Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige
universitet

Elevers arbeid med konkretiseringsmateriellet sjakkbrettet

Kristin Toresen Brønstad

Mai 2018

LMM15004 Masteroppgave i matematikkdidaktikk (1-7)

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

FORORD

Denne oppgaven markerer avslutningen på min femårige lærerutdanning ved NTNU i Trondheim. Denne perioden har vært utrolig lærerik og jeg har ikke tvilt et sekund på at jeg har tatt et riktig valg i sammenheng med profesjonen jeg nå starter i. Arbeidet med oppgaven har vært det vanskeligste jeg noen gang har gjort, og det har vært utallige hoff'er og sukk, men nå står jeg endelig ved målstreken og det med hjelp av en rekke mennesker som har støttet og hjulpet meg underveis.

Jeg vil først rette en stor takk til mine veiledere Kirsti Rø og Ole Enge for god veiledning og konstruktive tilbakemeldinger. Jeg har satt veldig stor pris på å få to ulike synspunkt på oppgaven min. Videre vil jeg takke mine medstudenter, spesielt Ingeborg, som har både oppmuntret og motivert og jeg hadde virkelig ikke klart meg uten dere. Jeg vil også takke skolen og elevene som deltok i min undersøkelse, for at jeg fikk komme på besøk og gjøre mine undersøkelser. Uten dere hadde ikke denne oppgaven vært en realitet i dag, og jeg er veldig takknemlig for at dere delte deres tanker og arbeid med meg. Til slutt vil jeg takke familie, venner og kollegaer for både hjelp til korrekturlesing, synspunkter og utrolig mange "dette klarer du". Spesielt vil jeg rekke en stor takk til min bonuspappa Jo Terje for gode diskusjoner, kunnskapsrike innspill og for å vise så stor interesse for min oppgave, noe som har vært en stor oppmuntring og motivasjon.

Trondheim, mai 2017

Kristin Toresen Brønstad

INNHOLDSFORTEGNELSE

TABELLOVERSIKT

FIGUROVERSIKT

1. INNLEDNING

1.1. Bakgrunn for studien

Innenfor matematikkfaget har det blitt en generell oppfatning om at de yngste elevene i skolen ikke klarer å konstruere de matematiske begrepene dersom de kun representerer symbolsk, da dette blir for abstrakt (Ball, 1992; McNeil & Jarvin, 2007). Løsningen på dette har derfor vært å gi elevene konkretiseringsmateriell som skal representere de matematiske begrepene, og som således frigir elevene fra å kun forestille seg dem (Carbonneau, Marley & Selig, 2013). Konkretiseringsmateriell er objekter som er laget for å konkret og eksplisitt representere de matematiske begrepene og ideene (Moyer, 2001) og ved å manipulere dem skal elevene utvikle en forståelse for de matematiske begrepene som de er tiltenkt. Forskere har fremmet konkretiseringsmateriell i flere tiår, og det siden teoretikerne Piaget i 1917 (Hundeide, 1985) og Montessori i 1896 (Wenneström & Smeds, 2009) utviklet sine teorier. Ifølge dem så kan ikke de yngste elevene konstruere de abstrakte matematiske begrepene mentalt, uten hjelp av konkrete objekter (McNeil & Jarvin, 2007), hvor Piaget begrunnet dette med at barn ikke er utviklet nok kognitivt og Montessori hevder at barn får en bedre forståelse dersom man benytter flere av sansene samtidig (Wenneström & Smeds, 2009).

Forskningen som finnes om konkretiseringsmateriell i matematikk viser ulike resultater, og selv om man har gjort store metaanalyser (Sowell, 1989; Carbonneau et al., 2013) så er resultatene tvetydig. Fuson og Briars (1990) gjennomførte en undersøkelse med base-ti materiell for å se om elevene fikk en bedre forståelse for plassverdisystemet gjennom flersifrede addisjons- og subtraksjonsoppgaver, der deres resultater viste at det var en god effekt ved bruken av konkretene. Samtidig viste også resultatene at elevene ikke alltid klarte å bruke kunnskapen til å løse tekstoppgaver, hvis de ikke eksplisitt ble minnet på å tenke på materiellet. McNeil, Uttal, Jarvin og Sternberg (2009) så på hvordan konkreter som skal representere noe fra den virkelige verden, som for eksempel penger, påvirker elvenes matematikkprestasjoner på tekstoppgaver. De fant både fordeler og ulemper med bruken av konkreter, men det som kanskje sto seg mest frem var at de som i undersøkelsen brukte de mest perseptuelt rike og virkelighetsnære konkretene var de som gjorde mest feil, og var derfor de som klarte å løse færrest oppgaver. Selv om mange studier ligner på denne, og viser at konkretiseringsmateriell ikke nødvendigvis fremmer lærings, så brukes det fortsatt i veldig stor grad i de norske klasserommene.

Tidligere studier viser også at lærere som tar i bruk konkretiseringsmateriell, gjør det mest for at det er morsomt og gøy for elevene, og at de ikke i like stor grad tenker over hva det gjør med elevenes forståelse av de matematiske begrepene (Moyer, 2001). En slik bruk av konkretiseringsmateriell er ikke ny, og allerede når Piaget og Montessori utviklet sine teorier og metoder, ble disse i stor grad mistolket og forenklet. McNeil og Jarvin (2007) hevder at mistolkningens grunnlag ligger i en oppfatning om at ”If interactions with concrete objects provide the basis for abstract thought, then the more experience children have with manipultaives early on, the greater their understanding of abstract math concept will be later in development” (s. 311). Det de mener er at teoriene har blitt forenklet på en måte slik at man tror at jo mer erfaring elevene har med konkretiseringsmateriell tidlig, jo større forståelse vil de få for de abstrakte begrepene senere utviklingen, og at man derfor bør bruke mye konkretiseringsmateriell når elevene er yngre. En som ikke er enig i dette synet på konkretiseringsmateriell er Ball (1992), som sier at denne underliggende oppfatningen om at en forståelse for de matematiske begrepene kommer gjennom fingertuppene blir for lettvint, og at det er mange fallgruver. En av fallgruvene er at man som lærer allerede kjenner til det matematiske begrepet som ligger i konkretene, og at man derfor også kjenner det igjen, men at det ikke er slik for elevene og de vil derfor ikke automatisk trekke de samme konklusjonen som læreren ved å manipulere dem. En annen fallgruve er at det legges for stor vekt på selve konkretiseringsmateriellet og Ball (1992) forklarer det som at materiellet brukes som ”støttehjul” for elevenes matematiske tenking. Problemet blir da når disse støttehjulene skal ”tas av” og elevene i stedet for å sykle jevnt og fint, faller av sykkelen, noe som vil si at de ikke har tatt til seg det matematiske begrepet. At observasjonene av elevenes arbeid skjer innenfor konteksten av materiellet, kan derfor føre til at læreren misledes til å tro at elevene har lært og forstått det matematiske begrepet, men at det de har lært derimot er sterkt knyttet opp mot materiellet.

En av de skolene som i stor grad tar i bruk konkretiseringsmateriell er montessoriskolene. Maria Montessori utviklet gjennom sitt arbeid forskjellig matematikkmateriell som skulle lede barnet ”fra konkret virkelighet, gjennom en gradvis abstraksjonsprosess, til å kunne gjøre generaliseringer, forstå sammenhenger og sette opp regler” (Norsk Montessoriforbund, 2013, s. 79). Materielle ble utviklet med bakgrunn i at Montessori mente at det man gjør med hendene, det husker man, og at ved å bruke så mange av sansene som mulig vil man utvikle en dypere forståelse (Wennerström & Smeds, 2009). Hun mente også at de forskjellige materielle hadde et direkte formål, et matematisk begrep som det var tiltenkt, hvor barnet gjennom å arbeide med materiellet en stund, får en "aha-opplevelse" hvor det forstår det abstrakte budskapet og deretter forlater materiellet (Wennerström & Smeds, 2009).

Montessoriskolene er privatskoler som gjennom kunnskapsdepartementet og friskoleloven har fått godkjenning til å drive skole basert på en "anerkjend pedagogisk retning" (Friskolelova, 2003, §2-1). De siste 10 årene har antallet offentlige grunnskoler i Norge sunket betraktelig og i 2016 var det nesten 400 færre skoler enn ti år tidligere (SSB, 2017). Dermed har det heller aldri vært flere elever i privatskoler enn det er nå. I 2016 gikk 23000 elever på privatskole, som er en endring på 52,2% sammenlignet med antall elever i 2006 (SSB, 2016). Antallet montessoriskoler har også økt, fra at det i 2005 var 28 grunnskoler (Store Norske Leksikon, 2016) til at det når er 85 grunnskoler som er medlem av Norsk Montessoriforbund (Norsk Montessoriforbund, 2018). Samtidig finnes det lite forskning, spesielt i Norge, omkring montessoripedagogikken. Litteraturen som finnes er også i stor grad skrevet av personer som har tilknytning til Norsk Montessoriforbund, eller er skrevet av Maria Montessori selv, og det er ingen i Norge som har forsket på hvordan pedagogikken påvirker elevenes læring (Søderlind, 2006; Vangen, 2015).

1.2. Forskningsspørsmål

Hovedfokuset i denne oppgaven er konkretiseringsmateriellet *sjakkbrettet*, som er et matematikkmateriell som benyttes i montessoriskolene. Det vil ikke fokuseres på montessoripedagogikken, men den vil likevel bli beskrevet, da det er viktig for studiens kontekst. Sjakkbrettet er et materiell som tar for seg regnearten multiplikasjon, hvor elevene gjennom sitt arbeid med materiellet skal lære seg multiplikasjon med flersifra tall og et oppsett som ligner på standardalgoritmen for multiplikasjon. Jeg er interessert i å undersøke hvilken forståelse for multiplikasjon elevene klarer å vise i sitt arbeid, samt hvilke muligheter og utfordringer som ligger i å benytte konkretiseringsmateriellet. Ved å studere elevenes arbeid kan man si noe om hvilken forståelse for multiplikasjon elevene tar i bruk i arbeidet, og hvilke matematiske begreper elevene forbinder med sjakkbrettet. Med dette som utgangspunkt stiller jeg følgende forskningsspørsmål i denne studien:

> *Hvilken forståelse for multiplikasjon viser de utvalgte elevene i arbeidet med sjakkbrettet?*

For å besvare spørsmålet vil jeg presentere utdrag fra intervju med elever fra 3. til 6. trinn, samt illustrasjoner fra sjakkbrettet i intervjusituasjonene. Jeg vil analysere elevenes utsagn og handlinger på sjakkbrettet, med det formålet å kunne si noe hva elevene får ut av å bruke konkretiseringsmateriell og om elevene viser en forståelse for de matematiske begrepene som materiellet er tiltenkt. I elevenes arbeid vil det bli sett på hva slags forståelse de klarer å vise, og det i sammenheng om de har utviklet en prosedyre- eller begrepsforståelse (Hiebert & Lefevre, 1986). De to ulike formene for forståelse sier noe om hvilken kunnskap elevene har utviklet og hvordan de kan bruke denne forståelsen i sammenheng med andre matematiske begreper. Studien er videre plassert i et konstruktivistisk perspektiv, da det er denne teorien som gjør rede for hvordan konkretiseringsmateriell kan brukes for vurdere elevenes matematiske forståelse.

1.3. Oppbygging av studien

Denne studien er bygd opp av fem kapitler. Etter innledningskapittelet følger teorikapittelet hvor hensikten er å beskrive det teoretiske perspektivet som studien bygger på. Maria Montessori og montessoripedagogikken blir presentert innledningsvis og deretter kommer studiens læringsteoretiske ståsted, hvor konstruktivisme og matematisk forståelse blir beskrevet. Videre presenteres studiens matematiske tema som er multiplikasjon, der det tas opp relevante begreper for det valgte konkretiseringsmateriellet, før kapittelet til slutt avrundes med en definisjon og beskrivelse av konkretiseringsmateriell. I kapittel 3 vil jeg gjøre rede for de metodiske valgene jeg har tatt i denne studien, hvor hele forskningsprosessen vil bli skildret og som videre blir diskutert opp mot studien troverdighet og etiske betraktninger. Kapittelet avsluttes med hvordan bearbeiding og analyse av datamaterialet har foregått. Kapittel 4 inneholder min analyse av datamaterialet. Den består av utsagn fra intervju med elever, observasjonsnotater og illustrasjoner av sjakkbrettet i intervjusituasjonen, og er delt inn i tre kategorier. I kapittel 5 drøftes resultatene av analysen opp mot relevant teori og tidligere studier, og det blir diskutert hvilken forståelse for multiplikasjon som kommer til syne i elevenes arbeid og utsagn. Avslutningsvis blir metodekritikk tatt opp, samt didaktiske implikasjoner og studiens bidrag til forskningsfeltet.

2. TEORI

Målet med studien er å undersøke hvilken forståelse for multiplikasjon et utvalg elever viser i arbeidet med konkretiseringsmateriellet sjakkbrettet. I dette kapittelet blir det teoretiske grunnlaget for studien bli presentert, hvor teori om hvordan elever tilegner seg kunnskap og hvordan de utvikler matematisk forståelse blir tatt opp først. Deretter vil de bli presentert teori som beskriver og forklarer hvordan elever kan lære matematikk ved hjelp av konkretiseringsmateriell. Da det i denne studien er snakk om elevers utvikling av forståelse, blir studien plassert i et konstruktivistisk perspektiv. På bakgrunn av denne læringsteoretiske tilnærmingen vil jeg gjøre rede for hva en matematisk forståelse er og hvordan denne forståelsen kan deles opp i to ulike former. Videre vil det overordnede matematiske temaet multiplikasjon presenteres, hvor det gjøres rede for sentrale og relevante begrep og ideer. Disse begrepene vil danne utgangspunktet for analysen av det valgte konkretiseringsmateriellet som presenteres i analysekapittelet. For å beskrive konteksten rundt hvordan elevene i mitt utvalg lærer matematikk, og hvordan de tar i bruk konkretiseringsmateriell for å lære multiplikasjon, ønsker jeg først å presentere Maria Montessori og montessoripedagogikken.

2.1. Maria Montessori og montessoripedagogikk

Maria Montessori (1870-1952) ble født i Chiaravalle i Italia hvor hun bodde til hun var tolv år, før hun og familien flyttet videre til Roma. Der fikk Montessori mulighet til å få en god utdanning og ble etterhvert Italias første kvinnelige lege, ved universitetet i Roma. Gjennom universitetets gratisklinikk kom hun i kontakt med de såkalte "idiotbarna" som var barn med funksjonshemming eller barn som verken klarte seg i skolen eller i hjemmet. Gjennom sitt arbeid ble Montessori overbevist om at alle barn er født med et utrolig potensiale, og at årsaken til at disse "idiotbarna" var håpløse, var på grunn av at de var svært understimulerte (Vatland & Lexow, 2004). I sitt videre arbeid, med inspirasjon fra anerkjente pedagoger og leger, utviklet hun sine egne metoder som hun prøvde ut på en førskole kalt *Casa dei Bambini*, som kan oversettes til Barnas Hus. Her testet Montessori sine pedagogiske ideer, der en stor del av dette var arbeid med materiell (Norsk Montessoriforbund, 2013). Det var også her at Montessori oppdaget at barns oppvekst kan deles opp i flere utviklingstrinn, som montessoripedagogikken senere har blitt basert på (Seldin, 2007).

Det første utviklingstrinnet blir ifølge Montessori preget av *det absorberende sinn* og varer fra barnet er 0 til 6 år. Det andre utviklingstrinnet varer fra barnet er 6 til 12 år og hvor det er det *resonnerende sinn* som er i fokus. Dette utviklingstrinnet regnes også som en biologisk utviklingsperiode, hvor forandringene hovedsakelig skjer med kroppen og ikke til sinns, og Montessori (1949) sier at barnet er rolig og lykkelig. Det tredje trinnet varer i perioden mellom 12 til 18 år og regnes ikke som et barndomstrinn, men heller som en forberedelse til voksenlivet. Fra barnet går fra det første til det andre trinnet, så er det et særtrekk at det går fra å være bundet til det konkrete for å abstrahere, til at det gradvis klarer å bruke en forestillingsevne (Norsk Montessoriforbund, 2013). Samtidig er barnet fortsatt avhengig av den konkrete omverdenen. Arbeidet med montessorimateriellet skal da føre til at barnet får en konkret sensorisk opplevelse (Wenneström & Smeds, 2009). Dette gjenspeiler seg også i montessoriklasserommene, hvor det finnes forskjellig materiell for alle fag. Mengden materiell blir imidlertid mindre jo høyere man er i klassetrinnene. Noe av materiellet ble utviklet av Maria Montessori selv, mens annet har blitt utviklet av montessoripedagoger. Elevenes arbeid med materiellet skal ifølge Norsk Montessoriforbund (2013) lede barnet ”fra konkret virkelighet, gjennom en gradvis abstraksjonsprosess, til å kunne gjøre generaliseringer, forstå sammenhenger og sette opp regler” (s. 79). I matematikkfaget innebærer dette at konkretiseringsmateriellet gradvis blir mer abstrakt, hvor elevene gjennom å manipulere materiellet skal få en forståelse for det matematiske begrepet, ved at materiellet leder de til å se sammenhenger mellom ulike begreper og prosedyrer.

En annen viktig karakteristikk innenfor montessoripedagogikken er at klassene skal være aldersblandet. Montessori var motstander av at man grupperte elevene etter alder, da barn på samme alder befinner seg på ulike nivåer i sammenheng med modenhet og intelligens (Carlsson, 2005). Skoledagene er også annerledes oppbygd enn ved den offentlige grunnskolen, ved at undervisningen deles inn i *arbeidsøkter* som varer tre klokketimer. Videre kjennetegnes undervisningen av at lærerne demonstrer hvordan elevene skal bruke montessorimateriellet, før elevene videre arbeider med det alene eller med andre med elever (Norsk Montessoriforbund, 2013). Elevene får også selv velge hvilket materiell de ønsker å arbeide med. Arbeidsøktene er derfor ikke nødvendigvis rettet mot et spesifikt fag.

Når man skal opprette en privatskole så er det noen krav fra kunnskapsdepartementet som må innfris for å få driftstillatelse. For at skolen skal bli godkjent må den drives på et spesifikt grunnlag, der en av disse kan være en ”anerkjend pedagogisk retning” (Friskolelova, 2003, §2-1). Montessoripedagogikken er en slik retning, men selv om man har en alternativ pedagogikk, så må private grunnskoler gjøre seg kjent med og følge innholdet i den generelle delen av Kunnskapsløftet (Norsk Montessoriforbund, 2013). Dette gjør at den generelle delen av Kunnskapsløftet er den samme i *Læreplan for montessoriskolen* og at kompetansemålene integrerer målene fra Kunnskapsløftet. Derimot er kompetansemålene formulert og delt opp på en annen måte (Norsk Montessoriforbund, 2013). I læreplan som gjelder for montessoriskolene er kompetansemålene delt opp etter utviklingstrinn, i motsetning til Kunnskapsløftet, som deler kompetansemålene opp etter 2., 4. og 7.årstrinn. Det er i montessoriskolene derfor egne mål for barneskolen og egne for ungdomsskolen, og utviklingstrinnet for barneskoler er delt i to perioder. Den første perioden varer fra barnet er 6 til 9 år og den andre perioden varer fra det er 9 til 12 år.

Et annet krav som stilles for å drive en privatskole er at undervisningspersonalet må ha kompetanse i samsvar med opplæringsloven § 10-1 (Utdanningsdirektoratet, 2015) hvor det står at den som skal få en undervisningsstilling i grunnskolen skal ha ”relevant fagleg og pedagogisk kompetanse” (Friskolelova, 2013, §4-2). I tillegg til å sikre kvalitet og akkreditering, så har Norsk Montessoriforbund, som utgir *Læreplan for montessoriskolen,* vedtatt at skoler som ønsker å bruke denne læreplanen må kunne dokumentere at minst 50% av undervisningspersonalet har montessoriutdanning (Norsk Montessoriforbund, 2017). Lærerne må derfor ta videreutdanning for å bli montessoripedagog, som kan gjøres gjennom ulike høyskoler i Norge eller internasjonale skoler, som for eksempel Waterpark Montessori, (Norsk Montessoriforbund, u.å.), hvor lærerne hovedsakelig får innføring i montessoripedagogikken, men også opplæring i bruk av montessorimateriellet.

Jeg har til nå beskrevet hvordan Maria Montessoris arbeid med barn førte til den anerkjente montessoripedagogikken og har i korte trekk gjort rede for hvordan den blir praktisert. Samtidig så tar ikke montessoripedagogikken for seg hvordan barn tilegner seg kunnskap, men heller hvordan undervisningen skal foregå for at det skal skje læring (Elkind, 1970), gjennom at det er et fokus på miljøet rundt elevene. En som derimot har tatt for seg hvordan barn tilegner seg kunnskap er Jean Piaget, som gjennom systematisk forskning har utviklet en læringsteori som, i likhet med montessoripedagogikken, baserer seg på utviklingstrinn.

2.2. Konstruktivismen

Psykologen Jean Piaget (1896-1980) er den mest innflytelsesrike og anerkjente personen innenfor det konstruktivistiske læringssynet. Han mente at man som individ konstruerer sin egen kunnskap i samspill med omverdenen og de erfaringene man gjør seg. Piaget tok også utgangspunkt i biologi i sin beskrivelse av den kognitive utviklingen, hvor organismen, eller mennesket, tilpasser seg sine omgivelser og de endringer som skjer i dem (Skott, Jess & Hansen, 2008; Sinclair, 1990). Denne prosessen blir kalt for *adapsjonsprosessen,* hvor vi som mennesker samler og organiserer de erfaringene vi gjør oss i omgivelsene i mentale handlingsmønster, også kalt *skjemaer.* For å beskrive denne prosessen nærmere brukte Piaget begrepene *assimilasjon* og *akkomodasjon.* Assimilasjon handler om at det er en overensstemmelse mellom omgivelsene og organismens skjemaer. Det vil da si at organismen bruker de skjemaene den allerede har til å tolke den informasjonen den tar i mot, og at disse stemmer overens med hverandre slik at skjemaet kan utvides (Skott et al., 2008). Hvis informasjonen ikke stemmer overens med skjemaene, må man enten lage et nytt eller endre det eksisterende skjemaet, i form av akkomodasjon. Dette vil da oppleves av individet som en ubalanse, kalt *kognitiv konflikt* og som fungerer som motivasjon da individet vil ønske å opprette en balanse igjen (Hundeide, 1985; Skott et al., 2008). Prosesser med kognitiv konflikt mellom assimilering og akkommodering er selve drivkraften i individets kognitive utvikling, og blir også kalt for *likevektsprinsippet* (ekvilibrasjon). Man forsøker å oppnå en balanse mellom assimileringen og akkommoderingen av en spesiell situasjon, og når balansen er oppnådd, vil individet forstå situasjonen eller informasjonen på en praktisk og detaljert måte (Hundeide, 1985)

Videre hevder Piaget at den kognitive utviklingen skjer i fire aldersfestede stadier, og at disse stadiene påvirker hvordan man tenker og handler i sammenheng med omgivelsene (Elkind, 1970). Piaget har navngitt stadiene, hvor det første er det *sensomotoriske* stadiet, det andre det *pre-operasjonelle* stadiet, det neste det *konkret-operasjonelle* stadiet og det siste det *formell-operasjonelle stadiet.* Jeg vil her gå nærmere inn på de tre siste stadiene, da det er disse som er relevante i sammenheng med elevers læring i barneskolen. I det andre stadiet, det *pre-operasjonelle* stadiet, begynner barnet å ta i bruk språket i større grad enn før og det begynner å forstå at for eksempel ordet ”tre” ikke er et tre, men at det er en symbolsk representasjon av et tre (Copeland, 1970). Stadiet varer fra barnet er ca. 2 til 7 år, hvor de erfaringene som barnet har gjort tidligere blir til representasjoner som de kan se for seg i hodet. Derimot er ikke disse representasjonene enda det Piaget kalte for *operasjoner,* altså noe man kan operere på i hodet (Elkind, 1970).

Det tredje stadiet, *konkret-operasjonell*, varer fra barnet er 7 til 11 år. Her behersker barnet det Piaget kaller for konkrete operasjoner, som er internaliserte handlinger som gjør det mulig for barnet å se for seg og manipulere ting i hodet, som tidligere kun har blitt uført som virkelige handlinger. Barnet er også i stand til å håndtere forholdet mellom klasser av ting, altså kategorisering (Elkind, 1970). Samtidig er det viktig å understreke at selv om barnet her er i stand til å se for seg ting i hodet i større grad, så er det fremdeles knyttet til den fysiske virkeligheten. Derimot begynner barnet i denne perioden å gå mer bort fra manipulering av objekter som en måte å ”vite” (Copeland, 1970) som betyr at barnet også kan tilegne seg kunnskap gjennom de internaliserte handlingene og ikke bare gjennom virkelige handlinger i den fysiske verden.

De tre nevnte stadiene påvirker altså hva et barn er i stand til å tenke og gjøre, og kan hjelpe en å si noe om hvilken kunnskap elevene vil være i stand til å tilegne seg i en viss alder. Stadiene beskriver også hva elevene er i stand til å gjøre i hodet, og hva som fortsatt må skje i forbindelse med omgivelsene og med hjelp av konkrete handlinger. Denne måten å betrakte læring på, ved at den representeres internt i skjemaer, kan også sees i sammenheng med hvordan elever utvikler en matematisk forståelse, noe jeg vil se nærmere på i neste delkapittel.

2.3. Matematisk forståelse

Det har lenge blitt diskutert hva matematisk forståelse er, og hvordan man kan legge til rette for at elever utvikler denne forståelsen. Selv om man ikke helt hva det er, så har det blitt en akseptert idé innenfor matematikkdidaktikkens forskningsfelt at man ønsker å fremme læring med forståelse. Hiebert og Carpenter (1992, s. 65) sier det at ”The goal of many research implementation efforts in mathematics education has been to promote learning with understanding. But achieving this goals has been like searching for the Holy Grail.”. Dette reflekterer diskusjonen som har pågått ved at målet for mye av forskningen innenfor matematikkdidaktikk har vært å fremme læring med forståelse, men at å nå det målet ser umulig ut. Et av problemene har vært at man ikke har en felles definisjon på hva matematisk forståelse er, og begrepet blir derfor beskrevet på ulike måter.

Hiebert og Carpenter (1992) har tatt utgangspunkt i kognitiv forskning og utviklet et rammeverk basert på antakelsen om at kunnskap blir representert internt, og at disse interne representasjonene er strukturert. Videre mener de at det finnes en sammenheng mellom de eksterne og interne representasjonene, og at de interne representasjonene er relatert til eller har en sammenheng med hverandre. Ved å ta i bruk deres rammeverk kan man diskutere spørsmål som omhandler hvordan man lærer og underviser i matematikk, og kan si noe om hva matematisk forståelse er. Hiebert og Carpenter (1992) definerer matematisk forståelse som når en matematisk idé eller prosedyre er en del av det interne nettverket, og graden av forståelse vil være bestemt på antall sammenhenger med andre representasjoner og styrken mellom dem. Videre kan man på bakgrunn av denne definisjonen beskrive prosessen med å utvikle forståelse, gjennom at man gradvis bygger opp et nettverk av mentale representasjoner og at nye sammenhenger blir konstruert mellom det som tidligere var isolerte representasjoner. Nye representasjoner blir enten koblet til det eksisterende nettverket og en sammenheng konstrueres mellom den nye representasjonen og den gamle, eller så kan det skje en endring i nettverket hvor man enten justerer en representasjon man allerede har, eller man forkaster den og erstatter den med en ny. Dette gjør også at man alltid vil bruke de representasjonene man har, til å tolke de representasjonene man møter (Hiebert & Carpenter, 1992), og bestemme om den passer innenfor nettverket, eller om man trenger å modifisere eller gå bort i fra den representasjonen. Denne prosessen hvor man utvikler en matematisk forståelse kan sees i sammenheng med adapsjonsprosessen, hvor det da er snakk om skjemaer i stedet for interne nettverk. Når en ny representasjon blir koblet til et eksisterende nettverk, så vil dette være assimilasjon hvor det konstrueres en sammenheng, og det er en overensstemmelse mellom skjemaet og den nye representasjonen. Dersom man velger å justere eller forkaste en representasjon og erstatte den med en ny, så vil det være akkomodasjon (Skott et al., 2008).

Matematisk forståelse kan, med utgangspunkt i Hiebert og Carpenters (1992) definisjon, beskrive prosessen hvordan elever lærer matematiske begreper. En annen beskrivelse som tar for seg hvilken type forståelse man utvikler, blir gitt av Hiebert og Lefevre (1986), der den matematiske forståelsen blir delt opp i to former, nemlig begreps- og prosedyreforståelse.

2.3.1. Begreps- og prosedyreforståelse

Hiebert og Lefevre (1986) deler den matematiske forståelsen opp i to former hvor de skiller mellom *begrepsforståelse* (oversatt fra conceptual knowledge) og *prosedyreforståelse* (oversatt fra procedural knowledge). De mener at dette skillet er med på å gjøre oss i bedre stand til å tolke elevenes læringsprosesser. Samtidig har de vært gjenstand for omfattende diskusjon, omkring hvilken kunnskapsform som er viktigst og hva som er den passende balansen mellom dem (Hiebert & Lefevre, 1986) Selv om Hiebert og Lefevre (1986) skiller mellom disse to kunnskapsformene og mener at man må være klar over begrepenes ulikheter, så understreker de at man ikke kan se på de som to separate enheter, og at de derfor utfyller hverandre. Mye av kunnskapen som elevene tilegner seg kan betegnes som både begrepsforståelse eller prosedyreforståelse, men at begrepsforståelsen samtidig kan være med på å påvirke prosedyreforståelse dersom prosedyreforståelsen blir tilegnet på en meningsfull måte (Hiebert & Lefevre, 1986). Et eksempel kan være en elev som har tilegnet seg en begrepsforståelse for multiplikasjon og den distributive egenskapen. Dette kan videre påvirke hans eller hennes prosedyreforståelse for multiplikasjonsalgoritmen, da stegene som gjøres gir mening for eleven i form av at man er klar over at man deler opp tallet i en sum og deretter multipliserer hvert ledd i summen med den andre faktoren.

