Kjartan Mevatne

Overganger mellom representasjoner av lineære funksjoner

En kvalitativ studie om fire 10. klassingers utfordringer med overganger mellom funksjonsuttrykk, tabeller, grafer og verbale situasjoner

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Trondheim, mai 2018

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Norwegian University of Science and Technology

Forord

Masteroppgaven markerer avslutningen av min tid som lærerstudent ved NTNU. Det har vært en turbulent ferd og en krevende prosess med diverse oppturer og nedturer underveis. Jeg har vært heldig med gode klassemiljøer, kompetente lærere og fantastiske medstudenter gjennom hele lærerutdanningen og vil gjerne rette en takk til alle som har gjort min tid som lærerstudent morsom og lærerik.

Gjennom hele prosessen har jeg mottatt stor hjelp fra ulike hold. Først og fremst vil jeg takke min veileder Hermund Torkildsen for konstruktive tilbakemeldinger, produktive samtaler og god oppfølging gjennom hele prosjektet. Videre vil jeg takke læreren, elevene og rektoren ved skolen jeg gjennomførte datainnsamlingen. Elevene som deltok i studien fortjener ekstra annerkjennelse for stort engasjement og innsats.

Jeg vil også rette en stor takk til familie, venner og klassekamerater for støtte, oppmuntring og nødvendige avbrekk fra masterskrivingen. En ekstra takk til min søster Martine som har korrekturlest oppgaven og gitt tilbakemeldinger på kapitler underveis i skriveprosessen.

Kjartan Mevatne

Trondheim, Mai 2018

Innhold

Figurliste

Tabelliste

1 Innledning

1.1 Bakgrunn og aktualitet

«De svake norske resultatene i algebra er spesielt bekymringsfulle sett i forhold til den rollen algebra spiller som grunnlag for videre utdanning innen matematikk.» (Grønmo, Onstad, Nilsen, Hole, Aslaksen & Borge 2012 s.40).

Sitatet er hentet fra Timms rapporten fra 2012 og indikerer at algebra er et tema som er utfordrende for elever i norsk skole og at de svake resultatene kan ha store konsekvenser videre i utdanningen. Bergem, Kaarstein & Nilsen (2016) viser til at norske elever gjør det bra i forhold til våre referanseland, men ikke presterer like bra i algebra som i andre emner av matematikken i rapporten av Timms resultatene i 2015. At norske elever presterer dårligere i algebra enn andre temaer er ikke noe nytt og kan ses i alle Timms rapporter fra 2007 og frem til i dag. Elever på 9. trinn har hatt fremgang i emnene geometri, tall og statistikk, men har hatt en tilbakegang i algebra fra forrige Timms undersøkelse (Bergem et al., 2016). Dette gjør algebra til et viktig forskningsfelt i matematikkdidaktikk for å kunne utvikle elevenes kompetanse i emnet.

1.2 Representasjoner og overganger mellom representasjoner.

Gjennom masterutdanningen har bruk av flere representasjoner vært et viktig fagområde som kan knyttes til alle matematiske temaer. Alle matematiske temaer inneholder flere representasjoner som belyser de matematiske objektene det jobbes med, som for eksempel funksjoner. Prosessene involvert i å bevege seg mellom disse representasjonene var derfor noe jeg ble interessert i å undersøke nærmere. Representasjoner er viktig i matematikk (Dreyfus, 2002). Duval (2006) påpeker at matematiske objekter ikke kan undersøkes uten en form for representasjon og at matematikk derfor alltid foregår i en representasjonell kontekst. Et eksempel er det matematiske objektet funksjon, som det ikke er mulig å arbeide med uten å representere funksjonen med en form for representasjon. Duval (2006) hevder også at transformasjoner av representasjoner til andre representasjoner er grunnleggende for all matematisk aktivitet som indikerer et behov for å ha kunnskaper om prosessene involvert i overganger mellom representasjoner. At elever skal kunne ta i bruk flere representasjoner er viktig. Som Duval (2004) påpeker må ikke representasjonene bli forvekslet med det matematiske objektet som blir representert. Han skiller mellom to type transformasjoner av representasjoner *omdanning* og *behandling* som vil bli nærmere forklart i teorikapittelet.

1.3 Funksjoner i norsk skole.

Funksjoner er et tema innen algebraen der vi må benytte oss av ulike representasjoner for å representere en gitt funksjon. Kunnskapsløftet har funksjoner som ett av fem hovedtemaer i matematikk. Det er to kompetansemål etter 10.trinn som er knyttet til temaet funksjoner.

1. «Identifisere og utnytte eigenskapane til proporsjonale, omvendte proporsjonale, lineære og kvadratiske funksjonar og gje døme på praktiske situasjonar som kan beskrivast med desse funksjonane» (Utdanningsdirektoratet 2013).
2. «lage funksjonar som beskriv numeriske samanhengar og praktiske situasjonar, med og utan digitale verktøy, beskrive og tolke dei og omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar som grafar, tabellar, formlar og tekstar. (Utdanningsdirektoratet 2013).

Det kan ses fra begge kompetansemål at overganger mellom ulike representasjoner er en kompetanse elevene skal ha. Det første kompetansemålet sett i forbindelse med overganger kan beskrives som overganger fra en matematisk representasjon av ulike funksjoner til en praktisk situasjon. Det andre kompetansemålet omhandler overganger fra praktiske situasjoner til andre representasjoner av funksjoner. Overganger mellom representasjonene grafer, tabeller, formler og tekster blir også direkte nevnt i dette kompetansemålet som noe elevene skal kunne utføre. Fellestrekk for begge kompetansemål er at begge krever at minst to representasjoner brukes i samspill. Videre vil *funksjonsuttrykk* og *verbale situasjoner* bli brukt som betegnelser på formler og tekster. At overganger er nevnt i begge kompetansemål etter 10.trinn i temaet funksjoner viser at dette er en viktig del av arbeidet med funksjoner i skolen.
..

1.4 Problemstilling

Flere studier har undersøkt hvilke overganger elevene mestrer og hvilke de ikke mestrer (Gagatsis & Shiakalli, 2004; Lesh, Post & Behr, 1987). Andre forskere antyder at det bare er om representasjonene representerer det samme matematiske objektet som da blir undersøkt og ikke selve overgangene (Superfine, Canty & Marshall, 2009; Adu-Gyamfi, Bosse & Stiff 2012). Fra kompetansemålene kan det ses at elevene skal ha evner i å utføre overganger mellom ulike representasjoner av funksjoner. Dette motiverte meg til å undersøke nærmere hva i overgangene som skaper utfordringer for elever og ikke bare hvilke overganger de er i stand til å utføre. Bosse, Adu-Gyamfi & Cheetham (2011) har utformet en oversikt over for hva som påvirker overganger mellom ulike representasjoner av funksjoner som sammen med Janvier (1987) vil bli brukt som rammeverk i denne studien. Bosse et al. (2011) påpeker også at overganger mellom representasjoner utover lineære funksjoner sjelden er noe elevene mestrer, men at dette kan komme av kompleksiteten til selve funksjonen og ikke overgangen. Jeg har derfor i denne studien valgt å fokusere på lineære funksjoner for å kunne undersøke hva som er utfordrende i overgangene. Det ledet meg frem til denne problemstillingen:

«Hva er utfordrende for to grupper med elever på 10.trinn i overganger mellom representasjoner av lineære funksjoner?»

For å undersøke dette var det naturlig å bruke en kvalitativ tilnærming og få rike beskrivelser av hvordan elever arbeider med overganger mellom representasjoner. Jeg valgte å observere to elevgrupper for å se hvordan de arbeidet med overganger mellom flere representasjoner av lineære funksjoner. Jeg gjennomførte også intervju i etterkant av observasjonen for å høre hva elevene selv opplevde som utfordrende i overgangen mellom representasjoner av funksjoner.

1.5 Oppgavens oppbygning

Neste del vil inneholde det teoretiske rammeverket jeg har brukt for å kunne drøfte funnene mine. Her vil generelle teorier om overganger, med hovedvekt på Duval (2004; 2006), bli viktig, før fokuset snevres inn mot teorier om overganger knyttet til funksjoner. Her vil det være hovedvekt på Janvier (1987) og Bosse et al. (2011). Deretter vil metodene som er brukt bli presentert sammen med vurderinger av studiens kvalitet, etiske overveielser og kritikk av metoden. Dette kapittelet vil også inneholde en analyse av oppgavene som er brukt og en beskrivelse av hvordan datamaterialet ble analysert. Metodekapittelet etterfølges av et analysekapittel der datamaterialet vil bli belyst med teoretiske koder for å beskrive overgangene elevene arbeider med. Deretter følger drøftingskapittelet der funnene fra analysene vil bli sett opp mot teori. Til slutt kommer en avslutning der jeg vil svare på problemstillingen min, eventuelle didaktiske implikasjoner forskningen kan ha og vurdere videre forskning på området.

2 Teori

Det teoretiske grunnlaget for studien vil i dette kapittelet bli presentert. Masteroppgaven omhandler overganger mellom representasjoner og jeg vil innledningsvis presentere Duval (2004; 2006) sine teorier om transformasjoner av representasjoner generelt i matematikk. Deretter vil fokuset snevres inn mot overganger mellom representasjoner av funksjoner. Her vil Janvier (1987) og hans betegnelser på overgangsaksjoner stå sentralt. Bosse et al. (2011) har senere bygget videre på Janvier (1987) sine perspektiver på overganger og utviklet nye kategorier for hva som påvirker omdanningsprosesser mellom representasjoner av funksjoner

2.1 Representasjoner

Goldin & Shteingold (2001) betegner representasjoner som noe som står for noe annet. De skiller mellom *ytre* og *indre* representasjoner. Indre representasjoner er individers personlige mentale representasjoner. Elevers indre representasjoner er ikke mulig å observere direkte, men kan gjøres antagelser om gjennom elevers tolkninger og arbeid med ytre representasjoner. Ytre representasjoner i matematikk er representasjoner elever kan produsere som vi kan henvise til og diskutere meningen med (Goldin & Shteingold, 2001). Eksempler på ytre representasjoner som representerer funksjoner er grafer, tabeller, funksjonsuttrykk og verbale situasjoner.

Duval (2006) sier det ikke er mulig å få tilgang til matematiske objekter uten å benytte seg av ulike representasjoner og at all matematisk aktivitet dermed alltid skjer innenfor en representasjonell kontekst. Denne masteroppgaven bruker begrepet representasjoner i form av ulike måter å representere lineære funksjoner. Representasjoner er dermed i denne studien ytre representasjoner som har en sammenheng med det matematiske objektet som blir representert. De fire representasjonene av lineære funksjoner som er relevante i denne forskningen er verbale situasjoner, tabeller, grafer og funksjonsuttrykk. De fire representasjonene gir ulike innfallsvinkler til arbeid med lineære funksjoner.

2.1.1 Transformasjoner.

Duval (2004) mener matematiske prosesser alltid involverer en form for transformasjoner av representasjoner og hevder disse transformasjonene er essensielle for all form for matematikk. Duval (2004) skiller mellom to typer transformasjoner, *behandling* og *omdanning.* Disse to typene av transformasjoner er ifølge Duval (2004) viktig i all form for matematisk aktivitet. Behandling kan beskrives som endring av en representasjon uten at representasjonssystemet endres. Dette kan for eksempel være å fylle ut en tabell med tre tallpar til å inneholde fem tallpar. Omdanning innebærer at representasjonssystemet endres uten at det matematiske objektet endres. Omdanning er mer komplekst enn behandling fordi omdanning krever at det samme matematiske objektet blir gjenkjent i to ulike representasjoner (Duval 2006). Et eksempel kan være en lineær funksjon som blir presentert i verbal form og skal skrives som et funksjonsuttrykk. Da handler omdanning om å endre representasjon fra verbal form til et funksjonsuttrykk uten å endre den lineære funksjonen som blir representert. Innholdet i representasjoner er ikke bare avhengig av de matematiske konseptene eller objektene, men også av representasjonssystemet som blir brukt. Det er viktig å benytte ulike representasjonssystem og å kunne knytte dem sammen. Hvis ulike representasjoner ikke knyttes sammen ser elevene på to representasjoner som to ulike objekt uten relasjon istedenfor å se på dem som to ulike representasjoner av samme objekt (Duval, 2004). Denne studien vil fokusere på den typen transformasjoner Duval (2004) betegner som omdanninger.

2.1.2 Omdanninger.

Duval (2006) mener kompleksiteten i omdanninger er avhengig av om representasjonene som er involvert er *kongruente* eller *ikke-kongruente*. For å betegne om omdanninger er kongruente eller ikke må tre faktorer vurderes. Den første faktoren er om det er mulig med 1-1 avbildning av de meningsfulle elementene fra start til sluttrepresentasjonen. En tabell viser ikke nødvendigvis stigningstallet eksplisitt, og kan derfor ikke overføres direkte til et funksjonsuttrykk. En verbal situasjon derimot, der a, x, y og b er oppgitt vil kunne overføres direkte til et funksjonsuttrykk og gjøre at omdanningen er kongruent på dette punktet. Den andre faktoren er om valget av de viktige elementene i sluttrepresentasjonen er entydig eller tvetydig. Et eksempel kan være overgangen verbal situasjon-funksjonsuttrykk der den verbale situasjonen er «Anna er 5 år eldre enn Jon, lag et funksjonsuttrykk som beskriver barnas alder». Her kan både Annas alder og Jons alder være x og valget av hva som skal være x i funksjonsuttrykket er derfor ikke entydig. En annen verbal situasjon som beskriver bilens posisjon etter x antall timer kan være «En bil kjører 60km i timen» her vil valget av x i funksjonsuttrykket være entydig siden x må indikere antall timer og ikke bilens posisjon for at omdanningen skal bli gjort riktig. Den siste faktoren handler om de viktige elementene har den samme rekkefølgen i start- og sluttrepresentasjonen. Et eksempel er en verbal situasjon der de matematisk relevante elementene er oppgitt i rekkefølgen a, y, x. For å lage et funksjonsuttrykk må rekkefølgen endres for at omdanningen skal være riktig og omdanningen er derfor ikke-kongruent. Hvis en omdanning mellom to representasjoner kan gjøres med en en-til-en avbildning, elementene er tydelige og rekkefølgen av elementene er den samme vil omdanningen være kongruent (Duval, 2006). Duval poengterer også at ikke-kongruente omdanninger for mange elever er en ubrytelig barriere i deres utvikling av matematisk forståelse og læring. Dermed er kongruens et viktig element i overganger som kan forklare elevers utfordringer med omdanninger av representasjoner.

Retningen av omdanningen påvirker også hvor utfordrende den er. Når retningen i en overgang blir snudd endres også problemet radikalt (Duval, 2006). Dette kan vises ved omdanningene funksjonsuttrykk-graf og graf-funksjonsuttrykk. Duval (2006) viser til at når et funksjonsuttrykk ble brukt for å konstruere en graf klarer de fleste elevene dette, mens å finne et funksjonsuttrykk basert på en graf var mye mer utfordrende. Han påpeker også at ingen representasjonssystem sett for seg selv virker mer utfordrende enn andre, men at omdanninger påvirkes av de to involverte representasjonene, start- og sluttrepresentasjonen. (Duval, 2006)

2.1.3 Representasjonssystem og representasjoner av funksjoner

Duval (2006) har laget en klassifikasjon av matematiske representasjonssystem som må benyttes i matematiske prosesser. Duval (2006) beskriver språk som et multifunksjonelt representasjonssystem siden språk kan uttrykkes i muntlig og skriftlig form og verbale situasjoner vil være en del av dette representasjonssystemet. Videre beskriver han et symbolsk representasjonssystem som monofunksjonelt fordi det bare kan uttrykkes skriftlig. Her vil representasjonen funksjonsuttrykk plasseres. Grafer og diagrammer blir plassert i et annet representasjonssystem uten at det blir oppgitt en betegnelse for dette systemet, men det betyr likevel at å skifte fra grafer til enten verbale situasjoner eller funksjonsuttrykk er omdanninger. Duval (2006) skiller også mellom tabeller og grafer når han viser til elevers suksess i det han beskriver som omdanning. Det vises til elevers suksess i overganger mellom representasjonene grafer, tabeller og funksjonsuttrykk. Dette betyr at en overgang fra tabell til en annen representasjon også er et skifte av representasjonssystem. Dermed vil alle endringer av representasjoner mellom tabell, graf, verbal situasjon og funksjonsuttrykk også være en endring av representasjonssystem og kunne betraktes som omdanninger (Duval, 2006)

2.1.4 Verbal situasjoner og verbale beskrivelser

Den ene representasjonsformen som er aktuell i denne studien kan opptre på ulike måter. Representasjoner på verbal form kan være virkelighetsnære situasjoner som danner utgangspunkt for nye matematiske representasjoner, eller beskrivelser av andre matematiske representasjoner av funksjoner. Bosse et al. (2011) skriver at det er viktig å skille mellom det de kaller en *verbal beskrivelse* og en *verbal situasjon*. Verbal beskrivelse er en forklaring av kjennetegn i en matematisk representasjon som tabell, graf eller et funksjonsuttrykk som er uttrykt i verbal form. Et eksempel på en verbal beskrivelse kan være «funksjonen er lineær med et stigningstall lik 1 og konstantledd lik 5» for å beskrive funksjonsuttrykket $y = x + 5$. Verbale beskrivelse er først og fremst naturlig når det verbale fungerer som en sluttrepresentasjon etter en overgang fra en av de andre matematiske representasjonene. Verbal situasjon blir beskrevet som et eksempel fra den virkelig verden som er uttrykt verbalt (Bosse et al., 2011). Dette vil være tekstoppgaver som beskriver en realistisk situasjon. Et eksempel på dette kan være «Anna er 5 år eldre enn Jon. Vis alderen til Anna fra Jon er nyfødt til han er 15 år gammel» Mine oppgaver er først og fremst verbale situasjoner og ikke verbale beskrivelser. Dette er fordi at oppgavene som tar utgangspunkt i en verbal representasjon er situasjoner som kan knyttes til virkeligheten. Også i oppgavene der elevene skal gå til en verbal representasjon blir de bedt om å lage situasjoner og ikke beskrivelser av hva de matematiske representasjonene forteller. For å lage verbale situasjoner må du forstå kjennetegn i de matematiske representasjonene som er avgjørende for å lage korrekte verbale beskrivelser av representasjoner. Derfor mener jeg at verbale beskrivelser er en forutsetning for å kunne lage verbale situasjoner av matematiske representasjoner.

2.2 Betegnelser på overganger mellom representasjoner av funksjoner

Mange betegnelser er brukt for å beskrive prosesser involvert i å benytte seg av flere representasjoner av samme funksjon. Janvier (1987) kaller det en oversettelsesprosess som består av å gå fra en form av representasjoner til en annen og hver oversettelse krever en bestemt oversettelsesaksjon. Han betegner senere verbale situasjoner, tabeller, grafer og funksjonsuttrykk som ulike former for representasjoner. Adu-Gyamfi et al. (2012) definerer også oversettelse på denne måten, men påpeker også at det ikke er representasjonene som oversettes, men viktige elementer og ideer som er uttrykt i dem. Disse betegnelsene kan knyttes til den formen transformasjoner Duval (2004) betegner som omdanninger. Videre i teksten vil omdanninger og omdanningsaksjoner brukes som begrep for det Janvier (1987) kaller oversettelser og oversettelsesaksjoner fordi elementene i en representasjon ikke alltid kan oversettes direkte til en annen representasjon

2.3 Overganger mellom representasjoner av funksjoner

Figur 1 viser hva som inngår i en overgang mellom to matematiske representasjoner av funksjoner. Figuren tar for seg både egenskapene representasjonene har som start og sluttrepresentasjoner og overgangsaksjonen som må gjøres for å utføre en bestemt overgang. Figuren inneholder også om overgangene krever en lokal eller global tolkning som er betegnet som nærhet i figuren. Begrepene som inngår i tabellen vil bli nærmere beskrevet i de følgende avsnittene.

Faktahull		*Faktahull*
Forvirrende elementer	Nærhet	*forvirrende elementer*
Startrepresentation	→	Sluttrepresentation
Informasjonstetthet	Omdanningsaksjon	*Informasjonstetthet*

Figur 1 (Bosse et al., 2011). Overganger mellom representasjoner av funksjoner

2.3.1 Representasjonenes egenskaper.

Faktahull, *forvirrende elementer* og *informasjonstetthet* i representasjonene påvirker også overgangen mellom representasjoner (Bosse et al., 2011). Disse begrepene blir beskrevet som faktorer i representasjonene som har betydning for vanskelighetsgraden til hver omdanning.

Faktahull (fact gaps)

Alle matematiske representasjoner inneholder faktahull avhengig av en bestemt kontekst (Bosse et al., 2011). Hvor mange faktahull representasjonene i en bestemt overgang inneholder kan bare bestemmes ved å ta hensyn til 3 faktorer. Hva som er meningen med overgangen, hvorvidt eleven er kapabel og har lov til å utføre behandling av startrepresentasjonen før de utfører overgangen og om representasjonen er start- eller sluttrepresentasjon (Bosse et al., 2011). Et eksempel på den første faktoren kan være en tabell som ikke inneholder et tallpar som indikerer hva y er når $x = 0$. Hvis meningen er å lage et funksjonsuttrykk er mangelen av dette tallparet et faktahull siden det ikke er direkte tydelig hva konstantleddet i funksjonen skal være uten å lage nye punkter i tabellen. Hvis meningen er å lage punkter i et koordinatsystem basert på tabellen vil det ikke være et faktahull siden dette tallparet ikke er nødvendig for å plotte punkter i koordinatsystemet. Faktahullet beskrevet ovenfor kan fjernes med det Duval (2006) kaller behandling. Hvis tabellen han utvides til å inneholde et tallpar av y og x når $x = 0$ vil det ikke være et faktahull lengre, men hvis elevene ikke er kapable til eller har lov til å utføre en slik behandling av startrepresentasjonen vil det fortsatt være et faktahull. Retningen på overgangen og hvilken representasjon som fungerer som start- og sluttrepresentasjon er det siste elementet som påvirker antallet faktahull en bestemt representasjon inneholder. Dette kan eksemplifiseres med overgangene tabell-funksjonsuttrykk og funksjonsuttrykk-tabell. Som nevnt kan tabellen inneholde faktahull i form av manglende informasjon som kreves for å produsere et riktig funksjonsuttrykk. Hvis overgangen istedenfor skjer fra funksjonsuttrykk til tabell vil tabellen inneholde veldig få faktahull siden den kan inneholde så mange elementer som ønskelig for eleven som utfører overgangen. Hvor mange faktahull start- og sluttrepresentasjonene i en overgang inneholder kan ha påvirkning på vanskelighetsgraden til overgangene (Bosse et al., 2011).

Forvirrende elementer (counfounding facts)

forvirrende elementer i representasjonene blir også beskrevet som karakteristikker av representasjonene som påvirker overganger til nye representasjoner av funksjoner (Bosse et al., 2011). I likhet med faktahull kan bare antall forvirrende elementer i en representasjon bestemmes med å ta hensyn til de 3 faktorene nevnt tidligere. Et eksempel på et forvirrende element i representasjonen tabell kan være at tallparene ikke er oppgitt i stigende rekkefølge og dermed er forvirrende for elevene når de skal representere funksjonen i tabellen som en graf (Bosse et al., 2011). Hvis meningen med representasjonen bare er å finne en bestemt verdi som er oppgitt i tabellen vil ikke organiseringen være et forvirrende element. Det er også mulig å omorganisere tabellen og dermed utføre en behandling av representasjonen før overganger til andre representasjoner som vil fjerne det forvirrende elementet. Retningen vil også være avgjørende for om dette er et forvirrende element i tabellen eller ikke. At tabellen ikke er oppgitt i stigende rekkefølge når tabell er sluttrepresentasjon vil sannsynligvis ikke være et forvirrende element fordi elevene har organisert tallparene selv etter en overgang fra en annen representasjon. En overgang der en eller begge representasjonene inneholder mange forvirrende elementer blir ansett som vanskeligere enn en omdanning der representasjonene har lite forvirrende elementer (Bosse et al., 2011).

