrag fra transkripsjonene: I står for intervjuer, som er meg, () er beskrivelse av handlinger, [] er avbrytelser, og <u>understrek</u> blir brukt i tilfeller hvor det blir lagt ekstra trykk på ordet. Elevene er anonymisert og gitt navn ut ifra kjønn, hvilken skole de tilhørte, og i hvilken rekkefølge de gjennomførte intervjuet. For eksempel betyr navnet G13 at eleven er en gutt, at han tilhører skole 1, og at han var den tredje gutten som gjennomførte intervju på den skolen.

Antall oppgaver jeg ga elevene varierte mellom åtte til ti per gruppe. Da jeg begynte datainnsamlingen hadde jeg ti oppgaver. Jeg fjernet to av oppgavene halvveis, fordi de ikke tilførte noen nye svar og betraktninger fra elevene. I tillegg fikk G23 og J29 en ekstraoppgave på slutten av intervjuet som var en variant av oppgave 1, for å se om de hadde utviklet tenkemåte i løpet av intervjuet. Se Tabell 1 for en oversikt over oppgavene og hvordan de ble presentert til elevene. Jeg presenterte alle oppgavene muntlig først, og skrev kun ned oppgavene hvis elevene uttrykte at de ikke forstod hva jeg mente. Årsaken til det var at noen av oppgavene hadde en skrivemåte som var ukjent for elevene, og jeg var redd for at det skulle påvirke besvarelsene. Dette var spesielt på oppgaver som inneholdt parenteser, og oppgaver som inneholdt tomme bokser. Hvis elevene ønsket at jeg skulle skrive ned stykkene, spurte jeg om de var vant til å bruke parenteser, og hvis ikke skrev jeg stykkene uten. I oppgave 5 og 6 sa jeg i de første tre intervjuene: «Finnes det et tall jeg kan legge til fem for å få to?» og «Finnes det et tall jeg kan trekke fra fem for å få åtte?». Jeg endret dette fordi elevene ikke forstod hva jeg mente, og fordi jeg ønsket å ikke bruke «trekke fra» for minus. Uttrykket «trekke fra» peker på en ta bort-modell av subtraksjon, og jeg ønsket ikke å avgrense oppgaven til kun én modell. Jeg valgte å bruke ordet «minus» i alle sammenhenger hvor minustegnet dukket opp i oppgaver, både der hvor det var nominator og der hvor det var operator. Det var to grunner til dette. For det første antok jeg at det var det elevene var mest vant til. For det andre ønsket jeg ikke å legge opp til at det var noen forskjell på minustegnene- Noen av oppgavene ble hentet fra tidligere forskning på området, og resten lagde jeg på bakgrunn av teori. Dette og potensialet i hver av oppgavene går jeg inn på i neste kapittel.

Tabell 1: Oversikt over oppgavene

Oppgavenummer	**Oppgavene skrevet med tall og symboler**	**Oppgavene slik de ble sagt til elevene**
Oppgave 1	(-5) + 8	Minus fem pluss åtte
Oppgave 2	9 – 9	Ni minus ni
Oppgave 3	(-7) – (-7)	Minus sju minus minus sju
Oppgave 4	7 – 10	Sju minus ti
Oppgave 5	□ + 5 = 2	Ett tall pluss fem er lik to. Finnes det tallet, og hva er det?
Oppgave 6	5 - □ = 8	Fem minus ett tall er åtte. Finnes det tallet, og hva er det?
Oppgave 7	9 + (-15)	Ni pluss minus femten
Oppgave 8[1]	(-4) – 7	Minus fire minus sju
Oppgave 9[2]	(-4) + 9	Minus fire pluss ni

Jeg hadde med en åpen tallinje og noen røde og sorte klosser på alle intervjuene. Disse lå gjemt og ble ikke introdusert for elevene med en gang fordi jeg ville se om elevene uttrykte behov for hjelpemiddel av seg selv. Hjelpemidlene ble presentert på litt ulike tidspunkt, da jeg vurderte situasjonene forskjellig. Jeg ga elevene hjelpemidler hvis de ikke fikk til å løse oppgavene, eller hvis de uttrykte vanskeligheter med å forklare seg. Jeg ønsket også å se om elevene selv tok i bruk kontekster. I pilotstudien og de tre første intervjuene var den siste oppgaven en kontekstoppgave. Den ble inkludert for å se om elevene løste oppgavene på en annen måte når de ble presentert i en kontekst, spesielt fordi dette gjerne er måten elevene møter negative tall

[1] J26 og G22 fikk oppgaven (-4) – 11 i stedet ved en feil.
[2] Dette var en ekstraoppgave som G23 og J29 fikk.

på i klasserommet. Jeg oppdaget at denne oppgaven ikke ga meg noen andre svar enn hva de andre oppgavene allerede hadde gitt meg, og valgte derfor å kutte den ut.

3.4 Analysemetode

Analysen styres av de to forskningsspørsmålene: «Hvordan behandler elevene negative tall og minustegn?» og «Hva slags tallsyn bygger elevene utregningen og begrunnelsen sin på, kardinalt, ordinalt eller formalt?». For å svare på forskningsspørsmålene transkriberte og leste jeg gjennom alle intervjuene. Først gikk jeg gjennom elevenes besvarelser for å avgjøre hvor mange oppgaver hver elev svarte på. Jeg regnet de oppgavene hvor eleven hadde gitt et svar med en form for begrunnelse som en besvarelse. Å bare si seg enig i partneren sitt svar ble ikke regnet som en besvarelse. Jeg gjorde dette valget fordi jeg ønsket å ha med så uavhengige svar som mulig. Som sagt ble to oppgaver kuttet ut av analysen, fordi de viste seg å kun gi samme resultat som de andre oppgavene. Elevene fikk derfor åtte spørsmål hver, bortsett fra G23 og J29 som fikk ni spørsmål, se Tabell 1. I tillegg valgte jeg å ikke ta med oppgave 2 i analysen, fordi den ikke inneholder negative tall, og derfor ikke sier noe om elevenes oppfatning av negative tall. Den oppgaven var med for å se om elevene dro koblinger mellom oppgave 2 og 3. Dermed var det mulig å få 149 besvarelser fra elevene. Jeg fikk til sammen 119 besvarelser, det var altså 30 besvarelser som bestod av ingenting eller som kun var en bekreftelse av partneres løsning. Jeg leste gjennom elevenes besvarelser og kodet dem ved hjelp av det digitale analyseverktøyet nVivo 11. Analyseverktøyet ble brukt for å gi en oversiktlig og hensiktsmessig koding, da datamaterialet mitt var ganske omfattende. Jeg kodet alt som var av interesse, og endte opp med litt over 20 koder. En oversikt over alle kodene ligger som vedlegg 4. Noen av kodene ble til i datamaterialet, mens andre kom fra teori. Etter denne kodingen hadde jeg en grov oversikt over noen kjennetegn ved elevenes besvarelser. Noen av kodene kunne kategoriseres sammen, og det begynte å utkrystallisere seg noen hovedemner.

Med utgangspunkt i de 119 besvarelsene, og kodene jeg hadde fra nVivo, prøvde jeg meg fram med flere ulike kategoriseringer for å få oversikt over datamaterialet. Jeg endte opp med de to hovedemnene som reflekteres av forskningsspørsmålene mine; behandling av negative tall og elevenes tallsyn. For å se nærmere på det første emnet, behandling av negative tall, så jeg på to underkategorier. Den første handlet om hvorvidt elevene endret minustegnets rolle fra hvordan den ble presentert i oppgaven. Begrep om minustegnets rolle som operator og nominator hadde jeg med meg fra teorien. På bakgrunn av datamaterialet så jeg at det ikke var aktuelt å ta med symmetri i den sammenhengen fordi ingen elever endret minustegnets funksjon fra en av de andre til symmetri. Det andre emnet gikk ut på hvilke strategier og løsningsmetoder elevene brukte for å løse oppgave 3. Her brukte jeg ikke begrep fra teorien, men kategoriserte ut fra hva jeg fant i datamaterialet. Teori vil senere bli brukt til å drøfte funnene i drøftingskapittelet. Det andre emnet handlet om hvorvidt elevenes besvarelser tok utgangspunkt i et kardinalt, ordinalt eller formalt tallsyn. Dette er viktige begrep både fra teorien og fra datamaterialet mitt. Da det var få elever som viste et formalt tallsyn valgte jeg å fokusere på de to andre tallsynene. Under dette emnet så jeg også på elevenes bruk av modeller, og hvilket tallsyn disse modellene plasserte seg under. Ved å tallfeste hvor elevene havnet i de ulike kategoriene fikk jeg en oversikt over hva som var typisk for denne gruppen med elever. Det ga meg et godt utgangspunkt for å drøfte mine funn med tidligere forskning og teori. Mer nøyaktige beskrivelser av kategoriseringen og eksempler innenfor hver kategori kommer i analysekapittelet. I tillegg til å analysere og kategorisere elevenes besvarelser innenfor de to hovedemnene så jeg på om besvarelsene ga riktig eller feil svar. Det er viktig at dette ikke fremstår som fokuset for oppgaven eller analysen. Det viktige er arbeidet elevene gjorde, hvordan de tenkte, og hvordan de argumenterte for svarene sine. Likevel finner jeg det nyttig å se på om elevene fikk riktig svar opp mot de to hovedemnene, fordi det kan gi et innblikk i hva som er effektive og ikke effektive strategier og tankemåter.

Analysen min består av en blanding av induktiv og deduktiv metode. I en induktiv metode blir forskningen drevet fram hovedsakelig av empiri, mens i en deduktiv metode er det teorien som er utgangspunktet, og empirien analyseres eller kategoriseres med utgangspunkt i eksisterende teori (Tjora, 2012). Før jeg gjennomførte datainnsamlingen leste jeg på teori om negative tall og elevers arbeid med negative tall, og den teorien dannet grunnlaget for datainnsamlingen. Da jeg startet datainnsamlingen visste jeg at jeg skulle se på oppfatning av negative tall. Fra teorien hadde jeg med flere ulike begrep som kunne være interessant å se på. Dette gjør at metoden min til en viss grad er deduktiv. Da jeg analyserte datamaterialet mitt, så jeg etter ulike aspekter som kunne si noe om elevenes oppfatning av negative tall. Noen av begrepene og aspektene jeg hadde sett for meg på forhånd ble forkastet, noen ble brukt, og andre ble dannet med utgangspunkt i datamaterialet. For eksempel hadde jeg lest om minustegnets ulike funksjoner på forhånd, og sett meg ut det som en mulig kategorisering. Men jeg hadde ikke inkludert det i analysen hvis det ikke hadde fremstått som viktig i datamaterialet. Andre emner, som strategier for å løse oppgave 3 og bruk av modeller, dukket hovedsakelig opp i datamaterialet. Der fant jeg teori i etterkant. På den måten kan min analysemetode sies å være både deduktiv og induktiv. Videre vil jeg se på noen etiske betraktninger rundt metodevalgene som ble tatt og gjennomføring av datainnsamling.

3.5 Etiske betraktninger

For å vurdere om denne oppgaven er etisk forsvarlig har jeg sett på fire usikkerhetsområder hvor det er viktig å ha gode verktøy for å forsikre seg om den etiske kvaliteten (Kvale, Brinkmann, Anderssen & Rygge, 2015). Disse usikkerhetsområdene er: informert samtykke; konfidensialitet; konsekvenser; og forskerens rolle. For å forsikre meg om at det var informert samtykke gjorde jeg to grep: for det første informerte jeg foreldrene og samlet inn signaturer på samtykkeskjemaet, som ligger som vedlegg 2; i tillegg var det viktig for meg å informere elevene om hva studien handlet om, at det var frivillig å delta og om hva video- og lydopptak ville bli brukt til. Jeg understrekte også at det kun var jeg som skulle se filmene og at navnene deres ikke ville bli nevnt, noe som var med på å opprettholde konfidensialiteten i studien (Kvale et al., 2015). Både på forhånd og underveis i intervjuene tenkte jeg gjennom hvilke konsekvenser studien ville få for elevene som deltok. Noen eventuelle negative konsekvenser kunne vært at de opplevde det som ubehagelig å svare på matematikkoppgaver, at de fikk dårligere selvtillit i matematikk fordi oppgavene var for vanskelige, eller at de ble mer forvirret og skjønte mindre av det matematiske temaet jeg intervjuet dem om. Det første problemet var en av grunnene til at jeg valgte å gjennomføre et gruppeintervju. Det andre problemet prøvde jeg å løse ved å forsikre elevene om at det jeg var mest opptatt av var å finne ut av hvordan de tenkte, ikke om de fikk riktig eller feil svar. Når det var ting de ikke fikk til, berømmet jeg innsatsen deres, og understrekte at noen av oppgavene var vanskelige og berørte tema de ikke hadde gått gjennom på skolen. Det tredje problemet tilnærmet jeg meg ved å snakke med elevene om de oppgavene hvor de hadde fått feil svar. Jeg gikk gjennom de oppgavene på nytt, og vi fikk gode matematiske diskusjoner rundt temaene som var vanskelig. Positive konsekvenser for elevene kunne vært at de fikk økt selvtillit i matematikk og at de lærte noe om det emnet vi arbeidet med. I tillegg kunne de få positive opplevelser med et tema de tidligere hadde sett på som krevende, noe jeg opplevde at flere fikk. Jeg vurderte det dit at de positive konsekvensene var større enn de negative, og at jeg kunne passe på slik at de negative konsekvensene ble så små som mulig. Innenfor det siste problemområdet, forskerens rolle, var det viktig for meg å være tydelig, vennlig og ikke presse elevene. Gjennom å fokusere på disse fire usikkerhetsområdene forsikret jeg meg om at gjennomføringen av studien var etisk forsvarlig.

3.6 Metodekritikk

Det at jeg har en kvalitativ studie medfører at jeg ikke kan generalisere funnene og mene at de sier noe om flere personer enn de jeg har undersøkt. Det er heller ikke målet med denne studien, da jeg ønsker å se på noen elevers oppfatning matematikk. Likevel kan det jeg finner ut ha betydning for andre, da det kan være utgangspunkt for videre studier, eller for utforskning av egne elevers oppfatning. For å styrke studien og gjøre den gjennomsiktig har jeg dokumentert viktige valg og fremgangsmåter i metodedelen.

Mitt valg av intervju som forskningsmetode har mange fordeler, men også noen ulemper. Jeg kan ikke se bort ifra at jeg som intervjuer påvirket elevenes besvarelser. På en side kan det ses på en styrke, fordi jeg hadde mulighet til å veilede elevene til å forklare mer, argumentere for sitt syn, og komme med eksempler som nyanserte svarene deres. Likevel kan det være problematisk, fordi jeg kan ha påvirket elevene til å komme med utsagn de ikke vanligvis ville kommet med, noe som ville gjort dataene uinteressante. Jeg kunne ubevisst ledet elevene inn på en spesifikk tenkemåte eller utregningsstrategi som de vanligvis ikke ville brukt. For å forminske den negative effekten av intervju var det viktig å hele tiden være bevisst på min rolle. Både i gjennomføring av datainnsamling og i analyse av datamaterialet var jeg bevisst på at mine tanker og meninger kunne påvirke funnene, og prøvde å begrense påvirkningen fra min side så mye som mulig. De gangene jeg bevisst påvirker elevene for å få fram et svar, er jeg tydelig på det i analysen.

