FORORD

Denne masteroppgaven har vært en reise som har strekt seg over flere år. Jeg kan se tilbake på en lang og krevende prosess, med mange oppturer og nedturer. Nå når denne reisa har kommet til veis ende, ser jeg tilbake med takk på alle som har hjulpet meg til å nå målet.

Det er mange jeg vil takke, men først og fremst vil jeg takke lærerne som villig stilte opp til intervju. Uten dem hadde jeg ikke hatt noen oppgave å skrive.

Liping Ding har vært en trofast veileder og uten henne hadde dette vært en uoverkommelig prosess. Først og fremst tusen takk for kyndig og god veiledning. Hun skal også ha en stor takk for å ha hatt tålmodighet med meg gjennom permisjonsperioder og den uforutsigbare hverdagen som småbarnsmor.

Takk til Leif-Kristian, Mamma, Pappa og svigerforeldrene mine. Takk til sjefen min og kollegaene mine på Møre barne- og ungdomsskule Skodje. De har bidratt med tålmodighet, oppmuntring og tilrettelegging for at jeg skulle komme i mål.

Takk til mine tidligere medstudenter på masterstudiet. De har vært til stor inspirasjon og motivasjon. Deres prestasjoner og flotte masteroppgaver har vist meg at dette går an. De har vært til mer støtte enn de selv vet.

Til jentene mine: dere har vært min største motivasjon!

Åshild Valbø Sæther

Ålesund, november 2017

INNHOLD

TABELLER

1. INNLEDNING

1.1. BAKGRUNN FOR OPPGAVEN

Første gang jeg lærte algoritmen for multiplikasjon med flersifrede tall, tror jeg må ha vært i 5. klasse. «Første gang», sier jeg fordi jeg har måttet lære meg denne algoritmen på nytt og på nytt gjennom både ungdomsskolen og videregående. Jeg har faktisk også måttet repetert den på høgskolen. Hvorfor? Fordi jeg aldri fikk lære *hvorfor* algoritmen var som den var, men at «sånn er det bare». *Hvorfor* starter man med det bakerste tallet? *Hvorfor* må man huske å flytte en til venstre, slik at man får en trapp, når man begynner å multiplisere det neste tallet? Dette var spørsmål jeg ikke fikk svar på og ikke reflekterte over før jeg kom på lærerhøgskolen. Da lærte jeg hvordan jeg skulle lære bort nettopp dette til mine framtidige elever, og det gikk opp et lys for meg: Hvis ikke læreren forstår det de underviser om, hvordan kan da elevene forstå det som læres?

At «sånn er det bare»-forklaringa ikke er god nok, kan begrunnes ut i fra kompetansemålene for matematikk (Saabye, Fors & Pedlex norsk, 2015) der eleven skal kunne:

> «utvikle, bruke og diskutere metodar for hovudrekning, overslagsrekning og skriftleg rekning […]» (etter 7. årssteg, s. 40)
>
> «[…], stille opp og forklare berekningar og framgangsmåtar […] (etter 7. årssteg, s. 40)
>
> «utvikle, bruke og gjere greie for ulike metodar i hovudrekning, overslagsrekning og skriftleg rekning med dei fire rekneartane» (etter 10. årssteg, s. 40)

Her legges det blant annet vekt på at eleven skal kunne diskutere, forklare og gjøre rede for de metodene og framgangsmåtene man bruker. Elevene må altså kunne *forstå*, ikke bare *gjøre*, slik som jeg gjorde. Dette er noe av det som har vært utspringet til motivasjonen for denne oppgaven.

Mer motivasjon for å undersøke læreres forståelse og fagkunnskap, fikk jeg da jeg for første gang leste Liping Ma (Ma, 2010) sin *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Hun beskriver forskjellene på kinesiske og amerikanske læreres matematiske forståelse for grunnleggende matematikk. Jeg ble overrasket over hvordan det stod til med forståelsen til amerikanske lærere hadde for algoritmene de brukte i grunnleggende matematikk. Det vakte en nysgjerrighet i meg for hvordan forholdene er blant norske lærere.

Spørsmålene jeg har stilt i denne prosessen, er ikke nye. Allerede tidlig på 1900-tallet stilte John Dewey (1904) noen spørsmål om forholdet mellom fagkunnskapen og undervisningsmetodene. Over 100 år senere er dette fortsatt like aktuelt: I hvilken grad avhenger undervisningen og didaktikken av kunnskapen om fagstoffet, og i hvor stor grad avhenger den av de pedagogiske metodene? Åpenbart begge deler. Å kunne fagstoffet er essensielt for å forstå hvordan elevene tenker. Denne kunnskapen er også nødvendig for å skape rom for læring ut i fra elevens erfaringer, interesser og behov (Ball & Bass, 2000). Selv om spørsmålene dukket opp tidlig på 1900-tallet, ble det blåst nytt liv i dem da Lee Schulman i 1986 publiserte artikkelen *Those who understand: Knowledge growth in teaching.* Der identifiserer han hvilken kunnskap matematikklærere bør ha (Shulman, 1986). Siden har læreres undervisningskunnskap og matematiske forståelse vært tema for mange diskusjoner og vært under lupen til flere forskere. Blant annet har Ball, Thames og Phelps (2008) presentert seks hovedområder for undervisningskunnskap. To av områdene er allmenn fagkunnskap og spesialisert fagkunnskap. Spesialisert fagkunnskap utgjør en ganske stor del av denne undervisningskunnskapen. Den er derfor viktig for en lærer.

1.2. FORSKNINGSSPØRSMÅL

Læreres matematiske forståelse og fagkunnskap har vært og er fremdeles tema for diskusjon. Det er et viktig tema, men også et vanskelig tema. Som nevnt ovenfor, er det å kunne fagstoffet essensielt for å kunne skape rom for læring. To av temaene innenfor grunnleggende matematikk, som Liping Ma (2010) har undersøkt, er multiplikasjon med flersifrede tall og divisjon med brøk. Fra egen skolegang og observasjoner i tidligere praksisperioder, har jeg både opplevd og sett at dette er to tema der det presenteres en algoritme for utregning, men gjerne uten forklaring på *hvorfor* algoritmen er slik den er. De to emnene inneholder tydelig definerte og velkjente algoritmer. Hvordan lærere bruker og forklarer disse, er et godt utgangspunkt for å få god innsikt i læreres tankeprosesser og forståelse (Ball, 1988). På bakgrunn av dette har jeg valgt følgende problemstilling:

> *Hvilken sammenheng er det mellom grunnskolelæreres forståelse for algoritmene for multiplikasjon med flersifrede tall og divisjon med brøk, og deres fagkunnskap om emnene?*

Gjennom forskningsspørsmålet mitt ønsker jeg å få innsikt i lærernes matematiske forståelse for og begrunnelse av algoritmene for de to emnene. I tillegg ønsker jeg innsikt i fagkunnskapen de har om de samme emnene. Fordi fagkunnskap er en vital del av undervisningskunnskapen til en lærer (Ball et al., 2008), ønsker jeg å se hvilken sammenheng det er mellom nettopp forståelsen og fagkunnskapen.

Emnene multiplikasjon med flersifrede tall og divisjon med brøk er mest aktuelle for lærere på mellomtrinnet og i ungdomsskolen. Studien har derfor fokus på grunnskolelærere på 5.-10. trinn. Det er en kvalitativ studie der jeg har intervjuet seks lærere som underviser matematikk på de nevnte trinnene. Det ble tatt lydopptak av intervjuene. Materialet som ble produsert underveis i intervjuet, ble samlet inn. Analysene av intervjuene danner grunnlaget for denne oppgaven.

Med denne oppgaven ønsker jeg å bidra til å utvikle en dypere forståelse for læreres matematiske kunnskap og forståelse i et utfordrende fagfelt, ved å utforske norske forhold på de nevnte trinnene. Gjennom studien min ønsker jeg å berike diskusjonene og refleksjonene som allerede eksisterer om matematisk kunnskap for undervisning.

1.3. OPPGAVENS STRUKTUR

Oppgaven er bygd opp av fem kapitler. I kapittel 2 tar jeg for meg det teoretiske perspektivet som oppgaven bygger på. Jeg vil blant annet presenterer tidligere forskning og det teoretiske grunnlaget for både matematisk forståelse og matematisk kunnskap. Jeg vil også presentere den grunnleggende matematikken. I kapittel 3, metodekapittelet, presenterer og begrunner jeg de metodiske valgene jeg har tatt i løpet av studieprosessen. Det innebærer også en presentasjon av analyseprosessen. Kapittel 4 er analysekapitlet, der jeg presenterer sentrale deler fra analysen av intervjuene. Til slutt i kapittelet oppsummerer jeg funnene fra analysen og setter dem i sammenheng med hverandre. Avslutningsvis, i kapittel 5, blir resultatene av analysen drøftet, og sammenhengen mellom forståelsen og fagkunnskapen lærerne har om de aktuelle emnene blir sett i sammenheng med den presenterte teorien. Jeg tar også opp igjen tråden fra den presenterte teorien og drøfter matematisk forståelse og fagkunnskap. Oppgaven avrundes med å plassere funnene i et større perspektiv – det eksisterende forskningsfeltet for matematisk kunnskap for undervisning.

2. Teoretisk Perspektiv

Denne studien fokuserer på forståelse og fagkunnskap omkring algoritmer knyttet til to temaer i grunnleggende matematikk. For å kunne svare på problemstillingen og finne sammenhengen mellom forståelsen lærerne har for algoritmen og fagkunnskapen de har om det aktuelle emnet, er det nødvendig å se på hva matematisk forståelse og matematisk fagkunnskap er. Aller først tar jeg for meg matematisk forståelse og ser på hva tidligere forskning sier om begrepet. Deretter tar jeg for meg noe av den tidligere forskningen som er gjort omkring matematisk kunnskap. Videre, i kapitlet om grunnleggende matematikk, skriver jeg om algoritme-begrepet og ser på dette i sammenheng med de to emnene multiplikasjon med flersifrede tall og divisjon med brøk. Til slutt presenterer jeg en oversikt over begreper for forståelse og kunnskap, i tillegg til en oppsummering av grunnleggende matematikk. Dette er det teoretiske rammeverket som danner utgangspunktet for datainnsamlingen og analysen av det innsamlede materiale.

2.1. Matematisk forståelse

I det følgende kapitlet blir det presentert to sentrale begreper: *prosedyreforståelse* og *begrepsmessig forståelse*. Begrepene skal defineres og avklares. Er definisjonene fremdeles gyldige? Hvordan kan man eventuelt definere matematisk forståelse?

Begrepene prosedyreforståelse og prosedyrekunnskap, begrepsmessig forståelse og begrepsmessig kunnskap, blir brukt om hverandre. Det betyr ikke at de har forskjellige betydninger, men her er prosedyreforståelse og begrepsmessig forståelse veldig tett knyttet til kunnskapsbegrepet. Dette kan vi blant annet se hos Cai og Ding (2017), som sier at forståelse er både en prosess av forståelse (eller kunnskap) og et resultat av forståelsens handling (noen ganger kalt kunnskap). Vi finner også denne tilknytningen hos Ball (1988), som skriver at den matematiske kunnskapen for eksempel kan være at man vet at man «ikke kan dele på null», men det som er av interesse her er *hvordan* man forstår dette – som fakta, eller som en logisk konsekvens av andre matematiske ideer og prinsipper. Forståelsen for matematikk inneholder en blanding av både kunnskap, holdninger og følelser ovenfor matematikk (Ball, 1988). Ma (2010) bruker for eksempel begrepene prosedyrekunnskap og prosedyreforståelse om hverandre, fordi prosedyreforståelsen er en del av lærernes kunnskap. Om en lærer har prosedyreforståelse, vil det altså bety at læreren har prosedyrekunnskap.

Gjennom doktorgraden sin på 90-tallet, undersøkte og dokumenterte Liping Ma forskjeller mellom kinesiske og amerikanske læreres forståelse av matematikk for undervisning. Funnene i denne studien ble utgangspunktet for boken *Knowing and teaching elementary mathematics* (Ma, 2010). Denne studien antyder at måten lærere responderer på elevers utradisjonelle og feilaktige matematiske ideer, avhenger av deres egen matematiske kunnskap og holdningene de har til undervisning. I studien sin bruker Ma de kjente begrepene *procedural* og *conseptual* for å kategorisere undervisningsstrategier, forståelse og kunnskap. Hiebert og Lefevre (2009) sin definisjon av de samme begrepene sammenfaller med Ma's definisjon. De to har definert *procedural knowledge* (prosedyrekunnskap) og *conceptual knowledge* (begrepsmessig kunnskap) slik:

Prosedyrekunnskap innebærer at man behersker det formelle språket og systemet for symbolrepresentasjon i matematikk. Dette er ofte bare overfladiske egenskaper, og man har ikke kunnskap om betydningen av disse. Videre innebærer prosedyrekunnskap at man kan algoritmer og regler for å utføre matematiske oppgaver. Man kan si at man følger noen fastsatte instruksjoner for hvordan en matematisk oppgave skal løses. Med prosedyrekunnskap har man begrensninger i forhold til å se sammenhenger mellom ulike temaer i matematikk (Hiebert & Lefevre, 2009; Ma, 2010).

Begrepsmessig kunnskap er mer sammensatt enn prosedyrekunnskap. Man kan si at man har et nettverk av kunnskap der ulike temaer er knyttet sammen. Kunnskap man tilegner seg, er ikke konseptuell før man kan sette den i sammenheng med annen informasjon, slik at den blir en del av nettverket. Det innebærer blant annet at man har en større matematisk forståelse for det underliggende i en algoritme og kan forklare *hvorfor* prosedyren kan utføres på en bestemt måte (Hiebert & Lefevre, 2009; Ma, 2010).

Spørsmålet videre blir da hvordan man kan kategorisere forståelsen en lærer har. Kan man fortsatt bruke prosedyreforståelse og begrepsmessig forståelse, eller bør man heller snakke om grad av tilknytning?

2.1.1. Prosedyreforståelse og Begrepsmessig forståelse – Kan begrepene anvendes fortsatt?

Det har vist seg at ikke alle er enige i definisjonene som Ma (2010), Hiebert og Lefevre (2009) bruker om prosedyreforståelse og begrepsmessig forståelse. Selv om det er litt uenigheter akkurat om begrepsbruken og hva som ligger i den, vil jeg si at mye av innholdet er overensstemmende. Vi skal se på hva noen flere teoretikere mener om de mye anvendte begrepene.

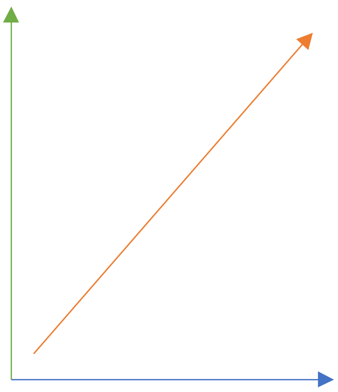
Star (2005) er ikke helt enig i at man kan kategorisere kunnskap ut i fra kategoriene som Ma (2010) og Hiebert og Lefevre (2009) har definert. I en artikkel der han rekonseptualiserer disse begrepene, påpeker han at det i Hiebert og Lefevres definisjon tilsynelatende er algoritmer som menes med prosedyrer. I algoritmer er man garantert riktig svar på problemet dersom man gjennomfører algoritmens steg i riktig rekkefølge og uten feil. Star påpeker at det finnes flere typer prosedyrer og at kvaliteten på tilknytningene kan variere innenfor de ulike prosedyrene. Heuristiske prosedyrer, for eksempel, handler om å ta valg. Kloke valg for problemløsning indikerer dyp og sofistikert kunnskap. Hiebert og Lefevres definisjon sier ingenting om hvordan dyp prosedyrekunnskap ser ut, men Star mener at *fleksibilitet* er en indikator på dyp prosedyrekunnskap. Derfor mener han at den bør få større oppmerksomhet enn den har fått hittil. Med *dyp prosedyrekunnskap* mener han kunnskap om prosedyrer som er assosiert med forståelse, fleksibilitet og kritisk dømmekraft. For eksempel evnen til å kunne bruke en framgangsmåte fleksibelt, slik at oppgaver kan løses på den mest effektive måten (Star, 2005).

Star (2005) påpeker også at begrepsmessig kunnskap ofte ikke er definert som kunnskap av begreper eller prinsipper, slik som navnet tilsier. Isteden er den definert ut ifra termer om *kvaliteten* på ens kunnskap om begrepene, spesielt med vekt på hvor rik den er på iboende tilknytninger. Om begrepsmessig kunnskap avhenger av hvor rik den er på tilknytninger, kan det by på utfordringer. For eksempel vil det være en vesentlig forskjell på hvor sofistikert kunnskapen om et gitt tema er hos en 5. klassing og en 10. klassing. Det vil være en forskjell både på hvor rik den er på *tilknytninger* og på hvor dyp kunnskapen er. Star ønsker derfor at også dette aspektet bør få mer oppmerksomhet (Star, 2005). Dermed har vi beveget oss over i begrepene *fleksibilitet* og *tilknytning.*

Baroody, Feil og Johnson evaluerte Star (2005) sitt forsøk på å rekonseptualisere prosedyrekunnskap og begrepsmessig kunnskap. Basert på Star sin rekonseptualisering og andre definisjoner på prosedyrekunnskap og begrepsmessig kunnskap, har Baroody, Feil og Johnson (2007) utvidet og slått sammen disse definisjonene og kommet med en alternativ rekonseptualisering. Blant annet har de tatt utgangspunkt i at Star (2005) anbefalte at man definerer kunnskapen ut ifra hvor stor grad av tilknytning den har. De har også gått ut ifra en artikkel av Jong og Ferguson-Hessler (1996) som skriver om typer og kvaliteter av kunnskap.

De undersøker kunnskap ut ifra en matrise som tar for seg ulike typer og kvaliteter av kunnskap. De mener at det ikke bare finnes forskjellige typer kunnskap, men at kunnskapen også kan være av forskjellig kvalitet. For eksempel kan den være dyp eller overfladisk. De definerer *prosedyrekunnskap* som mentale handlinger eller manipulasjoner - det inkluderer regler, strategier og algoritmer - for å utføre en oppgave. *Begrepsmessig kunnskap* definerer de som kunnskap om fakta, generaliseringer og prinsipper (De Jong & Ferguson-Hessler, 1996). I motsetning til Star mener Baroody m.fl. at selv om overfladisk prosedyrekunnskap og overfladisk begrepsmessig kunnskap kan forekomme uavhengig av hverandre, så kan ikke dyp prosedyrekunnskap eksistere uten dyp begrepsmessig kunnskap, og omvendt. Figur 1 Gjensidig avhengighet mellom prosessuell og begrepsmessig kunnskap (gjengitt etter (Baroody et al., 2007, s. 124)) visualiserer denne sammenhengen. Hvor dyp forståelsen er innebærer både graden av tilknytning mellom prosedyrekunnskap og begrepsmessig kunnskap og ellers i hvilken grad denne kunnskapen er fullstendig, velstrukturert, abstrakt og nøyaktig (Baroody et al., 2007)

Den vertikale aksen går fra *ingen kunnskap* til *relativ fullstendig, velstrukturert, abstrakt og nøyaktig*. Det inkluderer også at *den er rik på tilknytninger innenfor kunnskapstyper og hverdagssituasjoner*



Diagonalen representerer dybden av forståelsen, fra *overfladisk prosedyrekunnskap* til *dyp prosedyrekunnskap og dyp begrepsmessig kunnskap.*

Den horisontale aksen går fra *ingen kunnskap* til *å være rik på tilknytninger* (Baroody, Feil & Johnson, 2007).

