Maren Wettland Midtsand

«Jeg vet hvorfor, men jeg synes det er så vanskelig å forklare»

En empirisk studie av hva som kjennetegner 6-7åringens språk i samtale om matematikk.

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 1-7
Veileder: Ole Enge
Institutt for lærerutdanning
NTNU, Trondheim

Forord

Denne undersøkelsen og oppgaven har blitt til igjennom et litt utradisjonelt studieforløp. Først som fulltidsstudent, dernest ble siste studieår gjennomført over to år ved siden av mitt arbeid som lærer. Å få lov til å begynne min lærerkarriere samtidig som jeg holdt fast på studiet tror jeg har bidratt til at jeg har klart å holde fokus på teorien bak fagene samtidig som det så velkjente praksissjokket kom. Jeg har naturlig blitt dratt tilbake i teoribøkene, og jeg håper det vil gjøre at jeg greier å holde et høyt faglig fokus i blant lærerens mange andre oppgaver i en travel hverdag.

Gjennom studiet har jeg hatt et fantastisk støtteapparat rundt meg.
Først vil jeg takke min foreleser Anita Valenta som tidlig vekket en glede for matematikk i meg, som jeg ikke viste at jeg hadde. Hun fikk meg til å lukte på masteren og overbeviste meg om at jeg hadde det som trengtes for å fullføre en master i matematikkdidaktikk. Deretter vil jeg rette en takk til min veileder Ole Enge som på sitt sedvanlige rolige vis har taklet en litt stresset småbarnsmamma med vekslende tro på seg selv.

Jeg vil også sende en varm takk i retning av min kollega Hanne Ottosen Fauske for støtte, råd og gjennomlesing, min svoger Kim Kantardijev som har lest korrektur, min pappa Frank for nyttig tankeutveksling underveis og min fetter Jonatan Aune Bendixen for hjelp med å framstille mine kråketær til grafiske figurer.

En stor takk sendes foreldrene mine Toril og Frank for barnevakttjeneste og hotelltjeneste i de verste skriveperiodene mine, som har måttet finne sted i ferier. Barna mine Leah Sol og Liam Sebastian har vært motivasjonsfaktorer for å bli ferdig med selve oppgaven.

Tilslutt vil jeg takke min klippe; Joachim, for trøst når jeg har vært frustrert, for å gi meg ett dytt bak når jeg har mistet troa og for å ha heiet meg fram helt til målstreken. Uten alle rundt meg har jeg aldri fått ferdig denne masteroppgaven.

Maren Wettland Midtsand

Innholds

1 Innledning

"Young children love to think matematically".
Clements og Sarama, (2009), s. 2.

1.1 Barns matematiske kompetanse som bakgrunn

Hva kjennetegner elevers språk når de snakker om matematikk? Hva kan elevenes samtale fortelle oss om deres kompetanse i matematisk diskurs?

Små barns matematiske kompetanse har i lang tid fascinert meg, både som lærerstudent, mamma, lærer og nå forsker. Å høre på barn i alderen 5-8 år forklare, beskrive og tenke matematikk har vist meg hvilket potensiale små barn har for å tenke matematisk. Mange barn har vist at de tidlig har evne til å tenke avansert og etter hvert abstrakt. Derfor ønsker jeg i denne undersøkelsen å se mer på hvordan de yngste elevene snakker matematikk.

Clements og Sarama ((Clements & Sarama, 2009, s. 1-2) beskriver hvordan matematisk kompetente barn i lav alder har forutsetninger for å bli både gode matematikere og gode lesere når de blir eldre. De beskriver også hvordan små barn liker å tenke matematisk: barn blir henrykte over egne ideer og viser stor iver over andres ideer, noe jeg kjenner igjen i mitt arbeide. Clements og Sarama sier også at små barn som ikke har utviklet sin matematiske forståelse kan gjøre det gjennom høy-kvalitets matematikkundervisning ved lav alder. På den måten får de bedre forutsetninger for den videre matematikkopplæringa, samt leseopplæringen (Clements og Sarama, 2009, s. 1-2).

Elisabeth Warren og Tom Cooper (2008) finner i sin forskning på generalisering av figurmønster at barna får trøbbel når de skal skrive ned det de ser i figurmønsteret (Warren & Cooper, 2008). Gjennom egen erfaring på 1.-2.trinn opplever også jeg at elever kan vise stor kompetanse muntlig, og så ha større vansker med å skrive ned sine tanker og ideer. I tillegg til at jeg har gjort meg erfaringer med at språket til barna kan bli enkelt og lite matematisk. De mangler en del begrep, som læres inn disse første årene.

Det kan se ut til at det er lettere for barna, tross enkelt språk, å snakke matematikk enn å skrive matematikk. Sett i sammenheng med at små barns kompetanse i matematikk er viktig for den videre opplæringen til barnet, ser jeg med undring på oppmerksomheten den skriftlige matematikken får tidlig i undervisningen. Hvorfor har den norske skolen så stort fokus på den skriftlige matematikken, når elevene ser ut til å streve med det?

Norge har mange lærere og mange matematikklærere, og derfor også mange ulike lærerstiler. Likevel finnes det historiske trekk i fagets undervisning. I TIMSS-rapporten fra 2003 beskrives en utvikling i det matematiske faget som gradvis har flyttet fokus fra teknologi til fokus på dagligdags matematikk. Rapporten sier at utgangspunktet for denne dreiningen er at matematikk er et fag elever strever med. I L97 blir *matematikk i dagliglivet* overordnet målområde for faget (TIMSS, 2003).

I den samme perioden har faget blitt oppfattet å være for teoretisk og abstrakt. Den samme TIMSS-rapporten beskriver hvordan oppfatningen av matematikk som et system og et produkt nå skifter til å dele oppmerksomhet med selve den matematiske aktiviteten. Prosessen det er å gå fra et gitt problem i den virkelige verden, til å omsette problemet til et matematisk språk er nå like viktig som systemet og produktet. Denne prosessen kalles *å matematisere* (TIMSS, 2003). Denne fokusendringen er noe lærerutdanningen er med på å underbygge. Matematikken vi har lært på tidligere HIST, nå NTNU, er i stor grad knyttet til virkelige situasjoner, og til matematiseringen som finner sted i klasserommet. Studentene oppfordres og inspireres til å ikke bruke læreboka som hovedaktivitet i faget, og fokusere på prosessen. Utdanningsinstitusjonen har på denne måten vist oss studenter at de deler læringssynet til forskere som Clement og Samara og Warren og Cooper. Dette viser seg også til en viss grad i lærerkollegiet, der man utveksler opplegg og erfaringer med arbeid utenfor læreverket i sosiale medier og grupper forbeholdt interesserte lærere.

De siste årene har læreryrket og undervisning fått mye oppmerksomhet i politikken og i media. Senest i november 2016 ble nye resultat i TIMSS-undersøkelsen offentliggjort, og resultatet viser at norske elever på 4., 5., 8. og 9. trinn presterer godt i matematikk i undersøkelsen, som ble gjennomført i 2015. På flere områder presterer de signifikant bedre enn tidligere år (Bergem, Kaarstein, & Nilsen, 2015, s. 22).

1.2 Min erfaring som bakgrunn

Med min matematiske bakgrunn fra lærerskolen fikk jeg ansvar for matematikk på førstetrinn det første året i arbeidslivet. Som fersk lærer i de nederste årstrinnene på barneskole opplevde jeg at elever ofte fikk en opplæring som var mye konsentrert rundt matematikkboka, altså en skriftlig og teoretisk tilnærming til faget. Det ble derfor viktig for meg å lage et klasseromsmiljø der elevene snakket matematikk, at de fortalte hvordan de tenkte framfor å fortelle meg svaret, og at de ikke var redde for å gjøre feil. Jeg har søkt mye støtte i lærebøkene mine fra lærerstudiet, plukket oppgaver derfra og på den måte holdt fokuset på den matematiske samtalen og den praktiske delen av matematikken.

Empiri-innsamlingen i denne masteroppaven har derfor foregått på elever som jeg selv har hatt i undervisning. Noen har jeg undervist i 1,5 år, noen bare i et halvt år. Fordi et av mine overordnede mål i yrkeslivet har vært på å samtale om matematikk med elevene, har jeg i denne undersøkelsen brukt to samtaler med en gruppe elever som utgangspunkt for analyse og drøfting. Temaet for undersøkelsen har vært elevenes språk; hva som kjennetegner språket deres når de snakker om matematikk. Spesielt deres bruk av matematisk diskurs og hvordan samtalen kan vise oss hva elevene har av kompetanse i matematisk diskurs.

1.3 Teori som bakgrunn

Det matematiske språket omtales som en diskurs, den matematiske diskursen. Mange har forsket på dette og jeg har i denne undersøkelsen hovedsakelig sett på hvordan Anna Sfard (2008) ser på den matematiske diskursen i sin bok *«Thinking as Communicating. Human development, the growth of discourses and mathematizing»* (2008). Hun ser på den matematiske diskursen som en struktur med mange lag, der hvert av lagene kan danner grunnlaget for til et nytt lag, altså et organisert system (Sfard, 2008, s. 164-165). Sfard beskriver en rekke kjennetegn hun mener er tilstede i matematisk diskurs (Sfard, 2008, s. 133-135), og hun beskriver hvordan elevene utvikler begrepsbruken sin igjennom en 4-stegsmodell for utvikling av nøkkelord (Sfard, 2008, s. 181-182). Elevene tar del i samtaler bestående av øvingshandlinger som er ulike utsagn rundt samme relasjon eller objekt. Øvingshandlingene kaller hun rutiner (Sfard, 2008, s. 134-135). Disse øvingshandlingene er også noe David Pimm snakker om. I sin bok «*Speaking Mathematically. Communication in Mathematics Classrooms*» (1987) skriver også David Pimm om slike øvingshandlinger. Han påpeker at barnas ulike utsagn rundt matematiske relasjon eller objekt, er avgjørende for at de skal lære seg å spisse og polere den matematiske diskursen. I et sosiokulturelt lys blir dette spennende fordi han sier prosessen med å spisse diskursen bør foregå i samhandling med andre (Pimm, 1987, s. 43).

I undersøkelsen har jeg også sett på hvordan andre elever og lærer spiller en rolle i den matematiske samtalen. De andre elevene påvirker samtalen som venner som ønsker hverandres oppmerksomhet (Sfard, 2008, s. 241-244) og som samtalepartnere som i fellesskap skal finne fram til noe de kan godta som sant (Sfard, 2008, s. 223). Læreren er viktig som en støttespiller og en som modellerer for elevene, både hvordan man lytter og forklarer (Pimm, 1987, s. 43-49), og hvordan man kan ta i bruk spesialbegrep innenfor den matematiske diskursen (Pimm, 1987, s. 60-61).

1.4 Problemstilling og formål

Med bakgrunn i teori som sier noe om hvordan barn kan tenke matematisk og uttrykke matematikk, samt min erfaring og arbeid i 1. og 2. trinn, vil jeg her undersøke hva som kjennetegner de unge elevenes matematiske språk.

Jeg spør derfor:

Hva kjennetegner 6-7 åringers språk i arbeid med generalisert aritmetikk?

2. Teoretisk rammeverk

2.1 Sosiokulturelt perspektiv

Roger Säljö (2001) sier at det er vanskelig og mest sannsynlig umulig å klart og tydelig definere hva læring er (Säljö, 2001). Säljö sier at i historisk perspektiv har snakking vært lærerens ansvar, og læring har blitt overført fra snakkende lærer til lyttende elev. Kunnskap var sett på som nøytralt og ikke avhengig av den som overførte den. I et sosiokulturelt perspektiv forstår man kunnskap som knyttet til argumentasjon og kommunikasjon mellom mennesker, at kunnskap kommer fra mennesket med følelser og meninger (Säljö, 2001, s. 25-26). Den sosiokulturelle tradisjonen sier at kommunikasjon er en av de viktigste forutsetningene for å tilegne seg kunnskap. De intellektuelle ressursene vi har i oss selv, de praktiske redskapene vi har utviklet rundt oss, er sammen med kommunikasjon de tre samvirkende forholdene i sosiokulturelt perspektiv på læring (Säljö, 2001, s. 21-23). Retningen forutsetter at de fysiske og språklige ressursene medierer virkeligheten. Det vil si at disse verktøyene er avgjørende for tenkingen, men også at tenkingen er avgjørende for verktøyene som brukes. Hvis vi ser på en elev som lærer noe ved å se i et mikroskop eller trykke på en kalkulator, kan vi ikke fjerne eleven fra apparatet og studere bare tankene eller bare apparatet. Vi må se på tenkingen ved hjelp av apparatet (Säljö, 2001, s.83-85). Dette gjelder også hvis verktøyet som brukes er språket. *"Menneskets aller viktigste medierende redskap er de ressursene som finnes i språket vårt",* sier Säljö (Säljö, 2001, s.84). Det betyr at når læreren ser på elevenes læring i en samtale er den nødt til å se på hvordan elevenes språk medierer læring

2.1.1 Språk i et sosiokulturelt perspektiv

Språk kan ofte oppfattes som abstrakt, det er ikke like konkret som handlinger. Men det unike med språket er at det lar oss snakke om den konkrete verden rundt oss, det løsriver oss fra det håndfaste og lar oss snakke om det. Vi kan legge betraktninger i språket og beskrive det som de interessante delene av det konkrete, vi kan framheve og utelate. Det ligger også i språkets kraft at vi kan snakke om det vi ikke ser; hva som hendte i går og hva vi skal gjøre i morgen. Det gir oss også muligheten til å beskrive fenomener, for eksempel matematiske objekter. I den fleksible relasjonen mellom det vi sier og det vi sier noe om, ligger mye av læringen (Säljö, 2001, s. 84-87).

Språk er et vidt begrep, det kan være individuelt (tanken), interaktivt (mellom flere mennesker eller mellom menneske og ulike verktøy) og kollektivt (et fellesskap). Mennesker er kreative og bruker språket basert på den sammenhengen de er i. Språket er levende og dynamisk, og vi bruker ikke ordene akkurat slik de står beskrevet i ordbøkene. Det er ikke noe fikst ferdig som vi henter fram. Å tilegne seg språk er å delta i sosiale samspill, og disse ulike sosiale samspillene påvirker måten vi tenker på (Säljö, 2001, s. 89-90). I en matematisk sammenheng vil det derfor ikke være så vanskelig å forstå at forvirring kan oppstå, når spesifikke ord kan ha ulike betydning i ulik sammenheng (Pimm, 1987, s. 8).

I dette perspektivet er språk også tenking, og tenking kan like greit foregå *mellom* mennesker som *i* mennesker. Det som holder en samtale gående er jo at man legger fram tanker med mening i en passende sammenheng. Tenking kan derfor være noe man deltar i, et kommuniserende arbeid, som skjer ved at deltakerne opprettholder en felles forståelse av det de holder på med. Det er aktive handlinger, noe både individet og kollektivet gjør, som en samtale. Det blir som et samspill mellom tenking i mennesket og samtale mellom mennesker (Säljö, 2001, s. 110-114). Mennesker som deltar i en slik samtale får en viss tilgang til hverandres tanker, og de kan sette seg inn i hvordan en annen ser et problem. Det kan legges fram ulike løsningsforslag som kan bygges videre på og bli til et felles eie. Gjennom en slik kommunikasjon kan man oppnå en felles forståelse (Säljö, 2001, s. 117).

2.2 Matematikk er et språk?

Det snakkes ofte om det matematiske språket, et språk som har blitt til som en evolusjon etter et behov for å forklare matematikken (Pimm, 1987, s77). Men matematikk er ikke et språk likt norsk, svensk eller engelsk. Det er heller ingen dialekt. Når vi snakker matematikk i skolen bruker vi for det meste de samme ordene som vi gjør i vårt eget språk (Pimm, 1987, s75). Teoretikerne bruker litt ulike begreper på det matematiske språket, og det som kanskje forekommer oftest er «matematisk diskurs». En diskurs er *«gjerne et tankesett, forståelsesformer eller de språklige, ideologiske, sosiale og institusjonelle betingelsene som gjør det mulig å forholde seg til verden på en bestemt måte»* ("Store Norske Leksikon,"). Slike diskurser kan bli sett på som en struktur med mange lag. Ethvert av disse lagene kan være opphav til eller bli til ett nytt lag, noe som gjør diskursen til et organisert system. Et system der språk er et objekt parallelt med samtalen i seg selv. Det vokser innenfra ettersom stadig nye objekter legges til. Matematisk diskurs kan bli beskrevet som en diskurs som omhandler matematiske objekter som tall, funksjoner og geometriske former (Sfard, 2008, s 129).

Anna Sfard mener at dette er en for enkel beskrivelse av diskursen og refererer til hvordan den kjente filosofen Bertrand Russel beskriver matematikk *«as a subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true»* (Sfard, 2008, s 129). Matematikkens diskurs er full av spesialbegrep, men også metaforer og hverdagsbegrep. I matematisk sammenheng kan disse hverdagsbegrepene ha en litt annen betydning enn de har i hverdagsspråket. Derfor kan det lett oppstå forvirring når elevenes hverdagsspråk møter matematikkdiskursen (Pimm, 1987, s. 75).
I det ekstreme, sier Sfard, kan diskursen bli så smal, at matematikere innenfor ulike matematiske felt er så spesifikke og spesialiserte på sitt eget område, at de ulike ekspertene møter utfordringer når de skal kommunisere med hverandre. Begrepene brukt av matematikere er strengere enn diskursen elevene møter i skolen, og matematikernes diskurs er mye mer avansert skolediskursen. (Sfard, 2008, s. 133).
Selv om den skolematematiske diskursen er nærere den dagligdagse talen kan det være vanskelig for elever og komme inn i den. I motsetning til den dagligdagse diskursen, der objektene for samtalen ofte er konkrete, omhandler den matematiske diskursen ofte objekter som er abstrakte, altså objekter som representerer noe annet. Derfor er den matematiske diskursen særlig utsatt for å bli hindret av uoverensstemmelser mellom samtalepartnernes valg av ord (Sfard, 2008, s. 135). Dette gjelder også de yngste elevene. Så på tross av at matematiske objekter er immateriell, avhenger den matematiske kommunikasjonen av det vi ser, og av mindre abstrakte diskusjoner, nettopp for å unngå uoverensstemmelser (Sfard, 2008, s. 146).

2.2.1 Matematisk diskurs - fire kjennetegn

Anna Sfard (2008) er en av teoretikerne som snakker om den matematiske diskursen. Det som gjør Anna Sfards vinkling på den matematiske diskursen ekstra interessant er at hun peker på et paradoks som dukker opp når barn skal lære seg den matematiske diskursen. En persons kjennskap til diskursen ser ut til å være en forutsetning for å delta i den, men en slik kjennskap kan man bare få igjennom deltakelse i diskursen. Så hvordan kan elevene da komme inn i den matematiske diskursen? Denne sirkulæriteten, og hvordan vi kan overkomme den, er et hovedområde innenfor forskning på matematisk kommunikasjon

(Sfard, s. 129-130). I sin bok *«Thinking as Communicating. Human development, the growth of discourses and mathematizing»* (2008) beskriver Anna Sfard fire kjennetegn som finnes i en matematisk diskurs; nøkkelord, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner.

Nøkkelord

En av de distinkte karakteristikkene til diskurser er hvilke nøkkelord (word use) de som bruker den matematiske diskursen tar i bruk. Selv om det ikke alltid er slik, så er ord som omhandler mengder og former hovedsakelig nøkkelord innenfor den matematiske diskursen. For eksempel så er *lengde* et nøkkelord, når man holder på med måling. Flere av disse ordene blir også brukt i den daglige diskursen vår, men i skolesammenheng brukes de i en mer disiplinert form og sammenheng. Bruken av nøkkelord er viktig, fordi nøkkelordene gir mening til diskursen, og derfor er avgjørende for hva brukeren av diskursen har mulighet til å si om verden. Nøkkelordene kan være objekter i en aktivitet eller begrep som er viktige for å skape mening i en aktivitet (Sfard, 2008, s. 133).

Visuelle mediatorer

Ordet mediator på engelsk er *mellommann* oversatt til norsk. Men jeg velger å bruke ordet mediator her, fordi det er ordet Sfard bruker i sin teori. Mediatoren er en metafor for ord, uttrykk og symboler som skal hjelpe oss å oversette abstrakte fenomen til forståelig språk. Daglig diskurs er til vanlig mediert av bilder av materielle ting som eksisterer uavhengig av diskursen, og diskursen er ofte referert med substantiv og pronomen. Vitenskapelige og matematiske diskurser har ofte symbolske mediatorer som er skapt spesielt til denne diskursen, for eksempel: algebraisk notasjon, samt ikoner som diagrammer, grafer og andre tegninger. Disse mediatorene er mer abstrakte og vanskeligere å forstå. Kommunikasjonsrelaterte operasjoner utført med visuelle mediatorer vil ofte være automatisert og håndfaste eller fysiske. Hos unge elever kan dette være ulike former for konkreter som penger, kuler, klosser og personlige tegninger (Sfard, 2008, s147).

Narrativer

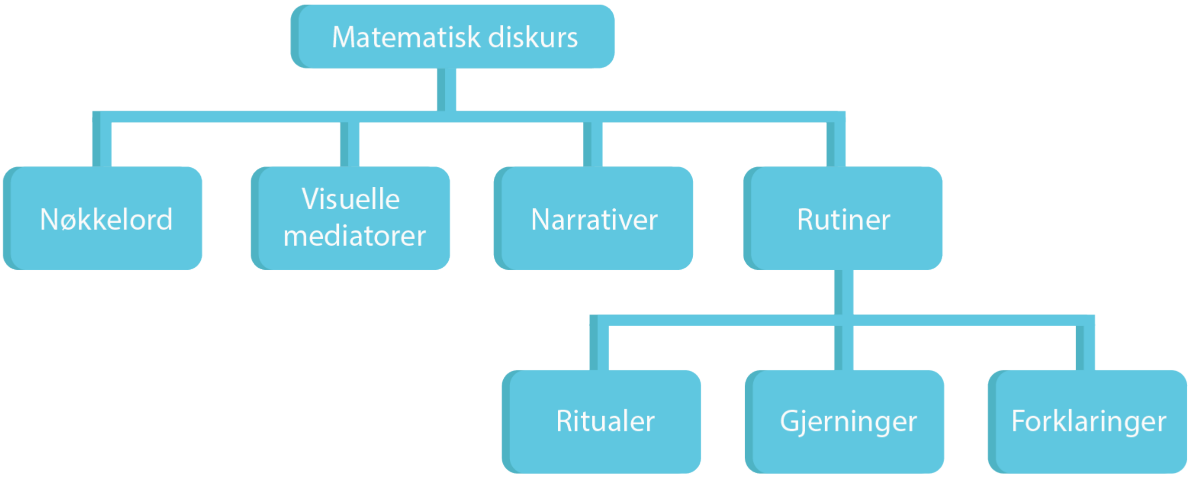
– eller fortellinger, er slik Sfard (2008) beskriver det, alle sekvenser av ytringer som er beskrivelser av objekter (hvordan en trekant ser ut), relasjoner mellom objekter (hvordan en regneoperasjon har en sammenheng med hva som skjer med summen) eller prosesser med eller om objekter (konstruksjon av geometriske former). Essensen eller poenget i en narrativ må bli godkjent eller underkjent. Det skjer igjennom diskurs-spesifikke diskusjoner eller

samtaler mellom lærer-elev, samtale mellom elev – elev, eller samtaler og diskusjoner i grupper eller klasser. Hvis en narrativ blir godkjent, blir den ansett som sann. Kriteriene for å bli godkjente narrativ er ulik fra diskurs til diskurs. Matematisk diskurs er blitt til en diskurs som bør være ugjennomtrengelig for alt annet enn deduktive relasjoner mellom fortellinger (Sfard, s.133-134). I deduktive relasjoner følger konklusjonen logisk ut i fra premissene, altså hvis premissene er sanne, er konklusjonen sann. Denne argumentasjonen har ofte formen «hvis..., så...» (Vaags, 2004) Å bli en godkjent narrativ, bør derfor ikke være avhengig av maktforholdet mellom samtalepartnerne, slik det er i mange andre diskurser. I skolematematisk diskurs er godkjente narrativ sett på som matematiske teorier, dette inkluderer definisjoner, beviser og teoremer (Sfard, 2008, s. 134).
Hovedmålet i prosessen er å gå fra et dagligdags problem til matematisk språk - matematisering er å produsere narrativ som blir godkjent, ansett som sann og sett på som «matematiske fakta» (Sfard, 2008, s. 223).

Rutiner

-er det som Anna Sfard omtaler som et repeterende mønster som er karakterisert av en gitt diskurs. Altså vil rutinene være ulik i ulike diskurser. I den matematiske diskursen kan en slik rutine være at man observerer bruken av matematiske ord, mediatorer eller følger prosesser som skaper eller bygger narrativ om nummer eller geometriske former. Rutiner som dette kan bli sett i nesten alle aspekter av den matematiske diskursen (Sfard, 2008, s. 134-135). Rutiner innenfor den matematiske diskursen kan betegnes som *forklaringer* som ender som narrativ. Men Sfard mener at det ikke er bare forklaringer som er rutiner; *gjerninger* og *ritualer* er forgjengere for utvikling av *forklaringer* (Sfard, 2008, s. 223).
Forklaringer – er rutiner som ender i godtatte narrativ. Det kan være erkjennelsesrutiner som aritmetiske utregninger eller løsning av likninger. Definering og bevisføring er også eksempler på matematiske forklaringer (Sfard, 2008, s. 224-225).
Gjerninger/dyder er rutiner som inneholder øvingshandlinger som produserer eller endrer objekter, ikke bare narrativene. Skillet mellom forklaringer og gjerninger/dyder kan være vanskelig. Noe kan være en forklaring for en, men en gjerning for en annen. En situasjon som for en voksen kan være en invitasjon til å lage en forklaring, vil for at barn kunne oppfattes som en invitasjon til å utføre en gjerning. Eksempelvis om en elev utfører en utregning med addisjon, kun for å finne svaret eller gjøre det samme som den voksne. Eleven kan ha vanskelig for å se at en utregning med addisjon kan være en narrativ om tallene, de bare utfører en gjerning (Sfard, 2008, s.236-240).

Ritualer - er den siste delen Sfard deler rutiner opp i. Rutiner som for barn verken er forklaringer eller gjerninger, kaller hun ritualer. Med det menes sekvenser av diskursive handlinger som har som hovedmål å skape og opprettholde et bånd med andre mennesker. Det kan for eksempel være at en elev gjør noe for å fange en annen elevs oppmerksomhet, eller bare for å gjøre likt som sin venn av den enkle grunn at de er venner (Sfard, 2008, s.241).



Figur 1 – Sfards fire kjennetegn på matematisk diskurs

2.2.2 Elevenes utvikling i den matematiske diskursen

Når elever er i prosessen der de forsøker å omsette et problem i den virkelige verden til matematisk språk kaller vi det å matematisere (TIMSS, 2003). I matematiseringsprosessen er elevene på konstant jakt etter matematiske objekter som er kjernen i aktiviteten de driver med. Elevene beveger seg fra den ene matematiske situasjonen til den andre i denne jakten på et matematisk objekt. Elevene har i denne prosessen bruk for den matematiske diskursen til å sette ord på det de matematiserer.