Et annet problem med metoden for datainnsamling er at jeg kun brukte én. En kjent metode for å forsikre seg om at det man finner ikke kun er konstruert av innsamlingsmetoden man bruker er metodetriangulering (Cohen, Manion & Morrison, 2011). Metodetriangulering går ut på at man benytter seg av to eller flere metoder for datainnsamling. For eksempel bruker man både spørreundersøkelser, intervju og observasjon. Jeg brukte kun gruppeintervju av to og to elever som datainnsamling. Det som er problematisk med å kun benytte én innsamlingsmetode er at det gjør den ene metoden svært sårbar (Cohen et al., 2011). Jeg har ingen forutsetning for å si at det jeg fant gjennom intervju er det samme som det som foregår i klasserommet, eller når elevene arbeider med oppgaver hver for seg. Årsaken til at jeg valgte å kun bruke metode var først og fremst på grunn av kapasitet og tidsbegrensninger. Som sagt studerer jeg noen flere elever enn det som er vanlig i en kvalitativ masteroppgave. Å inkludere flere innsamlingsmetoder ville blitt for omfattende. Det er viktig at jeg er bevisst på at andre innsamlingsmetoder kunne ha gitt meg andre resultater. Samtidig tar jeg det materialet jeg har på alvor, og behandler det som det det er; utregninger og begrunnelser gjort av elever i en intervjusituasjon.

Jeg søker å utforske og studere elevenes oppfatning av negative tall, men tilgangen min til denne oppfatningen er begrenset til ytre faktorer. Sfard (1991) problematiserer også dette noe, og sier at det eneste det er mulig å støtte seg på for å bruke rammeverket til å analysere elevenes oppfatning er ytre faktorer som atferd, holdninger og evner. Det er ganske selvsagt, da det er alt det er mulig å få tak i, men det er likevel viktig å være klar over denne begrensningen. Dette er ikke en utfordring som er unik for denne oppgaven, men en utfordring som gjelder alle som ønsker å finne ut noe om det som foregår inne i hodene på noen andre. Det viktige er å være bevisst på det, og behandle dataen som uttrykk for tanker, og ikke tanker i seg selv.

4 Analyse av oppgavene

I denne delen presenterer jeg de åtte oppgavene alle elevene arbeidet med i datainnsamlingen, se Tabell 1 side 31. I presentasjonen av oppgavene begrunner jeg hvorfor oppgaven ble med, presenterer hvor oppgaven er hentet fra, og analyserer potensialet som ligger i oppgaven gjennom å presentere ulike løsningsmetoder. Sfard sine begrep om operasjonell og strukturell oppfatning er ikke en del av analysen, derfor går jeg ikke inn på dem innenfor hver oppgave. I alle oppgavene kan det være relevant for elevene å bruke hjelpemidler som tallinje og lignende. Jeg tar ikke for meg hvilke hjelpemidler som er mest gunstig i hver oppgave. Dette kommer jeg tilbake til i både analysedelen og drøftingsdelen.

4.1 Oppgave 1: (-5) + 8

Den første oppgaven lagde jeg selv. Den ble valgt fordi det er en oppgave jeg forventet at mange fikk til, og fordi svaret er et positivt tall. Dette var ment som en rolig start på intervjuet. Det er flere måter å løse denne oppgaven på. Denne oppgaven ble også gjennomgått i teorikapittelet hvor jeg undersøkte hvordan ulike løsningsmetoder kunne peke på ulik grad av oppfatning av negative tall. Jeg vil gå raskt gjennom løsningsmetodene her. En metode er at elevene tenker på åtte som fem pluss tre, for så å ta bort fem av åtteren, og sitte igjen med tre. Denne strategien har jeg valgt å kalle kansellering, da elevene kansellerer eller tar bort deler av den andre addenden. En annen strategi kan være å telle seg opp ved å starte på minus fem og telle seg åtte oppover. I begge de ovennevnte strategiene tar elevene utgangspunkt i tallene slik de står i oppgaven, og ser på minus fem som et negativt tall. Da har minustegnet funksjon som en nominator, noe det også har slik det står i oppgaven. En annen metode er at elevene bytter plass på tallene slik at de får 8 – 5. Da benytter de seg av den kommutative egenskapen til addisjon, i tillegg til at de endrer funksjonen til minustegnet. Ved å benytte seg av denne løsningen behandler elevene minustegnet som en operator i stedet for en nominator. G23 og J29 fikk oppgave 9 ((-4) + 9) som ekstraoppgave. Denne oppgaven inneholder de samme elementene som oppgave 1, hvor man adderer et negativt tall med et positivt tall, og det negative tallet har lavere absoluttverdi enn det positive tallet.

4.2 Oppgave 2 og 3: 9 – 9 og (-7) – (-7)

Idéen til disse oppgavene ble hentet fra Bishop et al. (2014). Hensikten med oppgavene var å se om elevene videreførte egenskaper ved regning med positive tall til oppgaver med negative tall, og om elevene så på negative tall som egne tall. Slike oppgaver har blitt inkludert i mange studier, og det er ikke helt sammenfallende resultater. I noen tilfeller (Küchemann, 1981 referert i Thomaidis, 1993), var det få elever som mestret oppgaven, mens i andre tilfeller (Bofferding & Wessman-Enzinger, 2017; Kilhamn, 2011) var det mange elever klarte å løse slike oppgaver. Dette er forskjellige studier gjort i forskjellige tidsperioder og med forskjellig forarbeid, og jeg vil drøfte funnene i denne oppgaven opp mot disse tidligere studiene i drøftingskapittelet. Oppgave 2 var med både for å se om elevene tok i bruk regelen om at et tall subtrahert med seg selv er null i oppgaver med positive tall og for å hjelpe elevene litt på vei med å gjøre den samme koblingen for negative tall. For at eleven skal se den sammenhengen må han eller hun se på minustegnene foran sjutallene som nominatorer. Hvis alle minustegnene i oppgave 3 blir sett på som operatorer blir det vanskelig å tolke oppgaven som subtraksjon av to like tall. En annen løsningsmetode som også krever at elevene benytter riktig funksjon av minustegnet er å bruke differanse som subtraksjonsmodell. Differansen mellom minus sju og minus sju er null. En tredje mulig løsningsmetode for oppgave 3 er at elevene benytter seg av den symmetriske funksjonen til minustegnet, altså at minustegnet betegner at de skal ta det motsatte (Gallardo & Rojano, 1994). Slik jeg så i teoridelen er det ikke vanlig at elevene har vært innom dette på 7. trinn. En annen måte å løse oppgaven på er å bruke regelen om at minus og minus blir pluss. Da løses oppgaven gjennom anvendelse av regler.

4.3 Oppgave 4: 7 – 10

Jeg lagde oppgave 4 selv, og den ble tatt med for å se om det var problematisk for elevene at minuenden var lavere enn subtrahenden. Det var også den første oppgaven som ga negativt tall som svar, og den eneste oppgaven, bortsett fra oppgave 2, som ikke krevde en operasjon med negative tall. Denne oppgavetypen forventet jeg at elevene hadde møtt tidligere, og jeg antok at mange ville finne riktig svar. Jeg var bevisst på å ha med oppgaver med forskjellig vanskelighetsgrad, slik at jeg også fikk data om de elevene som ikke mestret de vanskelige oppgavene. Denne oppgaven kan løses på mange ulike måter. Elevene kan bytte plass på tallene slik at de får 10 – 7 = 3, og bruke regelen om at hvis minuenden er lavere enn subtrahenden så blir svaret negativt. De kan også her kansellere ved at man sier at 10 = 7 + 3. Så tar de bort sju og står igjen med 0 – 3, som er minus tre. Elevene kan også regne seg nedover fra sju og ti ned til minus tre.

4.4 Oppgave 5 og 6: □ + 5 = 2 og 5 – □ = 8

De to neste oppgavene ble hentet fra Bishop et al. (2014) og er stilt opp på en annen måte enn de andre, fordi elevene ikke skal finne summen eller differansen, men ett ledd i stykket. Dette kan være utfordrende i utgangspunktet hvis elevene ikke har møtt mange slike stykker før. Jeg har likevel valgt å ta de med fordi de kan føre til mange interessante løsningsmetoder og refleksjoner, som jeg vil gå videre inn på her.

Oppgave 5 ga meg mulighet til å se på hvordan elevene stilte seg til det at summen av to tall ble mindre enn en av addendene og til det å legge til et negativt tall (Bishop et al., 2014). En måte å løse denne oppgaven på er å gjøre om stykket til 2 – 5. Det fordrer gjerne at eleven kjenner til sammenhengen mellom operasjonene addisjon og subtraksjon, hvor sum minus addend1 er lik addend2, og sum minus addend2 er lik addend1. 2 – 5 kan løses på forskjellige måter, enten ved å regne seg fem nedover fra to eller ved å finne differansen mellom fem og to, og deretter avgjøre om svaret skal være positivt eller negativt. En annen strategi kan være å tenke hvor mye som mangler fra to for å få fem. Det mangler tre og elevene må derfor legge til minus tre eller trekke fra tre fra fem. En lignende strategi er å starte på fem og finne ut hva som må gjøres for å ende opp på to. I oppgave 6 utfordres tanken om at differensen alltid er lavere enn minuenden, noe elever ofte tror (Bishop et al., 2014). For å løse denne oppgaven kan elevene se på differansen mellom fem og åtte, som er tre, og avgjøre at det må være minus tre på grunn av rekkefølgen på tallene. En annen løsning er å bruke regelen med at minus og minus blir pluss. På samme måte som i oppgave 3 kan elevene også her bruke den symmetriske funksjonen av minustegnet. De kan også bruke regelen om at subtrahend + differens = minuend, og regne ut 8 + □ = 5.

4.5 Oppgave 7: 9 + (-15)

Oppgave 7 innebærer å addere et positivt tall med et negativ tall, noe som også forekommer i oppgave 5. Forskjellen er at oppgave 7 er skrevet på en mer klassisk måte hvor man skal finne summen, og det negative tallet er den andre addenden, ikke den første. Her er det flere mulige fremgangsmåter. Elevene kan tolke det å legge til et negativt tall som det samme som å trekke fra et positivt tall, og dermed regne ut 9 – 15. Da ser de gjerne bort fra plusstegnet, og behandler minustegnet som en operator, selv om det i oppgaven står som en nominator. Videre utregning kan enten være å regne ut 15 – 9, og bestemme at svaret er negativt fordi 15 er et høyere tall enn ni, eller ved å begynne på ni og regne seg 15 nedover til minus seks. Det mest utfordrende med den utregningen kan være å forklare hvorfor man kan «se bort fra» plusstegnet. En annen mulig løsning er å bruke regelen om at minus og pluss blir minus. Elevene kan også bytte plass på tallene og regne ut (-15) + 9. Da kan de starte på -15 og telle seg ni steg oppover til minus seks.

4.6 Oppgave 8: (-4) – 7

Oppgave 8 er den eneste oppgaven med subtraksjon mellom et negativt og et positivt tall. Denne oppgaven er egnet til å snakke med elevene om minustegnets roller, fordi det ene minustegnet har funksjon som nominator mens det andre har funksjon som operator. En måte å løse denne oppgaven på er å legge sammen fire og sju slik at det blir elleve, og så avgjøre at svaret må bli negativt etterpå. Begrunnelsen for dette kan være at elevene har lært denne løsningen av læreren, eller at de vet at subtraksjon på negativ side betyr at svaret blir lavere enn minuenden. En annen løsningsmetode er å regne seg sju nedover fra minus fire til minus elleve.

5 Analyse av datamaterialet

I denne delen presenterer jeg hovedfunnene fra analysen av datamaterialet og svarer på forskningsspørsmålene med utgangspunkt i de 119 besvarelsene til elevene. Dette kapittelet er i all hovedsak delt i to deler. Den første delen tar for seg det første forskningsspørsmålet, og ser på hvilken funksjon av minustegnet elevene tar i bruk, og på forskjellige løsninger av oppgave 3. Den andre delen tar utgangspunkt i det andre forskningsspørsmålet og ser på hvilket tallsyn elevene viser i besvarelsene og hvilke modeller de tar i bruk. Innenfor hvert emne blir elevenes besvarelser på hver oppgave kategorisert og presentert i en tabell. På denne måten får leseren både et innblikk i hva som er de mest og minst vanlige kategoriene innenfor hvert emne, og mulighet til å se på hver enkelt elevs besvarelser. Noe data presenteres som prosent. Noen elever har blitt kategorisert i flere kategorier innenfor samme emne. Prosentandelen vil derfor være av alle de ulike kategoriseringene, og summen av alle prosentene vil da bli over 100. Jeg har likevel valgt å ta med prosent i noen tilfeller for å gi et raskt overblikk over fordeling. I tabellene har jeg brukt bokstaver for å representere kategoriene. Forklaring på hva bokstavene betyr står i tabellteksten for hver tabell. Et blankt felt i tabellen betyr at jeg kategoriserer besvarelsen fordi eleven er for vag eller kun gjentar partnerens besvarelse. En strek i tabellen betyr at det er en besvarelse, men at den ikke har blitt kategorisert i det emnet. Besvarelsene som markeres som blanke vil derfor være de samme innenfor alle emnene, mens besvarelser merket med strek vil variere fra emne til emne. Jeg vil først kort presentere andel riktig og feil svar på oppgavene før jeg viser analysens hovedfunn innenfor tallsyn og behandling av negative tall.

5.1 Fordeling av riktig og feil svar

I dette delkapittelet ser jeg på elevenes besvarelser og bedømmer dem ut ifra korrekthet. Jeg deler besvarelsene inn i fire kategorier: riktig, fei, slurvefeil og usikker. Ved noen tilfeller kommer elevene med riktig svar og en god begrunnelse, men trekker svaret sitt helt på slutten på grunn av «press» fra sidemann. Disse svarene blir likevel kategorisert som riktig. Slurvefeil er besvarelser hvor eleven bruker korrekt metode, eller tenker riktig, men kommer fram til feil svar. Usikker er besvarelser hvor det er vanskelig å avgjøre om eleven har riktig eller feil svar. I slike besvarelser er eleven selv ofte usikker på egen besvarelse. Av de 119 besvarelsene er 83 kategorisert som riktig (69,7%), 29 kategorisert som feil (24,4%), én som slurvefeil, og seks som usikker. Se Tabell 2 for en nøyaktig oversikt over riktig og feil svar basert på elev og oppgave. I Tabell 3 er det en oversikt over riktige og feil svar for hver oppgave.