Figur 1 Gjensidig avhengighet mellom prosessuell og begrepsmessig kunnskap (gjengitt etter (Baroody et al., 2007, s. 124))

I en studie som undersøker erfarne kinesiske matematikklæreres syn på matematisk forståelse, gjort av Jinfa Cai og Meixia Ding (2017), ser de på hva ulike forskere legger i matematisk forståelse. For selv om det er en overflod av teorier og forskning på hva som menes med matematisk forståelse, er funnene inkonsekvente, noe som viser hvor komplekst begrepet forståelse er. Ett aspekt ved dette er at matematisk forståelse blir sett på både som en prosess for å oppnå forståelse, og som et resultat av å ha oppnådd forståelse. Altså kan den ses på både som en prosess og et produkt (Cai & Ding, 2017).

Som vi ser ovenfor, er det uenigheter i betydningen av begrepene prosedyreforståelse (/-kunnskap) og begrepsmessig forståelse (/-kunnskap), og hvordan disse interagerer med hverandre. Sett vekk ifra uenighetene, har Cai og Ding (2017) kommet fram til at de ulike teoretikerne er enige om følgende:

1. Forståelse er både en prosess av forståelse (eller kunnskap) og et resultat av forståelsens handling (noen ganger kalt kunnskap).
2. Forståelse er både å skape tilknytninger og resultatet av å lage disse tilknytningene.
3. Forståelse er en dynamisk og vedvarende prosess.
4. Forståelse kan ha ulike nivå og være av ulik art.
5. Målet er å få en dyp matematisk forståelse.
   (Oversatt fra (Cai & Ding, 2017, s. 8)).

Noe som kan være verdt å påpeke, er at når forståelsen er en prosess og den har dynamiske egenskaper, vil læreres matematiske forståelse være flyktig og påvirkes på en uforutsigbar måte. Den matematiske forståelsen kan derfor endre seg på bare et øyeblikk (Davis & Simmt, 2006).

Basert på Cai og Ding (2017) sin oppsummering, vil jeg si at begrepene prosedyreforståelse og begrepsmessig forståelse fortsatt kan anvendes i dag. Definisjonen til Hiebert & Lefevre (2009) og Ma (2010) har et godt innhold som beskriver matematisk forståelse godt. Likevel tilfører Baroody m. fl. (2007) sin rekonseptualisering noe nytt, som gjør definisjonene av forståelse bredere, men samtidig mer spesifikk. Den sier ikke bare hvilken type forståelse man har, men sier også noe om hvilken kvalitet den er av. Kvaliteten på forståelse, om man har nådd dyp matematisk forståelse, bestemmes ut ifra hvor langt man har kommet i prosessen (jf. (Cai & Ding, 2017)).

2.2. Matematisk kunnskap

2.2.1. Tidligere forskning om matematisk kunnskap

Læreres kunnskap er et tema som aldri går av moten. Allerede i 1986 kom Lee Shulman med den velkjente artikkelen *Those who understand: Knowledge growth in teaching* (1986). Der skriver han om hvilken kunnskap en matematikklærer bør ha, og identifiserer ulike kategorier av kunnskap. Schulman (1986) bruker begrepet *content knowledge* når han skriver om matematisk kunnskap. I det legger han at matematisk kunnskap ikke bare er å ha kunnskap om fakta og begreper, men også å forstå fagets struktur. *Content knowledge* rommer så mye at Schulman har valgt å dele det inn i tre kategorier av kunnskap: *Subject matter content knowledge (fagkunnskap)*[1], *pedagogical content knowledge (fagdidaktisk kunnskap)*[1] og *curricular knowledge (læreplankunnskap)*[1]. Fagdidaktisk kunnskap går ut på å ha kunnskap om faget. Det Shulman inkluderer i dette begrepet, handler om å vite hvilke representasjoner, analogier, illustrasjoner, eksempler, forklaringer og demonstrasjoner som er mest nyttig for eleven (Shulman, 1986, s. 9). Med andre ord er fagdidaktisk kunnskap å kunne formulere og representere faget på en slik måte at det blir forståelig for eleven. Det inkluderer også å ha en forståelse for hvilke forestillinger, forkunnskaper og misforståelser eleven har om temaet som skal undervises, og hvordan man skal ta disse i betraktning for at den videre undervisningen i temaet skal bli fruktbar for eleven. Når det kommer til læreplankunnskap, handler det om å ha egenskapen til å knytte et emne i matematikk til andre emner, men også å knytte faget matematikk til andre fag. Da må læreren ha oversikt over det faglige innholdet i matematikk i tillegg til å ha oversikt over læreplanen og de andre fagene (Shulman, 1986). Arbeidet Shulman gjorde om matematisk kunnskap, har dannet utgangspunktet for flere undersøkelser (for eksempel: (Ball & Bass, 2000; Ball et al., 2008)).

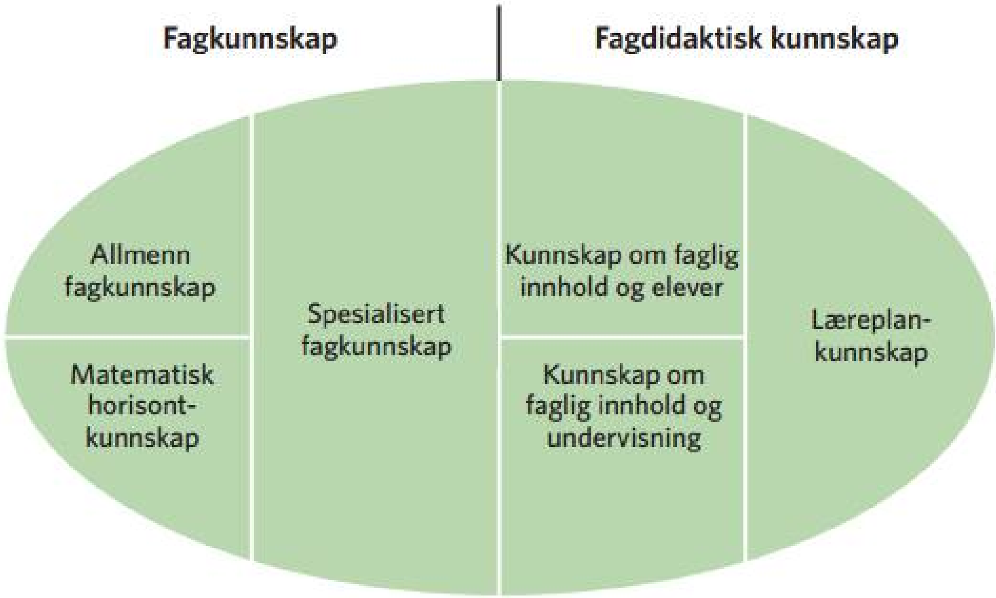
Ball brakte mer viktig kunnskap om matematisk kunnskap og lærerkunnskap på banen gjennom doktorgraden sin (*Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education (1988))*. I studien sin undersøkte hun kommende læreres forståelse for matematikk og deres ideer om undervisning og læring i matematikk (Ball, 1988). Ball sier her at kunnskap i matematikk er å ha forståelse for *innholdet* – temaene, konseptet og prosedyrene – i faget. I et undervisningsperspektiv vil det si at det er den kunnskapen som er nødvendig for å undervise matematikk til elevene. Ball og Bass (2002) kaller det for *mathematical knowledge for teaching – undervisningskunnskap*[1]

I en studie som analyserer matematikklæreres arbeid, hva det går ut på og hvilken kunnskap de trenger til de ulike oppgavene, bygger Ball, Thames og Phelps videre på Shulman sitt arbeid (Ball et al., 2008). De identifiserer seks hovedområder for undervisningskunnskap i matematikk (Figur 2 Undervisningskunnskap i matematikk (Ball et al., 2008; Valentina & Enge, 2015, s. 74), med de to hovedkategoriene: *Fagkunnskap* og *Fagdidaktisk kunnskap.*

---

[1] De norske oversettelsene for begrepene fra (Shulman, 1986), (Ball & Bass, 2002) og (Ball et al., 2008) er hentet fra (Valentina & Enge, 2015).

Disse to kategoriene henger svært tett sammen, og man kan ikke unnlate å inkludere begge to når man snakker om undervisningskunnskap for matematikk (Ball et al., 2008; Shulman, 1986). Hvilke spørsmål, innfallsvinkler, arbeidsmetoder og oppgaver en lærer velger, avhenger av det faglige innholdet - hvilket begrep, matematisk ide, representasjon eller fremgangsmåte – som skal undervises (Valentina & Enge, 2015). I min oppgave fokuserer jeg primært på forståelse og fagkunnskap. For å gi bedre innsikt i hva som ligger i begrepet *fagkunnskap*, tar jeg for meg dette i neste avsnitt.



Figur 2 Undervisningskunnskap i matematikk (Ball et al., 2008; Valentina & Enge, 2015, s. 74)

2.2.2. FAGKUNNSKAP

Allmenn fagkunnskap defineres av Ball et al. (2008) som matematisk kunnskap og ferdigheter som blir brukt i andre settinger enn undervisning. For eksempel å løse et mattestykke riktig. Dette er allmenn kunnskap, som ikke er unik for undervisning, men som trengs av lærere for å undervise og avgjøre om elevsvar er korrekte eller ikke, om fremgangsmåter er riktig og om definisjoner og begreper brukes korrekt. *Spesialisert fagkunnskap* defineres som matematisk kunnskap og ferdigheter som er unik for undervisning, og ikke er nødvendig for andre enn matematikklæreren. Dette innebærer å forstå hvilke fordeler og ulemper ulike representasjoner, argumenter og forklaringer har, oppdage hvilke muligheter og matematiske ideer som ligger i en oppgave eller en elevbesvarelse, og å være bevisst ulike fremstillingsmåter av matematiske ideer og operasjoner. Dette er oppgaver som krever unik matematikkforståelse og som er viktig for å kunne gjøre faginnholdet tilgjengelig for elevene (Ball et al., 2008; Valentina & Enge, 2015).

I sammenheng med de to emnene multiplikasjon med flersifrede tall og divisjon med brøk, vil allmenn fagkunnskap i hovedsak være å kunne bruke en algoritme for å løse en matematisk oppgave riktig. Har man spesialisert fagkunnskap, vil kunnskapen gå utover dette. Læreren forstår hvorfor man kan anvende algoritmen, og har evnen til å gjøre denne forståelsen tilgjengelig for elevene. Hva som regnes for å være en algoritme, og hvordan man kan forstå hvorfor algoritmen gir en matematisk riktig løsning, skal vi se mer på i neste kapittel om grunnleggende matematikk. Det tar for seg algoritmebegrepet og den grunnleggende matematikken innenfor de to emnene.

2.3. GRUNNLEGGENDE MATEMATIKK

Regning innenfor emnene multiplikasjon med flersifrede tall og divisjon med brøk, er i skolen preget av utstrakt bruk av algoritmer. Det kan man blant annet se ut ifra måten enkelte lærebøker introduserer matematikken innenfor disse emnene (for eksempel divisjon med brøk i Faktor 8 (Hjardar, Pedersen & Jerner, 2014)). Det er derfor nyttig å starte med å se på hva en algoritme er, før vi beveger oss over til den grunnleggende matematikken innenfor de to emnene.

2.3.1. ALGORITMER

Å regne er definert av Hyman Bass (2003) som å finne en standard representasjon for et matematisk uttrykk. Representasjonen avhenger naturligvis av konteksten, og kan variere i form og uttrykk. Om man for eksempel skal regne ut divisjonsstykket $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, kan man velge å representere det som en uekte brøk ($\frac{7}{2}$), et blandet tall ($3\frac{1}{2}$) eller som et desimaltall (3,5). Alle utregningene representerer divisjonsstykket, men hvilken representasjon man velger avhenger av hvordan man vil bruke resultatet. Karakteristisk (men ikke utelukkende) for regning er at man utfører en eller flere av de grunnleggende operasjonene addisjon, subtraksjon og divisjon på en gruppe tall. En metode for å løse et matematisk problem kan kalles en *algoritme* dersom metoden er generell og kan løse en generell type problemer (Bass, 2003). Bass definerer algoritmer som en metode som består av en presis og spesifisert sekvens av steg som vil føre til en fullstendig løsning på en spesiell gruppe av matematiske uttrykk (s. 323). Hiebert og Lefevre (2009) sin definisjon sammenfaller med Bass. De definerer algoritmer som en steg-for-steg-instruksjon som bestemmer hvordan en matematisk oppgave skal løses. Bass (2003) legger til at algoritmer bør ha en rekke kvaliteter for å være anvendelige. For å være kvalifisert som en algoritme, må den være:

- *Nøyaktig og pålitelig.* Den skal alltid gi riktig svar.
- *Generell.* Den fungerer på alle tilfeller av problemet.

I tillegg, for å være en tilfredsstillende algoritme, bør den være:

- *Effektiv.* Tiden man bruker på å løse problemet bør være fornuftig sammenlignet med hvor stort problemet er.
- *Lett å bruke nøyaktig.* Den bør kunne brukes uten at det er høy sannsynlighet for å gjøre feil underveis.
- *Transparent.* Det er tydelig hvorfor hvert steg av algoritmen fører mot riktig svar, og hvordan det matematisk kan begrunnes (Bass, 2003, s. 323-324).

Regnestykkene som lærerne i denne studien får presentert, er knyttet til spesifikke algoritmer som oppfyller kravene nevnt ovenfor.

2.3.2. MULTIPLIKASJON MED FLERSIFREDE TALL

I den første casen i denne studien, blir dette multiplikasjonsstykket brukt: 123x645. Standardalgoritmen for å multiplisere flersifrede tall går ut på at man multipliserer tallene del for del, for så å summere produktene fra hver del. Når man gjør denne prosessen, bruker man gjerne et oppsett som ser slik ut:

$$
\begin{array}{r}
\underline{123\text{x}645} \\
615 \\
492 \\
\underline{738} \\
79335
\end{array}
$$

(Ball, 1988; Ma, 2010).

Algoritmen for å multiplisere med flersifrede tall, er utledet fra prosessen med å dekomponere tall til utvidet form, og multiplisere tallene del for del. Her er 5 multiplisert med 123, som gir produktet 615. Deretter er 40 multiplisert med 123, og det gir produktet 4920. Til slutt er 600 multiplisert med 123, og det blir 73800. For å forstå algoritmen for multiplikasjon med flersifrede tall, er det en forutsetning å forstå hvordan tallene kan representeres på utvidet form, med hundrere, tiere og enere. Man må også forstå den distributive loven som knytter sammen multiplikasjon og addisjon. Den tillater at man kan dekomponere tallene, multiplisere delene hver for seg, for så å legge sammen produktene (Ball, 1988).

2.3.3. Divisjon med brøk

I divisjon bruker man ofte begrepene delingsdivisjon og målingsdivisjon.

> I *delingsdivisjon* kan man tenke seg at noe skal fordeles, og man skal finne ut av hvor mye som skal fordeles til hver enhet. Man skal altså finne ut *hvor mange det blir til hver*. Ofte bruker man personer i delingsdivisjon (Ball, 1988; Hole, 2006; Martinussen & Smestad, 2010). For eksempel: 12 drops skal fordeles på 4 personer (12:4), hvor mange drops blir det til hver? (3). Her får divisor og kvotient samme benevning (*drops : personer = drops).*
>
> I *målingsdivisjon* vet man hvor mange det skal være i hver mengde, og man skal finne ut hvor mange det rekker til (Hole, 2006; Martinussen & Smestad, 2010). For eksempel: Man har 12 drops, og i en godtepose skal det være 3 drops (12:3). Hvor mange godteposer kan man putte drops i? (4). Her har divisor og dividend samme benevning, mens kvotienten får en egen benevning (*drops : drops = poser).*

For å forstå algoritmen (kryssmultiplikasjon) for divisjon med brøk, er det viktig at man har forståelse for forskjellen på delingsdivisjon og målingsdivisjon. Det er konteksten til regnestykket som bestemmer om det er delingsdivisjon eller målingsdivisjon. Likevel, når regnestykket har brøk eller desimaltall som divisor, er det mest nærliggende å assosiere det med målingsdivisjon. For eksempel i regnestykket $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, kan det være vanskelig å bruke delingsdivisjon. En kontekst med delingsdivisjon vil for mange virke «kunstig» eller vanskelig å forestille seg. Det vil være mer naturlig å bruke målingsdivisjon (Martinussen & Smestad, 2010).

Den formelle algoritmen for divisjon med brøk, er kryssmultiplikasjon:

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ (Martinussen & Smestad, 2010; Son & Crespo, 2009).

I Faktor 8, ei matematikkbok for 8.trinn, står det følgende om divisjon med brøk: «Når vi skal dividere en brøk med en brøk, multipliserer vi den første brøken med den omvendte av den andre brøken» (Hjardar et al., 2014, s. 77). Forklaringen til denne instruksjonen har utelukkende fokus på gjennomføringen av prosedyren. Dette er sammenfallende med slik Ball

(1988) beskriver at matematikkbøkene i USA presenterte det samme temaet på slutten av 80-tallet: «Dividing by a fraction is the same as multiplying by its resiprocal» (Ball, 1988, s. 47).

Det finnes flere ulike måter å løse divisjonsstykker med brøk (Ma, 2010; Martinussen & Smestad, 2010; Son & Crespo, 2009). En metode er å sette divisjonsstykket opp som brøk:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

For å få et regnestykke som er enklere å arbeide med, kan man multiplisere teller og nevner med en brøk som gjør at man får 1 i nevner. Man må multiplisere både teller og nevner for at forholdet mellom teller og nevner skal opprettholdes, hvis ikke endres regnestykket og man får feil svar.

$$\frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} = \frac{\frac{ad}{bc}}{1} = \frac{ad}{bc}$$

Denne metoden viser at man alltid vil kunne multiplisere med den omvendte brøk (til divisor/nevner), fordi at man da får 1 i divisor/nevner (Son & Crespo, 2009).