Informasjonstetthet (Attribute density)

Informasjonstetthet handler om hvor mye informasjon en representasjon inneholder som er nødvendig for å produsere en annen representasjon. Adu-Gyamfi et al. (2012) definerer informasjonstetthet som en sammenligning av viktige elementer, karakteristikker og størrelser en gitt representasjon inneholder og hvor mye overflødig informasjon representasjonen inneholder. Hvis det bare er viktige elementer og størrelser som blir gitt i en representasjon og lite overflødig informasjon, er graden av tetthet høy. Hvis det er mye overflødig informasjon sammen med de viktige elementene i representasjonen er tettheten av informasjon lav (Adu-Gyamfi et al., 2012). To aktuelle representasjoner i denne studien som kan eksemplifisere forskjellen i grad av informasjonstetthet en representasjon har er et funksjonsuttrykk og en tabell. Et lineært funksjonsuttrykk som står på formen $y = ax + b$ inneholder både relasjonen mellom variablene x og y, konstantleddet og stigningstallet til funksjonen. Det er heller ingen overflødig informasjon for å kunne lage en annen representasjon. Funksjonsuttrykket har dermed høy tetthet av informasjon. En tabell kan også inneholde sammenhengen mellom x og y, konstantledd og stigningstall, som kan finnes med 2 tallpar i tabellen. Hvis tabellen inneholder mange tallpar kan det være vanskeligere å finne den viktige informasjonen siden det er mye overflødig og unødvendig informasjon som ikke trengs for å skape en ny representasjon. Hvis tettheten av informasjon er høy er det mindre unødvendig informasjon som gjør tolkningen av representasjonen og dermed overgangen til andre representasjoner utfordrende. Det anses som lettere å gjøre overganger fra representasjoner med høy informasjonstetthet som et funksjonsuttrykk og en graf, enn fra verbal situasjoner og tabeller som har lav tetthet av informasjon.

2.3.2 Omdanningsprosessen

Global eller lokal tolkning i overganger.

Overganger mellom representasjoner av funksjoner krever enten en *lokal* eller en *global* tolkning. Leinhardt, Zaslavsky & Stein (1990) bruker denne inndelingen der lokal tolkning er når elevene har et punkt for punkt fokus og global tolkning er en gjenkjennelse av den helhetlige utviklingen til en representasjon. Bosse et al. (2011) betegner dette aspektet av omdanninger som *nærhet*. Videre beskriver Bosse et al. (2011) omdanningen fra tabell til graf som en omdanning som krever lokal tolkning i form av at en elev må vite at tallene som tilsvarer x-verdier og de tilhørende y-verdiene kan representeres som et punkt i koordinatsystemet. Hvis den som utfører overgangen er klar over dette, er det bare å plotte punkt for punkt i koordinatsystemet og tegne grafen. Funksjonsuttrykk-graf blir beskrevet som en overgang som krever global tolkning. Hvis grafen tegnes direkte uten å lage punkter i koordinatsystemet, konstantleddet er plassert riktig på y-aksen og stigningstallet indikerer hvor mye grafen stiger/synker er det gjort en global tolkning (Leinhardt et al., 1990). Da er den helhetlige utviklingen til funksjonsuttrykket gjenkjent og grafen kan lages direkte. Omdanninger som krever globale tolkninger blir ansett som vanskeligere og mer krevende enn lokale tolkninger.

Omdanningsaksjoner

Janvier (1987) utviklet en tabell der han navngir oversettelsesferdighetene han mener kreves for å utføre overganger mellom de 4 representasjonene verbal beskrivelse, tabell, graf og funksjonsuttrykk. Senere har også Bosse et al. (2011) benyttet seg av den samme kategoriseringen, men kaller prosessene for oversettelsessaksjoner. Siden jeg tidligere har knyttet begrepene oversettelse og oversettelsesaksjon som Janvier (1987) og Bosse et al. (2011) bruker til det Duval (2004) betegner som omdanning kaller jeg prosessene omdanningsaksjoner. Janvier (1987) bruker begreper for omdanningsaksjonen som kreves i alle overgangene mellom representasjonene verbal situasjon, tabell, graf og funksjonsuttrykk. Et eksempel er begrepet *plotte* som blir brukt om omdanningsaksjonen i overgangen tabell-graf. Han betegner også alle overganger til en verbal form for tolkningsaksjoner, mens alle omdanninger fra representasjoner på verbal form blir definert som modellering. Janvier (1978) bruker begrepet «transpositions» for å betegne transformasjoner av like representasjoner som tilsvarer det Duval (2004) kaller behandling. Begrepene som brukes for hver omdanningsaksjonene vises i figur 2 og vil bli forklart i sammenheng med hva som kreves for at omdanning av representasjoner av lineære funksjoner skal kunne utføres. Figur 2 er oversatt til norsk, men begrepene er direkte oversatt fra Janvier (1987) og betegnes som oversettelseferdigheter, men som videre i teksten vil bli omtalt som omdanningsaksjoner som kreves for å utføre overganger mellom representasjoner.

To / From	Verbal Situasjon	Tabell	Graf	Funksjonsuttrykk
Verbal Situasjon		Måle	Skissere	Modellere
Tabell	Lese		Plotte	Tilpasning
Graf	Tolke	Lese av		Kurve tilpasning
Funksjonsuttrykk	Parameter gjenkjennelse	Beregne	Skissere	

Figur 2 (Janvier, 1987). Omdanningsaksjoner

Lese handler om å lese informasjonen i en tabell for kunne lage en verbal situasjon. Du må i en verbal situasjon som representerer en lineær funksjon ha to variabler som samsvarer med tallparene i tabellen. Omdanningen krever ofte at det leses ut eller beregnes fra verdiene i tabellen en verdi for y når $x = 0$ for å kunne bestemme konstantleddet. Stigningstallet må også kunne leses ut fra tabellen og gi mening i situasjonen.

Tolke betegner omdanningsaksjonen som kreves for å produsere en verbal situasjon fra en graf. For å utføre omdanningen må ulike elementer tolkes ut fra de visuelle trekkene grafen har. Hvor grafen krysser y-aksen må omgjøres til en verdi i situasjonen som tilsvarer y-verdien når $x = 0$. Hvor bratt grafen er må tolkes og gis mening i situasjonen for å få frem stigningstallet i den aktuelle lineære funksjonen og x og y må defineres som to variable størrelser i situasjonen.

Parameter gjenkjennelse er omdanningsaksjon fra funksjonsuttrykk til en verbal situasjon og en form for tolkning. For å kunne lage en verbal situasjon basert på et lineært funksjonsuttrykk må elementene i funksjonsuttrykket forstås. Konstantleddet må i situasjonen som skal lages være en bestemt verdi som tilsvarer verdien til den avhengige variabelen når den andre variabelen er 0. Stigningstallet må være en konstant verdi og x og y må være variabler. De ulike komponentene i funksjonsuttrykket må forstås og gjenkjennes for at en riktig verbal situasjon skal kunne lages.

Måle er betegnelsen Janvier (1987) bruker om omdanningsaksjonen som kreves i omdanning fra verbal situasjon til tabell. For å få til denne omdanningen må en avhengig og en uavhengig variabel identifiseres i situasjonen. Det må også avgjøres hvor mye den avhengige variabelen øker eller synker for hver endring av den uavhengige variabelen. Hvis situasjonen oppgir en verdi når den uavhengige variabelen er 0 må denne tas hensyn til i utformingen av korresponderende tallpar. Når dette er gjort kan det avgjøres hvor mye y øker med for hver endring av x og tilhørende x-og y-verdier for kan dermed representeres i en tabell.

Lese av er aksjonen som kreves for å produsere en tabell fra en graf. Eleven må for å kunne gjennomføre denne omdanningen vite at et punkt på grafen gir to verdier som kan skrives som tallpar i en tabell. Hvis dette er kjent kan punktene i grafen leses av og en tabell kan utformes ved å regne ut x-verdier og de samsvarende y-verdiene representert som to tall. Denne omdanningen krever en lokal tolkningsaksjon siden elever ikke må vite noe om den helhetlige variasjonen i grafen, men kan ta utgangspunkt i punkter på grafen for å lage tallpar i en tabell.

Beregne er betegnelsen Janvier (1987) bruker for omdanningsaksjonen som må foretas fra funksjonsuttrykk til tabell. Her inneholder funksjonsuttrykket den informasjonen som trengs for å lage tallpar av x- og y-verdier som samsvarer. Stigningen til y for hver x-verdi er gitt og y-verdien når $x = 0$ tilsvarer konstantleddet. Dermed er det bare å bestemme hvilke x- og y-verdier som skal oppgis i tabellen.

Skissere er betegnelsen som brukes om omdanningsaksjonen som må gjøres i omdanningen verbal situasjon-graf. Janvier (1978) kaller denne omdanningsaksjonen for beskrivende modellering. Her må det bestemmes hvilken variabel som er den uavhengige og avhengige variabelen for å tilegne verdier til riktig akse. Hvor mye y endres for hver x verdi som endres, og hvor grafen krysser y-aksen må skisseres riktig på grafen. Overgangen er i utgangspunktet global hvis grafen tegnes direkte ved å plassere konstantleddet på y-aksen og bestemme stigningstallet slik at grafen kan tegnes. Hvis en tabell utformes og det lages punkter i koordinatsystemet før grafen tegnes vil det være en annen overgang og en annen omdanningsaksjon.

Plotte er omdanningsaksjonen for overgangen tabell-graf. For å utføre denne omdanningen kreves det at elevene må vite at et tallpar i tabellen tilsvarer et punkt på grafen. Hvis dette er kjent er det bare å plotte verdiene i tabellen og lage punkter i koordinatsystemet som tilsvarer x- og y-verdiene tabellen oppgir.

Skissere blir også brukt som benevnelse for omdanningen fra funksjonsuttrykk til graf i likhet med omdanning fra verbal situasjon til graf. Adu-Gyamfi et al. (2012) kaller dette skissering av algebraisk informasjon. Hvor grafen skal krysse y aksen, stigningstallet og punkter på grafen som tilsvarer korresponderende x- og y-verdier er algebraisk informasjon som må tas hensyn til når grafen skal skisseres.

Janvier (1978) betegner *Modellere,* som hører til omdanningen verbal situasjon-funksjonsuttrykk som en analytisk form for modellering. For å kunne lage et lineært funksjonsuttrykk må stigningstallet, konstantleddet og hvordan den uavhengige variabelen x påvirker den avhengige variabelen y finnes i den verbale situasjonen og representeres som et funksjonsuttrykk.

Omdanningsaksjonen som kreves for å gjøre en omdanning fra tabell til funksjonsuttrykk er betegnet som *tilpasning*. Det betyr at for å utføre overgangen når det jobbes med lineære funksjoner må elevene finne stigningen mellom en y-verdi og den påfølgende y verdien i tabellen for å finne stigningstallet. Elevene må også finne en y verdi når $x = 0$ for å finne konstantleddet slik at funksjonsuttrykket er tilpasset tabellen og omdanning fra tabellen til funksjonsuttrykket kan fullføres.

Kurvetilpasning er betegnelsen for omdanningen fra graf til funksjonsuttrykk. En graf har flere visuelle trekk som må vurderes for å kunne lage et funksjonsuttrykk. Retningen og hvor mye den stiger eller synker gir informasjon som trengs for å bestemme om stigningstallet er negativt eller positivt og verdien stigningstallet skal ha. Hvor grafen krysser y-aksen er et annet visuelt trekk som må brukes for å avgjøre om det er et konstantledd og eventuelt hvilken verdi konstantleddet skal ha. Når disse visuelle trekkene i grafen er bestemt kan det lages et funksjonsuttrykk som er tilpasset grafen.

Omdanninger der det benyttes en overføringsrepresentasjon

Bosse et al. (2011) nevner noen overganger mellom representasjoner der elever vanligvis går fra en representasjon via en ekstra representasjon til sluttrepresentasjonen for å fullføre overgangen. Overgangene som nevnes er verbal situasjon-graf, verbal situasjon-funksjonsuttrykk og funksjonsuttrykk-graf. *Overføringsrepresentasjonen* som tas i bruk for å utføre disse overgangene er tabell. (Bosse et al., 2011). Resultatet av at elevene benytter seg av en overføringsrepresentasjon er at det skjer flere omdanninger. Et eksempel er overgangen fra verbal situasjon via tabell til graf. Istedenfor *skissering* som i overgangen verbal situasjon-graf oppstår omdanningsaksjonene *måle* (verbal-tabell) og *plotte* (tabell-graf). Bosse et al. (2011) nevner tre overganger som alle krever en global tolkning, men som ved bruk av tabell som overføringsrepresentasjon blir omgjort til to lokale tolkninger. Likevel kan utvidelsen til mer enn en overgang øke kompleksiteten til omdanningen og lage større potensial for feil i omdanningsprosessen. (Bosse et al., 2011).

2.4 Typer feil som er mulige å gjøre i omdanninger av lineære funksjoner

Adu-Gyamfi et al. (2012) nevner tre ulike typer feil som kan gjøres i en omdanning, *implementeringsfeil, tolkningsfeil* og *bevaringsfeil*. En implementeringsfeil i omdanningsprosessen kan skje når det oppstår en feil i utregningen slik at sluttrepresentasjonen ikke stemmer overens med startrepresentasjonen. Denne typen feil kan også være at en x- og en y-verdi i en tabell byttes om som fører til at koordinatene endrer rekkefølge før de blir plottet inn i koordinatsystemet. En tolkningsfeil oppstår når en elev karakteriserer elementer eller størrelser feil i enten start eller sluttrepresentasjonen (Adu-Gyamfi et al., 2012). Hvis stigningstallet i $f(x) = ax + b$ blir karakterisert som en variabel i en verbal situasjon vil dette tilsvare en tolkningsfeil. Adu-Gyamfi et al. (2012) fant ut at det oppstod flere tolkningsfeil når tabell var startrepresentasjon enn når graf og funksjonsuttrykk var startrepresentasjon, dette kom av at informasjonstettheten i representasjonen tabell er lavere. Den siste typen feil som blir beskrevet er bevaringsfeil. Ved en slik type feil klarer eleven å bevare sammenhengen mellom elementene som er gjenkjent i start og sluttrepresentasjonen, men ikke bekrefter at andre relevante elementer også er riktig omdannet. Et eksempel kan være en verbal situasjon der stigningstallet og variablene x og y er representert riktig i et funksjonsuttrykk, men konstantleddet som er beskrevet i situasjonen ikke er tatt med i funksjonsuttrykket.

3 Metode

I dette kapittelet vil jeg begrunne mine metodiske valg i forbindelse med forskningsprosjektet. Først vil jeg starte med å forklare mitt forskningsdesign i lys av problemstillingen, formålet med forskningen og begrunne valget av en kvalitativ forskningstilnærming. Deretter vil praktiske forberedelser i prosjektet bli presentert og hvordan disse har påvirket gjennomføringen av prosjektet. Videre vil en presentasjon av metodene jeg har benyttet meg av å bli belyst og min bruk av disse forklart. Videre vil en analyse av oppgavene og min analysemetode bli beskrevet før kapittelet avsluttes med en drøfting av kvaliteten til oppgaven, etiske hensyn som er tatt og metodekritikk.

3.1 Oppgavens mål og forskningsdesign

Problemstillingen i denne studien er *«Hva er utfordrende for to grupper med elever på 10.trinn i overganger mellom representasjoner av lineære funksjoner?»*. Formålet er å kunne beskrive og belyse utfordringene elevene har på en utfyllende måte. Hva fokuset skal være i forskningen påvirker valg av datainnsamlingsmetode (Cohen, Manion & Morrison, 2011). Fokuset mitt var å få innsikt i prosessen til elevene når de skal representere funksjoner på flere måter og ikke bare om de klarte å lage riktige representasjoner. Jeg anså det derfor som naturlig å benytte meg av kvalitative metoder for datainnsamling for å kunne studere prosessen nøye og også se hvordan representasjonene de utformet ble til slutt. Kartlegging av hvilke overganger elever mestrer og ikke mestrer er også gjort i tidligere forskning ved bruk av kvantitativ metode (Gagatsis & Shiakalli 2004). Jeg ønsker derimot å finne ut hva som gjør hver enkelt overgang vanskelig for en gruppe elever og ikke bare bestemme hvilke overganger elever gjør riktig eller feil, som ledet meg inn på bruk av en kvalitativ forskningsmetode. Jeg har valgt å benytte meg av både observasjon og intervju. Metodene vil bli nærmere beskrevet senere i metodekapittelet. Flere metoder for datainnsamling i tillegg til observasjon kan brukes for å sikre at beskrivelser av situasjoner er hentet fra et pålitelig datamateriale (Cohen et al., 2011). Ved å benytte meg av flere metoder for å studere elevenes fremgangsmåter, tanker om og beskrivelser av eget arbeid med overganger mellom representasjoner av funksjoner, mener jeg det er gode forutsetninger for å få et helhetlig bilde av hva som gjør overgangene utfordrende.

3.1.1 Metodiske tilnærminger

Cohen et al. (2011) kaller de ulike tilnærmingene forskeren kan ha normativ og fortolkende paradigmer og argumenterer for at normative forskere prøver å utvikle generelle teorier om fenomener, mens fortolkende forskere er interessert i enkeltindividene. Et normativt utgangspunkt vil tilsi bruk av kvantitative metoder der generelle sammenhenger kan finnes og resultatene kan kvantifiseres. Med et fortolkende utgangspunkt må forskeren tolke forskningsresultatene for å forstå andres handlinger. En fortolkende forsker vil derfor benytte seg av kvalitativ metode og forske på en liten gruppe individer (Cohen et al., 2011).

Sosial forskning har to ulike tilnærminger *subjektivistisk* og *objektivistisk* forskning (Cohen et al., 2011). De med en objektivistisk tilnærming til forskning er ute etter objektiv, håndfast og definitiv kunnskap. En subjektivistisk tilnærming vil i kontrast til objektivistisk tilnærming være ute etter det personlige, subjektive og det unike som skjer i møtet mellom forsker og forskningsdeltagere i en gitt kontekst. En objektivistisk tilnærming vil hovedsakelig være kvantitativ og vil være opptatt av å finne og definere relevante elementer og studere sammenhengen mellom dem. En subjektivistisk forsker vil være opptatt av å utvikle forståelse av hvordan individer lager og tolker verden de befinner seg i og benytter seg derfor av kvalitative metoder (Cohen et al., 2011).

Det er vanlig å legge vekt på hvordan kvalitativ forskning skiller seg fra kvantitativ forsking (Tjora, 2012). Kvalitativ forskning kan betegnes som vektlegging av forståelse, nærhet til dem man forsker på, data i form av tekst og en induktiv tilnærming. Kvantitative forskning tar sikte på å forklare fenomener, større avstand til forskningsdeltagerne, datamateriale som kan beskrives ved tall og en deduktiv tilnærming til forskning Tjora (2012). Kvantitativ forskning kjennetegnes også med stor bredde som betyr at forskeren innhenter en liten enhet av informasjon, men fra et bredt utvalg (Dalland, 2012). Kvalitative studier derimot gir mye informasjon om hver enhet, men fra et mer avgrenset utvalg enn kvantitative studier.

Denne studien er en kvalitativ studie. Det er en fortolkende studie i den forstand at det ikke vil være et klart svar på hva som er utfordrende i overgangene mellom representasjoner av funksjoner, men vil kreve en tolkning av hva som skaper utfordringer for elevene og hvorfor. Resultatene vil også være tolket subjektivt og beskrive to unike gruppers arbeid med representasjoner av funksjoner og kan beskrives som subjektivistisk forskning. Dette skiller seg tydelig fra den objektivistisk tilnærmingen til forskning med idealet om objektiv, håndfast og definitiv kunnskap. Jeg har tatt utgangspunkt i en liten gruppe der resultatene ikke vil være generaliserbare, men muligheten for å få mye kunnskap om hver enkelt gruppes arbeid med overganger er stor, der andre kan ta stilling til om resultatene er generaliserbare til andre situasjoner (Cohen et al., 2011). Denne studien kan også betegnes som induktiv forskning i den forstand at de empiriske funnene vil danne grunnlaget for teorien og ikke omvendt som i deduktiv forskning. Dette underbygger valget av en kvalitativ forskningstilnærming.

3.2 Praktiske forberedelser

3.2.1 Valg av skole og trinn

Skolen jeg gjennomførte intervju og observasjon på er en ungdomsskole jeg ikke hadde kjennskap til fra tidligere praksisperioder eller vikarjobbing. Norsk senter for forskningsdata (NSD) satt som kriterie at sensitive opplysninger som blant annet elevenes faglige nivå ikke skulle være kjent for meg som forsker. Derfor oppfattet jeg det som mest ryddig å gjennomføre studien med elever jeg ikke hadde noen relasjon til fra tidligere. Rollen som forsker blir også tydeligere når elevene ikke kjenner meg som lærer. Jeg tok kontakt med en kontaktlærer som hadde matematikk som fag på 10. trinn og spurte om det var mulig å gjennomføre datainnsamlingen i klassen. Jeg så på det som hensiktsmessig å gjennomføre studien på 10.trinn siden det er elevenes utførelse av overganger mellom representasjoner av funksjoner som skal studeres. Det var også viktig at elevene hadde jobbet med lineære funksjoner tidligere og var kjent med de ulike representasjonene de skulle jobbe med og ta utgangspunkt i og dermed hadde forutsetninger for å kunne arbeide med overganger mellom disse representasjonene.

3.2.2 Pilotundersøkelse

Før selve datainnsamlingen var det hensiktsmessig å gjennomføre en pilotstudie for å se hvordan oppgavene var egnet for å svare på problemstillingen jeg hadde valgt. Deltagerne i pilotstudien var elever jeg kjente fra tidligere gjennom arbeid som vikar. Opprinnelig var intensjonen at elevene skulle arbeide individuelt med oppgavene og at oppgavebesvarelsene og intervju i etterkant skulle danne datamaterialet. Under gjennomføring av piloten oppstod det derimot diskusjoner om hvordan representasjonene skulle utformes og det ble tydelig at det kunne være hensiktsmessig å la elever jobbe sammen. Jeg kunne da få ytterligere kunnskaper om hva som er utfordrende i forskjellige overganger mellom representasjoner gjennom diskusjoner som oppstod. Ved å la elevene samarbeide i observasjonsdelen av studien kom begrunnelser av fremgangsmåter tydeligere frem og jeg kunne dermed i intervjusituasjonen la elevene forklare fremgangsmåter i større grad, istedenfor å måtte bruke intervjuet på å stille spørsmål for å forstå hva de hadde gjort. På grunn av at elevene som deltok i pilotstudien gikk på 9.trinn hadde de ikke arbeidet så mye med funksjoner tidligere, men det var likevel nyttig å gjennomføre en pilot for å se hvordan de tolket oppgavene og om det var ord eller formuleringer jeg måtte være forberedt på å forklare i selve forskningsprosjektet. Det var også nyttig for å se om oppgavene var hensiktsmessige og fikk elevene til å utføre overganger slik at jeg ville få innsikt i hva som gjorde de ulike overganger utfordrende for elevene som skulle delta i forskningsprosjektet. Oppgave 1 ble også lagt til etter piloten. Dette ble gjort for å ha en oppgave der elevene kunne velge hvilken sluttrepresentasjon de ville utforme for å representere den lineære funksjonen som ble oppgitt i oppgaveteksten. At denne oppgaven ble lagt til kunne også være hensiktsmessig for å se hvilke overganger elevene foretrakk å utføre når verbal situasjon var startrepresentasjon.