Begrepsforståelse kan karakteriseres som kunnskap som har rike relasjoner, hvor kunnskapen er sterkt knyttet til annen kunnskap. Hiebert og Lefevre (1986) sier at man kan tenke på det som et spindelvev av kunnskap, eller et nettverk hvor sammenhengene er like viktig som de separate delene av kunnskap. Det vil da si at all kunnskap på en eller annen måte er knyttet til en annen kunnskap og én del av begrepsforståelsen står aldri alene. Begrepsforståelse i multiplikasjon med flersifra tall vil altså være knyttet opp mot kunnskap om andre ting, som for eksempel plassverdisystemet og den distributive egenskapen (Ma, 2010). Ved tilegnelse av begrepsforståelse kobler man altså enten små eller store deler, som allerede i seg selv kan være et nettverk, til et annet nettverk, for eksempel ved å koble sammen kunnskapen man har om multiplikasjon man har om addisjon eller divisjon. I andre tilfeller kan man koble ny informasjon til de allerede eksiterende nettverkene, og man får en sterkere forståelse for akkurat den delen med kunnskap. Et eksempel er å koble multiplikasjon med 10 som omhandler plassverdisystemet, til nettverket man allerede om multiplikasjon, og man får en sterkere begrepsforståelse for multiplikasjon.

Hiebert og Lefevre (1986) skiller også mellom to nivåer av begrepsforståelse, hvor man konstruerer en sammenheng mellom to ulike deler av kunnskap. På det *første nivået* (oversatt fra primary level) kobles kunnskap sammen som er på samme abstraksjonsnivå. Det vil si at den nye informasjonen ikke er mer abstrakt enn den informasjonen eller det nettverket det kobles til. Begrepet abstrakt blir her brukt i sammenheng med hvilken grad den kunnskapen som konstrueres er knyttet til en kontekst, og på det første nivået så vil kunnskapen være knyttet til den konteksten den læres i. I det andre nivået, som blir kalt for *det reflekterende nivået* (oversatt fra reflective level) (Hiebert & Lefevre, 1986), blir sammenhengene konstruert på et høyere og mer abstrakt nivå. Kunnskapen er i mindre grad knyttet til en spesifikk kontekst, og blir ofte konstruert gjennom å gjenkjenne likhetstrekk mellom forskjellig informasjon, som overfladisk er helt forskjellig. Man utvikler en begrepsforståelse på et høyere nivå enn ved det første nivået, hvor man tar et steg tilbake og reflekterer over informasjon man kobler sammen og man ser mye mer av det matematiske terrenget (Hiebert & Lefevre, 1986). De to nivåene for hvordan man konstruerer en begrepsforståelse kan også sees i sammenheng med det Ostad (1992) beskriver som en representasjons dynamiske beredskapsfunksjon som omhandler de interne representasjonenes funksjonalitet, hvor han bruker begrepene *tunge* og *lette forestillinger*. Dersom en elev konstruerer en intern representasjon som er tung, så vil den være knyttet til "problem-irrelevante og eller problem-redundante egenskaper" (Ostad, 1992, s. 216). I motsetning vil en lett forestilling være løsrevet fra disse egenskapen og består kun av problem-relevante egenskaper, slik at kunnskapen ikke er knyttet til den eksterne representasjonen og kan brukes i andre lignende sammenhenger. Den tunge forestillingen vil da være en begrepsforståelse som er konstruert på det første nivået og en lett forestilling vil være konstruert på det reflekterende nivået (Hiebert & Lefevre, 1986; Ostad, 1992). Long (2005) kommer i sin artikkel med et eksempel på forskjellen mellom disse to nivåene i sammenheng med tallsystemer. Hun hevder at når elever først blir konfrontert med et tallsystem med en annen base enn 10, for eksempel 5, så får de vite at grupperingen er 5, og at de bare jobber med symbolene 1, 2, 3, 4 og 0. Når man så tegner en tallinje med 5 som base, så blir disse to delene av kunnskap, gruppering av 5 (kardinaltallet) og bruken av symbolene 1-4 og 0 for å vise ordinaltallet, koblet sammen. Denne sammenhengen blir konstruert på det første nivået på grunn av at de to delene er like abstrakt og begge er knyttet til konteksten rundt femtallsystemet. Dersom det skal skje en konstruering på det reflekterende nivået, så vil eleven etter å ha jobbet med flere ulike baser forstå at prinsippene er de samme med en hvilken som helst base. Det reflekterende nivået referer da til et høyere nivå av abstraksjon, som innebærer at man kobler sammen biter av informasjon som man tidligere har sett på som separate (Long, 2005).

Prosedyreforståelse er også delt opp i to deler, hvor den ene omhandler det formelle språket, eller det symbolske representasjonssystemet man har i matematikk, og den andre delen omhandler algoritmer, eller regler, for å utføre matematiske oppgaver (Hiebert & Lefevre, 1986). Førstnevnte inkluderer en kjennskap til symbolene som brukes til å representere matematiske ideer og en bevissthet om de syntaktiske reglene for å skrive disse symbolene. Et eksempel på prosedyreforståelse er å gjenkjenne at uttrykket $6 + \boxed{} = 8$ er syntaktisk akseptabelt, selv om man ikke vet svaret, mens at $6 + = \boxed{}\, 8$ ikke er akseptabelt. Generelt vil dette bety at man har kunnskap om symboler og syntaks i matematikken, og hvordan man bruker symbolene på en akseptabel måte (Hiebert & Lefevre, 1986). Den andre delen av prosedyreforståelsen består av regler, algoritmer eller prosedyrer i matematiske oppgaver og er steg-for-steg instruksjoner som bestemmer hvordan man kan fullføre oppgaver. En viktig egenskap med prosedyrer er at de blir utført i en bestemt lineær sekvens, og det er denne sekvenseringen som er karakteristisk ved prosedyrer og som skiller denne kunnskapen fra andre typer kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986). Med lineær sekvens menes det at man er nødt til å følge den riktige sekvensen til prosedyren, med riktig rekkefølge på stegene, ellers vil man ikke få riktig svar. Et eksempel kan være standardalgoritmen for multiplikasjon, hvor man først er nødt til å multiplisere de ulike leddene *før* man adderer tallene med samme verdi. En annen grunn til at denne kunnskapen skiller seg fra annen kunnskap, er at man her ikke trenger å forstå hvorfor man kan gjøre sånn som man gjør, så lenge man kan stegene og at man gjør de i riktig rekkefølge. Man kan også skille mellom prosedyrer som gjennomføres på objekter som er standard skrevne symboler, som for eksempel standardalgoritmen som ble nevnt, eller objekter som er ikke-symbolsk, som konkrete objekter eller mentale bilder (Hiebert & Lefevre, 1986).

Et eksempel på ikke-symbolsk objekter kan være konkretiseringsmateriellet sjakkbrettet, som blir presentert i neste kapittel, hvor man gjennomfører en tilnærmet lik prosedyre som standardalgoritmen på en treramme hvor man manipulerer tallene i form av perler.

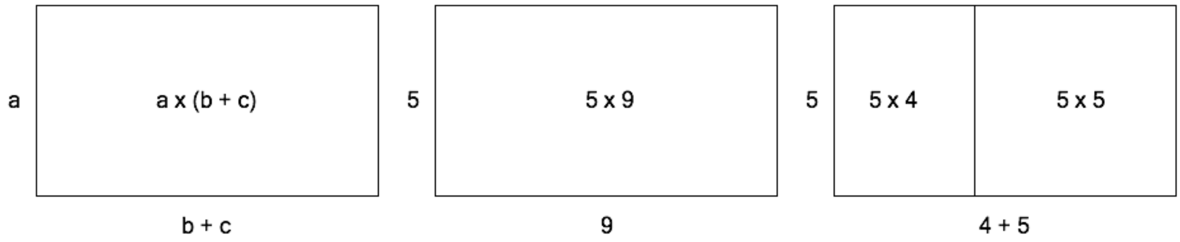
Begreps- og prosedyreforståelse er nyttige begreper for å snakke om elevers læring i matematikk, da de gir innsikt i hvordan elever tilegner seg matematikkunnskap og skillet gir en måte å tolke elevenes læringsprosesser på. Samtidig er det viktig å understreke at skillet ikke gir et klassifiseringsskjema hvor man enkelt kan plassere elevene og deres kunnskap. Noe kunnskap ser ut til å være kjennetegnet av begge, og noe kunnskap ser ut til å være på side av kategoriene (Hiebert & Lefevre, 1986). I min studie undersøker jeg hvilken forståelse elevene viser i arbeidet med konkretiseringsmateriellet sjakkbrettet, hvor dette materiellet tar for seg multiplikasjon av flersifra tall. Beskrivelsen av de to kunnskapsformene gitt ovenfor vil derfor være utgangspunktet for å si noe om hvilken forståelse for multiplikasjon elevene viser i arbeidet. Jeg vil derfor videre gjøre rede for hva multiplikasjon er og hva det betyr å *forstå* multiplikasjon.

2.4. Multiplikasjon

Multiplikasjon er en av de fire regneartene i aritmetikk. Videre har man innenfor multiplikasjon flere begreper og ideer som eleven må lære, for å utvikle en forståelse for multiplikasjonsbegrepet. Man har tre aritmetiske egenskaper eller lover, den *distributive* egenskapen, den *kommutative* egenskapen og den *assosiative* egenskapen, som støtter forståelsen for og regning med multiplikasjon. Den *distributive* egenskapen handler om at man kan dele opp tall (dekomponering), ved at for eksempel $5 \cdot 9$ kan løses ved å dele opp 9 i 4 og 5, slik at man får delstykkene $5 \cdot 4$ og $5 \cdot 5$ og man multipliserer disse, for så å addere disse. En annen mulighet er å velge en hvilken som helst gruppe som går opp i 9, slik at man også kan velge å dele det opp i 2 og 7 og får delstykkene $5 \cdot 2$ og $5 \cdot 7$, og vil likevel får det samme svaret. Mer generelt kan det skrives slik:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

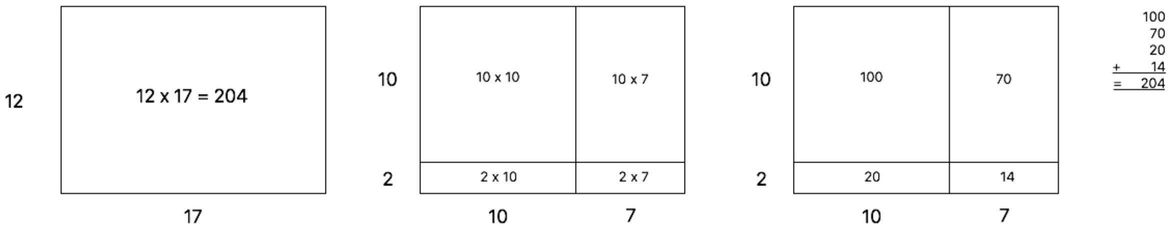
Man deler opp den ene faktoren i en sum, før man så multipliserer hvert ledd i summen med den andre faktoren (Solem, Alseth, Eriksen & Smestad, 2010). Dette kommer tydelig frem hvis man tar i bruk arealmodellen for multiplikasjon:



Figur 1: Arealmodellen som illustrer den distributive egenskapen ved utregning av 5 × 9

Figur 1 viser hvordan man kan dele opp den ene faktoren i et rutenett for arealet $5 \cdot 9$. For rektangelet i midten er arealet $5 \cdot 9$ eller mer generelt $a \cdot (b + c)$ som i rektangelet til venstre, hvor a er 9, b er 4 og c er 5, altså er b + c er lik 9. Rektangelet til høyre har to mindre rektangel med areal $a \cdot b$ og $a \cdot c$, henholdsvis $5 \cdot 4$ og $5 \cdot 5$. Disse adderes for å finne det totale arealet, som er 45.

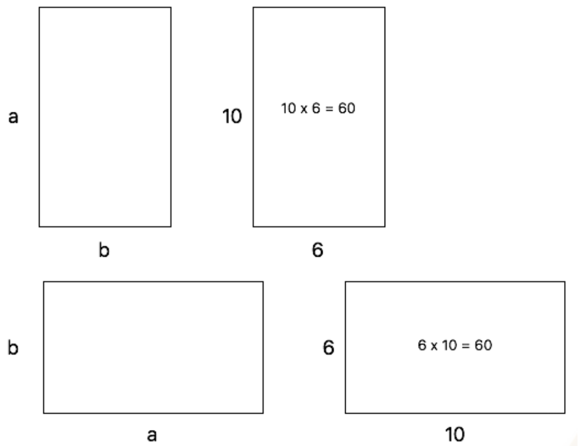
Man kan også dele opp begge faktorene i en sum, for så å multiplisere alle leddene med hverandre. For $12 \cdot 17$ kan man dele opp faktorene slik: $(10 + 2) \cdot (10 + 7)$. Deretter regner man sammen følgende: $(10 \cdot 10) + (10 \cdot 7) + (2 \cdot 10) + (2 \cdot 7)$.



Figur 2: Arealmodellen som illustrerer den distributive egenskapen ved utregning av 12 × 17

Figur 2 viser hvordan man kan dele opp begge faktoren i en sum, slik at man får fire rektangler, og hvor arealene for hver av dem adderes. Det første rektangelet til venstre viser et tomt rutenett for arealet $12 \cdot 17$. Rektangelet i midten viser at faktoren 12 er delt opp i 10 og 2 og faktoren 17 er delt opp i 10 og 7, hvor hvert ledd multipliseres med hverandre for å finne arealet til hvert rektangel. Rektangelet til høyre viser så arealet til hvert rektangel hvor disse så adderes helt til høyre for å finne det totale arealet som er 204.

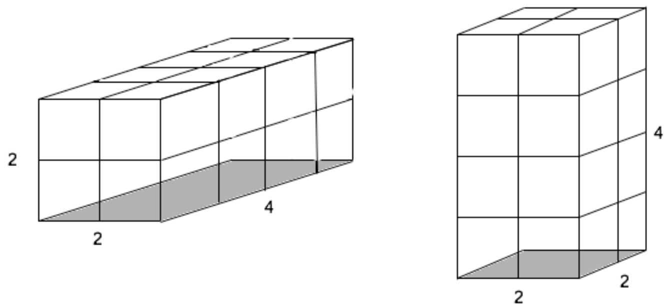
Den distributive egenskapen blir ofte sett på som en av de egenskapene som det er vanskeligst for elevene å lære, men som samtidig er fundamental for å forstå multiplikasjon (Carpenter, Levi, Franke & Koehler, 2005). Den er ikke bare viktig for å kunne løse multiplikasjonsoppgaver, men er også viktig når elevene blir eldre og skal gjøre symbolmanipulasjoner i algebra (Carpenter, Franke & Levi, 2003). I tillegg brukes den distributive egenskapen når man løser multiplikasjonsoppgaver ved hjelp av standardalgoritmen, og er vesentlig for å forstå hvorfor algoritmen fungerer. Carpenter et al. (2005) har i sin studie undersøkt hvordan man skal gi elevene mulighet til å engasjere seg i relasjonell tenking, hvor de fokuserer på den distributive egenskapen. De hevder at mange elever vet hva den distributive egenskapen er og klarer å ta den i bruk på passende måte, men at ikke klarer å uttrykke den gjennom ord og symboler. Dette vil derfor på virke i hvilken grad en elev klarer å vise en forståelse for den distributive egenskapen.



Figur 3: Illustrasjon av den kommutative egenskapen, med eksemplet 10 × 6 = 6 × 10

Den *kommutative egenskapen* for multiplikasjon handler om at når man multipliserer to tall, så kan man forandre rekkefølgen på tallene og likevel få det samme svaret. Mer generelt kan det skrives slik: $a \cdot b = b \cdot a$. Man kan også her benytte seg av arealmodellen for multiplikasjon, for å begrunne hvorfor den kommutative egenskapen gjelder. Som man ser i figur 3, så vil arealet i $a \cdot b$ være lik $b \cdot a$, da man kun endrer rektangelets orientering i de to situasjonene. Det øverste rektangelet med arealet $10 \cdot 6$ har altså samme areal som det nederste rektangelet, som viser $6 \cdot 10$.

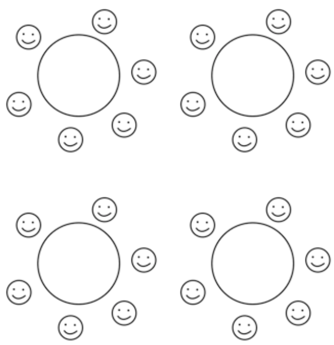
Den tredje egenskapen som gjelder for multiplikasjon er den *assosiative egenskapen.* Denne egenskapen handler om at når du multipliserer tre tall, så vil ikke rekkefølgen på tallene du multipliserer ha noe å si for utfallet. Symbolsk kan det representeres som $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Det kan også representeres som i figur 4 som viser et prisme med forskjellig orientering. Når prismet ligger, som til venstre i figur 4, så vil høyden være 2, bredden av grunnflata er 2 og lengden av grunnflata er 4 og man for å finne volumet multipliserer man: $2 \cdot (2 \cdot 4) = 2 \cdot 8 = 16$. Når prismet står, som til høyre i figuren, så er høyden 4, bredden av grunnflata er 2 og lengden av grunnflata er 2 og man får: $(2 \cdot 2) \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$. Prismet vil altså ha samme volum uansett orientering, om det ligger eller står, som er 16.



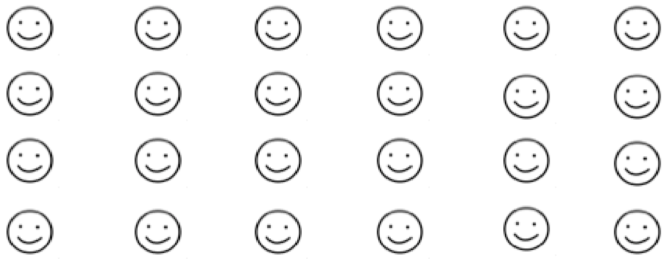
Figur 4: Illustrasjon av den assosiative egenskapen med eksempelet $2 \times (2 \times 4) = (2 \times 2) \times 4$

En annen stor idé i arbeid med multiplikasjon er ideen om *unitizing.* Unitizing handler om å forstå at mengder kan grupperes, og at gruppen kan bli referert til som én enhet som har større verdi en én (Hulbert, Petit, Ebby, Cunningham & Laird, 2017). Eleven må altså forstå at man i multiplikasjon har et antall grupper av noe. Fosnot og Dolk (2001) bruker i sin bok et eksempel der man har poser med kjeks. De snakker da om en gutt som bli spurt om hvor mange kjeks det er tilsammen, når han har tre poser med seks kjeks i hver pose. Gutten bruker unifix-kuber som hjelpemiddel og legger først ut seks lyseblå kuber, og teller ”en, to, tre, fire, fem, seks”. Han repeterer dette tre ganger, før han så legger ut en mørkeblå kube som representerer posen. Gutten teller altså først hver gruppe separat, før han så teller hele til slutt igjen. Han er ikke i stand til å se seks kjeks som én pose, og utfører derfor ikke en multiplikasjonsaktivitet, men en telleaktivitet (Fosnot & Dolk, 2001, s. 34-35). Dette er en vanlig strategi for elever ved introduksjon av multiplikasjon, hvor det videre er en stor overgang for dem å gå fra å telle en og en til å telle i grupper. Når elever utvikler sin forståelse og fleksibelt bruker unitizing, vil de gå bort fra gjentatt addisjon. I stedet begynner de da å bruke multiplikasjonsstrategier og gjøre multiplikativ tenkning (Hulbert et al., 2017). Unitizing er også sterkt knyttet opp mot plassverdisystemet, hvor ti enere grupperes som én tier, ti tiere grupperes som én hundrer, og at det fortsetter slik med potenser med 10 som grunntall. Hiebert og Wearne (1992) har i studie undersøkt hvordan elever utvikler en begrepsforståelse for plassverdisystemet, og hvilken undervisningsmetode som fremmer dette. De påpeker at å forstå plassverdisystemet innebærer å se sammenhenger mellom relevante ideer som å gruppere med 10 og behandle grupper som enheter, og at man videre bruker strukturen til de skrevne symbolene for å vise informasjon om grupperingene. Undervisningen er videre nødt til å legge til rette for at elever skal se sammenhengen mellom forskjellige former representasjoner, for at elevene skal utvikle begrepsforståelse for dette begrepet (Hiebert & Wearne, 1992).

Når man møter multiplikasjon i sammenheng med en kontekst, så vil disse kontekstene gi oss ulike forestillinger av situasjonen (Solem et al., 2017). Det vil si at for eksempel regnestykket $4 \cdot 6$ kan tolkes på forskjellige måter, i sammenheng med forskjellige kontekster. Dersom man for eksempel skal lage en tegning for å løse oppgaven : ”I klasserommet var det fire bord med seks barn ved hvert bord, hvor mange barn i alt?”, vil den se annerledes ut på tegningen enn dersom oppgaven heller var ”I klasserommet var det fire rader med pulter og det var seks barn i hver rad, hvor mange barn i alt?” (Figur 6) (Solem et al., 2017).

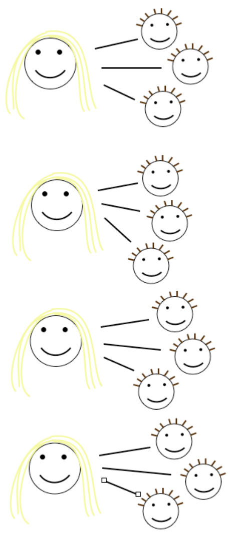


Figur 6: $4 \cdot 6$ illustrert i form av like grupper

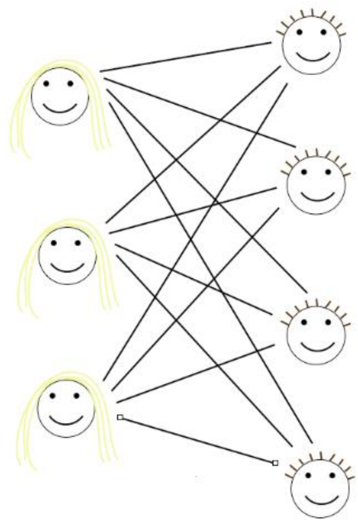


Figur 5: $4 \cdot 6$ illustrert i form av rektangulært arrangement

Selv om begge oppgavene representerer det samme multiplikasjonsstykket, så ser man her at oppgavetypene representerer to ulike multiplikative strukturer, og Greer (1992) har i alt identifisert fire slike strukturer. Figur 5 representerer kategorien som kalles *like grupper*, hvor man har fire bord med seks barn ved hvert bord. I figur 6 har man en situasjon som blir kategorisert som *rutenett* eller *rektangulært arrangement.* Man har også strukturen *multiplikativ sammenlikning* hvor man kan ha situasjonen at det er 4 jenter, og det er tre ganger så mange gutter (figur 7) hvor regnestykket da blir $4 \cdot 3$. Den siste kategorien handler om *antall* *kombinasjoner* eller det Solem et al. (2017) kaller for *kartesisk produkt*, hvor man kan se på antall kombinasjoner gutt-jente med tre jenter og fire gutter (figur 8). Smith og Smith (2006) hevder at for at elever skal utvikle en begrepsforståelse for multiplikasjon, så må de utvikle et språk for å tenke på og beskrive disse multiplikative situasjonene og mengdene som inngår i dem.



Figur 7: 4 · 3 illustrert i form av multiplikativ sammenlikning



Figur 8: 4 · 3 illustrert i form av antall kombinasjoner

I forbindelse med analysen av det valgte konkretiseringsmateriellet sjakkbrettet (delkapittel 4.1) så legges det ikke til rette for at elevene skal forstå verken den kommutative eller assosiative egenskapen gjennom arbeidet. Det legges heller ikke til rette for at elevene skal gjøre noe multiplikativ tenking i forbindelse med oppgavene som følger med sjakkbrettet, noe jeg vil gå nærmere innpå i analysen. Samtidig er det viktig å påpeke at elevene likevel kan vise en forståelse for disse begrepene i arbeidet, gjennom utsagnene de kommer med. Jeg vil videre i dette kapittelet gjøre rede for hvordan elever lærer multiplikasjon i barneskolen, jeg vil se nærmere på standardalgoritmen for multiplikasjon og jeg tar opp hva det betyr å forstå multiplikasjon med flersifra tall.

2.4.1. Multiplikasjon i barneskolen

Når elever i barneskolen skal lære multiplikasjon blir de ofte introdusert til gjentatt addisjon, som vil si at man adderer multiplikatoren tilsvarende ganger som multiplikanden:

$$a \cdot b = \underbrace{b + \cdots + b}_{a}$$

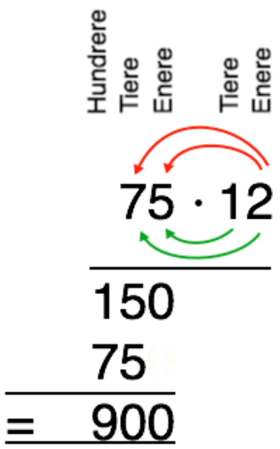
En mulig oppgave hvor elevene tar i bruk gjentatt addisjon kan være «Per har tre poser med fem boller i hver pose, hvor mange boller har Per til sammen?» og det blir da løst på denne måten:

$$3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 = 15$$

Videre er det vanlig at elevene automatiserer den lille gangetabellen, som gjerne gjøres gjennom utenatlæring, hvor elevene pugger til de kan alle regnestykkene fra $1 \cdot 1$ til $10 \cdot 10$. Elever i den offentlige grunnskolen blir ikke introdusert for multiplikasjon før i 3. og 4.klasse, hvor målet for opplæringen er at elevene etter 4.trinn skal kunne "utvikle og bruke varierte metodar for multiplikasjon og divisjon, bruke dei i praktiske situasjonar og bruke den vesle multiplikasjonstabellen i hovudrekning og i oppgåveløysing" (Utdanningsdirektoratet, 2013). I montessoriskoler derimot, så introduseres de fire regneartene på samme tid, og det allerede fra 1.klasse. I *Læreplan for montessoriskolen* (Norsk Montessoriforbund, 2013) er det ikke en egen fagplan for matematikk, men det er en for *geometri* og en for *aritmetikk*, hvor det under aritmetikk står at elevene "(...) jobber med alle regneartene samtidig, uavhengig av hverandre. Det er gjennom arbeidet med materiellet at eleven selv oppdager sammenhenger, regler og forbindelser mellom de ulike regneartene." (Norsk Montessoriforbund, 2013, s. 112). Som tidligere nevnt så er kompetansemålene i læreplanen for montessoriskolene delt opp etter utviklingstrinn, der elevene i barneskolen er på det andre utviklingstrinnet som varer fra de er 6 til 12 år. Utviklingstrinnet som gjelder for elever i barneskolen er også delt opp i to perioder (6 til 9 år og 9 til 12 år), hvor elevene, i sammenheng med multiplikasjon, etter den første perioden skal kunne "de fire regneartene, (...) med små og store tall, samt føring og hoderegning" og "gjennomføre multiplikasjon (den lille tabellen)" (Norsk Montessoriforbund, 2013, s. 115). Etter den andre perioden skal eleven kunne "beherske de fire regneartene (...) på et høyere nivå" og "beskrive plassverdisystemet for desimaltall og kunne regne med dem i de fire regneartene" (Norsk Montessoriforbund, 2013, s. 115).

2.4.2. Standardalgoritmen

Når elever på barnetrinnet skal lære å regne multiplikasjon med flersifra tall, så blir de i den offentlige grunnskolen ofte introdusert til standardalgoritmen. Det finnes mange ulike algoritmen for å regne ut multiplikasjonsstykker, og Harvey (2002) lister i sin artikkel opp hele 13 forskjellige metoder. Den vanligste måten, og som blir introdusert i de fleste lærebøkene, ser ut som den i figur 9. Denne algoritmen er den som blir introdusert i læreboka *Tusen millioner 6A*, hvor det følger med beskrivelsen: "Jeg starter med å multiplisere 2 enere i 12 med 5 enere i 75. (...) Deretter multipliserer du 2 enere i 12 med 7 tiere i 75." (Rasch-Halvorsen, Rangnes & Aasen, 2007, s. 79). Beskrivelsen og figuren gir altså en forklaring av hvordan man deler opp tallene (den distributive egenskapen) i tiere og enere, før man videre multipliserer hvert ledd med leddene i den andre summen. At den distributive egenskapen ligger til grunn for standardalgoritmen kommer ikke like tydelig frem dersom man bare følger stegene. Å forstå algoritmen innebærer at man i dette eksemplet forstår at man deler opp 75 i 70 + 5, og at man deler opp tallet 12 i 10 + 2, før man så multipliserer alle leddene med hverandre, og deretter adderer de. Et alternativt oppsett kan da være som i figur 10, som viser hvilke delstykker man gjør, hvor man først multipliserer eneren i multiplikatoren med de andre leddene i multiplikanden (markert med rødt), før man så multipliserer tieren i multiplikatoren med de andre leddene i multiplikanden (markert med grønt). Dette kan også representeres gjennom arealmodellen for multiplikasjon (figur 11) som viser hvordan rektangelet blir delt opp etter 70 + 5 og 10 + 2.