Utvikling av nøkkelord

En beskrivelse av hvordan elevene utvikler den matematiske diskursen sin er slik Sfard beskriver et barns vei til utvikling av nøkkelord. Den beskrives i en 4-stegs modell slik:

Figur 2 – Sfards fire steg til utvikling av nøkkelord

Når et barn først møter den matematiske diskursen, møter de den med andre menneskers bruk av nøkkelord og symboler knyttet til konkrete objekter. Selv om de kanskje ikke forstår med engang vil de ubevisst forsøke å koble sammen det nye ordet de lærer med kunnskap de har fra før, de bruker nøkkelordet *passivt*. Deretter vil barnet kunne repetere det ordet som ble brukt tidligere, i en situasjon som barnet oppfatter som lik eller liknende. (Sfard, 2008, s 177-178). Når barnet bruker enkelte nøkkelord i diskursen på tvers av situasjoner det oppfatter som likt, kan vi si at diskursen er *rutine-drevet*. Det neste utviklingssteget er når barnet knytter nøkkelordet opp til et bestemt uttrykk, ikke hele rutinen, og kan nå bruke ordet som et substantiv der det er behov for den spesifikke grammatikkategorien. Sfard kaller det for *uttrykks-drevet bruk,* og ordet er nå knyttet til et unikt erkjennelsestre. Det siste steget er når barnet bruker ordet transparent, altså uavhengig, av situasjon og uttrykk, og greier å knytte det til et matematisk objekt. Dette steget kaller Sfard for *objekt-drevet bruk*. Når ordet blir brukt vil det automatisk framkalle en erkjennelse, slik at det er erkjennelsen som får fokus framfor objektet i seg selv (Sfard, 2008, s. 181-182).

Erkjennelser

Matematikere og filosofer har i årevis strevd med å få grep om ideen om matematiske objekter, men det er vanskelig. Anna Sfard forsøker også å få grep på de matematiske objektene og velger å framstille dem som et system, et tre med grener, rundt et matematisk objekt. Hun sier treet er satt sammen av erkjennelser som alle mennesker oppdager ulikt (Sfard, 2008, s.164-165). En persons mulighet for å ta del i den matematiske diskursen og utvikle nye erkjennelser avhenger av personens evne til å strekke seg langt nok ut over det de har av kjente erfaringene og oppfatte det nye. Slik strekker elevene på en måte grenene i erkjennelsestreet over til nye erkjennelser og nye grener, og dermed også utvikler sin bruk av matematiske diskursen (Sfard, 2008, s. 166).

Endring av setninger

David Pimm er i utgangspunktet en teoretiker innenfor den konstruktivistiske tradisjonen, men skriver om barns bruk av språk i matematikkundervisning, og belyser et aspekt som er interessant i et sosiokulturelt perspektiv. Pimm kaster lys over hvordan elever stadig endrer setningene sine når de snakker. (Unge) elevers forklaringer er upolerte og uferdige. De er også fulle av snubling og nøling. Elevene trenger øving både i å snuble, rette opp og å prøve på nytt. Det er nødvendig at de øver seg på å lytte til andres snubling og forsøk på å forklare, lære seg å være aktive lyttere. Deretter bør elevene få øving i å rette opp egen og de andre elevenes snubling. Spisse forklaringer, gjøre forklaringene mer forståelige og mer presise (Pimm, 1987, s. 43).

Hvis man ser Pimms uttalelse om elevenes snubling i lys av paradokset om den matematiske diskursen Anna Sfards presenterer som sirkulær, vil man kunne si at dette kan være elevenes forsøk i å komme inn i den matematiske diskursens sirkulæritet. Pimm sier at mange formuleringer og revideringer av egne og andres formuleringer må legges til grunn for at en gruppe elever kan bli enige om en akseptert og stabil forklaring. At et forsøk på, eller en versjon av en forklaring blir stabil og får tillit hos en gruppe elever er ofte indikert av forklaringens evne til å bli repetert. I den sosiokulturelle tradisjonen mener man at øvingen, lyttingen og poleringen av forklaringer best læres i et samspill med andre. Pimm sier elevene må bli enige om en akseptert forklaring og dialog vil da være viktig (Pimm, 1987, s 23).

2.2.3 Andre menneskers rolle i elevers deltakelse av matematisk diskurs

Det er mange faktorer som kan virke inn på elevers bruk av språk som dagsform, plassering i klasserom, gruppestørrelse og så videre. Et par av disse faktorene omhandler de andre menneskene i rommet der elevene deltar i en matematisk diskurs, da diskursen ofte forekommer i samtale med andre elever og voksne. På den måten vil elevenes valg av ord og setninger være avhengig av dem de er i samtale med.

De andre elevenes rolle.

Slik Sfard (2008) understreker i sin inndeling av rutiner (se kapittel 2.2.1 Rutiner), så vil elever utføre rutiner som ritualer for å skape og opprettholde et bånd til andre mennesker. Det kan være både voksne og andre elever. Elevenes hovedmål kan være at de er ute etter oppmerksomhet og annerkjennelse fra de andre. Aktiviteten blir derfor en miljøbyggende aktivitet, der elevene er opptatt av hva de andre gjør eller sier. I aktivitet der det handler om å velge, kan elevene gjerne velge samme løsning som kameraten sin, fordi det er noe man gjør sammen og fordi det er akkurat den kameraten. Ritualer blir også utført eksakt slik medelevene gjør, med medelevenes regler. Riktig løsning er ikke viktig, her handler det om å prestere framfor å vite (Sfard, 2008, s. 241-244). Sfard mener at slike sosiale ritualer er en av de stegene elevene når på veien til å uttrykke forklaringer. Ved å delta i ritualene utvikler de også mulighet for å uttrykke forklaringer (Sfard, 2008, s 223). I denne studien settes det fokus på de yngste elevene, de som holder på å lære seg den matematiske diskursen. Det vil være interessant å se om elevene har nådd dette stadiet, eller om de i stedet for å utføre ritualer, ikke blir like påvirket av medelevene sine og derfor benytter seg av forklaringer.

Lærerens rolle

Pimm (1987) sier at lærere er gode på å forklare og å bruke den matematiske diskursen, og de har lang erfaring med det. Elevene har liten eller ingen erfaring og trenger å øve seg. Da blir det lærerens jobb å legge til rette for det i undervisningen. Elevene trenger også å øve seg på å lytte, for å kunne bearbeide og polere på forklaringer de skal uttale. Lærerens jobb blir da å modellere hva en god lytter er. Ved å modellere hva en god lytter er, får elevene større plass i samtalen. Hvis en lærer lar elevene selv ta større ansvar for samtalen, vil han kunne øke deres muntlige ferdighet (Pimm, 1987, s. 43-49). Om elevene får mer tid til å prate matematikk vil de ha mer bruk for den matematiske diskursen, og dermed også spesialbegrep, hverdagsbegrep og nøkkelord. Hvis læreren ønsker at elevene skal ta i bruk et spesifikt begrep må dette igjennom samtale introduseres for elevene av læreren (Pimm, 1987, s. 60-61).

3 Metode

Ordet metode kommer av det greske ordet «methodos», som betyr en vei å følge. Å velge seg en metode vil derfor handle om å velge seg en vei for å gå inn i forskningen, hvilke veivalg skal man ta og hvilke steg skal man følge (Jordheim, Rønning, Sandmo, & Skoie, 2008, s. 223). Det er vanskelig å rendyrke en metode, og lettere og bruke elementer fra ulike metoder inn i sin forskning. Jeg vil derfor her gjøre rede for hvilke elementer og hvilken vei denne oppgaven har tatt inn i forskningen.

3.1 Kvalitativ metode

I dette prosjektet undersøker jeg elevenes språk i min egen undervisning, nærmere bestemt som samtaler om generalisert aritmetikk. Jeg har valgt å ta ut en gruppe på åtte elever og prosjektet ser på to undervisningsøkter, hvor den andre bygger på den første. Jeg undersøker elevenes språk i undervisningen og jeg analyserer detaljene i samtalen. Undersøkelsen vil derfor naturlig falle inn under kvalitativ forskning. Å forske kvalitativt vil si å sette fokus på å forstå deltakernes perspektiv, og å forske på hverdagshandlinger der handlingen skjer, i sin naturlige kontekst (Postholm, 2005, s. 17). Jeg hadde ingen plan om hvilke spørsmål jeg skulle stille underveis i samtalen. Jeg hadde bare aritmetikkoppgavene og et ønske om at elevene skulle se noe i oppgavene som gjorde at de kunne si at dette gjaldt for alle tall, altså generalisere. Jeg tok tak i elevenes utsagn, og stilte, så langt jeg fikk til, åpne spørsmål. I tillegg ble jeg nødt til å justere oppgavene litt underveis, som følge av elevenes utsagn. Kvalitativ forskning gir en mulighet til å spørre åpne spørsmål, noe som gjør at deltakerne kan svare mer utfyllende og med egne ord. Spørsmålene forskeren stiller kan også være ulike fra deltaker til deltaker. Dette er noen av justeringene jeg som forsker kan legge inn, og som er med på å gjøre den kvalitative forskningen fleksibel i sin form (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 17).

3.2 Utvalg av informanter

Som nevnt over foregikk selve undersøkelsene i egen undervisning av en gruppe på åtte elever. Undervisningen jeg undersøkte besto av to undervisningsøkter, der elevene var de samme i begge øktene. Jeg hadde undervist noen av elevene i ett og et halvt år, og noen av elevene i et halvt år. Elevene ble valgt ut på bakgrunn av min kjennskap til deres deltakelse i den tidligere matematikkundervisningen, samt tidligere gjennomført nasjonal kartleggingsprøve i matematikk. Gruppa bestod i elever med ansett ulikt kunnskapsnivå innenfor matematikk. Normalt er det elever med stor variasjon av kunnskapsnivå i en klasse, og jeg ønsket en gruppe elever som var representativ for en helt normal norsk 2.trinnsklasse. Det ønsket jeg for å få tak på en språklig situasjon mest mulig lik en situasjon en helt vanlig lærer kan møte i et helt vanlig klasserom. Det betyr at gruppa besto av et par elever som er ansett faglig svak i matematikk, et par elever som er ansett faglig sterk i matematikk, samt ulike nivå i mellom der. Jeg forsøkte å velge ut slik at det ble en jevn kombinasjon av ansett sterke, svake og middels elever, men alle åtte er elever som jeg vet at ikke er redd for å snakke matematikk. Grunnen til at jeg valgte de elevene som snakker matematatikk og bidrar i en samtale om matematikk er at jeg ønsket å undersøke språket og var avhengig av verbal kommunikasjon.

3.3 Gjennomføringen

Undersøkelsen besto i to undervisningsøkter. Innholdet i øktene besto i aritmetikk og samtale rundt en spesifikk sammenheng vi kan finne i aritmetikken. Elevene er 6-7 år, og har av den grunn ikke ubegrenset kapasitet på konsentrasjon. Det ble derfor lagt opp til 30 minutters økter. Jeg fulgte også med på barnas konsentrasjon, og avsluttet den ene økta 5 minutter tidligere enn planlagt. Da var elevene slitne og trengte pause. Den andre øktas innhold bygget på og videreførte innholdet i den første. Gruppeøktene ble gjennomført i et grupperom de fleste av barna er kjent med fra før. Barna satt rundt et stort bord, der jeg satt sammen med dem. Dette skulle være en samtale og å sitte i «ring» rundt et bord med ansiktet mot hverandre legger opp til å delta i en samtale. Jeg brukte noen ganger ei whiteboardtavle som hang i rommet, men mest ble det vi snakket om skrevet ned på et ark som lå midt på bordet, slik at alle kunne se, og alle kunne hente arket til seg og se på tallene. Midt på bordet lå også en lydopptaker, samt at i den andre økta sto det en boks med centikuber der, som barna kunne bruke til konkretisering om de ville. Denne boksen ble dessverre avglemt i den første økta, men ingen av elevene spurte etter noe å konkretisere med. De tok heller ikke initiativ til å bruke centikubene i den andre økta, selv om de sto på bordet og jeg eksplisitt fortalte at de sto der for å brukes om elevene ville. Elevene hadde også med seg rutebøkene sine, som vi brukte kun i den første økta. Da var tanken at de selv skulle finne regnestykker de mente passet inn, og skrive de ned i ruteboka si. Det viste seg å være vanskelig, og bøkene ble derfor ikke brukt slik i den andre økta. Kun en av elevene brukte boka for å få utløp for sitt behov for å regne ut svarene på oppgavene.

3.3.1 Generaliseringsoppgave

Oppgaven jeg brukte i undervisningsøkt nummer 1 var tenkt å ha til hensikt at elevene skal se noe generelt i det de jobber med. I boka *Elementary and Middle School Mathematics, Teaching Developmentally* kalles denne oppgaven for «one up and one down», og tar utgangspunkt i en dobling (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2014, s. 17).
Oppgaven ble presentert med de samme tallene som i boka, slik på tavla:

6+6	8+8
7+5	9+7

I tillegg fikk elevene spørsmål om de to regnestykkene som sto under hverandre hadde samme sum. Hensikten er at elevene skal se at hvis man går en opp, adderer en, på en side, og går en ned, subtraherer en, på den andre, vil vi kunne si at summen på regnestykkene er den samme, uten at vi må regne de ut. Det jeg ønsker at elevene skulle se, det matematiske objektet i samtalen, var $n + m = (n\text{-}1) + (m\text{+}1)$ (der m og n er naturlige tall). Det matematiske målet for økta velger jeg igjennom denne undersøkelsen å kalle det matematiske objektet, fordi det er det abstrakte objektet samtalen hele veien dreier seg om. Det er i denne undersøkelsen matematisk.

Det viste seg tidlig at disse tallene var så lave at det ble enklere for elevene å se hva summen var på de to regnestykkene, enn å lete etter en sammenheng. Elevene plukket også opp et mønster de har jobbet med tidligere, som de finner igjen i denne oppgaven. Det ledet elevene, i den første undervisningsøkta, inn på arbeid med mønster, framfor det tiltenkte matematiske objektet. For å holde på det matematiske objektet jeg hadde tenkt ble jeg derfor nødt å improvisere og å justere tallene. Fordi vi var i en undervisningssituasjon fikk jeg ingen anledning til å planlegge nye tall, og prøvde 15+15. Elevene fortsatte å regne ut, og jeg økte tallene til 68+68 over 67+69. Tallene ble nå så store at elevene ser på alternativer til å regne ut, og derfor ser de også på det som er det tiltenkte matematiske objektet. Diskusjonen kom nå ordentlig i gang. Lengre ut i diskusjonen jobbet vi på samme måte med regnestykkene

3252+3252 over 3253 + 3251. Elevene var nå med på å se på det matematiske objektet som jeg hadde tenkt.

Mellom undervisningsøktene fikk jeg anledning til å planlegge en utvidelse av diskusjonen vi hadde i den første økta over i den andre undervisningsøkta. Det gjorde jeg på denne måten: først tok jeg opp hva vi hadde jobbet med i den første økta, for så å gå bort i fra dobling som utgangspunkt. Jeg valgte å bruke ulike tall i regnestykkene, for å se om elevene så noe av de samme sammenhengene som de så i første økt. Regnestykkene vi diskuterte var:

38 + 17	63 + 19	3482 + 24
37+18	64 + 18	3481 + 25

For å ytterligere undersøke om elevene virkelig ser det som er generelt i disse regnestykkene utvidet jeg igjen, ved å prøve med å addere fem og subtrahere fem på hver side i regnestykket:

35 + 20
30 + 25.

Jeg hadde nå utvidet det matematiske objektet fra $n + m = (n-1) + (m+1)$ til å bli $n + m = (n-x) + (m+x)$. Tallene jeg nå hadde plukket ut var mer vennlige enn de tallene vi nettopp hadde jobbet med. Det vil si at det var tall med enere som det er lettere å jobbe med. Da jeg plukket ut tallene hadde jeg en tanke om at elevene lettere skulle se at det var fem opp og fem ned ved å velge 0 og 5 på enerplassen. Med de vennlige tallene i regnestykkene gikk elevene tilbake til å addere tallene, slik de gjorde helt i begynnelsen av første samtaleøkt. Jeg ble derfor nødt til å improvisere igjen, og justerer tallene til regnestykkene:

38+72
33 + 77

Regnestykkene blir kilde til ny diskusjon rundt riktig matematisk objekt $n + m = (n-x) + (m+x)$. Det siste regnestykket vi diskuterte var:

326851+ 309
326856 + 304.

Alle regnestykkene i begge øktene blir skrevet opp enten på whiteboardtavla eller på arket på bordet. De ble skrevet opp under hverandre for å framheve relasjonen mellom dem, og relasjonen mellom det som skjer på hver sin side av +tegnet. At jeg var nødt til å endre tallene underveis kan tyde på at elevene allerede hadde øvet noen strategier for hvordan de skulle addere. Strategiene ble enklere å bruke enn det å skulle tenke noe nytt rundt addisjonen. Jeg ble tvunget til å sette opp regnestykker som var så utfordrende at de gikk bort i fra de kjente strategiene sine.

3.4 Metode for datainnsamlingen

Denne undersøkelsen er som nevnt en kvalitativ undersøkelse. Observasjon er en kvalitativ metode der forskeren får direkte tilgang til det som skjer i situasjonen der og da, og han slipper å stole på informasjon han selv ikke har mottatt direkte (Cohen, Manion, & Morrison, 2011, s. 456).

3.4.1 Observasjon

Alle mennesker observerer hele tiden, men når en forsker skal observere har hun et spesifikt fokus som observeres. En forsker som skal gjøre en kvalitativ studie vil være opptatt av å observere aktiviteter i sin naturlige setting og må derfor vurdere sin egen rolle i observasjonen (Postholm, 2005, s. 55). Observasjon er en av de mest brukte metodene innenfor kvalitativ forskning. Hvis forskeren deltar på lik linje som deltakerne i forskningen gir observasjonen forskeren et særlig godt grunnlag til å forstå den sosiale settingen som deltakerne inngår i (Postholm, 2005; Thagaard, 2003, s. 56, 12). Jeg som forsker som observerer har med meg mange antagelser og teorier når jeg observerer. Underveis i observasjonen vil jeg utvide min kunnskap om teorien gjennom den kontinuerlige interaksjonen mellom den teorien jeg har lest og det jeg observerer. På den måten vil observasjonen, i tillegg til å belyse teorien, også kunne utvikle teorien. Det gir meg som forsker en unik forståelse for spesifikke deler av en stor og kompleks praksis (Postholm, 2005, s. 57). Jeg har brukt observasjon både i min erfaring som lærer før prosjektet og mer systematisk under prosjektets innsamling av empiri. Jeg har observert på forhånd igjennom observasjoner av elevene i undervisning, elevenes arbeidsbøker og kartleggingsprøver, og med bakgrunn i dette plukket ut de elevene jeg har hatt med i forskningen.

3.4.2 Deltakende observasjon

I undersøkelsen inntok jeg en rolle som deltakende observatør. Alle rollene en observatør innehar er en form for deltakende, fordi man som observatør vil være i rommet, og derfor innvirker på situasjonen. (Postholm, 2005, s. 64). I denne undersøkelsen er jeg læreren i rommet og eneste voksenperson. Jeg er i rollen som fullstendig deltakende observatør, og dermed også en del av det miljøet jeg selv forsker på. Det faller under kategorien «lærere som forsker i sitt eget eller hverandres klasserom» (Postholm, 2005, s. 66).

Som dokumentasjon av observasjonen har jeg brukt lydopptak, fordi jeg var deltakende i samtalen selv, og ville få med meg alt som ble sagt i observasjonssituasjonen. Det er ifølge Postholm (2005) et viktig verktøy for nettopp og senere kunne skrive ned det som ble sagt så nøyaktig som mulig (Postholm, 2005, s. 62). Jeg har også tatt et videoopptak på bakgrunn av at jeg i tidligere transkribering har erfaring med at det kan være vanskelig å skille stemmer fra hverandre. Videoen var derfor tenkt som hjelpemiddel for å skille stemmer. Observasjons-situasjonene ble i tillegg tegnet ned, organisering rundt bord og plassering, for å samle mest mulig informasjon om rommet og miljøet elevene var i. Feltnotater var for meg vanskelig å samle, fordi jeg selv var læreren i situasjonen, og det ville vært forstyrrende om jeg skulle notert i tillegg. Det ville også gjort til at situasjonen ville bli unaturlig og kunstig for elevene (Postholm, 2005, s. 66)

3.4.3 induktiv tilnærming

Når man observerer vil man oppleve at teori innenfor faget vil påvirke hvordan man observerer, samtidig som observasjonene vil påvirke teorien, det skjer en interaksjonsprosess mellom teori og empiri, som både er induktiv (fra empiri til teori) og deduktiv (fra teori til empiri). Postholm (2006) sier at på tross av dette vil en kvalitativ forsker alltid forsøke å være induktiv i sin tilnærming til forskningen. Teori, antakelser og erfaringer er alltid med og farger hvordan observatøren møter felten. Allikevel vil en observatør alltid være åpen for at fokus eller tema vil forandre seg etter hvert som man observerer, og dermed også det teoretiske grunnlaget man baserer forskningen sin på (Postholm, 2005, s. 57). I denne undersøkelsen har interaksjonen mellom teori og empiri vært ganske tydelig. Jeg var ute og samlet empiri, transkriberte og leste teori. Jeg så på empirien jeg samlet inn i den første samtaleøkta. Teorien jeg hadde lest og diskusjon med medstudenter om funnene mine etter den første undervisningsøkta fikk meg til å bli nysgjerrig på om jeg kunne utvide både matematikkoppgaven og elevenes tenking. Funnene og diskusjonene var årsaken til at jeg gjennomførte en undervisningsøkt nummer to med elevene. I økt to endret jeg det matematiske objektet og hadde som mål å utvide elevenes tenking. Fra å «gå en opp og en ned» på hver side av en dobling, til å gå bort i fra en dobling i første regnestykke. Og en videre utvidelse av å «gå fem opp og fem ned» på hver side. Detaljert forklaring rundt utvidelsen finnes i kapittel 3.3.1 Generaliseringsoppgave. Øktene ble gjennomført med en ukes mellomrom.

3.5 Analyse av datamateriell

I etterkant av empiriinnsamlingen fikk jeg transkribert ned begge samtalene i sin helhet. Jeg brukte kun lydopptaket, og fikk ikke bruk for filmen for å skille stemmer fra hverandre. Deretter gikk jeg inn i transkripsjonene og leste igjennom de flere ganger med problemstillingen min bakhodet. *Hva kjennetegner 6-7åringens språk i arbeid med generalisert aritmetikk*. Jeg identifiserte sekvenser av interesse i elevenes utsagn og analyserte hvert utsagn opp mot problemstillingen. Denne prosessen foregikk i flere ulike steg, og igjennom prosessen tolket jeg det elevene sa i samtalen og andre handlinger som skjer i undervisningsøkta. Slik fortolkning har en stor plass i kvalitativ forskning fordi målet med forskningen ofte er å oppnå en forståelse av sosiale fenomener (Thagaard, 2003, s. 11). Målet med denne undersøkelsen var å se på elevenes språk i samtale om matematikk. En slik samtale er et sosialt fenomen i seg selv.

Analysen av undersøkelsen foregikk som sagt i flere steg, altså gjennom en hel prosess. I første steg plukket jeg ut alle sekvenser som opplevdes som interessant for problemstillingen. I den første delen av analysen var det lett å finne mye som interesserte meg, og jeg opplevde det som vanskelig å holde meg til problemstillingen. Jeg måtte derfor gå grundig gjennom alle funnen mine og eliminere de som ikke kunne hjelpe meg å svare på problemstillingen min.

Det neste steget i analysen ble å forsøke og se hvordan funnene kunne kategoriseres. Det var funnene selv og problemstillingen min som avgjorde hvordan kategoriene ble. Jeg kategoriserte først funnene i to; funn som gikk på ord og setninger som elevene hadde uttrykt og funn som gikk på et mer overordnet nivå. Med et overordnet nivå menes her at jeg ser på språket som utvikler seg i samtalen, hvordan elevenes samtale beveger seg framover ved hjelp av erkjennelser, hvordan de som er tilstede påvirker hverandre og hvordan det utvikler språket til elevene. Det overordnede nivået ble naturlig å dele i tre kategorier. Det var igjen funnene sett opp mot problemstillingen som gav de tre kategoriene. Funnene ble derfor delt i kategorier slik:

1. Kjennetegn på elevenes diskurs, som er fokusert på det konkrete språket og på ord- og setningsnivå.
2. Kjennetegn på elevenes utvikling av diskurs, som er fokusert på hvordan elevenes samtale utvikler seg igjennom undervisningsøktene og derfor er på et mer overordnet nivå.

Tre underkategorier til hovedkategori to:

- Utvikling av nøkkelord
- Erkjennelser
- Påvirkning av andre tilstede

Jeg satt fortsatt med mange eksempler på hver av kategoriene mine. En nedskaleringsprosess måtte derfor til. Jeg plukket ut de funnene som jeg opplevde som et tydelig svar på problemstillingen min, og kun et eksempel av hvert funn. Denne delen av analysen opplevdes også som vanskelig, fordi man ønsker å fortelle så mye. Ved å være streng på hvilke eksempel jeg beholdt får jeg vært mer presis i det jeg sier om kjennetegn på elevenes språk. For å gjøre utvalget leste jeg funnene om igjen og om igjen med problemstillingen min fysisk ved siden av meg.

Siste steg av analysen min besto i å begynne og skrive om alle eksemplene og funnene. I denne delen av prosessen smeltet mine funn sammen med den teorien jeg hadde med meg inn i begynnelsen på analysedelen. Slik Postholm (2005) beskriver at en interaksjonsprosess mellom teori og empiri skjer i observasjon, at observatør blir påvirket både induktivt og deduktivt av teorien når den observerer. Jeg opplevde at interaksjonsprosessen mellom teori og empiri fortsatte inn i analysearbeidet mitt, også etter at selve observasjonen var over (Postholm, 2005, s. 57).

3.6 Metodekritikk og etiske betraktninger

En kvalitativ undersøkelse med deltakende observasjon som metode kan ha en del kritiske punkter. Blant annet den tradisjonelle måten forskningsteorien ser på reliabilitet i en slik undersøkelse. Reliabilitet har tradisjonelt som kriterium at det forskeren gjør skal kunne reproduseres og gjentas, det legger også vekt på det objektive i funnene. Dette kan være problematisk i denne typen undersøkelse fordi man ser på det som skjer der og da, og sjelden vil akkurat det samme skje to ganger. Spesielt hvis man har ulike mennesker med i undersøkelsene. I tillegg vil funnene alltid påvirkes av hvem som observerer. I denne undersøkelsen hadde ikke jeg med meg noen intervjuguide eller liste med spørsmål som jeg hadde tenkt ut på forhånd. Jeg tok tak i det elevene sa og drev samtalen framover igjennom det de sa. Min bakgrunn og min kunnskap påvirket hvordan jeg stilte spørsmål og min kjennskap til elevene påvirker hvordan de responderte (Postholm, 2005, s. 169-170). På en annen side har jeg fått fram noe helt annet i en slik kvalitativ samtale enn jeg ville fått fram om jeg hadde med meg et sett med forhåndsbestemte spørsmål, som ikke har tatt hensyn til elevenes utsagn.