Tabell 2: Oversikt over riktig og feil svar. Symbolforklaring: R – riktig svar; F – feil svar; U – usikkert, S - slurvefeil

Elever	1	3	4	5	6	7	8	9
J11	R	U	R			S	F	
G12	R	F	R	U		R	R	
G11	R			R		R	R	
J12	R	F	R	R	F		R	
J13	R	F		R	F	R	R	
J14	R	F	R		F	R		
G13	R			R		R	R	
J21	R	F	R	R	F	R		
J22		F		R			R	
J23	R	F	R	R		U	R	
J24		F	R	R		R	R	
J25	R	F	F		F	R	R	
G21		U	F	R	F	R	R	
J26		F	R	R		R	R	
G22	R	R	R	R	R	R		
J28	R	U	R	R	R	R	R	
J27		F	R	R		R	R	
G23	F	F	R	F	F	R	R	F
J29	F	F	R	R	F	R	R	R
G25		R		R	R	R	R	
J211	R	U	R	F	R	R	R	

Tabell 3: Oversikt over riktige og feil svar basert på oppgave

Oppgave	Riktig svar	Feil svar	Slurvefeil	Usikker	Sum
1	13	2			**15**
3	2	13		4	**19**
4	14	2			**16**
5	15	2		1	**18**
6	4	8			**12**
7	17		1	1	**19**
8	17	1			**18**
9	1	1			**2**

Oppgave 3 og 6 skiller seg ut som oppgaver med få riktige svar. Det kan være fordi begge oppgavene inneholder subtraksjon av negative tall. I delen om behandling av negative tall er ikke oppgave 6 inkludert fordi det er få elever som svarer på den, og på grunn av at mange av elevene ikke klarer å gjøre rede for tenkningen sin i arbeid med den oppgaven. Likevel inkluderer jeg den i delen om elevenes tallsyn, fordi det er noen spennende aspekter som kommer fram i den oppgaven som ikke kommer fram i andre oppgaver. I oppgave 3 er det flere elever som svarer, og flere som begrunner besvarelsen sin. Her kommer det fram mange spennende aspekt som kan si noe om hvordan elevene behandler negative tall. Derfor vil jeg se nærmere på den oppgaven i delen om behandling av negative tall. Siden fokuset mitt ikke er på om elevene svarer riktig eller feil på oppgavene, vil jeg ikke gå nærmere inn på hver oppgave her. Jeg vil bruke resultatene som utgangspunkt for sammenligning og drøfting senere i oppgaven.

5.2 Behandling av negative tall

Det første forskningsspørsmålet handler om elevenes behandling av negative tall. Innenfor dette emnet ser jeg på hvordan elevene forholder seg til det negative og til minustegnet. Forskningsspørsmålet består av to underemner: minustegnets rolle, hvor jeg ser på om elevene endrer minustegnets rolle i utregningen sin; og oppgave 3, hvor jeg ser på ulike løsninger og refleksjoner som dukker opp i arbeid med den oppgaven.

5.2.1 Minustegnets rolle

I denne delen bruker jeg Gallardo og Rojano (1994) sin tredeling av minustegnets funksjoner som nominator, operator og symmetrisk funksjon. Jeg ser på om elevene benytter seg av den funksjonen minustegnet opprinnelig har i oppgaven, eller om de endrer funksjonen i utregningen sin. Oppgavene jeg analyserer i dette delkapittelet er valgt på bakgrunn av elimineringsmetoden. Jeg tar ikke med oppgave 2 og 4 fordi minustegnet kun er operator der. Oppgave 3 og 6 er ikke med fordi det er svært få av elevene som utnytter den symmetriske funksjonen til minustegnet. Og selv om de er i stand til å identifisere minustegnet korrekt som nominator eller operator, er det få som klarer å bruke det i utregningen, noe jeg ser på i delkapittelet om oppgave 3. Dermed står jeg igjen med fire oppgaver: 1, 5, 7 og 8.

Av de tre funksjonene til minustegnene er det utvilsomt endring fra nominator til operator som er den vanligste, mens det er få som endrer funksjonen til minustegnet fra operator til nominator. Det er ingen som endrer funksjonen til å være symmetrisk. Det er også en del besvarelser hvor elevene bruker de funksjonene av minustegnene som står i oppgaven. 24 av besvarelsene er kategorisert som annet. Dette er besvarelser hvor det ikke kommer tydelig fram hva slags funksjon elevene har tillagt minustegnet i utregningen. For fullstendig oversikt se Tabell 4. Jeg vil gå inn på hver av kategoriene og se på eksakt antall og på eksempler innenfor hver kategori.

Tabell 4: Oversikt over elevenes bruk av minustegnets roller. Forklaring av symboler: N – bruker minustegnet som nominator når det har funksjon som operator i oppgaven; O – bruker minustegnet som operator når det har funksjon som nominator i oppgaven; R – bruker den funksjonen til minustegnet som står i oppgaven. Noen besvarelser har flere symbol fordi de faller inn under flere kategorier.

Elever	1	5	7	8
J11	R		O	N
G12	O	-	O	-
G11	R	R	O	R
J12	O	-		-
J13	O	O	O R	N
J14	-		O	
G13	-	R	O	N
J21	R	R	O	
J22		O		R
J23	R	R	-	R
J24		-	O	R
J25	R		O R	-
G21		O	O	-
J26		-	R	-
G22	O	O	O	
J28	R	O	O	-
J27		-	-	R
G23	R	R	O	-
J29	R	R	O	R
G25		O	-	-
J211	R	-	R	-

Det er 24 besvarelser fordelt på 17 elever som behandler minustegnet som en operator selv om det i oppgaven er en nominator. Jeg vil se på noen viktige tall innenfor denne formen for endring av minustegnets funksjon. I oppgave 7 (9 + (-15) tar 14 av 19 besvarelser i bruk denne strategien. De fleste av dem velger å løse den som 9 – 15, men er ikke i stand til å begrunne hvorfor de kan subtrahere i stedet for å addere. I oppgave 8 er det ingen som endrer minustegnets funksjon fra nominator til operator. Av de 17 elevene i datamaterialet som endrer funksjonen til minustegnet fra nominator til operator, gjør tolv elever det i kun en av de fire besvarelsene. I sju av besvarelsene endrer elevene funksjonen fra nominator til operator selv om de identifiserer minustegnets funksjoner korrekt. Det er fire elever som gjør dette. Et eksempel er J13 i oppgave 1 (-5 + 8):

> J13: Ehm, fordi at det er minustall og siden det er pluss så er det bare å ta, eh, minus så får du tallet da på en måte siden det der er et minustall (peker på -5).

I: Så du tok bare åtte minus fem du da?

J13: Mm

Her ser jeg at J13 tolker minus fem som et negativt tall fordi hun kaller det et «minustall». Likevel velger hun å løse oppgaven som 8 – 5. Det å endre minustegnets funksjon fra nominator til operator er det samme som å gå fra å regne med et negativt tall til å regne med et positivt tall. Det er fordi det er minustegnet som nominator som bestemmer at tallet er negativt. Når den funksjonen endres, går det negative tallet over til å bli et positivt tall som skal subtraheres. I mitt datamateriale er det med andre ord 24 tilfeller hvor et negativt tall endres til et positivt tall.

Det er tre besvarelser hvor elevene endrer minustegnets funksjon fra operator til nominator, og alle tre forekommer i oppgave 8 ((-4) – 7). J13 og G13 gjør dette ved å kalle både minus fire og sju for «minustall». Her endrer de funksjonen til det andre minustegnet fra å betegne subtraksjon til å betegne sju som et negativt tall. Det kommer ikke fram av besvarelsene deres om de bruker dette bevisst i utregningen. Jeg mener derimot at J11 bruker dette i utregningen:

J11: Ehm, fire, fem, seks, sju. Minus tre. (Viser tre fingre)

Jeg tolker denne besvarelsen som bruk av subtraksjonsmodellen differanse fordi hun teller seg fra det ene tallet til det andre, og svaret hun ender på representerer avstanden mellom de to tallene. I denne utregningen snakker J11 om de positive tallene fire og sju, og ikke om de negative tallene minus fire og minus sju. Det er uvisst om hun gjør det fordi hun mener de positive tallene eller fordi hun synes det er enklere å bare si tallene i stedet for å si «minus fire, minus fem, minus seks, minus sju». For å finne ut om J11 har endret minustegnets funksjon fra operator til nominator må jeg se på hvilke tall hun egentlig mener i utregningen sin. Først vil jeg slå fast at jeg mener at hun enten finner differansen mellom fire og sju i stykket 4 – 7, eller at hun finner differansen mellom minus sju og minus fire i stykket (-7) – (-4). Det ser jeg fordi hun kommer fram til svaret minus tre, som er riktig svar på begge stykkene. Det at avstanden er tre fra fire til sju antyder også at begge tallene har likt fortegn. Videre vil jeg argumentere for at det er mest sannsynlig at hun mener de negative tallene minus fire og minus sju. Jeg antar for et øyeblikk at hun mener 4 – 7. Det er et stykke som ligner på to andre oppgaver J11 løser; 7 – 10, og 9 + (-15), som hun tolker som 9 – 15. Hun løser ingen av disse to oppgavene ved hjelp av differanse. Den eneste oppgaven hvor hun tar i bruk differanse er oppgave 8. Jeg mener at det er et argument for at hun i denne oppgaven mener minus fire og minus sju, fordi dette er en ny type oppgave, som hun løser på en ny måte. Et annet argument for at hun mener de negative tallene er at måten oppgaven presenteres på kan invitere til en slik løsning som J11 bruker, fordi det kan virke som om man presenteres for to tall; minus fire og minus sju. På bakgrunn av disse argumentene tolker jeg det som at J11 endrer funksjonen i det andre minustegnet i oppgave 8 fra å være en operator til å bli en nominator.

25 elever tar utgangspunkt i minustegnets funksjon i utregningen sin. Jeg har identifisert to måter elevene tar utgangspunkt i funksjonene til minustegnet på. Den første måten er den mest klassiske, hvor eleven regner ut slik det står i oppgaven. Et eksempel på det er G11 i oppgave 8, som er (-4) – 7:

> G11: Minus elleve
>
> G11: Minus fire (holder opp en finger)
>
> I: Mm
>
> G11: Minus fem, minus seks, minus sju, minus åtte, minus ni, minus ti, minus elleve (viser på fingrene. Holder til slutt opp 7 fingre). Og da har jeg sju her, og det er minus sju

G11 tar utgangspunkt i minustegnenes funksjon slik de står i oppgaven. Det første minustegnet blir tolket som en nominator, slik at det bestemmer at det første tallet er et negativt tall. Det viser G11 ved å kalle tallet minus fire. Det andre minustegnet har funksjon som operator ved at det betegner operasjonen subtraksjon. Det viser G11 ved at han teller seg sju bakover fra det negative tallet minus fire. Den andre måten å regne ut ved å bruke minustegnenes roller slik de står i oppgaven er å bruke en kansselleringsstrategi. Det forekommer fire ganger, og brukes av to elever. Et eksempel er J23 på oppgave 1 (-5 + 8):

> J23: Fordi det er minus fem
>
> I: Ja
>
> J23: Også tar man fem av åtteren som man skal plusse på, også da er det igjen tre av den åtteren som da blir på pluss tre da, eller over null.

Dette er en kansselleringsstrategi, fordi J23 bruker det negative tallet til å kansellere deler av det positive tallet. Det ser jeg fordi hun sier at hun «tar fem av åtteren». Som jeg skrev i teoridelen er dette en utregningsmåte som i høyeste grad tar utgangspunkt i det negative tallet, fordi den benytter seg av det negative tallets egenskaper for å løse oppgaven. Den egenskapen som brukes her er negative tall som det motsatte av et positivt tall, altså at alle positive tall a har et negativt tall b, hvor a + b = 0.

Jeg har identifisert to typer besvarelser som ikke kan kategoriseres innenfor emnet om minustegnets rolle. Den første typen er besvarelser hvor elevene forklarer for lite av sin løsningsstrategi til at det er mulig å identifisere om elevene tar utgangspunkt i det negative tallet eller ikke. Et eksempel på en slik besvarelse er G12 sitt arbeid med oppgave 8 ((-4) – 7):

G12: Det blir jo minus elleve, fordi hvis man har sju og man plusser det med tre da får man jo ti, hvis man har en ekstra så får man jo elleve

R: Hva sa du nå? Hvis du?

G12: Har sju, en sjuer og en treer, så får du ti

R: Mm

G12: Men hvis du har en firer og en sjuer da må det være en mer, så da blir det elleve

Her forklarer G12 hvordan han har regnet ut 7 + 4, men han forklarer ikke hvorfor han kan tenke 7 + 4. Det er dermed ikke mulig for meg å vite om han endrer funksjonene til minustegnene eller ikke, fordi han ikke sier noe om det. Det at eleven løser oppgaven som 7 + 4, og endrer svaret til minus elleve er ikke nok til å vite hvilken funksjon eleven tillegger minustegnene, fordi det kan begrunnes både om man tolker oppgaven som (-4) – 7 og som 0 – 4 – 7. Den andre typen besvarelser som ikke blir kategorisert innenfor dette emnet er besvarelser hvor begrunnelsen ikke er matematisk gyldig, noe som gjør det vanskelig å bestemme hvilken funksjon av minustegnet som blir brukt. For eksempel G13 sin besvarelse på oppgave 1 ((-5) + 8):

G13: Nei jeg bare tenkte, det er bare å plusse på. Hvis man plusser fem pluss åtte, så trekker man ifra.

Her er det vanskelig å si hva eleven mener, fordi fremgangsmåten hans ikke gir mening matematisk. Han sier at han løser oppgaven (-5) + 8 ved å addere fem og åtte, og trekke ifra. Ut ifra det han sier er det vanskelig å argumentere for at det er en matematisk riktig løsning. Da er det også vanskelig å vite hvilken funksjon han tillegger minustegnet, fordi jeg ikke vet hvordan han tenker i arbeid med oppgaven.

5.2.2 Oppgave 3 og subtraksjon av negative tall

Videre ser jeg nærmere på en spesiell oppgave, oppgave 3: (-7) – (-7). Det som er spesielt med denne oppgaven er at den eksplisitt presenterer det å subtrahere et negativt tall. Slik jeg så i analyse av oppgavene finnes det mange ulike løsningsmetoder for denne oppgaven. Det er interessant å se på hvilke metoder elevene har brukt. I tillegg er det interessant å se om elevene identifiserer riktig funksjon av minustegnet og om dette hjelper dem å løse oppgaven. Dette er også den oppgaven flest elever svarer feil på. Likevel er det mange som tenker riktig og har gode refleksjoner. Derfor er det interessant å se på hva de refleksjonene er og eventuelt hvorfor de leder til riktig svar. Fullstendig oversikt over strategiene elevene brukes finnes i Tabell 5. Noen av elevene bruker flere ulike strategier og resonnement, noen ganger samtidig, og noen ganger ved forskjellige tilfeller. For eksempel hadde J11 én løsningsmetode den første gangen oppgaven ble tatt opp, og en annen da vi kom tilbake til oppgaven på slutten av intervjuet. Siden hun ikke konkluderer med noe på slutten, blir hennes besvarelse kategorisert som usikkert med tanke på riktig eller feil svar. Jeg vil se på de ulike strategiene, hvor ofte de dukker opp, og på noen eksempel innenfor hver type.

Tabell 5: Oversikt over ulike representasjoner og tenkemåter i oppgave 3.

Strategi	**Antall besvarelser**
Riktig identifisering av tallene	7
(-7) -7 = (-7) - (-7)	6
Løse som (-7) - 7	7
Regel om at minus og minus blir pluss	4
Formal - samme som 9 - 9	2
Annen strategi	6

Sju av elevene klarer å identifisere minustegnet som operator og som nominator riktig. Et eksempel på en slik identifisering er J12 sin besvarelse:

> J12: Det der er et minustall og det der er et minustall og det skal minus minustallene (peker først på (-7) og (-7), og deretter på minustegnet mellom de to tallene

Ved at hun kaller minus sju og minus sju for «minustall», viser hun at hun identifiserer de to minustegnene foran sjutallene som nominatorer. Uttrykket «minus minustallene» forstår jeg som et uttrykk for subtraksjon, fordi det er en handling som skal utføres på de to negative tallene. Hun klarer med andre ord å identifisere de riktige funksjonene til minustegnene. Likevel ender hun opp med at svaret enten er -14 eller -21. Av de sju som identifiserer riktig funksjon for minustegnet, er det bare en elev som får riktig svar: G23.