Om man strever med brøkregning, eller det passer bedre til konteksten, kan man gjøre det om til desimaltall. Da får man regnestykket

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = 1{,}75 \div 0{,}5 = 3{,}5$$

(Ma, 2010; Son & Crespo, 2009).

2.4. TEORETISK RAMMEVERK FOR STUDIEN

Ut ifra teorien ovenfor, har jeg et teoretisk rammeverk som danner utgangspunktet for studien min og bearbeiding av det innsamlede datamaterialet. For å gjøre det mest mulig tydelig og forståelig for leseren, oppsummerer og presenterer jeg det teoretiske rammeverket i to tabeller: matematisk forståelse og læreres fagkunnskap. Jeg presenterer også en oppsummerende tabell for grunnleggende matematikk.

2.4.1. TEORETISK RAMMEVERK FOR MATEMATISK FORSTÅELSE

For å ha et verktøy som kan hjelpe meg å besvare problemstillingen, der jeg spør etter hvilken forståelse grunnskolelærere har for de nevnte algoritmene, har jeg valgt å utvide definisjonene for begrepene prosedyreforståelse og begrepsmessig forståelse. Definisjonene tar utgangspunkt i Hiebert & Lefevre (2009) og Ma (2010). Med bakgrunn i Baroody m. fl. (2007) sin rekonseptualisering, omfatter de i tillegg graden av forståelse – fra overfladisk til dyp. Dybden av forståelse er hentet fra Baroody et al. (2007) og defineres ut ifra graden av tilknytning mellom prosessuell og begrepsmessig kunnskap og i hvilken grad denne kunnskapen er fullstendig, velstrukturert, abstrakt og nøyaktig. Fordi Baroody et al. (2007) poengterer at dyp prosedyrekunnskap og dyp begrepsmessig kunnskap ikke kan eksistere uavhengig av hverandre, defineres ikke dyp prosedyreforståelse for seg selv. Den vil alltid være tilknyttet dyp begrepsmessig forståelse, og inngår derfor i den definisjonen.

Tabell 1 Teoretisk rammeverk for matematisk forståelse

TEORETISK BEGREP	FORKLARING
Prosedyreforståelse	Innebærer at man behersker det formelle språket og systemet for symbolrepresentasjon i matematikk. Dette er ofte bare overfladiske egenskaper, og man har ikke forståelse om betydningen av disse. Videre innebærer det at man kan algoritmer og regler for å utføre matematiske oppgaver (Hiebert & Lefevre, 2009; Ma, 2010). Forståelsen har få tilknytninger, er ufullstendig og ustrukturert (Baroody et al., 2007).
Overfladisk begrepsmessig forståelse	Innebærer at prosedyrene er mekaniske og forståelsen har svak tilknytning til kunnskapstyper og andre kontekster. Forståelsen er lite abstrakt og er avhengig av konteksten den står i (Baroody et al., 2007).
Dyp begrepsmessig forståelse	Inkluderer også *dyp prosedyreforståelse.* Det innebærer at man kan følge fastsatte instruksjoner for hvordan en matematisk oppgave skal løses. I tillegg har forståelsen sterk tilknytning til andre kontekster og temaer i matematikk, og man har en fullstendig, velstrukturert, abstrakt og nøyaktig forståelse. Da har man blant annet en større matematisk forståelse for det underliggende i en algoritme, og kan forklare *hvorfor* prosedyren kan utføres på en bestemt måte (Baroody et al., 2007; Hiebert & Lefevre, 2009; Ma, 2010).

2.4.2. TEORETISK RAMMEVERK FOR LÆRERES FAGKUNNSKAP

Ball (1988) sitt rammeverk er utviklet for å utforske hvilken kunnskap og hvilke holdninger kommende lærere besitter. I sitt teoretiske rammeverk har hun med fire komponenter: *subject matter knowledge* (SMK), *knowledge about teaching and learning, knowledge about students as learners* og *knowledge about context* (s. 19). Ball sin studie er omfattende og undersøker mange aspekter ved matematikk og undervisning. For denne oppgaven er det Ball sitt rammeverk og funnene fra det som handler om fagkunnskap (SMK) som er mest aktuelt for å besvare problemstilling.

Selv om Ball sin studie handler om lærerstudenter og hva de bringer med seg inn i utdanningen, har den flere elementer som kan være nyttig for min studie. Ball brukte intervjuer i sin studie. Analysene av dem fokuserer blant annet på lærerstudentenes fagkunnskap. En del av studien hennes er relevant fordi hun har et rammeverk og en intervjuguide som sier noe om fagkunnskapen til lærerstudentene. Fagkunnskapen inkluderer kunnskap om og omkring matematikk (knowledge *of* and *about* mathematics). Det er da nærliggende å anta at dette også er aktuelt for å kunne si noe om læreres fagkunnskap. (Ball, 1988). Som hjelp til å besvare problemstillingen, og finne ut hvilken fagkunnskap lærere har, bruker jeg Ball (Ball et al., 2008) sine definisjoner for allmenn fagkunnskap og spesialisert fagkunnskap.

Tabell 2 Teoretisk rammeverk for læreres fagkunnskap

TEORETISK BEGREP	FORKLARING
Allmenn fagkunnskap	Matematisk kunnskap og ferdigheter som blir brukt i andre settinger enn undervisning. Som for eksempel å løse et mattestykke riktig. Dette er allmenn kunnskap som ikke er unik for undervisning, men som trengs av lærere for å undervise og avgjøre om elevsvar er korrekte eller ikke, om fremgangsmåten er riktig og om definisjoner og begreper brukes korrekt (Ball et al., 2008).
Spesialisert fagkunnskap	Matematisk kunnskap og ferdigheter som er unik for undervisning, og ikke er nødvendig for andre enn matematikklæreren. Dette innebærer å forstå hvilke fordeler og ulemper ulike representasjoner, argumenter og forklaringer har, oppdage hvilke muligheter og matematiske ideer som ligger i en oppgave eller en elevbesvarelse, og å være bevisst ulike fremstillingsmåter av matematiske ideer og operasjoner (Ball et al., 2008; Valentina & Enge, 2015).

2.4.3. Oppsummering av grunnleggende matematikk for multiplikasjon med flersifrede tall og divisjon med brøk:

Tabell 3 Oppsummering av grunnleggende matematikk for multiplikasjon med flersifrede tall og divisjon med brøk

Grunnleggende matematikk	Forklaring	Eksempel	Kilde
Dekomponere tall til utvidet form	Tallene kan representeres på utvidet form, med enere, tiere og hundrere.	$645 = 600 + 40 + 5$	(Ball, 1988)
Distributiv lov	Man kan dekomponere tallene og multiplisere delene hver for seg.	$123 \times 645 = (123 \times 5) + (123 \times 40) + (123 \times 600)$	(Ball, 1988)
Målingsdivisjon	Konteksten og/eller regnestykket bestemmer om man skal bruke målings- eller delingsdivisjon. I regnestykket $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ er det nærliggende å bruke målingsdivisjon.	*Hvor mange til hver?*	(Hole, 2006; Martinussen & Smestad, 2010)
Delingsdivisjon		*Hvor mange rekker det til?*	
Kryssmultiplikasjon $\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$	Et divisjonsstykke kan skrives som brøk. Dersom man multipliserer teller og nevner med samme tall, endres ikke verdien til brøken.	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} = \frac{\frac{ad}{bc}}{1} = \frac{ad}{bc}$	(Son & Crespo, 2009)
Brøk som desimaltall	Gjøre brøk om til desimaltall.	$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = 1{,}75 \div 0{,}5 = 3{,}5$	(Ma, 2010; Son & Crespo, 2009)

3. METODE

I dette kapittelet skal jeg presentere og begrunne valgene jeg har tatt og metodene jeg har brukt i innsamlingen, bearbeidingen og analysen av datamaterialet til studien. Først presenterer jeg forskningsdesignet jeg har brukt og metodevalg for innsamling av datamaterialet. Deretter beskriver jeg datainnsamlingsprosessen, fra utforming av intervjuspørsmålene til gjennomføring av intervjuene og bearbeidingen av disse. Videre tar jeg for meg analyseprosessen av datamaterialet. Til slutt i kapittelet diskuterer jeg validiteten og påliteligheten til studien og hvilke etiske forhåndsregler jeg har måttet ta hensyn til i innsamlingen og presentasjonen av datamaterialet.

3.1. MÅL OG FORSKNINGSDESIGN

For å undersøke hvilken sammenheng det er mellom læreres forståelse og fagkunnskap for de gitte emnene, var det hensiktsmessig å gjennomføre en kvalitativ studie. I forskning kan man skille mellom induktiv og deduktiv forskning (Jacobsen & Postholm, 2011). I induktiv forskning går man ut i feltet med åpent sinn og blanke ark og registrerer det som skjer. Motsetningen er deduktiv forskning. Der har man med seg hypoteser ut i feltet, og vet hva man skal se etter. Det er ikke alltid lett å være enten induktiv eller deduktiv. Da kaller man det en pragmatisk tilnærming – en krysning mellom de to forskningsstilene. Likevel kan de to stilene naturlig skilles ut ifra hvilke metoder man bruker. Kvantitative metoder regnes som deduktive, mens kvalitative regnes som induktive, selv om det ikke er et helt rent skille (Jacobsen & Postholm, 2011). For å få besvare problemstillingen, valgte jeg å intervjue lærere. Intervju som metode kan man kalle en pragmatisk tilnærming som heller mer mot det induktive på grunn av det kvalitative metodevalget. Kvalitativ metode er fleksibel, og den kan tillate at man er spontan og at man kan tilpasse interaksjonen mellom deltageren og forskeren, dog i varierende grad. Et eksempel er at forskeren kan tilpasse spørsmålene underveis, eller legge til spørsmål basert på den informasjonen som deltageren kommer med. Det er vanlig at man i kvalitativ metode har åpne spørsmål, og gir forskningsdeltageren anledning til å svare utfyllende og detaljert, for å få innsikt i deltagerens perspektiv (Johannessen & Christoffersen, 2012; Nilssen, 2012). Fordi læreres forståelse og kunnskap ikke er statisk, og vil variere fra person til person, er dette et godt egnet metodevalg for å besvare problemstillingen på best mulig måte. Å ha mulighet til å tilpasse intervjuene underveis for å få utfyllende svar og best mulig innsikt i intervjuobjektets perspektiv, gir meg et godt utgangspunkt for å få et best mulig bilde av lærernes forståelse og kunnskap om de gitte emnene.

3.2. DATAINNSAMLINGSPROSESSEN

Det er forskningsspørsmålet som bestemmer hvilken form og retning datainnsamlingsprosessen tar (Jacobsen & Postholm, 2011). I det følgende vil jeg presentere hvordan forskningsspørsmålet mitt har guidet meg gjennom denne prosessen. Først tar jeg for meg intervju som metode. Deretter vil jeg vise hvordan intervjuet mitt har tatt form: Hvordan tidligere forskning har veiledet meg i utformingen av intervjuet og hvordan erfaringene fra pilotintervjuene ledet meg videre i studien.

3.2.1. INTERVJU SOM METODE

For å besvare forskningsspørsmålet var det nødvendig å få informasjon om lærernes forståelse og fagkunnskap. Den beste måten å få innsikt i forståelsen og fagkunnskapen deres, er ved å samtale ansikt til ansikt med dem. For å få mest mulig informasjon om de enkelte lærernes forståelse og kunnskap, var det naturlig å gjennomføre individuelle intervju. Forskningsspørsmålet mitt brakte meg inn på tidligere studier som hjalp meg å bestemme formen på intervjuet. Basert på tidligere forskning av blant annet Ball (1988) og Ma (2010), og hvordan de har gjennomført sin datainnsamling, kunne jeg forme mitt eget intervju, slik at jeg kunne få den informasjonen jeg trengte. Intervju kan deles inn i tre grupper, etter hvor strukturerte de er: *strukturert*, *halvstrukturert* og *ustrukturert* (Denscombe, 2010). I denne studien valgte jeg å bruke et halvstrukturert intervju. Temaet og spørsmålene var bestemt på forhånd. Som intervjuer var jeg likevel fleksibel med hensyn til rekkefølgen og utviklingen av intervjuet. Jeg hadde en rekke oppfølgingsspørsmål som jeg brukte om det passet, eller stilte andre spørsmål som dukket opp underveis. I et slikt intervju får den som intervjues bruke sine egne ord og utvikle og uttrykke egne tanker. På denne måten kan man gjøre oppdagelser og få god innsikt i intervjuobjektets tanker (Denscombe, 2010).

3.2.2. INTERVJUET TAR FORM – MED TEORI SOM BAKGRUNNSTEPPE

Intervjuguiden min (Vedlegg B) er basert på studien Deborah L. Ball gjorde til doktorgraden sin (1988). En viktig antagelse i Balls studie, er at når man gjennomfører undervisningsaktiviteter, vil læreres fagkunnskap samhandle med kunnskapen og holdningene de har til undervisning, læring og skolegangens kontekster. Hun utformet spørsmål basert på vanlige emner i matematikk, som alle matematikklærere underviser i uavhengig av hvilket syn de har på matematikk (men avhengig av hvilket trinn de underviser på). Måten emnene undervises på avhenger av hvilket syn de har på matematikk. I valg av emner la hun til grunn fire kriterier:

- Finnes i pensumet for K-12
- Er sentralt i matematikken
- Er ofte vanskelig for elever å lære
- Kan læres bort både algoritmisk og konseptuelt
  (Ball, 1988, s. 30-31)

Emnene multiplikasjon med flersifrede tall og divisjon med brøk, som jeg har valgt til studien min, oppfyller de samme kriteriene. (Emnene finnes i kompetansemålene for læreplan i matematikk (Saabye et al., 2015)).

Ball (1988) og Ma (2010) stilte spørsmålene som et scenario i sine intervju. De beskrev et scenario eller en skisse av en undervisningssituasjon, og spurte så intervjuobjektet om hva de ville ha gjort om dette scenarioet fant sted i deres undervisning, og hvorfor. Scenariene var designet for å finne ut tre ting om intervjuobjektene:

- Hva de kunne og hvilke oppfatninger de hadde om matematikk og læring og undervisning av matematikk i klasserommet.
- Hvilke ideer og engasjement de ville bruke i responsen til hvert scenario.
- Hvordan de vevde sammen ulike typer kunnskap og engasjement for å tolke, avgjøre, velge og rettferdiggjøre disse (Ball, 1988, s. 31).

Dette er tre punkt som er veldig relevante for å besvare forskningsspørsmålet mitt. Gjennom å få innsikt i disse aspektene, får man også god innsikt i både forståelsen og fagkunnskapen lærerne har.

Ball hadde noen oppfølgingsspørsmål som hun hadde forberedt på forhånd. Da var hun forberedt på å oppklare og få bedre innsikt i forståelsen deres på ulike områder, for eksempel plassverdi og rollen til tallet 0 i nummersystemet vårt. Det hendte også at informantene stilte henne spørsmål, som for eksempel «er dette riktig?». Istedenfor å svare, stilte hun da spørsmål tilbake, som «hva er det som gjør at du er usikker?». På denne måten fikk hun enda dypere innsikt i informantenes ideer om matematikk (Ball, 1988). Inspirert av henne laget jeg noen oppfølgingsspørsmål som kunne være relevante. Gjennom pilotintervjuene og bearbeidingen av disse, var jeg ekstra oppmerksom på hvilke andre oppfølgingsspørsmål som kunne være nyttige å ha med.

I forkant av pilotintervjuene mine utformet jeg to ulike intervjuguider. Spørsmålene til den ene hentet jeg direkte fra Ball (1988) og Ma (2010). Til den andre intervjuguiden var spørsmålene varianter av disse, der de var omformulert og noen flere spørsmål var lagt til. Liping Ma valgte å bruke spørsmålene fra TELT-studien, fordi de var relevante for matematikkundervisningen, og de tok for seg et bredt spekter av grunnleggende matematikk. Gjennom analysen av undersøkelsene sine, maler Ma et bilde av matematikklærernes *fagkunnskap* (subject matter knowledge). Av de samme grunnene velger jeg å bruke de samme spørsmålene. Spørsmålene er allerede godt utprøvd. Gjennom å se på andres funn, får jeg tips til analysen min av de samme spørsmålene. Det er nettopp *fagkunnskapen* til lærerne som er fokus i forskningsspørsmålet mitt, og dermed er disse spørsmålene veldig aktuelle å bruke (Ma, 2010). Når jeg bruker de samme spørsmålene, vil mine funn gi et mer valid bidrag i diskusjonen om læreres fagkunnskap i matematikk gjennom å belyse det fra perspektivet til norske lærere.

3.2.3. Intervjuet tar form - erfaring fra pilot

For å høste erfaring og ha mulighet til å gjøre endringer i intervjuet, og for å kunne få best mulig informasjon for å besvare problemstillingen, valgte jeg å gjennomføre to pilotintervju. Jeg kontaktet en liten barneskole med rundt 100 elever på 1.-7. trinn. To lærere på mellomtrinnet sa seg villig til å bli intervjuet. På dette tidspunktet hadde forskningsspørsmålet mitt en litt annen formulering, og jeg hadde valgt å ha fokus på emnene multiplikasjon og subtraksjon med flersifrede tall. Fokusemnene var valgt på bakgrunn av at de er essensielle i grunnleggende matematikk. Jeg brukte de to forskjellige intervjuguidene for å få testet ut ulike spørsmål. Det ble tatt lydopptak av intervjuene, og de ble transkribert kort tid etter, mens jeg fortsatt hadde dem ferskt i minne. Dermed kunne jeg notere ned i transkripsjonen hvilke regnestykker som ble gjort underveis, og hva de pekte på og henviste til mens de snakket. I analyseringen av piloten valgte jeg å ha fokus på hvilke utsagn som kunne antyde at læreren hadde prosedyreforståelse eller begrepsmessig forståelse om emnene. Gjennom bearbeidingen av pilotintervjuene, ble det tydelig hvilke spørsmål og form på spørsmålene som gav meg mest innsikt. Jeg så også hvilke spørsmål som ikke gav meg relevant informasjon. Jeg brukte erfaringene jeg hadde gjort til å endre problemstillingen og tilpasse intervjuguiden. De spørsmålene som var direkte hentet fra Ball (1988) og Ma (2010), gav best innsikt. Jeg valgte derfor å bruke disse spørsmålene. Jeg tilpasset oppfølgingsspørsmålene jeg hadde brukt og la til noen flere. Subtraksjon med flersifrede tall viste seg å være et emne som gav liten innsikt i lærerens tankeprosesser og forståelse. I samråd med veilederen min valgte jeg å gå bort fra dette emnet. Det nye emnet ble divisjon med brøk – et emne som er mer komplekst, og som tydeligere kan gi et bilde av hvordan forståelse og fagkunnskap henger sammen.