3.6.1 Egne elever

Denne undersøkelsens tema; samtale innenfor generalisert aritmetikk, legger noen føringer for gjennomføring av undersøkelsen og valg av metoder. Et valg jeg i midlertid har tatt selv er at jeg har forsket på mine egne elever. Jeg kjenner elevene og kjenner meg trygg i klasserommet sammen dem. Undersøkelsen ble derfor trygg for meg, og det ble viktig å også gjøre elevene og foreldrene trygge i situasjonen. I forkant av undersøkelsen klargjorde jeg med elevene og foreldrene hvilken dobbeltrolle jeg spilte. Til foreldrene ble dette gjort gjennom god informasjon til hjemmet med ønske om skriftlig tillatelse til deltakelse. Til barna ble rollen min avklart gjennom egen tilpasset samtale med elevene om hva de var med på. Der kunne elevene stille alle de spørsmålene de hadde samt at de fikk lov til å bestemme om de ville være med på samtalen. Det resulterte i at en elev trakk seg, og ville ikke være med.
Jeg har selv vært bevisst på min egen rolle igjennom alle delene av prosjektet, både i arbeidet med å plukke ut elever, i selve observasjonen og gjennom analysearbeidet etterpå. Min bevissthet er noe som Postholm (2005) peker på at er med på å informere andre impliserte parter om forskningsarbeidet. Jeg ville ha muligheten til selv å forsøke å lede samtalen inn på det matematiske målet for oppgaven som var tiltenkt undersøkelsen og jeg ønsket å dra nytte av den kunnskapen jeg selv har tilegnet meg som matematikklærer og igjennom masterstudiet. Ved å være så involvert selv fikk jeg en mulighet til selv å justere praksisen i forskningsarbeidet, altså språket som ble snakket og spørsmålene som ble stilt, underveis i observasjonen. Egen påvirkning var med på å avgjøre mitt valg om å være den deltakende observatøren som ser på egne elever (Postholm, 2005, s. 67).

3.6.2 Lydopptak og videoopptak

I enhver situasjon som skal dokumenteres med video – og/eller lydopptak vil noen kunne synes det er ubehagelig. Elevene i dette prosjektet fikk lov til å se på, ta på og undersøke både videokamera og lydopptaker før jeg startet selve opptaket, som et ledd i å ufarliggjøre opptakene. De fikk også høre og se på seg selv etterpå. I dette tilfelle var det ingen av elevene som uttrykte at de synes det var ekkelt eller ubehagelig, de uttrykte heller entusiasme over å høre sin egen stemme og se seg selv på den lille skjermen på videokameraet. Ut i fra transkripsjonene kan det virke som at de glemte at det ble gjort opptak underveis i samtalen.

4 Presentasjon av funn

I det følgende kapittelet vil jeg presentere de funnene jeg har gjort igjennom analyseprosessen i undersøkelsen. Undersøkelsen besto i to undervisningsøkter med matematikksamtaler og det er transkripsjoner fra samtale som er materiale jeg har hentet funnene fra. Jeg har valgt å dele funnene inn i to hovedkategorier;

1. Kjennetegn på elevenes diskurs, som er fokusert på det konkrete språket og på ord- og setningsnivå.
2. Kjennetegn på elevenes utvikling av diskurs, som er fokusert på hvordan elevenes samtale utvikler seg igjennom undervisningsøktene og derfor er på et mer overordnet nivå.

Funnene gjort under hovedkategori to har jeg igjen delt opp i tre underkategorier.

- Utvikling av nøkkelord
- Erkjennelser
- Påvirkning av andre tilstede

Jeg har delt de opp slik fordi jeg gjennom undersøkelsen fant gjentakende utsagn og sekvenser av samtalen innenfor de tre kategoriene.
Oppgavene elevene jobber med står detaljert beskrevet i kapittel 3.3.1 Generaliseringsoppgave.

4.1 Kjennetegn på elevenes diskurs

Når jeg skulle se på hva som kjennetegnet elevenes diskurs i en matematikksamtale valgte jeg å bruke Anna Sfards (2008) definerte kjennetegn på en matematisk diskurs som grunnlag for analysen (beskrevet i detalj i kapittel 2.2). Sfard peker på at det er fire kjennetegn på at en samtale kan ansees som en matematisk diskurs;

- nøkkelord
- visuelle mediatorer
- narrativer
- rutiner

I undervisningen jeg gjennomførte med 6-7 åringene i denne undersøkelsen fant jeg igjen alle de fire kjennetegnene i samtalene mellom elevene, og lærer og elevene.

Eksempel 1 - Nøkkelord som endrer retning i samtalen

Dette eksempelet er av interesse fordi det viser at et nøkkelord kan endre hele retningen på undervisninger. Oppgavene som er presentert på tavla i situasjonen er 6 + 6, 5 + 7, og 8 + 8. De står under hverandre, og eleven skal finne ut hvilket regnestykke som skal stå under 8 + 8 for at summen skal være lik med 8 + 8. For å finne ut av det har læreren bedt elevene se på regnestykkene 6 + 6 over 5 + 7. Noen av elevene velger til å begynne med å legge sammen regnestykkene hver for seg, og ser på andre relasjoner mellom tallene enn det som lærer har som mål i denne oppgaven. De tar i bruk tier-venner og de fyller opp tiere slik de har gjort tidligere i skoleåret. Marit utrykker derimot at hun ser en relasjon mellom regnestykkene som de andre ennå ikke har sett, og bruker ordet *mønster,* om den sammenhengen hun setter tallene. Ordet mønster gir Marit mulighet til å si noe om hvordan hun ser på tallene.

6 + 6 5 + 7	8 + 8

Eksempel 1 – uttalelse nr. 24-26.

Regnestykkene 6+6 og 5+7 står under hverandre på tavla. Læreren og elevene snakker om hvordan de har kommet fram til at de to regnestykkene er 12. Elevene hadde gjort 6+6 til et tallfakta, noe de vet og kjenner til fra før. Et par elever har allerede fortalt om hvordan de har delt opp tallene og fylte opp tieren for å finne 5+7. (5+5) +2 og 2+(3+7). En annen elev får en annen ide:

24 Marit: Jeg har en annen!

25 Lærer: Ja, Marit?

26 Marit: Jeg så at det ble 12 der *(peker på 6+6)*, det er et mønster, for det blir 12 og det der blir 12.

Når Marit bruker ordet *mønster* og sier at både 6 + 6 og 5 + 7 er 12, henger de andre elevene seg på og sammen forsøker de å finne ut hvilket regnestykke som skal stå under 8 + 8, for at det skal passe inn i mønsteret. Marit sin oppdagelse av dette mønsteret endrer retningen i samtalen fra å handle om å regne sum til å gjenkjenne et mønster.

Eksempel 2 - Nøkkelord, gjerninger og narrativ

Gjennom samtalene opplevde jeg at elevene brukte mange ulike ord og setninger som likner hverandre for å forklare det samme. I dette eksempelet har jeg plukket ut utsagn som gjennom den første samtalen er ulike elevers forsøk på å utrykke den sammenhengen de ser mellom tallene på hver side av +. Jeg har skilt ut verbene i disse utsagnene fordi det igjennom undersøkelsen stort sett var verb elevene brukte for å beskrive relasjonene de så. De uttrykte at de gjorde noe fysisk med tallene for å finne ut hvilke nye tall de skulle bruke for å beholde summen på regnestykket.

Eksempel 2			
Nr	Utsagn	Verb	Elev
45	«…på den rekka er det nedover, og på den rekka er det oppover».	Er	Jan
77	«…så kommer det oppover på høyresida, og nedover på venstre»	Kommer	Jan
98	«Her skal jeg gå ned, og her skal jeg gå opp»	Gå	Kari
121	«Så tok vi bort en fra 8'ern. Da ble det 7 på den ene….».	Tok bort, ble	Eva
165	«Du overførte en ener til den andre og da blir det en mer og en mindre der».	Overførte	Jan

Utsagnene er eksempel på hvordan elevene bruker variasjoner av nøkkelord med samme betydning, som *er det nedover / er det* oppover, gå *ned / gå opp* og *blir det mer og mindre.* I tillegg er utsagnene øvingshandlinger for å få til gode forklaringer, i denne undersøkelsen kalt gjerninger. De også kan sees på som narrativer; sekvenser av ytringer som beskriver relasjoner mellom objekter (Sfard, 2008, s. 134). Utsagnene i eksemplet er derfor representasjoner av ulike kjennetegn fra undervisningsøktene.

Eksempel 3 - et eksempel med en sekvens med mange kjennetegn

Da første samtaleøkt gikk mot slutten var elevene godt inne i en prosess der de øvde på forklaringer, og det ser ut til at de søkte noe som fellesskapet kunne godkjenne som sant, en godkjent *narrativ* om relasjonen mellom regnestykkene. I eksempel 3 nedenfor, som er hentet fra de siste minuttene av den første samtaleøkta, ser jeg at flere av elevene leter litt etter ordene for å komme fram til noe de kan si er sant. Sekvensen inneholder flere av de kjennetegnene jeg fant i samtalene. Fordi eksempelet inneholder en lang sekvens av utsagn, har jeg delt det opp for å kunne kommentere underveis, akkurat der de ulike kjennetegnene i elevenes diskurs vises.

Eksempel 3 Utsagn 182 – 202

182 Anna: Det kommer alltid til å være det samme.

183 Lærer: Fordi?

184 Anna: Fordi det blir det samme bare at man setter andre tall… bak eh.. bak tier… bak tierne, det kommer alltid til å bli det samme uansett.

Anna nøler og bruker ulike *nøkkelord* (tall, tiere) før hun finner det som passer. *Det samme* er også et nøkkelord her, fordi elevene skal se på hva som skjer på hver side av + tegnet.

185 Lærer: Kan jeg bytte ut med hvilke som helst tall?

186 Jan: Ja.

187 Lærer: Kan jeg skrive 68 + 68 er det samme som 63 + 62? *(skriver 68 + 68 = 63+ 62 på tavla).*

188 Jan: Nei, du må ta hele tiden… sånn som… Kan jeg komme opp…?

189 Lærer: Du kan komme og tegne. Jeg kan viske ut nederst her.

190 Jan: For det skal bli 63, og så har du…. det… og så har du 62 + 1, og så hvis du tar 61 + 2, så er det motsatt. *(skriver 62+1 og 61+2 på tavla).*

191 Lærer: Ja, okei… så lenge… Hva er det med enerne vi må passe på da?

192 Lars: At det blir like…. *(Samtidig som lærer prater).*

Jan leter også etter ordene og spør om å få tegne, men velger å fortsette og bruke ord samtidig som han skriver på tavla. Fordi Jan spør om å få komme opp til tavla kan jeg anta at han har behov for å bruke *de visuelle mediatorene* sifrene og plusstegnet, samtidig som han fortsetter å bruke språket sitt. Hendelsen knytter gjør de visuelle mediatorene synlig i språket til Jan, han sier «61 + 2» og «62 + 1».

193 Lærer: Hva er det som blir feil med de enerne her *(setter strek under 63 + 62).* Lars?

194 Lars: At det er for lite!

195 Lærer: Det er for lite, ja!

196 Flere: Ja!

197 Lærer: Hva er det vi må passe på da, når vi putter enerne bakom. Anna?

198 Anna: At det skal være høyere tall enn eh… enn sånne som eh.. som det der. Ett høyt og ett mindre hvis det skal bli det samme.
199 Lærer: Hvis du går en ned på den ene siden så…
200 Anna: så må man ha ett høyere på andre siden...
201 Lærer: Okei.
202 Anna: ... for at det skal bli det samme.

I utsagn 198, 200 og 202 utrykker Anna at det må gå opp på den ene siden og ned på den andre siden, for at summen skal bli den samme. Det er noe elevene ser ut til å være enige om. På veien til dette utsagnet har hun fått hjelp av både Jan og Lars, som har kommet med ulike *gjerninger* med narrativer. Jan forklarer i utsagn 190 hva som er blitt feil, at det ikke stemmer med antall enere. Deretter påpeker Lars i utsagn 192 og 194 at de må bruke likt antall enere og at vi i denne situasjonen mangler noe. Ved hjelp av læreren er det Anna som tilslutt får formulert at hvis man går ned på den ene siden av +, må man gå opp på den andre siden for å få samme sum.

Eksempel 4 - Elev bruker forrige økts godkjente narrativ

Dette eksemplet er hentet fra helt i begynnelsen på andre undervisningsøkt. Læreren og elevene snakker om hva de gjorde i sist økt, noen av elevene husker endel, de tar med engang i bruk setningen «gikk oppover og nedover». Læreren presenterer nå nye tall. Ulikt fra første økt er at tallene på hver side av + nå er ulike. Dette er en motsetning til den første økta der alle regnestykkene tok utgangspunkt i dobling (6+6, 8+8 osv.). Først skrev læreren opp 38 + 17, og spør om de sammen kan finne ut hvilket regnestykke vi kan sette under for at begge regnestykkene skal ha lik sum.

Eksempel 4 - utsagn 292- 295
292 Lærer: Nei, noen skjønte noe. Lars? Prøv..
293 Lars: 18 + 37.
294 Lærer: Ja, hva gjør du da Lars?
295 Lars: Går nedover, og tar ett hakk høyere, og ett hakk nedover.

Lars er raskt ute i samtalen med å bruke en variasjon av nøkkelord fra den første økta, *ett hakk høyere* og *ett hakk nedover*. Nøkkelordene er en del av en narrativ, som likner den narrativen som Anna kom med i eksempel 3, «hvis du går ned på den ene siden så må man gå opp på den andre siden».

Eksempel 5 - Nøkkelord brukt i sammenheng med hverandre.

I dette eksempelet uttrykker Jan at han ser hvordan det som skjer på den ene siden av + påvirker det som skjer på den andre siden av +. Oppgaven på tavla er 38 + 17, og utsagnet til Jan kommer som et tilsvar på at lærer spør han hvorfor han mener det skal stå 37 + 18 under, for at regnestykkene skal ha samme sum.

Eksempel 5 Utsagn 322 – 326
Utsagn 322 – 328
322 Jan: Da liksom.. Den du tar nedover…
323 Lærer: Den jeg tar nedover her? *(Peker på 38 og 37)*.
324 Jan: Hæ?
325 Lærer: Den jeg har tatt nedover her, her fra 38 til 37? *(Peker igjen)*.
326 Jan: Ja, for da liksom gir du, den 38eren en til, til 17, at det blir en mer der og en mindre der.
4

Ved at Jan sier «Ja for da liksom gir den 38eren en til, til 17, at det blir en mer der og en mindre der» uttrykker Jan at han ser sammenhengen mellom de to sidene tydelig, og gjør dette synlig for resten av gruppa. Sammenhengen blir vektlagt av de andre elevene og læreren utover samtalen.

Eksempel 6 – påvirkning av den visuelle mediatoren +.

Eksempelet består av to sekvenser av utsagn som dukker opp i hver sin samtaleøkt. Det er samme elev som står sentralt i begge sekvensene, og eleven ytret ved flere anledninger at han ønsker å regne ut de ulike regnestykkene samtalen inneholdt.

Eksempel 6 - to sekvenser
209 Lærer: Ja! Så hvis jeg skriver 3252 + 3252 *(skriver det på tavla)* jeg har ikke tenkt å regne det ut, jeg aner ikke hva det er.

210 Jan: Jeg kan regne det ut superfort.
211 Lærer: Ja, men… Hvis jeg da.. Hva er det jeg kan gjøre da? Hvordan kan jeg forandre på dette her? Hjelp meg? Anna?
----
562 Lærer: Får man samme svar på de her to stykkene?
563 Flere: Ja.
564 Jan: det er 110 tilsammen.
565 Lærer: Ja, men ikke regn det sammen. Hvis du regner det sammen, så bare skriv det ned, det er greit. Men jeg vil vite hvorfor. Hvorfor får vi samme svar? Hvordan kan vi se det uten å regne det sammen?
566 Lars: Fordi tierne…..

Jan adderer alle regnestykkene igjennom begge undervisningsøktene, enten i hodet eller på ark. Dette kom til syne for elevene igjennom små utsagn som i eksemplet over. Plusstegnet er med i begge undervisningsøktene og kan oppfattes som et signal på at man skal addere. Det kan vise hvor sterkt +tegnets betydning er for elevene, og her for Jan spesielt.

Eksempel 7 - Godkjent narrativ i økt to som likner godkjent narrativ i økt én.

Regnestykkene i undervisningsøkt en og to var ulike. I økt én var det samme tall på hver side av +-tegnet, og kun én ener som skilte de to tallene når jeg lagde regnestykker som skulle ha samme sum. I den andre undervisningsøkta var det ulike tall på hver sin side av +-tegnet. I eksemplet under er vi kommet til andre undervisningsøkt, og regnestykkene vi jobber med er 63 + 19 og 64 + 18. Tallene på hver side av + er nå ulike. Elevene var oppstemte, og svarte flere ganger spontant i kor. Læreren oppfatter elevene som enige når de svarer i kor. I eksemplet kan vi se en narrativ som flere av elevene er deltakende i å presentere; hvis vi går opp på den ene siden av + må vi gå ned på den andre siden av + for at regnestykket skal ha samme sum.

Eksempel 7 – utsagn 462-480
462 Lærer: Kan vi gjøre det, og få samme svar?
463 Mange: Ja!
464 Lars: Ja, du får fortsatt samme svar!

465 Marit: Ja!

466 Lærer: Hva gjorde vi annerledes her enn her *(peker på stykket fra starten 38 + 17 og 37 + 18, og det siste som er skrevet opp).*

467 Marit: Vi gikk ned og opp.

468 Lærer: Her gikk vi ned, på denne side. Nå satte jeg minusen på feil side. *(skriver -1 ved 18).*

469 Lars: her gikk vi opp og der gikk vi ned.

470 Lærer: Og her gikk vi opp, med pluss 1. *(skriver +1 ved 64)*

471 Jan: Ja.

472 Lærer: Mens her gikk vi opp på den sida...

473 Eva: og ned på andre sida.

474 Lærer: .. og ned på andre sida. Kan vi gjøre det?

475 Mange: Ja!

476 Lærer: Spiller det noen rolle egentlig?

477 Mange: nei.

478 Eva: Jo egentlig.

479 Lærer: Så lenge man passer på at det blir en av hver.

480 Eva: så lenge man ikke tar to oppover.

Det er ikke en elev som kommer med dette narrativen, men flere elever i godt samarbeid med læreren som spør kontrollspørsmål underveis. De mange brudstykkene av utsagn blir tilslutt en narrativ; «Vi gikk opp på en side og ned på den andre, så lenge man passer på at det blir en av hver» (en opp og en ned).

4.2 Kjennetegn på elevenes utvikling av diskurs

I dette delkapittelet skal jeg se på elevenes utvikling i språket underveis i undersøkelsen. Elevenes utvikling fra begynnelsen av første undervisningsøkt til slutten av andre undervisningsøkt opplevdes som stor for meg som var med i undervisningen. Det ble derfor interessant å se på hva som kjennetegnet denne utviklingen. Som analyseverktøy brukte jeg Sfards (2008) fire steg til utvikling av nøkkelord. I analyseprosessen fant jeg i tillegg til utvikling av nøkkelord andre utsagn som så ut til å være gjentagende, og har kategorisert dette i erkjennelser og påvirkning av andre.

4.2.1 Utvikling av nøkkelord

Knytte ny situasjon til tidligere erfaring

Tidlig i første undervisningsøkt dukker det første nøkkelordet opp, nemlig *mønster.* Eksempel 1 (side 28) i viser situasjonen der Marit er den første av elevene som går bort fra å addere regnestykkene til å se på relasjonene mellom tallene som et mønster. Dette endre retningen samtalen hittil har hatt. Fordi Marit uttrykker at hun ser et mønster, viser hun at hun har erfaring med ordet mønster fra før og vet hva det er. Hun knytter noe nytt til noe hun vet fra før. I tillegg oppfatter Marit her situasjonen med tallene som står i mønster lik som noe hun har sett før, fordi hun bruker et ord som viser en sammenheng som elevene ikke hittil ikke har vært i nærheten av å uttrykke at de ser.

Eksempel 8 – Lærer hjelper elev å knytte ny situasjon til tidligere erfaring

Litt ut i den første samtalen dukker det opp en sekvens der noe som likner på situasjonen i eksempel 1, men som likevel har en annen dimensjon. I dette eksempelet er læreren med på å påvirke bruken av nøkkelord. Nøkkelordet er her dobling, og elevene holder fortsatt på med den første oppgaven; hvilket regnestykke som skal stå under 8 + 8 for at det skal ha samme sum. Anne har begynt med helt annen type dobling, og kommet til 128. Hun bruker nøkkelordet *dobling*, og Eva husker ikke helt hva dobling er.

Eksempel 8 – Utsagn 62 – 68 62 Anne: Jeg skal plusse til 128, det greier jeg. 63 Lærer: Jaha? Okei? Åja, du dobler helt til 128? 64 Anne: Ja! 65 Lærer: Aha, ja, men finner dere flere tall, hvor man har først doblet, og så gjør noen annet? Som er likt som det her *(peker på tavla)*. 66 Eva: Jeg vet ikke hva dobling er. 67 Lærer: Her dobler du vet du Eva, det samme engang til. 68 E: Åja!

Sekvensen viser at det er læreren som plukker opp nøkkelordet *dobling*. Fordi Eva ikke husker helt hva dobling er, får hun hjelp av lærer til å knytte ordet til det de holder på med.

Fordi jeg som lærer i denne situasjonen har hatt elevene tidligere, vet jeg at vi har holdt på med dobling før, og kan lett koble Eva på strategien ved å bruke utsagnet; *det samme engang til,* som vi har brukt i tidligere undervisning.

Nøkkelord brukt på tvers av situasjoner som oppfattes som like

Eksempel to, tabellen som er presentert på side 29, er en rekke av utsagn som viser hvordan elevene brukte nøkkelordene i undervisningsøkt én. Utsagnene er hentet fra ulike deler av den første samtalen, altså deler som inneholder samtale omkring ulike regnestykker. De tar med seg de samme nøkkelordene, variasjoner rundt *gå opp/ gå ned* fra regnestykke til regnestykke og har derfor oppfattet de ulike regnesituasjonene som like.

Eksempel 9 – Nøkkelord brukt i situasjon med større endring, som oppfattes som lik

I den andre samtaleøkta fortsetter elevene å bruke ulike varianter av nøkkelordene «en opp og en ned». De har tatt med seg nøkkelordene fra den første samtalen, der det matematiske objektet var $n + m = (n-1) + (m+1)$, det n og m er naturlige tall, over i samtale nummer to, der det matematiske objektet er endret til $n + m = (n-x) + (m+x)$, der x er ett naturlig tall. I første økt var situasjonen slik at regnestykkene som ble presentert besto i en dobling i første regnestykke (6 + 6, 68 + 68), og lærer hadde gått en opp og en ned i det neste regnestykket (5 + 7, 67 og 69). I eksempelet vi nå skal se på arbeider elevene med regnestykkene 36 + 72 og 31 + 77 satt opp under hverandre. Regnestykkene har ikke to like tall som i det første regnestykket og i tillegg har lærer valgt å gå 5 opp og 5 ned på hver side av +, et mye større hopp enn tidligere brukt. Elevene tar allikevel med seg nøkkelordene over til den nye situasjonen.

Eksempel 9 – utsagn 614 – 634
614 Berit: Ja! Jeg ser noe! Jeg ser noe!
615 Lærer: Berit ser noe. Hva ser Berit?
616 Berit: Eh.. Nei, det kom bort. Det bare så noe slik ut.
617 Lærer: Du skal få fortelle den strategien etterpå Jan, men jeg kommer til å spørre deg om det, okei? *(Henvendt til Jan som vil addere)*. Lars?
618 Lars: Det går lavere og høyere.
619 Lærer: Det er noe med lavere og høyere. Opp og ned. Marit?
620 Berit: Nå ser jeg noe igjen. *(samtidig som Berit)*

621 Marit: 36 og så… Så går vi ned til 31.
622 Lærer: Hvor mange har vi gått den da da?
623 Marit: Vi har gått ned 5.
624 Lærer: vi har gått ned 5. *(skriver pil ned og -5 ved 36 og 31)*. Enn på andre sida?
625 Berit: Maren, jeg ser noe…*(samtidig)*
626 Marit: Og så opp har vi gått… nei vent litt… vi har gått ned…
627 Ole: Vi har gått OPP.
628 Marit; Vi starter oppå der på 27.
629 Lærer: 72?
630 Marit: 72, og så går vi ned til… nei så… vi går oppover.
631 Lars: 5 mere, 5 mere, 5 mere *(samtidig som alle som snakker)*.
632 Lærer: Hvor mange da? 72..
633 Lars: pluss 5.
634 Marit: pluss 5.

På tross av endringene, to ulike tall på hver side av + og fem mer/fem mindre i stedet for en mer/en mindre, oppfatter elevene at situasjonen likner på situasjonene de har diskutert i første undervisningsøkt. Elevene fortsetter å bruke ulike varianter av «å gå opp og å gå ned» om det som skjer med tallene i de to ulike regnestykkene. Og Marit setter ord på at en av endringene er at man har gått 5 ned fra 36 til 31, et større hopp enn elevene har møtt hittil.

Eksempel 10 - Nøkkelord brukt for å uttrykke å se noe generelt

Helt sist i undervisningøkt to finner vi situasjonen i eksempel 10, et eksempel på at elevene ser noe generelt i regnestykkene. Lærer forsøker å veilede elevene til å uttrykke om relasjonene de har sett igjennom de to undervisningsøktene er noe de kan uttrykke generelt. Altså at tallene på hver side av + alltid vil påvirke hverandre ved hvor mange enere vi flytter over på motsatt side av +. Elevene er vant med at klassen, sammen, lager matematiske setninger som læreren skriver opp og henger på veggen i klasserommet etter slike samtaleøkter. Lærer spør derfor etter en slik setning de kunne hengt på veggen. Berit henger seg på lærerens oppfordring, og ved hjelp av kontrollspørsmål fra lærer uttrykker hun noe generelt om innholdet i samtalene elevene og lærer har hatt sammen.

Eksempel 10– utsagn 719-721

718 Lærer: Fin konklusjon. Konklusjon, husker dere hva det var? Eller regel. Kan vi si en regel da? En slik setning vi kunne hengt på veggen? Om dette her.

719 Berit: Det må være det samme på begge sidene.

720 Lærer: Er det helt sant? Hvis vi gjør det samme på begge sidene så går man jo opp på begge sidene eller ned på begge sidene.

721 Berit: Jeg mente sånn samme tallet da, samme tallet. Opp og ned da.

Ved å si at det å gå opp og ned samme antall på begge sider av + for å beholde samme sum, gjelder for alle tall, viser Berit at hun ser det generelle i situasjonen. Hun beholder nøkkelordene *det samme på begge sider, samme tallet* og *opp og ned.* Nøkkelordene er med Berit over i utsagnene om det generelle.

4.2.2 Erkjennelser

I gjennomføringen av undervisningen opplevde jeg som lærer at jeg og elevene som gruppe hadde noen gjennombrudd i samtalene. Det var en opplevelse av at elevene forsto noe eller greide å sette ord på noe. Dette *noe* fant jeg i analyseprosessen ut at var når elevene greide å sette ord på en relasjon de så mellom tallene og hvilken påvirkning relasjonen har om tallene endret seg. Relasjonen og påvirkningen skal jeg vise igjennom eksempler under.

Eksempel 11 – Erkjennelse av relasjon som påvirkes om tallene endrer seg

I hendelsesforløpet befinner vi oss nå i første undervisningsøkt. Regnestykket elevene er presentert for er 68 + 68, og de skal finne ut hvilket regnestykke som skal stå under. Med ulike tall, men med samme sum. Elevene har kommet med 67 + 69 som et forslag og lærer ønsker å spørre om det spiller noen rolle hvilke tall som skal stå der eller om det finnes noen kriterier for tallene man kan bruke. Lærer prøver seg med 63 + 62, og flere av elevene reagerer på at det ikke kan stemme, når begge regnestykkene skal ha samme sum. Ved hjelp av lærers hjelpespørsmål kommer Anna fram til hvordan de to tallene på hver side av + har en relasjon til hverandre.