3.2.3 Valg av deltagere

Norsk senter for forskningsdata (NSD) minnet om at læreren har taushetsplikt og taushetsbelagte opplysninger som elevenes faglige nivå i matematikk derfor ikke skulle være kjent for forsker. Jeg valgte derfor å informere kontaktlæreren til elevene om at valg av elever ikke skulle baseres på elevenes faglige nivå i matematikk. Et viktig kriterie for utvalg av elever var at de som skulle delta i forskningsprosjektet var snakkesalige slik at jeg fikk størst mulig innsikt i deres fremgangsmåter og refleksjoner i utførelsen av oppgavene. I hvor stor grad gruppen som undersøkes er representativ for en større gruppe er ofte i kvalitativ forskning irrelevant fordi kvalitative studier er interessert i å utforske det spesielle tilfellet, ikke å generalisere funnene (Cohen et al., 2011). Fordi studien er kvalitativ og er ute etter å gi utfyllende beskrivelser av forskningsdeltagernes arbeid med overganger mellom representasjoner og ikke trenger å være representative for en større gruppe, syntes jeg det var tilstrekkelig med to elevgrupper. Studien består derfor av totalt fire elever fordelt på to elevgrupper.

3.2.4 Valg av oppgaver

Oppgavene som ble gitt til elevene var oppgaver som handlet som gå fra en representasjon av en funksjon til en annen representasjon. Tre av oppgavene som ble gitt er direkte overgangsoppgaver der elevene blir bedt om å utføre spesifikke overganger. Valget av direkte overgangsoppgaver er tatt med bakgrunn i at denne typen oppgaver har blitt brukt i tidligere forskning på hvilke overganger elever mestrer (Gagatsis & Shiakalli 2004). Duval (2004) sier også at spesifikke oppgaver om overganger kan bli gitt til elever for å få dem til å reagere på en gitt representasjon med å endre den til en annen representasjon. For å forstå elevers læringsutfordringer kan lærere presentere en ide i en representasjon og be elevene om å representere den samme ideen i en annen representasjon (Lesh et al., 1987). Dette vil også tilsi at direkte overgangsoppgaver og at jeg da ifølge Lesh et al. (1987) vil kunne forstå elevens utfordringer med overganger mellom representasjoner og samtidig være sikker på at oppgavene sørger for at elevene utfører ulike overganger.

Bosse et al. (2011), påpeker at de ulike representasjonene av lineære funksjoner har ulike egenskaper som *faktahull*, *forvirrende elementer* og *informasjonstetthet* avhengig av om de er start- eller sluttrepresentasjon i oppgavene. På bakgrunn av dette så jeg det som hensiktsmessig å ha oppgaver der de ulike representasjonene både ble oppgitt og skulle utformes i oppgavene. Funksjonsuttrykk, verbal situasjon og tabell er brukt som startrepresentasjon i henholdsvis oppgave 2,3 og 4. Oppgavene ber også spesifikt om at elevene skal lage en verbal situasjon, et funksjonsuttrykk og en graf slik at disse representasjonene også opptrer som sluttrepresentasjoner. Oppgave 1 gir også mulighet for forskjellige sluttrepresentasjoner der verbal situasjon er representasjonen som blir oppgitt.

Gjennom utformingen av oppgaver har jeg også tatt hensyn til den antatte vanskelighetsgraden til de ulike overgangene. Bosse et al. (2011) har laget en oversikt som inneholder alle mulige overganger mellom funksjonsuttrykk, tabell, graf og verbal situasjon og rangert de etter vanskelighetsgrad, fra overganger elever stort sett klarer til overganger elever sjelden klarer. Overgangene elevene skal utføre varierer fra å være klassifisert som antatt lette overganger til de overgangene elevene sjelden får til.

Elevers forsøk på å utføre overganger fra funksjonsuttrykk, tabeller og grafer til verbal form er overganger elevene sjelden klarer utover enkle lineære funksjoner. Når funksjoner er mer komplekse enn lineære funksjoner er det vanskelig å avgjøre om elevenes feil er et resultat av økt kompleksitet eller deres manglende evne til å utføre overganger (Bosse et al., 2011). Alle funksjonene i oppgaven er derfor lineære. Jeg ønsker å se hva som er problematisk i de ulike overgangene og ser det derfor som hensiktsmessig å ikke bruke funksjoner som skaper utfordringer som ikke er relatert til selve overgangen.

3.3 Datamateriale

Observasjon, skriftlige besvarelser og intervju med fire elever danner datamaterialet i denne oppgaven. Elevene ble filmet mens de løste oppgavene i observasjonsdelen av studien. Fra mitt ståsted virket det som at videokameraet ikke påvirket elevene nevneverdig. Denne antagelsen baserer jeg på at elevene ikke så mye bort på kamera og arbeidet sammenhengende med oppgavene gjennom hele sekvensen. Kameraets tilstedeværelse vil likevel ha påvirket elevene til en viss grad. De to gruppene brukte mellom 35 og 55 minutter på å utføre oppgavene. De skriftlige besvarelsene deres ble samlet inn slik at jeg kunne analysere svarene deres og se hvordan de hadde løst oppgavene. Det ble rett i etterkant av observasjonen gjennomført et intervju med hver elevgruppe på rett i underkant av 30 minutter. Intervjuet ble tatt opp med lydopptak for å kunne transkribere i ettertid. Dette mener jeg var hensiktsmessig fordi elevene da hadde oppgavebesvarelsene tilgjengelig for å begrunne fremgangsmåter og hadde egne tanker og refleksjoner rundt oppgaveløsningen friskt i minnet. Datamaterialet som dermed skaper grunnlaget for masteroppgaven består av samtaler mellom elevene når elevene samarbeidet om å løse oppgavene og elevenes utsagn i intervjusituasjonene.

3.3.1 Observasjon

Observasjon er en metode som gir forskeren mulighet til å samle inn direkte informasjon som oppstår naturlig i sosiale situasjoner. Forskeren er dermed ikke avhengig av å stole på sekundærkilder (Cohen et al., 2011). Ved å bruke observasjon kan jeg se hva elevene faktisk foretar seg i oppgaveløsningene og hvor eventuelle problemer i overgangene oppstår. Som forsker får jeg også direkte tilgang til hvordan elevene argumenterer for representasjonene som blir utarbeidet og kan få et innblikk i hvilke elementer som skapte utfordringer.

Observasjon kan bli delt inni ulike kategorier avhengig av hvor strukturert observasjonen skal være. En vanlig inndeling er *strukturert, semistrukturert og ustrukturert observasjon* (Cohen et al., 2011). Jeg har i mitt prosjekt valgt å benytte semistrukturert observasjon. Cohen et al. (2011) betegner denne formen for observasjon som hypotesegenererende, men at det likevel er noen forhåndsbestemte temaer som skal undersøkes og er av interesse. Dette forskningsprosjektet har som utgangspunkt at hva som er utfordrende i overganger mellom representasjoner er ukjent og er dermed hypotesegenererende og ikke hypotesetestende. Temaet som skulle undersøkes var også kjent i forkant av datainnsamlingen i form av overganger mellom representasjoner og elevenes arbeid med ulike overganger.

En annet viktig valg som må tas er hvilken rolle jeg som forsker skal ha i observasjonen. Gold (1958) har laget en klassifikasjon av observatørens rolle i forskningsprosjekter der rollene observatøren kan innta er betegnet som *the complete participant, the participant as observer, the observer as participant* og *the complete observer*. Jeg mener det i dette prosjektet var mest hensiktsmessig å innta rollen som observer as participant. Denne rollen blir av Gold beskrevet som en person som kommer utenfra og ikke er medlem av gruppen, men som deltar litt i aktivitetene gruppen bedriver. Når denne rollen som observatør blir valgt er det viktig at min rolle som forsker er kjent for elevene og at observatøren er til stede, men påvirker situasjonen minst mulig (Gold, 1958). Jeg hadde ikke kjennskap til elevene fra tidligere, utover et møte i forkant av gjennomføringen av observasjon og intervju. Jeg kan derfor kategoriseres som en som ikke er medlem av gruppen som i dette tilfellet var to elever i hver gruppe i observasjonssekvensene. Det var også naturlig når jeg skulle studere elevenes arbeid med overganger at jeg ikke deltok i for stor grad i oppgaveløsningene. Likevel fikk elevene beskjed i forkant av oppgaveløsningen at de kunne stille spørsmål hvis det var noe i oppgaveteksten de oppfattet som uklart. Bakgrunnen for dette var at jeg i denne forskningen ikke undersøkte elevenes evne til å tolke oppgaver og dermed ikke anså det som et problem å klargjøre hva oppgavene spurte eller. Elevene ble informert om min rolle som forsker der jeg sa tydelig ifra at jeg ikke kunne hjelpe til med å løse oppgaver og dermed prøvde å påvirke elevens arbeid i minst mulig grad.

3.3.2 Intervju

Jeg valgte også å gjennomføre et intervju på i underkant av 30 minutter for å gi elevene mulighet til å utdype hvordan de hadde jobbet med oppgavene og deres egne beskrivelser og refleksjoner rundt hvordan oppgaveløsningen hadde gått. Deltagere i intervju får mulighet til å diskutere deres tolkninger av situasjoner og mulighet til å uttrykke deres synspunkter på ulike situasjoner (Cohen et al., 2011). Elevenes synspunkt på hvilke oppgaver som var utfordrende og hvorfor, kan sammen med observasjonene som er gjort gi et godt bilde på hvilke overganger som var utfordrende og hvorfor. Intervju ble også sett på som gunstig for å fylle eventuelle hull i observasjonen og gå mer i dybden på interessante situasjoner som oppstod. Elevenes synspunkter på hvilke representasjoner de foretrekker kan også være nyttig kunnskap siden det kan gi innblikk i hvilke overganger de selv synes er utfordrende. Intervjuet fungerer i denne studien som et supplement til observasjonen, som er den primære datainnsamlingsmetoden.

Valg av hvor strukturert intervjuet skal være er avhengig av hvilket datamateriale du er ute etter. Cohen et al. (2011) argumenterer for at hvis du vil ha mulighet til å sammenligne data på tvers av steder eller personer bør intervjuet være standardisert og kvantitativt. Hvis du derimot vil undersøke det unike i en situasjon eller personlige informasjon bør intervjuet være mer ustrukturert, kvalitativt og åpent. Denne forskningen har som mål å få innsikt i hvordan to grupper med elever utfører overganger mellom funksjoner og er dermed ute etter spesifikke trekk ved hver gruppes oppgaveløsninger og det er det unike i situasjonene som studeres. Det var derfor viktig at intervjuet ikke var for strukturert for å gi elevene muligheten til å reflektere over sitt eget arbeid med oppgavene og finne ut hva som var utfordrende i overgangene mellom representasjoner for akkurat disse elevene. Intervjuet jeg gjennomførte kan betegnes som et halvstrukturert intervju. Et halvstrukturert intervju er et intervju der temaer og spørsmål er bestemt, men intervjueren er åpen for at intervjuobjektet kan trekke inn andre temaer i samtalen enn det som var planlagt på forhånd (Postholm & Moen 2010). Temaet for intervjuet var overganger mellom representasjoner i form av at elevene snakket om overgangene i beskrivelser av arbeidet med oppgavene, men gå også rom for å gå dypere inn i interessante episoder som kunne være av interesse for å svare på problemstillingen. Dermed lot jeg elevene snakke ganske fritt så lenge temaet de diskuterte kunne relateres til overganger mellom representasjoner, representasjonene eller funksjoner. Før intervjuene med de to gruppene lagde jeg også en intervjuguide der hensikten med forskningen og temaet i forskningen var kjent sammen med noen spørsmål som jeg visste ville bli aktuelle.

Jeg har valgt å benytte meg av gruppeintervju i forskningsprosjektet istedenfor intervjuer individuelt med hver deltager. Gruppeintervjuene ble gjennomført i de samme gruppene som ble benyttet når elevene løste oppgavene. Hvis det er flere som blir intervjuet oppstår muligheten for flere synspunkt på en situasjon der den ene personen utfyller den andres svar og dermed skaper et mer helhetlig bilde av situasjonen (Arksey & Knight referert i Cohen et al., 2011). Siden elevene samarbeidet med oppgavene så jeg et stort potensial for at elevene kunne utfylle hverandres svar og skape et klarere bilde av situasjonene som oppstod under arbeidet med oppgavene. Arksey & Knight skriver videre at ulemper med denne typen intervju kan være at den ene overkjører den andre, særlig hvis den ene er mann og den andre er kvinne og deltagerne kan også vegre seg for å si hva de mener foran den andre som blir intervjuet. (Cohen et al., 2011). Denne ulempen prøvde jeg bevisst å motvirke ved at sammensetningen av kjønn i gruppene var homogen. Jeg stilte også bevisst spørsmål til den ene gruppedeltageren hvis det var skjevhet mellom hvor mye de sa i intervjusituasjonen slik at begges synspunkter skulle bli hørt. Gruppeintervju kan også være hensiktsmessig i intervjuer som involverer barn. Grunnen til dette er at gruppeintervju gir mulighet til interaksjon med den andre deltagerne i motsetning til å svare på spørsmål fra en voksen i 1 til 1 intervju. Gruppeintervju kan også være mindre truende og gjøre situasjonen mer komfortabel for deltagerne (Cohen et al., 2011). Elevene uttrykte at de var glade for at de kunne samarbeide om oppgavene og det faktum at de også gjorde intervjuene sammen kan ha ført til at refleksjonene og utsagnene deres har større validitet enn intervju individuelt ville hatt.

3.4 Analyse av oppgavene.

Oppgavene som ble brukt i forskningen vil her bli presentert i kronologisk rekkefølge. Oppgaveteksten slik den ble gitt til elevene er skrevet i kursiv. Deretter vil en analyse av hver enkelt deloppgave gjøres der viktige elementer for å løse oppgaven vil bli redegjort for.

3.4.1 Oppgave 1

Oppgave 1.

En bil kjører med hastighet på 60km i timen

a) *Vis sammenhengen mellom antall kilometer som er kjørt og lengden av kjøreturen i antall timer*
b) *Kan du vise sammenhengen på flere måter?*

Oppgaven er ment som en introduksjon til arbeid med overganger og tar utgangspunkt i en situasjon som kan antas at er kjent for elevene. Den gir også meg som forsker mulighet til å se hvilke representasjoner de velger å benytte seg av når det ikke er bestemt hvilken de skal bruke, og de står helt fritt til å vise hvordan de vil representere relasjonen mellom distanse og tid. Basert på hvilken representasjon de velger i den første oppgaven kan representasjonen de velger fungere som en startrepresentasjon i de nye overgangene som det arbeides med når elevene blir bedt om å vise sammenhengen mellom distanse og tid på flere måter. Det er også muligheter for at den verbale situasjonen er utgangspunktet til elevene i alle representasjonene de utarbeider.

Elevene kan velge å lage et funksjonsuttrykk der de må ha km per time, antall timer og total distanse som elementer. Elevene må ha distansen (y) og antall timer (x) som variabler og 60 (a) for at representasjonen skal være riktig. Det er også viktig at km per time (a) multipliseres med antall timer (x) og ikke distansen slik at uttrykket blir $y = 60x$ og ikke $60y = x$.

Oppgaven kan også løses ved å bruke en tabell som sluttrepresentasjon. Her kan det lages en tabell med 3 kolonner der antall timer (x) distanse per time (a) og total distanse (y) er representert. Det er også tilstrekkelig å ha en tabell som bare inneholder variablene der verdien for total distanse alltid er 60 ganger større enn antall timer som er kjørt.

Det siste alternativet er å lage en graf. For at representasjonen skal vise riktig sammenheng og overgangen skal være utført riktig må stigningen mellom hver x-verdi på grafen tilsvare en stigning på 60 på y aksen. Siden det ikke er et konstantledd i oppgaven og det ikke snakk om noen negativ y- eller x-verdier i oppgaveteksten skal linjen starte i origo.

3.4.2 Oppgave 2.

Oppgave 2

Vi har funksjonsuttrykket $X = Y + 5$

a) *Lag en situasjon funksjonsuttrykket beskriver.*
b) *Vis utviklingen til* Y *når* X *er mellom 0-10. Beskriv hva du finner når* X *er en bestemt verdi i situasjonen din.*
c) *Hvor er det naturlig at* X *starter og slutter i din situasjon?*

Denne oppgaven tar utgangspunkt i et funksjonsuttrykk. I motsetning til den første oppgaven spør oppgaveteksten om en spesifikk overgang som gjør det til en direkte overgangsoppgave. 2a handler om å gjøre overgangen fra funksjonsuttrykk til en verbal situasjon, mens oppgave 2b krever at en graf eller tabell lages for å vise hvordan y utvikler seg. 2b ønsker også en forklaring på hva det betyr i situasjonen de har laget når x er en bestemt verdi. For å svare på det spørsmålet må betydningen av x i situasjonen de har laget være kjent og hva y er når x er en bestemt verdi. 2c er ment som en oppgave som gir innsyn i hva de har definert x som og hvordan x er overført fra funksjonsuttrykket til situasjonen.

2a spør etter en verbal situasjon som kan beskrive funksjonsuttrykket. Her må elevene lage en situasjon der variabelen y er definert, x er definert, stigningstallet er 1 og definere hva konstantleddet som har verdien 5 er. En mulig løsning på oppgaven kunne vært «Jakob får 5 kroner fast i ukelønn men får også 1 krone per oppgave han utfører» Her vil ukelønnen alltid være 5 kroner mer enn antall oppgaver han utfører. Konstantleddet er definert som kroner han får før han har utført noen oppgaver og stigningstallet er satt til 1.

Oppgave 2b etterspør utviklingen til y når x varierer mellom 0-10. Oppgaven spør også etter en beskrivelse av hva du finner ut hvis x er en bestemt verdi. Første del av oppgaven krever en overgang til enten en tabell eller graf for å vise hvordan x og y utvikler seg når x varierer.

Oppgave 2c spør etter et intervall for x og hvor det i den verbale situasjonen elevene har laget er naturlig at x starter og slutter. Her er svaret helt avhengig av hvordan oppgave 2a er løst så svarene kan variere veldig uten at noen av svarene er feilaktige av den grunn. For å kunne gi et veloverveid svar på oppgaven må elevene definere hva x er for kunne si hva som er naturlige start- og sluttverdier. Siden oppgaven er den siste deloppgaven som tar utgangspunkt i funksjonsuttrykket $y = x + 5$ kan besvarelsen også si noe om hvordan x har blitt definert gjennom oppgaven og om betydningen av x har endret seg i overgangene mellom de ulike representasjonene som har blitt tatt i bruk.

3.4.3 Oppgave 3.

Oppgave 3.

a) *Anna er 5 år eldre enn Jon. Vis hvordan alderen til Anna utvikler seg fra Jon er nyfødt til han er 15 år gammel.*
b) *Lag et funksjonsuttrykk som beskriver alderen til Anna og Jon når de blir eldre.*

Denne oppgaven tar utgangspunkt i en verbal situasjon i likhet med den første oppgaven. Den er annerledes på den måten at den i motsetning til oppgave 1 er en direkte overgangsoppgave. Oppgaven kan også tilsvare samme funksjonsuttrykk som i oppgave 2, hvis Annas alder blir satt som y og Jons alder blir satt som x. Dette er gjort bevisst for å se om elevene gjenkjente at det var samme funksjon som ble arbeidet med i begge oppgavene. Overgangene i 3a er ansett som lettere overganger enn fra verbal situasjon til funksjonsuttrykk i oppgave 3b uavhengig om elevene velger overgangen verbal situasjon-tabell eller verbal situasjon-graf (Bosse et al., 2011).

I oppgave 3a skal elevene vise hvordan alderen til Anna utvikler seg fra Jon er født til han er 15 år gammel. Hensikten med denne oppgaven er at elevene skal lage en tabell eller graf som viser utviklingen til både Anna og Jon. Elevene står fritt til å velge hvilken alder som skal tilsvare x og y i oppgaven. Når de skal vise utviklingen i alder må de vise at Anna alltid vil være 5 år eldre enn Jon. For å vise dette kan de sette inn punkter på grafen eller lage en tabell med alderen til Anna og Jon som sannsynligvis ikke blir veldig utfordrende for elevene.

I oppgave 3b skal elevene utføre overgangen verbal situasjon-funksjonsuttrykk med et funksjonsuttrykk som beskriver alderen til Anna og Jon når de blir eldre. Hvis Annas alder blir definert som y vil funksjonsuttrykket tilsvare $y = x + 5$. Hvis Jons alder defineres som y vil funksjonsuttrykket bli $y = x - 5$. Konstantleddet 5 som vil tilsvare forskjellen i alder gitt i antall år er avhengig av hvilken alder som blir definert som x og y og endrer fortegn hvis betydningen av variablene byttes. Stigningstallet må i oppgaven settes som 1 for å indikere at når et barn blir ett år eldre blir også det andre barnet ett år eldre.

3.4.4 Oppgave 4.

Oppgave 4

a) Lag en situasjon tabellen nedenfor kan beskrive

b) Lag grafen til tabellen

c) Finn funksjonsuttrykket til tabellen.

0	*300*
10	*450*
20	*600*
30	*750*
40	*900*
50	*1050*
100	*1800*
200	*3300*

Denne oppgaven tar utgangspunkt i en tabell. Tabell er en representasjon som har lav informasjonstetthet som startrepresentasjon og anses som mer utfordrende som start-representasjon enn som slutt-representasjon (Adu-Gyamfi et al., 2011). Derfor anså jeg det som nyttig å lage en oppgave som startet med en tabell for å se innvirkningen dette hadde på overgangsaksjonene. Oppgave 4 spør etter 3 ulike representasjoner der jeg antar at oppgave 4a og 4c vil skape størst utfordring, mens oppgave 4b, der de skal lage en graf, er den letteste. Hvilke overganger elevene skal utføre kan virke bestemt basert på oppgavene. Hvilken rekkefølge elevene utfører overgangene i er likevel ikke bestemt. Elevene kan velge å finne funksjonsuttrykket før de lager en verbal situasjon, og potensielt kan nye overganger oppstå og andre representasjoner kan fungere som startrepresentasjon selv om de skal ta utgangspunkt i tabellen. Det eneste som er bestemt i oppgaven er at den første overgangen tar utgangspunkt i tabellen, siden det er den eneste representasjonen av funksjonen som er kjent. Deretter kan de nye representasjonene danne startrepresentasjoner for å produsere de andre representasjonene. Det er en fordel at alle representasjonen tar utgangspunkt i samme funksjon. Hvis det hadde vært tre ulike funksjoner representert i tabeller der hver tabell skulle brukes til en bestemt overgang ville det vært lettere å bestemme hvilken overgang elevene gjør. Dette hadde likevel svekket mulighetene for at sluttrepresentasjonen i den første overgangen er startrepresentasjon i den neste overgangen. Siden det er en lineær funksjon som blir representert kan det potensielt føre til at overgangen tabell-funksjonsuttrykk blir gjort først etterfølgt av at elevene gjør overgangen funksjonsuttrykk-verbal situasjon. Hadde jeg brukt 3 ulike tabeller hadde overgangene blitt tabell-verbal situasjon, tabell-funksjonsuttrykk og tabell-graf.