Figur 9: Illustrasjon av standardalgoritmen fra Tusen millioner 6A (Rasch-Halvorsen et al., 2007, s. 79)

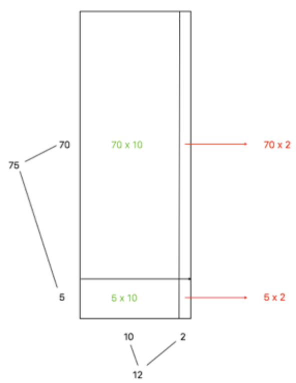
$75 \cdot 12 = (70 + 5) \cdot (10 + 2)$

$(2 \cdot 5) + (2 \cdot 70) = 10 + 140 = 150$

$(10 \cdot 5) + (10 \cdot 70) = 50 + 700 = 750$

$150 + 750 = 900$

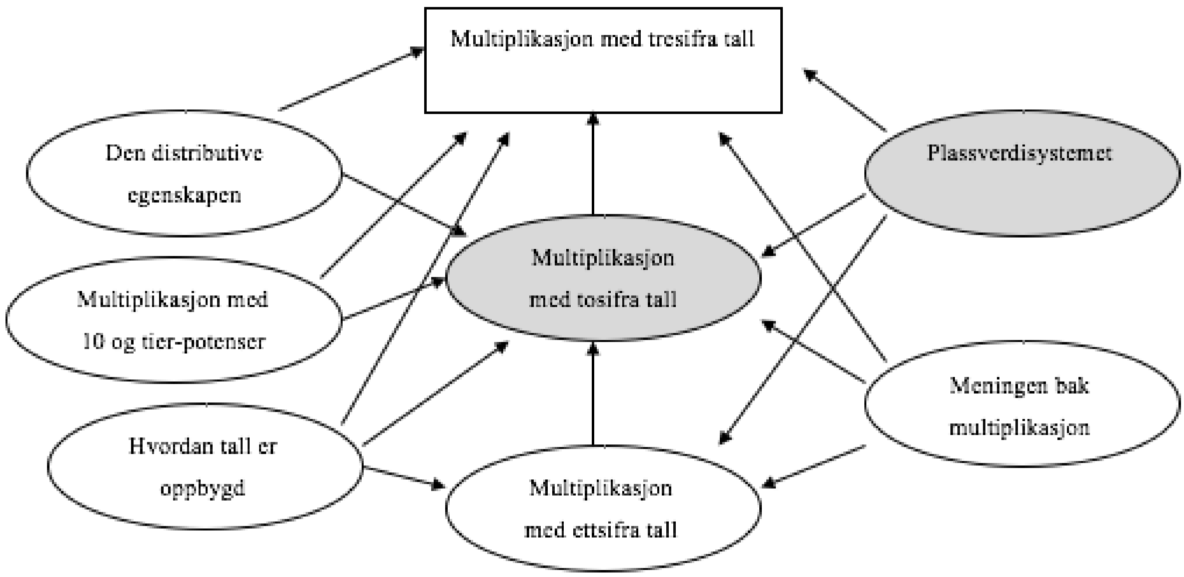
Figur 11: Alternativt oppsett for standardalgoritmen



Figur 10: Arealmodellen som illustrerer den distributive egenskapen ved utregning av 75 · 12

2.4.3. Hva betyr det å forstå multiplikasjon med flersifra tall?

Når man skal gjøre multiplikasjon med flersifra tall, tar man ofte i bruk standardalgoritmen, da den er effektiv for å løse oppgaver med store tall. Ma (2010) har undersøkt hvilken forståelse lærere har for multiplikasjon med flersifra tall og standardalgoritmen, og har ut fra dette utarbeidet en "kunnskapspakke" (oversatt fra knowledge package). I denne kunnskapspakken har hun samlet de begrepene og ideene som lærerne mente at elevene måtte lære i sammenheng med multiplikasjon med tresifra tall gjennom standardalgoritmen:



Figur 12: Kunnskapspakke for multiplikasjon med tresifra tall (Ma, 2010, s. 47 - egen oversettelse)

Figur 8 viser hva lærerne i Mas (2010) undersøkelse mente var det viktigste som inngår i multiplikasjon med tresifra tall, i sammenheng med relaterte matematiske temaer. De temaene som sto seg mest ut var "multiplikasjon med tosifra tall" og "plassverdisystemet" (markert med grått) og lærerne mente at det var disse som var mest viktig for å utvikle en begrepsforståelse. Figuren viser også det lærerne mente var den mest hensiktsmessige fremgangsmåten med tanke på progresjon. Man bør altså starte med multiplikasjon med ettsifra tall, til å gå til to siffer. Når man har forstått disse, kan man gå videre til tre siffer. De mente derfor at det var en fordel med denne progresjonen, da elevene da ville utvikle en bedre forståelse for hvorfor algoritmen fungerer (Ma, 2010).

2.5. Konkretiseringsmateriell

Konkretiseringsmateriell, også kjent som bare konkreter eller materiell, har blitt brukt som hjelpemiddel i matematikkfaget i lang tid, og blir også i dag benyttet i stor grad i matematikkundervisningen (McNeil & Jarvin, 2007). Konkretiseringsmateriell har mange ulike definisjoner, men blir av Moyer (2001, s. 176) definert som ”objects designed to represent explicitly and concretely mathematical ideas that are abstract. They have bot visual and tactile appeal and can be manipulated by learners through hands-on experiences.” Med bakgrunn i denne definisjonen blir konkretiseringsmateriell i denne oppgaven forstått som objekter som er laget for å eksplisitt representere abstrakte matematiske ideer, og som skal appellere til sansene både visuelt og taktilt. Det betyr da at elevene skal kunne, gjennom å manipulere disse objektene, tilegne seg den matematiske meningen som ligger bak. Grunnen til at konkreter har fått så stor plass i matematikkundervisningen er nettopp ved at matematikk regnes som et abstrakt fag, og at man mener at yngre barn ikke er i stand til å håndtere disse matematiske ideene dersom de kun bli representert gjennom ord og symboler (Moyer, 2001). Matematematikkfaget er også spesielt nettopp på grunn av dette, ved at de matematiske objektene og begrepene aldri er tilgjengelig gjennom persepsjon eller instrumenter, og at den eneste måten å få tilgang til dem er gjennom å bruke representasjoner, hvor det vanligste representasjonssystemet i matematikk er symboler (Duval, 2006). Utfordringen hos elevene er derfor når man skrifter representasjonssystem, for eksempel mellom symboler og konkretiseringsmateriell som er to forskjellige systemer, hvor eleven er nødt til å se de samme matematiske begrepene i begge to (Duval, 2004). Overgangen mellom dem må derfor tydeliggjøres, slik at elevene klarer å koble de to opp mot hverandre, å forstå at de representerer det samme matematiske begrepet, hvor man da starter med det konkrete før man går til det mer abstrakte, som vil være symbolene. Prinsippet om å gå fra det konkrete til det symbolske er et gammelt prinsipp, som stammer fra mange forskjellige teoretikere, også Piaget. Han mente at barn ikke har kommet langt nok i den kognitive utviklingen til å forstå de matematiske ideene, dersom de ikke blir representert gjennom konkretiseringsmateriell eller tegning, og at det ikke er før barnet kommer i det formell-operasjonelle stadiet at de klarer å løsrive seg fra det konkrete og løse abstrakte problemer (Elkind, 1970).

Som tidligere nevnt, så hevder Hiebert og Carpenter (1992) at det er en sammenheng mellom de interne og eksterne representasjonene av matematiske begreper. Konkretiseringsmateriell er et eksempel på en ekstern representasjon, i tillegg til for eksempel bilder og symboler. De eksterne representasjonene kan brukes til å vise hvordan man representerer informasjon internt, altså kan man si noe om elevenes interne representasjoner gjennom å se på hvordan de bruker de eksterne representasjonene. Samtidig må de interne representasjonene ha den dynamiske beredskapsfunksjonen (Ostad, 1992) slik at representasjonen er utviklet på en måte slik at man kan bruke den til å løse en rekke forskjellige oppgaver og typer av oppgaver, også med ulik type eksterne representasjoner. Representasjonen vil da være *lett*, eleven vil utvikle en begrepsforståelse for det aktuelle matematiske begrepet som er på det *reflekterende nivået* (Hiebert & Lefevre, 1986) og kunnskapen vil være overførbar til andre representasjoner og ikke være knyttet til selve konkretiseringsmateriellet. Dersom eleven utvikler en *tung* forestilling så vil den interne representasjonen være forankret i materiellet (Ostad, 1992) og eleven vil kun utvikle en forståelse som er på det *første nivået* (Hiebert & Lefevre, 1986).

Den hyppige bruken av konkretiseringsmateriell har resultert i at det er et tema som er mye forsket på. Mange forskjellige forskere hat tatt for seg forskjellig konkretiseringsmateriell og hovedsakelig undersøkt effekten ved bruk og ikke bruk (Thompson, 1992). På bakgrunn av dette har dette har det også blitt gjort store metaanalyser av forskningen som finnes, som er viser at effekten ved bruk av konkretiseringsmateriell er tvetydig (Sowell, 1989; Carbonneau et al., 2013). I undersøkelsen gjort av Sowell (1989) ble det gjort en metaanalyse av 60 studier og resultatene viste ingenting om hvilke situasjoner det var mest hensiktsmessig å bruke konkretiseringsmateriell eller hvilke konkretiseringsmateriell som passet best i ulike situasjoner. Det man derimot kunne se ut fra de 60 studiene var at læringsutbytte økte dersom man benyttet seg av konkretiseringsmateriell over lengre tid og at elevenes holdninger til matematikk ble forbedret når man brukte det. I Carbonneau et al. (2013) sin studie undersøkte de 55 andre studier som sammenlignet undervisning med materiell, med undervisning som kun besto av abstrakte matematiske symboler. Resultatene deres viste en liten til moderat effekt i fordel for undervisning som ble gjennomført med konkretiseringsmateriell, men samtidig at resultatene ikke kan bli brukt som evidens for at konkretiseringsmateriell er fordelaktig for læring når man sammenligner med andre undervisningsmetoder. En av grunnen til at resultatene er tvetydig kan være at man kun sammenligner effekten ved bruk og ikke bruk, og ikke tar hensyn til alle andre elementene som inngår i matematikkundervisningen, og at forskningen undersøker forskjellige ting. En av disse elementene, og som spiller en veldig stor rolle, er læreren.

Moyer (2001) har undersøkt hvordan lærere bruker konkretiseringsmateriell i sin undervisning og hvorfor de tar det i bruk. Der kommer det frem at lærerne i denne studien bruker konkretiseringsmateriell som både et avvekslende element, eller at de bruker det som et underholdende element hvor det skal være ”morsomt” for elevene, men at det ikke er nødvendig for at elevene skal lære matematikk. En annen utfordring med lærerne ser ut til å være at de allerede kjenner til det matematiske begrepet som ligger i konkretene, og derfor tar for gitt at elevene også ser det og dermed tror at materiellet er gjennomsiktig. Utfordringen med at læreren og eleven ser forskjellige ting i materiellet har blitt betegnet som ”læringsparadokset” (oversatt fra the learning paradox) (Bereiter, 1985), som kan beskrives med et konstruktivistisk utgangspunkt, hvor man tolker nye representasjoner eller informasjon ved hjelp av de representasjonene eller skjemaene man allerede har internt (Hiebert & Carpenter, 1992). Dersom eleven ikke har utviklet en forståelse for det matematiske begrepet på forhånd, så vil ikke dette komme tydelig frem i den eksterne representasjonen, og læreren vil derfor «se» matematikken, mens eleven ikke gjør det (Bereiter, 1985). Dette gjør også at eleven kan tolke materiellet annerledes enn læreren, da man har ulike forutsetninger og ulike interne representasjoner, som kan sees i sammenheng med Balls (1992) sammenligning av konkretiseringsmateriell og støttehjul. Læreren kan altså også tro at eleven har forstått det matematiske begrepet, ved at eleven klarer å gjøre prosedyren på materiellet, men at når det tas vekk, så har eleven enten ikke forstått eller misforstått det matematiske begrepet.

Laski, Jor'dan, Doust og Murray (2015) har i sin artikkel gjort en litteraturstudie omkring konkretiseringsmateriell i sammenheng med kognitiv vitenskap og kommet frem til fire prinsipper som skal øke effekten ved bruken av materiell. Det første prinsippet handler om at man er nødt til å bruke materiellet konsekvent over lang tid, og det på grunn barn, spesielt yngre barn, trenger tid for å se relasjonen mellom materiellet og det abstrakte matematiske begrepet det representerer (Laski et al., 2015). Dette stemmer overens med Sowells (1989) forskning som også fant at elevene fikk et økt læringsutbytte dersom de brukte materiellet i ett år eller lengre. Det andre prinsippet sier at man bør begynne med et materiell som er transparent og gjennomsiktig, og gradvis bevege seg over i mer abstrakte representasjoner. Begrepene *transparent* og *gjennomsiktig* handler om hvorvidt de materielle egenskapene til et konkretiseringsmateriell korresponderer med det matematiske begrepet eller temaet (Meira, 1998). Dersom konkretiseringsmateriellet består av mye overflødige detaljer som ikke kan relateres til det gitte matematiske begrepet som det er laget for, så vil ikke materiellet være gjennomsiktig og transparent. Det tredje prinsippet er at man skal unngå å bruke konkretiseringsmateriell som ligner på hverdagslige objekter som har forstyrrende egenskaper (Laski et al., 2015). Dette kan ses i sammenheng med forskningen gjort av McNeil et al. (2009) som fant at jo mer perseptuelt rik materiellet var, jo mer feil svarte elevene på oppgavene som de ble gitt. Det siste prinsippet er at man eksplisitt må forklare relasjonen mellom materiellet og det matematiske begrepet, da det ifølge Laski et al. (2015) er urimelig å forvente a yngre barn ser relasjonen mellom dem uten veiledning.

På bakgrunn av at jeg i denne undersøkelsen ser på hvilken forståelse for multiplikasjon elevene viser i arbeidet med konkretiseringsmateriellet sjakkbrettet, så har jeg i dette delkapittelet tatt for meg hva konkretiseringsmateriell er og hva det består av, og ulike synspunkt for hvordan elever utvikler en forståelse ved hjelp av det. Dette er relevant for min studie, da jeg i analysekapittelet vil analysere sjakkbrettet, hvor jeg ser på hvilke matematiske begreper som sjakkbrettet består av og som det er meningen elevene skal utvikle en forståelse for. Dette vil videre bli diskutert i drøftingskapittelet, hvor jeg ser på muligheter og utfordringer i forbindelse med materiellet.

3. METODISKE VALG

I denne studien undersøker jeg elevers arbeid med konkretiseringsmateriellet sjakkbrettet ved en Montessoriskole. I dette kapittelet presenterer jeg metodene jeg har benyttet meg av for innsamling av datamateriale og analyse, og jeg vil begrunne valgene jeg har tatt i forbindelse med innsamling, bearbeidelse og analyse av datamaterialet mitt. Jeg vil også beskrive utvalget og selve gjennomføringen av undersøkelsen, før jeg til slutt vil se på studiens troverdighet og kvalitet i sammenheng med validitet, reliabilitet og etikk.

3.1. Forskningsdesign

Hensikten med denne undersøkelsen er å få innsikt i hvordan arbeid med et konkretiseringsmateriell kan legge til rette for en forståelse for multiplikasjon, hvor forskningsspørsmålet som ble stilt innledningsvis var: *Hvilken forståelse for multiplikasjon viser de utvalgte elevene i arbeidet med sjakkbrettet?* Med bakgrunn i dette spørsmålet fant jeg det naturlig å velge en kvalitativ forskningsmetode for innsamling av data, da det er forskningsspørsmålet som i størst grad styrer og er avgjørende for hvilken metode som vil være mest hensiktsmessig (Postholm & Jacobsen, 2011). Spørsmålet gir en kvalitativ retning på oppgaven på grunn av at jeg ønsker å si noe om elevenes forståelse, som i dette tilfellet vil komme til syne gjennom elevenes utsagn og handlinger på sjakkbrettet. Videre antar jeg at sjakkbrettet kan si noe om hvordan elevene representerer kunnskap internt (Hiebert & Carpenter, 1992). Kvalitativ forskning er karakterisert ved at man ønsker å få frem informasjon gjennom verbale-, observerbare-, taktile- og gestikulerende kilder, hvor man går i dybden for å forstå kildenes meninger, holdninger og handlinger (Cohen, Manion & Morrison, 2011). På bakgrunn av at elevenes form for forståelse kan komme til uttrykk i både utsagn og handlinger, fant jeg det mest hensiktsmessig å en metode hvor jeg kunne både observere elevene, men også ha en samtale med dem. I min studie valgte jeg derfor å både observere elevenes arbeid med sjakkbrettet, men også å intervjue sju av dem, slik at jeg var sikker på at dersom elevene hadde enten en prosedyre- eller begrepsforståelse, så ville den komme til syne.

En kvalitativ metode er også en mer fleksibel tilnærming og den tillater større grad av spontanitet og tilpasning i interaksjonen mellom forsker og deltaker, sammenlignet med en kvantitativ metode (Christoffersen & Johannessen, 2012). Dette var viktig i min studie da jeg ønsket å bruke observasjonene til å tilpasse intervju med elevene. Ved å bruke de to ulike innsamlingsmetodene fikk jeg også gjennom observasjonene mulighet til å se om elevene hadde en prosedyreforståelse og gjennom å stille spørsmål i så kunne jeg få frem om en elev hadde begrepsforståelse for multiplikasjon. For å se om en elev hadde prosedyreforståelse for multiplikasjon var det tilstrekkelig å se om eleven klarte å gjennomføre oppgavene på sjakkbrettet og få korrekt svar, mens det med begrepsforståelse var nødvendig å stille spørsmål til handlingene de gjorde på sjakkbrettet. Det på grunn av at begrepsforståelse vil være kunnskap som er sterkt knyttet til annen kunnskap, og som ikke vil komme til syne gjennom å bare observere elevenes arbeid, men gjennom at elevene forklarer hva de gjør og hvorfor de gjør det de gjør. Jeg vil videre gjøre rede observasjon og intervju som metoder, før jeg videre ser på bruk av konkretiseringsmateriell i undersøkelsen.

3.1.1. Observasjon

For å få bedre innsikt i hvordan elevene arbeidet med sjakkbrettet og deres prosedyreforståelse, valgte jeg å ta i bruk *observasjon* som en av mine datainnsamlingsmetoder. Ved observasjon så fokuserer man i hovedsak på *handlinger* og det mennesker gjør (Postholm & Jacobsen, 2011) og i dette tilfellet var det elevenes handlinger på sjakkbrettet som ble observert. Jeg tok rollen som *deltakende observatør*, som innebærer at jeg ikke er et medlem av gruppen, men som likevel tar del i aktivitetene som gruppen gjennomfører (Gold, 1958; Cohen et al., 2011). Jeg tok del i aktivitetene gjennom at jeg satt sammen med elevene når de arbeidet med sjakkbrettet og stilte spørsmål som oppsto underveis. Samtidig holdet jeg litt avstand slik at elevene skulle henvende seg til læreren dersom det oppsto spørsmål eller de behøvde hjelp til noe. Jeg ønsket heller ikke å stille for mange spørsmål, da det kunne forstyrre elevene og påvirke situasjonen i for stor grad. Jeg var også tilstedeværende i arbeidsøktene hvor elevene ikke arbeidet med sjakkbrettet og satt også sammen med dem da, og det for at de skulle bli kjent med meg og min rolle. Ifølge Fangen (2004) så er observasjon den minst påtrengende innsamlingsmetoden, da man ikke skaper en situasjon som er ukjent for elevene, og de får jobbe med konkretiseringsmateriellet i den naturlige settingen som de gjør til vanlig. Gjennom at jeg hele tiden var tilstedeværende og snakket med elevene ble de også bedre kjent med meg og hensikten med mitt opphold, noe som gjorde situasjonen mindre skremmende (Gold, 1958).

Når elevene valgte å jobbe med sjakkbrettet fikk jeg mulighet til å observere deres aktivitet på nært hold, stille spørsmål og se hvordan de arbeidet med det på en naturlig måte. Med en naturlig måte menes her at elevene jobbet med sjakkbrettet på en måte som de ville gjort i en hvilken som helst arbeidsøkt. Observasjonene var også *ustrukturerte*, som betyr at man går inn i situasjonen og observerer det som skjer, før man avgjør om det vil være avgjørende for forskningen (Cohen et al., 2011). Da det var elevenes forståelse jeg ønsket å se på, var det i hovedsak det som styrte mine observasjoner. Blant annet kunne jeg avgjøre om jeg fikk et godt innsyn i elevenes prosedyreforståelse ved å kun se på elevenes handlinger, eller om det også her var nødvendig å stille spørsmål angående den forståelsen også. Simpson og Tuson (2003) kaller dette å observere uten en plan, hvor man som forsker går inn i situasjonen med et så åpent sinn som mulig, med kun forskningsspørsmålet om utgangspunkt, og videre avgjør hva som er de neste stegene i forskningen. Jeg kunne her bruke observasjonene til å avgjøre hvilke spørsmål jeg ønsket å stille i intervjuet, og jeg var også bedre forberedt for hva som kom til å skje når elevene arbeidet med sjakkbrettet i intervjusituasjonen.

3.1.2. Intervju

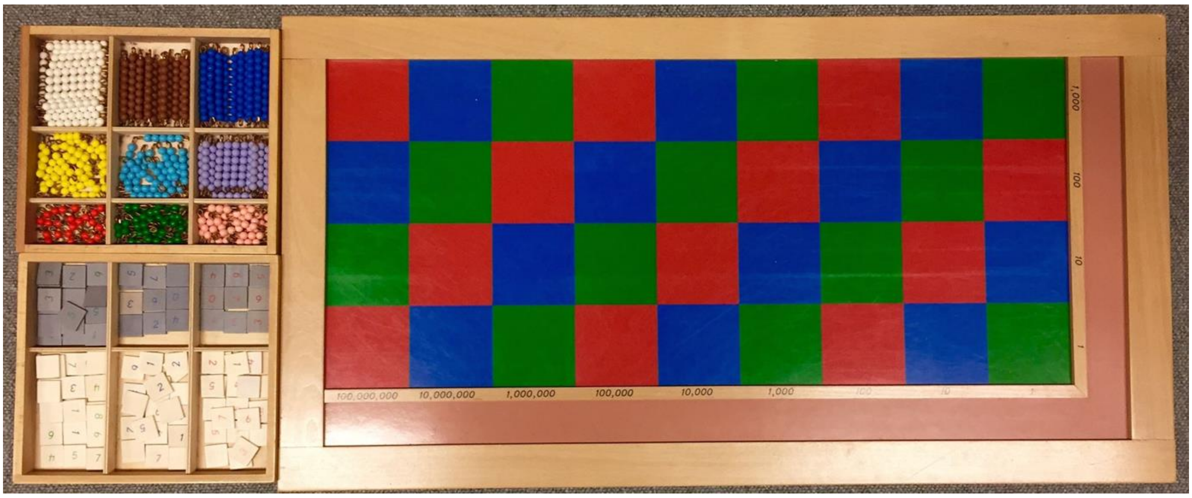
I tillegg til få bedre innsikt i hvordan elevene arbeidet med sjakkbrettet i en naturlig setting og observere deres handlinger på sjakkbrettet, så ønsket jeg også å vite hvordan de tenkte når de arbeidet med materiellet. Jeg valgte derfor å bruke *intervju* som min primære datainnsamlingsmetode og det på bakgrunn av at jeg da ville få mulighet til å få et bedre innsyn i hvilken forståelse for multiplikasjon elevene tok i bruk i arbeidet. Cohen et al. (2011) skriver at ”Interviews enable participants – be they interviewers or interviewees – to discuss their interpretations of the world in which they live, and to express how they regard situations from their own point of view” (s. 409). Et kvalitativt forskningsintervju gir altså forskeren mulighet til å få innsyn i deltakernes forståelse og oppfattelse av verden, og at man gjennom intervjuet kan få deltakerne til å beskrive opplevelsene sine. Videre kan man forsøke å skape mening og forståelse om emnet man undersøker gjennom å analysere deltakernes utsagn (Kvale & Brinkmann, 2015). Jeg valgte å gjennomføre det som kalles semi-strukturerte intervju, hvor tre av disse var med enkeltelever og to var gruppeintervjuer med to elever i hver gruppe. At intervjuet var semi-struktuert innebærer at det verken er en helt åpen samtale eller en lukket spørreskjemasamtale, men at man tar utgangspunkt i en intervjuguide (Kvale & Brinkmann, 2015). Jeg lagde derfor en intervjuguide i forkant av undersøkelsen, som ble tilpasset etter de observasjonene jeg gjorde meg (se vedlegg 2).

Intervjuguiden ble utviklet med bakgrunn i at jeg skulle fokusere på elevenes arbeid med sjakkbrettet og prøve å få frem hvilken forståelse de hadde for multiplikasjon. Jeg tok da utgangspunkt i en analyse jeg gjordeav sjakkbrettet, hvor det kom frem hvilke matematiske begreper som lå i materiellet, og utarbeidet noen stikkord som jeg ønsket å rette spørsmålene mine mot. Dette kunne være stikkord som for eksempel plassverdisystemet, den distributive egenskapen eller hva trappa i oppsettet betyr, der målet var å undersøke om elevene hadde en begrepsforståelse eller prosedyreforståelse for disse. Dette ble da ett av mine tre temaer i intervjuguiden som fokuserte på ”arbeid med sjakkbrettet”, hvor de to andre var rettet mot ”eleven på skolen” og ”sjakkbrettet”. Spørsmålene som var rettet mot ”eleven på skolen” var *introduksjonsspørsmål* (Kvale & Brinkmann, 2015) som ikke omhandlet verken sjakkbrettet eller multiplikasjon, men som var rettet mot elevenes holdninger til skole og matematikk. Grunnen til at jeg ønsket å stille disse spørsmålene var for å bli bedre kjent med elevene og at vi kunne ha en uformell samtale om hvordan de synes det er å gå på skolen, slik at situasjonen ble mer avslappet. Det neste temaet omhandlet ”sjakkbrettet” som var generelle spørsmål om elevenes holdninger og erfaringer med sjakkbrettet og om de liker å bruke det. Dette var *strukturerende spørsmål* (Kvale & Brinkmann, 2015), og selv om det ikke var dette jeg undersøkte, så ble disse brukt som en inngang til arbeidet med sjakkbrettet. Jeg valgte også å spørre alle elevene om de kunne forklare hva de gjorde på sjakkbrettet underveis, slik at jeg kunne stille oppfølgingsspørsmål til de handlingene de utførte på sjakkbrettet. Intervjuene var derfor kontrollert, men samtidig åpen for spontanitet, og elevenes utsagn kunne bli utdypet ved hjelp av mine spørsmål (Cohen et al., 2011).

3.1.3. Bruk av konkretiseringsmateriell i undersøkelsen

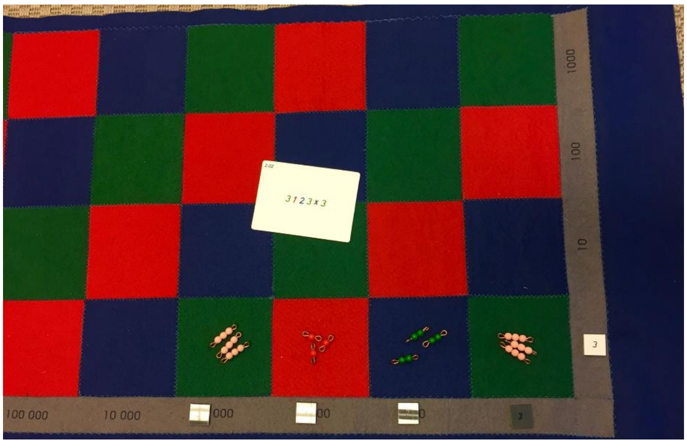
Konkretiseringsmateriell er, som nevnt i teorikapittelet, en ekstern representasjon som kan hjelpe en å si noe om elevenes interne representasjoner og derfor også noe om elevens matematiske forståelse (Hiebert & Carpenter, 1992). Materiellet representerer abstrakte matematiske ideer og begreper, og elevene skal ved å manipulere disse kunne tilegne seg den matematiske meningen som ligger bak. I denne studien har jeg valgt å se på elevenes arbeid med et slikt materiell, og jeg undersøker hvilken forståelse for multiplikasjon de viser i arbeidet.

Det valgte konkretiseringsmateriellet *sjakkbrettet* (oversatt fra Montessori Checkerboard for Multiplication) er et materiell som blir mye brukt i montessoriskoler og som ble valgt på bakgrunn av at det er et av de materiellene som blir brukt over en lengre periode. Elevene blir introdusert til det i 3.klasse og det blir brukt helt til elevene går i 7.klasse. Dermed kunne jeg også studere elever fra forskjellige trinn og se om det var noe forskjell i deres forståelse. Sjakkbrettet er ett av mange matematikkmateriell som tar for seg regnearten multiplikasjon og det er derfor også viktig å presisere at elevene også bruker annet materiell for å lære multiplikasjon. Sammenhengen mellom sjakkbrettet og annet materiell er ikke beskrevet i litteraturen, men utarbeides i montessoriutdanningen, hvor lærerne som tar denne utdanningen utarbeider dokumenter som skal vise dette. Der står også hensikten med de ulike materiellene og hvordan materiellet er selvkorrigerende. På disse beskrivelsene står det at sjakkbrettet brukes i forlengelse av et materiell som er en stor perleramme for multiplikasjon (oversatt fra compound multiplication with large bead frame), og i forkant av et materiell som omhandler geometrisk multiplikasjon (oversatt fra geometric multiplication).



Figur 13: Bilde av Montessori sjakkbrett med treramme

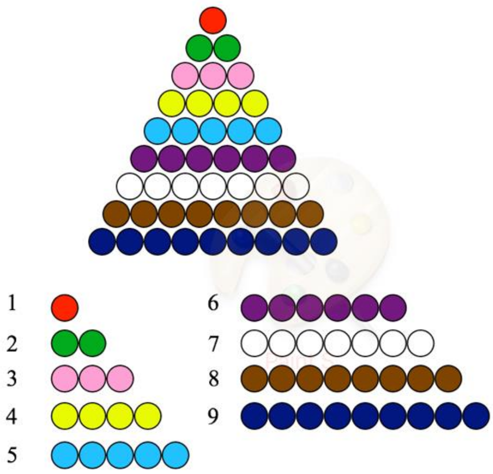
Sjakkbrettet består enten av en stor treramme (se figur 13) eller et lappeteppe (se figur 14) med forskjellige fargekodede firkanter. Fargekodene på firkantene representerer ulike plassverdier, som er gjennomgående i alt matematikkmateriellet i montessoriopplæringen. Det vil si at fargene grønn, blå og rød i alt materiellet representerer henholdsvis enere, tiere, hundrere, hvor det på tusen igjen starter med grønn, titusen blå og hundre tusen rød og så videre. Disse fargene blir også brukt i tallbrikkene (se figur 14) som legges ut for å vise hvilket tall som skal representeres på sjakkbrettet, eller hvilket multiplikasjonsstykke som skal løses, der multiplikanden blir representert med de hvite tallbrikkene og multiplikatoren med de grå. I tillegg består sjakkbrettet av perlestenger (se øverst til venstre på figur 13) som skal representere sifrene på sjakkbrettet.