Eksempel 11 - utsagn 185 – 202 185 Lærer: Kan jeg bytte ut med hvilke som helst tall? 186 Jan: Ja. 187 Lærer: Kan jeg skrive 68 + 68 er det samme som 63 + 62? *(skriver 68 + 68 = 63+ 62 på tavla)*. 188 Jan: Nei, du må ta hele tiden… sånn som… Kan jeg komme opp…? 189 Lærer: Du kan komme og tegne. Jeg kan viske ut nederst her. 190 Jan: For det skal bli 63, og så har du…. det… og så har du 62 + 1, og så hvis du tar 61 + 2, så er det motsatt. *(skriver 62+1 og 61+2 på tavla)*. 191 Lærer: Ja, okei… så så lenge… Hva er det med enerne vi må passe på da? 192 Lars: At det blir like…. *(Samtidig som forsker prater)*. 193 Lærer: Hva er det som blir feil med de enerne her *(setter strek under 63 + 62)*. Lars? 194 Lars: At det er for lite! 195 Lærer: Det er for lite, ja! 196 Flere: Ja! 197 Lærer: Hva er det vi må passe på da, når vi putter enerne bakom. Anna? 198 Anna: At det skal være høyere tall enn eh… enn sånne som eh.. som det der. Ett høyt og ett mindre hvis det skal bli det samme. 199 Lærer: Hvis du går en ned på den ene siden så… 200 Anna: så må man ha ett høyere på andre siden... 201 Lærer: Okei. 202 Anna: ... for at det skal bli det samme.

Anna erkjenner at skal du ha et høyere tall på den ene siden av +, må du ha et lavere på motsatt side av +. Denne erkjennelsen blir med elevene videre i samtalene, og blir gjentatt av andre. Elevene ser ut til å være enige med Anna.

Eksempel 12 - erkjennelse av noe generelt

Sist i den andre undervisningsøkta har lærer presentert elevene for høye tall som mange av elevene ikke har fått til å regne sammen. Læreren har også endret tallene på hver side av + med 5 enere opp og ned, og på den måten greid å utvide elevenes forståelse for relasjonen mellom tallene på hver side av pluss, hvis man skal beholde summen i begge regnestykker. Læreren spør nå om hun kan putte inn hvilket som helst tall på begge sider av +, så lenge hun endrer likt antall opp og ned i regnestykket to for å beholde summen. Læreren bruker her så høye tall at elvene ikke har grep om mengden lenger, og skriver ned, i samtale med elevene et regnestykke de mener kan stå under med andre tall, men allikevel ha samme sum.

Eksempel 12 – Utsagn 687 – 696

687 Lærer: Kan jeg putte hvilke som helst tall inn her, så lenge jeg gjør det samme på begge sider?

688 Flere: Ja.

689 Lærer: Så jeg kan ta tre hundre tusen to... tre hundre og tjue seks tusen åtte hundre og femti en *(326851)* pluss 302, nei vent, 309 sier vi *(skriver på tavla samtidig)*.

690 Lars: oi, det der greier ikke Jan engang.

691 Lærer: Er det samme som tre tusen.. tre hundre og tjue seks tusen åtte hundre og femti… *(skriver på tavla samtidig)*. Hva er det hvis jeg skal plusse 5. 1 + 5?

692 Lars: 6.

693 Lærer: er det samme som, nei pluss tre hundre og.. Hvis jeg skal gå 5 ned på 9eren da?

694 Anna: 4

(326851 + 309 er det samme som 326856 + 304)

695 Lærer: Kommer dette til å få samme svar?

696 Alle: Jaaaaa

Tallene læreren presenterer på slutten av eksempelet er så høye at ingen av elevene har mulighet til å kontrollere om summen er den samme, men, ved å svare i kor, er det enighet om at begge regnestykkene vil komme til å ha samme sum. Elevene greier, ved hjelp av hverandre og læreren å sette ord på at så lenge man endrer likt antall på hver side kan man gjøre det slik med alle tall.

4.2.3 Påvirkning av andre

I begge samtaleøktene er det mange eksempler på at elevene deler tankene sine med hverandre. De gi hverandre tilgang til tankene og mulighet for å arbeide videre på andres tanker.

Elevene påvirket av hverandre - øvingshandlinger for å spisse språk

Tabellen i eksempel 2 på side 29 inneholder mange ulike utsagn fra elevene. Utsagnene er hentet gjennom første undervisningsøkt, og er variasjoner av nøkkelordene gå opp/gå ned. Utsagnene er i tillegg også narrativer om relasjonene mellom tallene på hver side av +, som tidligere presentert. Tabellen i eksempel 2 kan også være et eksempel på elevenes øvingshandlinger for å spisse forklaringer de kan godta. Elevene endrer setningene sine i nye forsøk på å uttrykke det de ser på en måte som de andre elevene og læreren kan forstå. Det gjør de ved å endre verbet i setningen sin, og å finpusse på de andres øvingshandling.

Elevene påvirker hverandre - bygger videre på hverandres tanker

I eksempel 11, presentert på side 39, ser vi hvordan tre ulike elever fortsetter hverandres tanker. Eksempelet er hentet fra siste del av første undervisningsøkt, der elevene diskuterer hvorfor læreren ikke kan plassere regnestykket 63 + 62 under regnestykket 68 + 68 hvis begge regnestykkene skal ha samme sum. Jan begynner på noe i utsagn 190, som de andre ikke får helt til å stemme. Deretter tar Lars over, og han forsøker å klarne opp i noe av det Jan sa som ikke ble helt riktig i utsagn 192 og 194. Så tar Anna over etter Lars og ser ut til å fullføre tankene i utsagn 198, 200 og 202. Elevene bruker de tankene den forrige eleven uttrykt, og uttrykker så sine tanker.

Eksempel 13 - elev som adderer alle tallene

Tidligere presenterte jeg Jan som viste et behov for å addere alle tallene (eksempel 6). I gjennom begge undervisningsøktene var dette noe Jan gjorde parallelt med at han ivrig deltok i samtale rundt relasjonene mellom tallene i regnestykkene. Sist i den andre undervisningsøkta har Jan addert alle regnestykkene, når lærer presenterer regnestykket 326851 + 309. Da skjer det noe som viser at de andre eleven har lagt merke til hva Jan har drevet med igjennom undersøkelsen.

Eksempel 13 – Utsagn 689-690
689 Lærer: Så jeg kan ta tre hundre tusen to... tre hundre og tjue seks tusen åtte hundre og Femti en *(326851)* pluss 302, nei vent, 309 sier vi.
690 Lars: oi, det der greier ikke Jan engang.

At Lars kommenterer at dette er et regnestykke med så store tall han ikke har tro på at engang Jan kan regne det ut, viser at de andre elevene har lagt merke til at Jan hele tiden regner ut stykkene vi holder på med. At Jans strategi gjennom undervisningsøktene er med på å påvirke elevene, og Lars sitt utsagn blir en annerkjennelse på Jans evne til å addere.

Eksempel 14 – Lærer påvirker elevene – plukker opp noe en elev sier og forteller alle

I eksempelet jeg nå skal vise er vi i den første undervisningsøkta, og elevene jobber med den første oppgaven de fikk presentert av læreren. 6 + 6 over 7 + 8. Læreren har hatt en egen liten samtale med Eva mens elevene satt og fant tall som passet inn i mønsteret, i bøkene sine. Læreren mener at Eva sa noe viktig til henne i denne private samtalen, og vil ha med det Eva sa i den felles samtalen med hele gruppa, slik at alle får ta del i det Eva sa.

Eksempel 14 - Utsagn 110 – 122
110 Lærer: Vi får samme svar. Eva du sa noe lurt.
111 Eva: Telle på fingrene?
112 Lærer: Nei, når vi var på 7+7, husker du det?
113 Eva: er 14.
114 Lærer: Ja, og så sa du.. 6 + … 6 var en mindre.. Hva var en mer?
115 Eva: 6 +....
116 Lærer: 6 + ..
117 Eva: 6 + 8
118 Lærer: *(skriver)* 8.
119 Eva: Så tok vi bort…
120 Lærer: Hør på hva Eva sier nå!
121 Eva: Så tok vi bort en fra 8'ern. Så ble det 7 på den ene og 7 på den andre og da ble det 14.
122 Lærer: Mhm! Eva fant ut at.. Hun skulle finne ut hva 6+8 var man da tok hun bare og flytta en tilbake og så at dette (peker på 8+6) var det samme som 7+7.

Læreren forsøker å få Eva til selv å fortelle det hun snakket med læreren om, men læreren må hjelpe henne inn på sporet før hun husker på det hun utrykket til læreren.

Eksempel 15 – Lærer påvirker elevene – bygger videre på hverandres tanker

I eksempelet under forsøker læreren å hjelpe elevene til å finne de riktige ordene. Vi er i undervisningsøkt nummer to og elevene skal gå 5 opp og 5 ned på hver side av regnestykket 36 + 72. I tillegg til at de har kommet fram til at regnestykket som skal være under med samme sum er 31 + 77, har elevene også rotet seg inn i et regnestykke der de har gått 6 opp og 3 ned. Her forsøker lærer og elever og nøste opp i hvorfor det ene regnestykket har samme sum som 36 + 72, men ikke det andre.

Eksempel 15 - Utsagn 672 – 686

672 Lærer: Det er helt riktig, jeg er bare kjempenysgjerrig på om dere ser hvorfor. Hvorfor? Ikke fordi vi har regnet det ut, men på tallene.

673 Berit: Jeg vet hvorfor, men jeg synes det er så vanskelig å forklare.

674 Lærer: Ja, det er vanskelig å forklare, men prøv engang til, Berit.

675 Berit: Em, det er slik at hvis vi ikke her det samme, det samme… Som jeg sa.. hvis det blir 3 og 6, det er jo ikke de samme tallene.

676 Lærer: Nei, det er noe med det samme.

677 Berit: Ja.

678 Lærer: Det sa dere i sted også, hvis vi skal gå en opp så må vi gå en ned. Jan, du sa det.

679 Jan: Ja.

680 Lærer: Ja, hva er det vi gjør her da?

681 Jan: Vi tar det samme. 5 ned og 5 opp.

682 Lærer: Ja.

683 Jan: Men ikke nederst *(sikter til 33 + 78)* For der har vi 6 opp og 3 ned.

684 Lærer: Ja, da flytter vi ikke riktig antall enere, gjør vi det da?

685 Jan: For det der er 3 mer.

686 Lærer: Ja, du har lagt på flere enn du har tatt vekk.

Læreren tar her tak i de tankene som elevene har uttrykt, som kan hjelpe de inn på riktig spor, som i utsagn 678 «Det sa dere i sted også, hvis vi skal gå en opp så må vi gå en ned. Jan, du sa det». Læreren veileder elevene inn på hva de skal se etter for å finne ut hvorfor det ene regnestykket er blitt feil.

Eksempel 16 – lærer påvirker elevene – leter etter ord

I det siste eksempelet ser vi at Jan strever litt med å finne ord på akkurat det å flytte verdi fra ett tall til et annet, hvorpå læreren bistår Jan med å finne riktige ord. Ordene læreren bistår Jan med er ord som Jan tar opp igjen og bruker senere i samtalene.

Eksempel 16 - Utsagn 322 – 328 322 Jan: Da liksom.. Den du tar nedover… 323 Lærer: Den jeg tar nedover her? *(Peker på 38 og 37)*. 324 Jan: Hæ? 325 Lærer: Den jeg har tatt nedover her, her Fra 38 til 37? *(Peker igjen)*. 326 Jan: Ja, For da liksom gir du den 38eren en til til 17, at det blir en mer der og en mindre der. 327 Lærer: Så du mener at jeg flytter den over? 328 Jan: Ja.

I utsagn 327 bruker læreren ordet *flytter* der Jan sier «da liksom gir du…». Fordi Jan svarer positiv og han tar opp ordet senere i samtalen, kan det se ut som at ordet gir mening i denne sammenhengen for Jan.

5 Drøfting

Så hva kjennetegner egentlig 6-7åringers språk i arbeidet med generalisert aritmetikk? I dette kapittelet skal vi se på elevenes språk i sammenheng med den presenterte teorien. Vi skal se på:

1. Kjennetegn på elevenes diskurs: og konkrete språket på ord- og setningsnivå.
2. Kjennetegn på elevenes utvikling av diskurs: hvordan elevenes samtale utvikler seg igjennom undervisningsøktene og derfor er på et mer overordnet nivå, fordelt på:
   - Utvikling av nøkkelord
   - Erkjennelser
   - Påvirkning av andre tilstede

5.1 Kjennetegn på elevenes diskurs – teori og empiri

Den matematiske diskursens paradoks er at for å kunne delta i den må man kjenne til den, men for å lære å kjenne den må man delta i diskursen (Sfard, 2008, s. 129-130). Så hvordan skal unge elever kunne komme inn i den matematiske diskursen da? De må kanskje bare hive seg inn i den og lære underveis? I undersøkelsen jeg har gjennomført har jeg hatt matematiske samtaler med unge elever som har vært tvunget til å forsøke å sette ord på relasjoner og sammenhenger de har sett. Sfard peker på fire kjennetegn for at en diskurs brukt i en slik samtale er matematisk (Sfard, 2008, s.133-134). I kapittel 4.1 «kjennetegn på elevenes diskurs» har jeg presentert mine funn fra analysen av de to samtaleøktene, med Sfards kjennetegn som rammeverk for analysen. Jeg fant alle de fire kjennetegnene representert i begge samtalene, og her vil jeg se litt nærmere på det jeg fant.

Tidlig i den første undervisningsøkta dukker det første nøkkelordet opp. I eksempel 1, som presentert i kapittel 4.1, setter Marit ord på at hun ser tallene som står skrevet opp på tavla som et mønster. Nøkkelord er altså ord som kan være objekter i en aktivitet eller begrep som er viktige for å skape mening i diskursen (Sfard, 2008, s. 133). Marit har sett at tallene læreren har skrevet opp på tavla passer inn i et mønster, og tar i bruk ordet mønster som et nøkkelord fordi det gir mening til sammenhengen her (Sfard, 2008, s. 133). Fram til Marit forteller om mønsteret hun ser har elevene addert tallene for å finne ut om regnestykkene har samme sum. Med Marits nøkkelordbruk, mønster, endrer retningen i samtalen seg fra å handle om å addere tallene, til å se etter andre relasjoner mellom tallene for å si om regnestykkene har samme sum. Det er andre elever som tar i bruk dette nøkkelordet etter at Marit har uttalt det, uten at det er med i gjennom hele samtalen.

Elevene har ikke mye erfaring med matematisk diskurs i skolesammenheng ennå, de er unge. De har heller ikke lang erfaring med den skriftlige matematikken. Det er derfor læreren som konkret skriver på tavla i denne undersøkelsen, elevene bruker den muntlige matematikken. Læreren har underveis skrevet opp tall og tegn (+) på tavla. Tallene er satt opp under hverandre med den hensikt at det skal gjøres lettere for elevene å oppdage sammenheng mellom dem. Utover i samtalen tegner også læreren piler på sidene av tallene for å vise om tallet blir større eller mindre. I denne sammenhengen kan tegnene og pilene være det Sfard (2008) beskriver som visuelle mediatorer, altså symbolske mediatorer i skriftspråket som er skapt spesielt til den matematiske diskursen (Sfard, 2008, s.147).

De visuelle mediatorene læreren bruker, sammen med nøkkelordet – mønster - som Marit bruker, utløser bruk av ulike verb hos elevene. Verbene de bruker beskriver det som skjer fysisk. Elevene *«tar opp, ned og bort»* og *«flytter»* tallene i sin leting etter den matematiske måten å uttrykke det de ser muntlig. Jeg kan anta at pilene på tavla er med på å påvirke ordene elevene bruker sammen med verbene; som ned og opp. Verbene beskriver hvordan elevene nå ser tallene og blir til ord brukt for å beskrive hva elevene er i stand til å se i denne undervisningssituasjonen (Sfard, 2008, s. 133). Det gjør verbene som brukes til *nøkkelord*. I eksempel 2, tabellen presentert i forrige kapittel, kan vi se flere utsagn igjennom den første undervisningsøkta som viser nøkkelordene jeg her har snakket om. Eksemplet består av en tabell med utsagn som er hentet fra de ulike steder igjennom hele den første undervisningsøkta. Verbene er også plukket ut på hvert utsagn, for å synliggjøre hvordan elevene er konkrete i de relasjonene de uttrykker at de ser mellom tallene på hver side av + tegnet.

Nøkkelordene elevene bruker i eksempel 2 er ulike variasjoner av beskrivelser rundt den samme sammenhengen de ser mellom tallene. De sier *er oppover/er nedover*, *gå ned/gå opp* og *en mer/en mindre*. Det er flere ulike elever som kommer med de ulike nøkkelordene. Elevene presenterer sine tanker for hverandre og plukker opp det de andre sier for å forsøke å gjenta det samme med andre ord. Den sammenhengen mellom utsagnene viser de øvingshandlingene som Sfard (2008) beskriver som gjerninger, forgjengeren til forklaringer. Altså, elevene uttrykker ulike utsagn rundt samme relasjon mellom de samme tallene, ved å plukke opp hverandres forklaringer og justere på dem.

I gjennomføringen av undersøkelsen opplevde jeg at elevene strevde med å sette ord på de matematiske sammenhengene de så. Derfor var det mange ulike ord i bruk, som forsøk på å beskrive det de så at skjedde med tallene. I oppgaven som var presentert var målet til læreren at elevene skulle se sammenhengen mellom to addisjonsstykker. Etter som samtalen skred fram forsøkte elevene å sette ord på det de så at skjedde med tallene. De søkte etter nøkkelord som beskrev at når ett tall i regnestykke blir høyere, må det andre tallet bli lavere, for at summen skal forbli lik. Denne søkingen etter ord gir samtalen ytringer som beskriver objekter, relasjoner mellom objekter eller prosesser med eller om objekter, nemlig *narrativ* (Sfard, 2008, s. 133-134). I denne undersøkelsen er det snakk om narrativ om relasjoner mellom objekter, altså de relasjonene elevene ser mellom de regnestykkene som er skrevet opp på tavla. Eksempel 2, tabellen med nøkkelordene, inneholder også en rekke av disse narrativene som elevene kom med underveis. Hvert av utsagnene kan kalles en narrativ, fordi de er deres egne fortellinger om relasjonen de ser mellom tallene og regnestykkene.

Hvis man ser på hvert enkelt utsagn i tabellen, eksempel 2, i sammenheng med hverandre, kan man se at elevene snakker om samme relasjon, men med ulike ord. Det kan være et eksempel på det Pimm beskriver som snubling og nøling (Pimm, 1987, s. 43). Det vil si at elevene øver seg i å lytte til det de andre har å si, de tar tak i det og forsøker å sette andre ord på det som allerede er uttrykt. De endrer på ord og setningsstruktur og forsøker å spisse forklaringen sin med bakgrunn i det medelevene allerede har formulert. Elevene følger med i og er med på å skape en prosess der de bygger narrativ om de tallene de ser. En slik prosess kan være det Sfard kategoriserer som en *rutine* i den matematiske diskursen, altså forklaringer (Sfard, 2008, s. 134-135). Dette er det fjerde og siste kjennetegnet som Sfard (2008) peker på. Som nevnt tidligere så mener Sfard at forklaringer har en forgjenger. Hun kaller disse for *gjerninger,* og sier de er øvingshandlinger som også produserer eller endrer det matematiske objektet, ikke bare narrativen (Sfard, 2008, s.136). Utsagnene i tabellen i eksempel 2 viser en rekke uttalelser som kan sees på som elevenes øvinger til forklaringer. Når Eva sier «Så tok vi bort en fra 8'ern. Da ble det 7 på den ene» i utsagn 121, har hun plukket opp de andre elevenes tidligere utsagn. Som for eksempel Jan som sier «…så kommer det oppover på høyresida, og nedover på venstre» i utsagn 77, eller Kari som sier «Her skal jeg gå ned, og her skal jeg gå opp» i utsagn 98. Eva peker ikke på å gå opp og ned, men å ta bort på en side og legge til på den andre. Det er en videreføring av de andre elevenes tanke om å gå opp og gå ned. En finpussing, en *gjerning*.

Et annet eksempel på dette er eksempel 3 som ble presentert i forrige kapittel. Det består av en lengre sekvens av samtalen fra første undervisningsøkt, der flere av de fire kjennetegnene til Sfard viser seg i elevenes utsagn. Eksemplet viser en sekvens av undervisningen som inneholder en matematisk diskurs med mange elementer. De visuelle mediatorene er hele tiden tilstede for elevene til å se på og Jan bruker de aktivt når han spør om å få tegne og forklare (Sfards, 2008, s. 133-134). Jeg ser også noen nøkkelord i bruk (mest framtredende er *det samme*), samt at i flere av eksemplene (nr. 2, 4 og 7) elevene leter etter godkjente narrativ gjennom gjerninger og forklaringer (underkategorier på rutiner). De plukker opp hverandres ord, snakker i halve setninger og setter det sammen med sitt eget, og slik former narrativ (Sfard, 2008, s. 134). Igjennom hele sekvensen må lærer hjelpe til, men elevene greier til slutt å komme fram til noe som likner en *godkjent narrativ*, som de virker å være enige om. Det ser jeg i at Anna i utsagn 198, 200 og 202 sammen med lærer, oppsummerer de andre elevenes tidligere gjerninger igjennom eksempelet i en slik form at konklusjonen hennes følger logisk ut av premissene, «hvis… så …» (Vaags, 2004). Slik: «Hvis man går ned på den ene siden, så må man gå ned på den andre siden, for at det skal bli det samme». Elevene virker å være enige om at dette stemmer, og godkjenner narrativen.

Elevene tar med seg den godkjente narrativen som Anna uttrykker over i undervisningsøkt to. Det kommer til syne i eksempel 4, som jeg redegjorde for i forrige kapittel. En av elevene, Lars, er tidlig i undervisningsøkt to, ute med et forsøk på en narrativ som ligger nært opp til Annas fra sist i første undervisningøkt. Han «tar ett høyere og ett hakk nedover». Lars kommer med en forklaring på hva han har gjort, eller hva som skjer med tallene i regnestykkene. Han bruker nøkkelordet «høyere», som han hørte sist i den første samtaleøkten, samt at han gjentar en gjerning som elevene brukte i den første økta, «går nedover». Dette kan tyde på at øvingshandlingen en gjerning er, nå har utviklet seg fra å være en øvelse til å bli en forklaring hos Lars (Sfard, 2008, s. 133).

I gjennomføringen av undervisnings nummer to, fant jeg at elevene bruker flere av de samme nøkkelordene og gjerningene som sist i den første økten, som for eksempel å *gå opp* og *gå*

ned. De har oppdaget en relasjon mellom nøkkelordene å gå oppover/å gå nedover, mer/mindre, og høyere/lavere. Noen elever begynner derfor å bruke disse nøkkelordene i sammenheng, slik som Jan i eksempel 5, vist i kapittel 4.1. Oppgaven på tavla er 38 + 17, og Jan forsøker å sette ord på hvorfor det skal stå 37 + 18 under for å få samme sum.
Han sier «Ja, for da liksom gir den 38eren en til, til 17, at det blir en mer der og en mindre der». Utsagnet hans synliggjør sammenhengen mellom de to sidene av + for de andre elevene. Den sammenhengen Jan her viser blir brukt av de andre elevene utover i samtalen. Det kan bety at nøkkelordene nå ser ut til å henge sammen for elevene i situasjoner som likner denne.

På bakgrunn av eksemplene over mener jeg at vi kan se alle de fire kjennetegnene som Sfard (2008) peker på i matematisk diskurs er tilstede i samtalene jeg har med elevene.
Nøkkelord - Selv om nøkkelordene er få og gjerne variasjoner over samme ord, så er de der. Det er nesten ingen nøkkelord til å begynne med. Første utsagn om regnestykkenes relasjoner, består bare i tall, og veldig få ord i det hele tatt: «Jeg vet! 8 og 9». Derifra blir, som tabellen i eksempel 2 viser, utsagnene gradvis mer avanserte. Elevene plukker opp ord som andre har brukt og tar de i bruk som nøkkelord. Slik som «å gå oppover» og «å gå nedover», «mer» og «mindre», og «høyere» og «lavere». I den siste samtalen og eksempel 4 ser vi også at det har blitt viktig for elevene at det som skjer på den ene siden av + er avgjørende for hva som skjer på den andre siden av +.

De *visuelle mediatorene* er kanskje de som ikke er så lett å se i samtalene, nettopp fordi det er en samtale og ikke noe skriftlig jeg ser på. Allikevel er de med hele veien som et element som påvirker hvordan elevene ser på relasjonene mellomtallene, og på den måten påvirker også de visuelle mediatorene språket til elevene. I denne undersøkelsen blir de visuelle mediatorene presentert av læreren. Det er tallsymbolene, + , - og piler. Dette er mediatorer som elevene er kjent med fra før denne undersøkelsen, og elevene tar de i bruk med engang læreren har presentert de. Det kan være årsaken til at ingen av barna benytter seg av de konkretene som ble lagt fram på bordet. Tallsymboler er abstrakte, men godt kjent selv for en 6-7 åring. Symbolet for addisjon og subtraksjon er to av de første symbolene skolematematikken tradisjonelt presenterer for førsteklassingene. Fordi dette er andretrinnselever er de derfor også kjent med symbolene for addisjon og subtraksjon, og hva de representerer.
Til å begynne med var det som lærer vanskelig å få elevene til å la være å regne ut regnestykkene som ble presentert i samtaleøktene. I stedet for å se på relasjonene mellom regnestykkene, gikk de i gang med regnestrategier for å finne summen og sammenlikne

summene. Det kan tyde på at symbolet + var, for disse elevene, en oppfordring til å starte med utregning. Jeg, som lærer, måtte flere ganger i samtalen si at det ikke var nødvendig å regne ut sum i denne oppgaven, og de fleste elevene flyttet fokus over på relasjonen. Selv om noen elever tydelig synes det var vanskelig. Det kommer til syne i eksempel 6, vist i kapittel 4.1, som består av to sekvenser fra undervisningsøktene. Jan regnet sammen alle regnestykkene igjennom begge undervisningsøktene enten i hodet eller på ark når de ble mer avanserte. Eksempelet viser en hendelse fra hver undervisningøkt med Jan som uttrykker sitt behov for å addere. Det kan vise at han har et behov for å vise de andre at han kan addere, og at den visuelle mediatoren + gjør at han kjenner behov for å addere. Selv om det er Jan, blant disse elevene, som i størst grad uttrykker at det er vanskelig ikke å regne ut stykkene, når de er slik stilt opp, er det også han som synliggjør relasjonene mellom nøkkelordene og de visuelle mediatorene for de andre elevene i det forrige eksempelet, eksempel 5. Der han forteller hvordan han flytter enere fra den ene siden av + og over på den andre, for at regnestykkene skal ha samme sum.