3.3. Gjennomføring av intervjuene – fra A til Å

Her vil jeg presentere gjennomføringen av intervjuene fra A til Å. Før intervjuene kunne gjennomføres, måtte jeg ta stilling til hvem jeg ville intevjue. Prosessen med å finne informanter, og begrunnelse for utvalget mitt, presenteres aller først. Deretter forteller jeg om konteksten og gjennomføringen av intervjuet. Til slutt sier jeg noe om bearbeidingen jeg gjorde under transkriberingen.

3.3.1. Utvalget

Det er mange forskjeller blant lærere i norsk skole. Alder, utdanningsbakgrunn, fagkunnskap, erfaring, etterutdanning og kursing er noen av disse. I Deborah Ball (1988) sin studie bruker hun et spørreskjema med bakgrunnsinformasjon som utgangspunkt for hvem hun velger som informanter. For å fange opp noen av forskjellene blant lærerne, har jeg valgt å gjennomføre en kort spørreundersøkelse om deres bakgrunn (Vedlegg A).

Spørsmålene i bakgrunnsundersøkelsen er basert på resultatene fra *Kompetanseprofil i grunnskolen: Hovedresultater 2013/2014* (Lagerstrøm, Moafi & Revold, 2014). I denne undersøkelsen kommer det nemlig fram at det har skjedd et kompetanseløft i matematikk de siste 14 årene (fra 2000 til 2014). Andelen matematikklærere med kompetanse har økt i takt med utdanningsmyndighetenes økte fokus på dette. Undersøkelsen bekrefter at det er de yngste lærerne som har mest kompetanse, og at flere eldre enn yngre matematikklærere mangler studiekompetanse i matematikk. For å fange opp dette mangfoldet i studien min, stiller jeg derfor bakgrunnsspørsmål om alder, erfaring, utdannelse, antall studiepoeng i matematikk og etterutdanning/kurs. I tillegg vil jeg sikre meg at informantene er aktuelle i forhold til forskningsspørsmålet mitt. Derfor stiller jeg spørsmål om hvilke klassetrinn de underviser- og har undervist på. Spørreundersøkelsen i sin helhet finnes i vedlegg A.

For å få tak i kandidater, sendte jeg mail til rektorer på forskjellige skoler der jeg informerte om studien min, og spurte om de kunne videresende informasjonen til aktuelle lærere. Lærerne fikk da et informasjonsskriv om studien, intervjuet (Vedlegg C) og bakgrunnsundersøkelsen. Der kontaktinformasjonen var offentlig, tok jeg direkte kontakt med matematikklærerne. Mange rektorer gav tilbakemelding om at de hadde videresendt informasjonen. Andre gav ikke tilbakemelding i det hele tatt. Etter en tid uten å ha fått tilbakemelding fra rektorer eller lærere, tillot jeg meg å sende en påminnelse. Da noen likevel ikke gav tilbakemelding, kontaktet jeg nye skoler og nye lærere. Det endelige utvalget mitt besto av seks lærere, fra seks ulike skoler, med ulik bakgrunn. Skolene varierer både i størrelse og beliggenhet. Fra store by-skoler til små bygde-skoler, både offentlige og private. Utgangspunktet var at jeg skulle ha informanter fra fire ulike kategorier:

- Fullført utdanning før 2000
- Fullført utdanning i 2000 eller senere
- Underviser/har undervist på 5.-7. trinn
- Underviser/har undervist på 8.-10. trinn

De intervjuede lærerne har fått fiktive initialer, basert på når de var ferdig utdannet, om de underviser på barne- eller ungdomsskole og i tillegg en særegen bokstav for å skille dem fra hverandre (Tabell 4 Informantene til studien). Antall studiepoeng lærerne har i matematikk varierer fra 15 til 90.

Tabell 4 Informantene til studien

Lærere	***Etter 2000***	***Før 2000***	***Barneskole***	***Ungdomsskole***
ÅEB	E: -04		B	
SEB	E: -01		B	
HFB		F: -92	B	
VFB		F: -83	B	Har også erfaring fra U
BEU	E: -08			U
JEU	E: -14			U

3.3.2. Kontekst og gjennomføring

Intervjuene ble gjennomført der det passet best for intervjuobjektet. De fleste lærerne møtte jeg på den skolen han/hun arbeidet. Der fant vi et ledig rom der vi kunne snakke uforstyrret. Ett av intervjuene ble gjennomført hjemme hos læreren, da det passet henne best. For en annen lærer passet det best å komme hjem til meg. Intervjuene varte i ca. 30 minutter. Det ble gjort lydopptak. Det skriftlige materialet som ble produsert underveis, ble tatt vare på. Siden dette var et halvstrukturert intervju, fikk alle lærerne det samme utgangspunktet. For å få et best mulig bilde av lærernes forståelse og kunnskap, endret jeg spørsmålene underveis for å få fram mer av hva de mente, tenkte og forsto. De ble oppfordret til å skrive ned utregninger, løsningsmetoder og ulike framstillinger, slik at jeg kunne få et tydeligere bilde av hva og hvordan de tenkte. Intervjuene ble gjennomført i tidsrommet april til juni.

3.3.3. Bearbeiding: Transkripsjon

Gjennom transkribering blir lydopptak av situasjoner gjort om til tekst. Transkripsjonene vil aldri kunne være helt korrekte. De vil være farget av hvordan forskeren tolker situasjonen og hva han oppfatter er viktig. En skriftlig tekst vil også mangle den nonverbale kommunikasjonen og konteksten. Tonefall, hvordan ord vektlegges, dialekt, pauser og stillhet er vanskelig å transkribere. Man kan derfor miste litt av meningen gjennom prosessen. Transkripsjonen vil bli farget av hvordan den som transkriberer oppfatter situasjonen og det som blir sagt, og blir derfor aldri fullstendig objektiv (Denscombe, 2010; Nilssen, 2012). Transkriberingen ble gjort kort tid etter at hvert intervju var gjennomført. Når man tar lydopptak av et intervju, vil ikke det skriftlige materiale som blir produsert, notert og henvist til underveis i samtalen, komme godt fram i en transkripsjon. Med intervjuet ferskt i minne, kunne derfor slike ting noteres inn i transkripsjonen for å gjøre den mer meningsfull. Bilder av det skriftlige materialet ble plassert inn i transkripsjonen på det tidspunktet det ble produsert. For å få en så meningsfull transkripsjon som mulig, har jeg utelatt å transkribere små pauser og ord som «eeh, hm og mhm» der jeg har vurdert at det ikke har betydning for innholdet. Utsagnene ble nummerert for å gjøre dem lettere og mer oversiktlige å referere til. Hvert utsagn starter med initialer for å vise hvem som snakker. Jeg har brukt *I* for intervjuer og de fiktive initialene for hver lærer.

Å transkribere er en viktig og nyttig del av arbeidet med datamaterialet. Gjennom transkriberingsprosessen må forskeren lytte så oppmerksomt at hvert ord blir lagt merke til.

Gjennom å gjøre det om til skriftlig materiale, kan nye tanker til analysen og kodingen av materialet dukke opp. For eksempel blir gjentagende ord og viktige utsagn mer synlige (Nilssen, 2012).

3.4. ANALYSEPROSESSEN

For å klare å se det innsamlede materialet fra ulike synsvinkler, og få med alle aspektene i det, har jeg arbeidet variert med materialet i analyseprosessen. Jeg har hørt gjennom intervjuene for å sikre meg at transkripsjonene er korrekte og gir et så riktig bilde av situasjonene som mulig. I etterarbeidet har jeg lest gjennom uten et bestemt mål, og markert interessante formuleringer og utsagn. Deretter gikk jeg mer målrettet gjennom transkripsjonene for å finne indikasjoner på forståelse og fagkunnskap. Jeg noterte ned koder og umiddelbare refleksjoner. Jeg vekslet mellom å se på hele intervjuene og deler av dem. Mange av disse prosessene har jeg vært gjennom flere ganger, med hovedfokus enten på forståelse eller fagkunnskap, noen ganger begge deler. Kodene har jeg utarbeidet ut ifra definisjonene i det teoretiske rammeverket (kapittel 2.4). Etter at jeg hadde jobba meg gjennom analyseprosessen av datamaterialet, og kategorisert forståelsen og fagkunnskapen lærerne hadde for de to emnene, satte jeg sammen en kortfattet oversikt for å kunne sammenligne dem.

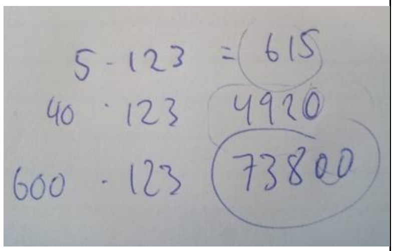
I det følgende vil jeg presentere analysekodene i to tabeller, først for læreres matematiske forståelse, deretter for læreres matematiske fagkunnskap. I begge tabellene presenteres kodene sammen med et eksempel fra analysen som er gjort.

3.4.1. ANALYSEKODER FOR LÆRERES MATEMATISKE FORSTÅELSE

Tabell 5 Analysekoder for matematisk forståelse

TEORETISK BEGREP	UNDERKATEGORI	KODE	*EKSEMPEL*
Prosedyre-forståelse	Kan algoritmen	P-alg	SEB vet hvordan algoritmen utføres. 3. SEB. Det er jo for at du skal få tierne og enerne og hundrerne og tusenene på rett plass. Så det er slik vi gjør det da. Vi setter det opp i trapp for å vise at tallene må stå under hverandre på riktig plass, og for at enerne, tierne og hundrerne skal gå opp.

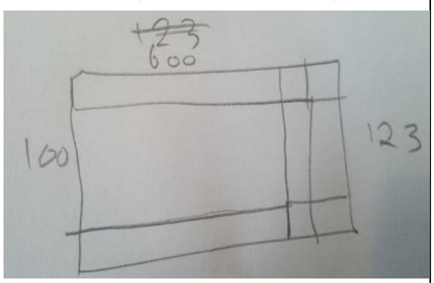
	Ikke forståelse for algoritmen	P-?alg?	SEB kan ikke forklare hvorfor algoritmen for multiplikasjon med flersifrede tall har denne «trappeformen». 4. I. Vil du forklare litt nærmere hva du mener med enerne og tierne? 5. SEB. Nei, det er jo det at. Nei, det kan jeg faktisk ikke gjøre. Jeg vet ikke hvordan jeg skal forklare det. Det kom litt brått på.
Overfladisk begrepsmessig forståelse	Mekanisk prosedyre	Bo-mek	HEB har en mekanisk forklaring på prosedyren for multiplikasjon med flersifrede tall, der han ikke får fram om han egentlig har forståelse for *hvorfor* den er slik. 17. HEB. (…) Og da tenker jeg at vi er ferdig med enerne, det som står på enerplassen, så da går vi over på tierplassen. Og hvor er det naturlig å begynne når vi begynner med tierplassen? Jo det må være det som tilhører en tierplass. Og for å kunne plassere det på en tierplass, så kan vi ikke bruke enerplassen, for vi skal begynne på en tierplass.
	Avhengig av konteksten (svak tilknytning til andre kontekster)	Bo-kont	HEB har ingen andre framstillingsmåter av multiplikasjonsalgoritmen: ingen tilknytning mellom andre representasjoner og algoritmen. 20. I. Har du vært borti noen andre måter, enn selve algoritmen, å gjøre det på for å løse gangestykket? 21. HEB Nei, ikke annet enn det med overslag og sånne ting, for å kunne kontrollere at du er noen lunde innenfor, (…).
Dyp begrepsmessig forståelse	Begrunnelse	Bd-beg	Når BEU skal forklare posisjonene til tallene i multiplikasjonsalgoritmen viser han at han har forståelse for hvorfor den er «trappeformet»: 7. Nullene bak forklarer at nå ganger du tierne. Så egentlig er det 492 tiere du får, og her er det 738 hundrere du får.»

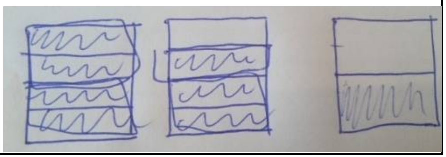
	Sterk tilknytning mellom begrepsmessig forståelse og prosedyreforståelse	Bd-tilkn	I JEU sin forklaring av multiplikasjonsalgoritmen viser han i linje 7-11 at han kan dekomponere regnestykket og bruke distributiv lov. Han skriver ned disse regnestykkene samtidig som han forklarer. Han viser her at han har sterk tilknytning mellom den alternative representasjonen og algoritmen.  11. JEU. (…) Det er derfor man får den trappa da. Men om du hadde vist det da, så hadde du vist at du ganger 123 med 5 enere, 4 tiere og 6 hundrere. Og derfor vil du få de talla her, *peker på tallene han har regna ut*, og de til sammen blir det her, *peker på svaret i regnestykket: 79335.* Kanskje.

3.4.2. Analysekoder for læreres matematiske fagkunnskap

Tabell 6 Analysekoder for matematisk fagkunnskap

Teoretisk begrep	Underkategori	Kode	*Eksempel*
Allmenn fagkunnskap	Allmenn fagkunnskap	AF	ÅEB kan løse divisjonsstykket, men klarer ikke å forklare hvorfor kvotienten blir større enn divisor når divisor er $\frac{1}{2}$. Hun klarer heller ikke å komme på en måte å representere divisjonsstykket på. 77. ÅEB. (…) Da ender vi med at du har $\frac{1}{2}$ delt på $\frac{1}{2}$. Det blir 1. Hvorfor blir det det? $\frac{1}{2}$ delt på $\frac{1}{2}$. En del av noe, altså 0,5 delt på 0,5. Da må jeg jo tegne det opp på en måte da. *Tegner.* En halv kake skal deles på en halv person. *Ler.*

Spesialisert fagkunnskap	Forstå fordeler og ulemper ved ulike representasjoner, argumenter og forklaringer	SF-f&u	VFB viser at han har forståelse for at ulike framstillingsmåter kan ha ulike fordeler og ulemper, når han snakker om ulike framstillingsmåter for multiplikasjon: 1. VFB. (…) Man trenger ikke å stille det opp sånn. Man kan si 123x600 pluss, 123x40 pluss 123x5, så finner de ut av at vi har enerne, så tierne, så hundrerne. (…) Men noen lærere forstår ikke hvorfor kan de ikke bare bruke oppstilte oppgaver? Men hvis de bruker oppstilte oppgaver, så tenker de ikke selv. Så hvis de plutselig gjør feil, hvis de mikser tierne og enerne, så ser de det ikke, fordi de er så vant med oppstilte oppgaver.
	Oppdage muligheter og matematiske ideer	SF-mm	BEU ser hvilke matematiske muligheter som ligger i multiplikasjonsoppgaven. Han ser an eleven og hva eleven mestrer godt, og bruker den representasjonen som gir eleven best forståelse. 5. BEU. (…) Men hvis jeg skal bruke algoritmen, som for så vidt er viktig at de kan, så hadde jeg nok forklart at de kan legge på en null, når de hopper opp til tierplassen. Når de hopper opp til hundrerplassen og begynner å gange den, må de legge på to nuller, for hundre har to nuller. Så kanskje det hadde vært lettere på et litt lavere nivå – alt etter hva eleven er god på. Er eleven god på geometri, så ville jeg ha brukt  kvadrater, rektangler og areal.
	Bevisst ulike framstillingsmåter	SF-fram	JEU viser at han kan framstille divisjonsstykket på ulike måter, både som tekstoppgave og som figur:

			84. JEU. (…) Kanskje hvis du har et avisbud som skal gå $1\frac{3}{4}$ kilometers avisrunde. Og for hver $\frac{1}{2}$ kilometer må han stoppe og levere ei avis. Hvor mange aviser må han levere? 85. (…) Ja du kan tegne det opp. Da er det å se hvor mange som går inn i en halv, $\frac{1}{2}$. (…) 

3.5. VALIDITET OG PÅLITELIGHET

I kvalitativ forskning er forskeren delaktig ved at forskningen vil bli påvirket av bakgrunnen og forforståelsen han har med seg. Det være seg teoretisk rammeverk, verdier, kunnskap og/eller erfaringer. I intervjuer er forskerens delaktighet mer tydelig. Blant annet har han påvirkning gjennom spørsmålene som blir stilt, reaksjoner og responsen på det som blir sagt og hvilke oppfølgingsspørsmål som blir stilt (Nilssen, 2012). En kvalitativ studie kan aldri gjenskapes, og svarene fra deltakerne vil nødvendigvis ikke være sammenlignbare. Det innsamlede materialet er en representasjon av virkeligheten (Johannessen & Christoffersen, 2012). Når mennesker er informasjonskilden, arbeider man med noe som stadig er i forandring. Kunnskap og forståelse er unik for hver enkelt lærer og er i stadig utvikling. Resultatene fra studien min kan derfor ikke sies å være generelle. De sier bare noe om disse lærerne på akkurat det tidspunktet intervjuene ble gjennomført. Resultatene vil også være preget av mine fortolkninger. Validiteten og påliteligheten som blir lagt til grunn i denne studien, er at forskningsmetoden og analyseprosessen blir presentert på en transparent måte. Gjennom dette kapittelet har målet vært å vise åpenhet og begrunnelse for hvilke valg jeg har tatt gjennom innsamling og etterarbeid av datamaterialet. På denne måten vil jeg gi troverdighet til funnene mine og gjøre dem overførbare til andre kontekster. Jeg ønsker at studien min kan bidra til å gi leseren en større bevissthet omkring læreres fagkunnskap og forståelse for grunnleggende matematikk.

3.6. ETISKE FORHÅNDSREGLER

I kvalitative studier kommer forsker og forskningsdeltakere tett på hverandre. Dette gjør at det er viktig å ta etiske forhåndsregler for å bevare forskningsdeltagerens respekt og anonymitet. Et krav som skal sikre dette, er informert samtykke (Nilssen, 2012). Før kontakten med lærerne ble opprettet, fikk prosjektet godkjenning av Personvernombudet for forskning ved Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste (NSD). Gjennom et skriv fikk lærerne informasjon om studien og intervjuet før de valgte om de ville delta eller ikke (Vedlegg C). Deltagelsen deres er basert på frivillighet. I henhold til NSDs retningslinjer skrev lærerne under på en samtykkeerklæring i forkant av intervjuet (Vedlegg C). Der samtykket de til at det ble tatt lydopptak og at anonymisert materiale ville bli framstilt i oppgaven. Dette gjaldt også for det skriftlige materialet som ble produsert under intervjuet. For å bevare konfidensialiteten til lærerne er de ikke gjengitt med navn, men med fiktive initialer. Lydopptak og alt skriftlig materiale blir slettet og makulert ved prosjektets slutt. Jeg var opptatt av at lærerne skulle føle seg likeverdige og bli behandlet med respekt under intervjuet. I intervjuet var det viktig at de ikke oppleve at kompetansen deres ble vurdert og stilt spørsmål ved. Resultatet av denne studien avgjør ikke kompetansen til lærerne, da denne er mye mer sammensatt enn det man får fram i et kort intervju om to enkeltemner.