I oppgave 4a skal elevene lage en verbal situasjon som representerer samme funksjon som tabellen de får oppgitt. Dette anses som den vanskeligste overgangen mellom representasjoner av funksjoner for elever å utføre (Bosse et al., 2011). For å utføre denne oppgaven må elevene identifisere at konstantleddet må settes til 300. Dermed må de i den verbale situasjonen oppgi en startsum på 300 når $x = 0$. Tabellen viser også y-verdier som stiger med 150 for hver tiende x verdi. Situasjonen kan dermed beskrive enten noe som øker med 150 for hver tiende time, eller noe som stiger med 15 hver time slik at stigningstallet blir 15. For å lage en situasjon må også x og y defineres som noe som varierer i situasjonen. Den verbale situasjonen kan for eksempel skrives som «Et gymmedlemskap koster 300 kr + 15 kroner for hver gang du trener»

Oppgave 4b kan løses ved å overføre verdiene i tabellen til punkter i koordinatsystemet og dermed utføre overgangen tabell-graf. Tabellen har større avstand i x-verdier i slutten enn den har i starten. For å lage en graf som tilsvarer verdiene i tabellen kan elevene enten endre verdier i tabellen eller passe på at avstanden endres når endringen mellom verdiene blir større. De må ende opp med en rett linje som viser at verdiene i tabellen representerer en lineær funksjon for at representasjonen skal være korrekt og overgangen tabell-graf skal være gjort riktig.

Oppgave 4c krever overgangen fra tabell til et funksjonsuttrykk. Her må elevene finne relasjonen mellom x og y. Hvor mye y øker med per x-verdi er ikke selvsagt med tanke på at tabellen viser x verdier som stiger med 10. Det gir muligheten for at elevene kan lage et funksjonsuttrykk på formen $y = 150x/10 + 300$ eller y=15$x + 300$. Konstantleddet i funksjonen må også finnes, men siden 0 er oppgitt i den ene kolonnen så kan tallene i denne kolonnen settes som x verdiene og dermed blir det bare avlesning av verdien i den andre kolonnen som kreves for å finne ut at y starter på 300 og at dette er konstantleddet i funksjonen.

3.5 Analysemetode

Etter at observasjon og intervju var gjennomført i begge grupper begynte arbeidet med å behandle datamaterialet. Jeg startet med å transkribere både lydopptakene fra intervjuene og videoene fra observasjonen i sin helhet. Jeg så på det som nødvendig å transkribere alt materialet fordi elevene i oppgaveløsningene hele tiden jobbet med overgangsoppgaver, og alle delene av sekvensen gir informasjon om omdanninger eller diskusjoner om hvordan en representasjon skal lages som er relevant for å kunne svare på problemstillingen. Intervjuet ble transkribert i sin helhet fordi elevene i intervjusituasjonen beskrev sine egne oppgaveløsninger og reflekterte rundt hva de anså som vanskelig med hver oppgave. Siden både intervjuene og observasjonsdelene involverte to elever, hendte det noen ganger at elevene snakket samtidig slik at det ble uklart hva de sa. Dette er markert som utydelig i transkripsjonene slik at det er vist at det er noen ord som er ytret uten at jeg klarer å høre hva som blir sagt.

For å kunne analysere hva som er utfordrende i ulike overganger mellom representasjonene måtte jeg først avgjøre hvilke overganger elevene jobber med. Noen av oppgavene spør om en bestemt representasjon. Det kan likevel oppstå tilfeller der eleven lager en annen representasjon og bruker denne som startrepresentasjon i en ny overgang til representasjonen det blir spurt etter, og dermed gjør andre overganger enn forventet. Derfor var det viktig i analysen å bestemme hvilke overganger som faktisk fant sted. Transkripsjonene ble derfor kategorisert etter hvilken overgang elevene arbeidet med i observasjonen og hvilken overgang de snakket om i intervjuet. Når dette var gjort kunne overgangene knyttes opp til Janvier (1987) og begrepene for omdanningsaksjoner elevene må foreta i de ulike overgangene. Koder tilsvarende begrepene for omdanningsaksjonene ble derfor brukt for å indikere alle tilfellene elevene arbeidet med en type omdanningsaksjon. Det ble i datamaterialet funnet 9 omdanningsaksjoner som fikk kodene *skissere1* (verbal situasjon-graf)*, måle, modellere, parameter gjenkjennelse, tilpasse, lese, plotte skissere2 (*funksjonsuttrykk-graf*)* og *beregne* som utgjorde en kategorisering av datamaterialet.

Bosse et al. (2011) argumenterer også for at egenskapene representasjonene har når de opptrer som start- og slutt-representasjoner også påvirker vanskelighetsgraden til overgangen. Et eksempel er representasjonen tabell som har lav informasjonstetthet. Dette kan være en utfordring når elever skal gjør overganger fra tabell til andre representasjoner fordi det er vanskelig å skille den relevante informasjonen fra overflødig informasjon. Fra andre representasjoner til tabell er ikke lav informasjonstetthet en like stor utfordring fordi når tabell er sluttrepresentasjon må det ikke bedømmes hva i tabellen som er relevant og hva som er overflødig informasjon. Dermed ble det naturlig å analysere om representasjonenes faktahull, forvirrende element og informasjonstetthet som start- og slutt-representasjoner gjorde overgangene vanskelig for elevene. Datamaterialet som kunne indikere utfordringer med overganger som var knyttet til representasjonens egenskaper fikk derfor en av kodene *faktahull, forvirrende element* eller *informasjonstetthet*.

Senere ble også datamaterialet sett i lys av Duval (2004; 2006) og hans teorier om omdanninger, kongruens og retning i omdanningene. Det ble naturlig å skille mellom behandling av representasjoner og omdanninger mellom representasjoner. Derfor ble koden *behandling* der elever arbeider med å endre en representasjon, men ikke utfører en overgang. Koden *ikke-kongruent* ble også brukt for å indikere utfordringer elevene hadde knyttet til overganger med to representasjoner som ikke var kongruente basert på Duval (2006) sine tre kriterier. Siden det er tre kriterier ble denne koden videre delt opp i tre koder knyttet til et enkelt kriterie. Disse kodene ble kalt *ikke direkte avbildning, tvetydig element* og *rekkefølge* for å indikere utfordringer som kunne skyldes ikke-kongruente representasjoner. Sammen skapte disse kodene et helhetlig bilde av hvilke utfordringer elevene hadde med hver enkelt overgang mellom representasjoner.

3.6 Kvalitet i forskningen.

3.6.1 Validitet

Cohen et al. (2011) vektlegger blant annet grundige beskrivelser og å finne mening og intensjoner som viktige prinsipp for at kvalitativ forskning skal være valid. Ved å bruke flere metoder for datainnsamling i form av intervju og observasjon kan jeg beskrive elevenes fremgangsmåter på en grundig måte. Observasjonssekvensene gir innblikk i elevenes fremgangsmåter for å utarbeide representasjoner og arbeid med overganger. Oppgaveløsningene viser resultatet av arbeidet, mens intervjuet gir beskrivelser av elevenes egne tanker om overgangene og problemstillinger de møtte i arbeidet. Meningen bak elevenes oppgaveløsninger er også lettere å bestemme ved å støtte seg på både elever utsagn i observasjonen, refleksjoner i intervjuene og oppgaveløsningene, enn det hadde vært ved å bare benytte seg av en metode. Ved å knytte sammen elevens besvarelser, diskusjoner og argumentasjoner i observasjonen, refleksjoner og egne formuleringer i intervjuene, mener jeg elevens arbeider med ulike overganger kan beskrives på en utfyllende og grundig måte. For å sikre validiteten er det nyttig å gjennomføre en pilot i studier der det skal observeres for å forsikre seg om at observasjonskategoriene er passende, tydelige og effektive for å operasjonalisere formålet med forskningen (Cohen et al., 2011). Ved å gjennomføre en pilot fant jeg ut at det var hensiktsmessig å la elevene samarbeide for å observere diskusjoner og argumentasjoner fra elevgruppene og dermed få et bedre bilde av utfordringer som oppstod i overganger mellom representasjonene.

3.6.2 Reliabilitet

Ved å legge frem direkte sitater slik informantene legger det frem kan reliabiliteten til forskningen styrkes fordi stemmen til informanten gjøres i noen grad synlig for leseren (Tjora, 2012). Analysene vil i stor grad basere seg på transkripsjoner av elevutsagn som dermed vil gjøre elevenes stemme i forskningen synlig. Elevutsagnene vil være basert på diskusjoner og argumentasjon som oppstod i observasjonen og elevenes forklaringer i intervjusituasjonene. Siden et intervju er en interaksjon mellom forsker og intervjuobjekt vil alltid forskeren påvirke intervjuobjektet og dermed også på datamaterialet (Cohen et al., 2011). Ved å klargjøre for elevene at jeg ikke var ute etter å vurdere oppgaveløsningene deres i intervjuet, men høre deres synspunkter og beskrivelser av hvordan de løste oppgavene, prøvde jeg å gjøre intervjuobjektene mer avslappet. De fikk dermed mulighet til å besvare oppgavene på en oppriktig måte uten å være bekymret for at jeg som forsker hele tiden vurderte hvor bra de hadde utført oppgavene. Dette kan kanskje ha hatt en positiv effekt på den måten at jeg påvirket elevenes beskrivelser litt mindre og dermed også påvirket datamaterialet i mindre grad. Som sagt tidligere er også flere metoder brukt for datainnsamling og ifølge Cohen et al. (2011) kan det være gunstig å bruke andre metoder i tillegg til observasjon for å sikre at slutninger tas basert på et pålitelig datamateriale. Postholm & Moen (2010) betegner dette som triangulering og hevder at data fra flere datainnsamlingsmetoder gjør det mulig for forskeren å gi detaljerte beskrivelser av datamaterialet. Handlingene blir på denne måten belyst fra flere kilder som igjen sikrer påliteligheten til studien.

3.7 Etiske betraktninger

Forskningsprosjektet baserer seg på datamateriale fra intervjuer og observasjoner av elever. Når barn deltar i forskningsprosjekter er det visse etiske forpliktelser du har som forsker. Tidlig i arbeidet med forskningsprosjektet meldte jeg studien til Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD). Det stilles krav til at elevene som deltar i studiene ikke skal kunne gjenkjennes. Derfor har elevene i studien fått tildelt fiktive navn. Skolen deltagerne er elever på er ikke nevnt med navn og det gis ingen informasjon utover at deltagerne går i 10. trinn på en skole i Trøndelag. Som forsker er det viktig å gi elevene informasjon om studien og gi de en tydelig mulighet til å trekke seg uten at det stilles spørsmål om hvorfor, og å innhente samtykke fra forskningsobjektene og foresatte (Cohen et al., 2011). En annen viktig etisk forpliktelse er at elevene er klar over at deltagelse i studien er frivillig. Dette ble informert om både muntlig til elevene ved første møte, der de fikk forklart at de kunne trekke seg til enhver tid uten å oppgi noen grunn, og i samtykkeskjemaet som skulle undertegnes av elevenes foresatte. Elevene fikk også mulighet til å stille spørsmål om prosjektet, om hensikten med prosjektet og hva deltagelse i studien ville innebære.

3.8 Metodekritikk

Innenfor en fortolkende tradisjon som kvalitativ forskning baserer seg på er det umulig med fullstendig nøytralitet (Tjora, 2012). Mine tolkninger er en kilde til subjektivitet og jeg har gjennom mine valg av oppgaver, og tolkninger av besvarelsene, vært en kilde til subjektive tolkninger. Ved å utforme fire oppgaver med flere deloppgaver knyttet til samme matematiske funksjon, må jeg som forsker tolke og avgjøre hvilke overganger som skjer, siden det ikke er helt opplagt hvilke overganger som utføres. Dette gjør at det kan oppstå flere overganger enn forventet mellom representasjonene verbal situasjon, tabell, graf og funksjonsuttrykk, men gjør også at jeg må foreta en subjektiv tolkning av hvilken overgang det er. Basert på mine antagelser og kjennskap til teori om hvilke overganger som sannsynligvis var vanskelige for elever på 10.trinn, kan dette også ha påvirket utformingen av oppgavene og mine tolkninger av oppgaveløsningene elevene har foretatt seg. Forskingen er også på grunn av sin kvalitative natur lite generaliserbar og andre elementer i overgangsprosessene kan være utfordrende for andre elever enn de utfordringene elevene i dette forskningsprosjektet møtte på. Tjora (2012) kaller påvirkningen forskeren og forskningsprosjektet har på de som studeres for forskningseffekter. Både videokameraet og min tilstedeværelse vil ha påvirket elevenes adferd og skapt større forskningseffekter. Ved bruk av video kan man forsøke å legge merke hvor oppmerksomme de som observeres er på at de blir filmet og at det er en observatør tilstede, for å avgjøre hvor stor forskningseffekten er (Tjora, 2012). Elevene som deltok i studien så ikke mye på videokameraet som kan tyde på at forskningseffekten videokameraet hadde ikke var betydelig.

4 Analyse

4.1 Analyseverktøy

For å analysere datamaterialet har jeg brukt Janvier (1987) sine begrep for ulike omdanningsaksjoner. Alle overganger inneholder en omdanningsaksjon som kreves for å produsere sluttrepresentasjonen. Gjennom å finne ut hvilke overganger som finner sted kan også omdanningsaksjonen som skjer stadfestes. Videre kan det argumenteres for hva i overgangsaksjonen som er utfordrende. Det vil også bli nevnt om oppgavene krever en lokal eller global tolkningsaktivitet som kan være avgjørende for om omdanningen er vellykket eller ikke. Omdanningsaksjonen og om overgangen er global eller lokal er elementer som tilhører omdanningsprosessen. Denne delen av analysen er bygd opp kronologisk, oppgave for oppgave og en diskusjon av overganger i oppgaven i sin helhet avslutningsvis.

Den andre delen av analysen vil fokusere på egenskapene til representasjonene i ulike overganger og hvordan de skapte utfordringer for elevene. De elementene som blir fokusert på er de Bosse et al. (2011) kaller *forvirrende elementer, faktahull, informasjonstetthet.* Disse elementene varierer i hyppighet avhengig av hvilken representasjon som blir brukt og om representasjonen fungerer som start- eller sluttrepresentasjon.

Videre i kapittelet vil oppgaveløsningene ses i lys av Duval (2006) sine teorier om hva som påvirker omdanningene. Hvilken retning omdanningen mellom to representasjoner har, og om representasjonene er kongruente eller ikke-kongruente, påvirker ifølge Duval (2006) hvor vanskelig en overgang er. Her vil det bli vurdert om det er vesentlige forskjeller i hvor utfordrende en overgang er mellom kongruente og ikke-kongruente representasjoner og mellom omdanninger av to representasjoner som går i ulik retning. Her vil det også bli vurdert om det er omdanninger av representasjoner eller behandling av representasjoner som skaper utfordringer for elevene.

4.2 Oppgave 1

1A

Oppgave 1a er en åpen overgangsoppgave der elevene kunne velge hvordan de ville vise funksjonen som blir representert i den verbale situasjonen i en valgfri ny representasjon. Beate og Cecilie fant raskt ut at de skulle lage en tabell for å vise sammenhengen mellom antall kilometer og antall timer på kjøreturen som er oppgitt i situasjonen.

16. Beate: Og da hvis man kjører 60 km i timen da åsså 1 time så kjører den 60km
17. Cecilie: Og den 60km ja å hva skal, distansen er avhengig av hvor lenge du kjører.
18. Beate: Ja det er det samme som y da så bare skriver du 60
19. Cecilie: På 1 time
20. Beate: Ja. Så kan vi kanskje hoppe frem til sånn 5 timer eller kanskje vi burde ta 2 først sånn det blir litt mer sammenheng mellom
21. Cecilie: Ja
22. Cecilie: Ja vi tar bare 5 da. Da kjører enn 100, 300 da

Anders og Daniel kom også frem til at de skulle lage en tabell og fant verdier for x og y som vist i sekvensen nedenfor.

27. Anders: Seksti
28. Begge: En time
29. Daniel: Å så 2 timer 120.
30. Anders: Mm så 3 timer
31. Daniel: 118, 180 mener jeg.

Videre lagde Cecilie og Beate verdier tilsvarende (12, 720) og (20, 1200). Gruppen valgte relativt raskt å utforme en tabell når det ikke var bestemt av oppgaven hvilken sluttrepresentasjon som skulle brukes. Daniel og Anders finner i likhet med gruppe 1 raskt ut at de skal utforme en tabell og lager verdier for distansen etter 1,2 og 3 timer. Gruppen definerer også distansen som er kjørt som y og antall timer som x over tabellen og viser med det at de vet hva som er variabler i situasjonen og relasjonen mellom dem. Overgangen som arbeides med her er verbal situasjon-tabell og omdannningsaksjonen *måle*. Det er tydelig at elevene ikke har store problemer med å vise sammenhengen mellom distansen (y) og lengden på kjøreturen i timer (x).

1B. Ny sluttrepresentasjon

Cecilie og Beate finner deretter ut at de skal lage et funksjonsuttrykk som representerer situasjonen som er oppgitt.

23. Cecilie: Et funksjonsuttrykk
24. Beate: ja f av x skal vi starte med
25. Cecilie: Seksti x.

Gruppen har i besvarelsen skrevet $f(x) = 60x$ med y i parentes over $f(x)$. Sekvensen som er vist her er veldig kort og det illustrerer at Beate og Cecilie ikke hadde nevneverdige utfordringer med å produsere et funksjonsuttrykk basert på den verbale situasjonen. Dette er et eksempel på *modellere* som er overgangsaksjonen mellom verbal situasjon-funksjonsuttrykk (Janvier, 1987). Anders og Daniel valgte også å lage et funksjonsuttrykk og utfører dermed også omdanningsaksjonen modellering. De kommer i likhet med den andre gruppen frem til funksjonsuttrykket $y = 60x$ raskt som samsvarer med den verbale situasjonen som blir oppgitt i oppgaven.

Etter at funksjonsuttrykket er utformet begynner Anders og Daniel å diskutere hvordan de kan vise sammenhengen på flere måter og kommer frem til at de også kan lage en graf.

50. Daniel: Så hvis 1 her
51. Anders: 60 der

…

55. Anders: Så blir 2 det blir på
56. Daniel: 2,3 (lager x-aksen)
57. Anders: Det blir 120 da.

Anders og Daniel klarte i likhet med de foregående representasjonene å lage en graf som viste sammenhengen mellom distanse og antall timer. Basert på utsagnene de kommer med under arbeidet med å utforme grafen, kan det virke som de tar utgangspunkt i et punkt om gangen istedenfor den generelle sammenhengen mellom y og x. Koordinatene som blir utformet (1, 60) (2, 120) og (3, 180) er også tilsvarende tallparene som ble brukt av gruppen i tabellen som ble utformet i oppgave 1a. Dette tyder på at det er tabellen som er utgangspunktet for utformingen av grafen og at elevene derfor arbeider med overgangen tabell-graf og omdanningsaksjonen *plotte* (Janvier, 1987). Omdanningen er også et resultat av lokal tolkning siden tallparene i tabellen tilsvarer punktene på grafen. Anders og Daniel har representert de samsvarende verdiene for x og y i tabellen som punktene i koordinatsystemet og tegnet en graf, noe som tyder på at overgangen fra tabell til graf var overkommelig i denne oppgaven.

Sammenfatning oppgave 1

Gruppe 1 arbeidet i oppgave 1 med overgangene verbal situasjon-tabell og verbal situasjon-funksjonsuttrykk. Disse overgangene krever henholdsvis omdanningsaksjonene *måle* og *modellere*. Basert på de korrekte oppgavebesvarelsene og den raske progresjonen i oppgaveløsningssituasjon kan det antas at omdanningsaksjonene måling og modellering og selve overgangene ikke skapte nevneverdige problemer for Beate og Cecilie i oppgave 1.

Gruppe 2 gjorde på samme måte den verbale situasjonen om til en tabell innledningsvis og overgangsaksjonen måling. Deretter arbeidet de med overgangen verbal situasjon-funksjonsuttrykk og omdanningsaksjonen modellering. De arbeid i tillegg med *plotte* som er omdanningsaksjonen som skjer mellom tabell og graf (Janvier, 1987). Plotte, modellere og måle skapte ikke nevneverdige utfordringer for elevene og det kan antas ut ifra besvarelsene i oppgave 1 at i dette tilfellet var ikke omdanningene verbal situasjon-tabell, verbal situasjon-funksjonsuttrykk eller tabell-graf problematiske for Anders og Daniel.

4.3 Oppgave 2

2A

Oppgave 2a er den første oppgaven som spør etter en direkte overgang. Oppgaven starter med funksjonsuttrykk $y = x + 5$ der elevene skal lage en situasjon som beskriver funksjonsuttrykket de har fått oppgitt. Cecilie og Beate bestemmer seg for å lage en verbal situasjon om ukelønn.

46. Beate: Da han får alltid 5 kroner i ukelønn, men i forhold til hvor mye han jobber da.

…

49. Cecilie: Får også x kroner
50. Beate: For andre ting, annet andre, kanskje formulere det her, kanskje får
51. Cecilie: Per oppgave eller noe sånn
52. Beate: Per oppgave
53. Cecilie: Per husoppgave som blir utført.

Dette er overgangen funksjonsuttrykk-verbal situasjon og overgangsaksjonen *parameter gjenkjennelse* (Janvier, 1987). Gruppen kom frem til denne formuleringen av den verbale situasjonen som skulle tilsvare funksjonsuttrykket $y = x + 5$: «En ungdom får 5 kroner fast i ukelønn. Men får også x kroner per husoppgave som blir utført.». Elevene gjenkjenner $+5$ i funksjonsuttrykket som noe de har fra før av. Det som kan ses fra besvarelsen til gruppe 1 at y blir det samme som den totale ukelønnen. Variabelen de betegner som x er kroner per husoppgave. Antall husoppgaver som blir utført er heller ikke fastsatt så også dette blir en variabel. Dermed ender de i sin verbale situasjon opp med 3 variabler henholdsvis, total ukelønn, antall kroner per oppgave og antall oppgaver. Stigningstallet a har fra den opprinnelige symbolske representasjonen til deres verbale situasjon endret seg til å bli en variabel. Det er Cecilie som i utsagn 49 kommer frem til x kroner og dermed definerer x som et ukjent antall kroner du får for hver oppgave.

Anders og Daniel velger å lage en verbal situasjon som handler om timelønn.

80. Anders: Lineær ja, så hvis, då må du jo ha noe som er fast fra før av da. Hvis du liksom har
81. Daniel: Hvis du har hundre kroner fra før av og fem kroner i timeslønn.
82. Anders: Nei, men du må jo ha fem kroner fra før av da, hvis du har pluss fem

….

95. Anders: Så hvis du har fem kroner fra før så får du
96. Daniel: Får du antall penger i timen, eller kroner

….

102. Daniel: Okei du har fem kroner

103. Anders: Får x kroner per time

Ut i fra samtalen mellom elevene kan det ses at Daniel i utsagn 81 vil ha 100 kroner fra før av, men Anders forklarer at det må være 5 kroner fra før av hvis du har $+5$ og kjenner tydeligvis igjen $+5$ som konstantleddet i funksjonsuttrykket. Daniel kommer i utsagn 96 frem til «antall penger i timen eller kroner» som en variabel. Dette utdypes nærmere i utsagn 102 og 103 der de kommer frem til at du har 5 kroner og får x kroner per time. Denne sekvensen kan defineres som *parameter gjenkjennelse* (Janvier, 1987). Elevene jobbet målrettet med å overføre elementene i funksjonsuttrykket til en verbal situasjon og gjør dette suksessfullt med konstantleddet b som blir beskrevet som noe du har fra før av. Gruppe 2 har svart på oppgaven på følgende måte «$Du\ har\ 5\ kroner\ og\ får\ x\ kroner\ per\ time$». Det kommer frem i løsningen deres at x er et ukjent antall kroner som blir en variabel samtidig som antall timer også blir en variabel. Siden 1 ikke står foran x i funksjonsuttrykket har kroner per time, som skulle vært stigningstallet, blitt x i situasjonen deres, samtidig som de har en variabel de ikke definerer i antall timer som skulle vært x. Det kommer ikke tydelig frem hva y er i situasjonen deres, men Anders oppklarer dette i intervjuet ved å si «y er jo hvor mye penger du har til sammen …». Derfor er også dette en variabel og gruppen ender opp med et konstantledd som stemmer overens i begge representasjoner og tre variabler der stigningstallet som er 1 i funksjonsuttrykket har blitt til variabelen antall kroner.