Elevene har mange *gjerninger* og få *forklaringer* i samtalene. Disse to er underkategorier av det Sfard kaller rutiner (Sfard 2008, s. 223). Fordi gjerninger er øvingshandlinger vil det kunne peke på at elevene ikke har kommet lengre i sin utvikling av den matematiske diskursen. De er i en prosess der de lærer, og de trenger øving. Fordi dette er en samtale mellom lærer og flere elever, der elevene bygger på hverandres utsagn, kan jeg ikke si at alle elevene har kommet til samme utvikling. Men de eksemplene vi har sett på til nå kan si meg at elevene viser at de kan bruke forklaringer. Og de viser at flere av elevene samarbeider om å formulere en *godkjent narrativ* om regnestykkenes relasjon til hverandre, og tallenes relasjon til hverandre. Det kan tyde på at fordi de er flere elever sammen kan de komme lengre i å se relasjonene enn om de satt alene med regnestykkene foran seg.

Litt ut i den andre samtaleøkta ser vi at den narrativen de sammen er kommet fram til og har godkjent på slutten av første samtaleøkt - hvis du går opp på en side, må du gå ned på den andre (sist i eksempel 3) - er en de ser ut til å fortsette å være enige om. Det ser vi i eksempel 7, presentert i forrige kapittel, der elevene snakker om hverandre og i kor. Elevene ser på regnestykkene 63 + 19 og 64 + 18, og oppleves av lærer som oppstemte fordi de ser ut å være enige om den relasjonen de ser. De uttrykker enighet ved å svare i kor, og jeg vil derfor tolke det som at elevene er enige i den narrativen de her sammen skaper i felleskap; hvis vi går en opp på den ene siden av + må vi gå en ned på den andre siden av + for at regnestykkene skal ha samme svar. En narrativ som er lik den de kom fram til sist i undervisningsøkt en, vist i eksempel 3, med en presisering på hvor mye man må gå opp og ned.

I eksempel 7 veksler elevene på ordet og flere av elevene svarer i kor ved kontrollspørsmål fra læreren. På den måten kommer enigheten mellom elevene tydelig fram, de har godkjent narrativen. Narrativen har fått formen til en deduktiv relasjon, «hvis… så…» - *hvi*s du går ned på den ene siden, *så* må du gå opp på den andre. Fordi elevene ser ut til å være enige kan vi tenke at narrativen i denne sammenhengen er godkjent som sann (Sfard, 2008, s. 134). Disse elevene har laget seg en matematisk fakta som de kan ta med seg videre i sin utvikling av matematisk forståelse og matematiske diskurs (Sfard, 2008, s. 223).

Ut ifra det jeg i kapittel 4.1 «matematisk diskurs – fire kjennetegn» har presentert og dette delkapittelet diskutert finner jeg at elevenes samtaler er innholdsrike på det Sfard (2008) beskriver som fire kjennetegn på at en diskurs er en matematisk diskurs. De unge elevene kan streve litt med den matematiske diskursen og dens begreper. Jeg har tidligere presentert at Sfard (2008) peker på paradokset at for å delta i diskursen må man kjenne til den, men for å bli kjent med diskursen må de delta i den (Sfard, 2008, s.129-130). Det kan her se ut til at elevenes inngang i diskursen er å bli kjent med nøkkelord, rutiner, narrativ og visuelle mediatorers fulle betydning ved å delta i diskursen, og prøve seg litt fram.

5.2 Kjennetegn på elevenes utvikling av diskurs – teori og empiri

Slik Anna Sfard (2008) beskriver kan unge elever oppleve at det er vanskelig å komme inn i den matematiske diskursen. Den er mindre konkret enn det hverdagsspråket vi er vant til og flere hverdagsbegreper kan ha en annen betydning i den matematiske diskursen (Sfard, 2008, s. 135). Derfor kan det ofte oppstå litt forvirring når elevenes hverdagsspråk møter den matematiske diskursen (Pimm, 1987, s. 75). Tidligere har jeg sett på innholdet i elevenes språk og hvordan elevenes språk er rik på kjennetegn på matematisk diskurs. Nå vil jeg rette oppmerksomheten på hvordan elevene utvikler språket sitt i samtaleøktene jeg gjennomførte i undersøkelsen.

5.2.1 Utvikling av nøkkelord

Når jeg nå skal se på hvordan elevene utvikler, eller har potensiale for å utvikle nøkkelord, vil jeg ta utgangspunkt i mine funn og drøfte de opp mot Sfards (2008) 4-stegs modell for utvikling av nøkkelord. Nøkkelordene er viktige i den matematiske diskursen fordi disse ordene kan ha dobbeltbetydning, altså en betydning i matematikken og en annen en i hverdagen. Nøkkelord består også av flere andre spesialbegreper, men i denne undersøkelsen er det hovedsakelig ord vi også bruker i hverdagsspråket vårt som får funksjonen som nøkkelord. Den 4-stegs utviklingsmodellen ser på hvordan mennesker, igjennom steg, lærer seg å bruke nøkkelord og symboler i ulike situasjoner. De fire stegene i modellen har jeg forklart utfyllende i kapittel 2.2.2. (Sfard, 2008, s.182-182).

Elevene viser tidlig i undervisningsøkt nummer én at de har begynt sin utvikling av ord og symboler i den matematiske diskursen. Nøkkelord som elevene har med seg fra tidligere erfaringer inn i samtalen dukker opp. De bruker nøkkelordet *plusser* allerede i utsagn 17. Og hvis vi ser på eksempel 1, presentert i kapittel 4.1, så bruker Marit nøkkelordet *mønster* allerede i utsagn nummer 26. Marit bruker et nøkkelord som gir henne mulighet til å fortelle de andre elevene hvordan hun ser tallene. Jeg har vært en del av Marits tidligere undervisning og vet at hun har erfaring med bruk av andre mønster tidligere. Fordi Marit ser på tallene som et mønster, og jeg vet at hun har jobbet med mønster før, kan jeg si at hun knytter noe hun kjenner til fra før til noe nytt som læreren presenterer på tavla. Situasjonen med Marit som presenterer tallene som et mønster for medelevene sine, kan være et eksempel på Sfards første steg til nøkkelord. Hun bruker ordet passivt – knytter ny situasjon til en tidligere opplevd situasjon. I tillegg kan sekvensen også sees som et eksempel på at Marit bruker nøkkelordet på tvers av situasjoner som oppfattes som lik. Det kan være et eksempel på nøkkelord brukt i steg to i Sfards 4-stegs modell. Steg 2 beskriver en rutinedrevet bruk, at nøkkelordene blir brukt i situasjoner som oppfattes som like. Det kan tenkes at den situasjonen i undersøkelsessituasjonen minner om en tidligere situasjon Marit har vært i.

Ikke lenge etter at Marit har snakket om mønster, oppstår en situasjon der Eva opplever at hun ikke husker hva nøkkelordene betyr (eksempel 8, vist i forrige kapittel). Ordet som dukker opp er dobling, og er et nøkkelord fordi det er med på å skape mening i aktiviteten elevene er i (Sfard, 2008, s. 133). Eva sier rett ut at hun ikke husker hva dobling er, og læreren hjelper Eva med betydningen ved å bruke utsagn fra tidligere undervisning, «det samme engang til».

Fordi Eva spontant uttrykker «åja» da læreren veileder, og bruker doblingsaktiviteten videre, kan jeg si at Eva knytter gamle erfaringer til de nye regnestykkene som læreren presenterer. At hun knytter det gamle med det nye kan gi henne en bedre forståelse for hva nøkkelordet dobling betyr. Dette er et eksempel på steg 1 i modellen, passiv bruk av ord og symboler, der eleven knytter noe nytt til noe gammelt.

I samtaleøktene skal elevene forsøke å sette ord på det de ser om relasjonen mellom regnestykkene de får presentert og de leter etter hvordan de skal utrykke dette best mulig. Det så vi godt i tabellen i eksempel nummer 2, som er presentert i kapittel 4.1. Tidlig i første samtaleøkt er Jan den første til å bruke et verb i sitt utsagn om relasjonen han ser «…så kommer det oppover på høyresida, og nedover på venstre» (utsagn 77). Verbet *kommer* gir en indikasjon på at det skjer noe med tallene, at noe endrer seg fra det første regnestykket til det andre. Det Jan sier er det flere elever som tar tak i og bruker etter han, og de kommer med varianter av samme utsagn, men med ulike verb. Utsagnene kommer fra ulike elever. Før Jan sitt utsagn er det et utsagn rundt samme relasjon med et verb. Forskjellen på utsagnene er at det første ikke sier noe om at tallene i relasjonen endres, verbet er «er». Med Jan sitt første utsagn med et verb som sier noe om at tallene endres, kommer elevene fram til hvilke ord de her kan bruke som nøkkelord i denne oppgaven, nøkkelord som beskriver at tallene endres. Det er mange utsagn med ulike variasjoner av nøkkelordene. Utprøvingen og famlingen kan tyde på at elevene foreløpig har brukt disse ordene i matematisk sammenheng kun i denne situasjonen. Jan bruker i utsagn 77 noen hverdagsbegrep han kjenner fra før til det han ser i regnestykkene, altså har han knyttet erfaringer han har fra tidligere til den matematiske relasjonen han ser, og derfor kan vi si at bruken av «en opp og en ned» er steg 1 i modellen, passivt bruk. At de andre elevene fortsetter å bruke de samme nøkkelordene rundt *å gå opp/ å gå ned* på tross av at lærer endrer på regnestykkene og øker tallenes verdier kan kalles rutinedrevet bruk. De bruker nøkkelordene i situasjoner som oppfattes som like for dem (Sfard, 2008, s. 181).

I overgangen mellom de to undervisningøktene hadde lærer endret en del på regnestykkene som ble presentert. I den andre undervisningsøkta økte vanskegraden på å se relasjonen mellom tallene ved at tallene på hver side av + nå var ulike, altså ikke en dobling lenger. I tillegg ble endringen mellom de to regnestykkene økt fra å flytte en ener over fra den ene til den andre siden av +, til å flytte fem enere fra den ene siden til den andre. I eksempel 9, vist i forrige kapittel, er det summen og relasjonene i regnestykkene 36 + 72 og 31 + 77 som diskuteres. På tross av endringene fortsetter elevene å bruke de samme nøkkelordene som tidligere. De *går lavere og høyere* og de *går opp og ned*. Eksempelet er et eksempel på at elevene bruker nøkkelord på tvers av situasjoner som oppfattes som like, og derfor er i steg 2 i Sfards utviklingsmodell (Sfard, 2008, s.181).

På bakgrunn av eksemplene jeg hittil har drøftet når det gjelder utvikling av nøkkelord, ser jeg at elevene ennå holder seg i de laveste stegene av Sfards 4-stegsmodell mot utvikling av nøkkelord. Eksemplene har vært i steg 1, passiv bruk, der noe nytt knyttes til noe gammel og i steg 2, rutinedrevet bruk, der elevene bruker nøkkelord på tvers av situasjoner de oppfatter som like. I den innsamlede empirien har jeg lett etter om elevene utviklet nøkkelordene sine videre utover i undervisningsøktene. Jeg fant bare ett eksempel som kan vise noe annet. Helt sist i den andre samtaleøkta har barna brukt ulike varianter av nøkkelordene *å gå opp og å gå ned* gjennom to samtaleøkter, de har nå kommet til at de bruker nøkkelordene på et generelt grunnlag. Eksempel 10, presentert i kapittel 4.2.1, er hentet fra den siste delen akkurat der lærer forsøker å få elevene til å formulere enn slags konklusjon for å avrunde undervisningsøktene. Berit uttrykker her at det hun sier gjelder for alle tall. Hun uttrykker ikke direkte ordene «gjelder for alle tall», men lærer etterspør en «setning vi kan henge på veggen», som er noe elevene kjenner igjen fra tidligere undervisning. Elevene er vant med at lærer henger opp matematiske setninger på veggen, som elevene selv har formulert. Fordi jeg vet det, og fordi dette utsagnet kommer etter to hele undervisningsøkter med fokus på å se noe generelt, kan vi anta at Berit uttrykker noe hun mener gjelder for alle tall, altså det matematiske objektet $m+n=m(-x)+n(+x)$, når hun sier «Det må være det samme på begge sidene (…) Jeg mente sånn samme tallet da, samme tallet. Opp og ned da».

Når elever greier å knytte nøkkelord til det gitte uttrykket, og ikke lengere er avhengig av hele situasjonen tallene presenteres i er de kommet opp til steg tre i 4-stegsmodellen for utvikling av nøkkelord. Det vil si det neste utviklingssteget. Det er vanskelig å sikkert si at dette er et eksempel på steg 3 i modellen fordi det er kun et par av elevene er med på siste del av samtalen. I tillegg kommer utsagnene sent i samtalen, men det kan være et tidlig tegn på at noen av elevene er i ferd med å bevege seg videre i utviklingen sin. Steg 3 i utviklingen er at nøkkelord brukes uavhengig av situasjonen, men er knyttet til uttrykket de sies i, *uttrykksdrevet bruk* (Sfard, 2008, s. 181-182). Her vil det si at uttrykket *å gå opp og gå ned* løsrives fra selve aktiviteten og situasjonen elevene er i her, og er nærmere knyttet til det matematiske objektet, som i denne situasjonen er m+n=m(-x)+n(+x).

At de fleste elevene i disse undersøkelsene holder seg til bruk av nøkkelord knyttet til situasjoner som oppfattes som like, i disse undersøkelsene, kan komme av ulike ting. De blir her kun presentert for situasjoner som likner hverandre. Det matematiske objektet endrer seg ikke stort igjennom de to samtalene. I tillegg er dette samtaler med flere elever, der det er vanskelig å få alle elevene til å prate like mye og vise like mye av sin kunnskap gjennom samtale. Derfor er det kun noen av elevene som får uttrykt den kunnskapen de vil vise. Elevene er i tillegg kun 6 og 7 år gamle, og går første semester i andre trinn. At utviklingen av nøkkelord ikke er kommet lengre enn vi her ser, kan også ha naturlige årsaker i at deres erfaringer med matematikk som skolefag ikke er lengre enn den er.

5.2.2 Erkjennelser

Når elever bruker den matematiske diskursen i samtaler er det å forstå matematiske objekter de er på jakt etter. Å få grep om ideen om matematiske objekt er ikke lett (Sfard, 2008, s. 164). Når jeg nå skal se på hvordan elevene i denne undersøkelsen forsøker å få grep om det jeg omtaler som det matematiske objektet i denne undersøkelsen, vil jeg se på om situasjoner jeg anser som erkjennelser.

Eksempel 11 er presentert i kapittel 4.2.2 og finner sted sist i den første samtalen. Elevene har flere ganger forsøkt å sette ord på det de så i relasjonene mellom de ulike regnestykkene. Regnestykket som diskuteres er 68 + 68, og læreren spør om det kan settes inn hvilket som helst tall under. Elevene svarer ja, og læreren setter inn 63 + 62. Deretter spør lærer om de to regnestykkene har samme sum. Elevene er raskt enige om at det ikke kan stemme, de ender opp med å svare læreren i kor. Anna setter tilslutt ord på hvorfor det ikke kan stemme igjennom veiledning av læreren. Å komme til den erkjennelsen at man ikke kan sette inn hvilke som helst tall under det første regnestykket, og hvorfor, hvis begge regnestykkene skal ha samme sum, er en viktig erkjennelse for å få grep om det matematiske objektet; m+n=m(-x)+n(+x). De erkjenner at det andre regnestykket er avhengig av det første for at ideen m+n=m(-x)+n(+x) skal opprettholdes. En slik erkjennelse kan være en del av et det Sfard kaller for et tre av erkjennelser. Grenene rundt et matematisk objekt inneholder mange erkjennelser, som hvert menneske kommer til ulikt (Sfard, 2008, s. 164-165). Her var det erkjennelsen av at ikke alle tall kan være med i det andre regnestykket som noen av elevene erfarte.

Igjennom de to undervisningsøktene var det nok mange av elevene som gjorde store og små oppdagelser om tallenes relasjoner i form av erkjennelser. Den erkjennelsen jeg nettopp så på inneholdt noe generelt, nemlig at dette ikke gjelder alle tall, men var avhengig av det første regnestykket. Det var også er erkjennelse som flere av elevene erfarte, da de svarte i kor. Det ble derfor en erkjennelse som ble godt synlig for læreren i samtalen. En annen erkjennelse som ble godt synlig fant sted sist i den andre undervisningsøkta. Eksempel 12 er vist i kapittel 4.2.2. Lærer har på dette tidspunktet endret det tallene til å være ulike på hver side av +, i tillegg til at det flyttes fem enere fra den ene siden av + til den andre i det andre regnestykket. Læreren ønsket å se om elevene kunne se noe generelt, og brukte derfor så høye tall at elevene mistet grepet om mengden på tallene, 326851 + 309 og 326856 + 304. Så spurte læreren om de to regnestykkene har samme svar. Elevene svarte igjen i kor. Fordi tallene her var så høye at elevene mistet grepet om mengden, vil jeg si at enigheten om summen på de to regnestykkene er en erkjennelse. Elevene regnet ikke ut regnestykkene, men var allikevel helt sikker på at regnestykkene hadde samme sum. Erkjennelsen er en ny erkjennelse rundt det matematiske objektet $m+n=m(-x)+n(+x)$, og forteller meg at disse elevene har evne til å utvide sine erkjennelsestrær. Det utvikler også deres evne til å delta i en matematisk diskurs (Sfard, 2008, s. 166.

Alle erkjennelser er personlige, de sier noe om hver enkelt person sin bruk av diskursen. Flere av elevene i denne gruppa viste evner til å se utover sine tidligere erfaringer, og dermed oppdage nye erkjennelser (Sfard, 2008, s. 166). De to eksemplene jeg har diskutert viser hvordan også unge elever kan strekke seg utover det de kan og utvikle sin tankegang og dermed også språk, i den matematiske diskursen. Elevene er i gang med å utvikle sine egne erkjennelsestrær rundt matematiske objekt. Erkjennelsene påvirker hvordan elevene snakker om relasjonene i regnestykkene, og er med på å utvikle nøkkelordene deres, evnen til å forklare seg og til å utvikle narrativ som kan godkjennes (Sfard, 2008, s. 133-134). Dette er tre kjennetegn for matematisk diskurs som ligger på et ord og setningsnivå.

5.2.3 Påvirkning av andre

Denne undersøkelsen er gjort i to matematiske samtaler og da vil det være flere ting som påvirker elevene. De fysiske rammene og dagsformen til hver enkelt elev er ting jeg ikke kommer til å gå inn på i denne oppgaven. Jeg gjorde i analyseprosessen flere gjentagende funn rundt hvordan de andre menneskene som var til stede påvirket samtalen og elevenes utvikling i språket. Matematiske samtaler lik de jeg har gjennomført i denne undersøkelsen er i tråd med den sosiokulturelle tradisjonen der kommunikasjon mellom mennesker er viktig for kunnskap (Säljö, 2000, s. 25-26), og de påvirker måten vi tenker på (Säljö, 2000, s. 89-90). Säljö (2000, s117) sier at å delta i en samtale også er å tenke, dele tanker og ta del i andres tanker. At man sammen kan sette seg inn i et problem og komme til en felles forståelse.

Elevene påvirker hverandre

Jeg vil igjen se på tabellen i eksempel 2, som er presentert i kapittel 4.1. Hvert enkelt utsagn i tabellen sett i sammenheng med hverandre viser at elevene snakker om samme relasjon, men med ulike ord. Tabellen består i flere utsagn hentet fra ulike deler av den første undevisningsøkta og kommer fra ulike elever. Utsagnene er narrativ om relasjonen de ser mellom tallene i de to regnestykkene som er satt opp sammen, og skal ha samme sum. Narrativene likner hverandre, men varierer litt i bruk av nøkkelord og verb som beskriver hva so skjer med tallene. Elevene uttrykker for eksempel at de *går opp og ned,* og de sier at tallene *kommer oppover og nedover*. Det kan være et eksempel på det Pimm (1987) beskriver som snubling og nøling. Det vil si at elevene øver seg i å lytte til det de andre har å si, de tar tak i det og forsøker å sette andre ord på det som allerede er uttrykt. De endrer på ord og verb, og forsøker å spisse forklaringen sin med bakgrunn i det medelevene allerede har formulert. Elevene presenterer sine tanker for hverandre og plukker opp det de andre sier for å forsøke å gjenta det samme med andre ord (Pimm, 1987, s. 43). Elevene uttrykker ulike utsagn rundt samme relasjon mellom tallene, ved å plukke opp hverandres forklaringer og justere på dem.

Det er ulike elever som kommer med de ulike utsagnene, noe som er med på å understreke det sosiokulturelle perspektivet på denne undervisningen, hvordan elevene lar hverandre ta del i deres tanker. I denne undersøkelsen skjer tenking mellom elevene. Säljö (2001) mener at elevene kan legge fram ulike løsningsforslag som de bygger videre på, slik at elvene kan oppnå en felles forståelse og oppleve at løsningene kan bli til et felles eie (Säljö, 2001, s. 117). Det kan forklare hva som skjer mellom elevene i utsagnene i eksempel 2. Det skjer en utvikling i elevenes språk ved at de bygger på hverandres tanker og utsagn. At elevene støtter seg slik på hverandre kommer tydelig fram i tabellen fra eksempel 2 og blir derfor et eget kjennetegn på hvordan elevene bruker og utvikler språket sitt.

Også eksempel 11, presentert i kapittel 4.2.2, er et godt eksempel på hvordan elevene plukker opp hverandres tanker og bygger videre på dem. Sekvensen er hentet fra siste del av første økt og omhandler situasjonen der læreren forsøker å sette inn noen tilfeldige tall under 68 + 68 og spør elevene om regnestykkene vil ha samme sum. Jan sa at man kunne sette inn hvilke som helst tall og læreren ønsker å få elevene til å oppdage at det ikke kan stemme. Læreren setter inn 63 + 62 og Jan ser at det ikke kan stemme. Han begynner å nøste opp i hvorfor, men det stopper opp for han. Lars tar fort over og ser regnestykket ikke har samme sum, men at det kommer til å bli for lite. Anna tar tak i Lars sin tanke om at summen blir for lav, og uttrykker sine tanker. Annas utsagn i dette eksempelet er det samme utsagnet som ender opp i en erkjennelse om relasjonen mellom tallene i kapittel 5.2.2. Sekvensen er et eksempel på hvordan den sosiokulturelle tradisjonen har en tanke om at samtalen blir et samspill mellom tenking i mennesket og samtale mellom mennesker (Säljö, 2001, s. 110-114).

Sist i andre undervisningsøkt skjer det noe som på en helt annen måte viser hvordan elevene er med på påvirke hverandre. I eksempel 13, presentert i kapittel 4.2.3, presenterer læreren regnestykkene 326851 + 309 og 326856 + 394 for elevene, når Lars kommer med et spontant utsagn «oi, det der greier ikke Jan engang». Dette utsagnet kan være et eksempel på det Sfard (2008) vil beskrive som en del av rutiner i den matematiske diskursen, nemlig ritualer. Ritualer er sekvenser av diskursive handlinger som har som hovedmål å skape og opprettholde et bånd med andre mennesker (Sfard, 2008, s. 241). Jan har igjennom begge samtalene vist at han ønsker å regne sammen alle regnestykkene. Dette har jeg også vist tidligere i denne analysen når jeg snakket om de visuelle mediatorene som elevene har vært vant til at betyr at de skal regne ut. I dette eksemplet viser Lars oss at det kanskje ikke er bare er symbolene som oppfordrer Jan til å regne ut, men at det kan være at det er et rituale Jan utfører. Det blir viktig for Jan å regne ut stykkene fordi det kan gi han oppmerksomhet og annerkjennelse (Sfard, 2008, s. 241). Et slik rituale blir ofte utført for de andre rundt, og ikke for seg selv. Sfard (2008) påpeker at dette er et av stegene elevene er gjennom for å komme inn i rutinene til den matematiske diskursen, og det er første steg på veien for å komme seg til forklaringer. Som jeg tidligere har påpekt er Jan en av de som er med på å dele nye tanker og idéer, på tross av at han er den som stadig ønsket å få lov til å regne ut regnestykkene. Noe som kan være enda et tegn på at Jan regner ut for å få oppmerksomhet heller enn at han ikke finner andre relasjoner i tallene. Fordi Sfard (2008) beskriver ritualer som det første steget til å komme seg til forklaringer, kan også elevenes unge alder virke inn her.

Læreren påvirker elevene

En lærer kan modellere hvordan det er å delta i en matematisk samtale ved å være en god lytter. Det gir også elevene større plass i samtalen sier Pimm (1987, s. 44). I denne undersøkelsen går læreren inn i samtalene med et mål om å la elevene ta plass. Det er meningen at elevene skal samtale og stå for mye av snakkingen. Allikevel er det i flere situasjoner læreren som avgjør hvordan samtalen går framover eller skifter retning.

Et eksempel på dette er eksempel 14 (vist i forrige kapittel), midt i den første undervisningsøkta. Elevene sitter og arbeider med å finne regnestykker som kan ha samme sum og følge det sammen mønsteret som Marit har synliggjort for elevene. Mens elevene arbeidet har læreren snakket litt med Eva og hun sa noe som læreren vi at alle elevene skal høre. Derfor tar læreren styringen og ber Eva fortelle det samme til alle, som hun nettopp hadde fortalt læreren. Eva trenger mye hjelp til å huske det hun hadde sagt og lærer er nødt til å lirke og lure ordene ut av Eva i den felles samtalen. Voksne har mye erfaring med å forklare og uttrykke seg muntlig, og lærere har mer erfaring enn elever til å uttrykke matematikk. Læreren velger å gjenta det Eva sier med flyt, noe som kan være lurt for de andre som lytter. Da får de gjentatt idéen, i tillegg til at de får en kort og grei forklaring uten for mange ord. Det er viktig for elevene når de skal øve på sine forklaringer. At de lytter til læreren gir de mulighet til å bearbeide og polere på egne forklaringer (Pimm, 1987, s. 43-49). Læreren påvirker på denne måten hvordan flere av elevene nå fikk ta del i Evas tanker, og de kan være med på å utvikle denne tanken videre.

Lærer kan også fungere som en veileder til flere underveis i en samtale. Når elevene sammen deler tanker og forsøk på forklaringer og de spisser hverandres utsagn, kan det være at læreren stiller ulike spørsmål for å få elevene inn på riktig tankespor. Også når elevene leter etter ordene kan lærer vektlegge det som kan gjøre at elevene kommer seg videre i samtalen. Slik som i eksempel 15 (presentert i kapittel 4.2.3) som er hentet fra siste del av den andre undervisningøkta. Elevene har funnet ut at regnestykkene 36 + 72 og 31 + 77 har samme sum, og læreren lurer på om de vet hvorfor de har rett i dette. Berit synes det er vanskelig å sette ord på at hun ser hva som er blitt galt og uttrykker «Jeg vet hvorfor, men jeg synes det er så vanskelig å forklare». Lærer oppfordrer henne til å forsøke engang til, og lærer har oppfattet at Jan har sagt noe like før som gjør at Berit kan får hjelp til å sette ord på det hun ser. Derfor ber hun i utsagn 678 Jan si det han tidligere sa. Fordi læreren er erfaren kan hun passe på at elevene får lagt vekt på det som er viktig i akkurat denne sammenhengen, og på den måten få dreid retningen på samtalen dit læreren vil.