4. ANALYSE

Forskningsspørsmålet stilt innledningsvis i oppgaven, er utgangspunkt for hvordan analysen presenteres. Jeg spør om *hvilken sammenheng det er mellom grunnskolelæreres forståelse for algoritmene for multiplikasjon med flersifrede tall og divisjon med brøk og deres fagkunnskap om emnene.* For å kunne besvare problemstillingen deler jeg kapitlet inn i tre hoveddeler. Der tar jeg for meg ett og ett element i forskningsspørsmålet, før jeg til slutt sammenfatter resultatene. I første del tar jeg for meg lærernes forståelse for algoritmene, først for multiplikasjon med flersifrede tall, dernest for divisjon med brøk. I neste del tar jeg for meg fagkunnskapen lærerne har, først om multiplikasjon med flersifrede tall, så om divisjon med brøk. Det blir for omstendelig å presentere alle funnene jeg har gjort i denne oppgaven. Under hvert element tar jeg derfor for meg noen eksempler som viser hvilken forståelse og kunnskap utsagnene deres peker på at de har. De eksemplene jeg presenterer, har jeg valgt fordi de belyser hvordan jeg har arbeidet med analysen av intervjuene. I siste del presenterer jeg sammenhengen mellom lærernes forståelse for algoritmene og fagkunnskapen de har om emnene gjennom to tabeller. Disse tabellene gir en fullstendig oversikt over kategoriseringen av forståelsen og fagkunnskapen til hver av lærerne innenfor de to emnene.

4.1. GRUNNSKOLELÆRERES FORSTÅELSE FOR ALGORITMENE

4.1.1. LÆRERNES FORSTÅELSE FOR MULTIPLIKASJON MED FLERSIFREDE TALL

Den første casen lærerne får presentert, omhandler multiplikasjon med flersifrede tall, og ser slik ut:

> Noen lærere for 6. klasse oppdaget at flere av elevene gjorde den samme feilen når de multipliserte med flersifrede tall.
>
> Når de skulle løse denne oppgaven
>
> $\underline{123 \times 645}$
>
> var det flere av elevene som glemte å «flytte tallene» i hver linje. De løste oppgaven slik:
>
> $$\begin{array}{r} \underline{123 \times 645} \\ 615 \\ 492 \\ \underline{738} \\ 1845 \end{array}$$

istedenfor slik:

<u>123x645</u>
615
492
<u>738</u>
79335

Lærerne var enige om at dette var et problem, men de ble ikke enige om hva de skulle gjøre med det. Hva ville du ha gjort om du underviste 6. klasse og oppdaget at flere av elevene gjorde denne feilen?

PROSEDYREFORSTÅELSE

Et begrep som går igjen i alle intervjuene når de skal forklare oppsettet til algoritmen, er «trapp». Et eksempel på dette er når HEB skal forklare hva denne eleven har gjort feil:

3. HEB. Vi kaller dette for ei trapp, og han har glemt trappa når han skal sette det opp under. Og vi er veldig bevisst på at vi kaller det ei trapp når du må bruke mer enn ei linje i svaret. Så vi tegner ofte den trappa også, og det gjør de på i-Paden også, når de forklarer hvorfor vi må flytte tallet ett hakk fram i linje nummer to.

Trappa brukes her for å beskrive hvordan oppsettet på algoritmen skal være. En indikator på at læreren har prosedyreforståelse, eller om den beveger seg mer over i begrepsmessig forståelse, er hvordan denne trappa forklares. En annen lærer, SEB, bruker også «trappa» som begrep for å forklare oppsettet. Hun får spørsmål om hvorfor det er lov å flytte tallene, slik at de får trappestrukturen:

3. SEB. Det er jo for at du skal få tierne og enerne og hundrerne og tusenene på rett plass. Så det er slik vi gjør det da. Vi setter det opp i trapp for å vise at tallene må stå under hverandre på riktig plass, og for at enerne, tierne og hundrerne skal gå opp.
4. I. Vil du forklare litt nærmere hva du mener med enerne og tierne?
5. SEB. Nei, det er jo det at. Nei, det kan jeg faktisk ikke gjøre. Jeg vet ikke hvordan jeg skal forklare det. Det kom litt brått på.

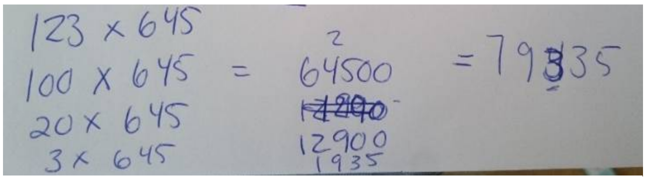
I linje 3 bruker hun posisjonssystemet og plassverdien til tallene som forklaring på trappa. Det kommer fram av forklaringen at plassverdien til tallene blir brukt som plassholdere for å vite hvilken kolonne man skal sette tallene i. Dette er ifølge Ma (2010) og Hiebert og Lefevre (2009) en indikator på prosedyreforståelse, fordi dette fungerer som regler for hvordan prosedyren skal utføres. Hun har imidlertid ikke forståelse for betydningen av disse «reglene». Dette bekreftes i linje 5, som viser at hun ikke kan forklare hva hun mener med dette. Dette forsterker oppfattelsen om at hun har prosedyreforståelse. Hun vet hvordan algoritmen utføres, men forstår ikke hvorfor den er slik (Hiebert & Lefevre, 2009; Ma, 2010). Mot slutten av multiplikasjonsdelen av intervjuet vil jeg gi henne en ny mulighet til å forklare hva hun mener med at det handler om å få enerne, tierne og hundrerne på rett plass. Hun har da brukt en del tid på å forklare en alternativ metode for å finne svaret, med dekomponering av tallene i multiplikasjonsstykket. Jeg tenkte at hun da kanskje kunne se en sammenheng mellom denne metoden og algoritmen. At hun har prosedyreforståelse forsterkes av svaret hennes i linje 26: «Jeg vet ikke det. Det er bare sånn. Jeg kan det rett og slett ikke.»

OVERFLADISK BEGREPSMESSIG FORSTÅELSE

Om forståelsen er dyp begrepsmessig eller overfladisk begrepsmessig avhenger blant annet av forklaringen/beskrivelsen av algoritmen, og hvor stor tilknytning det er mellom prosedyreforståelsen og den begrepsmessige forståelsen (Baroody et al., 2007). SEB får spørsmål om hun har en annen måte hun kan løse multiplikasjonsstykket på. Det viser seg at hun har en alternativ framstilling av det:

11. SEB. (…) Og så for de elevene som har størst problemer, de som ikke får det til, de viser jeg alternativ. At du kan regne med enerne for seg, altså å samle enerne for seg, tierne for seg og hundrerne for seg.

Hun beskriver først metoden der hun bruker andre tall enn de som er brukt i oppgava. Når jeg spør om hun kan bruke de samme tallene som står i regnestykket, gjør hun det på følgende måte:



Bilde 1 SEB sitt alternativ til løsningsmetode for 123x645

21. SEB. Ja, det kunne jeg ha gjort. For da blir de 100, hvis du tar.. 123 gange 645, *skriver og regner ut.* Så tar vi 100 først, gange 645. Da er det bare å sette til to nuller. Og så blir det da 20 gange 645, da blir det jo dobla og legge til en null. Det blir 90, og 12, og så en null. Og så blir det da 3 gange 645. Da må de regne ut det da. Det klarer jeg ikke i hodet.

    (*Vi regner ut i fellesskap*)

22. SEB. 1935. Får jeg 79000 da? Nei, det tror jeg ikke, *ler.* Jeg får 5-eren rett, 3-eren rett, 18, 24, nei der har jeg bomma. Og så får jeg 2 der, og 6, 8, 9, og 7. Jeg bomma på ett tall. Kanskje det er 1935 som er feil.
23. I. 9 pluss 9…

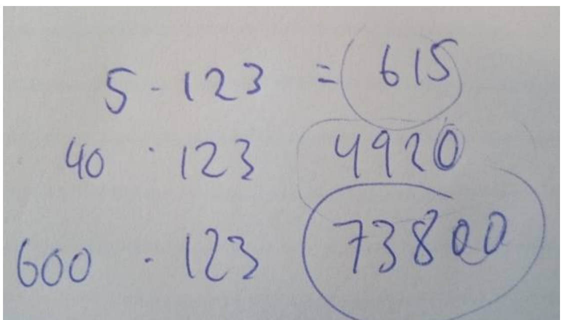
24. SEB. Å nei, jeg klarer ikke å telle. Det ble rett. Ja, sånn er det. Det ble for komplisert. Så det går selvfølgelig an å dele det opp. Men jeg synes at trappesystemet er bedre, da får du det rett under hverandre.

Ved at hun viser hvordan man kan gå fram for å regne ut svaret på en alternativ måte, kan man anta at hun har en begrepsmessig forståelse. Likevel ser vi at hun ikke ser sammenhengen mellom denne måten å løse regnestykket på, og «trappa» som hun helst vil bruke. For i etterkant får hun igjen mulighet til å forklare det med enere, tiere og hundrere, som hun refererer til i linje 3. Hun har imidlertid fremdeles ikke et svar på det. Om hun hadde dekomponert 645, istedenfor 123, hadde hun kanskje sett sammenhengen mellom tallene hun da fikk, og algoritmen som ble brukt i oppgaveteksten. Nettopp at hun ikke gjør det, og heller ikke kan forklare hva hun mener med at enerne, tierne og hundrerne må komme på rett plass i oppstillingen av algoritmen, viser at hun har en overfladisk begrepsmessig forståelse. Hun viser at hun kan dekomponere tallene og anvende distributiv lov, men den alternative framstillingsmåten har svak eller ingen tilknytning til algoritmen (Ball, 1988; Baroody et al., 2007).

Dyp begrepsmessig forståelse

Flere av lærerne har valgt å forklare algoritmen med å dekomponere tallene i regnestykket til utvidet form, og multiplisere de del for del. De anvender så den distributive loven, som tillater at man kan dekomponere tallene, for så å multiplisere delene hver for seg og addere produktene (Ball, 1988). I begynnelsen av intervjuet tenker JEU lenge, uten å si noe. Når han begynner å snakke, poengterer han at man stiller opp regnestykket på denne måten fordi det er en regel, og at elevene ikke har noen forståelse for hvorfor de gjør det slik. Jeg spør om han kan forklare hva denne regelen er. Han forklarer det med trappa, at man må flytte en til venstre når man regner ut neste tall. Så spør han seg selv om hvordan han kunne ha forklart elevene hvorfor det er slik, at han kanskje da kunne ha delt opp regnestykket i ulike deler:

7. JEU. Hvis du tar... Skal vi se... *Tenker.* Hvis du tar 5x123 da.
8. I. Ja, kan du skrive det ned?
9. JEU. Ja, jeg kan det. Skal vi se. *Skriver ned regnestykkene.* Ja, 615, selvfølgelig. Så har du, *regner.* Kanskje man kunne ha vist at egentlig så er det 0'er bak her. Og



Bilde 2 JEU sitt alternativ til løsningsmetode for 123x645

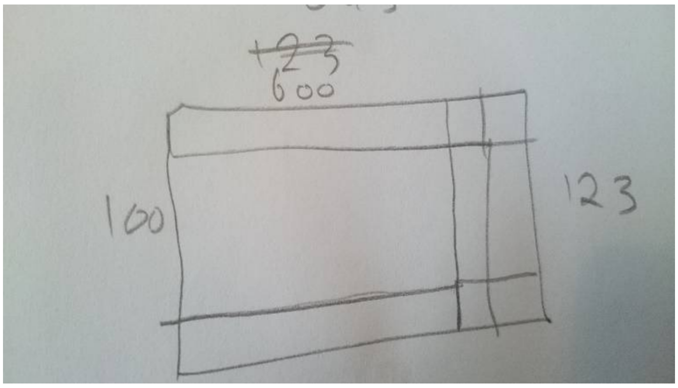
derfor får du den trappa da. Så hvis man skriver opp, *regner*. Ja, det kan jo være en idé da, å legge 0’er bak.

10. I. Ja, det kan være en idé. Så når du ganger ut…
11. JEU. .. hver del, så får du med 0’ene. Men når du gjør det på den måten her, *peker på gangestykket*, så vil du jo ikke få det da. Det er derfor man får den trappa da. Men om du hadde vist det da, så hadde du vist at du ganger 123 med 5 enere, 4 tiere og 6 hundrere. Og derfor vil du få de talla her, *peker på tallene han har regna ut,* og de til sammen blir det her*, peker på svaret i regnestykket: 79335.* Kanskje.

JEU har en god begrunnelse for hvorfor «regelen» er som den er, og hvorfor man får trappa. Han bruker dekomponering til utvidet form, for å vise hvordan man kan multiplisere 123 med de ulike delene i tallet 645. Han viser forståelse for det underliggende i algoritmen når har kan begrunner den ved hjelp av dekomponering og distributiv lov. Dette er et kjennetegn på dyp begrepsmessig forståelse (Baroody et al., 2007; Hiebert & Lefevre, 2009; Ma, 2010). Det er også måten han omtaler 0-tallet og posisjonene til tallene. Han avslører at han har forståelse for trappe-formen, og at tomrommene bak tallene egentlig er 0-er. «Da vil du jo også vise den trappa da, hvorfor man har den trappa. Fordi der egentlig er usynlige 0’er», sier han i linje 13. Den alternative framstillingsmåten som JEU presenterer her, har sterk tilknytning til algoritmen. Når det er sterk tilknytning mellom prosedyreforståelsen og den begrepsmessige forståelsen, kan vi si at han har dyp begrepsmessig forståelse (Baroody et al., 2007).

Et annet eksempel på hvordan dekomponering av tallene i regnestykket brukes til å begrunne algoritmen, finner vi i intervjuet med BEU. Selv om han underviser på 10. trinn, var dette en oppgave han kunne relatere seg til. Faktisk hadde han helt nylig forklart nettopp denne algoritmen for en elev. Han beskriver at denne eleven var sterk i geometri, og at han derfor valgte å bruke en geometrisk tilnærmingsmåte:

3. BEU. (…) Og det som jeg poengterte her, var hvorfor vi har trappa. Med å poengtere enere og tiere og posisjonene, og rett og slett delte de opp i hundrere, tiere og enere, begge to. Og akkurat i det konkrete tilfellet, brukte jeg kvadrat – eller brukte geometri, og delte opp i ruter for å forklare. *Tegner opp.* Den ruta er det, og den ruta er det, så må du legge på den og legge på den, og så videre. *Peker på tegningen sin.*
4. I. Kan du si hvilke ruter som er hva i dette tilfellet?
5. BEU. Ja, *mumler og skribler.* 645, 123. Da ville jeg der ha



Bilde 3 BEU sin geometriske framstillingsmåte for 123x645

prøvd å forklare dem og dele opp i 600 ganger 100, og få regna ut den. Og så plusse på 600 ganger 23, og rett og slett vise dem ved hjelp av kvadrater hva de mangler. Men dette henger litt sammen med hva de har lært tidligere. For hvis jeg har lang tid på det her, kan jeg bruke lang tid på dette, og hvis jeg har enkeltelever. Men hvis jeg skal bruke algoritmen, som for så vidt er viktig at de kan, så hadde jeg nok forklart at de kan legge på en null, når de hopper opp til tierplassen. Når de hopper opp til hundrerplassen og begynner å gange den, må de legge på to nuller, for hundre har to nuller. Så kanskje det hadde vært lettere på et litt lavere nivå – alt etter hva eleven er god på. Er eleven god på geometri, så ville jeg ha brukt kvadrater, rektangler og areal.

BEU har mange av de samme poengene som JEU. Forskjellen er at BEU viser dekomponeringen av regnestykket til utvidet form geometrisk. Den distributive loven tillater da at han kan finne arealet for hver del av rektangelet og addere dem, noe som gir samme resultat som ved bruk av algoritmen (Ball, 1988). Når han forklarer posisjonene til tallene med at man kan legge på nuller, viser han forståelse for 0-tallets betydning. Det forsterkes av forklaringa i linje 7: «Nullene bak forklarer at nå ganger du tierne. Så egentlig er det 492 tiere du får, og her er det 738 hundrere du får.» BEU har med flere elementer som bekrefter at han skjønner det underliggende i algoritmen. Han beskriver algoritmen ved hjelp av dekomponering og viser forståelse for tallenes posisjon og 0-tallet. I tillegg har representasjonen han bruker sterk tilknytning til algoritmen. Forståelsen hans blir derfor kategorisert som dyp begrepsmessig forståelse (Baroody et al., 2007; Hiebert & Lefevre, 2009; Ma, 2010).

4.1.2. Lærernes forståelse for divisjon med brøk

I intervjuet så den delen som omhandlet divisjon med brøk slik ut:

Hvordan løser du en slik oppgave?

$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} =$

Mange matematikklærere prøver å relatere matematikk til andre ting. Noen ganger prøver de å komme på hverdagssituasjoner eller tekstoppgaver for å vise hvordan man kan anvende matematikken, eller de prøver å komme på eksempler eller modeller som tydeliggjør hva som menes. Av og til er dette ganske utfordrende.

Kan du komme på en god situasjon, tekstoppgave eller en modell for regnestykket $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$?

Hvordan passer det med $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$?

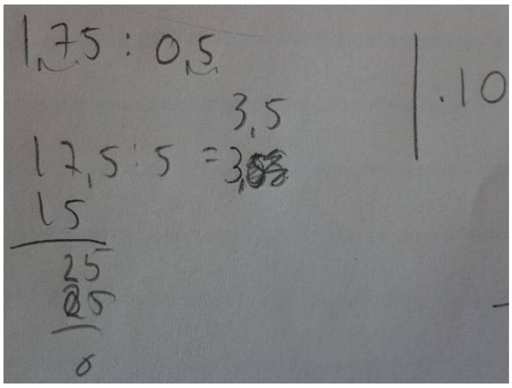
Divisjon med brøk er et tema som er mest aktuelt på ungdomsskolen, da dette ikke er direkte pensum i barneskolen. For barneskolelærerne blir det derfor mest aktuelt å framstille regnestykket med desimaltall da divisjon med desimaltall er pensum sent på barneskolen, og noe lærerne skal kunne (Saabye et al., 2015)

PROSEDYREFORSTÅELSE

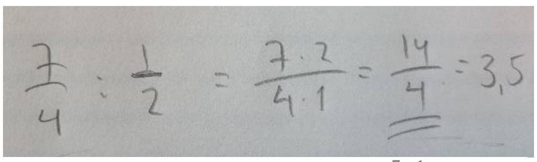
Prosedyreforståelse vil i divisjon med brøk kjennetegnes ved at læreren kan utføre denne korrekt. Å kunne gjøre om regnestykket til divisjon med desimaltall og regne det ut, kommer også inn under denne kategorien. Dette viser forståelse for symbolrepresentasjonen i matematikk, og at de kan regler og algoritmer for å utføre matematiske oppgaver (Hiebert & Lefevre, 2009; Ma, 2010).