Sju elever løser oppgaven ved å regne ut (-7) – 7. De ender opp med minus fjorten som svar på oppgaven. Fire av disse elevene gjør dette ved å regne ut 7 + 7, og deretter bestemme at svaret blir negativt. Et eksempel på en slik løsning er J25 sin besvarelse. Hun sier at svaret er minus fjorten og begrunner den påstanden slik:

> J25: Jeg vet at sju pluss sju blir fjorten
>
> I: Okei.
>
> J25: Så da må jo, og det er egentlig jo nesten det samme. For minus sju minus minus sju

Hun argumenterer for svaret sitt med at sju pluss sju er fjorten, og sier at det er «nesten det samme» som (-7) – (-7). Med «nesten det samme» antar jeg at hun mener at svaret blir negativt i stedet for positivt, noe som gjør at det ikke er helt det samme. Seks andre besvarelser som handler om det samme er besvarelser hvor elevene hevder at (-7) – 7 gir samme svar som (-7) – (-7). Jeg deler opp disse to fordi det er forskjell i om elevene bruker denne påstanden som en måte å løse oppgaven på, eller om de kun erkjenner at det er det samme, men bruker noe annet for å løse oppgaven. Det som er likt med disse besvarelsene er at de bytter ut alle minustegnene med pluss, stedet for å bare bytte ut minustegnene som operator med pluss.

Fire elever nevner eller bruker en regel om at minus og minus blir pluss. To av elevene er ikke sikre nok på denne regelen til å benytte den som en løsningsstrategi. G25 er den eneste som selvstendig finner fram til riktig svar ved å bruke denne strategien:

> G25: Null
> I: Null? Hvorfor det da?
> G25: Pluss []
> G25: For minus minus er pluss
> J211: Ja
> I: Og da blir svaret?
> G25: Null

Han sier at svaret er null fordi «minus minus er pluss». Jeg forstår det slik at han løser oppgaven ved å endre den fra (-7) – (-7) til (-7) + 7, noe som gir svaret null. Dette er en matematisk riktig løsning, men G25 er ikke i stand til å begrunne hvorfor denne løsningen er riktig.

To elever løser oppgaven ved å bruke regelen om at et tall subtrahert med seg selv blir null. Jeg tar for meg begge besvarelsene fordi de er svært forskjellige. Den første eleven er G22. Han sier først at (-7) – (-7) blir -14, og at (-7) – 7 blir null. Hans forklaring på at (-7) – 7 blir null er:

> G22: Fordi det er minus sju minus sju. Det er samme tall minus samme tall

Litt lengre ut i samtalen, etter at han og partneren har diskutert litt, ombestemmer han seg:

> G22: Jo men er det ikke sånn at, jo er det ikke minus fjorten da?
> I: Hva da? Den her (peker på -7 – 7)
> G22: Ja, også er den null (peker på -7 – -7)?
> I: Den her (peker på -7 – -7)? Hvorfor det da?
> G22: Fordi det er minus sju <u>minus</u> minus sju og ikke minus sju, det er minus.
> I: Hvorfor blir det null da (skriver = 0 bak -7 – -7, under -14)?
> G22: Fordi det er det samme som ni minus ni
> I: Hvordan er det det samme?
> G22: Fordi det er ett tall også minuser du det samme tallet

Litt senere ombestemmer han seg igjen:

G22: Nei det er sikkert det samme. Skjønte ikke helt hva du sa nå, men jeg tenkte selv, også tror jeg jeg fant det ut. Ja jeg tror det er minus fjorten.

I: Tror du og det er minus fjorten?

G22: Ja.

Begrunnelsen han bruker er den samme både når han mener at svaret blir minus fjorten, og når han mener at svaret blir null. Han sier i begge tilfellene at det er et tall subtrahert med seg selv, noe som blir null. Det virker som om han i starten identifiserer det andre minustegnet i oppgaven (-7) – 7 som en nominator, og derfor tror at han har med to negative tall å gjøre. Hvorfor han ikke identifiserer det andre minustegnet i (-7) – (-7) som operator med en gang er uvisst. Underveis i diskusjonen mellom G22 og partneren hans J26 endrer han mening, og sier at svaret på (-7) – (-7) blir null. Når han sier «Fordi det er minus sju <u>minus</u> minus sju og ikke minus sju, det er minus.», skiller han mellom minustegnene ved å legge mer trykk på «minus» som operator enn «minus» som nominator. På den måten skiller han også mellom de to tallene minus sju og minus sju. Det virker som om noe av vanskelighetene til G22 grunner i et fattig språk, fordi «minus» betegner både minustegnet som operator og som nominator. Det kommer fram av utsagnet «og ikke minus sju, det er minus». Her tror jeg han prøver å påpeke akkurat det, at det andre minustegnet ikke er en nominator, fordi det ikke betegner minus sju som et negativt tall, men operasjonen subtraksjon. G22 drar også eksplisitt inn oppgave 2 (9 – 9), og sier at svaret er det samme «Fordi det er ett tall også minuser du det samme tallet». Her er det tydelig at han ser på minus sju som et eget tall, fordi han sier at det er det samme som 9 – 9. Han er også i stand til å bruke dette til å løse oppgaven, ved å se at tallet minus sju har samme funksjon i denne oppgaven som tallet ni hadde i forrige oppgave. Etter de har diskutert det litt til går han tilbake på det, og sier at (-7) - (-7) må bli -14. Det er vanskelig å si hvorfor han ombestemmer seg, da han kun sier at han «tenkte selv». Jeg velger å kategorisere dette som riktig svar, fordi han ikke gir noen begrunnelse for hvorfor han plutselig endrer mening, og fordi begrunnelsen hans for det riktige svaret er meget overbevisende.

Den andre eleven som tar i bruk det at et tall subtrahert med seg selv er null er J11. Hennes gruppe fikk oppgaven i to runder, fordi jeg ønsket å se om de kunne reflektere mer over den enn de gjorde i første omgang. I den første runden svarer hun at det blir -14:

J11: Fordi sju pluss sju er fjorten, også.

J11: Også er det, det blir bare lengre og lengre mot minussiden

Hun begrunner svaret minus fjorten med at sju pluss sju er fjorten, og det går mot «minussiden». Denne besvarelsen plasserer seg sammen med de andre løser oppgaven som (-7) – 7. Da jeg ga de oppgaven en gang til skrev jeg den ned, både som -7 - -7 og som (-7) – (-7), og sa at det betydde det samme:

J11: Null. Null

G11: Det her er det samme svaret som

J11: Nei, det er det samme som i stad.

I: Hvordan, hvorfor kom du fram til null?

J11: Ehm, fordi jeg tenkte feil.

I: Men hva tenkte du for noe? Få høre

J11: Fordi sju minus sju er null

I: Hva sa du?

J11: Sju minus sju er null

J11: Det er det samme som i stad.

I: Men hvorfor tenkte du null? Det synes jeg er litt interessant.

J11: Fordi sju minus sju er null

I: Sju minus sju er null ja. Så minus sju minus minus sju må også bli null?

G11: Nei

J11: Jo

G12: Enten så er det fjorten eller så er det sju

J11: Eller minus sju

G11: Jeg tror det blir minus fjorten jeg.

I: Ja

J11: Jeg og

I dette utdraget sier hun først at svaret er null, men trekker seg på det med en gang når G11 sier at oppgaven er den samme som den de løste tidligere i intervjuet. Jeg ber henne likevel begrunne hvorfor hun først sa null. Hun sier at svaret blir null fordi sju minus sju er null. Her bruker hun en sammenheng fra positive tall, nemlig at et tall subtrahert med seg selv blir null, til å løse en oppgave med negative tall. Jeg ber J11 begrunne hvorfor hun mener at svaret er null, også etter at hun har endret mening. Begrunnelsen hennes kan derfor tolkes som at hun bare sier noe for å gjøre meg fornøyd. Likevel synes jeg det er interessant å ta med hennes besvarelse, og jeg vil drøfte den videre i neste kapittel. Det at jeg må spørre flere ganger for å få en begrunnelse, at begrunnelsen ikke er så grundig, og at hun raskt går tilbake til feil svar gjør at denne besvarelsen blir kategorisert som feil.

Seks av besvarelsene blir kategorisert som annet. Dette er besvarelser som ikke passer inn i de andre kategoriene, som kun en elev benytter seg av, eller besvarelser hvor det ikke er mulig å se hva eleven har tenkt.

5.3 Tallsyn

I denne delen analyserer jeg elevenes besvarelser i lys av det andre forskningsspørsmålet, som handler om tallsyn. Jeg vil først se generelt på om elevene hovedsakelig har et ordinalt, kardinalt eller formalt tallsyn. Deretter går jeg mer i dybden og ser på de ulike modellene elevene brukte, og ulike varianter av disse modellene. Jeg bruker Bishop et al. (2014) sine definisjoner av ordinalt, kardinalt og formalt tallsyn. Jeg ser på hver elev og hver oppgave, og kategoriserer besvarelsen som ordinal, kardinal, og formal, se Tabell 6.

Tabell 6: Oversikt over elevenes tallsyn. Forklaring av symbol: O – ordinal; K – kardinal; F – formal. Noen besvarelser har flere symbol fordi de faller innenfor flere kategorier.

Elever	1	3	4	5	6	7	8	9
J11	O	F	O			O	O	
G12	-	-	-	-		-	-	
G11	O			O		O	O	
J12	-	-	-	-	K		-	
J13	-	-		O	K	O	O	
J14	-	-	-		-	O		
G13	-			-		-	-	
J21	O	-	O	O	-	O		
J22		O		-			O	
J23	O	-	-	-		O	-	
J24		O	O	-		-	O	
J25	O	-	O		-	-	O	
G21		-	-	-	-	-	-	
J26		-	K	-		-	O	
G22	-	F	K	-	K	-		
J28	O	– O	O	O	K	O	O	
J27		-	-	-		O	-	
G23	O	O	O	O	O K	O K	K	O K
J29	O	O	O	O	O	-	O	O
G25		-		-	O	-	O	
J211	O	O	-	-	O	O	O	

En besvarelse kategoriseres som ordinal hvis den grunner i en beskrivelse av tall i rekkefølge eller med retning. 55 av de 119 besvarelsene kategoriseres som ordinal. Dette tilsvarer omtrent 46,2 prosent av besvarelsene. En besvarelse kategoriseres som kardinal hvis begrunnelsen eller besvarelsen bygges på tallets kardinalitet, altså mengde. Ti av de 119 besvarelsene (8,4 %) viser et slikt tallsyn. En besvarelse blir kategorisert som formal hvis eleven sitt argument bygger på logisk bruk av regler for positive tall. Det er kun to besvarelser, gitt av to forskjellige elever, som bygger på et formalt tallsyn (1,5%). Det er G22 og J11 sine besvarelser på oppgave 3. Begge disse besvarelsene ble gjennomgått i delkapittelet om oppgave 3. Årsaken til at disse besvarelsene blir kategorisert innenfor bruk av formalt tallsyn er at de bruker en generell egenskap ved tall til å løse en spesifikk oppgave. De bruker det at et tall subtrahert med seg selv blir null til å løse oppgave 3. Noen besvarelser kategoriseres både innenfor ordinalt og kardinalt tallsyn. Det er besvarelser hvor elevene benytter seg av flere forklaringer, enten som stemmer overens, eller som gir forskjellig svar. Dette skjer tre ganger, og alle tilfellene er det G23 som står for. 56 besvarelser (47%) blir ikke kategorisert, fordi det ikke er tydelig hvilket tallsyn eleven har. I noen tilfeller kan det hende at eleven har et klart tallsyn som ikke kommer fram i besvarelsen. Tre elever gir kun besvarelser som ikke bli kategorisert innenfor noen av de tre tallsynene, elleve elever bruker kun ett tallsyn og sju elever bruker til sammen to eller flere tallsyn gjennom intervjuet.

Videre vil jeg gå nærmere inn på eksempler innenfor de forskjellige tallsynene. I og med at en del av det andre hovedemnet handler om modeller, deler jeg denne delen inn i bruk av modeller og ikke bruk av modeller. Jeg tar først for meg de besvarelsene som ikke tar i bruk modeller. Noen av besvarelsene som ikke inneholder bruk av modeller kan kategoriseres innenfor tallsyn, men flesteparten kan ikke det. 81 av de 119 besvarelsene inneholder ikke modeller. Av disse blir 21 kategorisert som ordinal, to som kardinal, to som formal, og 56 uten et tydelig tallsyn. Det at jeg ikke har klart å identifisere en modell betyr ikke at eleven ikke baserer besvarelsen sin på en, det betyr bare at det ikke kommer fram av samtalen. I oppgave 3 er det hele 16 av 19 elever som ikke bruker noen av de fire modellene. Også oppgave 5, 7 og 4 utpeker seg som oppgaver med mange besvarelser uten modeller, henholdsvis 15, 13 og 10 besvarelser uten bruk av modell.

Det som kjennetegner de ordinale besvarelsene uten modell er at de bruker uttrykk som «over null» og «under null», eller at de ramser opp en tallrekke. Et eksempel på en ordinal besvarelse uten bruk av modell er J21 i oppgave 5 (□ + 5 = 2):

> J21: Mm, fordi f.eks. hvis vi tar minus tre pluss, var det to?
>
> I: Ehm, pluss fem
>
> J21: Ja
>
> I: Er lik to
>
> J21: Ja. Fordi da ser vi at vi går over på en måte eneren igjen. Da blir det på en måte to da, eller da går vi på en måte en også to og det blir jo fem.

Det som gjør at denne besvarelsen er kategorisert som en ordinal besvarelse er at J21 sier «går over på en måte eneren» og «da går vi på en måte en og to og det blir jo fem». Det første utsagnet viser til en inndeling over og under én. Det peker på en ordning av tallene i en rekkefølge. Det er spesielt at hun bruker én som referansepunkt, da det som tradisjonelt brukes er null. Det at én har den funksjonen hos henne endrer ikke prinsippet hun bygger forklaringen sin på, og heller ikke svaret i dette tilfellet. Det andre utsagnet er en form for oppramsing av en tallrekke, noe som også viser at hun ser for seg tallene i en rekke. Dette peker også på et ordinalt tallsyn.

Det som kjennetegner besvarelsene som bygger på et kardinalt tallsyn uten bruk modell er at de fokuserer på tallets mengde. De to besvarelsene innenfor denne kategorien er svært forskjellige, derfor vil jeg trekke fram begge to. Den første besvarelsen er J28 i oppgave 6 (5 – □ = 8):

> J28: Fordi da tar man bort på en måte det som ikke er der, på en måte
>
> J28: Hvis vi tenker at vi har åtte da, da må vi finne ut at, da er det på en måte tre som mangler da for å få liksom åtte, hvis man har tallet fem. Så da må man på en måte minus det som er borte (ler) sånn at, hvis det gir mening

Dette er kategorisert som en besvarelse bygd på et kardinalt tallsyn fordi hun snakker om en mengde på fem, og en mengde på åtte, og noe som «mangler» for å få mengden åtte. Det negative tallet blir omtalt som «noe som er borte», og subtraksjon av et negativt tall blir det samme som å subtrahere det som er borte. Den andre besvarelsen med et kardinalt tallsyn hvor eleven ikke tar i bruk en modell er J13 sin besvarelse på oppgave 6 (5 – □ = 8):

> J13: Hvordan går det an å trekke fra fem når det ikke er åtte engang?