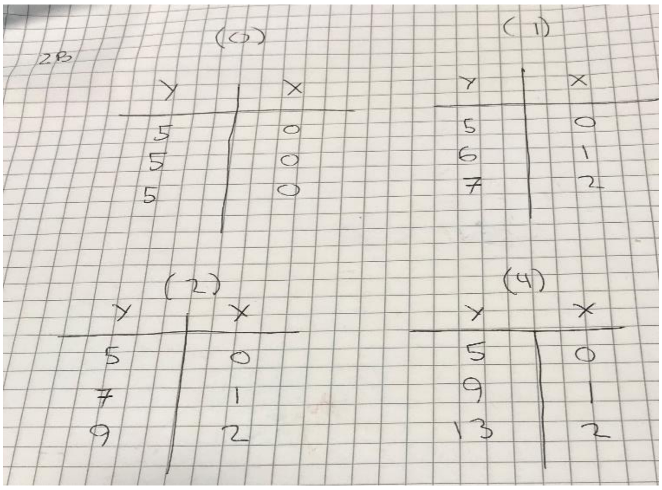
2B

Cecilie og Beate arbeider med oppgave 2b flere ganger i løpet av observasjonen. Første gang de prøver seg på oppgaven kommer de frem til at x er et ukjent antall kroner du får for å utføre en oppgave. Cecilie eksemplifiserer med at x er 5 kroner og at du da etter 1 oppgave får 10 kroner totalt siden du har 5 kroner fra før. Cecilie kommer også frem til at det må oppgis når x har ulike verdier.

64. Beate: x er liksom hvor mye han har fått på grunn av oppgavene han har gjort ikke sant. 1 kr for oppgaven sin så han får i alle fall 5 åsså 1 ekstra krone.

65. Cecilie: Ja men då må x være 1 krone. Hvis x er 5 kroner etter 1 oppgave så blir det 10 kroner. Då må vi skrive at x er 1 krone.

Etter et forsøk på å lage en graf, bestemmer elevene seg for å prøve å utforme en tabell og besvarelsen på oppgaven er tabellene vist i figur 3.

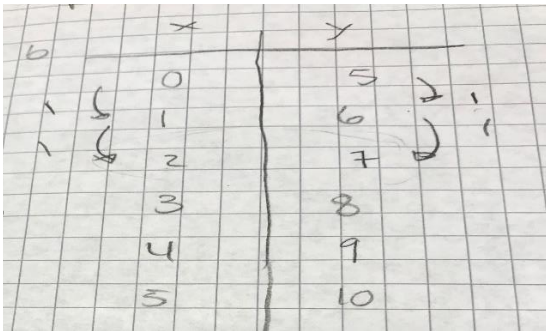


Figur 3: Besvarelse gruppe 1 oppgave 2b

302. Cecilie: Men hvis x er 4 da så blir jo y 13.

Figur 3 viser at tabellene de lager inneholder 3 variabler. Totalsummen av ukelønnen er betegnet som y, en variabel de ikke har definert i tabellen som er forskjellig i hver tabell og x som her er antall oppgaver. Tallet som står i parentes og som egentlig er stigningstallet, blir også betegnet som x som vist i utsagn 302. Ingen av verdiene som er betegnet som x i tabellene går opp til 4 og det kan antas at både kroner per oppgave og antall oppgaver av elevene blir sett på som x. Dermed er tallet som blir oppgitt i parentes kroner per oppgave og kolonnen som er betegnet som x antall husoppgaver som blir gjennomført. Verdien y i tabellen er regnet ut ved å multiplisere kroner per oppgave og antall oppgaver sammen. Den verbale situasjonen de lager i oppgave 2a inneholdt også 3 variabler og det er derfor denne representasjonen som er utgangspunktet for utformingen av tabellen og ikke funksjonsuttrykket $y = x + 5$. Omdanningsaksjonen blir *måle*, men siden den verbale situasjonen de laget inneholder 3 variabler inneholder også tabellen 3 variabler. Dette kan skyldes at funksjonsuttrykket de startet med er oppgitt som $y = x + 5$ og ikke $y = 1x + 5$ som kunne gjort det tydeligere for elevene at stigningstallet skulle være konstant lik 1. Oppgaven spør også etter en beskrivelse for hva du finner ut når x er en bestemt verdi. Beate og Cecilies besvarelse illustrerer hvordan de har definert verdiene. «Når x er et bestemt tall for eksempel 5 må du gange 5 med antall oppgaver du har gjort i huset, og plusse på 5 for å få totalsummen av hva du har tjent i ukelønn». Her er det tydelig at x for elevene er kroner per oppgave. Hvis tabellen skulle representert funksjonsuttrykket $y = x + 5$ burde kroner per oppgave vært stigningstallet a og satt til verdien 1 og ikke vært x.

Anders og Daniel lager også en tabell for å vise utviklingen til variablene x og y. Figur 4 viser tabellen gruppe 2 utformet for å vise utviklingen til y når x hadde verdiene 0-10.



Figur 4: Besvarelse gruppe 2 oppgave 2b

123. Daniel: Så hvis x er 2 da så blir det jo 2 då blir det 7. blir det ikke det da?
124. Anders: Hvis det blir 7 hæ at det blir 7
125. Daniel: Ja hvis x er 2
126. Anders: Jaja men då må det jo bli 6 og 7 og 8 og 9 og det og da.

Tabellen og verdiene x og y har, stemmer overens med funksjonsuttrykket $y = x + 5$. Verdiene i tabellen stemmer derimot ikke med den verbale situasjonen gruppen laget i oppgave 2a. Dette er kanskje grunnen til at Anders og Daniel først nevner mange mulige y-verdier når $x = 1$. Det er først når Daniel kommer med et eksempel at $x = 2$ må gi at $y = 7$ at de klarer å utforme tabellen. Anders og Daniel jobber her med omdanningsaksjonen *beregne*. Det er ikke før de setter inn verdier for x i funksjonsuttrykket at de klarer å utforme en tabell. Dette kan komme av at den verbale situasjonen i oppgave 2a ikke representerer funksjonsuttrykket $y = x + 5$, men y= antall kroner · antall timer $+5$. Omdanningsaksjonen beregne er ikke i denne oppgaven en stor utfordring for elevene. Konstantleddet er riktig representert i tabellen som 5 når $x = 0$. Stigningen til y for hver x-verdi er også riktig siden stigningstallet ikke er skrevet i funksjonsuttrykket og dermed er 1.

2C

Denne oppgaven er som sagt ikke en oppgave som etterspør en omdanning, men er av interesse i den forstand at defineringen av hva variabelen x er i den verbale situasjonen kommer tydelig frem i diskusjonene

258. Cecilie: Men på C hvor er det naturlig at x starter og slutter i din situasjon, er det liksom verdien x asså hvor mye du får per oppgave du gjør liksom? Eller hvor mange oppgaver du gjør?
259. Kjartan: Ja det er liksom hvor det er naturlig at x din, ka den minste verdien x-en din kan ha og den største verdien x-en din kan ha.
260. Cecilie: Liksom hvor mye du kan tjene per husoppgave da liksom
261. Beate: Eller liksom tenker på hva som liksom en vanlig person hvor mange hvor mange oppgaver en person gjør liksom. En realistisk.

….

366. Beate: Så vi tar, da er det sikkert naturlig at starter på 1 og 10. mellom 1 og 10 tror jeg. Man må jo som oftest gjøre 1 oppgave i hvert fall og tviler på at man gjør så mye mer.

Cecilie spør om det er kroner per oppgave eller antall oppgaver som skal bestemmes og viser med dette at hun ser på begge som variabler. Utsagn 260 viser at Cecilie vil ha kr per husoppgave som x, mens Beate i utsagnet etterpå vil ha antall oppgaver som x. Gruppen gjorde i den verbale situasjonen sin stigningstallet om til en variabel og kroner per oppgave er derfor sett på som en variabel og ikke et stigningstall. Gruppen har senere kommet frem til at det er antall husoppgaver som er x og at antall husoppgaver (x) som er naturlig for en ungdom å gjøre er mellom 1-10 som vist i utsagn 366. Betydningen av x har dermed endret seg fra situasjonen der x var et ukjent antall kroner du kunne få for en oppgave.

Gruppe 2 definerer i denne oppgaven x som antall timer. Anders kommer med utsagnet «Den starter på 0 og slutter på 24. Det blir jo det i vår fordi du kan jo jobbe 0 timer da og ha 5 kroner og du kan jobbe 24 timer og få masse». Her har også betydningen av x endret seg fra oppgave 2a der x stod for antall kroner og per time var en udefinert variabel. Denne gruppen diskuterer ikke om x er antall kroner eller antall timer. De oppfatter ikke at betydningen x hadde i situasjonen ikke er den samme som i denne oppgaven. Utsagnene nedenfor viser hvordan gruppen kom frem til hvor det var naturlig at x starter og slutter i situasjonen de har laget.

151. Anders: Antall timer, hvis vi sier antall timer du jobber da så blir det jo

….

161. Anders: x starter på 0 og slutter på 24. ja

…

471. Anders: Den starter på 0 og slutter på 24. det blir jo det i vår fordi du kan jo jobbe 0 timer da og ha 5 kroner og du kan jobbe 24 timer og få masse.

Sammenfatning oppgave 2

Begge gruppene starter oppgave 2 med omdanningsaksjonen *parameter gjenkjennelse* for å representere funksjonsuttrykket som en verbal situasjon. Gruppene har ikke store problemer med å definere $+5$ som «noe du har fra før» i situasjonene sine. Stigningstallet (som er 1 i funksjonsuttrykket) har fått egenskapen som en variabel og blir av begge grupper kalt x i den verbale situasjonen. Dette kan beskrives som det Adu-Gyamfi et al. (2012) betegner som en *tolkningsfeil.* De har også en annen uavhengig variabel som er antall husoppgaver for gruppe 1 og antall timer for gruppe 2. Dermed ender begge grupper opp med to uavhengige og en avhengig variabel sammen med konstantleddet i de verbale situasjonene de utformer.

Oppgave 2b ble veldig utfordrende for gruppe 1, siden de tar utgangspunkt i situasjonen de lager for å utforme en tabell og bedriver omdanningsaksjonen *måle.* Siden de har 3 variabler i situasjonen sin og oppfatter at det er 3 elementer som endrer seg, lager de en tabell der x og y verdiene varierer når stigningstallet varieres. Tabellen de lager stemmer overens med den verbale situasjonen, men ikke funksjonsuttrykket, siden det ble gjort feil i den første omdanningsaksjonen parameter gjenkjennelse.

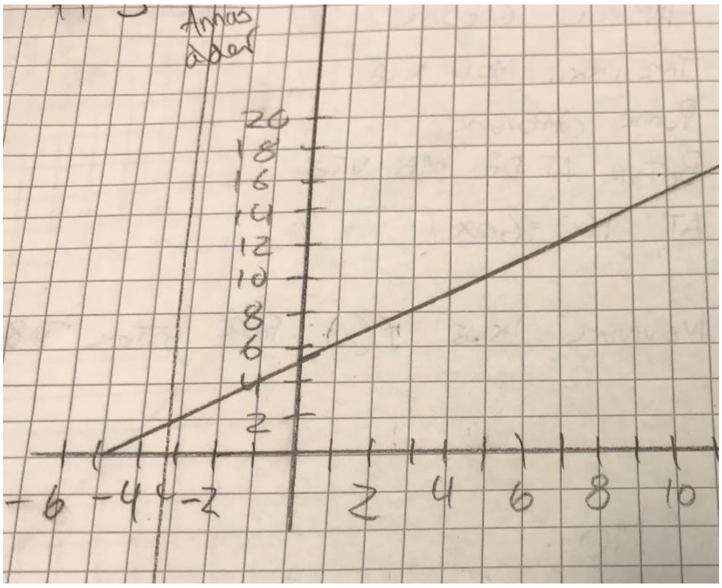
Gruppe 2 prøver seg først på omdanningsaksjonen *måle,* men kommer ikke frem til noen resultater før Daniel styrer dem inn på funksjonsuttrykket ved å bruke $x = 2$ som eksempel og får $y = 7$. Det er først når de ser bort fra den verbale situasjonen de klarer å utforme tabellen. Derfor er tabellen de utvikler et resultat av omdanningsaksjonen *beregne*. Når de først har kommet frem til at y stiger med 1 for hver x verdi har de ingen utfordringer med å utforme en tabell når x har verdier fra 0-10. Dette kan også kategoriseres som en *lokal tolkning* der de tar utgangspunkt i bestemte x verdier for å finne y verdier

Begge gruppene endrer betydningen til x når de i oppgave 2c skal definere hvor det er naturlig at x starter og slutter i situasjonen de har laget i oppgave 2a. Gruppe 1 stiller spørsmål om det er antall husoppgaver eller kroner per husoppgave som er x. De kommer til slutt frem til at antall husoppgaver er x. Her har betydningen til x endret seg fra situasjonen de produserte i oppgave 2a fra kroner per husoppgave til antall husoppgaver. Gruppe 2 gjør akkurat det samme og endrer betydningen av x fra kroner per time i oppgave 2a til å være antall timer i besvarelsen av oppgave 2c.

4.4 Oppgave 3.

3a

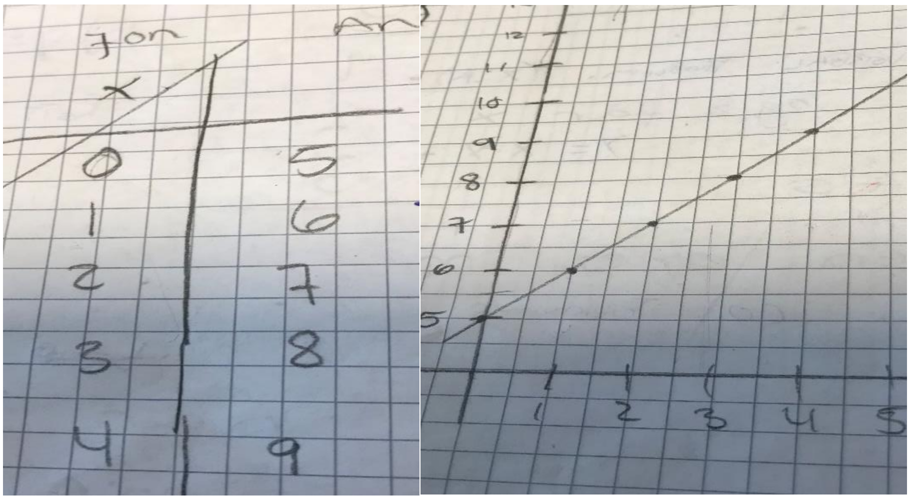
Beate og Cecilie valgte å vise utviklingen av Anna og Jons alder fra Jon var nyfødt til han var 15 år ved å lage en graf. Dermed blir overgangen verbal situasjon-graf og omdanningsaksjonen *skissere.*



Figur 5: Besvarelse gruppe 1 oppgave 3a

Figur 5 viser at y-verdiene er Annas alder og x-verdiene Jons alder. Linjen viser også at y-verdiene alltid er 5 høyere enn x-verdiene som betyr at Anna alltid er 5 år eldre enn Jon i representasjonen, noe som stemmer med informasjonen de får oppgitt i den verbale situasjonen. Elevene skal i oppgaven vise utviklingen fra Jon er nyfødt til han er 15 år. Siden de har definert Jons alder som x ville det derfor vært naturlig at x hadde en startverdi på 0. Gruppen har representert dette riktig i grafen, men grafen starter når Anna er 0 år og 5 år før Jon blir født. Skissere er en omdanningsaksjon som krever global tolkning (Bosse et al., 2011). Det kan antas at elevene skjønner sammenhengen mellom Jon og Annas alder og dermed mestrer global tolkning i denne oppgaven. De har også tegnet grafen direkte og ikke lagd punkter i koordinatsystemet for så å tegne grafen.

Anders og Daniel kommer frem til at de skal vise utviklingen til Anna og Jon ved å lage en graf. Hvis de hadde laget en graf direkte fra den verbale situasjonen som blir oppgitt i oppgaven, ville omdanningsaksjonen vært *skissere*. Gruppen bestemte seg likevel for å lage en tabell først ut ifra den verbale situasjonen for å vise hvordan utviklingen til alderen til «Anna og Jon» ville være.



Figur 6: Besvarelse gruppe 2 oppgave 3a

Det kan ses i figur 6 at tabellen inneholder Jons alder fra han er nyfødt og Annas alder fra hun er 5 år. Grafen blir laget etter tabellen og inneholder en rett linje og koordinater som tilsvarer tallparene som er oppgitt i tabellen. Overgangen fra verbal situasjon til graf er en overgang der elevene ofte benytter seg av en *overføringsrepresentasjon* (Bosse et al., 2011). Her kan det antas at tabellen er brukt som en overføringsrepresentasjon og at omdanningsaksjonene derfor blir *måle* (verbal situasjon-tabell) og *plotte* (tabell-graf) istedenfor *skissering*. Globale tolkninger er ofte vanskeligere for elever enn lokale tolkninger og ved å benytte seg av en overføringsrepresentasjon skapes det to omdanninger som krever lokal tolkning, hvor elevene kan ta utgangspunkt i bestemte punkter i koordinatsystemet for å tegne grafen. Hvis elevene hadde endret representasjon direkte fra den verbale situasjonen til en graf uten å lage punkter i koordinatsystemet først hadde dette krevd en global tolkning (Bosse et al., 2011).

3B

Når Cecilie og Anna skulle lage et funksjonsuttrykk som viste alderen til Anna og Jon startet dialogen som er vist nedenfor.

147. Cecilie: Anna er y.
148. Beate: Skal vi lage ett funksjonsuttrykk for begge aldrene i ett liksom.
149. Kjartan: Ja.
150. Beate: Eller skal vi lage ja okei.
151. Cecilie: y er lik x pluss 5.

152. Beate: Ja
153. Cecilie: Det er sånn det blir, blir det ikke?
154. Beate: Jo
155. Cecilie: Mister aldri pluss fem
156. Beate: Så skal vi ha Annas alder
157. Cecilie: Da er Jon y. Er lik x minus fem

Cecilie starter med å definere Annas alder som y og kommer raskt frem til $y = x + 5$. Fra utsagnene kommer det ikke tydelig frem hva x og $+5$ er, men i besvarelsen står det «Anna=y» og «Jon =x» over funksjonsuttrykket $y = x + 5$ som indikerer barnas alder. I slutten av sekvensen sier Beate at «så skal vi ha Annas alder». De kommer deretter frem til et nytt funksjonsuttrykk $y = x - 5$, der variablenes betydning er skiftet og at Jons alder nå er y og Annas alder er x. Omdanningsaksjonen de bedriver i denne oppgaven er *modellere* som krever en global tolkning (Bosse et al., 2011). Det kan ses gjennom sekvensen at elevene har kommet frem til definisjoner av variablene x og y. De endrer også fortegnet i de to funksjonsuttrykkene sine slik at de stemmer overens med situasjonen som blir beskrevet i oppgaven. Det er også interessant at de velger å lage to funksjonsuttrykk. Beate nevner dette i intervjuet og sier:

> «ja men da tenkte jeg et funksjonsuttrykk til Anna og et til Jon liksom.. så jeg føler vi har gjort det rett, det var det vi tenkte på slutten da i hvert fall, det var derfor vi lagde to. Fordi vi hadde ikke noen måte å lage ett».

Dette viser at gruppen ikke ser på funksjonsuttrykket som beskrivelser av begge aldrene, men ett funksjonsuttrykk som en beskrivelse av en alder. Anders og Daniel definerte Jons alder som x og Anna alder som y i forbindelse med utforming av tabell og graf og kommer raskt frem til funksjonsuttrykket $y = x + 5$. Utsagnet nedenfor viser at gruppen definerer Annas alder som y, Jons alder som x og forstår at $+5$ er avstanden i alder mellom Anna og Jon.

184. Anders: Ja men, y alderen til Anna er jo alderen til Jon ja alderen til Jon pluss fem. liksom

Sammenfatning oppgave 3

Gruppene har to ulike fremgangsmåter for å lage en graf fra den verbale situasjonen som blir oppgitt. Beate og Cecilie lager grafen direkte og utfører derfor *skissere* (verbal situasjon-graf)

Anders og Daniel benytter seg av en tabell som en overføringsrepresentasjon og utfører derfor to overganger som krever lokal tolkning. Omdanningsaksjonene blir derfor istedenfor skissere, *måle* (verbal situasjon-tabell) og *plotte* (tabell-graf). Begge gruppene bruker den verbale situasjonen til å lage et funksjonsuttrykk og arbeider med omdanningsaksjonen *modellere.* Begge gruppene kommer frem til funksjonsuttrykket $y = x + 5$ som er riktig hvis Annas alder blir betegnet som y og Jons alder som x noe begge gruppene gjør. Beate og Cecilie velger likevel å lage ett funksjonsuttrykk til fordi de ikke var sikre på hvordan de skulle representere begge aldrene i ett funksjonsuttrykk. Dette viser at de ikke er klar over at det opprinnelige funksjonsuttrykket deres faktisk representerer både Jon og Annas alder. Likevel endrer de fortegn før konstantleddet og får et uttrykk som representerer situasjonen riktig i form av $y = x - 5$ når Jons alder er definert som y. Dette viser at de skjønner sammenhengen mellom $x\ og\ y$ uavhengig av hvilken variabel som er definert som Annas og Jons alder.

4.5 Oppgave 4.

4A

Beate og Cecilie starter oppgave 4 med å studere tabellen for å finne ut hvilken informasjon tabellen gir.

203. Cecilie: Der øker den med 10 og der øker den med 150. der øker den med 10 og der øker den med 150
204. Beate: Det kan jo være.
205. Cecilie: Når den, når den øker med 1 så øker den med 15.
206. Beate: Okei
207. Cecilie: Så det blir liksom 15 $x\ +$
208. Beate: Det kan jo være.
209. Beate: Vi kan jo lage en situasjon med en DJ da. Som skal få betalt for en viss sum av. Han skal først få betalt 300 åsså skal han få betalt 15kr for hver gjest som kommer. Eller sånn da vil si at billetten er 30 kr jeg vet ikke jeg ka faen ja.

…..

213. Beate: Skal ha 300 kr for å opptre i kulturbygget.

214. Cecilie: Ja.

215. Beate: Han vil også ha 15 kr for hver gjest som kommer

216. Cecilie: Han får også 15 kr per solgte billett.

217. Beate: Ja

218. Cecilie: Vi kan gjøre det sånn ja, ikke bare ta utgangspunkt i dem tallene som står.

219. Kjartan: Ja gjør det sånn som dere vil.

….

223. Cecilie: y er lik femten x pluss trehundre. okei så den starter på 300.

Cecilie starter med å se på økningen mellom hver verdi i tabellen henholdsvis økningen mellom hver x-verdi som er oppgitt og hver y-verdi som er oppgitt og kommer frem til at for hver x-verdi stiger y med 15, som hun sier i utsagn 207. Videre kommer Beate frem til en situasjon der tallet 15 blir brukt og ikke 150, som er forskjellen mellom y-verdiene for hver tiende x-verdi. Beate bruker også verdien 300 som er konstantleddet i funksjonen. Selv om funksjonsuttrykket ikke blir skrevet ned før i slutten av sekvensen tyder det på at tabellen først blir behandlet slik at den kan gjøres om til et funksjonsuttrykk som igjen brukes for å lage situasjonen. Dermed blir omdanningen først tabell-funksjonsuttrykk før verdiene som er en del av funksjonsuttrykket blir brukt for å skape en verbal situasjon. Dermed blir omdanningsaksjonene *tilpasse* og deretter *parameter gjenkjenning,* og ikke *lese,* som er betegnelsen på omdanningsaksjonen fra tabell til verbal situasjon. Gruppen har ikke store problemer med å komme frem til et funksjonsuttrykk som tilsvarer tabellen der de to variablene, stigningstallet og konstantleddet, er med. Den verbale situasjonen de lager representerer også riktig funksjon. Variabelen y tilsvarer DJen sine inntekter, x er antall solgte billetter, a tilsvarer prisen per billett og b er beløpet DJen skal ha for å opptre i utgangspunktet.