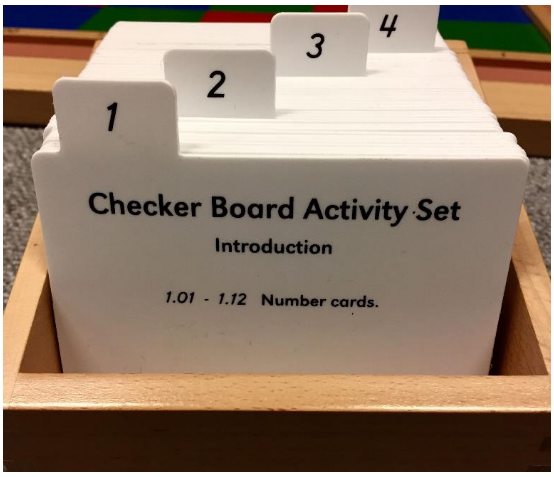
Figur 15: Bilde av Montessori sjakkbrett med lappeteppe

Figur 14: Bilde av tallbrikkene med fargekoder

Perlestengene er også fargekodet, slik at for eksempel femmeren består av fem lyseblå sammenhengende perler og sjuere består av hvite perle (se figur 16). Disse blir også brukt i andre sammenhenger, med annet matematikkmateriell, slik at elevene skal bli kjent med fargene og etterhvert slipper å telle perlene. Den siste komponenten som følger med sjakkbrettet er oppgavekortene (se figur 17). Her er oppgavene nivådelt i fire nivåer (se vedlegg 5) og tar for seg ulike matematiske ideer, som jeg vil gå nærmere innpå i analysen av sjakkbrettet i kapittel 4.



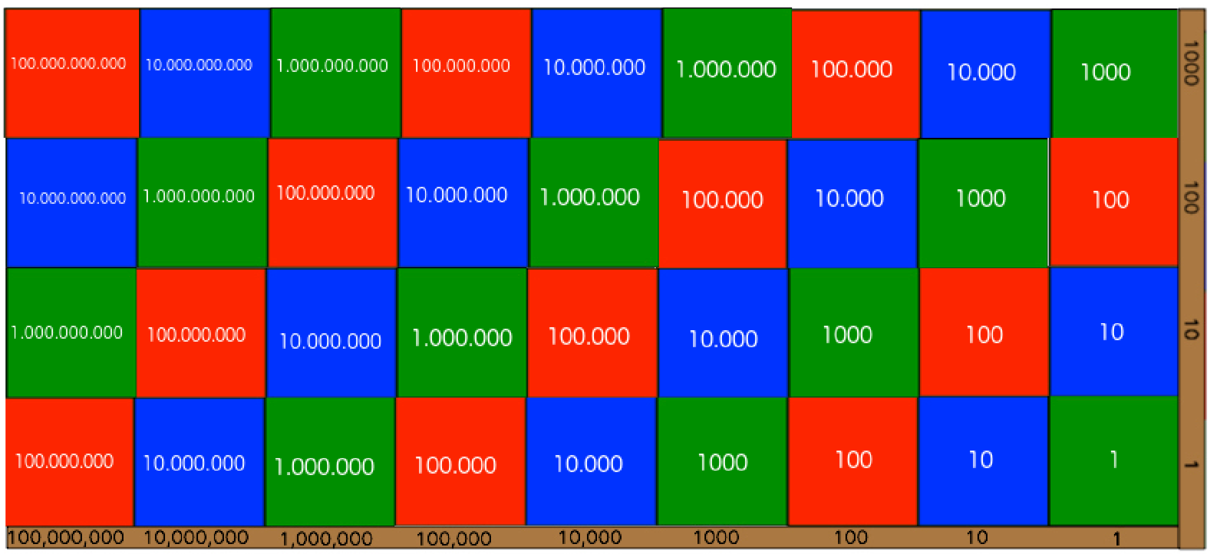
Figur 16: Illustrasjon av perlestengene og tilhørende siffer



Figur 17: Bilde av oppgavekortene som følger med sjakkbrettet

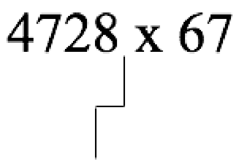
Når en elev skal begynne å bruke et konkretiseringsmateriell i montessoriopplæringen, må han først få en *presentasjon* av det, av en lærer. Læreren viser da eleven hvordan det skal brukes, helst med så få ord som mulig for at materiellet skal tale for seg selv (Montessori, 2008). Læreren viser først noen oppgaver, før eleven får gjøre noen mens læreren observerer. Når læreren ser at eleven kan bruke materiellet, trekker han eller hun seg unna og lar eleven fortsette å arbeide med oppgaver alene. Oppgavekortene til sjakkbrettet består, som tidligere nevnt, av forskjellige oppgaver, men på baksiden står også løsningen slik at eleven selv kan sjekke om han har kommet fram til riktig løsning. Oppgavekortene er også på engelsk, slik at multiplikasjonstegnet representeres med ”x” i stedet for ”·”. Presentasjonen av sjakkbrettet deles opp i to hvor det først er en introduksjon til sjakkbrettet hvor hensikten er at eleven ”skal øve på multiplikasjon” og ”øve på titallsystemet”. I den andre presentasjonen skal det handle om sammensatt multiplikasjon (oversatt fra compound multiplication) hvor hensikten er at eleven skal ”øve på multiplikasjon med store tall” og ”øve på titallsystemet”.

Sjakkbrettet er også basert på plassverdisystemet, ved at rutene øker med tier-potenser fra venstre til høyre, i likhet med slik vi skriver tallene. Videre er sjakkbrettet todimensjonalt, slik at det også økes med tier-potenser vertikalt på brettet. Verdien på rutene blir da seende slik ut:



Figur 18: Illustrasjon av plassverdisystemet på sjakkbrettet og hvilken verdi hver rute har

Gjennom arbeidet med sjakkbrettet skal elevene lære seg det som kalles for et *oppsett*. Oppsettet fungerer på samme måte som standardalgoritmen, men de benytter seg her av det de kaller for en trapp. Skal elevene løse oppgaven 4.01 fra oppgavekortene som er regnestykket 4728 x 67, starter de med å skrive ned stykket i boka og lager trappen slik som på figur 19. Når man multipliserer alle leddene i multiplikanden med det første leddet i multiplikatoren, som er enerne, vil tallene plasseres under sifrene med samme verdi som verdien på sifrene i multiplikanden. Trappa hjelper derfor til på neste steg å hoppe over verdien 1, da man ikke vil få et tall med verdi 1 når man multipliserer alle leddene i multiplikanden med det andre leddet i multiplikatoren, som i stedet vil være tierne.



Figur 19: Illustrasjon av oppsettet med trappa

3.2. Konteksten til studien og utvalg

I forkant av undersøkelsen tok jeg kontakt med tre montessoriskoler angående deltakelse i min studie og fikk positive svar fra to. Jeg valgte å gjennomføre datainnsamlingen på én av skolene, hvor den valgte skolen var en godt etablert montessoriskole som ble opprettet for over 15 år siden. Skolen var tidligere en grendeskole som ble lagt ned, før det ble tatt initiativ til å opprette en privatskole med Montessoripedagogikk som utgangpunkt. På bakgrunn av den informasjonen jeg mottok fra rektor og en lærer, var det hensiktsmessig å gjennomføre mine undersøkelser med elever fra 3.-7.trinn da det var disse klassene (3.-4.klasse og 5.-7.klasse) som hadde tilgang til og benyttet seg av det valgte konkretiseringsmateriellet. Valget av deltakere var kriteriebasert (Cohen et al., 2011), da jeg ønsket at deltakerne hadde jobbet med sjakkbrettet tidligere. Slik slapp de å få en helt ny presentasjon av lærer, noe som ville ha vært tidkrevende. Jeg utarbeidet et informasjonsskriv og samtykkeskjema (se vedlegg 3) som ble sendt til mine kontaktpersoner ved skolen og som videre delte ut disse til alle elevene ved 3.-7.trinn. I samtykkeskjemaet tok elevene stilling til, i samhandling med foreldre/foresatte, om de samtykket til observasjon, intervju og/eller innsamling av elevarbeid. I 3. og 4.klasse var det 13 av 19 elever som samtykket til deltakelse, der 12 samtykket til observasjon og intervju, og 14 samtykket til innsamling av elevarbeid. I 5.-7.klasse var det 12 av 20 elever som samtykket til deltakelse, der 12 samtykket til observasjon, 10 til intervju og 9 til innsamling av elevarbeid.

I 7.klasse var det kun 2 elever som samtykket til deltakelse, men disse elevene brukte ikke lengre sjakkbrettet og benyttet seg kun av oppsettet, og de ønsket heller ikke å delta når jeg gjennomførte min undersøkelse. Det var også flere av elevene fra de andre klassene som ikke ønsket å delta når jeg gjennomførte min undersøkelse, så det ble igjen valgt ut fra hvem som ønsket å delta og hvem som hadde arbeidet med sjakkbrettet tidligere. I utgangspunktet ønsket jeg å intervjue elevene individuelt, men etter å ha gjort enkeltintervju med elevene fra 3. og 4.klasse valgte jeg å endre min fremgangsmåte og gjennomføre gruppeintervju. Dette gjorde jeg på grunn av at det ble for tidkrevende å gjennomføre enkeltintervju og jeg ønsket å samle inn datamateriale fra så mange deltakere som mulig for å styrke studiens validitet, da så mange deltakere som mulig vil gi meg en bedre kunnskap om elevenes forståelse og støtte kvaliteten på studien (Kvale & Brinkmann, 2015).

3.3. Gjennomføring av datainnsamlingen

I forkant av min undersøkelse valgte jeg å gjennomføre en forundersøkelse ved en annen Montessoriskole. Dette gjorde jeg for å bli bedre kjent med Montessoripedagogikken, som var relativt ny for meg, og for å finne ut hvilket konkretiseringsmateriell jeg ønsket å se nærmere på. Ved dette besøket fikk jeg observert flere elever med forskjellig matematikkmateriell og etter besøket falt valget på å se på sjakkbrettet på bakgrunn av det var et konkretiseringsmateriell som elevene tok i bruk på eget initiativ og som flere lærere omtalte som et spennende og lærerikt materiell. Etter denne forundersøkelsen ble jeg også bedre kjent med hvordan elevene ved en montessoriskole arbeider og jeg kunne planlegge bedre hvordan jeg skulle gjennomføre min hovedundersøkelse ved den andre skolen.

Hovedundersøkelsen ble gjennomført i løpet av fem etterfølgende dager hvor elevene hadde vanlige arbeidsøkter. Jeg fikk i begge klassene mulighet til å introdusere meg og min studie, slik at elevene visste hensikten med mitt besøk. De to første dagene ble kun brukt til observasjoner, slik at elevene skulle bli vant med min tilstedeværelse. I observasjonene av elevenes arbeid med sjakkbrettet, var det også viktig at datainnsamlingen skjedde så naturlig som mulig og jeg oppfordret derfor ingen av elevene til å arbeide med sjakkbrettet uten at de ønsket det selv. Når noen elever valgte å jobbe med sjakkbrettet, så noterte jeg klokkeslett, hvilke oppgaver de gjorde, hva de gjorde på sjakkbrettet og andre ting som utpekte seg eller som jeg kunne bruke i intervjuguiden. Intervjuene ble gjennomført i løpet av de tre gjenværende dagene, hvor de foregikk på et eget rom i nærheten av klasserommene. Varigheten på intervjuene varierte etter hvor mye tid vi hadde til rådighet av arbeidsøkta, eller så lenge som elevene(e) viste at de klarte å konsentrere seg og intervjuene varte mellom 18 til 46 minutter. Ved hvert intervju ble elevene på nytt informert om hensikten med studien, hva det var jeg undersøkte, hva som skjedde med informasjonen og det ble gjort tydelig at de kunne trekke seg på et hvilket som helst tidspunkt om de ønsket det.

For å samle inn datamaterialet ble det i intervjuene tatt i bruk lyd- og videoopptak, mens det i observasjonene kun ble gjort notater. Det var også ønskelig å bruke lyd- og videoopptak i observasjonene, men dette ble ikke mulig da flere av elevene i klassene ikke hadde samtykket til deltakelse, og jeg kunne ikke sikre at de ikke ble med på opptakene. Når man observerer er det lett å være selektiv og observasjonene avhenger i stor grad av forskerens oppmerksomhet (Cohen et al., 2011). Man er nødt til å notere både det som skjer verbalt og visuelt på en gang, og det er da lett å gå glipp av hendelser som skjer. Uten lyd- og videoopptak kunne jeg derfor miste verdifull data. For å fokusere observasjonene og oppmerksomheten min valgte jeg derfor å notere kun det visuelle, altså handlingene elevene gjorde på sjakkbrettet, og ikke det verbale. I intervjuet ønsket jeg å ta i bruk lyd- og videoopptak for å fange opp både det elevene sa, men også i tillegg få med meg det som foregikk på sjakkbrettet til enhver tid. Som Simpson og Tuson sier så tilbyr videoopptak ”a relatively ’unfiltered’ record of all behaviours and transactions which accour in front of the camera, and a permanent, detailed record is provided” (s. 51). Det betyr at man får med seg mange detaljer og handlinger som skjer og at man i tillegg kan se opptakene om og om igjen, og sikre seg at man ikke går glipp av noe. Uten videoopptak ville det vært umulig å si noe om elevenes arbeid på sjakkbrettet da aktiviteten innebærer mange handlinger. Opptak styrket også reliabiliteten på datamaterialet, da det hadde vært utfordrende å notere alt elevene gjorde underveis i intervjuet og jeg hadde måttet stole på min hukommelse (Cohen et al., 2011). I tillegg til et GoPro-kamera som tok videoopptak av elevens arbeid på sjakkbrettet, gjorde jeg også lydopptak av elevenes utsagn. Dette for å sikre god kvalitet til den senere transkriberingen.

3.4. Kvalitet i studien

Kvalitative studier er alltid påvirket av forskerens forforståelse og det er derfor viktig å synliggjøre sin egen subjektivitet og de valgene som er tatt gjennom studien, noe som videre sikrer studiens troverdighet (Nilssen, 2012). Validitet i kvalitativ forskning handler om at forskningsprosessen må dokumenteres på en slik måte at fortolkninger og funn gir mening i lys av det innsamlede materialet. Cohen et al. (2011) skiller mellom to typer validitet, nemlig intern og ekstern validitet. Førstnevnte handler i hovedsak om at man klarer å vise at funnene kan opprettholdes av dataene. Det vil si at hele prosessen må være så gjennomsiktig at resultatene og konklusjonene er åpenbar (Kvale & Brinkmann, 2015). Den sistnevnte handler om hvorvidt resultatene kan generaliseres og at funnene kan overføres til andre situasjoner (Cohen et al., 2011). I småskala studier vil det ikke være mulig å si at resultatene kan bli generalisert globalt, men at det her vil handle om at kunnskapen som produseres i en spesifikk situasjon kan overføres til andre relevante situasjoner (Kvale & Brinkmann, 2015). Validitet handler altså om i hvilken grad en metode undersøker det den er ment å undersøke, og om funnene reflekterer det vi ønsker å vite noe om.

Reliabilitet i kvalitativ forskning handler om hvorvidt studien er pålitelig, konsistent og replikabel og om at den er så gjennomsiktig at hvis den utføres på en lignende gruppe i en lignende kontekst, så vil man finne lignende resultater (Cohen et al., 2011). I sammenheng med dette kan man møte på utfordringer i forbindelse med forskerens forforståelse og også tilstedeværelse. Forskerens forforståelse handler om hva forskeren sitter inne med av ferdigheter og kunnskap og Postholm og Jacobsen (2011) kaller dette for den individuelle, subjektive teorien. Denne teorien er hva en person har opplevd, erfart og teorier som han har tilegnet seg, som videre vil påvirke personens valg og handlinger. Observasjonene jeg gjorde i min studie ble, som tidligere nevnt, ikke støttet av lyd- og videoopptak og notatene jeg gjorde ble derfor i stor grad påvirket av min forforståelse da jeg skrev ned disse på bakgrunn av mine tolkninger av situasjonen. Samtidig prøvde jeg å forholde meg nøytral og kun skrive ned det som skjedde på sjakkbrettet, i tillegg til praktiske ting som tidspunktet på observasjonene og oppgavene som ble gjort, hvor jeg ikke trengte å tolke så mye underveis. Utfordringen med forskerens tilstedeværelse handler om reaktivitet, hvor elevene kan endre oppførselen når de vet at de blir enten observert eller under intervjuet, for å prøve å handle slik som de tror at forskeren vil at de skal handle, eller at de prøver mye hardere (Cohen et al., 2011). Ved å bruke to forskjellige innsamlingsmetoder i min studie, noe som også kalles *metodetriangulering* (Cohen et al., 2011), kunne jeg bruke observasjonen som en supplerende metode til intervjuet, hvor jeg også kunne sammenligne de to forskjellige datamaterialene for å gjøre en virkelighetssjekk. Det handler om at jeg i etterkant av innsamlingen kunne sammenligne de to forskjellige datamaterialene for å se om elevene gjør (observasjon) det de sier at de gjør (intervju), da det er vanlig å si at man gjør noe, for så å gjøre noe annet (Robson, 2002). Jeg kunne også bruke det til å se om elevene ble påvirket av intervjusituasjonen, da observasjonene skjedde i en mer naturlig setting, og se om det var noe forskjell i deres arbeid med sjakkbrettet i de to forskjellige situasjonene. Metodetrianguleringen sikret også validiteten og reliabiliteten på studien min, da det ga meg et bilde av elevenes arbeid med sjakkbrettet som var så virkelighetsnær og sann som mulig og det ble ikke gitt et bilde av arbeidet som var feilaktig (Cohen et al., 2011; Nilssen, 2012).

3.5. Etiske betraktninger

I en kvalitativ forskningsmetode blir en stor del av datamaterialet konstruert i samspill mellom forskeren og deltakerne (Nilssen, 2012), og relasjonen og nærheten mellom dem blir derfor svært viktig. For å skape en relasjon til elevene på så kort tid så valgte jeg å være tilstedeværende i alle arbeidsøktene de hadde, uansett om de arbeidet med sjakkbrettet eller ikke. Da gikk jeg rundt og så på hva de holdt på med, og snakket samtidig med dem for å bli bedre kjent. Når det barn man forsker på, så er det en del etiske forholdsregler som må tas med i betraktning og forskning med barn er hovedsakelig spesielt på grunn av spørsmålet om samtykke. Barnet selv er ikke den som gir samtykke, men det gis et stedfortredende samtykke av foreldrene. Jeg utformet i min studie et informasjonsskriv, samt et samtykkeskjema, som ble delt ut til alle elevene på 3.-7.trinn ved skolen jeg besøkte (se vedlegg 3). Der ble det informert om formålet med studien, hva det innebar å delta, hva som skjedde med informasjonen jeg samlet inn og at det var frivillig å delta, hvor de på et hvilket som helst tidspunkt kunne trekke seg fra studien. Informasjonen jeg gav tok utgangspunkt i Norsk Senter for Forskningsdatas (NSD) mal for informert samtykke. I tillegg valgte jeg å informere elevene muntlig om prosjektet når jeg besøkte skolen og når jeg skulle gjennomføre intervjuet. Jeg tilpasset da språket mitt slik at jeg sikret meg at alle elevene forsto hva det innebar å delta.

Et annet etisk hensyn som må tas med i betraktning handler om konfidensialitet og hvordan man bruker den informasjonen man samler inn. Når man behandler personopplysninger så må disse bli håndtert på riktig måte, noe som ivaretas ved å melde inn studien til NSD. Prosjektet mitt hadde ikke fått godkjenning av NSD da jeg opprettet kontakt med skolen, men ble godkjent før jeg gjennomførte datainnsamlingen, med prosjektnummer 55777 (se vedlegg 4). Alle navn ble erstattet med pseudonymer allerede i observasjonsnotatene, og en koblingsnøkkel ble oppbevart på en ekstern harddisk, slik at ingen av opplysningene kunne knyttes opp mot enkeltdeltakere.

3.6. Bearbeiding og analyse av datamaterialet

3.6.1. Transkripsjon

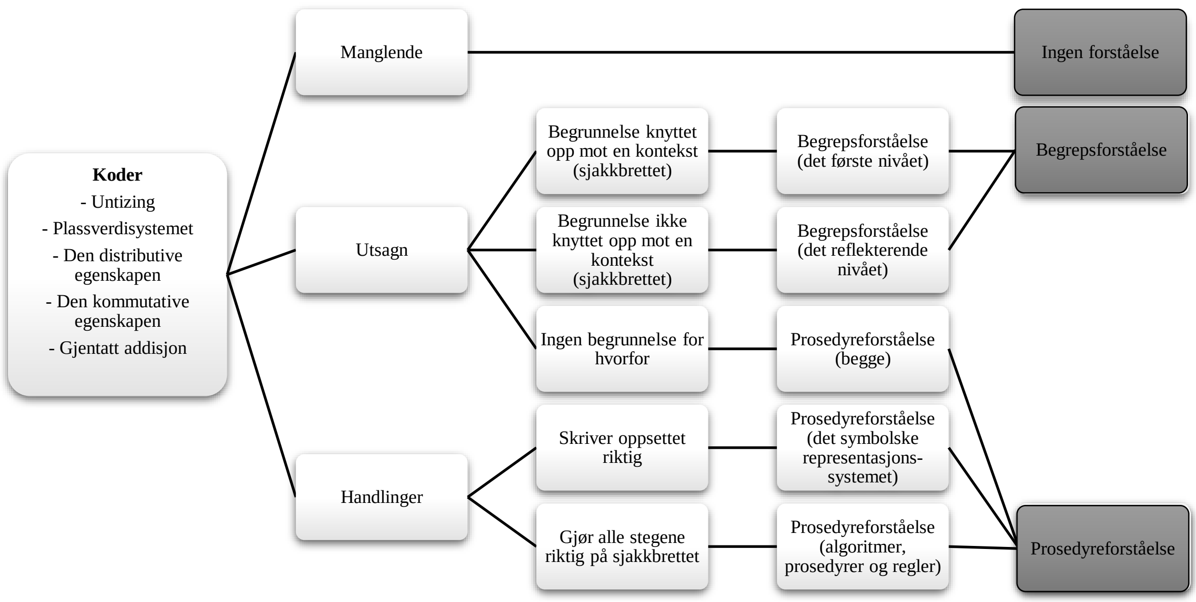
Etter undersøkelsen valgte jeg først å transkribere lydopptakene, noe som skjedde kort tid etter undersøkelsen fant sted. Jeg ønsket da å få med alt elevene sa på en korrekt måte, da det var deres utsagn om sjakkbrettet som var viktig for min undersøkelse. Jeg valgte ikke å transkribere lydopptakene på dialekt, da jeg ikke følte at det ville påvirke resultatene mine og at det ville vær mer tidkrevende. For å dokumentere hva som skjedde på sjakkbrettet tok jeg i bruk bildebehandlingsprogrammet GIMP 2.8.22 til å lage en illustrasjon av sjakkbrettet, tallbrikkene og perlene, hvor jeg videre lagde illustrasjoner av sjakkbrettet slik som det så ut i visse deler av intervjuet. Illustrasjonene limte jeg så inn i transkripsjonene slik at jeg kunne se hvordan sjakkbrettet så ut på ulike tidspunkt i intervjuet. Jeg kunne også bruke videoopptakene til å registrere gestikuleringer som når en elev for eksempel pekte på noe på sjakkbrettet, mens han eller hun forklarte noe.

I transkripsjonene valgte jeg å bruke ulik tegnsetting på ulike handlinger eller samtaleelementer som oppstod:

...	Slutter av setningen før den er ferdig, starter på ny.
(...)	Pause i over 3 sekunder
[Tekst i klammeparenteser]	Utdyping av hva som menes
(Kursiv skrift)	Handling/bevegelse som blir gjort

3.6.2. Analyseprosessen

I analysen av datamaterialet startet jeg med en induktiv tilnærming, hvor jeg benyttet meg av *koding og kategorisering*. Det innebærer at man knytter ett eller flere nøkkelord, eller koder, til en del av datamaterialet, hvorpå man i etterkant ser etter likheter og forskjeller mellom kodene og samler de i kategorier, slik at man kan gjøre en mer systematisk begrepsdannelse rundt den delen av materialet, og man utvikler mer overordnede kategorier (Nilssen, 2012; Kvale & Brinkmann, 2015). Kodingen og kategoriseringen jeg gjennomførte var begrepsstyrt (Kvale & Brinkmann, 2015) som handler om at man ser gjennom deler materialet og samtidig konsulterer med litteratur på området.



Figur 20: Illustrasjon av koder og kategorier fra analysen

Figur 20 viser en illustrasjon av alle kodene og kategoriene som ble utviklet i analysen. Til venstre i figuren under ”Koder” er de matematiske begrepene som jeg fant i datamaterialet. Disse ble videre plassert i forhold til om de kom til uttrykk gjennom et utsagn eller en handling, eller den siste, ”manglende”, hvor elevene som ikke viste en forståelse for noen av de matematiske begrepene ble plassert, som videre ble kategorien ”ingen forståelse”. Utsagnene ble videre kodet etter om elevene var i stand til å gi en begrunnelse for hvorfor de kunne gjøre det det de gjorde, og dersom de var i stand til dette, om denne begrunnelsen var knyttet opp mot sjakkbrettet eller ikke. Med bakgrunn i teori ble disse kodene videre navngitt ”begrepsforståelse (det første nivået)” og ”begrepsforståelse (det reflekterende nivået)” hvor disse ble den overordnede kategorien ”begrepsforståelse”. Dersom elevene ikke klarte å begrunne det de gjorde, ble dette kodet som en ”prosedyreforståelse (begge)” der det kunne gjelde både sjakkbrettet (prosedyre) og oppsettet (det symbolske representasjonssystemet). Den samme prosessen ble gjort med handlingene som elevene gjorde på sjakkbrettet, hvor jeg endte opp med den overordnede kategorien ”prosedyreforståelse”.

Allerede i transkripsjonen begynte det å dukke opp noen ideer til kodingen som var relevante i sammenheng med forskningsspørsmålet jeg hadde stilt meg, og som påvirket mitt videre arbeid med analysen. Jeg startet med å se på de matematiske begrepene og ideene som inngikk i sjakkbrettet for å se hvor de kom til uttrykk. Jeg la merke til at elevene fra 3. og 4.klasse ikke klarte å gjennomføre en eneste oppgave på sjakkbrettet uten at en lærer tilstede, og at dette kunne knyttes til en manglende forståelse for unitizing og plassverdisystemet. Elevenes manglende forståelse for unitizing og plassverdisystemet påvirket deres arbeid med sjakkbrettet i så stor grad at de ikke klarte å fullføre noen oppgaver, som ble til en kode, og de viste derfor heller «ingen forståelse», som ble den første kategorien. Når jeg hadde sett over alle transkripsjonene og funnet hvor de forskjellige matematiske begrepene og ideene kom til uttrykk, begynte jeg å se på transkripsjonene på nytt igjen for å se om de enten kom til uttrykk gjennom en handling eller et utsagn. Jeg la da merke til at det var noen av elevene som klarte å gjennomføre oppgavene på sjakkbrettet, men som ikke hadde en god begrunnelse på hvorfor de kunne gjøre som de gjorde på sjakkbrettet. Et eksempel fra transkripsjonene som viste dette var når to elever klarte å gjennomføre regnestykket 2743 x 10 på sjakkbrettet, hvor de benyttet seg av plassverdisystemet, men videre skal prøve å forklare hva som skjer når man multipliserer med 10:

1.259	**Anne**	Mm, når man ganger med ti, så blir det alltid en null til.
1.260	**Truls**	Det er lettere å la henne forklare, for jeg kan ikke forklare det.
1.261	**Intervjuer**	Ja, hvorfor blir det sånn da?
1.262	**Anne**	Det er bare sånn det er.
1.263	**Truls**	Ja, det er bare sånn det er.
1.264	**Anne**	Man vet ikke hvorfor, men sånn er det bare.

Elevenes utsagn ble her kodet som «ingen begrunnelse for hvorfor» på bakgrunn av at de gjør alle stegene på sjakkbrettet riktig, men ikke klarer å si noe om plassverdisystemet i sammenheng med multiplikasjon med 10. Med bakgrunn i teorien knyttet jeg ”ingen begrunnelse for hvorfor" opp til en "prosedyreforståelse" i forbindelse med prosedyrer, algoritmer og regler, da man ifølge Hiebert og Lefevre (1986) ikke trenger å vite hvorfor man gjør som man gjør. Et annet eksempel fra den siste kategorien var når en elev kom med et utsagn om den kommutative egenskapen:

5.254	**Lise**	Du tar jo egentlig bare å... Si da hvis jeg har tre gange åtte, så er det egentlig pluss jeg gjør, bare at jeg kaller det gange i stedet. (...) Og skriver det på en kortere måte, for du kan jo skrive kun bare tre, åtte ganger, eller åtte, tre ganger og liksom bare plusse de sammen. Men sånn her, så går vi bare liksom oppover tallene og plusser den med den... Det er jo på en måte en lettere måte i stedet for... Hvis vi skulle tatt den her, så mange ganger, da hadde det tatt tusen år.

Eleven uttrykker her en forståelse for den kommutative egenskapen ved multiplikasjon, som var et matematisk begrep som ikke hadde kommet frem gjennom analysen av konkretiseringsmateriellet. "Den kommutative egenskapen" ble da til en kode, en kode som gjennom et utsagn viste en begrepsforståelse. På bakgrunn av teori vurderte jeg at det eleven viste her var en begrepsforståelse på det *reflekterende nivået*, hvor eleven viser kunnskap som ikke er direkte knyttet opp mot sjakkbrettet, men som likevel handler om kunnskap om multiplikasjon. Dette ble videre plassert under den mer overordnede kategorien "begrepsforståelse".

De overordnede kategoriene ble utarbeidet gjennom at jeg samlet de kodene som lignet på hverandre og det ble da naturlig å dele de opp etter «ingen forståelse», «prosedyreforståelse» og «begrepsforståelse» for å beskrive elevenes forståelse for multiplikasjon på sjakkbrettet. Kort sagt kan man si at analysen etter hvert ble mer fokusert, hvor jeg startet på et deskriptivt nivå og fant kodene som omhandlet de matematiske begrepene og ideene, før den videre gikk til et teoretisk nivå (Kvale & Brinkmann, 2015), hvor det ble gjort tolkninger av de opprinnelige kodene og det oppsto nye koder som var begrepsstyrt. Disse kodene ble så samlet, basert på hva som var likt, og kategoriene ble utformet.