Her er det ikke like tydelig at det er snakk om et kardinalt tallsyn, fordi hun ikke bruker ord som omhandler det å ta bort eller miste en mengde. Grunnen til at jeg kategoriserer besvarelsen som kardinal er at J13 problematiserer det å trekke fra åtte når hun har fem. Her snakker hun tydelig om en mengde. Hvis det samme problemet hadde blitt formulert med utgangspunkt i et ordinalt tallsyn, vill det handlet om problemet med å gå under null, og at tallrekka slutter på null. Her er det snakk om at det ikke går an å ta bort noe som ikke er der. Derfor kategoriserer jeg denne besvarelsen som kardinal.

Alle besvarelsene i datamaterialet som bruker modeller har i tillegg et identifiserbart tallsyn. Det er med andre ord ingen besvarelser uten tallsyn som inneholder bruk av modeller. Et eksempel på en utregning som ikke har blitt kategorisert innenfor noen av tallsynene er G12 sin besvarelse av oppgave 1 (-5 + 8):

> G12: Jeg visste at hvis man tar fem og plusser på tre så får man åtte.
>
> I: Ja
>
> G12: Hvis man minuser åtte med fem så får man tre

Han bruker det han kan om de positive tallene fem og åtte for å løse oppgaven. Det er ingenting i hans besvarelse som sier noe om hvorvidt tallene er ordnet i en rekkefølge, om de representerer en mengde, eller om han tar utgangspunkt i algebraiske sammenhenger. Derfor er ikke denne og lignende besvarelser kategorisert innenfor noen av de tre tallsynene. Andre typiske besvarelser som ikke har et identifiserbart tallsyn er besvarelser hvor eleven ikke forklarer utregningen tilstrekkelig til at jeg kan avgjøre hva slag tallsyn han eller hun baserer utregningen på.

Videre ser jeg på de besvarelsene som tar i bruk en modell. Jeg ser på hvilke modeller elevene bruker, og hvordan disse fordeler seg innenfor de ulike tallsynene. Se Tabell 7 for en fullstendig oversikt over bruk av modeller. Det dukker opp fire typer modeller i datamaterialet: tallinje, kontekst, å telle på fingrene og klosser. Av de 119 besvarelsene er det 44 besvarelser som bruker en eller flere modeller, noe som tilsvarer nesten 37 %. Det er 28 besvarelser som tar i bruk tallinje (23,5%), sju tilfeller av kontekst (5,9%), og sju tilfeller av å telle på fingrene (5,9%). Det er også to elever som bruker klosser i en forklaring hver (1,7%). Videre ser jeg på om elevene tar initiativ til å bruke modellene selv eller ikke. Som jeg skrev i metodedelen tilbød jeg ikke elevene modeller i starten for å se om elevene selv initierte modellbruk. De to elevene som bruker klosser tar ikke initiativ til det selv. Alle elevene som tar i bruk kontekst eller det å telle på fingrene gjør det uten støtte fra meg. Det er elleve elever som bruker tallinje, og sju av dem tar selv initiativ til det ved å lage en tallinje selv. I tillegg har jeg sett på om elevene bruker flere typer modeller. Det er svært få elever som brukte mer enn en type modell, kun fire stykker; J11, G23, J28 og J29. J29 bruker tallinje og det å telle på fingrene, noe som i hennes tilfelle på mange måter var samme type modell, fordi begge brukes til å holde styr på tellingen. J28 bruker klosser i tillegg til tallinje én gang. Det virker med andre ord som at hvis elevene trenger å ty til en modell, så bruker de gjerne den samme hver gang. I fem av besvarelsene bruker én elev flere modeller på samme oppgave. Dette er det to elever, G23 og J29 som gjør.

Tabell 7: Oversikt over de ulike modellene elevene benytter seg av. Forklaring på symbolene: T – tallinje; K – kontekst; F – telle på fingrene; B – klosser. Noen besvarelser har flere symbol fordi de faller innenfor flere kategorier.

Elev	1	3	4	5	6	7	8	9
J11	T	-	T			T	F	
G12	-	-	-	-		-	-	
G11	F			F		-	F	
J12	-	-	-	-	B		-	
J13	-	-		-	-	-	T	
J14	-	-	-		-	T		
G13	-			-		-	-	
J21	-	-	-	-	-	F		
J22		-		-			-	
J23	-	-	-	-		T	-	
J24		-	-	-		-	-	
J25	-	-	-		-	-	T	
G21		-	-	-	-	-	-	
J26		-	K	-		-	-	
G22	-	-	K	-	K	-		
J28	T	- B	T	-	-	-	T	
J27		-	-	-		T	-	
G23	T	T	T	T	T K	T K	K	T K
J29	T	-	T	T	T F	-	T	T F
G25		-		-	T	-	T	
J211	-	T	-	-	T	-	-	

5.3.1 Tallinje

Tallinjen er en tydelig ordinal modell, fordi den fokuserer på tallenes rekkefølge og plassering. Det er som sagt 28 besvarelser som inneholder tallinje. Det er ti elever som ikke bruker tallinje i det hele tatt, og det er én som bruker tallinje på heles sju av åtte besvarelser. I kategoriseringen inkluderer jeg både besvarelser hvor eleven sier at han eller hun bruker tallinje, og besvarelser hvor det ikke blir uttrykt eksplisitt, men hvor det likevel er tydelig på grunn av språket som blir brukt. Jeg kaller slik språk for tallinjespråk, og med det mener jeg ord som representerer retning, som venstre og høyre. Jeg inkluderer ikke de besvarelsene hvor elevene bruker uttrykk som over og under null og opp og ned. Disse utsagnene vitner om et ordinalt tallsyn, men trenger ikke å være knyttet opp mot tallinjen. Det er 21 besvarelser hvor elevene eksplisitt uttaler at de bruker tallinje, og sju hvor de bruker et tallinjespråk. Et eksempel på bruk av tallinjespråk er G25 som forklarer hvorfor (-4) – 7 blir -11:

I: Du tror det blir minus elleve. Hvorfor det?

G25: I fra, sjueren er på venstresiden, også minus er jo og på venstresida

G25: Sju minus fire, jeg tror at det blir minus elleve

Han sier ikke ordet tallinje, og bruker det derfor implisitt. Likevel tolker jeg det som at han bruker en tallinjemodell fordi han sier «venstresida», som peker på den negative siden av tallinjen. Av de som bruker tallinje eksplisitt skiller jeg mellom om de regner på en tallinje de har foran seg, eller om de regner på en de ser for seg. Fem elever regner på en tallinje de har foran seg, og to av elevene regner eksplisitt på en tallinje de ser for seg i hodet. Et eksempel på eksplisitt bruk av tallinje er J11 i oppgave 4 (7 – 10). Hun svarer først tre, men når hun skal begrunne svaret ombestemmer hun seg:

J11: Ehm, jeg bruker den her da (peker på en tallinje hun har laget selv), når den er på minussiden så tar man sju

J11: Åja, det ble minus tre

I: Hva var det som gjorde at du ombestemte deg?

J11: Fordi den kommer seg ikke helt over

Dette er kategorisert som eksplisitt bruk av tallinjen fordi J11 har en tallinje foran seg som hun peker på og aktivt bruker i utregningen. Det er tydelig at J11 er i stand til å bruke tallinjen som et hjelpemiddel, fordi hun først tror at svaret blir tre, men finner ut at det blir minus tre ved hjelp av tallinjen. Det kan virke som om J11 løser oppgaven ved å snu stykket til å bli (-10) + 7. Det ser jeg på grunn av to ting. For det første sier hun: «når man er på minussiden så tar man sju», som peker på at hun starter på negativ side. Og for det andre sier hun «den kommer seg ikke helt over». Jeg tolker «den» til å være pila eller streken fra minus ti og til minus tre. Det at den ikke kommer seg helt over peker på at streken ikke går over null, og at det er derfor svaret blir negativt. Eksempel på å regne med en tallinje i hodet er J28 som løser oppgave 1 ((-5) + 8):

J28: Tre

I: Tre? Hvorfor det da?

J28: Fordi at hvis man starter på minus fem, på en tallinje for eksempel

I: Ja

J28: Og siden det er pluss så hopper man til høyre, også ender man opp på tre.

Hun bruker ordet tallinje, og snakker om å hoppe fra et tall til et annet, noe som gjør det tydelig at hun bruker en tallinje i utregningen. Likevel har hun ingen tallinje foran seg. J28 sin besvarelse viser at det er mulig å se for seg en tallinje, og bruke den som en modell uten å ha en fysisk tallinje å operere på.

Til slutt vil jeg se på hvilken type tallinje elevene bruker. 27 av besvarelsene benytter en tallinje som ligner på den Freudenthal (2002) klassifiserer som en gammel modell. Dette er modeller hvor tallene representeres ved hjelp av punkter på tallinjen, og operasjonene representeres ved hjelp av hopp mellom tallene. Hoppene tegnes opp som buede piler. Det er kun én elev som bruker en tallinjen på en måte som ligner på den tallinjen Freudenthal (2002) skildrer med piler. I denne tallinjen er tallene representert av piler, og operasjonene representeres av avstanden mellom pilene. Den eleven som bruker en tallinje som ligner på denne er J28 i oppgave 4 (7 – 10):

> J28: Mm, jeg tenkte at siden det var på en måte ti, så flyttet jeg, eller siden t, liksom sju og tre er jo tiervenner. Så da tenkte jeg at jeg flytter tieren på en måte tre hakk den veien, så liksom starter det på minus tre. Slik at det blir sju over.

Hun representerer tallet ti med en strek på tallinjen fra null til ti, og flytter den tre hakk til venstre, slik at den starter på minus tre. Minus tre representeres her av plasseringen -3 på tallinjen. Derifra når hodet til streken bort til sju. Det hun egentlig har representert her er differansen mellom minus tre og sju i stykket 7 – (-3). Hun regner derfor ut 7 - _ = 10. Dette er en løsningsmetode hun kunne ha brukt på oppgave 6 også, men det gjør hun ikke. Jeg mener at dette er en tallinje som ligner på Freudenthal (2002) sin, fordi tallet representeres av en strek eller en pil, i stedet for at det er operasjonen som representeres av en strek.

5.3.2 Telle på fingrene

En annen modell som dukker opp i datamaterialet er det å telle på fingrene. Alle som benytter seg av denne strategien i mitt datamateriale bruker den til å holde styr på tallene mens de regner seg fremover eller bakover. Derfor kategoriserer jeg det som et ordinalt hjelpemiddel. Det er sju besvarelser fra til sammen fire elever som inkluderer telling på fingrene. Et eksempel på bruk av dette hjelpemidlet er J21 sin besvarelse av oppgave 7 (9 + (-15)):

> J21: (Teller på fingrene) minus seks tror jeg.
>
> I: Minus seks?
>
> Begge jentene: (nikker)
>
> I: Hvordan tenkte dere på den da?
>
> J21: Eh, jeg, eller, ni også åtte, sju, seks, fem, fire, tre, to en, også er det jo null, også går jeg liksom nedover hvor mange også vi har tatt tretten på en måte

J21 bruker fingene til å telle seg nedover fra ni til minus seks. Hun begynner på ni, og tar opp en finger for hvert tall hun sier til hun har holdt opp 15 fingre. Hun sier 13 på slutten, men jeg antar at hun mener 15 siden hun kommer fram til det riktige svaret som er minus seks. Denne besvarelsen viser hvordan denne modellen brukes som et ordinalt hjelpemiddel, fordi den støtter seg på tallrekken i en bestemt rekkefølge.

5.3.3 Kontekst

Seks elever benytter seg av modellen kontekst i arbeid med oppgavene. Kontekstbesvarelser har jeg identifisert ved at de presenterer en situasjon hvor oppgaven får mening i en kontekst. Alle kontekstene i mitt datamateriale er kardinale og omhandler penger og gjeld. Et eksempel på en slik pengekontekst er J26 i oppgave 4 (7 – 10):

> J26: Hvis du har, ehm, sj, ja, hvis du låner sju kroner, eller hvis du låner, hvis du skal kjøpe en ting som koster ti kroner på butikken, også har du bare sju, så skylder du butikken tre kroner.
>
> I: Okei. Så da blir det minus tre?
>
> J26: Ja

Denne besvarelsen blir kategorisert som en besvarelse som bruker kontekst fordi J26 presenterer situasjonen «handling i butikken», og gir oppgaven 7 – 10 mening ved at ti representerer hva varene i butikken koster, og sju representerer hvor mye penger personen i konteksten har. Svaret, minus tre, er representert ved hvor mye penger personen skylder butikken. I alle tilfellene kontekst blir brukt er det for å begrunne svaret på oppgaven, ikke for å løse den.

5.3.4 Klosser

Klosser blir tilbudt alle elevene i løpet av intervjuene, men det er kun to elever som bruker dem til å gi mening til oppgavene. I det ene tilfellet blir klossene brukt i en besvarelse som støtter seg på et kardinalt tallsyn. Det er J12 i oppgave 6 (5 – □ = 8), som bruker dem til å forklare hvorfor hun tror at det ikke er mulig å løse oppgaven:

> J12: Hvordan går det an å få et mindre tall til å bli større med minus?
>
> J12: Se nå. Du har fem, så skal du ta bort åtte av de femmene. Nei da er de borte da, da er det tomt da

Hun bruker noen klosser som ligger på bordet, legger fram fem, og tar de bort for å demonstrere at det ikke er mulig å ta bort flere klosser enn fem, fordi det ikke er flere klosser å ta bort. Det hun egentlig argumenterer for her er at det ikke er mulig å subtrahere et tall fra et større tall. I denne besvarelsen gjennomfører J12 en kardinal bruk av modellen klosser fordi hun bruker klossene til å representere tallenes mengde.

Det andre tilfellet av bruk av klosser er det J28 som står for, også hun i oppgave 3 ((-7) – (-7)). Det som er interessant med hennes bruk av klossene er at hun stiller dem opp som ei tallinje. Hun bruker dermed et hjelpemiddel som i utgangspunktet støtter et kardinalt tallsyn til å uttrykke en ordinal sammenheng:

> J28: Okei, hvis vi har, liksom, vi sier for eksempel at det er null da (tar fram en rød kloss)
> J27: Ja
> J28: Også har vi
> J27: Sju
> J28: Sju, da har vi minus sju på en måte (tar fram sju svarte klosser og legger dem i rekke til venstre for den røde klossen, som en tallinje)
> J28: Så tar vi på en måte, eller vi kan si vi har masse greier bortover her da. Som er liksom masse minustall (legger mange klosser videre til venstre for de svarte. Ikke i bein rekke). Også skal vi på en måte minuse minus.

Det som gjør at denne besvarelsen ikke er kardinal er at J28 ikke bruker klossene til å representere en mengde. Hun legger klossene på bordet på en slik måte at den ser ut som en tallinje. Det at hun eksplisitt sier at den ene klossen representerer null peker også på en ordinal besvarelse. I en besvarelse som grunner i et kardinalt tallsyn er det naturlig at null er fraværet av klosser. Det at null er et eget punkt i rekken av klosser er derfor et tegn på at J28 bygger forklaringen sin på et ordinalt tallsyn. Denne besvarelsen kategoriseres som både «uten tallsyn» og «ordinal» og som både «uten modell» og «klosser». Det er J28 løste oppgaven i to omganger, og hun i den første omgangen verken viste et tydelig tallsyn eller en tydelig modell, mens hun i andre omgang gjorde det.