Anders og Daniel starter oppgave 4a med å se på verdien y har når $x = 0$.

282. Anders: Okei, det blir jo du har 300 da fra før.

283. Daniel: Mm

284. Anders: Også får du

285. Daniel: 150

286. Anders: Ja hver gang

287. Daniel: Det øker med 10.

…..

303. Anders: Ja vi sier det. 300 kr og får 150 per tiende time du jobber da, eller bare du lever.

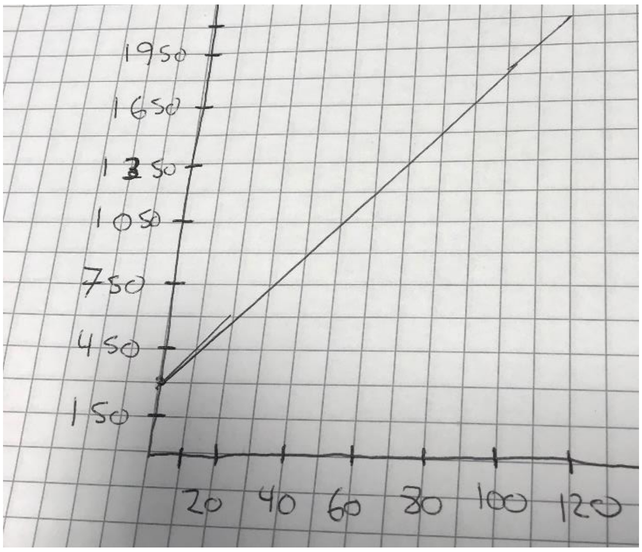
Anders og Daniel betegner 300 som noe du har fra før av i situasjonen de skal lage. Deretter starter de med å finne ut hvor mye y stiger med for hver tiende x-verdi og kommer frem til at y stiger med 150. Anders kommer i utsagn 303 frem til at 300 er kroner du har fra før. Stigningstallet blir bestemt som 150kr du får for 10 timers arbeid. Variabelen x blir i situasjonen deres antall timer, men de skriver det i situasjonen sin som 150kr per tiende time. Situasjonen deres og informasjonen som kommer frem i den, er direkte hentet fra tabellen, og de bedriver derfor omdanningsaksjonen *lese* som er betegnelsen Janvier (1987) bruker om overgangen tabell-verbal situasjon. Etter å ha jobbet seg gjennom alle oppgavene deriblant 4c der informasjonen i tabellen skal brukes for å lage et funksjonsuttrykk kommer de tilbake til oppgave 4a. Et utdrag av samtalen kan ses nedenfor.

488. Anders: Men da får du jo 15 kroner per time da.
489. Daniel: Ja gjør man det?
490. Anders: Ja fordi 150 delt på 10 er jo, skal vi skrive det istedenfor? At du får 15 kroner at du får 15 kroner per time du jobber eller 150 etter hver 10. time.

Her blir funksjonsuttrykket de kommer frem til i oppgave 4c brukt for å endre litt på den verbale situasjonen der de skriver «du har 300 kr og får 150kr per tiende time/ 15kr per time». Dermed kan det virke som de bruker funksjonsuttrykket de har kommet frem til for å justere den verbale situasjonen. Janvier (1987) betegner omdanningsaksjonen fra funksjonsuttrykk til verbal situasjon som *parameter gjenkjennelse* som det kan virke som elevene utfører for å komme frem til 15kr per time. Dette kan tyde på at å definere konstantleddet i situasjonen ikke var utfordrende i omdanningsaksjonen *lese*, men at 150kr per tiende time var en del av situasjonen de ikke var helt fornøyd med. Dermed ble *parameter gjenkjennelse* en aktuell omdanningsaksjon når funksjonsuttrykket var funnet og kunne føre til en endring av den verbale situasjonen.

4B

Oppgave 4b krever at elevene lager en graf som representerer den samme lineære funksjonen som tabellen. Beate og Cecilie utformer grafen i Figur 7. Nedenfor er dialogen mellom elevene når de arbeider med å utforme en graf.



Figur 7: Besvarelse gruppe 1 oppgave 4b

202. Cecilie: Skal vi bruke de tallene som er her?
203. Kjartan: Det kan dere og velge hvordan dere
204. Beate: Vi må bare ha samme, det må bare gå under samme funksjonsuttrykk hvis du skjønner.
205. Cecilie: Ja.
206. Beate: Vi kan jo bare følge starten her da. 10, 20, 30 og ha x som 10, 20, 30.
207. Cecilie: Okei 300 er der. Og hver x som øker med 15, bare 10 og 20 og sånn da …..
215. Cecilie: 1050 da den skal bli 50
216. Beate : Ja

Cecilie spør i startene av oppgaven om de skal bruke tallene som er oppgitt i tabellene eller ikke. Beate kommenterer at «det må bare gå under samme funksjonsuttrykk» og antyder med det at det ikke er nødvendig å følge tallene i tabellen. Besvarelsen viser at gruppen lager en graf der bare noen av y-verdiene som brukes er oppgitt i tabellen. Gruppen bruker bare annenhver x-verdi som er oppgitt i tabellen og legger til en verdi når $x = 120$. Dette kunne vært et resultat av det Duval (2004) betegner som *behandling* hvis tabellen var utvidet til disse punktene og fremdeles var utgangspunkt for utformingen av tabellen, men gruppen har ikke regnet seg frem til nye verdier. De lager heller ingen punkter i koordinatsystemet, men en rett linje. Det tyder på at de har gjort en global tolkning og funnet ut at y stiger med 15 for hver x-verdi som gjør at de ikke er avhengig av å plotte inn x- og y-verdiene som er oppgitt i tabellen. Utsagn 215 viser at gruppen likevel sjekker om grafen stemmer ved å sjekke om punkter på grafen stemmer overens med informasjonen i tabellen. Beate påpeker at grafen «må gå under samme funksjonsuttrykk» noe som jeg tolker som at hun mener at grafen må representere samme funksjon som tabellen. Verdiene de bruker for y og x tilsier også at funksjonsuttrykket er utgangspunktet for utformingen av grafen. Dette betyr at elevene holder på med omdanningsaksjonen *skissering* fra funksjonsuttrykk til graf og ikke *plotting* fra tabell til graf. De bedriver likevel en form for plotting i etterkant i den forstand at de sjekker om ulike punkter på grafen stemmer overens med verdiene for x og y i tabellen, for å kontrollere at linjen er riktig. Skissering er også betegnet som en omdanning som krever en global tolkning siden hvordan y utvikler seg avhengig av x, må gjenkjennes. Omdanningen tabell-graf derimot krever en lokal tolkning der det er nok å vite hvilken y-verdi en gitt x-verdi gir og plassere koordinater i koordinatsystemet for å lage grafen. (Bosse et al., 2011).

Anders og Daniel starter oppgaven med å ta utgangspunkt i koordinater i tabellen de fører direkte inn som koordinater på grafen som vist i utsagt 317 og 322. Omdanningsaksjonen er derfor *plotting*, der de gjør om tallparene i tabellen til punkter på grafen. Det er først når de blir oppmerksomme på at avstanden mellom x-verdiene og y-verdiene blir større i slutten av tabellen enn i starten, at de får utfordringer. Dette vises i utsagn 325.

317. Anders: Ja. 300, 450 ja det står jo egentlig der. (y-verdier)

…

321. Anders: Også bortover her da så blir det jo
322. Daniel: 10, 20 (x-verdier)

325. Anders: Oj, har du lagt merke til at her hopper det mye mer.

Anders og Daniel bestemmer seg for å finne ut om avstanden mellom de siste x- og y-verdiene i tabellen er lik som de første og kommer frem til at forskjellen i y-verdier når $x = 50$ og $x = 100$ er 750. Videre kommer Anders frem til at y må øke med dobbelt så mye mellom $x = 100$ og $x = 200$, fordi avstanden mellom x-verdiene er doblet. Dette kan ses i utsagn 365. Videre prøver de å finne ut om forskjellen mellom y-verdiene tilsvarer det samme som i starten av tabellen som vist i utsagn 369-372. På grunn av usikkerhet rundt hva de skal dele på for å finne ut av om stigningen er den samme, resulterer ikke diskusjonen i noe klart svar og elevene spør om de må vise hele tabellen. Jeg foreslår som vist i utsagn 376 at de kan bytte ut verdiene for $x = 100$ og $x = 200$ og fjerner dermed usikkerhetsmomentet i oppgaven. Elevene lager derfor punkter for $x = 60$ og $x = 70$ og har videre ingen problemer med å tegne grafen.

364. Daniel: Øker det med 100 her?
365. Anders: Nei her øker det med 100. her øker det med det dobbelte av 750. Fordi hvis 50 er 750 og 100 det må jo være det dobbelte da.

…...

369. Anders: Men da blir det 150 da. 1500 delt på 100 er 150.
370. Daniel: Kan man ta det?
371. Anders: Nei delt på 10
372. Daniel: Jeg har ikke peiling på hva vi skal gjøre oppi her

….

376. Kjartan: Hmm dere kan lage nye verdier for de to siste for eksempel. Ta 2 andre verdier
377. Anders: Så vi kan bare ta 60 og 70 liksom istedenfor 100 og 200?

Elevene hadde ingen utfordringer med å lage punkter på grafen når avstanden mellom x-verdiene som var oppgitt var lik i starten av tabellen. Det er når avstanden mellom verdiene stiger at problemene oppstår. At avstanden mellom x-verdiene ikke er lik kan betegnes som et *faktahull* i tabellen. De har utfordringer med å bestemme om avstanden mellom punktene er den samme i hele tabellen. Dette kan anses som at elevene prøver å utføre en *behandling* av tabellen for å gjøre omdanningen lettere. Når de ikke kommer frem til om stigningen er lik, fjerner jeg behovet for behandling av tabellen og omdanningen skaper ikke lenger utfordringer for gruppen. Det kan dermed antas at det er faktahullet i representasjonen tabell som skaper utfordringer og behandling av representasjonen tabell og ikke omdanningsaksjonen *plotte*.

4C

Anders og Daniel kommer innledningsvis i oppgaven frem til at $y = \ noe\ + 300$. Anders kommer først frem til $150x + 300$ før det oppstår litt diskusjon om det blir riktig.

407. Anders: Nei + 300 da. Blir det ikke det da? Nei vent da vi må finne ut hva 1 er, hvis 10 er 90. 150 delt på 10 er det 15?

   …..

413. Anders: For da blir det jo 15x da, fordi da kan du ta 15 gange 10 som blir 150 pluss 300 det blir riktig.
414. Daniel: Ja. Okei 15x. okei så det her er 20 da.
415. Anders: Mm
416. Daniel: Okei 300, ja det blir riktig (regner ut x=20 og kommer frem til 300)
417. Daniel: pluss 300 er lik 600

De kommer etterhvert frem til at de må finne ut hvor mye y øker med for hver x-verdi og ikke for hver tiende x-verdi som tabellen viser. Videre kan det ses fra utdraget at de har funnet ut at det må bli $15x$ siden y øker med 15 for hver x-verdi. Daniel setter $x = 20$ inn i funksjonsuttrykket og sjekker med verdiene i tabellen for å forsikre seg om at funksjonsuttrykket er riktig. Gruppen arbeider her med overgangen fra tabell til funksjonsuttrykk og bedriver omdanningsaksjonen *tilpasning.* Konstantleddet bestemmes helt innledningsvis i arbeidet med oppgaven som det også ble når de skulle lage en verbal situasjon i oppgave 4a. Stigningstallet blir først satt som 150 før gruppen blir oppmerksomme på at de må gjøre noe for å finne hvor mye y stiger med for hver x-verdi. Utsagn 407 viser at Anders kommer frem til at de må ta $150/10$ for å komme frem til stigningstallet som de senere forsikrer seg om at stemmer med å sjekke med en verdi som er oppgitt i tabellen. Det kan virke som den delen av omdanningsaksjonen tilpasning som var mest utfordrende i dette tilfellet, var å bestemme stigningstallet fordi det krever en behandling av startrepresentasjonen. Konstantleddet kan leses rett av fra tabellen siden en y-verdi når $x = 0$ er oppgitt og ble bestemt veldig raskt. Beate og Cecilie fant funksjonsuttrykket underveis i arbeidet med å lage en verbal situasjon som passet med tabellen og bedrev dermed *tilpasning* i forbindelse med oppgave 4a.

Sammenfatning oppgave 4.

Begge grupper gjør i oppgave 4 flere omdanningsaksjoner. Gruppe 1 utfører først *tilpasning* av tabell til et funksjonsuttrykk for videre å ta utgangspunkt i funksjonsuttrykket. *Parameter gjenkjenning* blir jobbet med for å lage en verbal situasjon og deretter *skissering* for å representere funksjonen som en graf. Beate og Cecilie har ingen nevneverdige problemer med å utføre disse omdanningsaksjonene i oppgave 4. Når gruppen skal lage en graf tar de utgangspunkt i funksjonsuttrykket og ikke tabellen, og gjør dermed omdanningsaksjonen *skissering* (funksjonsuttrykk-graf) istedenfor omdanningsaksjonen *plotte* (tabell-graf). Dette betyr at elevene utfører en overgang som krever global tolkning istedenfor en som krever lokal tolkning. Dermed kan det antas at Beate og Cecilie i dette tilfellet ikke synes en global tolkning er mer utfordrende enn en lokal tolkning som vanligvis gir elever større utfordringer (Bosse et al., 2011).

Anders og Daniel arbeider med omdanningsaksjonene *lese*, *parameter gjenkjennelse*, *plotte* og *tilpasse.* Lese er omdanningsaksjonen i overgangen tabell-verbal situasjon og elevene kommer i arbeidet raskt frem til en situasjon som kan beskrive tabellen. Deres besvarelse og verbale situasjon er opprinnelig «Du har 300kr og får 150kr per 10. time. Det er først etter at funksjonsuttrykket er funnet at den verbale situasjonen blir endret til 15kr per time. Dette er et resultat av *parameter gjenkjenning* der funksjonsuttrykket de har funnet blir brukt for å endre den verbale situasjonen. Overgangen fra tabell til graf skaper noen problemer for Daniel og Anders, men ikke før de merker at avstanden mellom x- og y-verdiene er større i slutten av tabellene enn tidligere. Overgangen tabell-funksjonsuttrykk og *tilpasning* skaper ikke store problemer for Anders og Daniel når de blir klar over at de må finne ut hvor mye y stiger med for hver x-verdi og ikke hver tiende x-verdi som tabellen gir informasjon om. De sjekker om representasjonene stemmer overens ved å regne ut en bestemt x-verdi i funksjonsuttrykket og sjekke om det samsvarer med tabellen. Siden eksempelet stemmer med tabellen er de sikre på at funksjonsuttrykket representerer samme funksjon som tabellen.

4.6 Utfordringer med representasjonene.

4.6.1 Faktahull.

Egenskapene til representasjonene kan også påvirke omdanningene og skape utfordringer for elever. Hvis en representasjon inneholder mange faktahull kan dette problematisere omdanningen. Antall faktahull i en representasjon kan bare bestemmes med å ta hensyn til om representasjonen er startrepresentasjon eller sluttrepresentasjon, hva representasjonen skal brukes til og om det er lov å foreta behandling (Bosse et al., 2011). Tabellen i oppgave 4 inneholder et faktahull når omdanning til funksjonsuttrykk skal gjøres. Stigningstallet er ikke direkte synlig siden avstanden mellom x-verdiene som blir oppgitt er 10 og ikke 1. Beate og Cecilie hadde ikke store problemer med dette faktahullet og fant raskt frem til hvor mye y økte med for hver x-verdi. De fant forskjellen mellom to verdier for y i tabellen og delte dette på 10 for å finne hvor mye y steg med for hver x-verdi. Dermed ble faktahullet fjernet ved behandling av tabellen og omdanningen ble ikke utfordrende på grunn av dette faktahullet.

Representasjonen tabell i overgangen tabell-graf inneholder også det samme faktahull i form av at tabellen har ulik avstand mellom x-verdiene som blir oppgitt. Daniel og Anders blir usikre når de oppdager at avstanden mellom x-verdiene er større i slutten av tabellen. Dette skaper problemer og de er ikke sikre på om tabellen representerer en lineær funksjon. Elevene har funnet ut at i starten av tabellen øker y-verdiene med 150 for hver tiende x-verdi. Når jeg foreslår at de kan skifte ut de to siste verdiene i tabellen fjernes usikkerheten rundt hvordan grafen skal utformes. De velger å heller finne y-verdier for $x = 60$ og $x = 70$ istedenfor å bruke de to siste x-verdiene som er oppgitt i tabellen. Dette faktahullet gjør at elevene må gjøre en behandling av tabellen før de kan plotte en graf. Hvis tabellen hadde oppgitt verdier for y når $x = 60$ og $x = 70$ hadde sannsynligvis ikke omdanningen vært problematisk og det er dermed faktahullet som gjør at omdanningen er avhengig av en behandling av tabellen først og dermed skaper utfordringer med selve omdanningen.

4.6.2 Forvirrende elementer.

Om det er forvirrende elementer i startrepresentasjonene påvirker også omdanninger av representasjoner (Bosse et al., 2011). Funksjonsutrykket som fungerer som startrepresentasjon i oppgave 2a inneholder et forvirrende element og blir av Anders og Daniel oppfattet som mangelfull. Funksjonsuttrykket $y = x + 5$ inneholder informasjonen som trengs for å lage en verbal situasjon, men a er ikke skrevet siden det i dette tilfellet er 1. Anders påpeker i utsagnet nedenfor at a ikke er oppgitt i funksjonsuttrykket.

98. Anders: Men pleier det ikke å stå sånn $y = ax + 5$, men jeg vet ikke jeg om det har noe å si.

Mangelen på en tydelig verdi for a i funksjonsuttrykket er derfor et forvirrende element for gruppen siden det ikke står på formen de er vant med. Dette kan være en medvirkende årsak til at den verbale situasjonen de produserer har tre variabler der a er tolket feil og omgjort til en variabel. Funksjonsuttrykk står ofte på formen $y = ax + b$ der a er oppgitt hvis a er ulik 0 og 1. Det kan tenkes at omdanningen hadde blitt gjort riktig hvis a hadde vært noe annet enn 1 og dermed ikke vært et forvirrende element. Det kan også være at a da hadde blitt representert som en konstant og ikke en variabel i den verbale situasjonen. Dette forvirrende elementet er også gjeldende for Anders og Daniel i oppgave 3 siden den verbale situasjonen skal brukes for å komme frem til funksjonsuttrykket $y = x + 5$. Her påvirker ikke mangelen av a selve overgangen siden funksjonsuttrykket er sluttrepresentasjon og elevene mener de har representert Anna og Jons alder riktig med funksjonsuttrykket.

Beate og Cecilie skaper i oppgave 2 sitt eget forvirrende element i den verbale situasjonen de lager. Den verbale situasjonen inneholder tre variabler der a er omgjort til en variabel. Det er tydelig fra samtalene i oppgave 2c at både kr per oppgave og antall oppgaver blir ansett som x og er et forstyrrende element i representasjonen. Dette påvirker også omdanningen fra verbal situasjon til tabell i oppgave 2b. På grunn av at den verbal situasjon de har utformet inneholder tre variabler der x har to ulike tolkninger, blir tabellen også bestående av tre variabler. Det er også kroner per oppgave som varieres i tabellen og fungerer som variabelen x og ikke a som viser at dette forstyrrende elementet er med å påvirke omdanningen til tabell. Gruppen er oppmerksomme på at det er tre ulike variabler i den verbale situasjonen de har laget med å påpeke at de ser på x som to ulike elementer. Dette påvirket dem likevel ikke til å endre den verbale situasjonen de hadde utformet. Hvis de hadde brukt denne informasjonen og sjekket med funksjonsuttrykket som oppgaven oppgir kunne dette forstyrrende elementet blitt fjernet fra den verbale situasjonen.

4.6.3 Informasjonstetthet.

Informasjonstetthet handler om hvor mye nyttig informasjon en representasjon inneholder som trengs å lage en ny representasjon sammenlignet med overflødig informasjon (Adu-Gyamfi et al., 2012). Med tanke på informasjonstetthet anses representasjonene tabell og verbal situasjon som vanskeligere enn funksjonsuttrykk og graf siden den relevante informasjonen for å lage nye representasjoner er mer skjult sammen med overflødig informasjon. Derfor vil omdanninger fra tabell og verbal situasjon teoretisk sett være vanskeligst siden elever må vurdere hva som er nyttig og unyttig informasjon. Funksjonsuttrykk og graf har mye høyere informasjonstetthet og det kreves derfor mindre tolkning av hvilke elementer som må overføres til en ny representasjon. Adu-Gyamfi et al. (2012) fant ut det oppstod mange tolkningsfeil i omdanninger fra tabell som et resultat av lav informasjonstetthet. Oppgave 2a og omdanningen funksjonsuttrykk-verbal situasjon er et eksempel på en omdanning der begge grupper gjorde omdanningsfeil. Startrepresentasjonen her har høy informasjonstetthet og hvis omdanningen ses bare i lys av informasjonstetthet skulle overgangen ikke vært utfordrende for elevene. Omdanninger fra tabell som er aktuelt i oppgave 4 er omdanninger fra en representasjon med lav informasjonstetthet og derfor teoretisk sett vanskelige for elever. Her hadde ingen av gruppene problemer med å finne den viktige informasjonen fra representasjonen tabell. Begge gruppene fant innledningsvis ut at 300 representerte «noe du har fra før» i den verbale situasjonen og konstantleddet i funksjonsuttrykket. Stigningstallet ble også raskt funnet og representert i den verbale situasjonen som 15 for gruppe 1 og $150/10$ for gruppe 2. Derfor kan det tolkes som at elevene ikke synes det var utfordrende og skille mellom relevant og overflødig informasjon i tabellen og at informasjonstettheten ikke skapte utfordringer med omdanningen til nye representasjoner i dette tilfellet. Daniel og Anders påpekte likevel i intervjusituasjonen at det var lettere og finne et funksjonsuttrykk i oppgave 1 enn i oppgave 4. Daniel begrunnet hvorfor det var lettere i oppgave 1 enn i oppgave 4 som vist i utsagn 268 og 270.

268. D: Ja det var litt sånn presist og enklere.
269. A: Mm.
270. D: Her var det litt sånn, hva skal man ta med.

Disse utsagnene tyder på at gruppen synes det er utfordrende å finne ut hva som skal tas med i et funksjonsuttrykk når informasjonstettheten i startrepresentasjonen er lav.

4.7 Retning og kongruens

4.7.1 Retning

Duval (2006) hevder retningen omdanningen har påvirker vanskelighetsgraden til omdanningen fordi problemet endres. Janvier (1987) og Bosse et al. (2011) eksemplifiserer dette med at omdanninger som er like, men går i ulik retning, har ulike betegnelser for omdanningsaksjonene. Et eksempel er omdanninger mellom funksjonsuttrykk og verbal situasjon. Funksjonsuttrykk-verbal situasjon involverer omdanningsaksjonen *parameter gjenkjennelse*, mens verbal situasjon-funksjonsuttrykk involverer *modellering*. Oppgave 2 og 3 som elevene gjennomfører gir et godt bilde av om retningen omdanningen utgjør en forskjell i vanskelighetsgrad. Begge oppgavene representerer den samme lineære funksjonen, men tar utgangspunkt i to ulike representasjoner. Oppgave 2 oppgir funksjonsuttrykket $y = x + 5$, mens oppgave 3 starter med en verbal situasjon som representasjon. Det kan ses fra besvarelsene til begge gruppene at overgangen funksjonsuttrykk-verbal situasjon skaper utfordringer og at stigningstallet i begge tilfeller blir omgjort til en variabel. Når de i oppgave 3 arbeider med overgangen verbal situasjon-funksjonsuttrykk klarer begge grupper å representere den lineære funksjonen riktig som $y = x + 5$. Dermed kan det virke som retningen er med på å påvirke hvor utfordrende omdanningen er for elevene og at parameter gjenkjennelse skaper større utfordringer enn modellering i dette tilfellet.