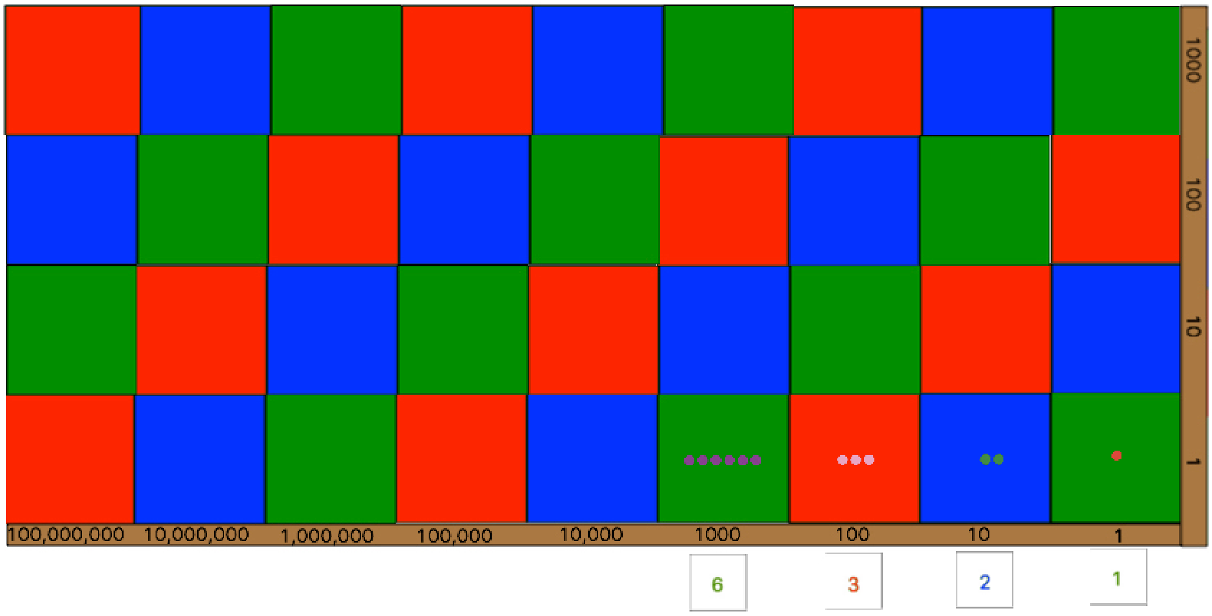
4. ANALYSE

Innledningsvis i denne oppgaven stilte jeg et forskningsspørsmål som jeg ønsket å finne svar på: *Hvilken forståelse for multiplikasjon viser de utvalgte elevene i arbeidet med sjakkbrettet?* I dette kapittelet ønsker jeg å presentere grunnlaget for at dette spørsmålet kan bli besvart. Jeg vil først gjøre en analyse av det anvendte konkretiseringsmateriellet brukt av elevene i undersøkelsen. I denne analysen vil jeg gå nærmere innpå hvilke matematiske begreper som inngår i sjakkbrettet og hva det er mulig for elevene å vise av forståelse gjennom arbeid med det. Etter denne analysen vil utdrag fra intervjuene presenteres og analyseres, hvor det suppleres med notater fra observasjonene som ble gjort. Analysen blir presentert etter kategoriene *ingen forståelse*, *prosedyreforståelse* og *begrepsforståelse.*

Datamaterialet består av transkripsjoner og illustrasjoner av sjakkbrettet fra intervjuene med elevene, samt notater fra observasjonene. Elevene som deltar har fått hvert sitt pseudonym og utvalget består av: Sara (3.klasse), Helene (3. klasse), Markus (4. klasse), Truls (5. klasse), Tone (5. klasse), Anne (6. klasse) og Lise (6. klasse). Det ble gjort gruppeintervju med Truls og Anne, og Tone og Lise. Jeg vil bli referert til som ”intervjuer” og læreren som gjennomførte presentasjoner med elevene vil bli referert til som ”lærer”. Jeg har valgt å nummere elevenes utsagn etter intervjunummer og utsagnsnummer. Med 5.124 menes da intervju 5, utsagn 124. Dersom det hoppes over situasjoner/utsagn som ikke er relevante så vil dette bli representert med ”[...]”.

4.1. Analyse av sjakkbrettet

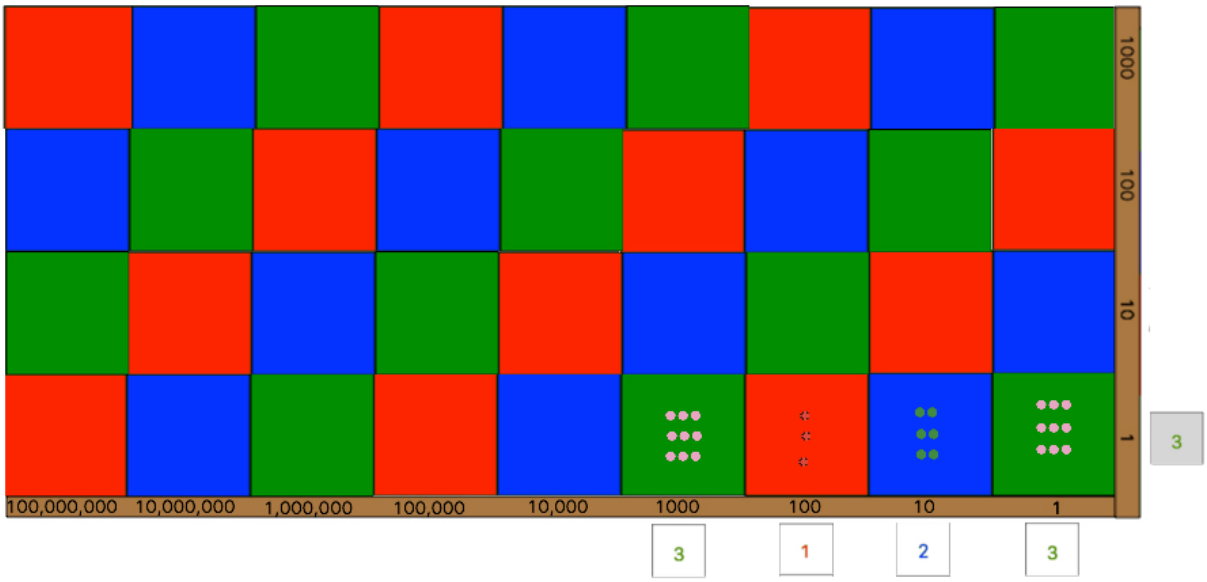
For å kunne si noe om hvilken forståelse for multiplikasjon de utvalgte elevene viser i arbeidet med sjakkbrettet, så er det nødvendig å si noe om hvilke matematiske begreper som inngår i det. Det matematiske temaet for sjakkbrettet er multiplikasjon med flersifra tall, der sjakkbrettet skal være en forberedelse til ”oppsettet” som er en algoritme som ligner på standardalgoritmen for multiplikasjon (se delkapittel 3.1.1). I tillegg så skal elevene gjennom sjakkbrettet benytte seg av flere andre matematiske ideer, som multiplikasjon med 10, multiplikasjon med og uten overgang og multiplikasjon med flere sifre i både multiplikanden og multiplikator. Som man ser i oppgavetypene (se vedlegg 1), så er det ulikt tema for hvert nivå. På nivå 1 så får elevene en introduksjon til sjakkbrettet, der de simpelthen skal legge ut tallene der perlene representerer sifrene i tallet. I oppgave 1.02 der tallet 6321 skal representeres på sjakkbrettet, blir da for eleven å legge ut perlene slik på sjakkbrettet:



Figur 21: Illustrasjon av tallet 6321 på sjakkbrettet

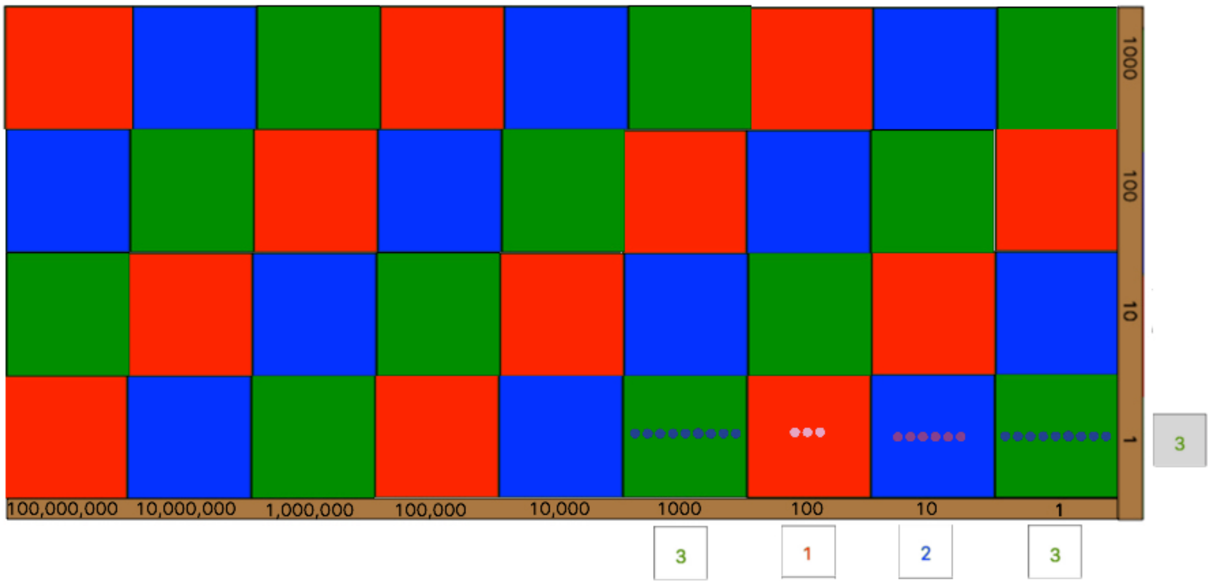
Eleven skal da starte med å legge ut tallbrikkene, og disse skal legges under selve sjakkbrettet, som vist i illustrasjonen ovenfor. Tallbrikkene har her fargekoder som viser både tallet (alle tallbrikkene), hvilken rute det skal ligge under (verdien på sifferet) og sifferet som skal representeres som perler på sjakkbrettet. Tallbrikken med en grønn seks, i eksemplet ovenfor, skal da vise eleven at tallet som ligger i ruta over brikken har verdi 6000, og at det derfor skal legges en 6er perle i den ruta. Eleven skal da fra før være kjent med plassverdisystemet, slik at han klarer å lese tallet som står under sjakkbrettet, og da videre kan forstå at perlene representerer det samme som tallbrikkene og tallet på oppgavekortet. Oppgavekortene på nivå 1 fortsetter på samme måte som oppgaven ovenfor, bare med økende sifre i tallet, slik at det siste oppgavekortet er et tall som består av ni sifre og som fyller hele den nederste linja på sjakkbrettet. Oppgavene på nivå 1 legger altså ikke opp til multiplikativ tenking, annet enn at det er enn at det er en forberedelse til de neste nivåene. En elev får da heller ikke vist noen forståelse for multiplikasjon ved å gjennomføre oppgaver fra nivå 1.

På nivå 2 i oppgavekortene starter de to første oppgavene med fire siffer i multiplikanden og ett siffer i multiplikatoren, uten overgang. Dette vil da være elevens første møte med multiplikasjonsoppgaver på sjakkbrettet, og hun/han må da ta i bruk de grå tallbrikkene, som skal representere sifrene i multiplikatoren. Her må elevene som enda ikke har lært den lille gangetabellen legge ut alle perlene i deloppgavene som gjentatt addisjon. Oppgave 2.02 er 3123 x 3, og eleven skal da starte med å legge ut perlene slik på brettet:



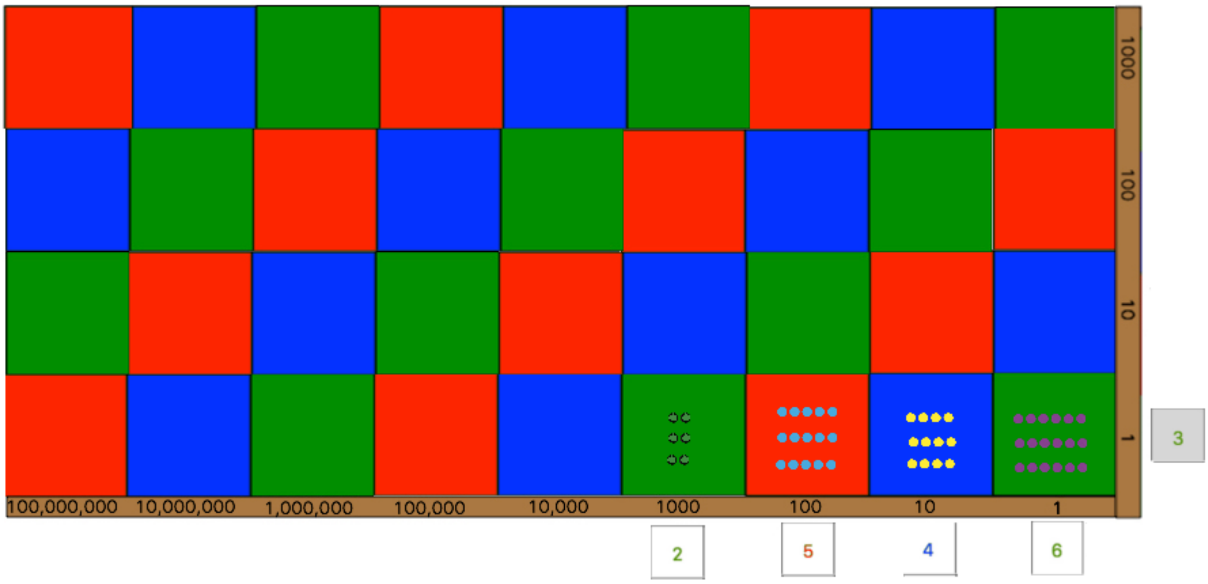
Figur 22: Illustrasjon av sjakkbrettet med oppgaven 3123 x 3 hvor perlene er lagt ut som gjentatt addisjon

Deretter skal eleven addere perlene i hver rute, for så å veksle de inn mot en perle som er summen av de perlene som ligger i ruta, slik:



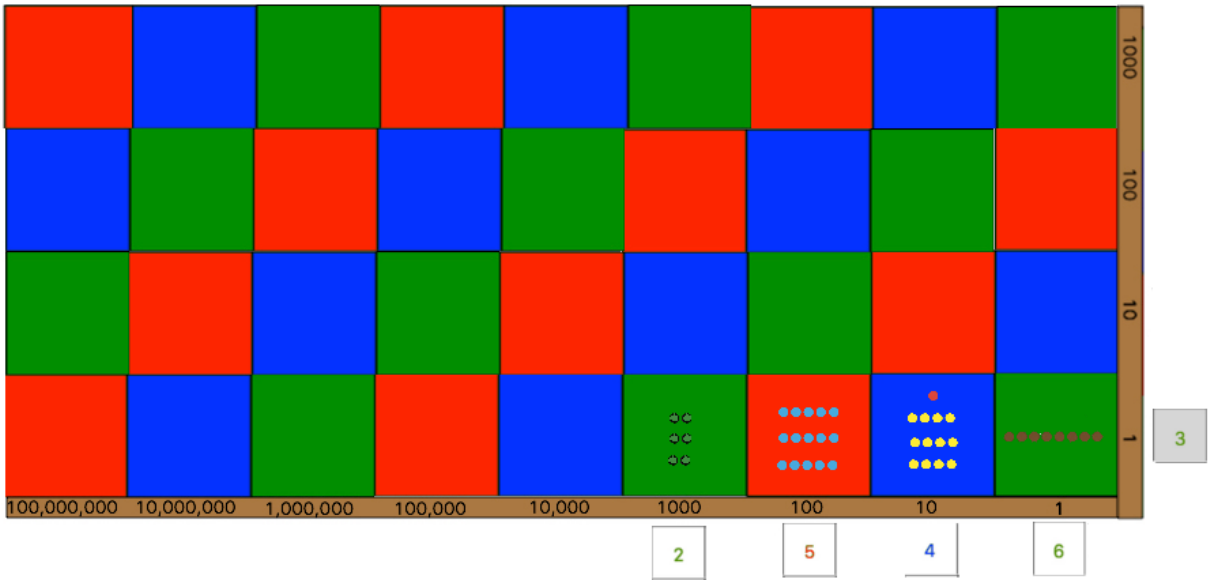
Figur 23: Illustrasjon av sjakkbrettet med svaret på oppgaven 3123 x 3

Eleven skal så lese svaret ut fra perlene, og vil da få 9369. For elever som ikke har lært den lille gangetabellen, eller som bruker andre multiplikasjonsstrategier, vil her bruke gjentatt addisjon for å løse deloppgavene, som vist i figur 22. Elever som kan den lille gangetabellen kan derfor hoppe over det første steget med å legge ut perlene som gjentatt addisjon og løse oppgaven mer effektivt. Det elevene bruker for å løse oppgavene er den distributive egenskapen, hvor man deler opp multiplikanden i flere ledd, her i 3000 + 100 + 20 + 3 og multipliserer alle leddene med multiplikatoren som er 3. Fra oppgave 2.03, og videre ut nivået, møter elevene oppgaver med overgang(er), og oppgavene øker fra fire siffer i multiplikanden til fem og seks. I Oppgave 2.05, 2546 x 3, er det derfor tre overganger. Også her kan de som ikke har lært den lille gangetabellen benytte seg av gjentatt addisjon først:



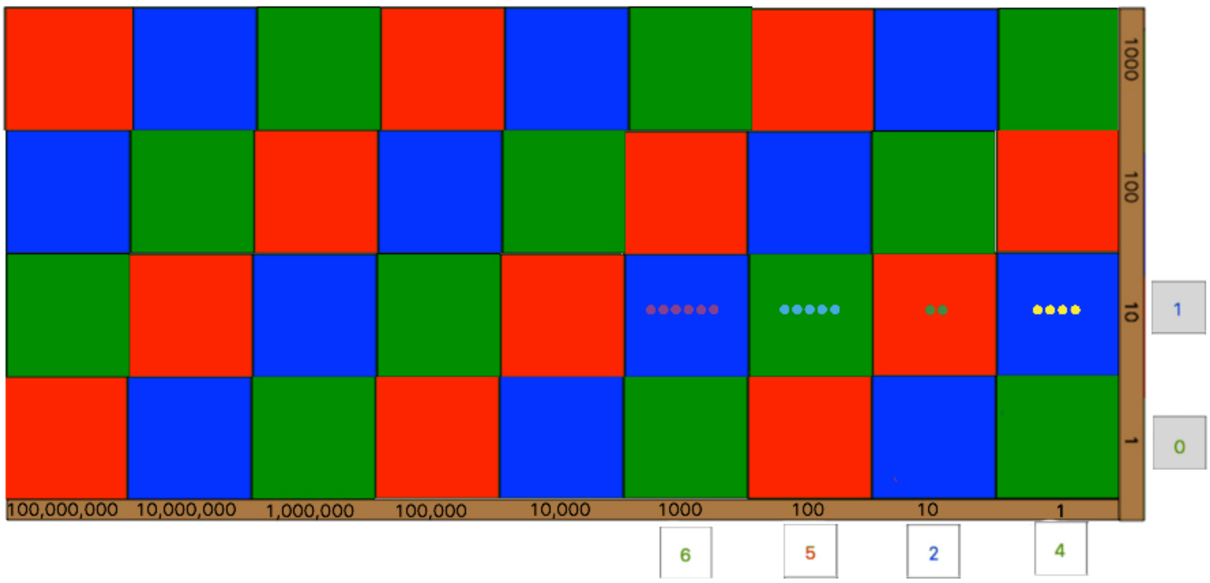
Figur 24: Illustrasjon av sjakkbrettet med oppgave 2546 x 3 hvor perlene er lagt ut som gjentatt addisjon

Når disse perlene så er lagt ut skal eleven addere perlene i hver rute og starter med ruta som har verdi (nederste linja til høyre) hvor man skal addere 6 + 6 + 6 og få 18, og brettet blir da som i figur 25. Tieren i 18 flyttes da over til ruta med verdi 10 (nederste linja, nummer to fra høyre) og representeres derfor med en 1er perle, og 8 plasseres i ruta med verdi 1 (nederste linja til høyre), med en 8er perle. Her er det den matematiske ideen untizing som tas i bruk, hvor man grupperer med 10 i plassverdisystemet på sjakkbrettet. Dersom eleven har forstått denne ideen så vil han, dersom han får over 10 i den første ruta, gjøre om dette til én tier som flyttes over til ruta med verdi 10. Har ikke eleven forstått dette så vil han forsøke å finne perler som tilsammen blir 18, som for eksempel to 9er perler, og plassere disse i den første ruta.



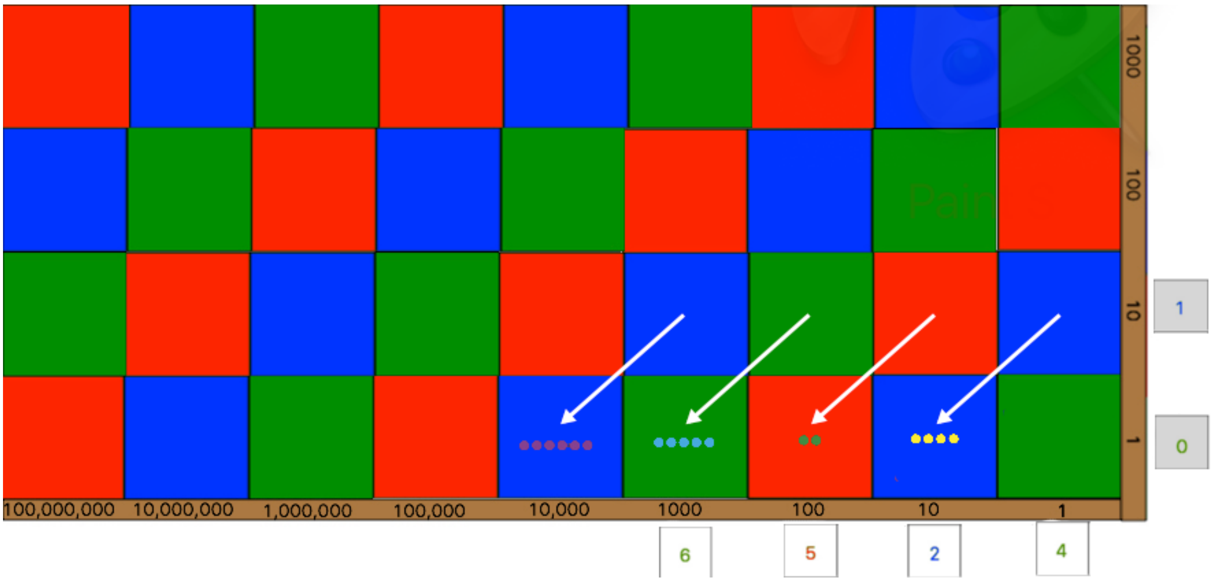
Figur 25: Illustrasjon av sjakkbrettet med oppgave 2546 x 3 hvor perlene i ruta med verdi 1 er addert

På nivå 3 møter elevene oppgaver med fire siffer i multiplikanden og en flersifra multiplikator. Det starter først med tre oppgaver (oppgave 3.01-3.03) der multiplikatoren er 10 og deretter tre oppgaver (oppgave 3.04-3.06) der multiplikatoren er 100. Eleven må i disse oppgavene gjøre et nytt steg på sjakkbrettet som han ikke vil ha gjort i de tidligere oppgavene, og det er å dra perlene diagonalt til den nederste linja på sjakkbrettet, noe som gjør at eleven også her må få en ny presentasjon av læreren. Har eleven gjort alle de tidligere stegene (som vist i oppgavene ovenfor) i oppgave 3.01 som er 6524 x 10, så skal brettet se slik ut:



Figur 26: Illustrasjon av sjakkbrettet med oppgave 6524 x 10, hvor alle delstykkene er gjennomført

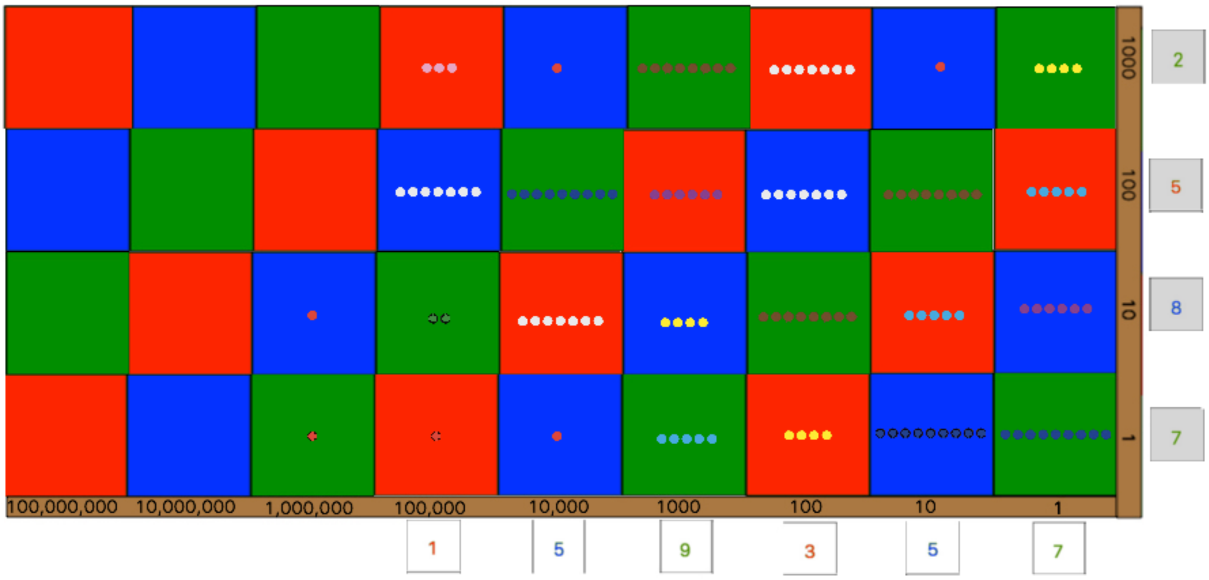
Eleven skal så dra perlene diagonalt ned til venstre slik:



Figur 27: Illustrasjon av sjakkbrettet med oppgave 6524 x 10, med piler som viser hvordan perlene skal flyttes diagonalt ned til venstre

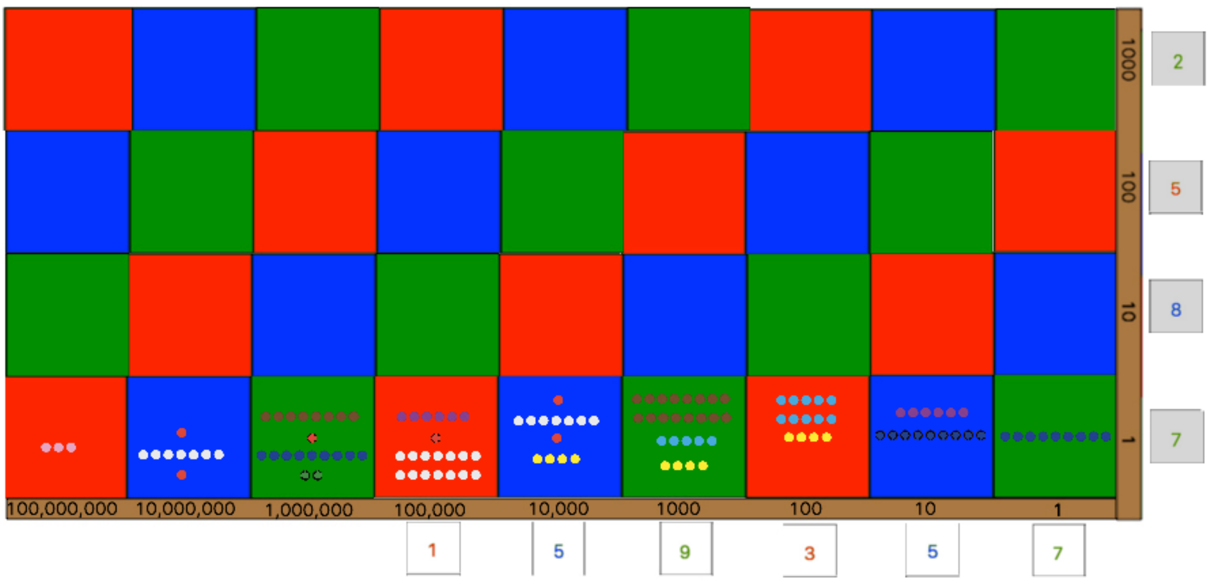
For at eleven skal forstå hvorfor han kan dra perlene ned på skrå, som i figur 27, så er han nødt til å forstå at rutene med de samme fargene, som går diagonalt, har samme verdi. Dersom det ligger en perle på den andre linja i den blå ruta til høyre, som er 4er perlen i dette eksemplet, så må den multipliseres med 10 på grunn av at ruta har verdi 10, og at perlen derfor representerer 40. Eleven får her også oppleve at når man multipliserer med 10, så vil sifrene forskyves ett hakk til venstre i forhold til tallbrikkene på grunn av plassverdisystemet og at man derfor får en null bakerst på multiplikanden, og også at det derfor blir to nuller når man multipliserer med 100. Her er det en forståelse for plassverdisystemet på sjakkbrettet som vil komme til syne. Dersom eleven har en prosedyreforståelse vil eleven kunne dra perlene på skrå, men ikke begrunne hvorfor han kan gjøre det. Hvis eleven imidlertid har en begrepsforståelse for plassverdisystemet, så vil dette begrunnes med at perlene kan dras ned diagonalt på grunn av at rutene har samme verdi.