Pimm sier at læreren får en sosiokulturell rolle i klasserommet fordi lærer kan innføre begrep og nøkkelord som kan ha en hensikt i den sammenhengen læreren og elevene er i (Pimm, 1987, s. 60-61). Som i eksempel 16, det siste eksempelet presentert i kapittel 4.2.3.
Jan strever litt med å finne ord som passer til det han ser, og så sier han: «Ja, for da liksom gir den 38eren en til til 17, at det blir en mer der og en mindre der». Læreren sier: «Så du mener at jeg flytter den over?» Læreren tar i bruk ordet «flytter», og spør Jan indirekte om det kan passe inn ved å ha en spørrende innstilling. Dermed ble det å flytte på verdi akseptert i denne gruppa med elever. Lærer innfører her et kjent hverdagsord inn i en ny situasjon, og i transkripsjonene kan vi se at begrepet også brukes senere av elevene.

Slik eksemplene over viser så spiller andre elever og lærer en viktig rolle i hvordan elevene bruker språket sitt i en matematisk diskurs. Elevene presenterer igjennom begge samtalene mange ulike ordforslag og tanker rundt relasjonen mellom de to regnestykkene. Jeg velger for enkelhetsskyld å her kalle det utsagn. Alle disse utsagnene springer ut i fra de tidligere utsagnene som nettopp har blitt sagt. Et utsagn er hele tiden påvirket av det forrige og på den måten kan vi si at samtalen utvikler seg gradvis, slik Sfard (2008) beskriver den matematiske diskursens struktur. Som lag på lag, der et lag springer ut av det neste (Sfard, 2008, s. 129).

Disse andretrinnselevene viser igjennom de to samtalene og eksemplene over at de er helt avhengig av denne kommunikasjonen med hverandre for å kunne si noe om det matematiske objektet for samtalen (m+n=m(-x)+n(+x). Det er et abstrakt objekt, og som eksemplene viser er det vanskelig for hver enkelt elev å få tak på hva det matematiske objektet er. Elevene bruker mange snirklete forsøk på å kommunisere det de tenker, og samtalene i sin helhet er gode eksempler på at det kan være vanskelig for elevene å komme inn i diskursen. Elevenes ordvalg påvirker dem og det gjør også hvilke ord lærer velger å presenter og bruke (Sfard, 2008, s. 135).

Som lærer i en slik samtale bør man også være oppmerksom på at selv om elevene uttrykker det man ønsker å sette fokus på betyr ikke dette at alle elevene har oppfattet det samme, og at alle elevene har kommet til de samme erkjennelsene. Som lærer får man en pekepinn på hva noen av elevene kan, og disse elevene kan i en slik samtale dra med seg noen av de resterende elevene i den kunnskapen de sitter med. Men det er allikevel ikke noe automatikk i at alle elevene sitter igjen med samme forståelse etter samtalen.

5.3 Oppsummering

Det er to elementer som fremstår som framtredende igjennom begge de to undervisningsøktene. Det ene er elevenes bruk av gjerninger. Elevene bruker mye av den delen av matematisk diskurs som Anna Sfard (2008) omtaler som rutiner. Da spesielt de øvingshandlingene, kalt gjerninger, som er en del av den matematiske diskursens rutiner (Sfard, 2008, s. 223). Elevene endrer stadig setningene, både sine egne eller hverandres. Flere av eksemplene viser at elevene nøler og snubler i utsagnene sine, en øving i å finne setninger der nøkkelordene og forklaringene spisses for å finne akkurat det narrativet, den ytringen som beskriver relasjonen mellom tallene, som de kan godkjenne. Disse snublingene og øvingene som Pimm (1987) understreker at elevene trenger i utviklingen (Pimm, 1987, s. 43), og som Sfard (2008) definerer som gjerninger, er en av de fire kjennetegnene på en matematisk diskurs (Sfard, 2008, s. 236-240). Og den som er framtredende i denne undersøkelsen.

Det andre som er framtredende i undersøkelsen er hvordan elevene påvirker hverandre. Vi har igjennom flere eksempler sett at elevene ofte veksler på å fullføre hverandres tanker, de tar over ord en medelev har introdusert og tar de inn i sine egne utsagn og elevene gjentar det medelever har sagt i et eget forsøk på å spisse gjerningen litt mer. At elevene bruker hverandre på denne måten, at de samhandler med hverandre hele veien, er det andre som er framtredende i denne undersøkelsen.

Den matematiske diskursen er full av spesialbegrep som omhandler blant annet matematiske objekter (Sfard, 2008, s. 129). Men den inneholder også mange hverdagsbegrep som har litt annen betydning enn det de har i hverdagen, og som det derfor kan oppstå forvirring om når unge elever skal begynne å bruke dem i en matematisk diskurs (Pimm, 1987, s. 75). I denne undersøkelsen kan vi si at nøkkelordene i samtalen også er hverdagsbegrep. For eksempel: *høyere/lavere* og *gå opp/gå ned*. Gjerningene i samtalene er dominert av nøkkelord som likner disse. De er med i mange ulike varianter, og er hovedingrediensen i utsagnene som elevene uttrykker. Det er nøkkelord som også fungerer som hverdagsbegrep i det norske språket. Vi har gått opp og ned trapper siden vi var veldig små, og noen barn er høyere eller lavere enn andre, elevene er vant til å møte ordene i helt dagligdagse situasjoner. At elevene trenger mange gjerninger for å få grep om disse begrepene i en matematisk situasjon er ikke så rart, med tanke på elevene er kjent med de fra før, men med litt annen betydning.

Den matematiske diskursen er slik jeg ser det, det språket vi snakker når vi snakker om matematiske objekter. I spenningsfeltet mellom den matematiske diskursen og det matematiske objektet, der man tenker og samtaler, skjer det mye hos de unge elevene i denne undersøkelsen. Der utvikler elevene nøkkelord, kommer de til erkjennelser, og de påvirker hverandre og påvirkes av andre. I dette rommet mellom det matematiske objektet elevene forholder seg til og det språket de bruker må de forholde seg til de visuelle mediatorene og deres betydning. De utfører gjerninger for å øve på forklaringer, og de uttrykker narrativ som de forsøker å få godkjent i gruppa. Jeg har satt dette opp i en figur, slik man kan se for seg at alle disse kjennetegnene i elevenes språk henger sammen.

Figur 3 – kjennetegn i elevenes språk

6 konklusjon

Arbeidet med denne undersøkelsen har vært en lærerik prosess. Som matematikklærer har jeg fått en unik mulighet til å tilegne meg detaljkunnskap om hvordan elever bruker språket sitt for å utvikle sin deltakelse i den matematiske diskursen, og ikke minst hvordan jeg som lærer påvirker elevenes bruk av den matematiske diskursen.

Jeg vil i dette kapittelet forsøke å svare på undersøkelsens problemstilling med bakgrunn i de funnene jeg har gjort i analyseprosessen. Først vil jeg presentere hovedfunnene, før jeg vil vurdere hovedfunnene opp mot undersøkelsens teori. Sist vil jeg forsøke å se hovedfunnene i sammenheng med hverandre, og hva de har å si for læreres undervisning i matematikk.

I denne undersøkelsen har oppmerksomheten vært rettet mot:
Hva kjennetegner 6-7 åringers språk i arbeid med generalisert aritmetikk?
Gjennom to undervisningsøkter der fokuset var samtale og innholdet var generalisert aritmetikk har elevene vist sin kompetanse innenfor den matematiske diskursen.
Analysen og drøftingen ble kategorisert i to hovedkategorier, hvor den ene igjen ble delt i tre underkategorier.

1. Kjennetegn på elevenes diskurs: og konkrete språket på ord- og setningsnivå.
2. Kjennetegn på elevenes utvikling av diskurs: hvordan elevenes samtale utvikler seg igjennom undervisningsøktene og derfor er på et mer overordnet nivå, fordelt på:
    - Utvikling av nøkkelord
    - Erkjennelser
    - Påvirkning av andre tilstede

Noen av disse kategoriene var mer framtredende enn andre, og som jeg beskrev sist i kapittel 5 var det to elementer som var framtredende. Elevenes gjerninger - øvingshandlinger til forklaringer og hvordan elevene tok tak i hverandres utsagn og bygget videre på disse. I tillegg var det tre andre funn som var påfallende.

Hovedfunnene er derfor:

- Elevenes diskurs er stekt knyttet sammen med medelevers ytringer og samhandling med disse elevene.
- Elevenes diskurs består hovedsakelig i øvingshandlinger, gjerninger.
- Elevenes diskurs inneholder alle kjennetegnene på en matematisk diskurs.
- Elevene viser evne til å utvide kunnskapen sin rundt matematiske objekter.
- Elevene er i oppstarten av sin utvikling av matematiske nøkkelord.

Jeg har i denne undersøkelsen hentet informasjon ut i fra egen undervisning med egne elever, i tillegg har Anna Sfards teori om matematisk diskurs vært med som en rød tråd gjennom hele undersøkelsen, fra før jeg gjennomførte undervisningen og helt inn i konklusjonen (Sfard, 2008, s. 124 - 260). Hennes syn på matematikk som en diskurs har vært med på å forklare hvordan elevenes diskurs kan være av matematisk karakter selv om elevene i undersøkelsen er unge.

Fordi elevene var så unge opplevdes det overraskende for meg at de tok med seg så mye av det de hadde lært tidligere inn i undersøkelses-situasjonen, som var en ny situasjon for dem. Som beskrevet i metodekapittelet 3.3.1 «Generaliseringsoppgave» ble elevene avledet fra det tenkte matematiske objektet i undersøkelses-situasjonen, til å knytte denne nye situasjonen til det de hadde lært fra før. De tok stadig opp godt innøvde addisjonsstrategier, og jeg var nødt til å improvisere med større og antatt vanskeligere tall for å «tvinge» elevene ut av de kjente strategiene. Utgangspunktet for de valgte tallene var at de samme tallene var brukt i den opprinnelige oppgaven (Van de Walle et al., 2014, s. 17). Da tallene ble endret fikk elevene gradvis endret fokus over på relasjonen til tallene og samtalen endret seg til å handle om det nye de så. I denne endringen kom funnene til syne i språket til elevene.

Elevenes diskurs er sterkt knyttet sammen med medelevers ytringer og samhandling med disse elevene.

Det var to av hovedfunnene som pekte seg ut som hakket mer synlig enn de andre, fordi de var jevnt synlige igjennom hele undervisningen. Hvordan elevene ble påvirket av hverandre var et av de. Säljö (2001) sier at tenking også er språk i et sosiokulturelt perspektiv, og at tenking like gjerne kan skje mellom mennesker som i mennesker (Säljö, 2001, s. 110-114). Gjennom begge undervisningsøktene veksler elevene på å ta ordet, de snakker tidvis i halve setninger, og en elev tar over for det den forrige forsøkte å sette ord på. De gir på denne måten de andre elevene tilgang på egne tanker og kan derfor bygge videre på hverandres tanker. Denne tankeutvekslingen åpner for at elevene kan komme til ulike løsningsforslag (Säljö, 2001, s. 117). Samhandlingene elevene i mellom viser seg også i hvordan de kan dele tanker som gjør at andre elever knytter de framlagte tankene med sine egne og derfor kommer til erkjennelser om det matematiske objektet. Dette kan være erkjennelser som elevene alene ikke kunne kommet til, uten å samkjøre tankene sine. En elevs tanker kan få en annen elev til å se på tallene og relasjonene mellom dem i et nytt lys. Eksemplene i analysen over viser også at flere elever ofte er representert i hvert eksempel. En erkjennelse eller en gjerning som en elev begynner å ytre er ofte fullført av en eller flere andre elever.

Elevenes diskurs består hovedsakelig i øvingshandlinger, gjerninger.

Men selv om elevene tydelig delte tankene sine med hverandre, var det på ingen måte tydelig hva de tenkte og hvordan de tenkte. Elevene endret stadig på setningene sine, utsagnene deres var upolerte og uferdige, og fulle av snubling i ord og nøling. Dette er et fenomen som Pimm (1987) peker på, når han presiserer at elever trenger å øve seg på å uttrykke seg. Pimm sier også at det er nødvendig at elevene øver seg på å lytte til hverandres snubling for å polere og spisse sine egne forklaringer, (Pimm, 1987, s. 43). I en samtale som denne undersøkelsen var lå det til rette for mye øving, både på å få lov til å snuble selv, til å lytte og til å polere egne utsagn. Og analysen min viser at det var også det som skjedde. Alle snublingene elevene gjorde er eksempler på hvordan Säljö beskriver det å tilegne seg et språk, her en matematisk diskurs. Å kunne få innblikk i en del av hvordan andre tenker og på den måten oppnå en felles forståelse rundt det de ser (Säljö, 2001, s. 117).

Disse øvingshandlingene kan vi også se på som det Sfard (2008) kaller for gjerninger. Gjerninger er en av de tre underkategoriene til kjennetegnet rutiner, og som nevnt sier Sfard (Sfard, 2008, s. 236-240) at gjerninger er forgjengeren for forklaringer. Noe som virker naturlig når man ser på de funnene jeg har gjort i denne undersøkelsen. Elevene har mange forsøk på å forklare den relasjonen de ser. Gjerningene (Sfard, 2008) eller snublingene (Pimm, 1987) var det andre tydelige funnet, de forekommer jevnt og ofte gjennom hele undervisningen.

Elevenes språk inneholder alle kjennetegnene på en matematisk diskurs.

Undervisningsøktene viser et rikt innhold av alle de fire kjennetegnene Sfard (2008) mener kjennetegner en matematisk diskurs. Det vil si at den diskursen elevene hadde i undervisningsøktene var av en matematisk karakter. De fire kjennetegnene; nøkkelord, narrativ, visuelle mediatorer og rutiner, er ikke representert i like stor grad. Narrativene er der, men kun få godkjennes som sann, og de visuelle mediatorene er det læreren som presenterer. Allikevel er de der, og elevene tar fort i bruk de visuelle mediatorene på en naturlig måte. Elevene strever litt underveis for å finne nøkkelord som beskriver den relasjonen de ser, men de holder seg til variasjoner rundt «å gå opp/å gå ned», og virker å være enige om at disse nøkkelordene er viktige for relasjonen. Sfard (2008) deler det siste kjennetegnet, rutiner, opp i ytterligere tre ulike kategorier: gjerninger, forklaringer og ritualer (Sfard, 2008, s. 223). Sfard (2008) understreker at det kan være vanskelig å skille gjerninger og forklaringer fra hverandre (Sfard, 2008, s. 236-240), noe jeg opplevde det også var i denne undersøkelsen. Gjerninger er øvingshandlingene som er forgjengeren til forklaringer. Elevene i undersøkelsen viser at de trenger disse øvingshandlingene for å komme fram til forklaringer og tilslutt til godkjente narrativer om relasjonene mellom tallene. Ritualer, som er tredje kategori av rutiner kommer også til syne i noen av elevenes behov for å vise at de kan regne ut de regnestykkene med høyere tall. Av kjennetegnene for matematisk diskurs så er det elevenes gjerninger som dominerer elevenes diskurs i undervisningsøktene.

Elevene viser evne til å utvide kunnskapen sin rundt matematiske objekter.

Fordi elevene i undersøkelsen er unge var det interessant å se deres evne til å utvikle og utvide kunnskap rundt noe som var såpass abstrakt som generalisert aritmetikk er. Små barn er konkrete, og mine erfaringer er at de ofte kan synes det er vanskelig å tenke abstrakt som så unge. Funnene i denne undersøkelsen viser allikevel at elevene kan utvikle kunnskapen rundt et abstrakt matematisk objekt som her; $m + n = m (-x) + n (+x)$. Sfards (2008) måte å lage et bilde på hvordan denne tilegnelsen av kunnskap er å tegne et tre omkranset av erkjennelser. Erkjennelsene av det matematiske objektet er personlig, og flere av elevene er med på å uttrykke nye erkjennelser rundt denne undersøkelsens abstrakte objekt. Det gjør at de viser en evne til å strekke seg lenger enn det de kan fra før, og derfor oppdager nye erkjennelser rundt det gitte matematiske objektet (Sfard, 2008, s. 164 - 165).

Elevene er i oppstarten av sin utvikling av matematiske nøkkelord.

Sfard (2008) har laget en 4-stegsmodell for menneskers utvikling av nøkkelord innenfor den matematiske diskursen (Sfard, 2008, s. 177 - 182). Undersøkelsen min viser at elevene stort sett holder seg til Sfards to første utviklingssteg, altså *passiv bruk* – de knytter noe de kjenner fra før til det nye de blir presentert for og *rutinedrevet bruk* – de bruker nøkkelord på tvers av situasjoner de oppfatter som like. At språket til elevene bare viser utviklingssteg en og to kan være naturlig på grunn av deres unge alder.

Hovedfunn i sammenheng med hverandre

Når jeg nå skal se på alle hovedfunnene i sammenheng med hverandre, vil det være en forutsetning at jeg ser på den matematisk diskursen som et språk, og at en diskurs er en struktur med mange lag der ett lag ofte er opphavet til neste lag (Sfard, 2008, s. 129). Når elevene bruker språket i arbeidet med generalisert aritmetikk i undersøkelsen her, lager de seg et nytt lag i diskursen i den første undervisningsøkta, og enda et nytt lag i diskursen i den andre undervisningsøkta. Jeg har allerede vist at diskursen elevene bruker har kjennetegn som gjør at vi kan kalle den matematisk. Elevene er i en prosess når de utvider strukturen i diskursen sin og det er i denne prosessen elevene kommer til nye erkjennelser. I denne utviklingen av nye lag i strukturen bruker elevene språket til å øve seg på å uttrykke seg presist om relasjonene de ser. Elevene har ikke fullt ut utviklet en helt objekt-drevet bruk av nøkkelord, og de er ennå avhengig av at situasjoner oppfattes som like, for å bruke nøkkelordene.

Alle funnene i undersøkelsen har en fellesnevner. Den fellesnevneren er at elevene hele tiden er i samhandling med hverandre når de bruker språket sitt. Hvordan elevene påvirkes av det lærer og medelever sier når de selv skal uttrykke seg, er så innfiltret i hverandre at det er vanskelig å se på en enkelt elevs utsagn helt for seg selv. I følge Säljö (2001) er det å tilegne seg et språk å delta i et sosialt samspill, og at disse sosiale samspillene påvirker måten vi tenker på (Säljö, 2001, s. 89-90). Hvis vi kan se på den matematiske diskursen som et språk vil denne samhandlingen altså være det å lære seg den matematiske diskursen. Man si at den meget synlige samhandlingen mellom elevene hjelper dem med å komme inn i den matematiske diskursen. Det er et paradoks at for å delta i en matematisk diskurs må man kjenne til den, men for å bli kjent med den matematiske diskursen må man delta i den. Det er en sirkulæritet i det (Sfard, 2008, s. 129-130). Tenk deg at du skal hoppe på en karusell, som går rundt og rundt, i fart. Slik går det kanskje an å tenke at det er og plutselig skulle ta del i den matematiske diskursen. I det man hopper på karusellen er man i ubalanse, og må streve litt før man finner balansen og kan sette seg ned. I det barn hopper inn i den matematiske diskursen er de i ubalanse og forstår kanskje ikke alt som sies. Man må famle seg litt fram for å finne ordene. For hvert nytt matematiske objekt blir det som om man må reise seg opp og sette seg i et nytt sete på karusellen. Det er skummelt å reise seg i fart, og finne den nye balansen. Da er det trygt å være flere som er sammen for å lære det nye, den lyttingen, øvingen og poleringen av setninger læres best i samspill og i dialog med andre. Det er da det er et mål å bli enige om en akseptert forklaring (Pimm, 1987, s. 23).

Informantene i denne undersøkelsen er unge elever fra andretrinn på en helt vanlig norsk skole. At elevene kun er i 6-7 årsalderen kan ha noe med at behovet for å øve på forklaringer kommer så godt til syne. For å sikkert kunne si det ville man være nødt til å se på hvordan eldre elever bruker den matematiske diskursen, i en liknende undersøkelse.
Å studere hvordan 6-7åringen bruker språket sitt i arbeid med generalisert aritmetikk har vært interessant fordi elevene ennå er så unge at det muntlige uttrykket er det uttrykket de har øvd mest på i livet. Det skriftlige uttrykket er fortsatt ganske nytt for noen. Det gir elevene bedre forutsetninger for å kunne vise en lærer hvordan de tenker om det får gjøre det med sitt muntlige språk, framfor sitt skriftlige. På forhånd lurte jeg på om det var slik at elevene hadde evne til å tenke abstrakt og uttrykke dette. Da var det interessant å se på hvor mye mer elevene kunne vise av sin abstrakte tenking gjennom det muntlige språket, noe de ennå ikke har forutsetninger for å få til skriftlig.

Jeg har tidligere gjort meg erfaringer med at jeg som lærer oppdager at unge elever kan så mye mer enn jeg tidligere har antatt, når jeg bare har fått tid til å snakke matematikk med dem. Det var derfor et viktig poeng for meg at elevene skulle være så unge, for å kunne se på akkurat hvordan språket hjalp i det matematiske arbeidet de gjorde. Etter analyseprosessen vil jeg si at elevene fikk vist at de kan vise en god del mer av sin abstrakte tenking i muntlig arbeid enn i skriftlig. Og kanskje det aller viktigste er at de bruker språket sitt først og fremst til å samhandle med hverandre om å vise hvordan de tenker. Slik kan de ta del i hverandres tanker, belyse nye sammenhenger for hverandre og sammen dra nytte av hverandres uttalte tanker.

Så hvis jeg skal svare kort på *hva som kjennetegner 6-7åringers språk i arbeid med generalisert aritmetikk* vil jeg svare:
Det som kjennetegner disse elevenes språk er at de støtter seg på hverandre, de uttrykker idéer og tanker for å kunne bygge videre på hverandres tanker. De er i en øvingsfase og trenger mange forsøk og mulighet til å snuble når de skal uttrykke seg, læreren må veilede og bidra med nøkkelord og begreper. De har ikke kommet så langt i utvikling av nøkkelord. På tross av deres unge alder og korte erfaring med matematikkfaget har de et språk som inneholder mange kjennetegn på matematisk diskurs og de viser evne til å strekke seg utover den kunnskapen de allerede har og uttrykke erkjennelser rundt et abstrakt matematisk objekt.

Framover

Hvis man skal ta med seg noe av det undersøkelsen har vist videre inn i matematikkundervisningen så vil det være å verdsette elevenes evner til å bruke språket til å tilegne seg kunnskap. I et sosiokulturelt perspektiv er kunnskap knyttet til argumentasjon og kommunikasjon mellom mennesker (Säljö, 2001, s. 25-26). Säljö (2001) sier at den sosiokulturelle tradisjonen ser på kommunikasjon som den viktigste forutsetningen for å tilegne seg kunnskap (Säljö, 2001, s. 21-23). Med funnene i denne undersøkelsen som grunnlag blir det sosiokulturelle synet på tilegnelse av kunnskap tydelig. Hva medelevene og læreren kommuniserer blir utrolig viktig for hva den enkelte elev sitter igjen med av kunnskap etter endt undervisning.

Den kunnskapen undersøkelsen gir oss om elevenes behov for å kunne bruke språket, bør gjøre oss lærere mer bevisst på å legge opp undervisning som gir rom for at alle elevene skal ha god anledning til å kommunisere sine tanker. Denne undersøkelsen sier ingenting eksplisitt om undervisningsformen som brukes. Matematisk samtale som er brukt i undersøkelsen er likevel en undervisningsform som har matematisk kommunikasjon som hovedingrediens, og er derfor egnet for at elevene skal kunne få anledning til å øve på forklaringer og hvordan de skal uttrykke seg. Videre gir undervisningsformen godt grunnlag for at elevene skal få en mulighet til å komme inn i den matematiske diskursen de trenger for å uttrykke seg presist. Og føre en god matematisk samtale krever at lærer innehar en god del kunnskap om hvordan elever bruker språket i matematisk diskurs. Akkurat på dette punktet vil denne undersøkelsen kunne bidra til at lærere tilegner seg kunnskap om hvordan de yngste elevene bruker språket sitt i matematikken.

Undersøkelsen er en kvalitativ undersøkelse der jeg selv er fullstendig deltakende, og at jeg forsker på mine egne elever. For å kopiere en undersøkelse vil man forsøke å gjøre det samme som forskeren har gjort, men fordi alle elever og lærere er ulike, er det umulig å kunne gjenskape akkurat den samme undervisningen som i denne undersøkelsen, og det vil derfor være vanskelig å kopiere denne undersøkelsen nøyaktig (Postholm, 2005, s. 169-170). Allikevel er undersøkelsen viktig fordi den vil kunne vekke nysgjerrighet i andre om hvordan deres egne elever bruker språket i matematikkundervisningen. Jeg håper at denne undersøkelsen kan bidra til at lærere undersøker hvordan deres elever utvikler sin bruk av matematisk diskurs, og derfor også legger fra seg læreboka i større grad. At man, etter å ha lest om denne undersøkelsen, kan øke elevenes nysgjerrighet igjennom matematiske samtaler.

For videre arbeid med studiens tema, matematisk diskurs, kan følgende være interessant å forske på:

- Erkjennelser. Å gå grundigere inn i *hvordan* elever kommer til erkjennelser som utvider og skaper nye erkjennelsestrær.
- Utvikling av nøkkelord. Ved hvilken alder vil elevene kunne nå en objekts-drevet bruk der nøkkelordet automatisk vil framkalle en erkjennelse. Og også hva som skal til for at en elev skal kunne nå dette steget i Sfards (2008) 4-stegsmodell mot utvikling av nøkkelord.
- Å se på hvilke undervisningsmetoder som gir best mulig forutsetninger for at unge elever skal få rom til å øve gjerninger, komme til gode forklaringer og deretter kunne bli enige godkjente narrativ. Matematisk samtale er brukt i denne undersøkelsen, men undersøkelsen har ingen fokus på hvorfor denne undervisningsmetoden fungerer, og om den er den beste. Det kan være andre undervisningsmetoder som er bedre egnet.
- Å se på hvilke undervisningsmetoder som best kombinerer det å kunne utføre øvingshandlingene de trenger og det å samhandle. Må det være en undervisningsmetode som bare har fokus på språk, eller kan undervisning som inneholder andre elementer også være egnet.
- Å forske på hva som kjennetegner eldre elevers språk i samtale om generalisert aritmetikk. Er disse elevenes bruk av diskursen mer avansert? I så fall hvordan er den mer avansert?

Litteratur

Bergem, O. K., Kaarstein, H., & Nilsen, T. (2015). *Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMSS 2015.* (https:///file/ci/66911898/Vi_kan_lykkes_i_realfag-hires.png.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forl.

Clements, D. H., & Sarama, J. A. (2009). *Learning and teaching early math : the learning trajectories approach*. New York: Routledge.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7th ed. utg.). London: Routledge.

Jordheim, H., Rønning, A. B., Sandmo, E., & Skoie, M. (2008). Fortolkning. I *Humaniora : en innføring* (s. 190-250). Oslo: Universitetsforl.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically : communication in mathematics classrooms*. London: Routledge & Kegan Paul.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode : en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforl.

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis : et sosiokulturelt perspektiv* (S. Moen, Trans.). Oslo: Cappelen akademisk.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating : human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Store Norske Leksikon. Hentet 17. april fra https://snl.no/diskurs

Thagaard, T. (2003). *Systematikk og innlevelse : en innføring i kvalitativ metode* (2. utg. utg.). Bergen: Fagbokforl.

TIMSS (2003). *Hva i all verden har skjedd med realfagene?* (http://www.uv.uio.no/: Universitetet i Oslo. Hentet fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/2003/rapport-2003-til-web.pdf

Vaags, R. H. (2004). *Filosofiens hovedspørsmål : innføring i filosofi*. Bergen: Fagbokforl.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2014). *Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally* (8th ed. utg.). Essex: Pearson Education Limited.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *An International Journal, 67*(2), 171-185. doi: 10.1007/s10649-007-9092-2

Vedlegg

Vedlegg 1 – transkripsjoner av undervisning.