4.7.2 Kongruens

Duval (2006) hevder ikke-kongruente overganger er mer utfordrende for elever enn kongruente overganger. Overgangen verbal situasjon-funksjonsuttrykk i oppgave 1 er et eksempel på en kongruent overgang og oppfyller de 3 kriteriene Duval fremhever for å avgjøre om en overgang er kongruent eller ikke. De viktige elementene a, x og y kan overføres direkte til funksjonsuttrykket. x må være den uavhengige variabelen og y må være den avhengige variabelen i funksjonsuttrykket og elementene er dermed entydige. Rekkefølgen på elementene a, x og y trenger heller ikke å endres fra den verbale situasjonen til funksjonsuttrykket siden funksjonsuttrykket kan skrives som $60x = y$ og bli riktig.

> *Oppgave 1.*
>
> *En bil kjører med hastighet på 60(a)km i timen (x)*
>
> *Vis sammenhengen mellom antall kilometer (y) som er kjørt og lengden av kjøreturen i antall timer*

Figur 8: Kongruent overgang

Overgangen tabell-funksjonsuttrykk i oppgave 4 er et eksempel på en ikke-kongruent overgang. Tabellen inneholder de viktige elementene a, x, y og b. Stigningstallet a må finnes i forskjellen mellom to y verdier og deretter deles på 10 fordi det bare er hver tiende x-verdi som blir oppgitt i tabellen. Det er dermed ikke mulig med en 1-1 avbildning av de viktige elementene fra start til sluttrepresentasjonen som er det første kriteriet Duval (2006) setter for kongruens. Hvilken kolonne som er y-verdier og hvilken som er x-verdier er heller ikke oppgitt og gjør valget av hvilke verdier som skal symbolisere x og y i funksjonsuttrykket tvetydig. Tabellen oppgir heller ikke noen bestemt rekkefølge på de viktige elementene og rekkefølgen i funksjonsuttrykket må dermed bestemmes og blir ikke-kongruent med tabellen.

x / y	*x / y*
0	*300(b)*
10	*450*
20	*600*
30	*750*
40	*900*
50	*1050*
100	*1800*
200	*3300*

10a

Figur 9: Ikke-kongruent overgang

Anders og Daniel forklarer i intervjuet at det var lettere å lage et funksjonsuttrykk fra situasjonen i oppgave 1 enn fra tabellen i oppgave 4. Når de blir spurt om de kan utdype hvorfor oppgave 4 var vanskeligere oppstod denne dialogen mellom elevene.

259. D: det er liksom hvilke tall vi skal bruke i funksjonsuttrykket og sånn der.
260. A: Ja
261. D: Det er litt vanskelig.
262. A: Og sett dem liksom finne ut,
263. D: Hva som er pluss 5 for eksempel
264. A: Ja, hva som er hvor

Fra utsagn 259 kan det ses at Daniel er usikker på hvilke tall som skal brukes i funksjonsuttrykket. Dette kan knyttes til det Duval (2006) kaller 1-1 avbildning av elementene fordi det oppleves som vanskelig å overføre de viktige elementene i tabellen til riktig symbol i funksjonsuttrykket. Dette kan komme av at representasjonene er ikke-kongruente og dermed skaper utfordringer. Daniel bruker $+5$ som eksempel som er konstantleddet i funksjonsuttrykket de utformet i oppgave 3 og eksemplifiserer med det et tilfelle der 1-1 avbildning mellom representasjonene var mulig og dermed lettere. Anders påpeker også at hva som skal stå hvor i funksjonsuttrykket er vanskelig å avgjøre. Dette kan knyttes til det tredje kriteriet Duval (2006) har for kongruens nemlig rekkefølgen på elementene. Siden tabellen ikke oppgir noen bestemt rekkefølge på elementene, opplever elevene det om vanskeligere å bestemme rekkefølgen i sluttrepresentasjonen funksjonsuttrykk.

5 Diskusjon

Denne studien hadde som mål å svare på problemstillingen «*Hva er utfordrende for to grupper med elever på 10.trinn i overganger mellom representasjoner av lineære funksjoner?*

For å kunne avgjøre hva som skaper utfordringer med overganger mellom representasjoner var det i denne studien viktig å avgjøre hvilke overganger elevene arbeidet med. Totalt kom jeg frem til at elevene utfører ni overganger mellom representasjonene verbal situasjon, tabell, graf og funksjonsuttrykk. De tre overgangene elevene ikke arbeidet med er overganger der graf er startrepresentasjon. Elevene lager grafer som potensielt kunne vært brukt som startrepresentasjon i nye omdanninger, men det blir ikke gjort. Dermed er det ikke grunnlag for i si noe om hva som skaper utfordringer i omdanningsaksjonene Janvier (1987) betegner som *tolke, lese av* og *kurvetilpasning.* De ni andre overgangene blir tatt i bruk av minst en gruppe i oppgaveløsningene og blir presentert i tabell 1. Her er det også tatt med hvilken gruppe som utfører overgangen, hvilken oppgave de arbeider med, betegnelsen på omdanningsaksjonen og om overgangen krever en lokal eller global tolkning. Gruppe 2 velger også å benytte seg av en *overføringsrepresentasjon* i forbindelse med overgangen verbal situasjon-graf som er presentert som en egen overgang i tabellen. Siden overgangen ikke var et problem for gruppen når den ble omformet til to overganger vil utfordringene bli knyttet til overgangen verbal situasjon-graf videre i diskusjonskapittelet. Overgangene funksjonsuttrykk-tabell og funksjonsuttrykk-graf skapte heller ingen utfordringer når de ble tatt i bruk og vil derfor ikke diskuteres videre i kapittelet. Hva som skaper utfordringer i de sju resterende overgangene vil deretter bli diskutert.

Overgang	Gruppe 1	Gruppe 2	Betegnelse på omdanningsaksjon	Tolkningsform
Verbal situasjon-graf	3a		Skissere	Global
Verbal situasjon-tabell-graf		3a	Måle, plotte	Lokal+Lokal
Verbal situasjon-funksjonsuttrykk	1b, 3b	1b, 3b	Modellere	Global
Verbal situasjon-tabell	1a, 2b	1a, 3a	Måle	Lokal
Tabell-Verbal situasjon		4a	Lese	Global
Tabell-graf		1b,3a 4b	Plotte	Lokal
Tabell-funksjonsuttrykk	4c	4c	Tilpasse	Global
Funksjonsuttrykk-tabell		2b	Beregne	Lokal
Funksjonsuttrykk-verbal situasjon	2a,4a	2a, 4a	Parameter gjenkjennelse	Global
Funksjonsuttrykk-Graf	4b		Skissere	Global

Tabell 1: Overganger utført av elevgruppene

5.1 Utfordringer med overgangen verbal situasjon-graf

Bosse et al. (2011) betegner denne overgangen som et eksempel på en overgang der elevene ofte tar i bruk en *overføringsrepresentasjon*. Gruppe 1 gjør imidlertid ikke dette og konstruerer grafen direkte fra den verbale situasjonen. Det tyder på at de foretar en global tolkning fordi de lager en linje og ikke tar utgangpunkt i bestemte verdier og dermed forstår den helhetlige variasjonen i funksjonen (Bosse et al., 2011). Gruppe 2 har utfordringer med overgangen verbal situasjon-graf og velger å benytte seg av en overføringsrepresentasjon i de tilfellene denne overgangen blir aktuell. I oppgave 1b er det tabellen og ikke den verbale situasjonen som skaper grunnlaget for grafen og i oppgave 3a blir tabellen spesifikt brukt som overføringsrepresentasjon for å produsere en graf. Dette tolkes som at elevene synes det er lettere å foreta to lokale tolkninger istedenfor en global tolkning direkte fra verbal situasjon. Bosse et al. (2011) påpeker at alle omdanningene der elevene som oftest tar i bruk overføringsrepresentasjoner krever globale tolkninger og at bruken av en overføringsrepresentasjon skaper to lokale tolkninger på bekostning av en global tolkning. Det kan derfor være at det som skaper utfordringer med overgangen er at den i utgangspunktet krever en global tolkning og at tabellen som overføringsrepresentasjon løser denne utfordringen.

5.2 Utfordringer med overgangen verbal situasjon-funksjonsuttrykk

Verbal situasjon-funksjonsuttrykk, begge grupper arbeider med denne overgangen i oppgave 1b når startrepresentasjonen verbal situasjon er bestemt, men de velger sluttrepresentasjon selv. Ingen av gruppene har nevneverdige problemer med å representere de verbale situasjonene som funksjonsuttrykk i verken oppgave 1b eller 3b som tyder på at omdanningsaksjonen *modellering* ikke er utfordrende. Overgangen kan likevel betegnes som utfordrende for Beate og Cecilie fordi de velger å skrive to funksjonsuttrykk som viser at de er usikre på om hele den verbale situasjonen er representert ved ett funksjonsuttrykk. Dette kommer også frem i intervjuet der, Beate sier at de ikke hadde en måte og gi et uttrykk for hvordan begge aldrene ville utvikle seg. Dette kan være et resultat av ulik informasjonstetthet i de ulike representasjonene. Adu-Gyamfi et al. (2012) betegner verbale situasjoner som en representasjon som har lav informasjonstetthet og funksjonsuttrykk som en representasjon med høy informasjonstetthet. At elevene velger å lage to funksjonsuttrykk kan i lys av dette ses som at de er usikre på om funksjonsuttrykket gir like mye informasjon som den verbale situasjonen. Siden informasjonstettheten er høy i funksjonsuttrykket kan dette oppfattes som at funksjonsuttrykket gir mindre relevant informasjon enn den verbale situasjonen og at de derfor lager to for å være sikre på at all informasjon i den verbale situasjonen er representert i funksjonsuttrykket. Oppgaven er også sånn at både Annas og Jons alder kan være x og y i den verbale situasjonen, mens i funksjonsuttrykket må dette bestemmes for at konstantleddet skal ha riktig fortegn. Dette kan knyttet opp mot det 2. kriteriet Duval (2006) setter for kongruens mellom representasjoner. Valget av alle viktige element i sluttrepresentasjonen er her tvetydig for x og y som kan være årsaken til at elevene velger å lage to funksjonsuttrykk.

5.3 Utfordringer med overgangen verbal situasjon-tabell

Begge elevgruppene valgte overgangen fra verbal situasjon-tabell i oppgave 1a når slutt-representasjonen var valgfri. Det tyder på at å utforme en tabell fra en verbal situasjon er en overgang elevene foretrekker å utføre. De hadde heller ikke nevneverdige problemer med å utføre denne overgangen i dette tilfellet. Beate og Cecilie hadde likevel store utfordringer med denne overgangen i oppgave 2b. Dette kan tolkes som en utfordring knyttet til omdanningsaksjonen Janvier (1987) betegner som *måle.* Basert på at denne omdanningsaksjonen ble valgt i oppgave 1a kan det tyde på at det er noe annet enn selve omdanningsaksjonen som er utfordrende for Beate og Cecilie. Det kan virke som at det ikke var i denne overgangen utfordringene oppstod, men i den foregående overgangen fra funksjonsuttrykk til verbal situasjon. Den verbale situasjonen de laget inneholdt et *forvirrende element* i form av tre variabler der x hadde to ulike betydninger. Dette var et resultat av en *tolkningsfeil* som skjedde i overgangen fra funksjonsuttrykk til verbal situasjon i oppgave 2a. At betydningen av x var et forvirrende element for gruppen underbygges ytterligere av diskusjonen som oppstod i oppgave 2c. Elevene var usikre på om det var kroner per husoppgave eller antall husoppgaver som var x. Det kan derfor antas at overgangen verbal situasjon-tabell ikke er utfordrende i seg selv, men ble det i dette tilfellet fordi den verbale situasjonen inneholdt et forvirrende element elevene skapte. Beate og Cecilie lager også en tabell som samsvarer med den verbale situasjonen de har utformet, der a er en variabel, og gjennomfører dermed omdanningen verbal situasjon-tabell riktig. Anders og Daniel prøver også å bruke informasjonen fra den verbale situasjonen de lager, men kommer ikke frem til hvordan de skal utforme tabellen på denne måten. Det er først når Daniel tar utgangspunkt i funksjonsuttrykket og bestemte x-verdier at de klarer å utforme tabellen. Det kan antas at overgangen til tabell hadde vært mer utfordrende uten denne endringen av startrepresentasjon i overgangen til tabell. Gruppe 2 utfører også denne overgangen som en del av overgangen verbal situasjon til graf og hadde ikke problemer med å overføre informasjon fra den verbale situasjonen til en tabell. Det kan tyde på at heller ikke denne gruppen har utfordringer med selve omdanningsaksjonen *måle*. Utfordringer de møter på med denne overgangen i oppgave 2b kan det virke som at stammer fra den verbale situasjonen de har laget i den foregående omdanningen som inneholder et forvirrende element som gjør den påfølgende omdanningen vanskelig.

5.4 Utfordringer med overgangen tabell-verbal situasjon

Bosse et al. (2011) klassifiserer overgangen tabell-verbal situasjon som en overgang elever sjelden klarer å utføre og den vanskeligste overgangen. Gruppe 1 kommer frem til et funksjonsuttrykk før de lager en situasjon fra tabellen og unngår med det hele overgangen. Dette kan bli tolket som at overgangen er vanskelig og elevene derfor velger å utføre overgangene tabell-funksjonsuttrykk og funksjonsuttrykk-verbal situasjon istedenfor. På den andre siden har elevene kommet frem til 300 som konstantledd, 150 som forskjellen mellom y verdiene som blir oppgitt og har dermed all informasjonen som kreves for å lage en verbal situasjon. Det kan derfor tolkes som at elevene ikke har utfordringer med overgangen, men synes det er bedre å lage en situasjon der y øker med 15 for hver x verdi og derfor tar utgangspunkt i funksjonsuttrykket. Dette kan også være en indikasjon på at elevene knytter ulike representasjoner sammen på en god måte som Duval (2004) påpeker som viktig. Lesh et al. (1987) mener elever som er gode på problemløsning ofte er fleksible i bruken av relevante representasjonssystem og skifter til den mest passende representasjonen å vektlegge. At elevene lager funksjonsuttrykket først kan derfor ses som at elevene kan bevege seg fleksibelt mellom de ulike representasjonene uten å endre den lineære funksjonen.

Det er bare gruppe 2 som faktisk utfører denne overgangen. De kommer raskt frem til 300 som konstantledd og 150/10 som stigningstall i situasjonen de lager. Det kan dermed tyde på at overgangen ikke skaper nevneverdige problemer. Anders og Daniel påpeker likevel at de syntes denne overgangen var mer utfordrende enn overgangen fra verbal situasjon til tabell som de utfører i oppgave 1. Det kan virke som dette er et resultat av *lav informasjonstettheten* i tabellen. Elevene uttrykket at det bare er en tabell med masse tall og at det er vanskelig å vite hva som skal være med i den verbale situasjonen og funksjonsuttrykket de lager. Dette er også en indikasjon på at hvilken retning, overgangen har, endrer vanskelighetsgraden (Duval 2006). Når overgangen hadde motsatt retning i oppgave 1 opplevde ikke Anders og Daniel overgangen som utfordrende. Dette viser at lav informasjonstetthet i tabellen er en utfordring når tabell er startrepresentasjonen, men ikke når tabell er sluttrepresentasjonen og at retningen derfor er utslagsgivende. Overgangen endres også på den måten at den verbale situasjonen oppfattes som en representasjon som gir tilstrekkelig med informasjon for å utforme en tabell i oppgave 1a, men tabellene oppleves som uklare når elevene skal utforme en verbal situasjon.

5.5 Utfordringer med overgangen tabell-graf

Omdanningen tabell-graf tas bare i bruk av gruppe 2. Interessant nok blir den tatt i bruk på 3 forskjellige måter. I oppgave 1 blir tabellen først utviklet fra en verbal situasjon der tabellen danner hele grunnlaget for å lage grafen. Når elevene jobber med oppgave 3 blir omdanningen brukt som siste ledd i overgangen mellom verbal situasjon og graf. Her mener jeg tabellen opererer som en *overføringsrepresentasjon*. Tabellen er ikke en representasjon elevene konstruerer for å komme frem til et svar, men som en videre støtte for å utforme grafen. Dette kan som sagt tidligere komme av at elevene synes det er utfordrende og utføre en overgang direkte fra verbal situasjon til graf. Elever tar ofte i bruk overføringsrepresentasjoner i blant annet denne omdanningen. Overføringsrepresentasjonen som tas i bruk er ofte tabell og gjør den opprinnelige overgangen om til 2 overganger som kan gjøres med lokale tolkninger istedenfor en global tolkning. (Bosse et al., 2011). Basert på teorien kan det virke som Anders og Daniel har utfordringer med å foreta en global tolkning i overgangen verbal situasjon-graf og derfor velger å bruke en tabell slik at de kan ta utgangspunkt i noen bestemte punkt og utføre lokale tolkninger. Anders og Daniel har også noen utfordringer med overgangen tabell-graf i oppgave 4b. Her kan det likevel tyde på at det ikke er selve overgangsaksjonen *plotte* som skaper problemer, men det Bosse et al. (2011) betegner som et *faktahull*. Faktahullet i tabellen er at avstanden mellom oppgitte x-verdier blir større i slutten av tabellen. Dette gjør også at elevene må finne ut om x- og y-verdiene representerer en lineær funksjon. De må dermed se helhetlig på tabellen og gjøre en global tolkning som kan forklare noen av utfordringene de opplever. Dette faktahullet blir til slutt fjernet ved at elevene får lov å endre de verdiene for x og y som skaper utfordringer. Dette er et tydelig eksempel på at det ikke bare er omdanningsaksjonen og formen for tolkning som kreves som påvirker hvor vanskelig en overgang er, men også egenskapene til representasjonene (Bosse et al., 2011). Omdanningsaksjonen plotte er heller ingen utfordring for elevene i forbindelse med andre oppgaver som underbygger antagelsen om at det er faktahullet og ikke selve omdanningsaksjonen som gjør overgangen tabell-graf vanskelig i oppgave 4b.

5.6 Utfordringer med overgangen tabell-funksjonsuttrykk

Daniel og Anders har i tidligere overganger i forbindelse med oppgave 4 kommet frem til konstantleddet 300 og stigningstallet beskrevet som 150/10. Når de utfører overgangen tabell-funksjonsuttrykk er det derfor bare en form for det Duval (2006) kaller *behandling* av uttrykket de har for stigningstallet som skal til for å fullføre overgangen. De finner raskt ut at y stiger med 15 for hver x verdi. Utsagnene deres i intervjuet tyder likevel på at overgangen var litt utfordrende for elevene. Det kan virke som det er *informasjonstettheten* i tabellen som skaper utfordringer. Anders og Daniel er litt usikre på hva som skal være med i funksjonsuttrykket siden tabellen oppgir mye informasjon og de oppfatter det som vanskelig å trekke ut relevant informasjon. Andre overganger som startet med en representasjon med lav informasjonstetthet som de verbale situasjonene i oppgave 1 og 3 viste seg å ikke være utfordrende for elevene. I motsetning til oppgave 1 krever omdanninger av tabellen i oppgave 4 at omdanningen gjøres ikke-kongruent. At elementene ikke kan overføres 1-1 og usikkerhet rundt rekkefølgen de skal stå i blir også påpekt av Anders og Daniel som noe som gjør overgangen utfordrende. Dette kan knyttes til Duval (2006) sine kriterier for om en omdanning av viktige elementer er kongruent eller ikke-kongruent. Det kan derfor virke som at lav informasjonstetthet er en større utfordring når omdanningen må gjøres ikke-kongruent og elementene ikke kan oversettes direkte fra en representasjon til en annen.

Gruppe 1 viser ingen tegn til at de opplever denne overgangen utfordrende og progresjonen er rask i utarbeidelsen av funksjonsuttrykket fra tabellen. Dette kan bety at selv om informasjonstettheten er lav opplever ikke denne gruppen det som en utfordring. Det kan også tyde på at ikke-kongruente overganger mestres i dette tilfellet og ikke gjør overgangen utfordrende. Dette mener jeg siden overgangen som vist i figur 9, ikke kan gjøres med en 1-1 avbildning, hvilke verdier som skal representere x og y i sluttrepresentasjonen er tvetydig og rekkefølgen av elementene ikke er bestemt i tabellen. Overgangen kan derfor betegnes som det Duval (2006) kaller ikke-kongruent.

5.7 Utfordringer med overgangen funksjonsuttrykk-verbal situasjon

Overgangen funksjonsuttrykk-verbal situasjon skapte utfordringer for begge grupper i oppgave 2a, men viste seg å ikke være problematisk i oppgave 4. Forskjellen mellom overgangene i de ulike oppgavene var at stigningstallet a i oppgave 2a var 1, mens a i oppgave 4 hadde verdien 15. Cecilie og Beate skaper som tidligere nevnt et forvirrende element i den verbale situasjonen siden x har to betydninger. Bosse et al. (2011) kategoriserer overganger til verbal situasjon som de vanskeligste og spekulerer i at dette kan komme av at verbale situasjoner inneholder mange forvirrende elementer. Det er likevel ikke før Beate og

Cecilie skal utføre nye overganger at betydningen av x blir forvirrende så det virker som det ikke påvirker denne overgangen. Anders og Daniel påpekte at funksjonsuttrykket ikke var skrevet som $y = ax + 5$, men $y = x + 5$. Dette *forvirrende elementet* kunne ført til en *bevaringsfeil* der x, y og b ble representert riktig, mens elementet a ikke ble overført til den verbale situasjonen. Hvis Anders og Daniel hadde laget en verbal situasjon der a ikke var representert kunne det ha blitt tolket som at det forvirrende elementet skapte utfordringen med overgangen.

Det begge gruppene faktisk gjorde i arbeid med overgangen i oppgave 2 var at de endret a fra en fastsatt verdi til en variabel og dermed gjorde det Adu-Gyamfi et al. (2012) kaller en *tolkningsfeil*. Dette kan kategoriseres som en utfordring med omdanningsaksjonen *parameter gjenkjennelse* der a ikke blir gjenkjent i funksjonsuttrykket og dermed ikke blir omdannet riktig til den verbale situasjonen. Spesielt i Anders og Daniels tilfelle kunne det blitt tolket som en utfordring med det forvirrende elementet at a ikke er direkte oppgitt. Siden a ikke mangler, men er endret fra en konstant til en variabel, mener jeg likevel det er en utfordring med parameter gjenkjennelse for begge grupper. Når gruppene kommer frem til at a har verdien 15 i funksjonsuttrykket som lages i oppgave 4 klarer begge grupper å representere dette som en konstant i den verbale situasjonen som utformes. Dette kan tyde på at utfordringene med omdanningsaksjonen parameter gjenkjennelse skyldes at a hadde verdien 1 i funksjonsuttrykket i oppgave 2 og derfor ikke var oppgitt. Dette gjorde at elevene ikke så på a som en fastsatt verdi, men en variabel i motsetning til oppgave 4 der a ble representert som 15 i funksjonsuttrykket. At elevene har utfordringer med denne overgangen gir også grunnlag for å hevde at retningen overgangene har innvirker på hvor utfordrende de er. Omdanningen verbal situasjon-funksjonsuttrykk i oppgave 3 har omvendt retning, men representerer samme lineære funksjon som oppgave 2 og er ikke like utfordrende. Resultatene er dermed i dette tilfellet i tråd med Duval (2006) sitt syn på at retningen til omdanningen har innvirkning på vanskelighetsgraden.