Når eleven kommer til nivå 4 møter han oppgaver med flere siffer i multiplikatoren og i de seks siste oppgavene (oppgave 4.15-4.20) 6 siffer i multiplikanden og 4 siffer i multiplikatoren. I disse oppgavene er eleven nødt til å ta i bruk alle ideene og begrepene, samt stegene som er gjort i de tidligere oppgavene. Skal eleven for eksempel gjøre oppgave 4.18 som er 159357 x 2587 så er han nødt til å gjøre hele 24 deloppgaver med 26 overganger som innebærer 26 vekslinger av perler. Dersom eleven blir ferdig med de 24 deloppgavene og har multiplisert alle leddende med hverandre vil brettet se slik ut og eleven har vekslet 19 ganger:



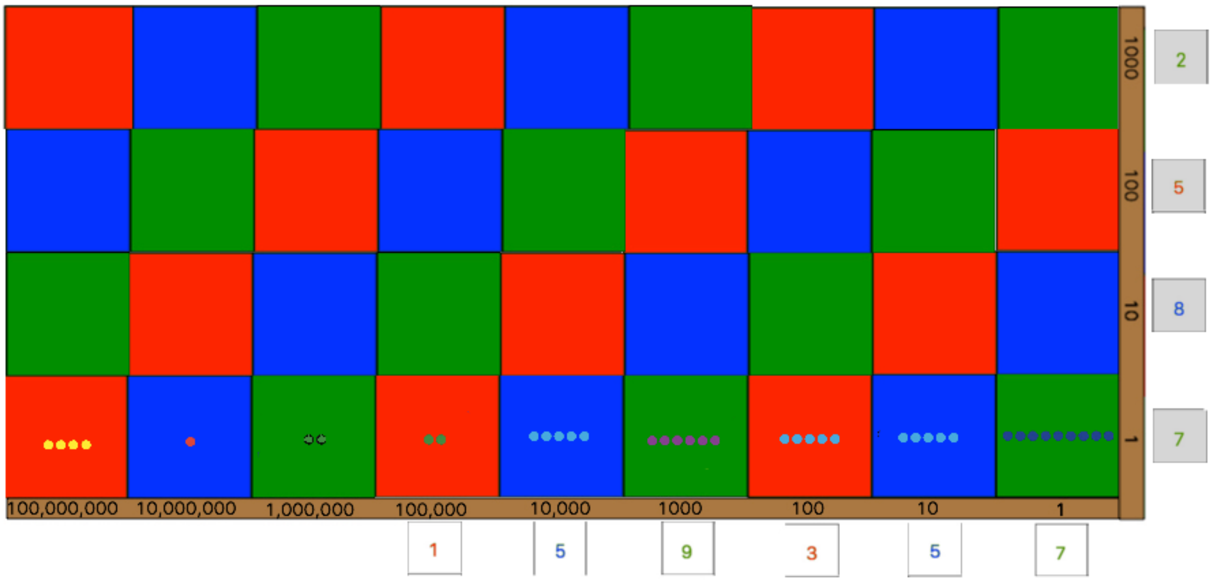
Figur 28: Illustrasjon av sjakkbrettet med oppgaven 159357 x 2587, hvor alle delstykkene er gjennomført

Eleven skal så dra alle perlene ned diagonalt slik at han samler alle perlene med samme verdi i den nederste linja, slik:



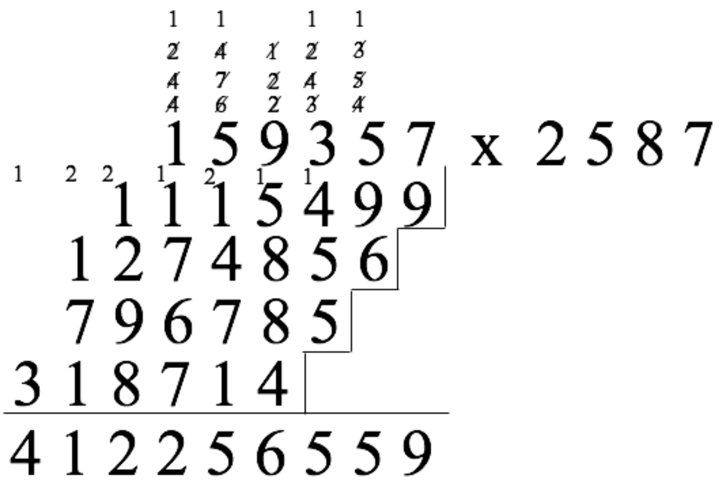
Figur 29: Illustrasjon av sjakkbrettet med oppgaven 159357 x 2587, hvor perlene med samme verdi er samlet

Deretter er han nødt til å addere alle perlene i rutene, og det blir derfor 7 nye vekslinger og eleven vil få svaret representert som i figur 30.



Figur 30: Illustrasjon av sjakkbrettet med svaret på oppgaven 159357 x 2587

Når det blir to eller flere siffer i multiplikatoren så brukes den distributive egenskapen både i multiplikanden og multiplikatoren, og man deler opp begge tallene. I dette eksemplet vil tallene bli oppdelt i $(100000 + 50000 + 9000 + 300 + 50 + 7) \cdot (2000 + 500 + 80 + 7)$. Hvis eleven skal skrive oppsettet i boka samtidig på korrekt vis, så vil det se slik ut når han er ferdig med oppgaven:



Figur 31: Hvordan oppsettet ser ut når man har kommet frem til løsningen på oppgave 159357 x 2587

Hvis man ser på sammenhengen mellom sjakkbrettet og oppsettet, så er det en del forskjeller mellom hvordan de ser ut visuelt. For det første jobber man på sjakkbrettet nedenfra og opp, som vil si at man starter på den nederste linja hvor man multipliserer alle leddene i multiplikanden med den minste verdien multiplikatoren, før man jobber seg oppover i de økende verdiene i multiplikatoren. Tallene som man får som svar blir da lagt oppover på sjakkbrettet. I oppsettet så jobber man seg ovenfra og ned. Her starter man helt til høyre i multiplikatoren med den minste verdien og ganger den med den minste verdien i multiplikanden, og svaret blir representert under multiplikanden. Når alle delstykkene er ferdig, både i sjakkbrettet og i oppsettet, så adderes de på samme måte ved at man drar perlene nedover og i oppsettet trekker tallene nedover, men at man trekker perlene diagonalt og sifrene i oppsettet trekkes ned loddrett. Når det gjelder sjakkbrettets *gjennomsiktighet* i forhold til oppsettet, er det derfor noen forskjeller hvor det for elevene kan være vanskelig å se sammenhengen mellom dem.

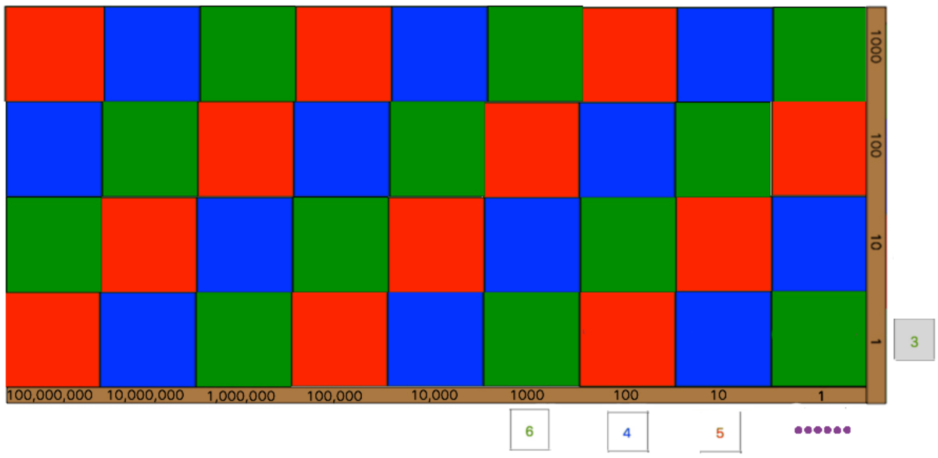
Matematiske begreper som ligger til grunn i sjakkbrettet og bruken av det er altså den distributive egenskapen, plassverdisystemet og unitizing, multiplikasjon av 10, 100 og 1000, multiplikasjon av multipler av 10, 100 og 1000, og multiplikasjon av flersifra tall. Det sjakkbrettet derimot ikke legger til rette for er arbeid med den kommutative- og assosiative egenskapen, da det er ingen oppgaver hvor man får sett hvordan rekkefølgen ikke spiller noen rolle, og man ikke har noen oppgaver med 3 eller flere faktorer. Sjakkbrettet legger heller ikke til rette for multiplikativ tenking, da verken oppgavene eller sjakkbrettet har kontekst der det gis ulike forestillinger av situasjoner (Solem et al., 2017). Begrepene som tas opp i forbindelse med sjakkbrettet, er mange av de samme begrepene som lærerne i Mas (2010) undersøkelse mente var viktigst i forbindelse med multiplikasjon med flersifra tall. Forskjellen er likevel at elevene i arbeidet med sjakkbrettet ikke på forhånd møter multiplikasjon med ett- og tosifra tall. Samtidig er det viktig å understreke at elevene likevel kan vise forståelse for de begrepene som sjakkbrettet ikke legger til rette for, gjennom de utsagnene de kommer med om sjakkbrettet og handlingene de gjør på det. I analysen av elevenes arbeid med sjakkbrettet gir jeg eksempel på at dette skjer når en elev skal forklare hvorfor hun kan gjøre som hun gjør på sjakkbrettet.

4.2. Analyse av elevenes arbeid med sjakkbrettet

I denne delen av analysekapittelet vil jeg presentere funn fra intervjuene med elevene, samt observasjoner fra deres arbeid med sjakkbrettet. Funnene er strukturert etter kategoriene som jeg utarbeidet i analysen: *ingen forståelse, prosedyreforståelse* og *begrepsforståelse.*

4.2.1. Ingen forståelse

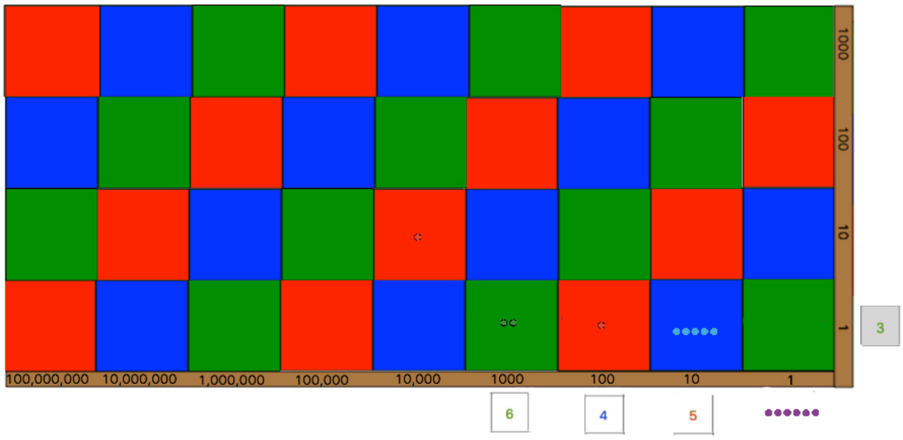
Utdragene som blir presentert i denne kategorien er typiske eksempler på at elevene ikke klarer å vise noen forståelse for multiplikasjon i sitt arbeid med sjakkbrettet, verken gjennom handlinger eller utsagn. Alle tre elevene som ble intervjuet individuelt, altså elevene fra 3. og 4.klasse hadde store utfordringer med å arbeide med sjakkbrettet uten lærer tilstede. Sara, som går i 3.klasse, velger å gjøre oppgave 2.05 som er 2546 x 3. Hun starter med å legge ut tallbrikkene, hvor hun plasserer dem i feil rekkefølge, slik at hun i stedet har lagt ut 6452 x 3, og starter med deloppgaven 2 x 3 hvor hun får 6. Hun velger da å bytte ut tallbrikken med en 6er perle, slik at brettet ser ut som nedenfor, før hun fortsetter med neste deloppgave:



4.18	**Sara**	Og så ti gange tre. Nei! Fem gange tre. (...) Hm. (...) Hm. (...) Nå ble det litt vanskeligere, fordi fem gange tre er 15, men det er ikke noen tiere [tierperler] her.
4.19	**Intervjuer**	Nei, det er det ikke.
4.20	**Sara**	Så da har jeg glemt hvordan jeg skal gjøre det da.

I deloppgaven 4 x 3 så velger Sara å plassere perlene slik og sier følgende:

4.34	**Sara**	Da tar jeg bort. Fire gange tre, det er 12. Da blir det den og den da. Da blir det (...) toeren der og eneren tror jeg oppå der. *Legger eneren i ruta med verdi 100.000 i den andre linja.*



4.35 **Intervjuer** Mm. Hvorfor legger du den helt oppå der?

4.36 **Sara** Fordi, jeg tror den skal være der.

I etterkant plasserer Sara perlene på vilkårlige plasser, og flytter rundt på de perlene som allerede ligger på brettet. Disse to utdragene kategoriseres som «ingen forståelse» på bakgrunn av at Sara her verken viser en begreps- eller prosedyreforståelse for multiplikasjon på sjakkbrettet. Ved å plassere perlene på vilkårlige steder kan det virke som at hun verken har forstått ideen om unitizing eller hvordan plassverdisystemet fungerer på sjakkbrettet. Hennes manglende forståelse for untizing kommer frem i linje 4.18-4.20, hvor hun eksplisitt uttrykker at når det ikke er noen 10er perler, så vet hun ikke hva hun skal gjøre. Hennes utfordringer med plassverdisystemet kommer også tydelig frem allerede fra det første steget, når hun skal plassere tallbrikkene, hvor hun legger disse i feil rekkefølge. Selv om det står på sjakkbrettet hvilke verdier de ulike rutene på den nederste linja har, så plasserer hun likevel tallet og tallbrikkene feil vei.

Eleven Helene fra 3.klasse fikk i forkant av intervjuet en presentasjon av sjakkbrettet fra lærer, før hun skulle arbeide med det alene. Helene og læreren gjennomførte da noen oppgaver på nivå 1 og 2 fra oppgavekortene, men de gjennomførte kun oppgave 2.01 og 2.02 fra nivå 2 før læreren trakk seg tilbake. De gjorde derfor ingen oppgaver som inneholdt overganger sammen, og når Helene videre skal gjøre oppgave 2.03 som er 2324 x 3, så får hun problemer allerede med det første delstykket 4 x 3:

2.107 **Helene** Når det er 12, hva skal jeg gjøre da?

2.108 **Intervjuer** Ja, hva kan du gjøre da?

2.109 **Helene** Eh, jeg kan ta en tier opp på dit, og en toer dit. Så tar jeg opp tre.

(...)

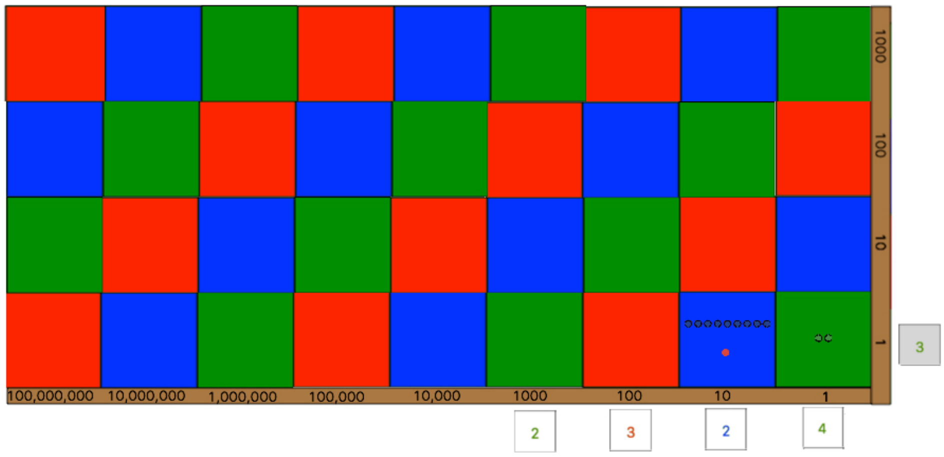
2.112 **Intervjuer** Hvor mange tiere er det i 12 da?

2.113 **Helene** Én

2.114 **Intervjuer** Mm.

2.115 **Helene** Så da skal vi ha en tier, og der er en tier. Dette er en tier.

Sjakkbrettet:



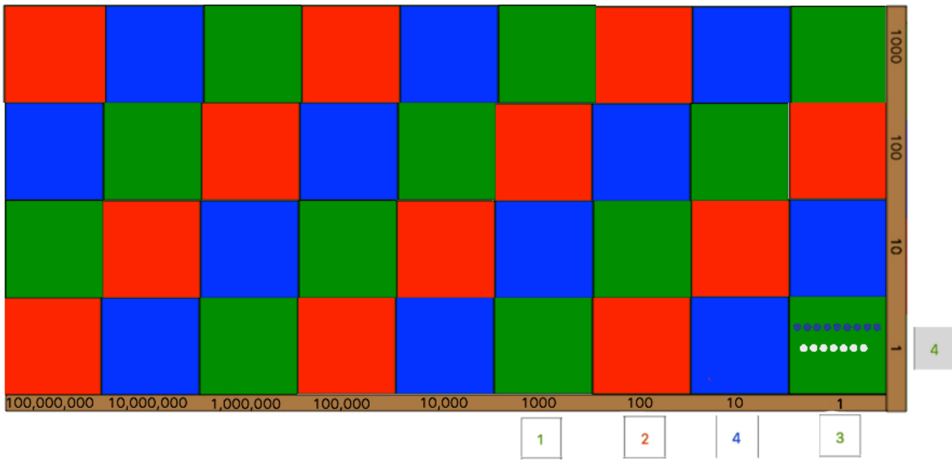
I dette utdraget får Helene utfordringer når hun finner ut at 4 x 3 blir 12 og hva som skjer når hun får en tier-overgang. I stedet for da å plassere en 1er perle i ruta med verdi 10 på den nederste linja, så velger hun i stedet å plassere både en 1er perle og en 9er perle i ruta, som til sammen blir 10, og som for Helene representerer tieren i 12 (linje 2.115). Hun får da 100 i stedet for 10 i ruta med verdi 10 i den nederste linja på sjakkbrettet. I dette utdraget kommer det ikke noen forståelse for multiplikasjon på grunn av at Helene, i likhet med Sara, ikke har forstått unitizing eller plassverdisystemet. Dette kommer frem når Helene ikke forstår at hun må plassere tieren som en 1er perle i ruta med verdi 10, noe som gjør at det steget og de andre stegene på sjakkbrettet blir feil, og prosedyren ikke blir fulgt på riktig måte. Helenes manglende begrepsforståelse for multiplikasjon, her i sammenheng med unitizing og plassverdien, påvirker derfor hennes prosedyreforståelse da stegene ikke blir korrekt, og Helene får ikke vist noen forståelse for multiplikasjon på sjakkbrettet.

Markus fra 4.klasse har i likhet med Sara og Helene utfordringer med sjakkbrettet når det gjelder unitizing og plassverdisystemet. Som Helene, vet ikke Markus hva han skal gjøre når det blir overganger mellom rutene. I tillegg tror Markus at han har lært den lille gangetabellen og gjetter derfor bare på delstykkene og legger på feil perler:

3.18 **Intervjuer** Ja, for nå har du tatt tre gange fire?

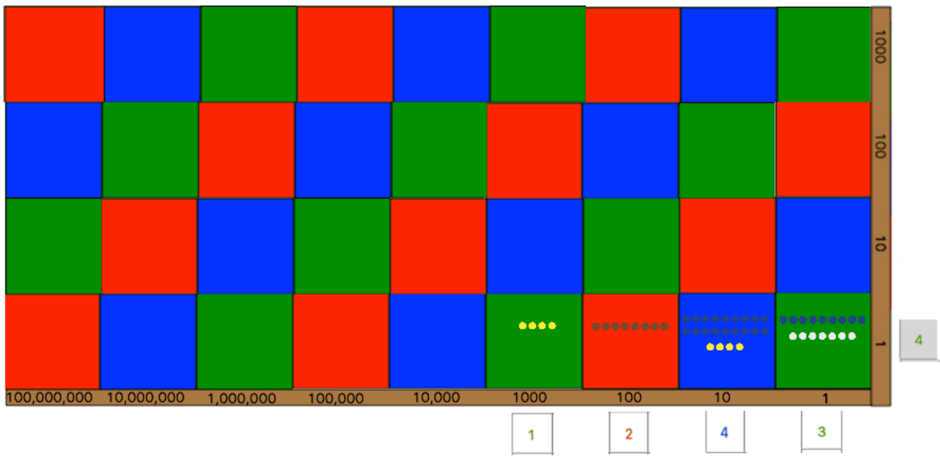
3.19 **Markus** Ja, men det skal bli 16.

Sjakkbrettet:

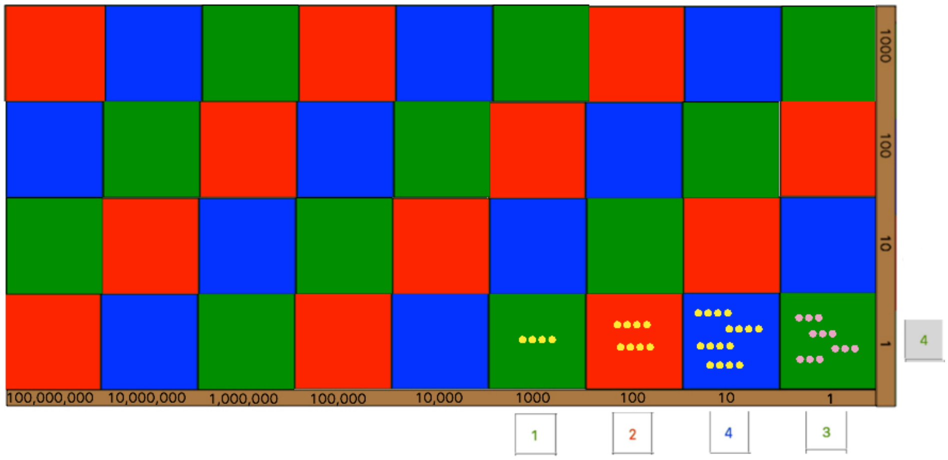


3.21 **Markus** Men det er det jeg ikke husker helt hvordan man skal gjøre. (...) Hm, nei. *Hvisker noe til seg selv som er uhørlig.* (...) Og så fire gange fire, hm. Tjue skal det der bli. *Legger to niere på tierplassen og en firer.* Hm. Nei det her tror jeg ikke at jeg har gjort riktig. Og så to, to gange fire, da blir det åtte. Og så tror jeg man skal gjøre noe mer, men jeg husker ikke på det.

Sjakkbrettet når Markus er ferdig med oppgaven:



At Markus ikke forstår unitizing og plassverdisystemet kommer frem gjennom perlene han plasserer på sjakkbrettet. Selv om Markus får 16 som svar på 3 x 4, så legger han perlene feil også ved at han plasserer en 9er perle og en 7er perle, som til sammen blir 16 i ruta med verdi 1 (linje 3.19). På neste delstykke også, som er 4 x 4, så tror han at svaret blir 20 og plasserer to 9er perler og en 4er perle i ruta med verdi 10, som for han skal bli 20, men som i stedet blir 22 (linje 3.21). I etterkant av dette utdraget henter Markus læreren og får en ny presentasjon av sjakkbrettet, hvor lærer oppfordrer Markus til å telle perlene når hun merke at han tar feil på delstykkene. Hun starter også fra begynnelsen av progresjonen på sjakkbrettet igjen, hvor perlene legges ut som gjentatt addisjon og de legger ut fire 3er perler i ruta med verdi 1, og fortsetter slik da de velger å veksle når de har gjort ferdig alle delstykkene. Når de er ferdig med delstykkene ser sjakkbrettet slik ut:



Videre så teller Markus alle perlene og finner ut at det blir 12 i den første ruta med verdi 1, men vet fortsatt ikke hvordan han skal veksle:

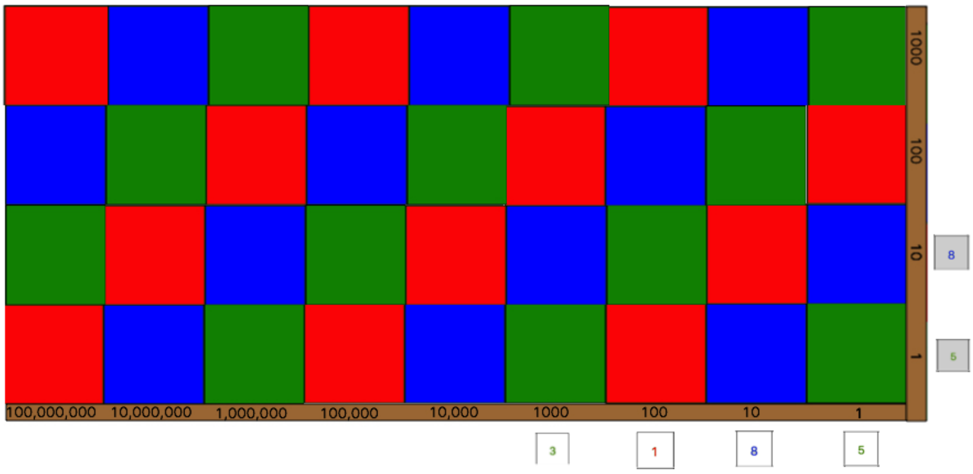
3.57	**Lærer**	12 ja! Husker du hvordan vi veksler 12?
3.58	**Markus**	Hm.
3.59	**Lærer**	Hvordan skriver vi det?
3.60	**Markus**	Eh.
3.61	**Lærer**	Hvis vi skal skrive tolvtall, hvordan ser det ut med perler?
3.62	**Markus**	Jeg skjønner ikke helt hva du mener.
3.63	**Lærer**	Nei. Hvis dette er tolv, husker du hvordan vi kan skrive tolv? Da kan vi skrive det med en tier og en toer. *Solveig legger perlene for Markus, en 1er perle på ruta med verdi 10 og en 2er perle på ruta med verdi 1.*

I resten av presentasjonen må Solveig veilede Markus på alle delstykkene når han skal addere perlene som ligger i hver rute. Han adderer også feil på noen av stykkene, noe som gjør at han etter hvert starter å telle en og en perle, og plasserer tidvis perlene i feil rute. Utdragene fra Markus sitt arbeid med sjakkbrettet kategoriseres derfor som «ingen forståelse» på bakgrunn av at han verken viser at han kan den lille gangetabellen, eller at han har forstått unitizing og plassverdisystemet på sjakkbrettet. Læreren prøver også å koble plassverdisystemet på sjakkbrettet til hvordan man skriver tallene med symboler (linje 3.59-3.61) hvor Markus heller ikke da forstår sammenhengen. At han også må telle en og en perle viser at han heller ikke bruker gjentatt addisjon for å løse delstykkene. Dette er også et tegn på at Markus ikke har forstått unitizing, da man først må ta i bruk den strategien, gjentatt addisjon, før man videre går bort fra den igjen når man forstår unitizing, og deretter begynner å bruke andre multiplikasjonsstrategier (Hulbert et al., 2017). Arbeidet med sjakkbrettet for Markus er derfor ikke en multiplikasjonsaktivitet, men en telleaktivitet (Fosnot & Dolk, 2001) og Markus viser ingen forståelse for multiplikasjon.

4.2.2. Prosedyreforståelse

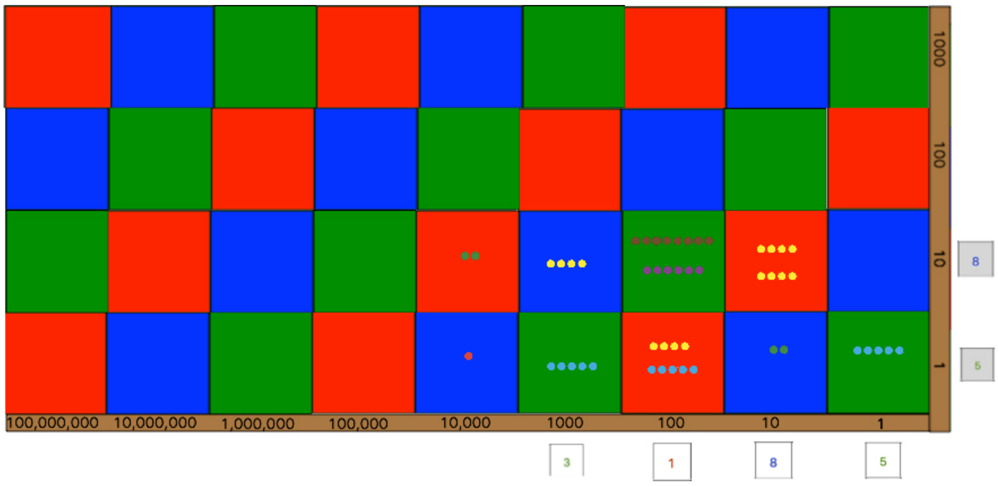
I dette avsnittet presenteres funn fra kategorien «prosedyreforståelse». En prosedyreforståelse vil i sammenheng med Hiebert og Lefevres (1986) definisjon på sjakkbrettet og i oppsettet komme frem i form av at elevene klarer å gjøre alle stegene i riktig rekkefølge på sjakkbrettet, og at de derfor ender opp med riktig svar. Den første delen av prosedyreforståelsen som Hiebert og Lefevre (1986) nevner, som omhandler det symbolske representasjonssystemet, vil ikke komme tydelig frem hos elevene i 3. og 4.klasse da de kun skriver av oppgavekortene i boka, gjør oppgaven på sjakkbrettet og noterer svaret på oppgaven fra fasiten dersom de får riktig. Elevene i 5. og 6.klasse vil kunne vise en prosedyreforståelse ved at de i tillegg til å gjøre alle stegene riktig, også skrive oppsettet på syntaktisk riktig måte og plassere de forskjellige sifrene på riktig plass slik at de får riktig verdi. Av de sju elevene i utvalget så var det de fire elevene fra 5. og 6.klasse som viste en prosedyreforståelse for multiplikasjon på sjakkbrettet. Det neste utdraget viser et typisk eksempel på når elevene viser den ene delen av prosedyreforståelse som omhandler at man har en forståelse for regler, algoritmer eller prosedyrer (Hiebert & Lefevre, 1986). Elevene Truls (5. klasse) og Anne (6. klasse) jobbet med oppgave 4.02 som er 3185 x 85 hvor de først starter med å legge ut tallbrikkene som i linje 1.110.

1.110



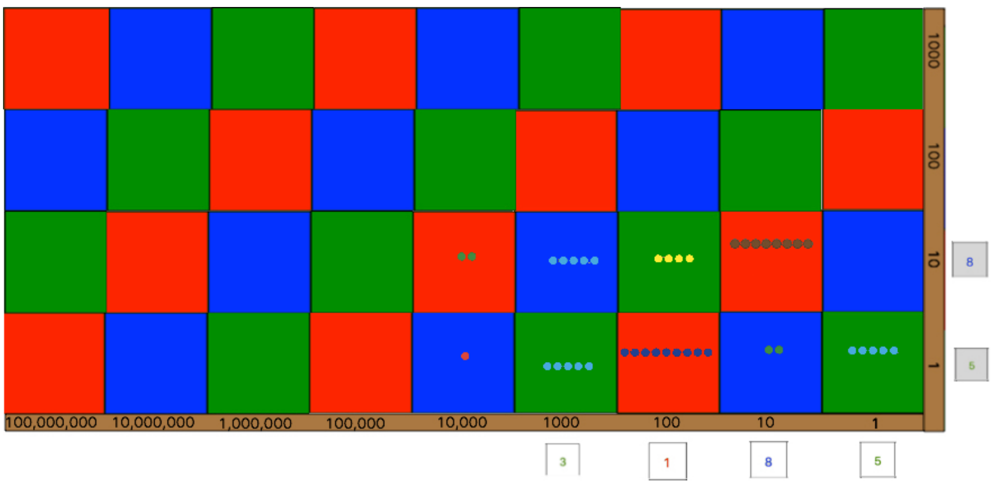
Truls og Anne velger å ikke veksle underveis, men heller til slutt, og når de ferdig med alle deloppgavene så ser brettet slik ut:

1.165



Alle deloppgavene er her gjort riktig, og de velger heller ikke her å samle aller perlene med samme verdi, men veksler heller før de trekker ned perlene, så sjakkbrettet blir slik:

1.181



Deretter trekker de ned alle perlene til den nederste linja, og veksler enda en gang:

1.182 **Truls** Så trekker vi ned [drar perlene ned diagonalt]

1.183 **Anne** Ja. Det blir sånn ja.