ÅEB kan utføre både algoritmen for divisjon med brøk og for divisjon med desimaltall. Mens hun holdt på å regne det ut, uttrykte hun at dette var noe hun var usikker på, og hun måtte tenke seg om flere ganger i løpet av prosessen. Det første hun gjør er å multiplisere både divisor og dividend med 10.

52. ÅEB. Så da blir det 17,5 delt på 5. 17 delt på 5, det blir 3. 15. 7. 2. Ehhm. 2 delt på 5. Ehm, Neinei. Jeg skulle flytte komma. Det her må jeg sitte å, ja, mhm. Jeg er veldig i tvil på hva jeg skal gjøre. Jeg må bare prøve. Eh. 3,05 gange 5... *Regner.* Stemmer ikke.
53. I. Hvor kom den nullen fra?
54. ÅEB Nei, den kom egentlig fra at 2 ikke kunne deles på 5, men jeg ombestemte meg, så derfor blir det 3,5. Så her skal stå 5. 3,5 skal det stå der. Så hvis du ser på den (*går videre til brøken 14/4)*, 4, 8, 12. *Skriver = 3,5.*



Bilde 4 ÅEB sin utregning av 1,75:0,5



Bilde 5 ÅEB sin utregning av $\frac{7}{4}:\frac{1}{2}$

Når ÅEB på denne måten viser at hun kan løse oppgaven både med brøk og med desimaltall, indikerer det at hun har prosedyreforståelse. Det som er avgjørende for at forståelsen hennes kan kategoriseres som prosedyreforståelse, er hvordan hun begrunner algoritmen for divisjon med brøk.

65. ÅEB. Jah. *Tenker.* Skal vi se da. Hmm. *Tenker.* Jeg kommer ikke på noen tekstoppgave på stående fot. Nei, jeg gjør ikke det.
66. I. Gir den algoritmen som du brukte, når du bytta og ganga. Gir den noe mening?

67. ÅEB *Ler*. Nei, den gjør ikke det vet du.

Når forståelsen for symbolrepresentasjonen og regler og algoritmer bare blir overfladisk, og man ikke kan begrunne dem, kan man kategorisere forståelsen som prosedyreforståelse (Hiebert & Lefevre, 2009; Ma, 2010). Denne prosedyreforståelsen ser vi også igjen hos BEU. Da han skulle begrunne hvorfor man kryssmultipliserer, kom han ikke på noen god forklaring.

26. BEU. Nå ble jeg usikker på om vi bruker så mye bevis. Vi bruker kryssmultiplisering. Men hvorfor vi gjør det? Jeg vet faktisk ikke om vi beviser det. Å dele med en halv, er det samme som å gange med 2, sier vi. Hvis du har to brøker, så snur du og ganger. Men hvorfor? *Tenker*. Det vet jeg faktisk ikke.

OVERFLADISK BEGREPSMESSIG FORSTÅELSE

Som tidligere nevnt, handler overfladisk begrepsmessig forståelse ifølge Baroody et al. (2007) om at prosedyrene er mekaniske og at forståelsen er avhengig av konteksten den står i og har svak tilknytning til andre kontekster. Ut ifra denne definisjonen er det noen indikatorer man kan se etter for å gjenkjenne overfladisk begrepsmessig forståelse for divisjon med brøk. Mange av lærerne valgte å gjøre om brøkene til desimaltall. Samtlige valgte å dividere dividend og divisor med 10 for å få et helt tall i divisor, og dermed få et regnestykke som er lettere å regne ut. Det var noen som forsøkte seg på en forklaring på hvorfor man multipliserer med den omvendte brøk i divisjon med brøk, men bare en av lærerne hadde en tilfredsstillende forklaring. Det som ingen syntes å merke seg, er at man kan bruke samme tankegang i divisjon med brøk som i divisjon med desimaltall. Man ønsker å få et heltall i divisor for å få et enklere regnestykke. I divisjon med desimaltall er det naturlig å multiplisere med 10, mens det i divisjon med brøk vil være naturlig å dividere med den omvendte brøk. Da får man 1 som divisor, og dermed et mye enklere regnestykke:

$\frac{7}{4} \div \frac{1}{2} \quad | \times \frac{2}{1}$ VS. $1{,}75 \div 0{,}5 \quad | \times 10$

$= \frac{14}{4} \div 1$ $= 17{,}5 \div 5$

De viser at de har forståelse for divisjon med desimaltall, men de ser ikke sammenhengen mellom divisjon med desimaltall og divisjon med brøk.

VEB har et system der han tegner opp smilefjes som representerer personer (divisor) som skal dele på mengden i dividend. Jeg påpeker at det kanskje kan bli et problem å bruke personer som representasjon om divisor er et desimaltall. Han beskriver da tilnærmingen til det med at han multipliserer med 10 på begge sider av divisjonstegnet:

28. VFB. Ja. Men, så vet vi godt at (*skriver et eksempel*) 12:0,3. Så spør vi først: «Hva er 100:10? Det er 10. Hva er 100:100? det er 1.» Så lager de seg et system, så de ser at de kan flytte komma. Så vi kan flytte kommaet, 120:3 er akkurat det samme. Og da kan de bruke den her (*peker på smilefjesutregningen).* Dette vet de utmerket godt.
De flinkeste kan dividere med brøk. For de kan gange med alle mulige brøker. Og hvis de spør om hvordan de skal dividere, da forklarer jeg bare at de skal gange med den omvendte brøk.
29. I. Men hvis de spør om hvorfor man ganger med den omvendte brøk.
30. VFB. Nei, det gjør de ikke. Jeg kan heller ikke forklare det.

Han forklarer altså hvordan han skal få et helt tall i divisor for å få et enklere regnestykke. Når det kommer til divisjon med brøk, vet han imidlertid ikke hvordan han kan begrunne det. Det viser at han har svak tilknytning mellom de to kontekstene: divisjon med brøk og divisjon med desimaltall.

Det samme ser man i intervjuet med HEB. Han er opptatt av å få fram at det i divisjon med desimaltall handler om å opprettholde likevekten og være rettferdige med både dividend og divisor. Dette refererer han til flere ganger i forklaringene sine:

29. HEB (…) Så jobber vi med det at hvis du har 0,5, hvordan kan vi få vekk det kommaet? Jo, da må de gange med 10. Men kan vi bare gjøre det på den ene siden, uten at det påvirker oppgaven vi skal løse? Så snakker vi litt om det å være rettferdig. Skal vi gjøre slik på den ene siden, må vi gjøre sånn på den andre siden. Da må vi gange med 10 på både divisor og dividend, for å få bort det ene kommaet som er viktig å få bort. (…)

Selv om også han vet at man kan multiplisere med samme tall i dividend og divisor, uten å påvirke forholdet, ser han ikke at samme metode kan anvendes for divisjon med brøk. Når han får spørsmål om hvorfor det går an å multiplisere med den omvendte brøk, har han ingen forklaring på det. Begge disse lærerne har derfor kjennetegn på overfladisk begrepsmessig forståelse. Forståelsen deres er avhengig av konteksten den står i (divisjon med desimaltall), og har svak tilknytning til andre kontekster (algoritmen for divisjon med brøk) (Baroody et al., 2007).

DYP BEGREPSMESSIG FORSTÅELSE

En av indikatorene på dyp begrepsmessig forståelse er at man har en større matematisk forståelse for det underliggende i en algoritme, og kan forklare hvorfor den blir utført på en bestemt måte (Baroody et al., 2007; Hiebert & Lefevre, 2009; Ma, 2010). Bare en av lærerne kunne begrunne algoritmen. Han kunne algoritmen, men i begynnelsen kom han ikke på hvorfor den var slik. Etter at han fikk prøve seg litt fram og fikk noen hint, viser det seg at han har begrunnelsen lagra i hukommelsen. Forståelsen for hvorfor algoritmen er som den er blir synlig.

Han begynner med å sette divisjonsstykket over en brøkstrek, istedenfor å bruke divisjonstegnet. Her er første sted hvor han går seg litt fast:

54. *Skriver ned* $\frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{2}}$. (…) Man kan sette det opp sånn også, *peker på brøken han har skrevet ned...* Man tar $\frac{7}{4}$ dele på $\frac{1}{2}$. Teller ganges med nevneren i $\frac{1}{2}$, og nevneren i $\frac{7}{4}$ med telleren i $\frac{1}{2}$. Da vil du få samme svaret, som om du snur siste brøken da.

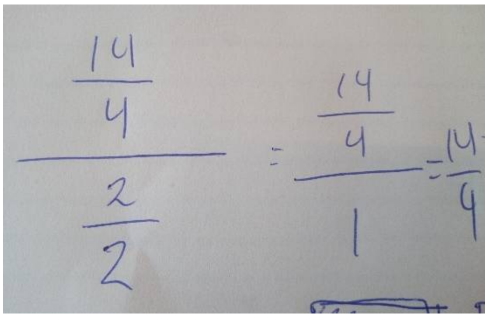
Jeg påpeker da at han egentlig ikke har kommet noe nærmere. For det han gjør over brøkstreken, at han multipliserer $\frac{7}{4}$ med $\frac{2}{1}$, er den samme operasjonen som i algoritmen med kryssmultiplikasjon. Forskjellen her er at han prøver å begrunne det ut ifra en matematisk operasjon som ikke er matematisk gyldig. Selv om han multipliserer nevner med $\frac{2}{1}$, forsvinner ikke nevneren. Faktisk endres regnestykket med at han får $\frac{\frac{14}{4}}{\frac{1}{2}}$. Jeg bruker et annet eksempel med en enklere brøk, og spør om hva som skjer med forholdet i brøken dersom man kun multipliserer teller.

66. JEU. Åja, ja. Da må du selvfølgelig gange oppe og nede med samme tall. Hvis forholdet skal være likt.

Jeg påpeker at han har brutt nettopp denne regelen i utregningen sin.

67. I. Men hvis du bare har denne brøken her, og så ganger du med $\frac{2}{1}$ oppe, men da har du plutselig endra gangestykket ditt. For da har du $\frac{14}{4}$ dele på $\frac{1}{2}$. Sant, hvis du ganger oppe, så forsvinner jo ikke den nede.

68. JEU. Åja!
69. I. Så hvis du ganger med $\frac{2}{1}$ over brøkstreken..
70. JEU. Så må du gange med $\frac{2}{1}$ under også da!
71. I. Hvis ikke så har du jo endra regnestykket.
72. JEU. Ja, for da har du endra. Ja, okey! Ja, selvfølgelig har du det. *Tenker.* Ja, det blir en hel! Okey. Ja, se her nå. Da får du $\frac{\frac{14}{4}}{\frac{2}{2}}$, som blir da $\frac{\frac{14}{4}}{1}$, som er da $\frac{14}{4}$. Derfor kan du snu brøken. *Ler.* Men ja. Nå viser du i hvert fall bakveien da. Hva som er imellom her, *peker på det opprinnelige regnestykket.* Jeg visste jo egentlig det her.



Bilde 6 JEU sin utregning av $\frac{7}{4}:\frac{1}{2}$

Når han forstår hvor feilen ligger, kan han gå gjennom prosedyren på nytt, og forklare hvorfor man ender opp med kryssmultiplikasjon. Utsagnet «Jeg visste det jo egentlig» kan være bare noe han sier. Prosessen som han begynte på med å sette divisjonsstykket opp som en brøk, og multiplisere med den omvendte brøk – og det at han ikke trengte så mye veiledning for å komme fram til det – overbeviser meg om at utsagnet hans er sant. Forståelsen hans er i utgangspunktet ikke tilfredsstillende i forhold til å være fullstendig, velstrukturert og nøyaktig. Fordi han, med litt veiledning, likevel viste forståelse for det underliggende i algoritmen, velger jeg å kategorisere forståelsen hans som dyp begrepsmessig (Baroody et al., 2007; Hiebert & Lefevre, 2009; Ma, 2010)

4.2. Grunnskolelæreres fagkunnskap om emnene

4.2.1. Lærernes fagkunnskap om multiplikasjon med flersifrede tall

Allmenn fagkunnskap

Det er noen kjennetegn man kan se etter for å avgjøre om lærere har allmenn fagkunnskap. Fordi allmenn fagkunnskap beskrives som kunnskap som ikke er unik for lærere, kan man blant annet se på hvordan de begrunner algoritmen og om de har noen alternative framstillingsmåter med tilknytning til algoritmen. Har læreren allmenn fagkunnskap, kan han/hun løse multiplikasjonsstykket og beskrive framgangsmåten steg-for-steg. Det er ikke forventet at man i andre settinger enn undervisning skal kunne begrunne algoritmen og vise alternative framstillingsmåter. Dette er derfor noe lærere med kun allmenn fagkunnskap vil ha problemer med (Ball et al., 2008). I intervjuet får HEB spørsmål om å hjelpe eleven i casen som har løst multiplikasjonsstykket feil. Jeg spør om han kan forklare eleven hva han har gjort feil og hvorfor «trappe-metoden» er den riktige måten å gjøre det på:

17. HEB. Da tenker jeg at, for det første hadde jeg starta med hva som er enerne, tiere og hundrere i disse tallene som skal ganges ut, og fått en forståelse av det. Så hadde jeg sagt at vi skal starte med enerne, som står bakerst. Og så skal vi gange enerne med de andre tallene som er i gangestykket. Og da må vi starte bakerst med å sette opp det som enere, og bygge de framover. Og da tenker jeg at vi er ferdig med enerne, det som står på enerplassen, så da går vi over på tierplassen. Og hvor er det naturlig å begynne når vi begynner med tierplassen? Jo det må være det som tilhører en tierplass. Og for å kunne plassere det på en tierplass, så kan vi ikke bruke enerplassen, for vi skal begynne på en tierplass.

I forklaringen tar han med eleven steg for steg gjennom algoritmen. Selv om han bruker begrepene enere, tiere og hundrer, og forklarer hvordan en tier må stå på tierplassen, gir ikke denne forklaringen en dypere begrunnelse av algoritmen. Å si at tieren må stå på tierplassen fordi det ikke går an å bruke enerplassen, er ikke en tilstrekkelig forklaring på *hvorfor*. Han viser derfor ikke at han har spesialisert kunnskap for undervisning.
Dette forsterkes av at han i linje 21 sier at han ikke har vært borti andre måter å løse slike multiplikasjonsstykker på. Han har med andre ord ingen andre framstillingsmåter. Nettopp dette er et kjennetegn på allmenn fagkunnskap (Ball et al., 2008).

Intervjuet med SEB gir også et tydelig eksempel på allmenn fagkunnskap. Hun har, som nevnt ovenfor (kap. 4.1.1), ingen forslag til hvordan hun skal forklare algoritmen (linje 5 og 26). Kunnskapen hennes ligger derfor på et nivå som handler om at hun kan løse mattestykket riktig og kan bruke definisjoner og begreper korrekt. Dette er kunnskap som ikke er unik for undervisning, og kategoriseres derfor som allmenn fagkunnskap (Ball et al., 2008; Valentina & Enge, 2015).

SPESIALISERT FAGKUNNSKAP

Spesialisert fagkunnskap er tett knyttet til dyp begrepsmessig forståelse, fordi de to kategoriene inneholder en del felles krav. Blant annet handler spesialisert fagkunnskap om å være bevisst ulike framstillingsmåter av matematiske ideer og operasjoner. En lærer med spesialisert fagkunnskap skal ha ferdigheter og kunnskap som er unik for undervisning. Et eksempel på slik kunnskap kan være evnen til å begrunne algoritmen for multiplikasjon med flersifrede tall. Dette er kunnskap som ikke nødvendigvis andre enn matematikklæreren trenger (Ball et al., 2008).

VFB er eksempel på en lærer som er bevisst på at det finnes flere framstillingsmåter er:

18. VFB. (…) Man trenger ikke å stille det opp sånn. Man kan si 123x600 pluss 123x40 pluss 123x5, så finner de ut av at vi har enerne, så tierne, så hundrerne. (…) Men noen lærere forstår ikke, hvorfor kan de ikke bare bruke oppstilte oppgaver? Men hvis de bruker oppstilte oppgaver, så tenker de ikke selv. Så hvis de plutselig gjør feil, hvis de mikser tierne og enerne, så ser de det ikke, fordi de er så vant med oppstilte oppgaver.

Videre viser han forståelse for at ulike framstillingsmåter kan ha forskjellige fordeler og ulemper. Dette er også et kjennetegn på spesialisert fagkunnskap (Ball et al., 2008). ÅEB viser de samme kjennetegnene på spesialisert fagkunnskap. Hun får spørsmål om hva hun ville si til en elev som lurte på hvorfor man flytter tallene slik at man får en trapp:

26. ÅEB Det er fordi at først så ganger jeg med enere. Jeg ganger 123 med fem enere. Så ganger jeg fireren, det er jo tierplassen, så da ganger jeg med tierne. Og så ganger jeg med hundrerne. Så egentlig så kan du putte på en null, ikke sant, for at det skal være mer forståelig for dem.
27. I. Hvis eleven da blir forvirra og sier: «Hvorfor kan du putte på en null, da blir det jo et helt annet tall?»
28. ÅEB Da ville jeg ha sagt: 123, og gange det med, *peker på 123x40*, og sett hva vi fikk. Da hadde vi fått det tallet der, *peker på 492 i regnestykket.* Egentlig da kanskje splitta det opp, og fått 123 ganger 5. 123 ganger 40. 123 ganger 600. Og vist dem tallene hver for seg. Og vist dem at 600 + 40 + 5 blir jo da 645.

Linje 27 viser begrunnelsen for algoritmen. Den forsterkes i linje 29. Der viser hun en alternativ framstillingsmåte ved hjelp av dekomponering av faktorene til utvidet form. Denne framstillingsmåten styrker begrunnelsen hennes i linje 27. Både VFB og ÅEB har kunnskap som krever unik matematikkforståelse, og som kan brukes for å gjøre faginnholdet mer tilgjengelig for elevene (Ball et al., 2008).