5.4 Oppsummering

Jeg har nå analysert elevenes besvarelser med utgangspunkt i de to forskningsspørsmålene. I neste kapittel drøfter jeg funnene i lys av Sfard (1991) sin teori om operasjonell og strukturell oppfatning. Før det ser jeg på de viktigste funnene analysen innenfor hvert forskningsspørsmål og sammenligner funnene innenfor hvert forskningsspørsmål med antall riktig og feil svar.

«Hvordan behandler elevene negative tall og minustegn?» Jeg har sett at i rundt 20 % av elevenes besvarelser endret de funksjonen til minustegnet fra å være nominator til å bli operator. Det å endre funksjonen på denne måten gjør at man regner med positive tall i stedet for negative. I omtrent like mange besvarelser tok elevene utgangspunkt i den funksjonen minustegnet opprinnelig hadde i oppgaven. De fleste elevene varierte mellom å ta utgangspunkt i minustegnet og å endre funksjonen. I oppgave 3 var det en del elever som var i stand til å identifisere minus sju som et negativt tall, men få klarte å bruke det i utregningen. Mange elever løste oppgaven ved å endre til positive tall, men også ved å endre minustegnet som operator til addisjon, noe som gjorde at de fikk feil svar.

«Hva slags tallsyn bygger elevene utregningen og begrunnelsen sin på, kardinalt, ordinalt eller formalt?» Det tallsynet som ble brukt mest var ordinalt tallsyn, og den vanligste modellen var tallinje. Fem av elevene benyttet seg av flere typer tallsyn gjennom intervjuet, og fire elever benyttet seg av flere typer modeller. Besvarelser uten bruk av modell var det vanligste. Fem elever brukte ikke modeller i det hele tatt. Det var ingen elever som brukte en ordinal kontekst, og alle kontekster som ble brukt var ta-bort-kontekster av typen pengekontekster. Kontekst ble kun tatt i bruk for å begrunne et svar, ikke for å løse oppgaven. Det var kun to elever som brukte modellen klosser, og ingen som brukte det til å løse en oppgave.

Før jeg går til drøftingen vil jeg se på sammenhenger mellom riktig og feil svar og bruk av minustegnets funksjoner og bruk av tallsyn og modeller. I mitt datamateriale får nesten alle elevene som bruker den funksjonen til minustegnet som står i oppgaven riktig svar. I to av besvarelsene (G23 og J29) får ikke elevene riktig svar selv om de tar utgangspunkt i de negative tallene. Årsaken til det er at de bruker en tallinje som styres etter regler som ikke stemmer. Det har dermed ikke noe med det å ta utgangspunkt i tallene i seg selv å gjøre. I de fleste tilfeller kan det derfor virke som om det å ta utgangspunkt i de negative tallene kan være en god strategi, fordi man da slipper unna flere ledd, og dermed har mindre sannsynlighet for å gjøre feil. Samtidig kan det å gjøre om til positive tall lette utregningen, og dermed føre til at man får et svar, i stedet for å må si pass. Jeg har sett på om det er noen sammenheng mellom riktig og feil svar og bruk av tallsyn. Det er ingen tydelig sammenheng, da nesten halvparten av de riktige besvarelsene bygger på et ordinalt tallsyn, og den andre halvparten ikke bygger på noen tydelige tallsyn. Rundt en tredjedel av de riktige besvarelsene bruker modell.

6 Drøfting

Jeg har nå analysert datamaterialet med utgangspunkt i de to forskningsspørsmålene. Jeg har sett på hva elevene gjør mest av og på variasjoner innenfor de ulike kategoriene. I dette kapittelet vil jeg drøfte funnene i analysen i lys av problemstillingen *«Hva kjennetegner oppfatningen av negative tall hos noen elever på 7. trinn?»*, se på mulige forklaringer av funnene, og sammenligne dem med funn fra tidligere studier. Jeg vil igjen understreke at elevenes oppfatning ikke er enten operasjonell eller strukturell, den har deler av begge typene. Det drøfter er derfor hva slags type oppfatning som kan være styrende i de aktuelle besvarelsene.

6.1 Minustegnets funksjoner

I teoridelen så jeg på en sammenheng mellom bruk av minustegnets funksjon som operator i oppgaver hvor den i utgangspunktet har funksjon som nominator, og en mer operasjonell oppfatning av negative tall. Der argumenterte jeg for denne koblingen med at en slik endring av minustallets funksjon fører til at det negative tallet blir endret fra å være et objekt i seg selv til å bli en operasjon. En tolkning av det negative tallet som en operasjon i stedet for et objekt peker på en operasjonell oppfatning av negative tall (Sfard, 1991). Etter å ha analysert elevenes besvarelser mener jeg at det er nødvendig å nyansere denne påstanden noe. Er det mulig å argumentere for at det å endre minustegnets funksjon er en bevisst strategi som forenkler løsningen av oppgaven? Jeg vil drøfte om endring av minustegnets funksjon fra nominator til operator er et tegn på en operasjonell oppfatning, eller om det er en bevisst strategi.

Et argument for at det kan være en strategi er at i sju av de 24 besvarelsene hvor elevene endrer minustegnets funksjon fra nominator til operator er de klar over at de negative tallene er negative. Det at eleven kan identifisere de negative tallene betyr ikke automatisk at eleven har en strukturell oppfatning av negative tall, men det er et steg nærmere en strukturell oppfatning enn å ikke kunne identifisere dem. Det mener jeg fordi det å kunne identifisere de negative tallene må bety at eleven kjenner til dem, noe som er nødvendig for å kunne se på dem som et objekt. Det at elevene vet at de har med negative tall å gjøre peker på at årsaken til at de endrer minustegnets funksjon ikke er fordi de kobler de negative tallene til en prosess. De ser på de negative tallene som tall i seg selv, men velger å endre minustegnets funksjon fordi det gjør utregningen enklere. Det kan handle om at elevene synes det er enklere å løse oppgaven på denne måten, fordi det fører til at de slipper å forholde seg til negative tall. Det er derfor ikke gitt at elevene ikke er i stand til å løse oppgaven ved å ta utgangspunkt i det negative tallet. Det kan handle om at de ikke ser behovet for å ta utgangspunkt i det negative tallet når det er enklere å regne ut ved hjelp av den operasjonelle funksjonen. Et kjennetegn ved Sfard (1991) sitt andre steg i utviklingen av strukturell oppfatning, kondenseringsfasen, er at elevene bruker flere typer representasjoner. Det å ha en strukturell oppfatning gir bedre oversikt, og man kan dermed løse oppgaver på en mer effektiv måte. Derfor er det mulig å argumentere for at det å gjøre de negative tallene om til positive tall i utregningen kan være et tegn på en strukturell oppfatning.

Hvis eleven endrer minustegnets funksjon fra nominator til operator på grunn av en operasjonell oppfatning i én oppgave, er det nærliggende å tro at eleven må gjøre det i flere oppgaver, fordi det er den eneste måten eleven klarer å løse oppgaven på. I analysen fant jeg at av de 17 elevene som endrer funksjonen til minustegnet fra nominator til operator, gjør tolv elever det i kun én av de fire besvarelsene. Det er med andre ord en sterk overvekt av elever som kun endrer funksjonen til minustegnet fra nominator til operator én gang. Dette peker på at endringen av minustegnets funksjon er en bevisst strategi, og ikke et resultat av en operasjonell oppfatning av negative tall. Et annet poeng som støtter argumentet for at en endring av minustegnets funksjon fra nominator til operator kan være strategisk er at det er store forskjeller i antall besvarelser hvor elevene gjør en slik endring avhengig av oppgave. I oppgave 7 (9 + 15) er det 14 av 17 elever som endrer funksjonen fra operator til nominator, mens i oppgave 8 ((-4) – 7) er det ingen som gjør det. Det å endre funksjonen til det første minustegnet i oppgave 8 gjør ikke regnestykket enklere, fordi operasjonen allerede er subtraksjon. Derfor gir det mening at de ikke gjør det. Det viser at elevene ikke endrer funksjonen slavisk, men gjør det når det når det har en hensikt.

På bakgrunn av de argumentene jeg har presentert her vil jeg konkludere med at det ikke uten videre er rimelig å påstå at en elevs besvarelse er operasjonell på bakgrunn av at han eller hun endrer minustegnets funksjon fra nominator til operator. I noen tilfeller er det mulig at eleven endrer minustegnets funksjon som en del av en bevisst løsningsmetode. Samtidig vil jeg understreke at et slikt skifte kan bety at eleven har en operasjonell oppfatning. Hvis en elev gjentatte ganger endrer minustegnets funksjon fra nominator til operator, og i tillegg ikke ser ut til å identifisere de negative tallene som negative tall, kan det peke på en mer operasjonell oppfatning. Det er ulike meninger blant didaktikere om det å regne med positive tall når tallene opprinnelig står som negative sier noe positivt eller negativt om elevenes evner i matematikk. Gallardo (2003) mener at å endre de negative tallene til positive tall i kontekstoppgaver er meningsløst, fordi man da tar bort betydningen av tallene i konteksten. Kilhamn (2011) derimot, argumenterer for at man undervurderer elevers resonneringsevner hvis man forventer at de skal løse oppgavene på en mer komplisert måte ved å bruke negative tall når det finnes enklere løsninger. I min oppgave er ikke oppgavene presentert i en kontekst. Det er dermed grunn til å tro at det er enda større aksept for å løse oppgaven ved hjelp av positive tall, fordi tallene ikke er knyttet til en sammenheng.

Jeg har nå sett på om det å endre minustegnets funksjon fra nominator til operator kan være et tegn på at eleven har en operasjonell oppfatning av negative tall, og funnet at det kan være det i noen tilfeller. Videre vil jeg se på om det samme gjelder for endring av minustegnets funksjon fra operator til nominator. Som jeg skrev i analysen er det tre elever i datamaterialet som endrer minustegnets funksjon fra operator til nominator, alle i oppgave 8 ((-4) – 7). To av dem endrer kun funksjonen til minustegnet når de beskriver oppgaven, og utregningen deres bærer ikke preg av dette byttet. Den tredje besvarelsen står J11 for. Hun endrer funksjonen til det siste tallet fra sju til minus sju, og endrer dermed minustegnets funksjon fra å være en operator til å være en nominator. Det som er spesielt med hennes besvarelse sammenlignet med de andre to er at hun i tillegg bruker dette i utregningen, og regner ut differansen mellom minus fire og minus sju. Hun bruker dermed differansemodell som subtraksjonsmodell. Hun løser da egentlig oppgaven (-7) – (-4). Problemet med å endre minustegnets funksjon fra å være en operator til å bli en nominator er at man da står igjen uten noe som bestemmer hvilken operasjon som skal gjennomføres. J11 løser dette ved å sette inn et nytt minustegn som fungerer som operator. Dette gjør at hun fikk feil svar. Hvis man skal endre funksjonen til minustegnet fra operator til nominator, må man endre operasjon fra subtraksjon til addisjon for å få riktig svar. I oppgave 8 ender man da opp med (-4) + (-7). For å undersøke om endringen av oppgave 8 fra (-4) – 7 til (-4) + (-7) er en strategisk løsning, vil jeg se på hvordan elevene i datamaterialet løser en oppgave med addisjon av et negativt tall. Nesten alle elevene i datamaterialet løser oppgaven som inneholder addisjon av et negativt tall (oppgave 7, 9 + (-15)) ved å endre minustegnets funksjon fra nominator til operator. Dette inkluderer to av elevene som i oppgave 8 endrer funksjonen til minustegnet fra operator til nominator. Den siste av de tre løser oppgave 7 på to måter, én hvor hun endrer funksjonen til minustegnet fra nominator til operator, og en hvor hun ikke gjør det. Det er med andre ord svært få som velger å regne ut en oppgave med et positivt tall addert med et negativt tall. Det å endre minustegnets funksjon fra operator til nominator gjør heller ikke oppgaven enklere, fordi man da må addere et negativt tall i stedet for å subtrahere et positivt tall. I tillegg er det den motsatte strategien av det de aller fleste i datamaterialet gjør i slike oppgaver. På bakgrunn av dette virker det ikke som om endringen av minustegnets funksjon fra operator til nominator er bygd på et strategisk valg eller en kjennskap til de negative tallenes egenskaper. Om det vitner en operasjonell oppfatning av negative tall er vanskelig å si, men det peker i alle fall ikke mot en strukturell oppfatning.

Til slutt i dette delkapittelet vil jeg se på hva som kjennetegner elevenes oppfatning av negative tall med utgangspunkt i hvordan de bruker minustegnets funksjon. Som sagt endrer de fleste elevene i datamaterialet minustegnets funksjon kun en gang, noe som kan peke på at denne endringen er en strategi, og ikke et tegn på en operasjonell oppfatning for dem. Det er tre elever som i to av fire besvarelser endrer funksjonen til minustegnet fra nominator til operator uten å vise noe tegn til å identifisere de negative tallene. Det er derfor nærliggende å mene at disse har en mer operasjonell oppfatning av negative tall enn de som ikke har gjort dette skiftet. Det er som sagt uklart om det å endre minustegnets funksjon fra operator til nominator tyder på en operasjonell oppfatning eller ikke. Det jeg kan si er at en slik endring ikke fremstår som et strategisk valg.

6.2 Kobling til positive tall

Som jeg så i analysen har elevene i denne studien problemer med å løse oppgaver med subtraksjon av negative tall, som oppgave 3 og 6. Videre vil sammenligne mine funn med andre studier, se på mulige forklaringer, og se på hva dette kan si om elevenes oppfatning av negative tall. Bofferding og Wessman-Enzinger (2017) fant at elever har lettest for å bruke det de kan om positive tall i oppgaver med negative tall, hvis oppgavene med negative tall er av typen (-6) – (-3) eller (-6) – (-6). Det at elever bygger oppfatning av negative tall på oppfatning av positive tall har også Bofferding (2014) konkludert med. I Kilhamn (2011) sin studie var rundt 90 % av elevene i stand til å subtrahere negative tall. Hun forklarer det med at undervisningen fokuserte på regelen om at å subtrahere et negativt tall er det samme som å addere et positivt tall. I Küchemann sin studie fra 1981 derimot, var det å subtrahere negative tall utfordrende for elevene (referert i Thomaidis, 1993). Murray (1985) fant også at mange elever strever med oppgaver med subtraksjon av negative tall. Mange av elevene i hans datamateriale løste oppgavene ved å hoppe over et av minustegnene, fordi de mente det ikke gjorde noen forskjell. Dette gjaldt både for elever som ikke hadde fått undervisning om negative tall og elever som hadde det. I oppgave 3 i mitt datamateriale er det kun to elever som gjør koblingen fra 9 – 9 til -7 – -7. Av de er det ingen som til slutt konkluderer med at svaret er null. Det er også flere elever som løser oppgaven på samme måte som mange av elevene i Murray (1985) sin studie, hvor de ignorerer det ene minustegnet og løser oppgaven (-7) – 7. På oppgave 3 og 6 er seks av til sammen 31 besvarelser korrekt. I Gallardo (2003) sin studie hadde eleven også store problemer med subtraksjon av to negativ tall, selv om hun var den som gjorde det best i det innledende spørreskjemaet. Mitt datamateriale viser med andre ord noe annet enn hva Kilhamn (2011) og Bofferding og Wessman-Enzinger (2017) fant. Mine funn ligner mer på funnene til Küchemann og Murray og peker at det å subtrahere negative tall er utfordrende for elevene.