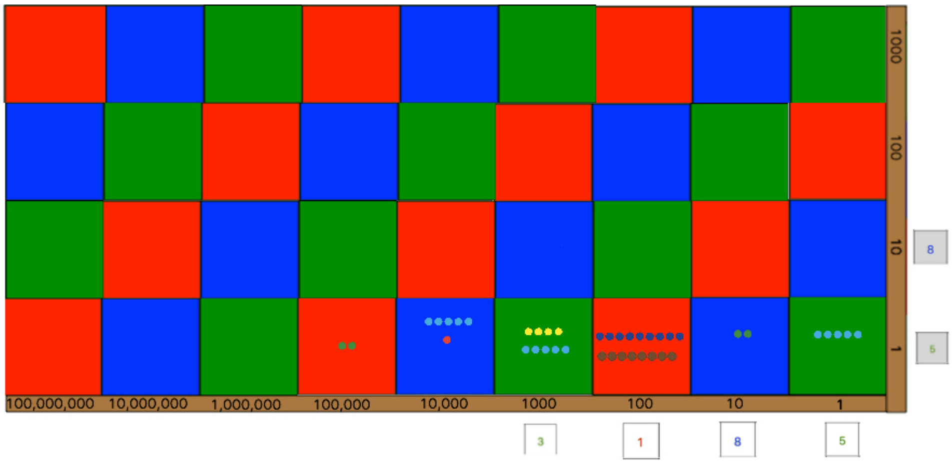
1.184 **Intervjuer** Men hva er det som skjer med tallene nå da?

1.185 **Truls** Nå må vi veksle de igjen

1.186 **Intervjuer** Men hvordan…Når dere tar de på skrå sånn.

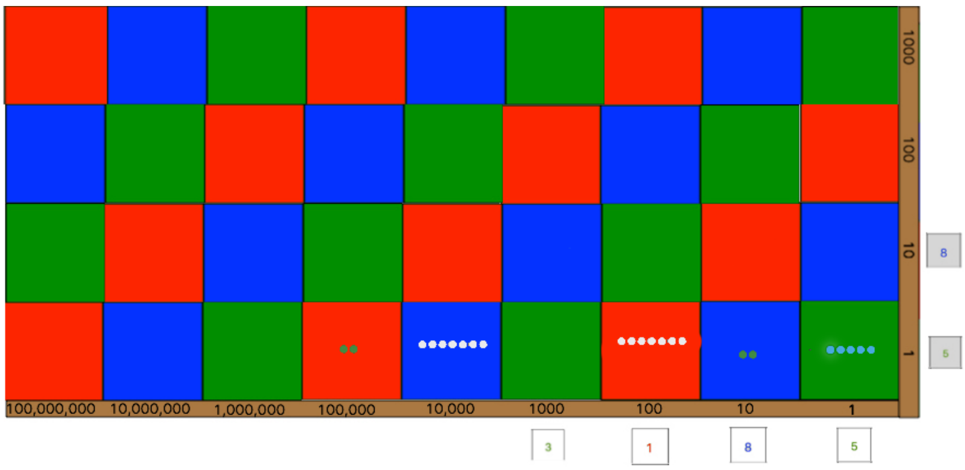
1.187 **Anne** Det er fordi ellers blir det ikke riktig.

1.188 **Intervjuer** Ok. *Slik ser brettet ut etter de har dratt perlene ned på skrå:*



[…]

1.195



At illustrasjonene ovenfor fra sjakkbrettet i intervjusituasjonen med Truls og Anne kan plasseres som en prosedyreforståelse kommer av at det viser at de gjør alle stegene riktig, og derfor ender opp med riktig svar. Selv om de ikke velger den mest effektive sekvensen, ved at de veksler to ganger (linje 1.181 og 1.195), så gjøres prosedyren likevel med en sekvens som gir elevene en korrekt løsning. En annen grunn til at dette kan kategoriseres som prosedyreforståelse er på grunn av utsagnene som Anne og Truls kommer med i linje 1.182-

1.188, som viser at de ikke forstår hvorfor man kan gjøre stegene de gjør, men at man må gjøre de, for «ellers blir det ikke riktig» (linje 1.187). Dette utdypes flere ganger i løpet av intervjuet, når elevene blir spurt om hvorfor de gjør de ulike stegene, også når de blir spurt om hva trappa representerer i oppsettet:

1.247	**Anne**	Det er fordi … Man kaller det faktisk en trapp. Men det er meninga at det blir sånn, så da begynner man bare å trekke ned [dra perlene ned diagonalt]
1.248	**Truls**	Det er lettere å la henne forklare, for jeg kan ikke forklare det.
1.249	**Intervjuer**	Klarer du ikke å forklare det?
1.250	**Truls**	Nei.
1.251	**Anne**	Hvorfor ikke?
1.252	**Truls**	Jeg vet ikke.
1.253	**Anne**	Når man ser at man har en trapp, så gjør man jo bare sånn. Og det er jo på en måte en trapp på brettet også. Trappa er laget for at man skal gjøre det på den måten.

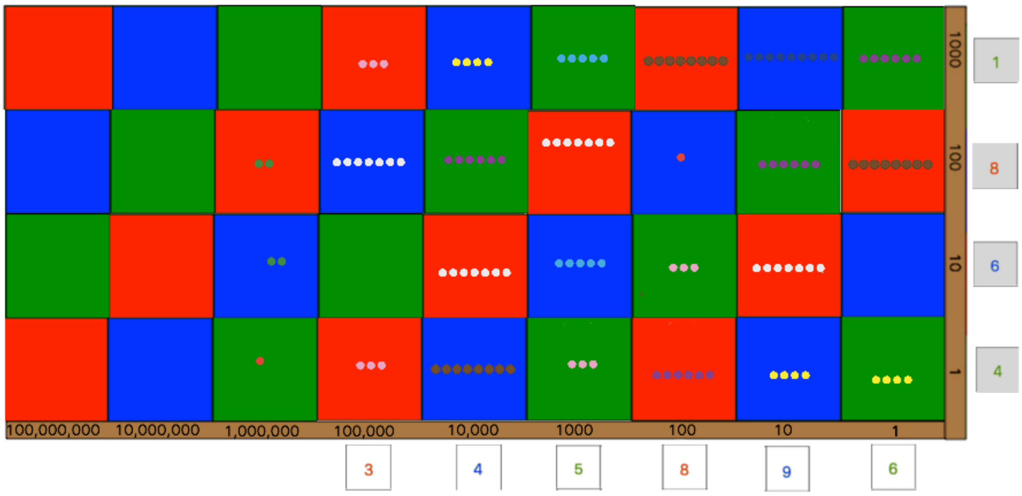
Det blir også mens de jobber med en annen oppgave spurt om hva det er som skjer når man multipliserer et tall med 10, etter de er ferdig med oppgave 3.01 som er 2743 x 10, hvor de sier følgende:

1.259	**Anne**	Mm, når man ganger med ti, så blir det alltid en null til.
1.260	**Truls**	Det er lettere å la henne forklare, for jeg kan ikke forklare det.
1.261	**Intervjuer**	Ja, hvorfor blir det sånn da?
1.262	**Anne**	Det er bare sånn det er.
1.263	**Truls**	Ja, det er bare sånn det er.
1.264	**Anne**	Man vet ikke hvorfor, men sånn er det bare.

At utsagnene (1.247-1.253 & 1.259-1.264) om sjakkbrettet og multiplikasjon kategoriseres som prosedyreforståelse kommer av at de begrunner de valgene de tar med at «ellers blir det ikke riktig» og «det er bare sånn det er». Anne var veldig opptatt av at stegene skulle gjøres i riktig rekkefølge og at de skulle notere ned svarene fra deloppgavene etter hver gang, ellers ville det heller ikke bli riktig svar. Selv om de ikke klarer å begrunne det de gjør på sjakkbrettet så gjennomfører de likevel stegene på riktig måte, plasserer perlene i riktig ruter og gjør alt i riktig rekkefølge. Truls viser også en prosedyreforståelse ved at han kan utføre stegene på sjakkbrettet, men samtidig uttrykker eksplisitt at han ikke «kan forklare det» (linje 1.260).

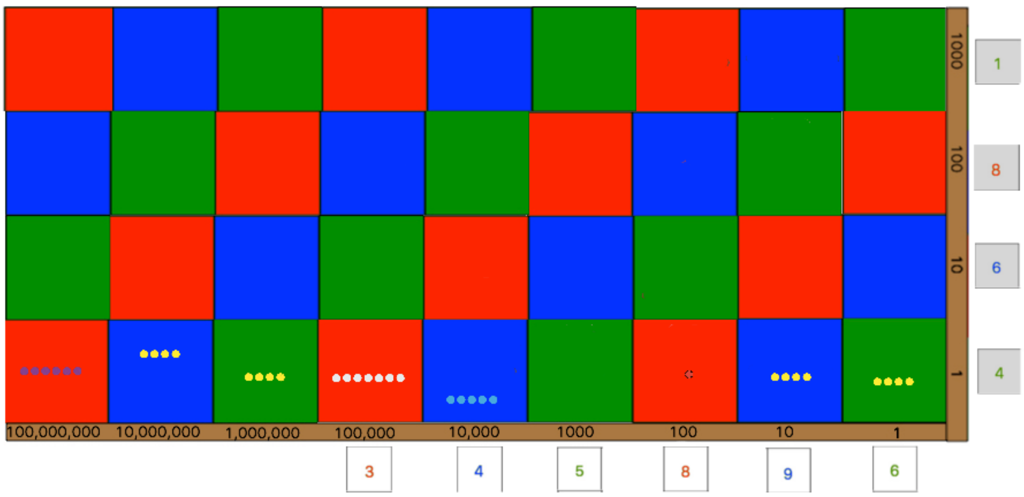
Av de fire elevene fra 5. og 6.klasse så var det kun Tone som viste en prosedyreforståelse i forbindelse med oppsettet i intervjuene. Tone (5. klasse) og Lise (6. klasse) velger å gjøre oppgave 4.19 på sjakkbrettet som er 345896 x 1864. I dette multiplikasjonsstykket er det 24 deloppgaver med 15 overganger i deloppgavene og 7 overganger når de adderer perlene med samme verdi til slutt. De velger også å veksle underveis i hver deloppgave, og slipper derfor å veksle alle rutene når de er ferdig med de 24 deloppgavene, og brettet ser da slik ut:

5.175

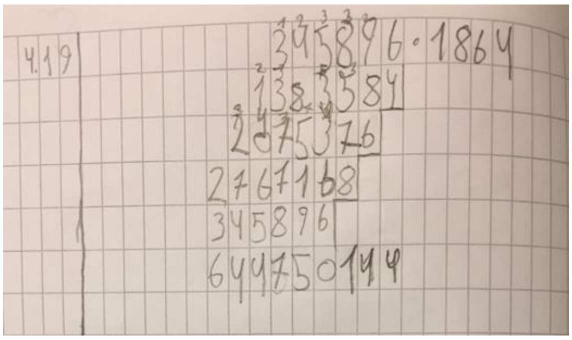


De trekker så ned alle perlene, adderer og veksler de, og får svaret 644750144 som er riktig:

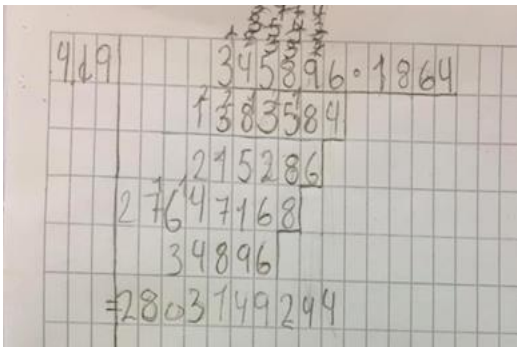
5.191



Oppsettet til Tone og Lise ser da slik ut:



Figur 33: Bilde av Tones oppsett med oppgaven 345896 x 1864

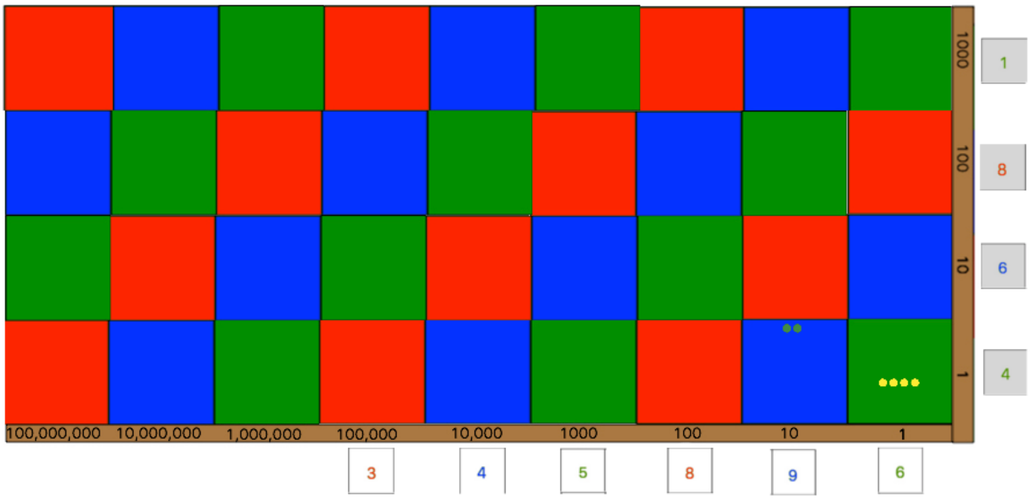


Figur 32: Bilde av Lises oppsett med oppgaven 345896 x 1864

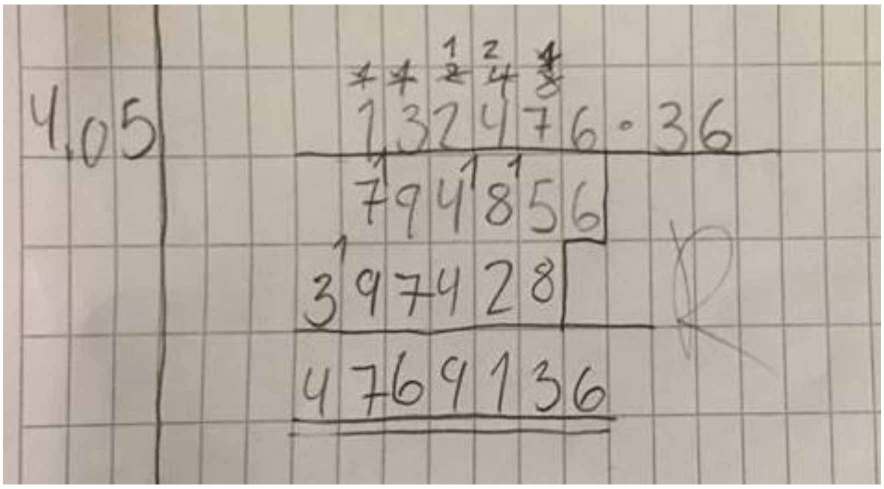
Tones oppsett (figur 32) stemmer overens med sjakkbrettet og hun har fått riktig svar på alle deloppgavene. Dette kan tyde på at hun har en prosedyreforståelse som går utover sjakkbrettet, og at hun derfor klarer å overføre det hun gjør på sjakkbrettet til oppsettet. Hun skriver symbolene og tallene på en akseptabel måte, som innebærer at hun har en kunnskap om symbolene og syntaksen i matematikken, som er den ene delen av prosedyreforståelsen som Hiebert og Lefevre (1986) nevner. På sjakkbrettet gjør hun også alle stegen riktig, med riktig rekkefølge i den sekvensen som er mest effektiv. Med den mest effektive sekvensen menes det at stegene som gjøres, både på sjakkbrettet og i oppsettet, ikke kan gjøres på en mer effektiv måte når man deler opp tallene slik, enn den måte Tone har gjort her.

Lises oppsett (til høyre) stemmer ikke, og hun har feil svar på delstykkene fra leddene 60 og 800 i multiplikatoren. Lises feil i oppsettet skjer når jeg begynner å stille spørsmål om det hun gjør, og når Tone da fortsetter på sjakkbrettet uten at Lise følger med. Dette kan tyde på at Lise fortsatt er avhengig av å gjøre prosedyren på sjakkbrettet og at hun ikke er klar for å løsrive seg fra å manipulere tallene med perler. Dette understrekes også gjennom at når de skjedde en overgang på sjakkbrettet, så plasserte Lise perlene øverst i ruta, for å minne seg selv på at det var minne-tallene i oppsettet, slik som i linje 5.88 nedenfor:

5.88



Når Lise her gjør delstykket 6 x 4, så får hun 24 og plasserer 2er perlen i ruta med verdi 10, helt øverst i ruta, og en 4er perle i ruta med verdi 1, på midten av ruta. Dette gjør hun med alle delstykkene hvor det skjer en overgang, slik at hun ser hvilken perle som representerer minne-tallet i oppsettet. Selv om Lise ikke i viser en prosedyreforståelse i forbindelse med oppsettet (figur 33), så viste hun senere i intervjuet at hun klarte å gjennomføre oppgave 3.10 som er 2398 x 200 ved hjelp av oppsettet, uten å bruke sjakkbrettet. Oppgaven er på et lavere nivå enn den som ble vist i utdraget ovenfor med kun 12 deloppgaver og 2 overganger, men hun gjorde likevel alle stegene riktig, noe som kan tyde på at det er med veldig omfattende oppgaver at Lise får utfordringer med å holde oversikt over både sjakkbrettet og oppsettet samtidig. Lise ble også observert med sjakkbrettet, hvor hun gjorde oppgave 4.05 som er 132476 x 36 og får svaret 4769136 som er riktig og oppsettet ser slik ut i boka:



Figur 34: Bilde av Lises oppsett med oppgaven 132476 x 36

4.2.3. Begrepsforståelse

En begrepsforståelse i forbindelse med sjakkbrettet kom frem gjennom elevenes utsagn om det de gjorde på sjakkbrettet, ved at de klarte å forklare de stegene de gjorde og hvorfor de gjorde dem. I Hiebert og Lefevres (1986) definisjon så er det snakk om kunnskap som har rike relasjoner og som er sterkt knyttet opp mot annen kunnskap. I forbindelse med multiplikasjon på sjakkbrettet og i oppsettet, så vil det være sterkt knyttet opp mot kunnskap om den distributive egenskapen og plassverdisystemet, som er grunnen til at både oppsettet og sjakkbrettet fungerer (Ma, 2010). Lise, som ble intervjuet sammen med Tone, forklarte underveis i arbeidet med oppgave 4.19 som er 345896 x 1864, hvorfor de kan dra perlene ned på skrå:

5.177	**Lise**	Fordi at da, da får vi på en måte plussa i dem sammen. Fordi da plusser vi sammen den og den, plusser i samme den. Så den plusses opp med den, så får vi liksom hele svaret til slutt.
5.178	**Intervjuer**	Mm. (...) Kan du vise meg, på oppsettet, hvem det er du plusser sammen egentlig? For her drar du jo på skrå (*peker på sjakkbrettet*). Gjør du der her også da [på oppsettet]?
5.179	**Lise**	Nei, for her ligger de allerede på skrå. Så da trekker vi bare ned de og plusser i hop dem. (...) Det blir nesten akkurat det samme, for de ligger rett nedenfor hverandre (*peker på perlene som ligger diagonalt med samme verdi*), de vi skal plusse sammen. Så da plusser vi de bare sammen, i stedet for å ta de på skrå.

Det Lise snakker om her er sammenhengen mellom sjakkbrettet og oppsettet, hvor grunnen til at de drar perlene ned på skrå er at man samler perlene med samme verdi og deretter adderer disse. På grunn av trappa i oppsettet trenger hun ikke å dra på skrå i oppsettet, men at hun trekker disse loddrett ned og adderer de hvor de allerede ligger loddrett med samme verdi. Lise viser her tegn på forståelse for plassverdisystemet, ved at hun vet at rutene som ligger diagonalt er av samme verdi.

I det samme intervjuet forklarer Lise og Tone hva det er man faktisk gjør med tallene når man bruker sjakkbrettet:

5.201	**Lise**	Så det er lurt å kunne regne sånn her, sånn at du ganger den, den, den, den (*peker på de forskjellige sifrene (tallbrikkene) som multipliseres sammen*).

5.202	**Intervjuer**	Hva er det man gjør når man ganger sånn da, hva er det man gjør? Hva gjør man med stykket på en måte.
5.203	**Tone**	Man tar den da, man starter her, og så ganger man liksom med den (*peker på de forskjellige sifrene (tallbrikkene) som multipliseres sammen*). Det blir som man... Så går man liksom oppover og oppover og bortover og bortover på denne (*peker på de forskjellige sifrene (tallbrikkene) som går oppover og langs sjakkbrettet*). […]
5.254	**Lise**	Du tar jo egentlig bare å... Si da hvis jeg har tre gange åtte, så er det egentlig pluss jeg gjør, bare at jeg kaller det gange i stedet. (...) Og skriver det på en kortere måte, for du kan jo skrive kun bare tre, åtte ganger, eller åtte, tre ganger og liksom bare plusse de sammen. Men sånn her, så går vi bare liksom oppover tallene og plusser den med den... Det er jo på en måte en lettere måte i stedet for... Hvis vi skulle tatt den her, så mange ganger, da hadde det tatt tusen år.

Det Lise og Tone snakker om her er at man på sjakkbrettet multipliserer de ulike leddene med hverandre. Dette kommer frem gjennom Tones utsagn (linje 5.203) hvor hun forklarer at man beveger seg «oppover og oppover og bortover og bortover» på sjakkbrettet, der hun mener at man først multipliserer det ene leddet i multiplikatoren med alle leddene i multiplikanden før man fortsetter med de andre leddene i multiplikatoren, som er de tallbrikkene som går oppover. Utsagnet kan betegnes som begrepsforståelse på bakgrunn av at det de beskriver at de gjør på sjakkbrettet henger sammen med den distributive egenskapen. Utsagnene kan også sies å være på *det første nivået* av en begrepsforståelse, for de knytter det de sier opp mot sjakkbrettet, og det er derfor ikke løsrevet fra konteksten. Det betyr at begrunnelsene de kommer med ikke er generelle, men de bruker sjakkbrettet til å forklare hvorfor de gjør som de gjør, som ved at Tone for eksempel peker på de ulike tallbrikkene for å forklare den distributive egenskapen (linje 5.201), og ikke klarer å forklare dette uten å bruke sjakkbrettet.

Det Lise snakker om i linje 5.254 er hvordan man deler opp tallet slik at man multipliserer de ulike leddene med hverandre. Hun bruker gjentatt addisjon som et eksempel, at når man har 8 x 3 så kan man bare ta 8 + 8 + 8 eller 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 og addere disse for å svaret, men at når man har så store tall som på sjakkbrettet så er det nødvendig å dele opp tallet for å gjøre det enklere, da det ellers hadde "tatt tusen år" (linje 5.254). Hun mener at å bruke gjentatt addisjon, slik $345896 \cdot 1864 = \underbrace{1864 + \cdots + 1864}_{345896}$, vil ta for lang tid. Her også viser hun kunnskap om den distributive egenskapen, hvor man deler opp faktorene i ledd, før man så multipliserer hvert ledd i summen med den andre faktoren, og deretter legger sammen tallene. I tillegg så viser Lise her også en forståelse for den kommutative egenskapen, gjennom at hun sier at når hun tar $8 \cdot 3$ så kan hun enten ta $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ eller $8 + 8 + 8$, for å finne svaret. Utsagnet til Lise (linje 5.254) kan på bakgrunn av at hun referer til både den distributive egenskapen og den kommutative egenskapen betegnes som en begrepsforståelse på bakgrunn av at hun klarer å koble multiplikasjon på sjakkbrettet til annen kunnskap hun har og hun ser sammenhengen mellom de (Hiebert & Lefevre, 1986). Man kan også gjennom dette se at Lise har konstruert en begrepsforståelse på *det reflekterende nivået*, da hun snakker om noe som ikke har en sammenheng med sjakkbrettets kontekst.

4.3. Funn

I analysekapittelet har ulike forståelse for multiplikasjon kommet til syne gjennom elevenes handlinger og utsagn på sjakkbrettet. Disse har blitt identifisert og analysert, og selv om det finnes flere eksempler der elevene viser forståelse, så har det her bare blitt presentert eksempler på tilfeller der elever har kommet med lignende handlinger eller utsagn, eller hvor bare enkelt elever har vist en forståelse gjennom handlinger eller utsagn. Jeg velger derfor å oppsummere funnene i en tabell, som viser hva hver enkelt elev siste av forståelse i sitt arbeid med sjakkbrettet.

Elev	**Klasse**	**Ingen forståelse**	**Prosedyreforståelse**		**Begrepsforståelse**	
			Regler, algoritmer eller prosedyrer	Det symbolske representasjonssystemet	Det første nivået	Det reflekterende nivået
Sara	3.klasse					
Helene	3.klasse					
Markus	4.klasse					
Truls	5.klasse					
Tone	5.klasse					
Anne	6.klasse					
Lise	6.klasse					

Tabell 1: Oppsummering av funnene fra analysen

Funnene fra analysen, oppsummert i tabell 1, vil videre bli drøftet opp mot relevant teori og tidligere studier i det neste kapittelet, og det vil bli forsøkt å gi svar på forskningsspørsmålet som ble stilt innledningsvis.

5. DRØFTING OG AVSLUTTENDE BETRAKTNINGER

I begynnelsen av denne studien ble det stilt følgende forskningsspørsmål:

> *Hvilken forståelse for multiplikasjon viser et utvalg elever i arbeidet med konkretiseringsmateriellet sjakkbrettet?*

I dette kapittelet ønsker jeg å trekke sammen trådene fra analysen for å forsøke å gi svar på spørsmålet, gjennom å drøfte funnene som ble presentert i forrige kapittel opp mot det teoretiske grunnlaget for oppgaven. Innledningsvis ønsker jeg å se på muligheter og utfordringer med å vise en forståelse for multiplikasjon i arbeidet med konkretiseringsmateriellet sjakkbrettet. Deretter ønsker jeg å se på hvilken forståelse som kom til syne hos elevene og sette det i en større sammenheng, hvor jeg drøfter det opp mot en matematisk forståelse for multiplikasjon. Drøftingskapittelet er derfor delt opp i ”muligheter med sjakkbrettet” og ”matematisk forståelse for multiplikasjon i sammenheng med sjakkbrettet”. Videre vil jeg avrunde studien med metodekritikk, didaktiske implikasjoner og studiens bidrag til forskningsfeltet.

5.1. Muligheter og utfordringer med sjakkbrettet

Som det ble belyst i analysen av sjakkbrettet så er det mange ulike matematiske begreper og ideer som inngår i arbeidet med materiellet. Noen av begrepene var det nødvendig at elevene hadde utviklet en forståelse for en forståelse for, for å i det hele tatt kunne bruke sjakkbrettet, noe som kom tydelig frem hos elevene i 3. og 4. klasse. Elevene hadde store utfordringer med å bruke sjakkbrettet og gjennom analysen kom det frem at det hovedsakelig kom av utfordringer med unitizing og/eller plassverdisystemet. Å forstå unitizing og plassverdisystemet på sjakkbrettet innebærer å forstå at man grupperer objekter i 10 og at man deretter behandler gruppene som en egen enhet (Hulbert et al., 2017), og videre at man her bruker perlene som struktur til å vise informasjon om grupperingene. At elevene fra 3. og 4. klasse ikke klarte å vise en forståelse for unitizing kan komme av at det innebærer et stort skifte i hvordan de resonnerer (Fosnot & Dolk, 2001), da de går fra å kun telle objekter til å telle både objekter og grupper med objekter samtidig. Plassverdisystemet på sjakkbrettet er knyttet opp mot slik man skriver tall, slik at en forståelse for degge begrepet vil være fordelaktig når elevene skal arbeide med sjakkbrettet. Hiebert og Wearne (1992) påstår at elever kan utvikle en begrepsforståelse for plassverdisystemet gjennom å bruke konkretiseringsmateriell, men at det ikke er tydelig hva med en slik alternativ metode som fremmer en forståelse. I forbindelse med sjakkbrettet er det flere av komponentene som skal belyse hva elevene gjør på materiellet i sammenheng med plassverdisystemet, hvor man først og fremst har perlene. Perlene representerer sifrene 1-9, og man har ingen 10er perle, noe som kan være med på å skape et behov for å ta i bruk unitizing og gruppere med 10, slik som når man skriver tall. Samtidig representeres verdien på rutene i den nederste horisontale linja og den vertikale linja til høyre på sjakkbrettet med tall som er plassert ved siden av rutene, slik at eleven skal se verdien tydelig. Likevel kan det være en utfordring for elevene da man har den ekstra dimensjonen, som er forskjellig fra hvordan vi skriver tall, og at verdien på de andre rutene ikke blir representert med tall, slik at de må forstå at rutene som har samme farge diagonalt, har samme verdi. Slik jeg anser det vil det for elevene være en nødvendighet å utvikle en forståelse for unitizing og plassverdisystemet i forkant av at de begynner å bruke sjakkbrettet, for at de skal kunne utvikle en prosedyre- og/eller begrepsforståelse for multiplikasjon med flersifra tall, og for å kunne bruke sjakkbrettet optimalt. Samtidig skal det også nevnes at selv om elevene ikke klarer å vise en forståelse for begrepene i arbeidet på sjakkbrettet, så betyr ikke dette nødvendigvis at de ikke har en forståelse for dem. Et eksempel kan være at en elev har utviklet en forståelse for plassverdisystemet i sammenheng med det symbolske representasjonssystemet som er utviklet på det *første nivået* (Hiebert & Lefevre, 1986). Elevens forståelse er da knyttet opp mot symbolene, slik at han eller hun ikke er i stand til å overføre kunnskapen til en annen representasjon, her sjakkbrettet.