4.2.2. LÆRERNES FAGKUNNSKAP OM DIVISJON MED BRØK

Når jeg har studert intervjuene og sett etter kjennetegn på allmenn og spesialisert fagkunnskap, har jeg hatt hovedfokus på representasjonene lærerne bruker. Jeg ser på om de representerer oppgaven på en god måte, hvorfor eller hvorfor ikke de fungerer godt. Representasjonene kan avsløre hvilket nivå kunnskapen ligger på, om den er allmenn eller spesialisert. Lærere med allmenn fagkunnskap vil ha problemer med å komme med en god representasjon. Kanskje har de ikke et forhold til målingsdivisjon. Kanskje er de ikke bevisst forskjellen mellom målingsdivisjon og delingsdivisjon. Det er nødvendig å kjenne til denne forskjellen, å vite at målingsdivisjon er best egnet for divisjon der divisor ikke er et heltall. Lærere som er bevisst denne forskjellen, vil ha lettere for å komme på representasjoner som passer med oppgaven. Å lage gode eksempler til ulike divisjonsoppgaver er en vanlig undervisningsoppgave, noe lærerne bør beherske. Dette er derfor spesialisert fagkunnskap (Ball et al., 2008; Ma, 2010; Martinussen & Smestad, 2010).

ALLMENN FAGKUNNSKAP

ÅEB strever med å komme på en tekstoppgave som passer til oppgaveteksten. Tekstoppgavene hun kommer på, representerer delingsdivisjon med divisjon med hele tall eller med brøk i dividend. For eksempel bruker hun pizzaer som skal deles på antall personer, antall jenter og gutter i en klasse og antall seigmenn med forskjellig farge i en seigmannpose. Siden disse eksemplene ikke passer til oppgaven, spør jeg: «Men brøk dele på en brøk da?» (Linje 76).

77. ÅEB Da blir det straks litt mer abstrakt. Ehm. En del av noe, delt på en del av noe. Den er mye verre. Hvis jeg skulle fått. Skal vi se da. $\frac{12}{24}$ delt på $\frac{1}{2}$. *Skriver ned.* Det blir $\frac{1}{2}$. Hm, interessant. *Regner.* Da ender vi med at du har $\frac{1}{2}$ delt på $\frac{1}{2}$. Det blir 1. Hvorfor blir det det? $\frac{1}{2}$ delt på ½. En del av noe, altså 0,5 delt på 0,5. Da må jeg jo tegne det opp på en måte da. *Tegner.* En halv kake skal deles på en halv person. *Ler.*

At ÅEB har problemer med å forstå hvorfor $\frac{1}{2}$ dividert med $\frac{1}{2}$ er 1, kan tyde på at hun ikke har kunnskap om målingsdivisjon. Inntrykket forsterkes av at alle eksemplene hun kommer på, handler om delingsdivisjon. Uten kunnskap om målingsdivisjon er det vanskelig å komme med et godt eksempel som representerer divisjonsoppgaven. ÅEB kan å utføre divisjonen, men har altså ingen representasjoner for den. Kunnskapen hennes kategoriseres derfor som allmenn (Ball et al., 2008).

Kunnskapen VFB har, kan i likhet med ÅEB kategoriseres som allmenn. Han kan løse regnestykket, men også han har vanskeligheter med å komme på en representasjon for regnestykket.

22. VFB. Det er vanskelig å finne et praktisk eksempel når det er mindre enn én. Vanligvis når vi driver med innlæring av divisjon, så bruker vi centikuber som vi deler inn i mengder.

Han beskriver hvordan han konkretiserer divisjon. For eksempel kan elevene i en klasse deles inn i tre grupper. Da får man antall elever i klassen som dividend, antall grupper som divisor og antall elever i hver gruppe som kvotient. Når dividend og kvotient har samme enhet (elever), er det et eksempel på delingsdivisjon (Martinussen & Smestad, 2010). Når han er vant med å bruke delingsdivisjon, og ikke kommer på at man må bruke målingsdivisjon, blir det vanskelig å komme på en egnet representasjon.

SPESIALISERT FAGKUNNSKAP

Et par av lærerne viste tydelig at de hadde kunnskap om forskjellen mellom delingsdivisjon og målingsdivisjon. JEU innleder divisjonsdelen av intervjuet med følgende utsagn:

42. JEU. Deling ja. Det første som slår meg er at du har $1\frac{3}{4}$ liter saft og skal dele det på $\frac{1}{2}$ liters kopper eller flasker, hvor mange kopper eller flasker må du ha?

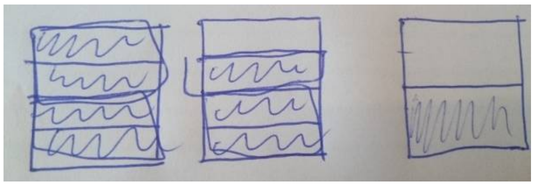
Allerede før han angriper selve oppgaven, har han sett for seg en situasjon som kan representere dette regnestykket. Situasjonen gir en korrekt representasjon for målingsdivisjon, der divisor og kvotient får samme enhet (kopper/flasker) (Martinussen & Smestad, 2010). Senere i intervjuet er jeg interessert i å finne ut om han har et godt svar på hvorfor kvotienten blir større enn dividend når man dividerer med et tall som er mindre enn én.

81. I. Gir det mening for deg at tallet kan bli større?
82. JEU. Ja. Det gjør jo det. Og det kan du jo vise med den her safta da. Hvis du har det foran deg. Hvis du har $1\frac{3}{4}$ liter saft og $\frac{1}{2}$-liters flasker. Da vil du se med en gang at det må være sånn. Det er helt logisk.

Forskjellen på lærerne med allmenn og spesialisert kunnskap, er at når de har en forståelse for målingsdivisjon, gir det mening at kvotienten blir større. De har et bilde av hvorfor det må være slik, og kan dermed finne passende representasjoner. JEU kommer med en annen situasjon som kan representere oppgaven. I tillegg representerer han divisjonsstykket geometrisk:

84. JEU. Det som er greit med væske er at det er så enkelt da, enkelt å variere med liter. Men du kan vel, skal vi se da. Jeg har jo sett andre eksempel. Hvis du har, *tenker*. Kanskje hvis du har et avisbud som skal gå $1\frac{3}{4}$ kilometers avisrunde. Og for hver $\frac{1}{2}$ kilometer må han stoppe og levere ei avis. Hvor mange aviser må han levere?

86. Hvis du gjør om disse brøkene til liter da, og måler opp og ser hva du ender opp med. Det går jo an da. Du kan også, ja, *tegner opp firkanter og deler inn i firedeler.* Må bare prøve her da, og se om det går. Vet ikke helt om det blir riktig da. *Tenker og tegner.* 1, 2, 3 og en halv. Ja du kan tegne det opp. Da er det å se hvor mange som går inn i en halv, $\frac{1}{2}$. Da vil du se at den går inn (*peker)*, altså 1, den går inn (*peker)*, 2, den går inn (*peker)*, 3, den går inn (*peker)*, og så en halv. $3\frac{1}{2}$. Så du kan vel tegne deg fram også, på en måte.



Bilde 7 JEU sin illustrasjon av $\frac{7}{4}:\frac{1}{2}$

Denne variasjonen av representasjonsformer viser at han har kunnskap som er unik for undervisning. Han er bevisst ulike representasjonsmåter og kan framstille regnestykket på en praktisk måte som kan gjøre faginnholdet tilgjengelig for elevene. Kunnskapen han har om divisjon med brøk, kan derfor kategoriseres som spesialisert fagkunnskap (Ball et al., 2008).

Den andre læreren som hadde kjennetegn på spesialisert fagkunnskap, er SEB. Hun hadde ingen kunnskap om algoritmen for brøk. Hun visste heller ikke hvordan hun skulle finne svaret på oppgaven. Siden hun er barneskolelærer, er dette kunnskap man egentlig ikke kan forvente at hun har. Derimot kunne hun gjøre om brøken til desimaltall, og hun hadde eksempler på situasjoner som kan representere gangestykket. Det første hun kom på var å representere det med penger. Hun var imidlertid usikker på om det var en egnet situasjon, siden vi ikke bruker 50-øringer lenger. Jeg oppfordret henne til å buke eksempelet likevel:

64. SEB. Da ville jeg ha sagt at en femtiøring er ei halv krone, som da er en hel. Og for at jeg skal få… Hvor mange femtiøringer må du ha for å få stykket til å gå opp. Det vil jo da si at du vil få 3 og en halv femtiøring. Som da vil tilsvare ei krone, det vil bli ei krone og 75 øre.

Eksempelet her er en god representasjon for divisjonsstykket når man bruker desimaltall. Det er ikke så nærliggende å bruke dette eksempelet om man skal representere divisjonsstykket med brøk. Eksempelet viser likevel at hun har forståelse for målingsdivisjon, og hun lager et eksempel som gir samme enhet i divisor og kvotient (50-øringer). Litt tidligere i intervjuet, da hun viste hvordan man kunne regne ut denne oppgaven, snakket hun om hvordan man kunne multiplisere med 10 på hver side av divisjonstegnet for å forenkle regnestykket. Da blir det tydelig at det ikke har noe å si for verdien om man multipliserer med enten 10, 100 eller 1000, og får regnestykket 17,5 : 5 eller 175 : 50. Man vil få samme svar. Jeg spør om hun har et annet eksempel hun kunne ha brukt, siden 50-øringer er litt utdatert.

68. SEB. Det var det da. Det er det helt sikkert. Kan bruke femtilapper, i forhold til hundrelapper. Og femmere i forhold til tiere. Om man skal tenke penger da. Nei, jeg kommer ikke på noe fornuftig nå.

Eksemplene er egentlig akkurat det samme som med 50-øringen, bare at disse representerer gangestykket om man hadde dividert med 100 eller 1000. Hun forklarer videre at når de har om divisjon og bruker penger som konkreter, så handler det for eksempel om at et par elever har en viss sum de skal dele. Jeg nevner forskjellen i eksemplene for henne, for å få innsikt i om hun har reflektert over dette:

71. I. Jeg bare bet meg merke i at du sa at når de skulle dele, så var det personer som skulle dele på pengene. Mens i sta så var det hvor mange penger får…
72. SEB. Ja, det er jo for å forklare at det er en halv, hvor mange får du da? Fordi du da får et tall som er høyere enn det du hadde til å begynne med.

Her ser man igjen sammenhengen mellom å ha kunnskap om målingsdivisjon og forståelsen for hvorfor kvotienten blir større enn divisor. Selv om hun ikke har flere eksempler som representerer divisjonsstykket, viser hun kunnskap om forskjellen på delingsdivisjon og målingsdivisjon. Hun kan gjøre faginnholdet tilgjengelig for elevene ved å bruke ulike typer eksempler for delingsdivisjon og målingsdivisjon. Dette gjør at jeg velger å kategorisere hennes kunnskap som spesialisert fagkunnskap (Ball et al., 2008).

4.3. SAMMENHENG MELLOM FORSTÅELSEN OG FAGKUNNSKAPEN

Analysene som er presentert ovenfor, er som sagt eksempler fra de funnene jeg gjorde gjennom analyseprosessene. Resultatet av analysene har jeg sammenfattet i to tabeller nedenfor. Tabellene viser hvordan jeg ut ifra analysene har kategorisert forståelsen og fagkunnskapen til lærerne innenfor de to emnene. *Kommentar*-kolonnen er ment å gi et lite innblikk i hvordan jeg har begrunnet kategoriseringen. Jeg vil poengtere at den ikke gir et fullstendig bilde av analysene.

4.3.1. MULTIPLIKASJON MED FLERSIFREDE TALL

Tabell 7 Kategorisering av lærernes forståelse for og fagkunnskap i multiplikasjon med flersifrede tall

	FORSTÅELSE			FAGKUNNSKAP		
LÆRER	***Prosedyre***	***Overfladisk begreps-messig***	***Dyp begreps-messig***	***Allmenn***	***Spesialisert***	KOMMENTAR
ÅEB			X		X	Begrunner algoritmen godt. Bevisst ulike framstillingsmåter. Bruker dekomponering og distributiv lov. Sterk tilknytning mellom begrepsmessig- og prosedyreforståelse.
SEB	X	X		X	(x)	Kan algoritmen, men kan ikke begrunne den. Alternativ framstillingsmåte, bruker dekomponering og distributiv lov, men svak tilknytning mellom begrepsmessig- og prosedyreforståelse.
HEB	X	X		X		Kan algoritmen, svak begrunnelse. Ingen alternative framstillingsmåter.
V.E.B			X		X	Begrunner algoritmen godt. Alternativ framstillingsmåte, bruker dekomponering og distributiv lov. Sterk tilknytning mellom begrepsmessig- og prosedyreforståelse.
BEU			X		X	Begrunner algoritmen godt. Alternative framstillingsmåter, geometrisk og dekomponering og distributiv lov. Sterk tilknytning mellom begrepsmessig- og prosedyreforståelse.
JEU			X		X	Begrunner algoritmen godt. Alternativ framstillingsmåte, bruker dekomponering og distributiv lov. Sterk tilknytning mellom begrepsmessig- og prosedyreforståelse.

OPPSUMMERING AV FUNNENE FOR MULTIPLIKASJON MED FLERSIFREDE TALL (TABELL7)

De lærerne som har dyp begrepsmessig forståelse har også spesialisert fagkunnskap. Det gjelder også for det motsatte. Lærerne som har prosedyreforståelse og overfladisk begrepsmessig forståelse, har i hovedsak allmenn fagkunnskap. De har ikke en god begrunnelse for algoritmen. I HEB sitt tilfelle har han heller ikke forslag til andre framstillingsmåter. I kategoriseringen har jeg ført opp at SEB har spor av spesialisert fagkunnskap. Hun har en alternativ framstillingsmåte, men den er svakt tilknyttet algoritmen. Hun kan heller ikke begrunne algoritmen. Derfor vil hun ha begrensninger i å gjøre faginnholdet tilgjengelig for elevene. Fagkunnskapen hennes i hovedsak allmenn, men fordi hun har en alternativ framstillingsmåte, mener jeg at man kan si at hun har noe av det som trengs for å ha spesialisert fagkunnskap.

4.3.2. DIVISJON MED BRØK

Tabell 8 Kategorisering av lærernes forståelse for og fagkunnskap i divisjon med brøk

	FORSTÅELSE			FAGKUNNSKAP		
LÆRER	***Prosedyre***	***Overfladisk begreps-messig***	***Dyp begreps-messig***	***Allmenn***	***Spesialisert***	KOMMENTAR
ÅEB	X	X		X		Kan algoritmen, men kan ikke begrunne den. Ser ikke sammenhengen mellom divisjon med desimaltall og divisjon med brøk. Fokusert på delingsdivisjon – ingen passende representasjoner.
SEB	-	X			X	Kan ikke algoritmen. Bevisst andre framstillingsmåter, men svak/ingen tilknytning til brøk. Kunnskap om målingsdivisjon – god representasjon for divisjon med desimaltall.
HEB	X	X		X		Kan algoritmen, men kan ikke begrunne den. Framstilling som desimaltall, men ser ikke sammenhengen med algoritmen for divisjon med brøk. Fokusert på delingsdivisjon – ingen passende representasjoner.
V.E.B	X	X		X		Kan algoritmen, men kan ikke begrunne den. Framstilling som desimaltall, men ser ikke sammenhengen mellom divisjon med desimaltall og brøk. Fokusert på delingsdivisjon – ingen passende representasjoner.
BEU	X			X		Kan algoritmen, men kan ikke begrunne den. Fokusert på delingsdivisjon – ingen passende representasjoner.
JEU			X		X	Kan algoritmen, kan begrunne den (med litt veiledning). Kunnskap om målingsdivisjon – flere passende representasjoner.

OPPSUMMERING AV FUNNENE FOR DIVISJON MED BRØK (TABELL 8)

Hovedtrekkene for divisjon med brøk er de samme som for multiplikasjon med flersifrede tall. Motsetningen her er at forståelsen og fagkunnskapen i utgangspunktet er mindre avhengig av hverandre. I grove trekk kan man si at forståelsen er bestemt ut ifra om læreren kan begrunne algoritmen, mens det er kunnskapen om delingsdivisjon og målingsdivisjon som indikerer hvilken fagkunnskap lærerne har. Om lærerne har kunnskap om målingsdivisjon, har ikke direkte påvirkning på forståelsen for hvordan prosedyren er, og omvendt. Likevel ser man at flertallet av lærerne med prosedyreforståelse og/eller overfladisk begrepsmessig forståelse har allmenn fagkunnskap. Unntaket gjelder SEB, som har overfladisk begrepsmessig forståelse og spesialisert fagkunnskap. Hun viser at man kan ha spesialisert fagkunnskap selv om man ikke har kunnskap om algoritmen. SEB vet ikke hvordan divisjon med brøk utføres, men hun klarer å gjøre det om til et divisjonsstykke med desimaltall. Med det som utgangspunkt har hun relevante representasjoner som viser at hun har forståelse for målingsdivisjon. Hun ser at delingsdivisjon ikke er egnet som representasjon når divisor er mindre enn 1, men at målingsdivisjon er bedre egnet.

5. DISKUSJON OG KONKLUSJON

Innledningsvis i oppgaven, stilte jeg følgende forskningsspørsmål:

Hvilken sammenheng er det mellom grunnskolelæreres forståelse for algoritmene for multiplikasjon med flersifrede tall og divisjon med brøk, og deres fagkunnskap om emnene?

Fokuset har vært på lærere som underviser på 5.-10. trinn. Læreres matematiske forståelse og fagkunnskap er et emne som har hatt mye fokus i mange 10-år. I dette avsluttende kapittelet skal jeg, med bakgrunn i den presenterte teorien, drøfte hvordan analysene av intervjuene med grunnskolelærerne kan besvare forskningsspørsmålet. Først tar jeg for meg hovedfunnene fra analysene. Jeg drøfter dem og oppsummerer dem i en kortfattet konklusjon. Deretter vil jeg drøfte noen hovedelementer fra teoridelen. Først drøfter jeg matematisk forståelse. Der tar jeg blant annet opp igjen spørsmålet om anvendelighet som jeg stilte i teoridelen (kap. 2.1.1). Deretter tar jeg for meg matematisk fagkunnskap og dens betydning for undervisning. Avslutningsvis løfter jeg blikket og drøfter hvordan mine funn kan bidra inn i den faglige diskusjonen.

5.1. HOVEDFUNNENE

I denne delen tar jeg for meg funnene fra analysen. Analysens formål er å gi et utgangspunkt for å besvare problemstillingen. Ut ifra tabell 7 og tabell 8, som gir en oversikt over resultatene av analysene, er det noen funn som peker seg ut:

Funn 1: Den begrepsmessige forståelsen er sterkt tilknyttet prosedyreforståelsen.

Funn 2: Lærerne som har dyp begrepsmessig forståelse har også spesialisert fagkunnskap.

Funn 3: Lærerne som har prosedyreforståelse og/eller overfladisk begrepsmessig forståelse har i hovedsak allmenn fagkunnskap.