5.8 Utfordringer med overganger mellom representasjoner

Tabell 2 viser en kategorisering av utfordringene elevene har i ulike overganger og i hvilken oppgave utfordringene oppstod. Det er også laget en kolonne som er betegnet som type feil elevene utfører der Adu-Gyamfi et al. (2012) sine betegnelser er brukt for å indikere hvilken feil som er gjort. Hvilken gruppe som hadde disse utfordringen er også betegnet der gruppe 1 består av elevene Cecilie og Beate og gruppe 2 består av elevene Anders og Daniel.

Overgang	Gruppe	Utfordring	Oppgave	Type feil
Verbal situasjon-graf	2	Global tolkning	3a	
Verbal situasjon-funksjonsuttrykk	1	Representasjoner med ulik informasjonstetthet/tvetydige elementer	3b	
Verbal situasjon-tabell	1	Forvirrende element i start representasjonen	2b	
Tabell-verbal situasjon	2	Lav informasjonstetthet i startrepresentasjon	4a	
Tabell-graf	2	Faktahull i startrepresentasjonen	4b	
Tabell-funksjonsuttrykk	2	Lav informasjonstetthet + ikke-kongruent overgang	4c	
Funksjonsuttrykk-verbal situasjon	1,2	Parameter gjenkjennelse	2a	Tolkningsfeil

Tabell 2: Utfordringer knyttet til overgangene

Tabell 2 viser at global tolkning, omdanningsaksjonen som kreves i en bestemt overgang og egenskapene til representasjonene skapte utfordringer for elevene. Det kan ses fra tabell 2 at det bare er en feil som oppstår, men at begge grupper foretar denne feilen i overgangen funksjonsuttrykk-verbal situasjon. De andre utfordringene elevgruppene møtte på førte ikke til feil, men er likevel faktorer som indikerer hva som var utfordrende for elevene med de ulike overgangene. Tabell 2 viser også at det ikke er en bestemt utfordring elevene har i overganger mellom representasjoner, men ulike utfordringer knyttet til forskjellige overganger.

5.9 Generelle utfordringer i overganger mellom representasjoner av funksjoner.

Globale tolkninger virker mer utfordrende for Anders og Daniel enn lokale tolkninger. Dette vises ved bruken av en overføringsrepresentasjon for å kunne foreta lokale tolkninger. Elevene møtte også utfordringer når et faktahull i tabellen skapte et behov for global tolkning for å finne ut om x og y verdiene i tabellen representerte en lineær funksjon. Dette er i tråd med Bosse et al. (2011) som viser til at globale tolkninger er vanskeligere enn lokale tolkninger. Anders og Daniel klarer likevel å utføre globale overganger i forbindelse med andre oppgaver. Even (1998) hevder fleksibilitet i overganger mellom funksjoner henger sammen med evnen til å kunne foreta både globale og lokale tolkninger.

Bosse et al. (2011) fremhever at også egenskapene til representasjonene påvirker overgangsprosessen. Både faktahull og lav informasjonstetthet skaper utfordringer for Anders og Daniel i oppgave 4 og resultatene fra denne studien underbygger derfor at egenskapene til representasjonen påvirker overgangen. Bosse et al. (2011) betegner funksjonsuttrykk som en representasjon med høy informasjonstetthet og verbal situasjon som en representasjon med lav informasjonstetthet. Forskjellig grad av informasjonstetthet kan virke som en forklaring på at Beate og Cecilie ikke ser på et funksjonsuttrykk som fullstendig for å vise utviklingen til begge barna som den verbale situasjonen oppgir. Et forvirrende element i form av tre variabler der to av variablene ble betegnet som x i den verbale situasjonen i overgangen verbal situasjon-tabell skapte også problemer for Beate og Cecilie.

Retningen overgangene har viste seg også å skape forskjeller i hvor vanskelige de var for elever å utføre. Anders og Daniel synes det var utfordrende å lage et funksjonsuttrykk basert på tabellen i oppgave 4, men hadde ingen problemer med å utforme en tabell fra funksjonsuttrykket som ble oppgitt i oppgave 2. Funksjonsuttrykket-verbal situasjon viste seg å være vanskelig for begge grupper i oppgave 2 der det oppstod en *tolkningsfeil*, mens verbal situasjon-funksjonsuttrykk ikke ga like store utfordringer. Dette er i tråd med (Duval 2006) som hevder at problemet endres hvis retningen på overgangen endres og derfor påvirker hvor vanskelig overgangen er.

Duval (2006) hevder også at overganger mellom ikke kongruente representasjoner ofte er en ubrytelig barriere for elever. Anders og Daniel viser tegn til at det var utfordrende at elementene i tabellen ikke var 1-1 med elementene i funksjonsuttrykket i oppgave 4a og at rekkefølgen av elementene måtte bestemmes i funksjonsuttrykket. De klarte likevel å utføre overgangen til et funksjonsuttrykk. At elevene påpeker at dette skapte utfordringer viser at de opplevde ikke-kongruente overganger som mer utfordrende enn kongruente overganger. Beate og Cecilie har ikke utfordringer med overganger fra tabellen i oppgave 4 og ikke-kongruente overganger virket i deres tilfelle ikke som mer utfordrende enn overganger som kunne gjøres kongruent.

Parameter gjenkjennelse (Janvier 1987) er den eneste omdanningsaksjonen som skaper utfordringer for elevene. Overgangen funksjonsuttrykk-verbal situasjon er den eneste overgangen der det oppstod en feil når a går fra å være en konstant i startrepresentasjonen og uttrykt som en variabel i sluttrepresentasjonen. De andre viktige elementene y, x og b ble derimot gjenkjent og representert riktig i den verbale situasjonen. Beate og Cecilie har ikke utfordringer med overgangen når de utfører den i oppgave 4 og det kan derfor antas at parameter gjenkjennelse er et problem i oppgave 2 fordi stigningstallet har verdien 1 og dermed ikke blir gjenkjent som en konstant. Hvis funksjonsuttrykket hadde vært skrevet som $y = 1x + 5$ er det mulig at den verbale situasjonen hadde blitt laget riktig og representert den lineære funksjonen som blir oppgitt i funksjonsuttrykket.

6 Avslutning

6.1 Oppsummering.

Resultatene i denne studien som er fremstilt i tabell 2 har vist at det var ulike ting som skapte utfordringer for elevgruppen i overganger mellom representasjoner av lineære funksjoner. Overganger der det krevdes globale tolkninger viste seg å være vanskeligere for Anders og Daniel enn overganger som krevde lokale tolkninger. Representasjonenes egenskaper i form av *faktahull*, *forvirrende element* og *informasjonstetthet* skapte også utfordringer i enkelte overganger. Overganger som inneholdt *ikke-kongruente* representasjoner som tabellen og funksjonsuttrykket i oppgave 4c skapte også noen utfordringer for Anders og Daniel. De påpekte at det var vanskelig å vite hva i tabellen som ga informasjon om de viktige elementene i funksjonsuttrykket som kan knyttes til 1-1 avbildning av elementer (Duval, 2006). Beate og Cecilies valg av å representere Anna og Jons alder som to funksjonsuttrykk kan knyttes til at valget av elementer i funksjonsuttrykket ikke er entydig, der x kan representere både Anna og Jons alder. Ingen av de nevnte utfordringene i overgangsprosessen skapte imidlertid representasjoner som ikke stemte overens med representasjonen de startet med. En *tolkningsfeil* ble imidlertid gjort av begge grupper i overgangen funksjonsuttrykk-verbal situasjon. Her var det stigningstallet som av begge grupper ble omgjort til en variabel og ikke gjenkjent som en konstant i funksjonsuttrykket som ble oppgitt.

6.2 Studiens plass i forskningsfeltet

Denne studien har undersøkt hva som skaper utfordringer for elever i overganger mellom representasjoner av funksjoner. Tidligere forskning har ofte bare sett på overganger mellom representasjon som noe elevene gjør riktig eller feil (Superfine et al, 2009). Med et slikt fokus blir ikke overgangsprosessen studert utover om representasjonene representerer det samme matematiske objektet. Superfine et al. (2009) studerte hvordan elever brøt opp tallet 10 til to mindre tall og representerte det ved bruk av en tallinje, et rutenett med 10 ruter og et boksdiagram der to tall addert sammen skulle tilsvare tallet 10. Dette er et eksempel på at overganger mellom representasjoner er aktuelt i alle matematiske temaer og ikke bare funksjoner. Dette påpekes også av Duval (2006) som sier at matematikk er nødt til å foregå i en representasjonell kontekst.

Jeg valgte i denne studien å fokusere på algebra fordi det er et tema norske elever gjør det svakere i enn andre temaer i matematikken på ungdomskolen (Bergem et al., 2016). Studien er derfor en del av det matematikkdidaktiske forskningsfeltet knyttet til algebra som er avgrenset til et fokus på funksjoner. Studien er også begrenset til å undersøke ytre representasjoner av funksjoner og ikke elevenes indre og mentale representasjoner (Goldin & Shteingold, 2001). Denne studien har hatt som formål å undersøke nærmere hva som gjør overgangsprosessene utfordrende og gå dypere inn i overganger mellom representasjoner enn bare en bestemmelse av om elevene lykkes med overgangen eller ikke. Adu-Gyamfi et al. (2012) har sett på ulike feil elevene gjør i overganger mellom representasjoner. Denne studien har også sett på utfordringer elevene hadde som ikke resulterte i feil og har dermed en litt ulik tilnærming for å undersøke elevenes arbeid med overgangene. Dette er også en kvalitativ studie som betyr at resultatene ikke er ment som generelle forklaringer på utfordringer elever har med overganger mellom representasjoner. Forskerens jobb i kvalitative studier er å gi tykke beskrivelser slik at andre kan ta stilling i hvor stor grad resultatene er generaliserbare til andre situasjoner (Cohen et al., 2011. En annen elevgruppe hadde potensielt hatt helt andre utfordringer knyttet til ulike overganger mellom representasjoner enn det som er funnet i denne studien.

6.3 Didaktiske implikasjoner

fem av sju overganger som viste seg å være utfordrende for elevene inneholder representasjonen verbal situasjon i tråd med Bosse et al. (2011) som kategoriserer disse som de vanskeligste. Dette viser at det er vanskelig å knytte matematiske representasjoner til en praktisk kontekst, og å knytte praktiske situasjoner til matematiske representasjoner. Dermed er overganger mellom verbal situasjon og andre representasjoner noe som må arbeides med i skolen. Studien viste også at ikke-kongruente overganger opplevdes som vanskeligere enn kongruente overganger for den ene elevgruppen. Dette indikerer et behov for å arbeide med ikke-kongruente representasjoner og overganger mellom disse i skolen. Studiens resultater er også i tråd med det Duval (2006) påpeker at retningen til overgangen gjør overgangen annerledes. Dette indikeres også av Janvier (1987) i form av ulike begreper på omdanningsaksjonen som kreves i ulike overganger mellom to bestemte representasjoner. Det viser at det må jobbes med overgangene i begge retninger for at elevene skal kunne knytte sammen representasjoner på en god måte. Hvis elevene kan utføre overgangen tabell-graf betyr ikke det nødvendigvis at de kan utføre overgangen graf-tabell. Elevgruppene møtte også utfordringer i overgangene på grunn av *faktahull, forvirrende element* og *informasjonstetthet.* Dette indikerer et behov for at matematikklærere er bevisste på egenskapene representasjonene av funksjoner har som kan gjøre omdanningsaksjonen utfordrende i enkelttilfeller. Utarbeidelsen av oppgaver må dermed være gjennomtenkt for å kunne analysere hva som skaper utfordringer for elever og ikke bare ses på som overganger elevene enten utfører riktig eller feil.

6.4 Videre forskning

6.4.1 Ikke-lineære funksjoner.

Denne studien undersøker hvilke utfordringer elever har i overganger mellom representasjoner av lineære funksjoner. Bosse et al. (2011) påpeker at det ofte er kompleksiteten til funksjonene og ikke selve overgangen som er utfordrende når det er andre funksjoner enn lineære funksjoner som blir undersøkt. Det hadde likevel vært en naturlig vei videre å se hva som påvirker overganger mellom funksjoner i for eksempel kvadratiske funksjoner. Kompetansemålene etter 10.trinn inneholder blant annet at elevene skal kunne gi eksempler på praktiske situasjoner som beskriver kvadratiske funksjoner (Utdanningsdirektoratet, 2013). En studie av hva som skaper utfordringer i overganger mellom representasjoner av ikke-lineære funksjoner kunne gitt helt andre resultater enn denne studien som er begrenset til å gjelde lineære funksjoner. Det kan også tenkes at *faktahull, forvirrende elementer, informasjonstetthet, kongruens* og *omdanningsaksjonen* som kreves ikke er nok for å forklare elevers utfordringer i arbeid med denne typen funksjoner. Da skapes et behov for videre forskning med nye kategorier for å betegne utfordringer med overganger mellom funksjoner. Det kan også tenkes at representasjoner av ikke-lineære funksjoner inneholder flere faktahull og forvirrende elementer enn representasjoner av lineære funksjoner.

6.4.2 Graf som startrepresentasjon

Graf som startrepresentasjon er også overganger som ikke er utforsket i dette datamaterialet. Gagatsis & Shiakalli (2004) konkluderer i sin studie med at overganger som involverer grafiske representasjoner er overganger elevene sjeldnere lykkes med. De hadde ikke representasjonen tabell med i sin studie og heller ikke oppgaver der funksjonsuttrykk var startrepresentasjon. Deres forskning indikerer likevel at graf som startrepresentasjon var utfordrende for elever siden prosentdelen av elever som fikk til disse oppgavene er lavere enn i andre overganger (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Duval (2006) sitt synspunkt på retning har også vist seg å være en medvirkende faktor i vanskelighetsgraden til en overgang i denne studien. Det hadde derfor være av interesse å undersøke hvilke utfordringer som oppstår med graf som startrepresentasjon og om utfordringene skiller seg fra graf som sluttrepresentasjon som er undersøkt i denne studien. Duval (2006) viser også til et eksempel der en graf skal tolkes for å lage et funksjonsuttrykk og at dette er mye vanskeligere for elever enn å lage en graf fra et gitt funksjonsuttrykk. Han mener dette kommer av at å lage grafen til et funksjonsuttrykk bare krever å plassere punkter og lokal tolkning. For å tolke en graf for å kunne lage et funksjonsuttrykk kreves en global tolkning og forståelse av visuelle trekk i grafen. De visuelle trekkene i grafen indikerer den generelle samvariasjonen til variablene som elevene nødvendigvis må forstå for å kunne lage et funksjonsuttrykk. Graf som startrepresentasjon er derfor annerledes enn graf som sluttrepresentasjon og er et mulig videre forskningsområde.

6.5 Avsluttende bemerkninger

Formålet med denne studien har vært gå dypere inn i elevers arbeid med overganger mellom representasjoner for å kunne undersøke hva som skaper utfordringer. Fremstillingen har vært rettet mot utfordringene elevene hadde og ikke hva elevene fikk til. Med en annet fokus og en annerledes innfallsvinkel viste elevene god evne til å knytte sammen representasjoner av funksjoner som vises med at det bare oppstod en feil i arbeidet med overgangene. Utfordringene elevene hadde utover denne feilen ble løst slik at elevene kunne fullføre overgangene. Duval (2004) hevder matematisk aktivitet krever at elevene utvikler en evne til å koordinere mellom ulike representasjonssystem. Hvis elevene ikke har denne evnen ses to representasjoner ikke på som flere representasjoner av det samme matematiske objektet, men to representasjoner som ikke kan knyttes sammen. Duval (2004) påpeker også at elever ofte forveksler det matematiske objektet med representasjonene. Elevene i denne studien brukte representasjonene i samspill og har dermed utviklet en evne til å koordinere, benytte seg av og skifte mellom representasjoner på en god måte. Representasjonene ble heller ikke forvekslet med det matematiske objektet lineære funksjoner, men ble sett på som ulike måter å representere lineære funksjoner på. De viser med andre ord evner til å utføre overganger mellom representasjoner av funksjoner som er viktig for å tilegne seg kunnskap om funksjoner. Som Duval (2006) selv beskriver hvor viktig overganger mellom representasjoner er «Conversion of representation is the first threshold of comprehension in learning mathematics».

7 Litteratur

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. & Bosse, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematics representations. *School Science and Mathematics Journal, 112*(3), 159-170. doi: 10.1111/j.1949-8594.2011.00129.x

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag.* Oslo: Universitetsforlaget.

Bosse, M. J., Adu-Gyamfi, K. & Cheetham, M. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: Synthesizing the literature and novel findings. *International electronic journal of mathematics education, 6*(3), 113-133.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education.* (7. utg.). Routledge: London.

Dalland, O. (2012). *Metode og oppgaveskriving*. (5. utg). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Duval, R. (2004*). A crucial issue in mathematics education: the ability to change representation register*. Proceedings of the 10th international conference on mathematics education. København.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1), 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. I D. Tall (Red.), *Advanced mathematical thinking* (s. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The journal of mathematical behavior, 17*(1), 105-121. doi: 10.1016/S0732-3123(99)80063-7

Gagatsis, A. & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational psychology*, *24*(5), 645-657. doi: 10.1080/0144341042000262953

Gold, R. L. (1958). Roles in sociological field observation. *Social forces, 36* (3), 217-223. doi: 10.2307/2573808

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development og mathematical concepts. I A. A. Cuoco & F.R. Curcio (Red.), *The roles of representation in school mathematics* (s. 1-23). Reston, Virginia: National council of teachers of mathematics.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I, C. (2012). *Fremgang, men langt fram. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMMS 2011*. Oslo: Akademika forlag.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations-studies and teaching experiment.* (Doktorgradsavhandling). University of Nottingham, Nottingham.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. I C. Janvier (Red.). (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (s.27-32). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Red.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (s. 41-58). London: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Postholm, M.B. & Moen, T. (2010). *Forsknings- og utviklingsarbeid i skolen, en metodebok for lærere, studenter og forskere.* Oslo: Universitetsforlaget.

Superfine, A., Canty, R, S., Marshall, A, M. (2009). Translation between external representation systems in mathematics: All or none or skill conglomorate? *The journal of mathematical behavior. 28*(4), (s-217-236*). doi:* 10.1016/j.jmathb.2009.10.002

Tjora, A. (2012). *kvalitative forskningsmetoder i praksis.* (2.utg). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *læreplan i matematikk fellesfag.* (LK 06). Hentet fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.doc?lang=nob

8 Vedlegg

8.1 Vedlegg A: Forespørsel om deltagelse i forskingsprosjektet.

«Elevers bruk av representasjoner i funksjoner»

Bakgrunn og formål

Formålet med studien er å undersøke hva som er vanskelig i overgangen mellom ulike representasjoner av funksjoner. Hva gjør det vanskelig å omgjøre et funksjonsuttrykk til en praktisk situasjon og hva gjør det vanskelig å gi eksempler på praktiske situasjoner som kan beskrives med en gitt tabell? Dette er spørsmål jeg ønsker å undersøke for å finne ut hva som er utfordrende og hvorfor det er utfordrende for elever med bruk av flere representasjoner i funksjoner.
Prosjektet er en mastergradstudie ved NTNU, avdeling for lærerutdanning på Rotvoll.

Hva innebærer deltagelse i studien?
Datainnsamlingen vil foregå gjennom observasjon av elevers oppgaveløsning og intervju i etterkant. Intervju i etterkant av observasjonen gjøres for å gjøre det tydelige hvilke tanker elevene har rundt sine egne fremgangsmåter og hvor hensiktsmessige deres matematiske representasjoner er. Utvelgelse av elever som skal delta i studien vil skje i samspill med matematikklærer/kontaktlærer på skolen og klassetrinnet. Data vil i hovedsak registres ved hjelp av film og lydopptak for å sikre at datamaterialet kan analyseres mest mulig presist. Det vil i forbindelse med intervjuene utarbeides en intervjuguide som foreldre/foresatte kan få innsyn til på forespørsel. Elever som er villige til å delta i studien vil arbeide med noen oppgaver i temaet funksjoner og opplegget vil ta ca 1 skoletime. Eventuelle intervju i ettertid vil ikke overskride 1 skoletime. Elever som ikke deltar i studiene vil følge ordinær undervisning.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det vil ikke samles inn personopplysninger utover alder og kjønn på deltagerne i studien. Tilgang til datamaterialet vil bare være tilgjengelig for meg som masterstudent og min veileder i forbindelse med

oppgaven. Data som blir publisert vil være anonymisert med bruk av pseudonym på alle deltagere i forskningsprosjektet. Opptak som gjøres vil lagres på en bærbar PC som er passord beskyttet.
Prosjektet skal etter planen avsluttes 25. Mai 2018. Alt av personopplysninger og opptak som har blitt innhentet i løpet av arbeidet med masteroppgaven vil bli slettet etter prosjektets slutt.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert. Elever som ikke ønsker å delta i prosjektet følger vanlig undervisning
Dersom du ønsker å delta eller har spørsmål til studien, ta kontakt med Kjartan Mevatne (masterstudent) tlf: 476…. epost: kjartm@stud.ntnu.no
Veileder for prosjektet: Hermund Torkildsen førsteamanuensis ved NTNU

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS, med prosjektnummer 55886

Samtykke til deltagelse i studien
Jeg bekrefter at jeg har lest informasjonsarket og samtykker i at mitt barn deltar i aktiviteter knyttet til masteroppgaven om representasjonsbruk i funksjoner.

Barns navn/klasse:____ Jeg samtykker i at: (Kryss av der det passer)

	Mitt barn deltar i intervjuer og at det gjøres lydopptak av intervjuene til transkribering og analyse.
	Anonymiserte sitater fra barnet, der barnet ikke skal nevnes eller identifiseres, brukes i rapporter og publikasjoner.
	Det tas videoopptak av barnet, som en del av matematikkopplegget. Videoen kan brukes av Masterstudenten i matematikkdidaktikk og veileder fra NTNU i arbeid med transkribering og analyse av datamaterialet. Videoen skal ikke offentliggjøres.

	Det kan tas kopi av skriftlige elevarbeider fra barnet. Arbeidene kan publiseres i anonymisert form slik at det ikke er mulig å kjenne igjen barnet.

Sted og dato________________________________
Forelders/ foresattes underskrift____
Vennligst lever skjemaet til ________________ Tusen takk!

8.2 Vedlegg B: Oppgaveark elevene fikk utdelt.

Oppgave 1.

En bil kjører med hastighet på 60km i timen

a) Vis sammenhengen mellom antall kilometer som er kjørt og lengden av kjøreturen i antall timer
b) Kan du vise sammenhengen på flere måter?

Oppgave 2.

Vi har funksjonsuttrykket $X = Y + 5$

a) Lag en situasjon funksjonsuttrykket beskriver.
b) Vis utviklingen til Y når X er mellom 0-10. Beskriv hva du finner når X er en bestemt verdi i situasjonen din.
c) Hvor er det naturlig at X starter og slutter i din situasjon?

Oppgave 3.

a) Anna er 5 år eldre enn Jon. Hvis hvordan alderen til Anna utvikler seg fra Jon er nyfødt til han er 15 år gammel.
b) Lag et funksjonsuttrykk som beskriver alderen til Anna og Jon når de blir eldre.

Oppgave 4

a) Lag en situasjon tabellen nedenfor kan beskrive
b) Lag grafen til tabellen
c) Finn funksjonsuttrykket til tabellen.

0	*300*
10	*450*
20	*600*
30	*750*
40	*900*
50	*1050*
100	*1800*
200	*3300*