Med tanke på at elevene i 3. og 4. klasse ikke klarte å vise verken en prosedyre- eller begrepsforståelse i arbeidet, og at to av elevene i 5. og 6. klasse kun viste en prosedyreforståelse, så kan det i begge tilfellene være at elevene ikke har jobbet tilstrekkelig med materiellet. For at elevene skal kunne få den ”aha-opplevelsen” som det er meningen det skal gi (Wennerström & Smeds, 2009), så er det nødvendig at de jobber med materiellet over en lengre periode og som det kom frem gjennom Sowells (1986) metaanalyse så er det de elevene som har holdt på med et konkretiseringsmateriell i ett år eller lengre som har det største læringsutbytte. Dette er også et av Laski et al (2015) sine prinsipper for økt effekt ved bruk av materiell, ved at man er nødt til å bruke det over en lengre periode for at eleven skal se relasjonen mellom materiellet og de matematiske begrepene som det består av. Hensikten med å bruke konkretiseringsmateriell er, som påpekt i teorikapittelet, at elevene gjennom å manipulere det skal tilegne seg den matematiske meningen som ligger bak. I min studie var det ikke alle som viste en forståelse for den matematiske meningen, og Hiebert og Wearne (1992) sier at elever i noen tilfeller bruker konkretiseringsmateriell som utenatlæring, med liten eller ingen forståelse for de matematiske begrepene som ligger bak prosedyrene. To av elevene i min undersøkelse bekrefter dette ved at de kun viste en prosedyreforståelse i arbeidet med sjakkbrettet. Denne forståelsen var knyttet opp mot prosedyren på sjakkbrettet og de samme to elevene klarte ikke å vise en prosedyreforståelse i forbindelse med det symbolske representasjonssystemet i oppsettet. I likhet med elevene fra 3. og 4.klasse sine utfordringer med plassverdisystemet og hvordan vi skriver tall, så kan en grunn til dette være de visuelle forskjellene mellom sjakkbrettet og oppsettet, som gjør at elevene ikke tydelig ser sammenhengene mellom de. Overgangen elevene gjør mellom sjakkbrettet og oppsettet innebærer det Duval (2004) kaller for en *omdannelse* (oversatt fra conversion) som er en utfordring på grunn av at det skjer et ”kognitivt hopp” hos elevene. Det kognitive hoppet handler om at det skjer en transformasjon til et annet representasjonssystem, hvor elevene må identifisere de samme matematiske begrepene i de to forskjellige representasjonene som visuelt er ganske ulik. Dette kan kun skje ved at man linker de to opp mot hverandre gjennom å eksplisitt kommentere det eller ved at man gjør behandlinger (oversatt fra treatment) på begge representasjonene, slik at man oppdager hva som er likt og dermed tilegner seg de matematiske begrepene som ligger i begge (Duval, 2004).

Det var et tydelig skille mellom de elevene som viste en prosedyreforståelse og elevene som viste en begrepsforståelse. Forskjellen viste seg mest hos de to elevene som kun hadde en prosedyreforståelse, hvor de ikke klarte å begrunne stegene de gjorde på sjakkbrettet ved å bruke de matematiske begrepene. De uttrykte også eksplisitt at de ikke forsto hvorfor man kunne gjøre sånn som man gjør, noe som er karakteristisk ved en prosedyreforståelse (Hiebert & Lefevre, 1986). Av de to elevene som viste en begrepsforståelse, så var det kun én av disse, Lise, som viste en begrepsforståelse på det reflekterende nivået, og som var i stand til å knytte et matematisk begrep opp mot en annen kontekst. Det som skiller Lise fra de andre elevene kan være at hun har gått fra det konkret-operasjonelle stadiet til det formell-operasjonelle stadiet, der et kjennetegn er at man ikke lengre trenger å manipulere konkretiseringsmateriell for å resonnere (Copeland, 1970). Det hun gjør er å se en sammenheng til et matematisk begrep som ikke ligger i sjakkbrettet, som viser at en del av hennes forståelse for multiplikasjon, her den kommutative egenskapen, er løsrevet fra en kontekst. Det er nettopp dette man ønsker når elevene tar i bruk konkretiseringsmateriell, nemlig at de gjennom å manipulere de klarer å tilegne seg den matematiske begrepet som ligger i dem. Videre ønsker man også at den interne representasjonen man utvikler er lett, slik at den ikke inneholder overflødige detaljer og er frigjort fra de kontekstuelle betingelsene og derfor kan brukes til andre lignende situasjoner

(Hiebert & Carpenter, 1992; Ostad, 1992). Samtidig skal det også sies at Lise ikke viser en begrepsforståelse på det reflekterende nivået for noen av de begrepene som er knyttet til sjakkbrettet. Et eksempel er når hun forklarer den distributive egenskapen, så bruker hun sjakkbrettet til å forklare at man multipliserer de ulike leddene med hverandre og hun klarer ikke å forklare dette uten å peke på sjakkbrettet for å vise hva hun mener. Det er derfor usikkert om de to elevene, Lise og Tone, som har utviklet en begrepsforståelse, klarer å bruke kunnskapen de viser i forbindelse med sjakkbrettet, i andre lignende situasjoner.

5.2. Matematisk forståelse for multiplikasjon i sammenheng med sjakkbrettet

En fullstendig forståelse for multiplikasjon innebærer mye mer enn bare de begrepene som kommer frem gjennom sjakkbrettet. Som nevnt i analysen av sjakkbrettet så legger det ikke til rette for verken den kommutative eller assosiative egenskapen, eller multiplikativ tenking i form av multiplikasjon i sammenheng med en kontekst. Ifølge Smith og Smith (2006) så innebærer en forståelse for multiplikasjon at man utvikler et språk for å tenke på og beskrive *multiplikative situasjoner* og deres mengder, i tillegg til at man har en grunnleggende forståelse for begrepene *mengde, like grupper* og *enheter som er relevante for multiplikasjon.* Sjakkbrettet legger her kun til rette for å vise en forståelse for to av disse, som er *mengde*, i forbindelse med plassverdisystemet hvor sifrene 0-9 blir strukturert etter hvilken mengde som skal representeres med perle, og *enheter som er relevante for multiplikasjon*, i forbindelse med unitizing ved at de må omgruppere perlene dersom verdien blir over 10. Begrepet *like grupper* omhandler at elevene må erfaring med å gruppere objekter for å forstå rollen like grupper har i multiplikative situasjoner, slik at elevene går fra å telle alle objektene i oppgaven til å multiplisere like grupper. Multiplikativ tenking innebærer her at man går fra å tenke på additive strukturer, som for eksempel at 6 kan deles opp i 1 + 5, 2 + 4, 3 + 3 osv., til at man tenker på multiplikative grupper som for eksempel at 6 er en gruppe med seks, to grupper med tre, tre grupper med to, seks grupper med én og så videre (Smith & Smith, 2006). Å forstå *multiplikative situasjoner* innebærer at elevene må ha erfaring med å finne ut hva forskjellige tekstoppgaver betyr og hvilke multiplikative situasjoner de beskriver, og de må også forstå sammenhengen med divisjon (Smith & Smith, 2006). De to sistnevnte begrepene kommer ikke frem i elevenes arbeid med sjakkbrettet, og det legges heller ikke til rette for at elevene skal utvikle en forståelse for de gjennom arbeidet. Når det kun fokuseres på operasjonen ved å multiplisere to tall eller å memorere den lille gangetabellen, før man utvikler en forståelse for multiplikative situasjoner, så fører dette til at man innsnevrer elevenes fokus. Det gis også et feil inntrykk av hva det innebærer å multiplisere og de lærer heller ikke de ulike situasjonene hvor multiplikasjon inngår (Smith & Smith, 2006; Solem et al., 2017). Med tanke på hvilke matematiske begreper som inngår i sjakkbrettet, så kan det derfor sies at den forståelsen elevene viser i forbindelse med arbeidet, kun vil være en liten del av den matematiske forståelsen for multiplikasjon og begrepene legger heller til rette for at elevene skal få en forståelse for standardalgoritmen/oppsettet.

5.3. Metodekritikk

Ettersom denne studien ble gjennomført som en kvalitativ undersøkelse med kun syv elever, så vil det ikke være hensiktsmessig å trekke generelle konklusjoner ut fra funnene. Som påpekt tidligere i studien så vil kvalitativ forskning alltid være påvirket av forskerens forforståelse, og denne forforståelsen påvirker hele prosessen fra å velge spørsmål til intervjuguiden til tolkningene som gjøres i analysen (Nilssen, 2012). Funnene vil også derfor være påvirket av hvordan jeg har tolket elevenes utsagn og handlinger, men også hvordan jeg har tolket konkretiseringsmateriellet (Cohen et al., 2011).

For å samle inn datamaterialet så ble det tatt i bruk både observasjon og intervju som metode. I observasjonene ble det, som tidligere nevnt, kun tatt notater på bakgrunn av at ikke alle elevene i klassene hadde samtykket til deltakelse og jeg kunne ikke sikre at de ikke ble med på opptakene. I ettertid ser jeg at det hadde vært fordelaktig å gjort videoopptak i tillegg, da jeg i større grad hadde kunnet fokusere på både det visuelle og verbale, da det kun ble tatt notater av det visuelle for å fokusere observasjonene. Med videoopptak hadde jeg også kunne sikret meg at jeg ikke gikk glipp av viktige hendelser på sjakkbrettet, da selve notatskrivingen tok mye fokus. Dette kunne skjedd gjennom bedre planlegging hvor jeg hadde ordnet et alternativ opplegg for elevene som ikke samtykket, slik at de kunne tatt i bruk et annet rom. I etterkant av gjennomføringen ser jeg også at spørsmålene som ble stilt underveis i intervjuet kunne vært endret og bedre planlagt. Med tanke på at intervjuet ble gjennomført ved at elevene samtidig arbeidet med sjakkbrettet, så var det vanskelig på forhånd å planlegge spørsmålene, da det kunne oppstå uforutsette hendelser og arbeidet med sjakkbrettet kunne skje på forskjellige måter. Det var derfor lettere å ta utgangspunkt i *oppfølgingsspørsmål*, slik at jeg kunne tilpasse spørsmålene til de utsagnene og hendelsene som kom underveis. En annen ting med intervjuet er at, når man bruker dette som datainnsamlingsmetode, så er det en fare for at elevene oppfører seg annerledes, da det er en ny og ukjent situasjon for dem (Cohen et al., 2011). Dette kan derfor ha vært med på å påvirke elevene, slik at det ikke kan sies med sikkerhet at elevene fikk vist hele eller sin egentlige forståelse.

5.4. Didaktiske implikasjoner og studiens bidrag til forskningsfeltet

Denne studien viser at man kan bruke konkretiseringsmateriell til å se på hvilken forståelse elevene har utviklet og tar i bruk når de arbeider, her i forbindelse med multiplikasjon med flersifra tall på sjakkbrettet. Studien styrker Hiebert og Carpenter (1992) sitt rammeverk, hvor de sier at de eksterne representasjonene, her sjakkbrettet, kan hjelpe å si noe om elevenes interne representasjoner, her forståelse for ulike matematiske begreper. Samtidig så skal det sies at på bakgrunn av metodene valgt for datainnsamling, hvor det ble sett på hvordan man kan bruke konkretiseringsmateriell til å si noe om elevenes forståelse, så kom det frem at det var en forutsetning at man snakket med elevene og at man stilte spørsmål for å kunne vurdere denne forståelsen. I montessoripedagogikken blir elevene vurdert gjennom at læreren observerer og noterer det eleven gjør (Wennerström & Smeds, 2009), og det kan her stilles spørsmål om en slyk type vurdering fanger opp elevenes forståelse. For å virkelig få et innsyn i hva elevene mener og forstår, så er det nødvendig å ha en samtale med dem, og jeg hadde ikke kunne sagt noe om elevenes begrepsforståelse kun på bakgrunn av observasjonene. Jeg kunne valgt å stille mer spørsmål i observasjonene, men det hadde da blitt enn annen situasjon enn jeg ønsket, ved at jeg ville at de skulle arbeide på en så naturlig måte som mulig.

Forståelsen som kom til syne i denne undersøkelsen er også sterkt knyttet opp mot elevenes arbeid på sjakkbrettet, og det er derfor også vanskelig å si om elevene hadde utviklet en begrepsforståelse på det første eller det reflekterende nivået. For å undersøke dette videre kan det være lurt å bruke å bruke et annet eller flere konkretiseringsmateriell, som belyser de samme matematiske begrepene, eller kun tatt i bruk oppsettet, for å se om elevenes kunnskap er knyttet opp mot materieller, eller om den er frigjort fra konteksten, og dermed om elevene har utviklet en lett eller tung forestilling.

Selv om det stadig blir mer forskning omkring montessoripedagogikken på verdensbasis, så er det fortsatt mangelfullt i Norge. Med tanke på at antallet montessoriskoler øker for hvert år, så vil det være nødvendig med forskning omkring hvordan denne pedagogikken påvirker elevenes læring, og hvordan matematikkmateriellet har en innvirkning på elevenes matematiske forståelse. Noe forskning viser at elever som går på montessoriskole scorer høyere på standardiserte tester i matematikk, og jo mer implementert montessoripedagogikken er i skolen, jo høyere scorer de også på prøvene (Lillard & Else-Quest, 2006; Lillard, 2012). Selv om min studie viser at det ikke var alle elevene som klarte å vise en begrepsforståelse for de relevante matematiske begrepene i arbeidet på sjakkbrettet, så kan det være interessant å se på sammenhengen og kombinasjonen mellom de forskjellige matematikkmateriellene som brukes i skolen. Med en annen tilnærming enn denne studien vil det også være mulig å se om sjakkbrettet også er med på å øke elevenes forståelse, men at det da vil være nødvendig med en longitudinell studie, hvor man ser på elevenes forståelse før og etter bruken av konkretiseringsmateriellet.

REFERANSELISTE

Ball, D. L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator: the professional journal of the American Federation of Teachers, 16*(2), 14-18, 46-47

Bereiter, C. (1985). Toward a solution of the learning paradox. *American Educational Research, 55*(2), s. 201-226.

Carbonneau, K. J., Marley, S. C. & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 150*(2), 380-400.

Carlsson, A. (2005). *Barnet i sentrum – de grunnleggende prinsippene i montessoripedagogikken.* Bekkestua: Montessoriforlaget.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 53-59.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt forlag

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7.utg.). Abingdon: Routledge

Copeland, R. W. (1970). *How children learn mathematics: Teaching implication of Piaget's research.* London: The Macmillian Company

Duval, R. (2004). A crucial issue in mathematics education: The ability to change representation register. *Proceedings of the 10th International conference on Mathematics Education.*

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61* (1-2), 103-131

Elkind, D. (1970). *Børn og unge: en introduksjon til Jean Piaget.* København: Hans Reitzel Forlag

Fangen, K. (2004). *Deltagende observasjon.* Bergen: Fagbokforlaget

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division.* Portsmouth, N. H: Heinemann

Friskolelova. (2003). Lov om frittståande skolar m.v. av 1 oktober 2003. Hentet fra https://lovdata.no/dokument/NL/lov/2003-07-04-84

Fuson, K. C. & Briars, D. J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first-and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 21,* 180-206.

Gold, R. L. (1958). Roles in sociological field observations. *Social Forces, 36*(3), 217-223

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. I D., A., Grouws (Red.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 276-295). New York: Macmillian Publishing Co, Inc.

Harvey, R. (2002). Klar ferdig gå! Tretten måter å gange på. *Tangenten, 1,* 14-17

Hiebert, J. & Carpenter, T., P. (1992). Learning and teaching with understanding. I D., A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (s. 65-97). New York: Macmillian Publishing Co, Inc.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert (Red.). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* (s. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(2), 98-122

Hulbert, E. T., Petit, M. M., Ebby, C. B., Cunningham, E. P. & Laird, R. E. (2017). *A focus on multiplication and division: Bringing research to the classroom.* Abingdon, UK: Routledge

Hundeide, K. (1985). *Piaget i skolen.* Oslo: Cappelen

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3.utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag

Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C. & Murray, A., K. (2015). What makes mathematics manipulatives effective? Lessons from cognitive science and Montessori education. *SAGE Open, 5*(2), 1-8

Lillard, A. & Else-Quest, N. (2006). Evaluating montessori education. *Science, 313*(5795), 1893-1894

Lillard, A. (2012). Preschool children's development in classic montessori, supplemented montessori, and conventional programs. *Journal for School Psychology, 50*(3), 379-401

Long, C. (2005). Maths concepts in teaching: Procedural and conceptual knowledge. *Pythagoras, 2005*(62), 59-65.

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* New York: Routledge.

McNeil, N. M. & Jarvin, L. (2007). When theories don't add up: Disentangling the manipulatives debate. *Theory Into Practice 46*(4), 309-316.

McNeil, N. M., Uttal, D. H., Jarvin, L. & Sternberg, R. J. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems. *Learning and Instruction, 19*(2), 171-184.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for research in Mathematics Education, 29*(2), 121-142.

Montessori, M. (1949). *Barnesinnet.* Bekkestua: Montessoriforlaget.

Montessori, M. (2008). *The montessori method.* Radford VA: Wilder Publications, LLC.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), 175-197

Nilssen, V. L. *Analyse i kvalitative studier: Den skrivende forskeren.* Oslo: Universitetsforlaget

Norsk Montessoriforbund. (2013). *Læreplan for montessoriskolen – fag og arbeidsmåter gjennom 10 skoleår.* Stabekk: Norsk Montessoriforbund

Norsk Montessoriforbund. (2017). *Nye regler for kvalitetssikring av montessoriutdanning.* Hentet fra https://www.montessorinorge.no/nye-regler-for-kvalitetssikring-av-montessoriutdanning/

Norsk Montessoriforbund. (2018). *Barnehager og skoler*. Hentet fra https://montessorinorge.no/barnehager-og-skoler/

Norsk Montessoriforbund. (u.å.). *Bli montessoripedagog.* Hentet fra https://montessorinorge.no/bli-montessoripedagog/

Ostad, S. A. (1992). Fra det konkrete til det symbolske: Matematikkopplæring i representasjonsanalytisk perspektiv. *Nordisk tidsskrift for spesialpedagogikk, 4*, 208-214

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk: Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Kristiansand: Høyskoleforlaget

Rasch-Halvorsen, A., Rangnes, T. E. & Aasen, O. (2007). *Tusen millioner: Grunnbok 6A.* Oslo: Cappelen Damm

Robson, C. (2002). *Real world research.* Oxford: Blackwell

Seldin, T. (2007). *Gi barnet ditt en harmonisk start med montessori.* London: Dorling Kindersley Limited.

Simpson, M. & Tuson, J. (2003). *Using observations in small-scale research: A beginner's guide.* Glasgow: University of Glasgow

Sinclair, H. (1990). Learning: The interactive recreation of knowledge. I L. P. Steffe & T. Wood (Red.). *Transforming children's mathematics education: International perspectives* (s. 19-29). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Skott, J. Jess, K. & Hansen, H. C. (2008). *Delta: fagdidaktik.* Frederiksberg C: Samfundslitteratur

Smith, S. Z. & Smith, M. E. (2006). Assessing elementary understanding of multiplication concepts. *School Science and Mathematics, 106*(3), 140-149

Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E. & Smestad, B. (2017). *Tall og tanke 2: matematikkundervisning på 5. til 7. trinn.* Oslo: Gyldendal akademisk

Sowell, E., J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics, 20*, 498-505

Statistisk sentralbyrå [SSB]. (2016). *Elever i grunnskolen, 1 oktober 2016.* Hentet fra https://www.ssb.no/utdanning/statistikker/utgrs/aar

Statistisk sentralbyrå [SSB]. (2017). *Nøkkeltall for utdanning.* Hentet fra https://www.ssb.no/utdanning/nokkeltall

Store Norske Leksikon. (2016). *Montessoriskoler.* Hentet fra https://snl.no/montessoriskoler

Søderlind, D. (2006, 02. oktober). Flinkere med montessoripedagogikk. *Forskning.no.* Hentet fra https://forskning.no/barn-og-ungdom-pedagogiske-fag-skole-og-utdanning/2008/02/flinkere-med-montessoripedagogikk

Thompson, P. W. (1992). Notations, conventions, and constrains: Contributions to effective uses of concrete materials in elementary mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *23*(2), s. 123-147.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet. (2015). *Søke om å starte en friskole.* Hentet fra https://www.udir.no/utdanningslopet/private-skoler/soke-om-a-starte-en-friskole/#sok-om-driftstillatelse

Vangen, K. (2015). *En studie av montessoripedagogikk*. (Mastergradsavhandling, UiT Norges arktiske universitet). Hentet fra https://munin.uit.no/bitstream/handle/10037/8092/thesis.pdf?sequence=2

Vatland, M. H. & Lexow, M. (2004). *Montessori – en innføring.* Bekkestua: Montessoriforlaget.

Wennerström, K. S. & Smeds, M. B. (2009). *Montessoripedagogik i förskola och skola* (3.utg.). Stockholm: Natur & Kultur

VEDLEGG

Vedlegg 1: Oppgaveoversikt

Nivå	Tema	Oppgavetyper	Oppgaver
1	**Introduksjon**	1.01 – 1.12: Tallkort	1.01: 2542 1.02: 6321 1.03: 56321 1.04: 73676 1.05: 288469 1.06: 318215 1.07: 3122108 1.08: 6440787 1.09: 78564953 1.10: 34735130 1.11: 382199576 1.12: 554901034
2	**Ett siffer i multiplikator**	2.01 – 2.02: 4 siffer i multiplikanden uten overgang	2.01: 3214 x 2 2.02: 3123 x 3
		2.03 – 2.11: 4 siffer i multiplikanden med overgang	2.03: 2324 x 3 2.04: 1243 x 4 2.05: 2546 x 3 2.06: 3124 x 6 2.07: 2243 x 8 2.08: 3175 x 5 2.09: 4960 x 4 2.10: 5438 x 9 2.11: 8257 x 6
		2.12 – 2.14: 5 siffer i multiplikanden med overgang	2.12: 16089 x 5 2.13: 14136 x 6 2.14: 36981 x 7
		2.15 – 2.18: 6 siffer i multiplikanden med overgang	2.15: 218578 x 4 2.16: 529067 x 8 2.17: 247853 x 3 2.18: 126789 x 4
3	**Flersifra multiplikator**	3.01 – 3.03: 4 siffer i multiplikanden, med multiplikator 10	3.01: 2743 x 10 3.02: 6524 x 10 3.03: 7465 x 10

		3.04 – 3.06: 4 siffer i multiplikanden, med multiplikator 100	3.04: 3456 x 100 3.05: 5631 x 100 3.06: 8972 x 100
		3.07 – 3.08: 4 siffer i multiplikanden, med multiplikator i multipler på 10	3.07: 1217 x 30 3.08: 4585 x 70
		3.09 – 3.10: 4 siffer i multiplikanden, med multiplikator i multipler på 100	3.09: 9103 x 800 3.10: 2398 x 200
		3.11 – 3.12: 4 siffer i multiplikanden, med multiplikator i multipler på 1000	3.11: 6832 x 2000 3.12: 7059 x 6000
4	**Flersifra multiplikator**	4.01 – 4.05: Multiplikand: fire, fem eller seks siffer. Multiplikator: to siffer.	4.01: 4728 x 67 4.02: 9553 x 23 4.03: 3185 x 85 4.04: 58891 x 49 4.05: 132476 x 36
		4.06 – 4.10: Multiplikand: fire, fem eller seks siffer. Multiplikator: tre siffer.	4.06: 2314 x 281 4.07: 7649 x 734 4.08: 1537 x 956 4.09: 46172 x 807 4.10: 208561 x 218
		4.11 – 4.20: Multiplikand: fire, fem eller seks siffer. Multiplikator: fire siffer.	4.11: 5906 x 5861 4.12: 8653 x 7641 4.13: 24760 x 3439 4.14: 32432 x 1524 4.15: 253264 x 2860 4.16: 123456 x 7890 4.17: 353535 x 2345 4.18: 159357 x 2587 4.19: 345896 x 1864 4.20: 238978 x 2857

Vedlegg 2: Intervjuguide

Tema	**Spørsmål**
Eleven på skolen	- Har eleven bestandig gått på montessoriskole? - Favorittfag? - Liker/liker ikke matematikk? Hvorfor? - Liker eleven å bruke matematikkmateriellet?
Sjakkbrettet	- Bruker eleven sjakkbrettet ofte? Liker/liker ikke? - Vet eleven målet med å bruke sjakkbrettet? Hva er det hun/han skal lære?
Arbeid med sjakkbrettet	- Kan eleven forklare underveis hva det er han/hun gjør? - Hva representerer perlene? - Plassverdisystemet - Distributiv egenskap - Hvorfor kan man dra perlene på skrå? - Hva betyr trappa? - Kan eleven gjøre oppsettet uten sjakkbrettet? - Vil det bestandig bli riktig svar med sjakkbrettet? - Hva gjør man om man får feil svar?

Vedlegg 3: Informasjonsskriv og samtykkeskjema til foresatte

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

”Posisjonssystemet/multiplikasjon med matematikkmateriellet sjakkbrettet”

Bakgrunn og formål

Formålet med studien er å få ny og bedre kunnskap om hvordan elever i montessoriskoler jobber med konkretiseringsmateriell for å få bedre kunnskap om ulike matematiske begreper. Et foreløpig forskningsspørsmål er ”Hvordan stimulerer *sjakkbrettet* til at elevene lærer begrepet multiplikasjon/ får bedre kunnskap om posisjonssystemet?”. Forskningsprosjektet er en mastergradstudie ved NTNU, som går over ett år. I prosjektet vil jeg samarbeide med lærere ved din skole, og elevene som blir brukt i forskningsprosjektet er tilfeldig valgt ut fra kjennskap til deres lærer.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Jeg vil gjennomføre studien gjennom observasjon og intervju av elever når de jobber med matematikk og med materiellet sjakkbrettet. Det vil også bli tatt video- og lydopptak av observasjonene og intervjuene.

Hva skjer med informasjonen?

Det samles ikke inn personopplysninger utover alder og kjønn, og alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det vil også kun være meg som har tilgang til datamateriell, og bearbeidet data (anonymisert) vil være tilgjengelig for min veileder ved NTNU. Data som publiseres vil være anonymisert og vil ikke kunne knyttes til enkeltdeltakere. Prosjektet skal etter planen avsluttet 01.06.18. Alle data vil da bli fullstendig anonymisert, og lyd- og videopptak vil da være slettet.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, hvor det er foreldre og barn som skal gi tillatelse, men kun barn som deltar. Hvis foresatte er positive, bør det tas en samtale med barnet for å se om barnet er villig til å delta. Skulle enten foresatte eller barnet ombestemme seg, kan samtykke trekkes når som helst og alle opplysninger om barnet vil bli anonymisert.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med masterstudent ved NTNU – Kristin Toresen Brønstad, kristtbr@stud.ntnu.no, tlf. [redacted] eller Universitetslektor ved NTNU – Kirsti Rø, kirsti.ro@ntnu.no, tlf. [redacted]

Samtykke til deltakelse i studien

Foreldres/foresattes samtykkeskjema

Jeg bekrefter at jeg har lest informasjonsarket og har snakket med mitt barn om deltakelsen i studien. Barnet er positivt og jeg samtykker i at mitt barn deltar i aktiviteter knyttet til forskningsprosjektet *Matematikkundervisning i aldersblandede grupper på montessoriskoler*.

Barns navn/klasse: ____

Jeg samtykker i at: (kryss av der det passer)

☐ Det tas videopptak av barnet, som en del av matematikkforskning. Videopptaket kan brukes av forskeren. Videopptaket skal ikke offentliggjøres.

☐ Det tas lydopptak av barnet, som en del av matematikkforskning. Lydopptaket kan brukes av forskeren. Lydopptaket skal ikke offentliggjøres.

☐ Det kan tas kopi av skriftlige elevarbeider fra barnet. Arbeidet kan publiseres i anonymisert form slik at det ikke er mulig å kjenne igjen barnet.

Sted og dato ____

Foreldres/foresattes underskrift ____

Vennligst lever skjemaet til _______________. *Tusen takk!*

Vedlegg 4: Vurdering fra NSD

Kirsti Rø

7491 TRONDHEIM

Vår dato: 10.11.2017 Vår ref: 55777 / 4 / AGL Deres dato: Deres ref:

Vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning § 31

Personvernombudet for forskning viser til meldeskjema mottatt 07.09.2017 for prosjektet:

55777	*Matematikkundervisning i aldersblandede grupper på montessoriskoler*
Behandlingsansvarlig	*NTNU, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Kirsti Rø*
Student	*Kristin Toresen Brønstad*

Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon finner vi at prosjektet er meldepliktig og at personopplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet er regulert av personopplysningsloven § 31. På den neste siden er vår vurdering av prosjektopplegget slik det er meldt til oss. Du kan nå gå i gang med å behandle personopplysninger.

Vilkår for vår anbefaling

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:

- opplysningene gitt i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon
- vår prosjektvurdering, se side 2
- eventuell korrespondanse med oss

Vi forutsetter at du ikke innhenter sensitive personopplysninger.

Meld fra hvis du gjør vesentlige endringer i prosjektet

Dersom prosjektet endrer seg, kan det være nødvendig å sende inn endringsmelding. På våre nettsider finner du svar på hvilke endringer du må melde, samt endringsskjema.

Opplysninger om prosjektet blir lagt ut på våre nettsider og i Meldingsarkivet

Vi har lagt ut opplysninger om prosjektet på nettsidene våre. Alle våre institusjoner har også tilgang til egne prosjekter i Meldingsarkivet.

Vi tar kontakt om status for behandling av personopplysninger ved prosjektslutt

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

Ved prosjektslutt 01.06.2018 vil vi ta kontakt for å avklare status for behandlingen av personopplysninger.

Se våre nettsider eller ta kontakt dersom du har spørsmål. Vi ønsker lykke til med prosjektet!

Marianne Høgetveit Myhren

Audun Løvlie

Kontaktperson: Audun Løvlie tlf: 55 58 23 07 / audun.lovlie@nsd.no

Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Kristin Toresen Brønstad, kristin_bronstad@hotmail.com