Med andre ord gir ikke tidligere forskning et klart svar på om subtraksjon av negative tall er utfordrende for elever eller ikke. Det kan virke som om elevenes prestasjon på slike oppgaver har sammenheng med undervisning på emnet. Videre vil jeg se på noen forklaringer på hvorfor slike oppgaver er utfordrende for elevene i mitt datamateriale, og se på hva de ulike forklaringene sier om elevenes oppfatning av negative tall. I min studie er det mange elever som ikke kobler resultatet i oppgave 2 (9 – 9) til oppgave 3 ((-7) – (-7)). En forklaring på dette kan være at elevene ikke ser på de negative tallene som tall i selv, men som en subtraksjon av et positivt tall. Det at elevene ikke ser på de negative tallene som tall i seg selv kan peke på en operasjonell oppfatning av negative tall. Fordi hvis elevene har en operasjonell oppfatning av negative tall er det sannsynlig at de ikke vil koble de negative tallene til positive tall, fordi de ikke ser på det negative tallet som et tall i seg selv, men som en prosess med subtraksjon av et positivt tall. Derfor vil jeg si at det å se sammenhengen mellom 7 – 7 og (-7) – (-7) er et tegn på en mer strukturell oppfatning. En forklaring på hvorfor elevene ikke ser på de negative tallene som tall i seg selv kan være at det har med det muntlige språket å gjøre. På engelsk sier de «negative seven», mens det vanligste å si på norsk, og også det jeg sier til elevene i dette intervjuet er «minus sju». Ved å ha forskjellig navn på minustegnet avhengig av om det fungerer som operator eller nominator kan det bli lettere for elevene å skille mellom dem. Når man sier «negative seven» eller «negativ sju», er det også mer tydelig at minustegnet henger sammen med tallet, enn hvis man sier «minus sju». Det er fordi «negativ» knyttes til minustegnet som nominator, og «minus» knyttes til minustegnet som operator. Denne hypotesen blir forsterket av at J11 først gjør koblingen mellom positive og negative tall etter at jeg hadde skriver stykket med parenteser ((-7) – (-7)). Det kan peke på at hun først da ser på minus sju som et eget tall, og dermed tolker minustegnet som en operator. Bofferding (2010) har sett på det samme, og hun fant at det ikke noe forskjell på elevenes løsninger avhengig av om oppgavene var skrevet som for eksempel -3 - -3 eller [-3] – [-3]. Det er viktig å huske på at elevene i Bofferding sin studie gikk på 2. trinn, mens elevene i min studie går på 7. trinn. Det er derfor naturlig at elevene gjør ulike koblinger. En årsak til at så mange elever ikke klarer å løse oppgaver med subtraksjon av negative tall kan dermed være at de ikke ser på minus sju som et eget tall på grunn av notasjon og språk.

Likevel er ikke det nok til å forklare alle feilene fordi sju av elevene identifiserer riktig funksjon for minustegnet, men kun én av dem kommer fram til riktig svar. Det peker på at det å identifisere de to tallene som negative tall ikke er nok for å koble oppgaven til lignende oppgaver med positive tall. Det kan være at elevene ikke er vant til å tenke på den måten. Det kan også hende at den nye oppgavetypen forvirrer dem, slik at de ikke klarer å tenke i de baner og dermed ikke kobler at de kan bruke det de kan om positive tall til å hjelpe dem. Det kan også handle om at disse elevene heller ikke har en strukturell nok oppfatning til å bruke egenskapene til de negative tallene. Jeg vil argumentere for at de sju elevene som korrekt identifiserer de negative tallene som negative tall, og bruker riktig funksjon av minustegnet i denne oppgaven har en mer strukturell oppfatning av negative tall enn de som ikke gjør det. Fordi de ser på de negative tallene som tall i seg selv, og ikke som en operasjon med et positivt tall. Jeg har tidligere i drøftingen pekt på at det å anvende minustegnet som operator selv om den står som nominator ikke trenger å bety at eleven har en operasjonell oppfatning av negative tall. Likevel mener jeg at det gjør det i denne oppgaven, da en slik endring ikke er et strategisk valg, fordi det ikke letter løsningen av oppgaven. Selv om de sju elevene som identifiserer minus sju som negative tall har en mer strukturell oppfatning enn de som ikke gjør det, er de fortsatt knyttet til operasjonen, fordi de ikke ser negative tall som et objekt på samme måte som positive tall.

Hvis jeg tar utgangspunkt i at det å bruke regler og sammenhenger fra positive tall i oppgaver med negative tall viser en strukturell oppfatning av negative tall, kan jeg bruke det til å se på elevenes oppfatning i mitt datamateriale. Problemet er at det er svært får elever som gjør nettopp dette i datamaterialet. Det er to elever som gjør det, og kun én som får riktig svar, og også han ender opp med feil svar til slutt. Med andre ord er det få besvarelser som vitner om en strukturell oppfatning gjennom sin bruk av regler og sammenhenger fra positive tall til oppgaver med negative tall. De to besvarelsene som gjør dette er også de to besvarelsene som er kategorisert med et formalt tallsyn dette bekrefter det jeg skrev i teoridelen, at et formalt tallsyn kan støtte en strukturell oppfatning.

6.3 Variasjon i tallsyn

Som jeg har sett i datamaterialet er det vanligste tallsynet et ordinalt tallsyn. Det er liten variasjon i tallsyn både for hver elev og for hele elevgruppen. Som jeg skrev i teoridelen tolker jeg det dit at mye variasjon av modeller og tallsyn peker på at eleven er i kondenseringsfasen, mens mindre variasjon i bruk av modeller og tallsyn peker på en lavere fleksibilitet og at eleven er på et lavere stadium. Det at elevene i liten grad varierer mellom ulike tallsyn kan peke på at de har en mer operasjonell oppfatning. Kan jeg uten videre si at liten variasjon i tallsyn peker på en operasjonell oppfatning? Før jeg svarer på det vil jeg se på noen andre mulige forklaringer på lav variasjon.

En forklaring er at det har noe med hvordan negative tall har blitt undervist til elevene å gjøre. Jeg vet ikke hvordan elevene i denne oppgaven har blitt presentert for negative tall, men jeg har sett på hvordan noen læreverk anbefaler å undervise i temaet. Jeg tenker at dette gir en pekepinn på hva som er vanlig praksis i skolen, da læreplanen ikke er tydelig på det punktet (Utdanningsdirektoratet, 2013). For å se hvordan negative tall presenteres har jeg sett på fire store læreverk for 4. trinn: Matemagisk, Matte overalt, Septimus og Radius. Kun ett av disse læreverkene introduserer negative tall ved hjelp av noe annet enn kun ordinale modeller. Også læreverket som presenterer negative tall både ved hjelp av ordinale og kardinale modeller har hovedfokus på ordinale modeller som tallinje og temperatur, men de presenterer en pengekontekst i tillegg. Hvis dette også er gjeldende for undervisningen elevene har vært gjennom, kan det kanskje forklare hvorfor elevene i størst grad bruker ordinale løsningsmetoder. Et annet svar på hvorfor så mange elever bygger arbeidet med oppgavene på et ordinalt tallsyn kan være at det er det mest naturlige for elevene. Ifølge Bishop et al. (2014) viste den eleven de undersøkte et tydelig ordinalt tallsyn uten at hun hadde fått undervisning på emnet. Slik jeg så i teoridelen så Fischer (2003) at barn automatisk kobler tall til rekkefølge, altså et ordinalt tallsyn. Denne koblingen er ikke nødvendigvis automatisk for negative tall (Fischer & Rottmann, 2005). Likevel kan det peke på et innebygd ordinalt tallsyn, som kan være årsaken til at elevene også i denne studien har overvekt av det. Likevel forklarer det ikke hvorfor ingen elever bruker ordinale kontekster. Det kan hende at elevene ikke trenger konteksten temperatur, fordi de som foretrekker et ordinalt tallsyn er såpass sikker på tallinjen, som også er en ordinal modell. Når de bruker kontekst er det fordi de ikke føler de er i stand til å uttrykke det de vil gjennom en ordinal kontekst.

Et svar på hvorfor det er liten variasjon i elevenes bruk av tallsyn kan altså være måten de har blitt introdusert for tallene på, og at det er den naturlige måten de prosesserer tall på. Samtidig er det tydelig at elevene også kjenner til og mestrer kardinale modeller. Undervisning og medfødt tallsyn kan derfor ikke være hele svaret på hvorfor elevene varierer så lite. På bakgrunn av det, og på bakgrunn av at Sfard (1991) løfter fram variasjon i bruk av representasjoner som et tegn på at eleven er i kondenseringsfasen, konkluderer jeg med at besvarelser med liten variasjon i bruk av modeller og tallsyn kan peke på en operasjonell oppfatning av negative tall.

Jeg vil se på hva det at liten variasjon i tallsyn og modeller kan peke på en operasjonell oppfatning av negative tall kan si om mitt datamateriale. Måten jeg gjør det på er at jeg går tilbake til analysen og ser på hvor stor variasjon det var i tallsyn og bruk av modeller. Jeg velger her å se bort fra besvarelsene som ikke ble kategorisert, fordi jeg ikke vet hva slags tallsyn de besvarelsen bygger på, eller om de bygger på en kombinasjon av flere tallsyn. Det samme gjelder for modeller. Som jeg skrev i analysen tar elleve elever i bruk kun ett tallsyn, og sju elever tar i bruk to. Det er tolv elever som kun bruker en type modell, mens fire elever tar i bruk to typer. Ni av elevene bruker både kun ett tallsyn og en modell gjennom alle besvarelsene. På bakgrunn av dette kan jeg si at ni av elevene viser en mer operasjonell oppfatning fordi de kun løser oppgaver med utgangspunkt i ett tallsyn og en modell. Det at jeg ser bort fra de besvarelsene som ikke blir kategorisert gjør at jeg går glipp av noe av mangfoldet i elevenes besvarelser. Det er derfor ikke mulig å være bastant i kategoriseringen av de ni elevene. Det jeg kan si er at bruken deres av tallsyn og modell peker på en operasjonell oppfatning.

6.4 Visuelle og ikke-visuelle modeller

I teorikapittelet så jeg på hvilke modeller som støtter en operasjonell oppfatning og hvilke som støtter en strukturell oppfatning. Jeg vil se på funnene i datamaterialet opp mot den analysen for å se hva elevenes valg av modeller forteller meg om oppfatningen deres. I analysekapittelet fant jeg at de fleste elevene som tar i bruk modeller tar initiativ til det selv. Alle elevene som tar i bruk kontekst eller det å telle på fingrene gjør det uten støtte fra meg. Det er elleve elever som bruker tallinje, og sju av dem tar selv initiativ til det ved å lage en tallinje selv. Det kan peke at bruken av modeller er noe elevene selv kjenner på et behov for, og ikke noe som jeg presser på dem. Det er et viktig utgangspunkt for å kunne drøfte hva elevenes bruk av modeller kan fortelle meg om elevenes oppfatning av negative tall. De to som bruker klosser tar ikke initiativ til å bruke dem selv. Klosser blir heller ikke brukt til å løse noen oppgaver. Den ene eleven bruker klossene til å visse at en oppgave er uløselig, og den andre eleven prøver å bruke klossene som en tallinje, men får ikke til å gi mening til oppgaven. Elevene i mitt datamateriale sin bruk av klosser sier derfor lite om deres oppfatning av negative tall, fordi de ikke bruker dem til å løse oppgaver med negative tall.

I teoridelen argumenterer jeg for at den tradisjonelle tallinjen kan støtte en strukturell oppfatning av negative tall i oppgaver med addisjon og subtraksjon av positive tall, men at den kommer til kort i oppgaver med addisjon og subtraksjon av negative tall. Jeg vil derfor se på om noen elever i mitt datamateriale bruker en klassisk tallinje til å løse oppgaver med addisjon og subtraksjon av negative tall. Jeg har tre oppgaver av denne typen: oppgave 3 ((-7) – (-7)), oppgave 6 (5 – □ = 8), og oppgave 7 (9 + (-15)). Av til sammen 51 besvarelser er det elleve besvarelser fordelt på åtte elever som bruker tallinje på de tre oppgavene. Det at de bruker en tradisjonell tallinje til å løse denne oppgaven kan tyde på en operasjonell oppfatning fordi en slik tallinje ikke støtter en strukturell oppfatning av negative tall i oppgaver med addisjon og subtraksjon av negative tall. I tre av besvarelsene bruker elevene andre modeller i tillegg, noe som kan gjøre at de likevel kan løse oppgaven med en strukturell oppfatning. De resterende 17 besvarelsene som støtter seg på tallinje som modell kan være strukturelle besvarelser, fordi tallinja kan støtte en strukturell oppfatning av negative tall i oppgaver med addisjon og subtraksjon av positive tall. Å telle på fingrene er i utgangspunktet en visuell modell, fordi den tar i bruk noe konkret som kan manipuleres, særlig hvis man ser den for seg. Som jeg skrev i analysedelen brukes det å telle på fingrene til å holde orden på hvor elevene er i tallrekka når de behandler tall i et ordinalt tallsyn. På den måten har det å telle på fingrene mange de samme kvalitetene som tallinjen. To elever bruker det å telle på fingrene i oppgave 3, 6 og 7, noe som kan peke på at de ikke løser den oppgaven med en strukturell oppfatning. Siden denne modellen brukes på samme måte som den klassiske tallinjen, kan den ikke støtte en strukturell oppfatning av addisjon og subtraksjon av negative tall. De resterende fem besvarelsene med bruk av modellen å telle på fingrene kan støtte en strukturell oppfatning av negative tall. Som jeg så i analysen er det kun én elev som bruker tallinjen på en måte som ligner på den tallinjen Freudenthal (2002) skildrer med piler. Modellen brukes i oppgave 4, som ikke er en av de tre oppgavene med addisjon eller subtraksjon av negative tall. Jeg kan derfor ikke si med utgangspunkt i visuelle eller ikke-visuelle modeller at hennes besvarelse er mer strukturell enn de som brukte en klassisk tallinje i oppgave 4. Som jeg så i teorikapittelet støtter ikke kontekster en strukturell oppfatning, fordi en kontekst er en ikke-visuell modell. Det er sju besvarelser som tar i bruk en kontekst, fordelt på tre elever. Jeg ser på disse besvarelsene som operasjonelle, eller med en overvekt av en operasjonell oppfatning, fordi elevene bruker en type modell som ikke støtter en strukturell oppfatning.

7 Avslutning

Jeg har nå sett på hva de 21 elevene på 7. trinn sitt tallsyn, bruk av modeller og behandling av negative tall kan fortelle meg om deres oppfatning av negative tall. I dette avsluttende kapittelet vil jeg oppsummere de viktigste funnene, ser på noen konsekvenser for undervisning, og peke på mulig videre forskning som kan gi flere svar på hva som kjennetegner elevers oppfatning av negative tall.