Undervisningsøkt 1

1	LÆRER: Okei, spørsmål *(snur seg til tavla for å skrive 6+6).* Og vi rekker opp hånda hvis vi har svaret. Berit?
2	B: 12
3	LÆRER: Mhm. 6+6 er 12. Rekk hånda i været de som er enig. *(Alle rekker opp hånda).* Og så har jeg en til. *(Skriver 8+8 på tavla)*. Marit?
4	M: 16
5	LÆRER: 8+8 er det samme som 16.
	1 min
6	Eva: Har det noe å si om vi tar feil?
7	LÆRER: Nei, det har aldri noe å si, Eva. *(Skriver 7+5 under 6+6)*. Har du lyst til å prøve Eva?
8	E: Ja, 12.
9	Noen kommenterer: Ja, det er riktig.
10	LÆRER: 5 + 7 er 12. Det synes du var mye lettere. Hvorfor det?
11	E: Ja, jeg synes… Fordi at jeg visste hva 5 og 5 var, og når vi tok den *(peker på 7eren)* så var det 2 til i den, og da ble det
12	12.
13	LÆRER: Du delte opp 7eren? I 5 og 2?
14	E: Ja.
15	Ole: Jeg har en annen måte!
16	LÆRER: Har du en annen måte?
17	O: Ja, siden jeg vet at 3+2 er 5, så plusser jeg på 3 så få vi 10, så plusser jeg på 2 til
	2 min
18	LÆRER:Mhm. Du fylte opp tieren?
19	O: Mhm.
20	LÆRER: Det gjorde Eva og, men hun fylte tieren andre veien.
21	O: Ja!
22	LÆRER: Hun tok 5+5, og du tok 7+3.
23	O: Mhm.
24	M: Jeg har en annen!
25	LÆRER: Ja, Marit?
26	M: Jeg så at det ble 12 der *(peker på 6+6)*, det er et mønster, for det blir 12 og det der blir 12.
27	LÆRER: Jaha? *(Det blir litt summing, alle vil gjerne si noe).*
28	LÆRER: Så du mener at hvis jeg skriver et stykke under 8+8 nå så får jeg til 16?
29	M: Ja!
30	LÆRER *(overhører noen som forsøker å avbryte, fortsetter tråden med Marit)*: Okei, hvilket stykke må jeg skrive under her for å få til 16 da? Hvis jeg skal følge mønsteret til Marit?
31	M: Jeg vet! 8 og 9!
32	LÆRER. 8 og 9 *(begynner å skrive).*
33	Jan: HÆ?
34	LÆRER: Jan sier hæ. Hvorfor sier du hæ Jan?
35	J: Eh… *(summing blandt elevene).*
36	Berit: Jeg er helt uenig jeg.
37	LÆRER: Du er helt uenig...
38	M: *(avbryter)* Jeg mente 7!!
39	LÆRER: Du mente 7, hvor skal jeg sette 7?
40	M: Du skal sette 7 forrest der.
41	LÆRER: I stede for 8 tallet?
42	M: Mhm.
43	Lars: Det blir uansett…
	3 min *(summing)*
44	LÆRER: Men hva har jeg gjort, da? Forklar meg mønsteret, Jan?
45	J: At på 16 så er det 8 og 8, 9, 8, 7 - så på den rekka er det nedover, og på den rekka er det oppover. *(Peker på 8+8 og 7+9 som står under hverandre).*
46	LÆRER: Her sånn? At 8 til 7 der går det? Nedover, var det det du sa?
47	J: Ja, og..
48	LÆRER: Og 8 til 9 går det?
49	J: Oppover. Så det neste tallet som skal være under 7, det skal være 6 og på 9´ern skal det være 10.
50	LÆRER: Er det det samme og eller?
51	Kor: Ja.
52	LÆRER: Jøss.
53	Eva: Fortsett… 9 og 6… Ja det er det samme ja!
54	Lars: Det blir bare mindre og mindre og mindre…
55	E: Det blir det samme nedover.
	4 min

56	LÆRER: Hm, kanskje det?! Dere! Kan ikke dere ta fram bøkene deres, finn ei blank side.. Finn ei helt blank side. For eksempel den. *(Leter fram blanke sider i bøkene).*
57	M: Denne?
58	LÆRER: Ja! På den blanke sida, kan dere finne flere tall hvor dette virker?
59	J: Skal vi skrive ned det der *(peker på tavla).*
60	LÆRER: Nei det trenger dere ikke.
	(Mange snakker)
61	LÆRER: Oj det ble mange spørsmål på en gang, rekk hånda i været. Anne har et spørsmål?
62	Anne: Jeg skal plusse til 128, det greier jeg.
63	LÆRER: Jaha? Okei? Åja, du dobler helt til 128?
64	A: Ja!
65	LÆRER: Aha, ja, men finner dere flere tall, hvor man har først doblet, og så gjør noen annet? Som er likt som det her *(peker på tavla).*
	5 min
66	Eva: Jeg vet ikke hva dobling er.
67	LÆRER: Her dobler du vet du Eva, det samme engang til.
68	E: Åja!
69	LÆRER: Ole?
70	O: Kan vi prøve minus og?
71	LÆRER: Det går an å prøve, det går an å prøve om 8-8 er det samme som 7-9.
72	E: Men 8-8 er 0.
73	LÆRER: Mhm, men er 7-9 0? Det går an å prøve. Berit?
74	B: Hvorfor kan vi ikke sette 4 og 8 under 7 og 5.
75	LÆRER: Jeg kan det, jeg kan det - *skriver opp*.
	Tavla ser nå slik ut: *6+6* *8+8* *5+7* *7+9* *4+8*
76	LÆRER: Men det viktigste er ikke den rekka nederst her. Det viktigste er det jeg setter i firkanten her nå *(tegner en boks rundt 6+6, 5+7, 8+8, 7+9).* Se om dere finner flere tall det går an og først doble, og så… Jan hva var det du sa vi gjorde?
77	J: At det er 8 8, så kommer det oppover på høyresida, og nedover på venstre.
	6min
78	LÆRER. Okei, se om dere finner flere tall, og det er lov til å jobbe 2 og 2. Ja, Anne?
79	A: Kan vi bruke viskelær?
80	LÆRER: Nei, du får ikke bruke viskelær, sett kryss over og begynn lenger ned.
81	O: Kan jeg skrive det der? (peker på tavla)
82	LÆRER: Nei du trenger ikke skrive det der.
83	O: Men det er lov?
84	LÆRER: Det er lov, men du trenger ikke skrive det der. Du kan godt begynne med to helt andre tall. Prøv med et hel annet tall.
85	Eva: Men jeg vet ikke hva jeg skal skrive.
86	Anne: Kan jeg begynne med 10 og gå nedover?
87	LÆRER: Ja det kan du. Prøv om det går på 10 + 10? Snakk sammen. Anne, du har begynt med mange forskjellig der, men går det an å gjøre der, slik jeg har gjort her?
88	A: skal jeg skrive det med 16?
89	LÆRER: nei, du behøver ikke skrive det med 16, men her har du skrevet 4+4 er 8.
90	A: Ja…
91	LÆRER: Får du til å gå ned og gå opp, slik som Jan sa?
	7min
92	LÆRER: Jan, prøv å forklare Anne.
	(Barna jobber i bøkene og med hverandre, forsker veileder ulike barn - uhørlig. ca 1,5 min)
	8min
93	LÆRER: Men i stede for at dere bare dobler, for nå ser jeg at dere bare dobler og dobler...
94	Kari: Men jeg vil ta minus, men vil doble først.
95	LÆRER: Prøv på den for eksempel. Hva blir det?
96	K: 20
97	LÆRER: Mhm, gå opp og gå ned, se om det er 20 det og?
98	K: Her skal jeg gå ned og her skal jeg gå opp?
99	LÆRER: Mhm..
	10 min
	(Barna jobber i bøkene og med hverandre, forsker veileder ulike barn - uhørlig. ca 6,5 min)

	15min
100	LÆRER: Okei, kan vi snakke litt sammen på tavla nå? Er det noen som har funnet flere tall, der man kan doble og så ta nedover etterpå?
	(Jan snakker oppå, og sier "Ja, 7+7 og 1+1)
	(Alle svarer på en gang). Vent litt, jeg vi ha et tall fra hver nå. Jan?
101	J: 11 og 5, det blir 16.
102	LÆRER: Å ja, du har tatt nedover sånn ja, men om vi tar 11+11 da? *(Skriver 11+11 på tavla).* Er det noen som har prøvd den? Lars har prøvd den. 11 + 11 det er?
103	Lars: Det er 21, nei 22.
104	LÆRER: Så skal vi gå en opp og en ned slik Jan gjorde. Hva er en mindre enn.. altså en ned først, og så en opp. Hva er en mindre enn 11? Anne?
105	A: 10 *(Forsker skriver opp under 11)*
106	LÆRER: Hva er en mere enn 11?
107	A: 12 *(Forsker skriver opp under 11)*
	16 min
108	LÆRER: 12 + 10 er?
109	L: 22
110	LÆRER: Vi får samme svar. Eva du sa noe lurt.
111	E: Telle på fingrene?
112	LÆRER: Nei, når vi var på 7+7, husker du det?
113	E: er 14.
114	LÆRER: Ja, og så sa du.. 6 + … 6 var en mindre.. Hva var en mer?
115	E: 6 +....
116	LÆRER: 6 + ..
117	E: 6 + 8
118	LÆRER: *(skriver)* 8.
119	E: Så tok vi bort…
120	LÆRER: Hør på hva Eva sier nå!
121	E: Så tok vi bort en fra 8'ern. Så ble det 7 på den ene og 7 på den andre og da ble det 14.
122	LÆRER: Mhm! Eva fant ut at.. Hun skulle finne ut hva 6+8 var man da tok hun bare og flytta en tilbake og så at dette (peker på 8+6) var det samme som 7+7.
	17 min
123	Jan: Hvor lang tid egentlig, tar det her?
124	LÆRER: Hva blir dette da? Berit?
125	B: Jeg tok 20'er vennene jeg.
126	LÆRER: Du tok 20?
127	B: Det er akkurat det samme som 10'er vennene, bare at du tar på en ener foran.
128	LÆRER: Sånn? *(Har skrevet 10 + 10 på tavla)*
129	B: Nei en tier foran.
130	LÆRER: Du to 10 + 10?
131	B: Mhm, i starten. Og så tok jeg 9+11, så tok jeg 8+12, så tok jeg 7+13, så tok jeg 6+14 *(fortsetter..)*
132	LÆRER: dere som skriver nå, det er litt dumt… Jeg vil at dere skal følge med oppover, for jeg kommer til å spørre om ting som også dere kan svare på. Følge med her nå. Men hva ble det da?
133	B: 20
134	LÆRER: vil det alltid være det samme?
135	B: Ja, for at da skriver vi 20'er venner.
136	LÆRER: Men vil det være det hvis jeg tar.. Altså vil det alltid bli slik?
	18min
137	B: Ikke for hver gang man tar et nytt regnestykke.
138	LÆRER: Ikke? Hvis jeg bestemmer meg for å ta 15+15, Jan, du prøvde med 15+15 gjorde du ikke?
139	Lars: Jeg prøvde det.
140	LÆRER: Okei, du hoppa over det.
141	L: jeg prøvde det.
142	LÆRER: Du prøvde 15+15, Lars prøvde 15+15.
143	L: Det er 30.
144	LÆRER: Det er 30 *(skriver 15+15=30 på tavla).* Hvordan gjorde du på den neste da?
145	L: Da tok jeg… 32, 16 + 16.
146	LÆRER: Tok du opp på begge sidene? Okei, kan vi prøve å gjøre dette da? *(Peker på ett av de forrige regnestykkene på tavla).* Hvis vi går en opp og en ned. Jan sa: vi går en opp på den ene sida og en ned på den andre sida. Skal vi prøve?
147	Jan: Ja for da blir det hele tiden likt.

148	LÆRER: Blir det likt?
149	J: Ja, hvis du tar en ned og en opp.
	19 min
150	J: For liksom.. Ja, for se her, nå.. Det var 15+15, så tok du den ene fra den der 15, da blir det en mer.
151	LÆRER: Flytta den dit? *(Stryker over den ene 15, skriver 14. Skriver pil til den andre 15, stryker over og skriver 16, samtidig som Jan snakker).*
152	J: Ja, og da blir det 16.
153	LÆRER: Der ja?
154	J: Ja!
155	LÆRER: Og da til sammen er det?
156	J: 30
157	LÆRER: Vil det virke hvis jeg sier 68 + 68?
	Mumling, noen prøver å regne ut. "det blir noe med 100".
158	LÆRER: Nei, hva det blir vet jeg ikke i hodet. Det er noe med etthundre. Men hvis vi sier 68 + 68 *(skriver 68+68 på tavla).* Og så tar vi en ned, det blir 60….? Anna? 60…? Hvis vi går en bakover så får vi til..?
159	Anna: 67!
	20min
160	LÆRER: Ja! og så skal vi gå oppover fra..
161	Jan: *(avbryter):* 69!
	(LÆRER skriver 67 + 69 under 68+68 på tavla)
162	LÆRER: 69. Har de samme svar tror dere?
163	Spredt: Ja.
164	LÆRER: Hvorfor det?
165	Jan: Jo fordi at nå gjorde du det samme som det der, som ble 30. Du overførte en ener til den andre og da blir det en mere og en mindre der. *(Peker mot tallene på tavla).*
166	LÆRER: Overfører en ener? Var det det du sa?
167	Jan: ja!
168	LÆRER: Overfører en ener fra den 8eren til den 8eren så den blir en 9er? Og den en 7er? Vil dette alltid gjelde? Snakk sammen 2 og 2. Jan og Ole, snakk, skriv hvis dere trenger det, og prøv dere fram. Anna og Berit prater sammen, Kari og Marit prater sammen og Eva og Lars.
169	Ole: Om hva?
170	LÆRER: Vil det alltid være slik?
171	Ole: Ja?
172	LÆRER: Men snakk sammen.
	(Prat, noen spør "kan det være minus?" LÆRER sier "Nei, det skal være pluss").
	21min - *21.50*
	Midt i pratingen høres en samtale:
173	LÆRER: Jeg heller vet ikke hva det er. Men har det samme svar?
174	Anna: Ja.
175	LÆRER: Hvorfor det?
176	Anna: Fordi hvis man tar en fra 9 til 7eren så blir det det samme som det som sto over.
	22min
177	LÆRER: Okei. Vil det være slik uansett hvilket tall jeg putter her nå?
178	Anna: Ja.
179	LÆRER: Hvorfor?
180	Anna: Fordi at det står samme svar bare med andre tall bak.
	LÆRER smiler og nikker.
181	LÆRER: Okei, folkens, følg med framover. Anna må si noe høyt. Fordi… Jeg spurte deg Anna, vil det alltid være... Uansett hvilket tall jeg setter her nå..
182	Anna: Det kommer alltid til å være det samme.
183	LÆRER: Fordi?
184	Anna: Fordi det blir det samme bare at man setter andre tall… bak eh.. bak tier… bak tierne, det kommer alltid til å bli det samme uansett.

185	LÆRER: Kan jeg bytte ut med hvilke som helst tall?
186	Jan: Ja.
187	LÆRER: Kan jeg skrive 68 + 68 er det samme som 63 + 62? *(skriver 68 + 68 = 63+ 62 på tavla).*
188	Jan: Nei, du må ta hele tiden… sånn som… Kan jeg komme opp…?
	23 min
189	LÆRER: Du kan komme å tegne. Jeg kan viske ut nederst her.
190	Jan: For det skal bli 63, og så har du…. det… og så har du 62 + 1, og så hvis du tar 61 + 2, så er det motsatt. *(skriver 62+1 og 61+2 på tavla).*
191	LÆRER: Ja, okei… så så lenge… Hva er det med enerne vi må passe på da?
192	Lars: At det blir like…. *(Samtidig som forsker prater).*
193	LÆRER: Hva er det som blir feil med de enerne her *(setter strek under 63 + 62).* Lars?
194	Lars: At det er for lite!
195	LÆRER: Det er for lite, ja!
196	Flere: Ja!
197	LÆRER: Hva er det vi må passe på da, når vi putter enerne bakom. Anna?
198	Anna: At det skal være høyere tall enn eh… enn sånne som eh.. som det der. Ett høyt og ett mindre hvis det skal bli det samme.
	24 min
199	LÆRER: Hvis du går en ned på den ene siden så…
200	Anna: så må man ha ett høyere på andre siden...
201	LÆRER: Okei.
202	Anna: ... for at det skal bli det samme.
203	LÆRER: Tygg på den. Tygg på den. Er det... Er det sant eller? Det Anna sa? Anna sa nå at hvis at dette her skal bli sant, så må du passe på at hvis du går en ned på ene siden, så *må* du gå opp på andre siden.
204	Jan: Det er det jeg holder på med….
205	LÆRER: Stemmer det?
206	Flere: Ja.
207	LÆRER: Og mange av dere har skrevet lange, lange rekker med tier-venner og tjuer-venner nedover. Lange rekker med… nedover…. der eh.. Berit sine for eksempel. Du går hele tiden ned på den ene siden, hva gjør du da på den andre siden?
	25 min
208	Berit: Oppover?
209	LÆRER: Ja! Så hvis jeg skriver 3252 + 3252 *(skriver det på tavla)* jeg har ikke tenkt å regne det ut, jeg aner ikke hva det er.
210	Jan: Jeg kan regne det ut superfort.
211	LÆRER: Ja, men… Hvis jeg da.. Hva er det jeg kan gjøre da? Hvordan kan jeg forandre på dette her? Hjelp meg? Anna?
212	Anna: Bare ta litt høyere på den andre siden. Etter 3000.
213	LÆRER: 325…
214	Anna: 3 for eksempel.
215	LÆRER: 3 for eksempel ja, okei. *(Skriver 3253 på tavla).* Og da må det på andre siden bli?
216	Jan: Jeg vet hva svaret er. Det er *(oppå lærer og Annas samtale)* sekstusenfir…
217	LÆRER: 325…
218	Ole: *(veldig kjapt)* EN!
219	LÆRER: Ole, hva sa du?
220	Ole: En.
221	LÆRER: En. *(Skriver + 3251 bak 3253, slik at det ser lik ut: 3253 + 3251)*. Gir dette samme svar?
222	Flere: Ja!!
223	Jan: Det er 6504.
224	LÆRER: Ja det er det, men det var ikke så farlig.
	26 min
225	Jan: Å du kunne si s…
226	LÆRER: Men det var samme svar. Flotters potters.
227	Eva: Er vi ferdig?
228	LÆRER: Vi er ferdige.

Undervisningsøkt 2

Grupperom 2, konkreter (centikuber) ligger Framme på bordet hele tiden.

229	LÆRER: Nå skal jeg prøve å sette det slik at alle hører oss, da.
230	Lars: Jeeeeeep, oiiiiii.
231	LÆRER: okei.
232	Berit: Maren, et lite…
233	LÆRER: Nå starter vi og da er det vanlige regler, klasseromsreglene vi bruker å ha. Rekke opp hånda når du skal si noe, vent på tur, sant? Mhm… *BekreFtes av barna.*
234	Jan: Den ble litegrann skjev. (*Strever litt med stolen sin.)*
235	LÆRER: Ble den skjev? Ja, du Får sette deg til.
236	Berit: Maren, et bittelite spørsmål, kan vi Få lapp etterpå?
237	LÆRER: Ja, det sa jeg ja til i sted.
238	Berit: Åja!
239	LÆRER: Ja, okei. Det jeg lurer på om… Først… Vi tar 30 minu.. Nei, ikke 30 minutter. 30 sekunder tenketid; hva gjorde vi sist? Bare ta ned hånda.
240	Anne: Hvor mange minutter var det igjen?
241	LÆRER: 30 sekunder, et halvt minutt.
	1 min
242	LÆRER: Tenkte tid. Så tenker vi i 30 sekunder. Det er lov å legge hodet på bordet ja. Også tar vi etterpå og går igjennom hva det var vi gjorde. *(Hvisker)* Bare ta ned handa.
243	Berit *(hvisker):* Maren, jeg husker ingenting, For jeg er så glemsk.
	Stille i 20 sekunder.
244	LÆRER: Okei, er det noen som husker noe, så kanskje noen kommer på noe. Ole?
245	Ole: Vi tok slike plusser på For eksempel 1 + 10 er 11, også 2 + 9 er 11.
	2. min
246	LÆRER: Ja, det var ett eller annet med noen plusser ja. Anna, hva husker du?
247	Anna: At du spurte noe med 80.. 88 + 88, eh.. nei, 88 om det var det samme, hvis vi tok et mindre eller et større tall, så at det var det.
248	LÆRER: det var noe med mindre eller større tall og om det var det samme…
249	Lars: 44 og 44 er svaret…
250	LÆRER: Jan, har du noe du kan tilføye?
251	Jan: Ja, hvis det var 11 + ei… Nei, jeg glemte det.
252	LÆRER: Glemte du det? Okei. Men Lars hadde noe han huska?
253	Lars: For eksempel at vi måtte ta det samme tallet hele tiden, men det var Forskjellige tall.
254	LÆRER: den samme summen, er det det du tenker? At det at det ble det samme?
255	Lars: Ja
256	LÆRER: Ja. Mhm. Ja, bra. Marit?
257	Marit: Vi regnet.
258	LÆRER: Vi regnet, vi gjorde det og. Jan kom på noe.
	3 min
259	Jan: Det var det jeg egentlig skulle si i sted. Det var,vi gikk oppover og nedover, sånn 0+10, det er 10. Så 1+9, det er 10.
260	LÆRER: Ja, så hvis vi gikk oppover på den ene sida og nedover på den andre sida så fikk vi samme…
261	Jan: Ja.
262	LÆRER: Samme til sammen.
263	Flere: Ja.
264	LÆRER: Det kalles for sum. På mattespråket, så kaller vi det for summen. Når vi legger sammen tall. Det som kommer i
265	enden da kaller vi summen. Ole?
266	Ole: Vi delte sånn nesten det samme som halv, bare med tiervenner.
267	LÆRER: Ja noen brukte tiervennene ja. Brukte jeg bare tiervennene på tavla.
268	Flere: Nei.
269	Lars: og noe med andre tall og.
270	LÆRER: Hvilke tall da Lars?
271	Lars: For eksempel 18.
272	LÆRER: Hæ?
273	Lars: For eksempel 18 og 19
274	LÆRER: 18 og 19, ja. Mhm.
	4 min
274	Så jeg tenkte vi skulle prøve en ting i dag jeg, Fordi at sist så startet vi med to like tall. Husker dere det?
	Noen sier ja og noen sier nei.
275	LÆRER: 11 + 11 eller 68 + 68 eller...
276	Eva: Ja, det husker jeg!
277	Anna: Det var 88 + 88.
278	LÆRER: Ja, var det det ja? Ja, okei.
279	Jan: Hæ 88 + 88?
280	LÆRER: Og…
281	Anna: Nei det var Faktisk 68 + 68!
282	LÆRER: Ja, og så tenkte jeg at jeg skulle spørre dere nå da, at hvis jeg tar tallet 38 + 17. (Skriver ned, samtidig).

284	Lars: 38 + 17?
285	LÆRER: Og vi trenger ikke å regne det sammen. Men hvis man absolutt må regne det sammen så skriv bare svaret nederst på boka. Vi trenger ikke og tenkte på det akkurat nå, men man kan gjøre det hvis man absolutt vil.
286	Jan: Jeg vil!
287	LÆRER: Men hvis vi gjør.. Går opp og ned…
288	Lars: Ja, det likner noe…
289	LÆRER: Hjelp meg å gå opp og ned?
290	Kari: Jeg skjønte ikke det.
291	Ole: Jeg skjønte det.
292	LÆRER: Nei, noen skjønte noe. Lars? Prøv..
293	Lars: 18 + 37.
	5min
294	LÆRER: Ja, hva gjør du da Lars?
295	Lars: Går nedover, og tar ett hakk høyere, og ett hakk nedover.
296	Eva: ...ett hakk ned..
297	Marit: Få se..
298	LÆRER: Ser dere her? *(Viser arket med regnestykket på til resten).*
299	Berit: Åja.
300	LÆRER: Her har vi gått et hakk.. Bøy deg Framover Marit.. Her har vi… Her har Lars tatt ett hakk ned. Og her ett hakk…
301	Flere: Opp.
302	LÆRER: Opp. Mhm.
303	Eva: Det blir det samme svaret på begge to.
304	LÆRER: Ja, gjør det det?
305	Berit: Ja.
306	LÆRER: Eva sier med engang hun at det blir det samme svaret på begge to.
307	Flere: Ja.
308	Berit: Det blir jo det.
309	LÆRER: Det blir jo det, okei.
310	Jan: Bare hvis du går opp og ned.
311	LÆRER: Okei.
312	Berit: Jeg vet hvorFor.
313	LÆRER: Ja, hvorFor Berit?
314	Berit: Fordi at vi bare.. vi bare legger til en på en måte.
315	LÆRER: vi bare legger til en på en måte.
316	Berit: Og tar vekk en på en måte.
317	LÆRER: Ja, okei. Mhm.
318	Jan: Sånn som 37 og så pluss 13…
319	LÆRER: 18?
320	Jan: Ja.
	6 min
321	LÆRER: Mhm
322	Jan: Da liksom.. Den du tar nedover…
323	LÆRER: Den jeg tar nedover her? *(Peker på 38 og 37).*
324	Jan: Hæ?
325	LÆRER: Den jeg har tatt nedover her, her Fra 38 til 37? *(Peker igjen).*
326	Jan: Ja, For da liksom gir du den 38eren en til til 17, at det blir en mer der og en mindre der.
327	LÆRER: Så du mener at jeg Flytter den over?
328	Jan: Ja.
329	LÆRER: At jeg tar liksom en derifra til dit?
330	Lars: Også går den dit.
331	LÆRER: Og så da blir det.. altså derifra til dit da egentlig. *(Peker på 38 og 37, og Flytter Fingeren over til 17 og 18).*
332	Jan: Ja.
333	LÆRER: Er det det du mener?
334	Jan: Nei, at det blir tatt en ener til enerplassen og da blir det jo 18, og så går den *(peker på 38)* ned til 37.
335	LÆRER: Mhm. Tygg litt på den. Han Jan sier; hvis vi tar en ener fra den her enerplassen her *(peker på 8 i 38)*, hvis vi tar en ener på den enerplassen her,
	7 min
335 2	og flytter liksom den over på den enerplassen der *(peker på 7 i 17)*, så skjer det jo noe med den eneren her.
337	Jan: Ja, at den blir en mer.
338	LÆRER: den blir en mer. Enig?
339	Eva (svakt): da blir det 8 hvis den er 7.
340	LÆRER: Mhm (kan tyde på nikking).
341	LÆRER: Hvis jeg skriver 63 + …
342	Barna: 8? 19? 15?
343	LÆRER: 19? Skal vi ta 19? Ja, vi kan godt ta 19.
344	Noen: Nei 20!
345	LÆRER: 19! Kan jeg gjøre det samme her? *(Peker på oppskrevet ark 63 + 19).*
346	Ole: Eh, jaaaaa.
347	Eva: Kanskje.
348	Berit: Ja, kanskje det ja.