I drøftingsdelen konkluderte jeg med at det at elevene endrer minustegnets funksjon fra nominator til operator kan peke på en operasjonell oppfatning av negative tall. Hvis elevene endrer minustegnets funksjon fra nominator til operator i flere oppgaver, og i tillegg ikke ser ut til å være i stand til å identifisere de negative tallene som negative tall, kan det bety at disse elevenes oppfatning hovedsakelig er operasjonell. Hvis elevene derimot kun gjør denne endringen en gang, og i tillegg anerkjenner de negative tallene som negative tall, argumenterer jeg for at det ikke trenger å bety at de har en operasjonell oppfatning av negative tall. En slik endring kan også være et resultat av et strategisk valg av utregningsmetode. Det at elevene kun bruker en slik metode en gang, kan tyde på at det er en av flere strategier elevene benytter seg av, og ikke et resultat av en operasjonell oppfatning. Jeg tenker at det er interessant å se nærmere på en hypotese om at endring av minustegnets funksjon fra nominator til operator kan være en bevisst strategi og muligens støtte en strukturell oppfatning av negative tall. Et annet område det kan være interessant å se mer på er om det er noen sammenheng mellom elevers evne til å resonnere og tenke algebraisk om negative tall, og deres oppfatning av negative tall. Det er kun to elever i mitt datamateriale som kobler regler og sammenhenger fra positive tall til oppgaver med negative tall. Det å gjøre en slik kobling krever at eleven har et formalt tallsyn som tar utgangspunkt i tallenes algebraiske egenskaper. I og med at så få bruker algebraisk resonnering i min oppgave, er det utfordrende å se etter en slik sammenheng her. Siden mange av elevene mangler et formalt tallsyn, kan en didaktisk implikasjon være at man som matematikklærer må ha fokus på algebraisk tenkning og resonnering i undervisningen for å støtte utviklingen av et slikt tallsyn.

I drøftingen skrev jeg om muligheten for at de ni elevene som kun tar i bruk ett tallsyn og én modell har en oppfatning av negative tall som hovedsakelig er operasjonell. Jeg så også på at det er en stor overvekt av ordinale modeller og besvarelser basert på et ordinalt tallsyn. En idé til videre forskning er å se på om implementering av andre modeller, blant annet de såkalte nye modellene, kan føre til at elevene får en mer strukturell oppfatning av negative tall. Et slikt utgangspunkt baserer seg på tanken om at undervisning og tilgang på ulike representasjoner kan være med på å utvikle elevenes oppfatning. Om det stemmer eller ikke må det være opp til fremtidig forskning vise. Et annet funn som peker på at elevene har bruk for flere typer modeller er at det er få elever i datamaterialet som mestrer det å subtrahere negative tall. Både tidligere teori og mitt datamateriale viser at de modellene elevene bruker ikke er tilstrekkelig til å forklare hvorfor det å subtrahere et negativt tall er det samme som å addere et positivt tall. De elevene som mestrer slike oppgaver i mitt datamateriale kommer med ufullstendige forklaringer, eller forklaringer basert på regler de har hørt, men ikke kan forklare bakgrunnen for. En didaktisk implikasjon av denne studien er derfor at det kan være lurt å inkludere flere modeller i undervisningen av negative tall. Blant annet fordi tilgang på flere modeller kan hjelpe elevene i utvikling av en mer strukturell oppfatning, og fordi en del av oppgavene elevene arbeider med ikke kan representeres på en god måte ved hjelp av de tradisjonelle modellene. Da ingen av elevene tar i bruk klosser på den måten som Freudenthal (2002) foreslår, er det vanskelig å vite om det hadde gjort det lettere for elevene å løse oppgavene. Men det er i hvert fall ingen tvil om at det trengs flere og mer komplekse modeller.

Jeg har presentert noen funn som kan være med på å gi bedre kjennskap til elever på 7. trinn sin oppfatning av negative tall. En begrensning med min studie er at jeg kun ser på noen kjennetegn, og ikke på eventuelle årsaker til hvorfor elevenes oppfatning er som den er. Større studier som går over lengre tid kan være et redskap for å se på hvorfor elevenes oppfatning er som den er. Helt avslutningsvis vil jeg understreke at det jeg har funnet ut om elevenes oppfatning av negative tall ikke inkluderer alle aspekter ved elevenes oppfatning av negative tall. Det jeg har funnet ut er avgrenset både av forskningsspørsmålene mine, og av oppgavene jeg bruker. Andre typer oppgaver kunne ha blitt brukt til å finne andre aspekter ved elevenes oppfatning. Oppgaver som presenteres i en kontekst, mer utforskende oppgaver eller oppgaver med andre vanskegrader kan gi andre resultater. Ved å inkludere oppgaver med multiplikasjon og divisjon er det også mulig å finne andre ting enn hva jeg har funnet her. Likevel er de elementene jeg har funnet et interessant bidrag til fagfeltet, fordi de forteller noe om hva som kan kjennetegne elever på 7. trinn sin oppfatning av negative tall.

8 Referanseliste

Anderson, J.R. (1996). *The architecture of cognition*. New York: Psychology Press.

Ball, D.L. (1993). With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics. *The Elementary School Journal, 93*(4), 373-397. doi:10.1086/461730

Bishop, J.P., Lamb, L.L., Philipp, R.A., Whitacre, I. & Schappelle, B.P. (2014). Using order to reason about negative numbers : The case of Violet. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 39-59. doi:10.1007/s10649-013-9519-x

Bofferding, L. (2010). *Addition and subtraction with negatives : Acknowledging the multiple meanings of the minus sign.* Innlegg holdt ved The 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Bofferding, L. (2014). Negative Integer Understanding : Characterizing First Graders' Mental Models. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(2), 194-245. doi:10.5951/jresematheduc.45.2.0194

Bofferding, L. & Wessman-Enzinger, N. (2017). Subtraction involving negative numbers : Connecting to whole number reasoning. *Mathematics Enthusiast, 14*(1-3), 241-262.

Brez, C.C., Miller, A.D. & Ramirez, E.M. (2015). Numerical Estimation in Children for Both Positive and Negative Numbers. *Journal of Cognition and Development, 17*(2). doi:10.1080/15248372.2015.1033525

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7. utg.). London: Routledge.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking : The Registers of Semiotic Representations*. Springer International Publishing AG.

Eder, D. & Fingerson, L. (2001). Handbook of Interview Research (s. 181-201): SAGE Publications, Inc. doi:10.4135/9781412973588

Fischer, M.H. (2003). Cognitive Representation of Negative Numbers. *Psychological Science, 14*(3), 278-282. doi:10.1111/1467-9280.03435

Fischer, M.H. & Rottmann, J. (2005). Do negative numbers have a place on the mental number line? *Psychology Science, 47*(1), 22-32.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Gallardo, A. (2002). The Extension of the Natural-Number Domain to the Integers in the Transition from Arithmetic to Algebra. *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 171-192.

Gallardo, A. (2003). *"It is Possible to Die Before Being Born" : Negative Integers Subtraction: A Case Study*. Innlegg holdt ved The 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2), Honolulu, Hawaii.

Gallardo, A. & Novoa, R. (2000). *Integers versus fractions : a study with eighth grade students.* Innlegg holdt ved The Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2), Tucson, Arizona.

Gallardo, A. & Rojano, T. (1994). *School Algebra : Syntactic difficulties in the operativity.* Innlegg holdt ved The sixteenth international conference for the Psychology of Mathematics Education: North American Chapter, Baton Rouge, LA.

Ganor-Stern, D., Pinhas, M., Kallai, A. & Tzelgov, J. (2010). Holistic Representation of Negative Numbers is Formed When Needed for the Task. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 63*(10), 1969-1981. doi:10.1080/17470211003721667

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. I A.A. Cuoco (red.), *The Roles of Representations in School Mathematics* (s. 1-23). Reston, V A: National Council of Teachers of Mathematics.

Greig, A., Taylor, J. & MacKay, T. (2013). *Doing research with children : a practical guide* (3. utg.). Los Angeles, Calif: SAGE.

Hiebert, J. (2009). *Conceptual and procedural knowledge : the case of mathematics*. New York: Routledge.

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers* (Doktorgradsavhandling), Acta Universitatis Gothoburgensis, Göteborg.

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T.M. & Rygge, J. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Lewis, A. (1992). Group Child Interviews as a Research Tool. *British Educational Research Journal, 18*(4), 413-421. doi:10.1080/0141192920180407

Lindstrøm, T.L. (2006). *Kalkulus* (3. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Mosvold, R. (2002). *Genesis principles in mathematics education* (8274630890). Hentet fra https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/2439974/Rapp-2002-09.pdf?sequence=1

Murray, J.C. (1985). *Children's informal conceptions of integer arithmetic.* Innlegg holdt ved The annual conference of the international group for the psychology of mathematics education, Nederland

Selter, C., Prediger, S., Nuhrenborger, M. & Hussmann, S. (2012). Taking Away and Determining the Difference : A Longitudinal Perspective on Two Models of Subtraction and the Inverse Relation to Addition. *Educational Studies in Mathematics, 79*(3), 389-408. doi:10.1007/s10649-011-9305-6

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36. doi:10.1007/BF00302715

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being : Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. I P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (red.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design* (s. 37-98). Mahwah, New York: Erlbaum

Skemp, R.R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88-95.

Thomaidis, Y. (1993). Aspects of negative numbers in the early 17th century. *Contributions from History, Philosophy and Sociology of Science and Mathematics*, *2*(1), 69-86. doi:10.1007/BF00486662

Tjora, A.H. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (2. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Tzelgov, J., Ganor-Stern, D. & Maymon-Schreiber, K. (2009). The Representation of Negative Numbers : Exploring the Effects of Mode of Processing and Notation. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *62*(3), 605-624. doi:10.1080/17470210802034751

Usiskin, Z. (2008). *The arithmetic curriculum and the real world.* Innlegg holdt ved ICME-11-Topic Study Group 10: Research and Development in the Teaching and Learning of Number Systems and Arithmetic.

Usiskin, Z. & Bell, M. (1983). *Applying Arithmetic : A Handbook of Applications of Arithmetic*. University of Chicago.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag*. (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-4.-arssteget-.

Vlassis, J. (2008). The Role of Mathematical Symbols in the Development of Number Conceptualization : The Case of the Minus Sign. *Philosophical Psychology*, *21*(4), 555-570. doi:10.1080/09515080802285552

9 Vedlegg

9.1 Vedlegg 1: Godkjenning NSD

Heidi Dahl

7491 TRONDHEIM

Vår dato: 05.10.2017 Vår ref: 55723 / 3 / LH Deres dato: Deres ref:

Tilbakemelding på melding om behandling av personopplysninger

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 06.09.2017.
Meldingen gjelder prosjektet:

55723	*Elevers tanker om negative tall*
Behandlingsansvarlig	*NTNU, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Heidi Dahl*
Student	*Rikke Overvik Aasander*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 31.07.2018, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Dersom noe er uklart ta gjerne kontakt over telefon.

Vennlig hilsen

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

9.2 Vedlegg 2: Samtykkeskjema

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

«Elevers tanker om negative tall»

Bakgrunn og formål

Jeg er en student ved NTNU, og skal dette skoleåret skrive en masteroppgave som handler om elevers arbeid med negative tall. Formålet med denne studien er å utforske hvordan elever på mellomtrinnet forstår negative tall, hva de assosierer med emnet, og hvordan de behandler oppgaver rundt det temaet.

Elever har blitt trukket ut tilfeldig på to skoler i Trondheim.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Det vil bli gjennomført intervjuer av elever. Elevene vil arbeide to og to med oppgaver som omhandler negative tall. Jeg som forsker vil observere dem og intervjue dem. Dette vil ta omtrent en halv time, og vil foregå i skoletiden. Jeg vil bruke filmopptak og skriftlige notater for å samle inn datamateriale. Filmen vil ikke offentliggjøres, kun brukes til å transkribere og analysere datamaterialet.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det er kun jeg som student og min veileder som vil ha tilgang til personopplysninger og opptak. Alt av data lagres på en låst datamaskin. Navn blir anonymisert og navneliste/koblingsnøkkel vil oppbevares på en egen datamaskin adskilt fra øvrige data. Deltagerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 31. juli. Datamaterialet vil da slettes.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med Rikke Overvik Aasander, 92828481, rikkeoa@stud.ntnu.no, eller min veileder, førsteamanuensis Heidi Dahl, heidi.dahl@ntnu.no, 73559819

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS

Samtykke til deltakelse i studien

Forelders/ foresattes samtykkeskjema

Jeg bekrefter at jeg har lest informasjonsarket og samtykker i at mitt barn deltar i aktiviteter knyttet til forskningsprosjektet «Elevers tanker om negative tall»

Barns navn/klasse:____

Sted og dato____

Forelders/ foresattes underskrift____

Vennligst lever skjemaet til ________________

Tusen takk!

9.3 Vedlegg 3: Intervjuguide

Intervjuguiden min består hovedsakelig av en kort introduksjon av meg og prosjektet, og de oppgavene jeg ga til elevene. Under noen av oppgavene har jeg skrevet alternative oppgaver eller spørsmål jeg kan stille for å sette i gang refleksjon. I noen tilfeller stilte jeg de samme oppgavene flere ganger, eller lignende oppgaver hvor jeg hadde byttet ut tallene, for å se om elevene svarte annerledes etter at de hadde jobbet en stund. Elevene hadde ikke tilgang på tallinje og klosser i starten, det tilbød jeg dem der det passet seg. Alle elevene hadde tilgang på klosser og tallinje en eller flere ganger i løpet av intervjuene.

Mitt navn er Rikke, og jeg vil gi dere noen oppgaver. Går det greit at jeg filmer[3] dere mens dere svarer på oppgavene? Det er kun for at jeg skal huske hva som ble sagt, ingen andre enn meg skal se filmen. Dere kan arbeide sammen eller hver for dere.

1. (-5) + 8 =
2. 9 – 9 =
3. (-7) – (-7) =

   Hvis elevene ikke tillegger minustegnene riktig funksjon, eller synes oppgaven er vanskelig, kan du be dem forklare om det er noen forskjell på minustegnene i oppgave 8 ((-4) – 7)
4. 7 – 10 =
5. □ + 5 = 2 (Ett tall pluss fem er lik to. Finnes det tallet, og hva er det?)

   Hvis elevene ikke klarer å forklare hvordan de kom fram til svaret, kan du be dem late som om de skal forklare en 5.-klassing hvordan man løser slike oppgaver, med utgangspunkt i for eksempel oppgaven □ + 7 = 4.
6. 5 – □ = 8 (Fem minus ett tall er åtte. Finnes det tallet, og hva er det?)
7. 9 + (-15) =

   Hvis eleven regner ut denne oppgaven som 9 – 15, pass på å spør hvorfor man kan tenke subtraksjon her, når det både står pluss og minus.
8. (-4) – 7 =

[3] I 3 av tilfellene tok jeg kun lydopptak

9.4 Vedlegg 4: Koder nVivo

Aspekt

- 0 eller 1 som referansepunkt
- Symmetri

Minustegn

- Operator
- Nominator
- Symmetri

Strategi

- Bytte plass
- Kansellering
- Positive tall
- Regler
    - Egen regel
    - Lavt tall – høyt tall går ikke
    - Memorert regel
    - Positive regler
        - Subtraksjon gir mindre tall
- Modeller
    - Pengekontekst
    - Ta-bort-kontekst
    - Klosser
    - Tallinje
    - Telle på fingrene
- Tallfakta

Subtraksjonsmodell

- Differanse

Tallsyn

- Kardinal
- Ordinal