349	Marit: Nei.
350	Barna begynner å si nei og jo om hverandre.
351	Jan: Jo, du kan hele tida gjøre det.
352	Eva: Hvis du tar 18 der under. *(peker på 19).*
353	LÆRER: Okei hvis jeg tar 18 under 19 i steder for.
	8 min
354	Eva: Så tar du en…. Emmmm…. 20 der.. eh nei, ikke 20 men.. eh…
355	LÆRER: Eva har begynt her nå, er det noen som kan hjelpe oss på vei?
356	Lars: 34?
357	LÆRER: 19…
358	Berit: mmmmmmmm…..
359	LÆRER: Berit?
360	Berit: 32… Nei, 62 mener jeg…
361	Lars: Nei…
362	LÆRER: 62? (skriver 62 + 18 under 63 + 19).
363	Lars: Nei, det blir Feil.
364	LÆRER: Er det Feil Lars? HvorFor er det Feil?
365	Berit: Ja! (blir avbrutt)
366	Lars: Fordi det mangler.. Det skal være en ener der.
367	Berit: Jeg mener…
368	LÆRER: 61?
369	Berit: 64 da?
370	LÆRER: Så jeg kan ikke skriver det slik, jeg må skrive 61 + 18?
371	Noen sier ja.
372	LÆRER: er det det samme da?
373	Flere sier nei.
374	Lars: Jo det er det samme som Først.
375	Eva: Siden at det burde vært…
376	Lars: Det er det samme.
377	LÆRER: Du Jan, den strategien du tok med den der Flyttinga?
378	Ja: Ja,
379	LÆRER: Funker den på det regnestykket her?
380	Jan: eeeh, jeg tror det.
391	Eva og Berit: Nei….
	9 min
392	Eva: 39 skal det være der. 39.
393	Lars: Det skal være 4 tror jeg…
394	LÆRER: Oj, nå møtte vi på et problem.
395	Eva: 39.
396	LÆRER: Hvor? 39?
397	Eva: Der *(peker på 61).*
398	LÆRER: mener du 69?
399	Eva: hmmm, åj.. Nei.. Ja mener 69 ja.
400	LÆRER: okei, ja du mener det skal være 69 ja.
401	Eva: Nei det skulle ikke være 69..
402	LÆRER (Samtidig): pluss 18..
403	Eva:... det skulle være 64. 64!
404	LÆRER: Ikke 69? 64?
405	Eva Ja!
406	LÆRER: Mhm.
407	Lars: Jeg tror det blir 65.
408	LÆRER: Okei, nå har vi mange Forslag her.
409	Lars: 64 eller 65.
410	Anna: Jeg skjønner ikke noe nå.
411	Ole: jeg skjønner nesten alt.
412	LÆRER: Men Anne, se her nå da. Og Marit du må se. 63 + 19. *(skriver det opp på ny).* Han Jan sa at vi kunne gå en opp og en ned, men da må vi gjøre det på begge sider, sant?
413	Jan: Ja!
	10 min
414	LÆRER: på 62 så går vi en… Fra 63 til 62 går vi en ned eller en opp?
415	Eva: En opp, en opp. Nei, en ned, en ned, en ned.
416	LÆRER: På tallinja.
417	Flere: ned
418	Lars: to, to, to.
419	LÆRER: en ned. Da setter jeg en pil nedover, det betyr ned *(skriver en pil ved siden av 63 og 62).* Fra 19 til 18, hva har vi gjort da da? Anna?
420	Anna: Gått oppover.
421	LÆRER: Fra nitt….
422	Anna: Nei! Nedover, nedover der og!
423	LÆRER: Ja, kan vi gjøre det? Får vi samme resultat da?

424	Flere: Nei!
425	Noen sier jo..
426	LÆRER: Jeg snakker om disse altså.
427	Noen sier: ja man gjør det..
428	LÆRER: Så hvis vi tar bort en her og tar bort en her, Får vi samme svaret?
429	Eva: Nei.
430	Jan: Du må ta den ene opp.
431	LÆRER: Den ene må opp?
432	Jan: Ja!
433	LÆRER: Mhm.
434	Jan: Og da skal den andre ned.
435	LÆRER: Da har vi egentlig sagt at det svaret der er ikke riktig. *(peker på 62 + 18).* Enn her da? 61 + 18, hva har vi gjort der? Hva har vi gjort Fra 63 til 61?
	11 min
436	Jan: Minuset.
437	LÆRER: 63 til 61, ja minuset, hva minuset da, Jan?
438	Jan: to.
439	LÆRER: Ja, der har vi gått to ned. Så her har vi tatt minus 2. Nei det ble da gal vei ,når jeg skriver oppned. Hva har vi gjort Fra 19 til 18 da?
440	Jan: Tatt den opp.
441	LÆRER: Fra 19 til 18 så har vi?
442	Lars: Tatt den ned.
443	LÆRER: da har vi tatt minus 1. Får vi samme svaret her og her da? *(peker på 63+19 og 61+18).*
444	Lars: Nei, nei, nei, det er 65.
445	LÆRER: Okei…
446	Eva: 62 skal det være der. Nei….
447	LÆRER: 63 + 19, er det det samme som 18 + 64? Hva har vi gjort Fra 63 til 64? *Alle Forslagene til svar står på arket, og LÆRER går igjennom dem.*
448	Anna: Plusset på.
449	LÆRER: Hvor mange?
450	Anna: en.
451	12 min
452	LÆRER: mhm. Vi har gått opp en sant? vi har plusset på en. Hva har vi gjort Fra 19 til 18?
453	Eva: plusset på en.
454	Anna: plusset på en. Nei!
455	Jan: Tatt minus.
456	Flere: Minus, minus, minus.
457	LÆRER: Mhm, vi har gått ned en. Stemmer det?
458	Flere: ja…
459	Lars: Ja, begge har gått ned. Du må gå oppover, du må gå oppover.
460	LÆRER: Hvis jeg tar vekk disse… Nå skal jeg renskrive litt, For nå var det så mange streker her. *(skriver et annet sted på arket).* 63 + 18, nei det var ikke det jeg skrev, det var 19. Okei, så gikk vi opp til 64 *(skriver en pil opp ved 64).* pluss, og så
461	har vi gått….?
462	Marit: Ned!
	LÆRER: Ned, bra Marit! Til 18 *(skriver pil ned ved 18).*
	13 min
462 2	LÆRER: Kan vi gjøre det, og Få samme svar?
463	Mange: Ja!
464	Lars: Ja, du Får Fortsatt samme svar!
465	Marit: Ja!
466	LÆRER: Hva gjorde vi annerledes her enn her *(peker på stykket Fra starten 38 + 17 og 37 + 18, og det siste som er skrevet*
467	*opp).*
468	Marit: Vi gikk ned og opp.
469	LÆRER: Her gikk vi ned, på denne side. Nå satte jeg minusen på Feil side. *(skriver -1 ved 18).*
470	Lars: her gikk vi opp og der gikk vi ned.
471	LÆRER: Og her gikk vi opp, med pluss 1. *(skriver +1 ved 64)*
472	Jan: Ja.
473	LÆRER: Mens her gikk vi opp på den sida...
474	Eva: og ned på andre sida.
475	LÆRER: .. og ned på andre sida. Kan vi gjøre det?
476	Mange: Ja!
477	LÆRER: Spiller det noen rolle egentlig?
478	Mange: nei.
479	Eva: Jo egentlig.
480	LÆRER: Så lenge man passer på at det blir en av hver.
481	Eva: så lenge man ikke tar to oppover.
482	LÆRER: Ja, ikke to oppover.
483	Eva: Nei.
484	Ole: Heller ikke 1 oppover.

485	Lars: Heller ikke 100 oppover.
	14 min
486	LÆRER: Gjelder det uansett hvilke tall vi tar.
487	Flere: Ja.
488	Eva: Nei… Jo det gjelder…
489	LÆRER: altså uansett hvilket stykke jeg tar, si tre tusen Fire hundre og…
490	Eva: Hæ? jeg kan ikke regne så mye!
491	LÆRER: neinei, vi skal ikke regne det sammen. 3481 + 25. kan jeg gå en opp og en ned her og?
492	Eva: Eh ja..
493	LÆRER: Og Få samme svar?
494	Flere: Nei.
495	Eva: Jo Faktisk, men da må man ta et veldig høyt tall.
496	LÆRER: Skal jeg gå opp eller ned Først da?
497	Berit: Det der ser ut som et ganske vanskelig regnestykke.
498	LÆRER: Ja, men vi trenger ikke bry oss med regnestykket.
499	Berit: Jeg vet.
500	Ole: Opp!
501	LÆRER: Skal vi gå opp Først? Okei. tre tusen, Fire hundre og åtti… hva blir det da? åtti?
502	Flere: 82
503	LÆRER: Mhm. Og da må jeg gå opp eller ned på den siden da?
504	Alle: NED!
505	LÆRER: oi, det var enstemmig. Skal vi se, og da Får jeg tjue…
506	Ole: Fire
507	Berit: Fire, 24 *(LÆRER skriver 3482 + 24 under 3481 + 25)*
	15min
508	LÆRER: Har de her to regnestykkene samme svar?
	Først sier Flere nølende nei, Før Flere og Flere sier ja.
509	LÆRER: Hvorfor det da Ole?
510	Ole: Fordi det er en mer der *(peker på 2 i 3482)* også er det en mer der *(peker på 5 i 25).*
511	LÆRER: Mhm
512	Ole: Sa da er det en mer enere på den og så er det 24 og 25, og der er det en mere enn der og der er det en mere enn der.
513	LÆRER: Ja. Det som Jan sa på starten, du har bare Flyttet, Flyttet en ener herFra *(peker på 25)* over på det tallet her (*peker på 3482)*.
	Jan: egentlig så spiller det ingen rolle, bare at du må ha en opp og en ned.
514	LÆRER: Ja.
515	Eva: Du kan jo også ta en, men da må du ta null. Nei det går ikke.
516	Jan: Men bare.. Du kan gjør det på begge sidene, bare at da må du gjøre det en av hver.
517	LÆRER: Du må gjøre det på begge sidene?
518	Jan: Ja.
519	LÆRER: Og en av hver?
520	Jan: ja.
521	LÆRER: Ja, okei.. Neste spørsmål… Da har vi konkludert med det, sant? Husker dere hva konkludering var?
522	Flere: Nei.
523	
	16 min
524	LÆRER: Vi har liksom bestemt oss For at det er sant.
525	Berit: Okei, nå husker jeg det.
526	LÆRER: Er vi enige? Er det sant?
527	Alle (spredt): ja..
528	LÆRER: Da er spørsmål to…. Nytt ark *(til å skrive på).*
529	Lars: Du har brukt opp begge arkene dine jo.
530	Kari: Du kunne brukt det samme.
531	LÆRER: 35 pluss….
	Berit: 53?
532	LÆRER: Eh.. nei, ikke 53..
533	Ole: En million.
534	LÆRER: hehehe, vi tar 35 + 20.
535	Berit: Å.
536	Lars: 55
537	LÆRER: Og så tar jeg og skriver under… 30 + 25. Er det det samme svar.
538	Lars: Oh yes. Det er 55 og 55. 55 og 55. 55 og 55.
539	LÆRER: Hvordan kom du Fram til det Lars?
540	
	17min
541	Lars: Jo Fordi jeg tok vekk 5erne, så tok jeg 30 og 20, og da ble det 50. Så tok jeg Femmeren så ble det 55.
542	LÆRER: Okei.
543	Lars: 55. 55. 55. 55.
544	LÆRER: Slik at du regnet det ut?
545	Lars: Ja.
546	LÆRER: okei, da må jeg prøve med noen andre tall.

547	Jan: Nei, egentlig er det 60.
548	Lars: Hæ?
549	Berit: Nei, det er 55.
550	Jan: ja….
551	LÆRER: Ja, da prøver jeg med noen andre tall da. Da sier jeg 38 igjen, pluss 72… Er det samme som, er det samme som… Jeg påstår jeg nå, nå kommer jeg med en påstand. Nå blir jeg litt slik påståelig til dere.
552	Jan: Ja!
553	LÆRER: Pluss.. Er det samme som 33 pluss 77.
	Barna begynner å si ja og nei om hverandre.
	18 min
554	Eva: Jeg tror det.
555	LÆRER: skriv det ned i boka deres og tenk.
556	Berit: Vi må ha blyanter.
557	LÆRER: Ja blyanter! Det er lov å tegne og Flytte på enere og bruke det man kan.
	Småprat
558	Berit: Jeg vil bruke en tallinje jeg.
559	Anna: Hva skal vi egentlig gjøre?
560	Lars: 35 var det pluss…
561	LÆRER: Nei, du ikke ta min da… 38 var det. 38 pluss… Nei, ikke den.. Ta den.. 38 + 72 *(deler ut blyanter og gjentar oppgaven samtidig).*
	19 min
	Mye småprat om nedskriving av stykkene. Vi hører at barna sier tallene, "tenkesnakker".
562	LÆRER: Får man samme svar på de her to stykkene?
563	Flere: Ja.
564	Jan: det er 110 tilsammen.
565	LÆRER: Ja, men ikke regn det sammen. Hvis du regner det sammen, så bare skriv det ned, det er greit. Men jeg vil vite hvorfor. Hvorfor får vi samme svar? Hvordan kan vi se det uten å regne det sammen?
566	Lars: Fordi tierne…..
567	Berit: Nå begynte det å komme fram til meg.
568	LÆRER: Jan har regnet det ut og det er…
569	Jan: 110.
570	LÆRER: Ja.
571	Jan: men så på tiervennene. 8 og 2 er tiervenner. Og så vet jeg at da Får jeg en ny tier, så da vet jeg at jeg Får 80 + 30 og
572	det blir 110.
573	LÆRER: Ja.
574	Anna: Det her er bare tiervenner.
575	LÆRER: Ja, det er det Faktisk. Kanskje det var et dumt Forslag allikevel?
	20 min
576	Flere: ja.
577	LÆRER: prøver med et nytt tall jeg da.
578	Berit: Ja, god idè.
579	LÆRER: da sier jeg 37 + 72 er det samme som 32.. søren, unnskyld. *(visker ut).* 36 + 72 er det samme som 31 + 77.
	Mange prater, tenker, spør om viskelær.
	21min
580	Lars: 36 +....?
581	LÆRER: 72. *Småpraten Fortsetter.*
582	LÆRER: Får man sammen svar her og?
583	Lars: Ja.
584	Berit: Jaaaaa, det tror jeg.
585	Anna: Dette er også bare tiervenner her uansett!
586	LÆRER: Er 1 og 7 tiervenner?
587	Lars: Nei det er 3 og 7!
588	LÆRER: Nå forsøkte jeg å unngå tiervennene fordi jeg vil at dere skal se på noe annet. Diskuter litt.
	Jan: Ja, det er det!
589	LÆRER: Er det? ja du har regnet ut svaret, bare skriv det ned. Vi vil ikke vit det ennå, Jan.
590	
	22min
591	LÆRER: Men hvorfor kan vi veldig lett, uten å vite svaret, bestemme oss for om dette er riktig eller ikke?
593	Eva: Hæ? Riktig…? Åja….
594	LÆRER: Tenk på det vi gjorde i sted med opp og ned.
595	Berit: opp og ned, emm..
596	Kari: Jeg glemte det jeg.
597	LÆRER: Vi gikk en opp og en ned.
598	Marit: Kan du ikke bruk tavla bare, det blir så mye enklere. *(har skrevet på et ark til nå).*
599	LÆRER: Mhm
600	

601	Berit: Det blir så vanskelig.
602	Lars: Jeg kan ikke se den.
603	Berit: Da kan du snu deg.
604	Lars: Jeg kan ikke det, da må jeg snu hodet uten å snu kroppen.
605	Kari: 36 + 72 og 31 + 77
	Barna diskuterer, hører ord som "svaret"og "det samme". LÆRER skriver 36 + 72 og 31 + 77 under hverandre på tavla).
	23 min
606	Anna: Det hadde vært bedre hvis det var ruter på tavla og.
607	LÆRER: men det spiller ingen rolle. Vi skal ikke regne ut svaret nå, det er ikke det vi skal gjøre sammen, vi skal se på om det blir samme svar og om det…
608	Jan (avbryter): Ja det er det.
609	LÆRER: Ja, men hvorfor? hvorfor kan vi se det?
610	Lars: Fordi det blir mindre og større.
611	LÆRER: ja, det er noe med mindre og større, veldig bra sagt Lars.
612	Jan: Jeg telte toer… Kan jeg si det?
613	LÆRER: ikke.. Den strategien kan du få fortelle etterpå, okei?
614	Berit: Ja! Jeg ser noe! Jeg ser noe!
615	LÆRER: Berit ser noe. Hva ser Berit?
616	Berit: Eh.. Nei, det kom bort. Det bare så noe slik ut.
617	LÆRER: Du skal få fortelle den strategien etterpå Jan, men jeg kommer til å spørre deg om det, okei? Lars?
618	Lars: Det går lavere og høyere.
619	LÆRER: Det er noe med lavere og høyere. Opp og ned. Marit?
620	Berit: Nå ser jeg noe igjen. *(oppå)*
621	Marit: 36 og så… Så går vi ned til 31.
	24 min
622	LÆRER: Hvor mange har vi gått den da da?
623	Marit: Vi har gått ned 5.
624	LÆRER: vi har gått ned 5. *(skriver pil ned og -5 ved 36 og 31).* Enn på andre sida?
625	Berit: Maren, jeg ser noe…*(oppå)*
626	Marit: Og så opp har vi gått… nei vent litt… vi har gått ned…
627	Ole: Vi har gått OPP.
628	Marit; Vi starter oppå der på 27.
629	LÆRER: 72?
630	Marit: 72, og så går vi ned til… nei så… vi går oppover.
631	Lars: 5 mere, 5 mere, 5 mere *(oppå alle de andre).*
632	LÆRER: Hvor mange da? 72..
633	Lars: pluss 5.
634	Marit: pluss 5.
635	LÆRER: Ja, 73, 74, 75, 76, 77. *(skriver pil opp og +5 ved 72 og 77).* Anna du ser litt Forundret ut.
636	Anna: Det var vanskelig.. *(nesten uhørlig).*
637	LÆRER: du synes det var vanskelig.
638	Berit: Nei, det var enkelt Maren.
	LÆRER: Det er bare noen som har sett noe.
638	Berit: Maren jeg ser noe.
639	LÆRER: Ja?
640	
	25 min
641	Berit: At på 36, og hvis man går ned til 77 så blir det en mere nedpå der. Og det samme med 72 og 31. Jeg synes det bare så litt rart ut.
642	LÆRER: Ja, en mer, hva mente du med det? Her?
643	Berit: Ja.
644	LÆRER: på enerene..? nei..
645	

646	Kari: Det er ikke en mer, men litt Flere.
647	Berit: jeg mente slik at vi starter på enerne, så går vi opp der, så blir det bakerste tallet to da.
648	LÆRER: Ja. Da har vi tatt. Egentlig minus Fem den veien da. Når vi går den veien så har vi….
649	Berit: Tatt pluss Fem?
650	LÆRER: Ja. Ole. For mellom 72 og 77 på tallinja, hvor mange hopp er det?
651	Berit: 5, 5, 5, det må jo være 5.
652	LÆRER: Det må jo være 5, hvorfor må det være 5?
	Berit: For å få det samme svaret på begge sidene.
	26 min
653	LÆRER: nå må dere Følge med hva Berit sa, For hun sa noe kjempelurt. Berit sa det må jo være 5 her…
654	Berit: For å Få det samme svaret.
655	LÆRER: For å Få det samme svaret. Okei, det må være 5…
656	Berit: For eksempel hvis det er 3 der og 6 der *(peker på hver side)* det går liksom ikke.
657	LÆRER: Nei. Hvis vi går 3 ned her, og har Fått 33 i stede For. Også sa du 6? var det det du sa?
658	Berit: Ja:
659	LÆRER: 6 opp her. Det blir 33 + 78. Hadde det blitt det samme svaret.
660	Kari: Ja.
661	Lars: No, no, no
662	Berit: Nei.
663	LÆRER: HvorFor ikke Berit? Det er nettopp det jeg vil vite her nå. HvorFor ikke?
	27min
664	Berit: Fordi det jeg sa… Fordi… Det er litt vanskelig å Forklare på en måte.
665	Ole: Å! Jeg vet!
666	LÆRER: Ja Ole?
667	Ole: Fordi at 77 +31, nei 31 + 77.. Da hopper man jo to over.. der... Og man hopper bare en over der.
668	LÆRER: Du så i mellom her du nå? *(peker på noen andre tall).*
669	Ole: Ja.
670	LÆRER: Mhm. Her Fra det tallet her til det tallet der har vi gått 3 ned *(36 til 33).* Her, Fra det tallet der til det tallet der så har vi gått opp 6 *(Fra 72 til 78).* Det blir ikke det samme svaret sier dere.
671	Eva: Jeg tror det.
672	LÆRER: Det er helt riktig, jeg er bare kjempenysgjerrig på om dere ser hvorFor. HvorFor? Ikke Fordi vi har regnet det ut, men på tallene.
673	Berit: Jeg vet hvorFor, men jeg synes det er så vanskelig å Forklare.
674	LÆRER: Ja, det er vanskelig å Forklare, men prøv engang til, Berit.´
	28min
675	Berit: Em, det er slik at hvis vi ikke her det samme, det samme… Som jeg sa.. hvis det blir 3 og 6, det er jo ikke de samme tallene.
676	LÆRER: Nei, det er noe med det samme.
677	Berit: Ja.
678	LÆRER: Det sa dere i sted også, hvis vi skal gå en opp så må vi gå en ned. Jan, du sa det.
679	Jan: Ja.
680	LÆRER: Ja, hva er det vi gjør her da?
681	Jan: Vi tar det samme. 5 ned og 5 opp.
682	LÆRER: Ja.
683	Jan: Men ikke nederst *(sikter til 33 + 78)* For der har vi 6 opp og 3 ned.
684	LÆRER: Ja, da Flytter vi ikke riktig antall enere, gjør vi det da?
685	Jan: For det der er 3 mer.
686	LÆRER: Ja, du har lagt på Flere enn du har tatt vekk.
	29 min
687	LÆRER: Kan jeg putte hvilke som helst tall inn her, så lenge jeg gjør det samme på begge sider?
688	Flere: Ja.
689	LÆRER: Så jeg kan ta tre hundre tusen to... tre hundre og tjue seks tusen åtte hundre og Femti en *(326851)* pluss 302, nei vent, 309 sier vi.

690	Lars: oi, det der greier ikke Jan engang.
691	LÆRER: Er det samme som tre tusen.. tre hundre og tjue seks tusen åtte hundre og Femti… Hva er det hvis jeg skal plusse 5. 1 + 5?
692	Lars: 6.
693	LÆRER: er det samme som, nei pluss tre hundre og.. Hvis jeg skal gå 5 ned på 9eren da?
694	Anna: 4
	(326851 + 309 er det samme som 326856 + 304)
	30 min
695	LÆRER: Kommer dette til å Få samme svar?
696	Alle: Jaaaaa
697	Eva: Hæ?
698	LÆRER: Hvor mange har vi gått opp her?
699	Anna: 6, nei 5!
700	LÆRER: Hvor mange har vi gått ned her?
701	Lars: 5!
702	Anna: 4, ja 5!
703	LÆRER: Vi aner ikke svaret.
704	Ole: Jo jeg aner svaret… *(gjør seg til).*
705	LÆRER: Vi aner ikke svaret, men… Vi kan nok regne ut svaret, men vi trenger ikke å vite det. Vi vet det er det samme. Eller? Vet dere at det er det samme?
706	Flere: Ja.
707	Jan: Jeg skjønner ikke…
708	LÆRER: synes du det var vanskelig? Det var veldig mange tall her nå. Men prøv å ikke se på tallene.
709	Eva: Jeg kan ikke si tallet.
710	LÆRER: Nei.
711	Anna: Er tallet stort?
712	LÆRER: 326856.
713	Ole: Jeg skulle blitt så mange år når jeg blir stor.
	31 min
714	LÆRER: Men det var mest For at jeg skulle spørre dere om jeg kunne putte inn hvilket som helst tall her da.
715	Jan: bare du tar det samme på hver side og går opp og ned.
716	LÆRER: Kjempebra! Så lenge vi tar det samme på begge sidene… Så… altså ikke det samme på begge sidene Faktisk, vi kan ikke gå opp 5 på begge sidene.
717	Jan: Nei, da blir det 10 mer.
718	LÆRER: Fin konklusjon. Konklusjon, husker dere hva det var? Eller regel. Kan vi si en regel da? En slik setning vi kunne hengt på veggen? Om dette her.
	32 min.
	Barna snakker i munnen på hverandre.
719	Berit: Det må være det samme på begge sidene.
720	LÆRER: Er det helt sant? Hvis vi gjør det samme på begge sidene så går man jo opp på begge sidene eller ned på begge sidene.
721	Berit: Jeg mente sånn samme tallet da, samme tallet. Opp og ned da.
722	LÆRER: Ja, opp og ned. Så lenge du går opp det samme antallet som du går ned, så Får du samme svar. Det ble en litt vanskelig setning.
	Okei, da sier jeg tusen, tusen hjertelig takk. Dere har vært rågode. Igjen!
	Barna var urolige og ukonsentrerte på slutten, avsluttning ble litt brå.

Forespørsel om deltakelse i masterforskning

”Resonnering og generalisering hos 6-7åringen”

Bakgrunn og formål
Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved NTNU og lærer på Sjetne skole. Jeg skal nå i gang med å skrive min masteroppgave. Mine datainnsamlinger vil bunne i en oppgave som publiseres. Målet for studien er å se hvordan elevene allerede på 1.-2. trinn kan resonnere og generalisere i matematikk. Det vil si at de kan se generelle sammenhenger innenfor ulik regning og gi uttrykk for disse sammenhengene i diskusjon og samtale med medelever og lærer.
Utvalget av elever har blitt tatt på bakgrunn av at gruppen skal ha en alder på 6-7 år når data samles inn. I tillegg jobber jeg selv på skolen og har derfor god kjennskap til lærer(e), læreverk og andre rammefaktorer som spiller inn på elevene.

Hva innebærer deltakelse i studien?
Deltakelsen innebærer at elevene deltar i en undervisningsøkt med generalisering og resonnering som fokus. Deltakere i økten er en gruppe medelever og en kjent lærer. Samtalen finner sted i kjent klasserom med kjente rammer, og på dager der jeg ikke har ordinær undervisning på Sjetne. Det vil si at det vil foregå parallelt med kunst og håndverk på onsdager. Det vil bli tatt notater, lydopptak og video av undervisningen. I tillegg vil alt skriftlig materiale elevene produserer i øktene bli samlet inn.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Det samles ikke inn personopplysninger utover alder og kjønn. Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Tilgang til datamaterialet som samles inn vil kun være tilgjengelig for prosjektleder (meg). Data som publiseres vil være anonymisert og vil ikke kunne knyttes til enkeltdeltakere.

Prosjektet skal etter planen avsluttes juni 2018. Alle data vil da bli fullstendig anonymisert, og lyd- og video-opptak vil slettes.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom foresatte/eleven velger å trekke seg, vil alle opplysninger om eleven bli anonymisert. Dersom man trekker seg vil ikke dette ha noen innvirkning på eleven og foresattes relasjon til faget og skolen.

Dersom du ønsker å delta eller har spørsmål til studien, ta kontakt med Maren Wettland Midtsand på 90018919 eller maren.midtsand@trondheim.kommune.no eller veileder Ole Enge på ole.enge@ntnu.no

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Med vennlig hilsen
Maren Wettland Midtsand