Videre vil jeg drøfte hvert av de tre funnene. Både funn 2 og 3 handler om sammenhengen mellom forståelsen og fagkunnskapen lærerne i denne studien har om emnene. For at det skal bli oversiktlig for leseren drøftes de to funnen i sammenheng med hverandre. Først i et delkapittel om multiplikasjon med flersifrede tall. Dernest for divisjon med brøk.

5.1.1. Funn 1: Tilknytningen mellom begrepsmessig forståelse og prosedyreforståelse

I følge Star (2005) kan man skille mellom overfladisk og dyp prosedyrekunnskap. Når kunnskapen om en prosedyre er assosiert med forståelse, fleksibilitet og kritisk dømmekraft, slik at man kan løse oppgaver mest mulig effektivt, har man dyp prosedyrekunnskap. Baroody et al. (2007) påpeker at overfladisk prosedyrekunnskap og overfladisk begrepsmessig kunnskap kan forekomme uavhengige av hverandre, men at dyp prosedyrekunnskap ikke kan eksistere uten dyp begrepsmessig kunnskap (og omvendt). I denne studien har derfor dyp prosedyrekunnskap blitt innlemmet i dyp begrepsmessig forståelse, og overfladisk prosedyreforståelse har jeg kalt *prosedyreforståelse*. I studien min er det gjentagende at lærerne som har prosedyreforståelse også har overfladisk begrepsmessig forståelse, med et par unntak. Dette står tilsynelatende i motsetning til at overfladisk prosedyreforståelse og overfladisk begrepsmessig forståelse er uavhengige av hverandre (Baroody et al., 2007). Med utgangspunkt i unntakene kan man argumentere for at Baroody et. al. har rett i at de to kategoriene ikke er avhengige av hverandre. Et unntak er SEB, som ikke vet hvordan hun kan løse divisjonsstykket. Derfor er hun ikke kategorisert med prosedyreforståelse. Likevel kan hun vise at hun er bevisst andre framstillingsmåter. Framstillingsmåtene har svak eller ingen tilknytning til divisjon med brøk. Derfor kategoriseres hun med overfladisk begrepsmessig forståelse. På samme måte viser analysene fra BEU at de to forståelseskategoriene er uavhengige av hverandre. Han vet hvordan algoritmen utføres, men har ingen begrunnelse og ingen alternative representasjoner. Han har derfor ingen indikasjoner på overfladisk begrepsmessig forståelse.

Fleksibilitet som indikator på dyp prosedyreforståelse, kan vi blant annet finne hos JEU. Han tar utgangspunkt i algoritmen for å vise flere alternative framstillingsmåter (geometrisk framstilling og bruk av dekomponering og distributiv lov). Med dette viser han en fleksibel anvendelse av prosedyrekunnskapen og at kunnskapen er preget av forståelse. På den måten viser han også sterk tilknytning mellom prosedyreforståelsen og den begrepsmessige forståelsen. Vi ser det samme igjen hos de andre lærerne: de som kan begrunne algoritmen godt, bruker andre framstillingsmåter for å forklare den. Dette understreker det Baroody et al. (2007) påpekte: at disse to kategoriene av forståelse ikke kan forekomme uavhengig av hverandre.

5.1.2. FUNN 2 OG 3: SAMMENHENGEN MELLOM FORSTÅELSE OG FAGKUNNSKAP I MULTIPLIKASJON MED FLERSIFREDE TALL

I analysene av den matematiske forståelsen lærerne hadde for multiplikasjon med flersifrede tall, ble forståelsen kategorisert ut ifra hvordan de begrunnet algoritmen. Det som kjennetegnet kunnskapen deres, var blant annet om de var bevisst ulike framstillingsmåter og om representasjonene de brukte hadde tilknytning til algoritmen (Ball et al., 2008). Ball (1988) sier at for å forstå algoritmen for multiplikasjon med flersifrede tall, må man forstå hvordan tallene kan representeres på utvidet form. I tillegg må man forstå den distributive loven, som tillater at man kan dekomponere tallene, multiplisere delene hver for seg og deretter addere produktene. Lærerne som har denne kunnskapen, har i denne studien blitt kategorisert med spesialisert fagkunnskap. De er avhengige av denne kunnskapen for å bruke andre framstillingsmåter og for at representasjonene deres skal ha sterk tilknytning til algoritmen. Dette er en sammenheng som også kommer til syne gjennom analysene. De lærerne som har dyp begrepsmessig forståelse har også spesialisert fagkunnskap. Dette gjelder ikke nødvendigvis omvendt. SEB skiller seg nemlig ut i fra dette mønsteret. Hun har spor av spesialisert fagkunnskap, men hun har likevel ikke forståelse for algoritmen. Dette viser at man kan ha spesialisert fagkunnskap, uten å ha dyp begrepsmessig forståelse. Dette kommer utenfor den sammenhengen som Ball påpeker. Der er det forståelsen som er avhengig av fagkunnskapen, og ikke omvendt (som med SEB).

I tabell 7 og 8 kan man se at lærerne med prosedyreforståelse eller overfladisk begrepsmessig forståelse også har allmenn fagkunnskap. Dette gjenspeiler det Ball (1988) sier om forståelse for multiplikasjon med flersifrede tall. De lærerne som ikke kan representere tallene på utvidet form og brukte dekomponering og distributiv lov på regnestykket, har ikke forståelse for algoritmen. Dette medfører at de med allmenn fagkunnskap ikke kan ha dyp begrepsmessig forståelse.

5.1.3. FUNN 2 OG 3: SAMMENHENGEN MELLOM FORSTÅELSE OG FAGKUNNSKAP I DIVISJON MED BRØK

Martinussen og Smestad (2010) sier at det er viktig å ha forståelse for forskjellen på delingsdivisjon og målingsdivisjon for å forstå algoritmen med kryssmultiplikasjon i divisjon med brøk. I analysene var kunnskapen lærerne hadde om målingsdivisjon og delingsdivisjon utgangspunkt for om de hadde spesialisert fagkunnskap eller ikke. Begrunnelsen av algoritmen viste hvilken grad av matematisk forståelse de hadde. Av lærerne som ble intervjuet, var det bare JEU som viste at han hadde dyp begrepsmessig forståelse for algoritmen. Han hadde også spesialisert fagkunnskap (forståelse for forskjellen på målingsdivisjon og delingsdivisjon). Ut ifra en lærer kan man ikke konkludere med at dette alltid stemmer. Det viser likevel at det er samsvar mellom funnene mine og Martinussen og Smestad (2010) sin påstand. Videre kan man argumentere for dette ved å observere det motsatte. Av de lærerne som ikke hadde spesialisert fagkunnskap og ikke viste forståelse for forskjellen på målingsdivisjon og delingsdivisjon, var det heller ingen som kunne forklare algoritmen for divisjon med brøk. En svakhet her er at halvparten av lærerne aldri har undervist på ungdomsskole, og heller ikke har dette som pensum for det som skal undervises. Likevel visste alle utenom SEB hvordan de skulle løse oppgaven. Martinussen og Smestad (2010) sier altså at det er viktig å ha forståelse for delingsdivisjon og målingsdivisjon for å forstå algoritmen. SEB viser at dette ikke trenger å gjelde begge veier, at man ikke trenger å forstå algoritmen selv om man har forståelse for målingsdivisjon og delingsdivisjon. Hun har kunnskap om målingsdivisjon og delingsdivisjon, men kan ikke løse oppgaven ved å dividere med brøk. Kunnskapen hun har om målingsdivisjon og delingsdivisjon kan hun anvende i undervisningen i andre divisjonssammenhenger – for eksempel divisjon med desimaltall, som hun beskriver i intervjuet.

5.1.4. Konklusjon

Basert på funnene ovenfor kan jeg nå oppsummere svaret på problemstillingen. Det er en sterk sammenheng mellom graden av forståelse for algoritmene for multiplikasjon med flersifrede tall og divisjon med brøk, og fagkunnskapen de har om emnene. De lærerne som har dyp begrepsmessig forståelse har spesialisert fagkunnskap og lærerne med allmenn fagkunnskap har prosedyreforståelse og/eller overfladisk begrepsmessig forståelse. Det er et poeng å merke seg at man kan ha spesialisert fagkunnskap, uten å ha dyp begrepsmessig forståelse, fordi det er forståelsen som er avhengig av fagkunnskapen, og ikke omvendt.

5.2. Matematisk forståelse

Forståelsen er lett påvirkelig og omtales av Davis og Simmt (2006) som flyktig. Cai og Ding (2017) omtaler den i tillegg som en dynamisk prosess. Dette kan gjøre det litt problematisk å definere en lærers forståelse, når den stadig er i forandring. Kategoriseringen av forståelsen til lærerne i denne studien vil bare si noe om forståelsen de hadde i akkurat det øyeblikket intervjuet ble gjennomført. Et eksempel på forståelsen som en prosess, er i intervjuet med JEU. Han møtte på problemer når han skulle forklare algoritmen for divisjon med brøk. Han satte seg fast i forklaringen på hvorfor det er matematisk korrekt å multiplisere med den omvendte brøk. Gjennom samtalen vi hadde og ved at jeg stilte spørsmål, som gjorde at han måtte tenke over hva som var matematisk korrekt, kom han fram til en tilfredsstillende forklaring. Man kunne kanskje ha sagt seg tilfreds med forklaringen han prøvde seg på først, og konkludert med at han ikke har dyp begrepsmessig forståelse for divisjon med brøk. Med bakgrunn i Cai og Ding (2017) og Davis og Simmt (2006), valgte jeg å følge opp forklaringen hans, og fikk se at han gjennom den prosessen fikk vise at han har dyp begrepsmessig forståelse. Dermed vil det faktum at forståelsen er flyktig og er et resultat av en prosess, ikke bare være utfordrende i kategoriseringen av lærernes forståelse, men også skape muligheter for å se hvilken forståelse lærerne har innenfor nærmeste rekkevidde.

5.2.1. Prosedyreforståelse og begrepsmessig forståelse - Kan begrepene anvendes fortsatt?

I kapittel 2.1.1. tok jeg for meg begrepene prosedyreforståelse og begrepsmessig forståelse, og stilte spørsmål om begrepene fortsatt kan anvendes. Konklusjonen min var at begrepene var anvendelige fortsatt, men jeg valgte å tilføre noen perspektiver fra Baroody et al. (2007). Tilknytnings- og dybdeperspektivet som Baroody et al. (2007) tilfører den matematiske forståelsen, har gjort det lettere å kategorisere forståelsen som ellers ville ha vært i «gråsonen». For eksempel SEB, som viser at hun har en alternativ framstillingsmåte for løsningen av multiplikasjonsstykket. Om man bare hadde tatt utgangspunkt i dette, kunne man kanskje ha sagt at hun har begrepsmessig forståelse. Likevel klarer hun ikke å forklare algoritmen, noe som viser at hun har prosedyreforståelse. Her kommer tilknytningsperspektivet til sin rett. SEB har en alternativ framstillingsmåte, men har svak tilknytning mellom denne og algoritmen. Forståelsen hennes kan derfor kategoriseres som overfladisk begrepsmessig forståelse. Dette er med på å vise at Baroody et al. (2007) sin rekonseptualisering av begrepene prosedyreforståelse og begrepsmessig forståelse er anvendelig, og at vi fortsatt kan bruke disse begrepene. Tilknytningsperspektivet gjør det også lettere å kategorisere dyp begrepsmessig forståelse. Det kan være vanskelig å kategorisere forståelsen ut ifra hvordan algoritmen forklares. Om man kan se den i sammenheng med alternative representasjoner og framstillingsmåter, blir tilknytningen mellom disse og forklaringen på algoritmen tydeligere. Dette ser man for eksempel i JEU sin begrunnelse av trappeformen i multiplikasjonsalgoritmen. Begrunnelsen er at man «legger 0'er bak» (linje 9). Om denne forklaringen hadde stått alene, kunne det vært vanskelig å vite om han egentlig hadde forståelse for hvorfor man kan sette 0'er bak. Styrken her er at han i tillegg dekomponerer regnestykket til utvidet form og viser hvordan man kan bruke den distributive loven ved å addere produktene. Da ser man at det er sterk tilknytning mellom den alternative framstillingsmåten og algoritmen.

5.3. MATEMATISK FAGKUNNSKAP OG DENS BETYDNING FOR UNDERVISNING

I følge Ball et al. (2008) henger begrepene fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap svært tett sammen (Figur 2 Undervisningskunnskap i matematikk). Man kan si at fagkunnskapen, som blant annet består av allmenn fagkunnskap og spesialisert fagkunnskap, danner grunnlaget for den fagdidaktiske kunnskapen. Fagdidaktisk kunnskap er blant annet å kunne formulere og representere faget på en forståelig måte (Shulman, 1986). Læreres valg av spørsmål, innfallsvinkler, arbeidsmetoder og oppgaver, er avhengig av det faglige innholdet. Det faglige innholdet er blant annet begreper, matematiske ideer, representasjoner og framgangsmåten for undervisning (Valentina & Enge, 2015). Når man ser hvor tett fagkunnskapen og den fagdidaktiske kunnskapen henger sammen, og hvor stor betydning det faglige innholdet har for undervisningen, blir det veldig viktig at lærere har god fagkunnskap. Dette kan man argumenterer for ved å se på fagkunnskapen til lærerne i denne studien. Lærerne med allmenn fagkunnskap strever med å forklare algoritmen og har ingen egnede framstillingsmåter eller representasjoner for regnestykkene. Da blir det en utfordring å skulle formulere og representere emnene på en forståelig måte, som utruster elevene til å nå de kompetansemålene som skal nås. Elevene skal blant annet kunne *forklare* beregninger og framgangsmåter og *gjøre rede for* ulike metoder i skriftlig regning (Saabye et al., 2015). Om ikke læreren kan forklare framgangsmåten og gjøre rede for metoden som anvendes, er det innlysende at det blir utfordrende for eleven å lære dette. Lærerne med spesialisert fagkunnskap har bedre forutsetninger for nettopp dette. De kan begrunne algoritmen og er bevisst ulike framstillingsmåter. De kan for eksempel begrunne algoritmen for multiplikasjon med flersifrede tall ved å dekomponere faktorene til utvidet form og anvende distributiv lov. Å være bevisst på at elevene har ulike styrker, og ta utgangspunkt i deres sterke sider for å forklare algoritmen, er et godt eksempel der fagkunnskapen og den fagdidaktiske kunnskapen henger tett sammen. BEU viser et eksempel på dette, når han forteller hvordan han forklarer algoritmen for multiplikasjon med flersifrede tall til en elev som mestrer geometri godt. Han bruker en geometrisk framstillingsmåte der han anvender både dekomponering og distributiv lov for å begrunne algoritmen. Her får han bruk for fagkunnskapen sin når han skal illustrere og forklare algoritmen på en måte som er nyttig for eleven (Shulman, 1986).

5.4. Mitt bidrag til forskningsfeltet

5.4.1. Studiens anvendelighet

I utformingen av studien min var det nyttig å ha Ball (1988) og Ma (2010) sine studier og støtte meg til. Studiene og funnene deres hjalp meg til å utvikle en intervjuguide og et hensiktsmessig design av oppgaven. Intervjuet mitt hadde en åpen struktur som skulle gi intervjuobjektet anledning til å svare grundig og detaljert. Spørsmålene underveis i intervjuet utviklet seg i takt med intervjuet og den retningen intervjuobjektet tok oss i. Dette er det som kjennetegner kvalitativ forskning, at det ikke har en rigid struktur, slik at man får innsikt i intervjuobjektets perspektiv (Johannessen & Christoffersen, 2012; Nilssen, 2012). Den kvalitative forskningen er den som var mest egnet i denne studien, da læreres forståelse og kunnskap ikke er statisk (Davis & Simmt, 2006). Det teoretiske rammeverket som denne studien bygget på, gav meg muligheter til å kategorisere elementer av forståelse og fagkunnskap hos lærerne innenfor de to emnene, og har derfor vært svært nyttig i analyseprosessen. Jeg håper at denne studien, med sitt metodegrunnlag og teoretiske rammeverk kan være til nytte for andre. Enten de vil undersøke et nytt spørsmål eller de vil ta denne studien videre til neste steg. Innledningsvis skrev jeg at studien til Ma (2010), der hun sammenlignet kinesiske og amerikanske lærere, vekket en interesse i meg til å undersøke norske lærere. Denne interessen og nysgjerrigheten står fortsatt ved lag. Jeg kunne tenkt meg å se en større studie, som tok for seg flere lærere på landsdekkende basis. Basert på de seks lærerne som jeg har intervjuet, har jeg kunnet si noe om sammenhengen mellom læreres forståelse og fagkunnskap innenfor emnene multiplikasjon med flersifrede tall og divisjon med brøk. Men hvordan er matematikklæreres forståelse og fagkunnskap innenfor grunnleggende matematikk i Norge? Kanskje noen kan plukke opp tråden fra denne studien og spinne videre på dette spørsmålet.

5.4.2. Mitt bidrag til den faglige diskusjonen

Læreres matematiske forståelse og fagkunnskap har vært under lupen innenfor det matematiske forskningsfeltet i en årrekke. Likevel har det ikke vært utbredt fokus på å undersøke de norske tilstandene innenfor dette feltet. Jeg håper studien min kan være et bidrag i denne faglige diskusjonen ved å belyse dette temaet ut i fra de seks lærerne jeg har intervjuet. Noe av motivasjonen bak denne studien var, som sagt, en bekymring for elevers læringsutbytte. At læreren har spesialisert fagkunnskap er viktig for å gjøre fagstoffet tilgjengelig for elevene og hjelpe dem til å forstå regler og algoritmer (Ball et al., 2008). Om læreren har prosedyrekunnskap eller dyp begrepsmessig kunnskap, vil ha betydning for om læreren er i stand til å forklare elevene hvorfor en algoritme fungerer. Det er også avgjørende for at elevene skal få forståelse for det de gjør (Baroody et al., 2007; Hiebert & Lefevre, 2009; Ma, 2010) – heller enn å lære de at «sånn gjør man det, og sånn er det bare» (slik min erfaring er). Denne studien viser en utstrakt sammenheng mellom forståelsen og fagkunnskapen lærerne har. Det gjør det enda mer tydelig at lærere bør strebe etter å få dyp begrepsmessig forståelse. Det var en sterk sammenheng mellom dyp begrepsmessig forståelse og spesialisert fagkunnskap. Om man ser på Figur 1 (modellen til Valentina og Enge (2015)), som presenterer de seks hovedområdene for undervisningskunnskap definert av Ball et al. (2008), ser man at spesialisert fagkunnskap utgjør en stor del av undervisningskunnskapen. Om denne kunnskapen mangler, vil man sitte med et stort hull i undervisningskunnskapen. Man kan ikke annet enn å anta at det har konsekvenser for læringsutbyttet til elevene. Selv om datagrunnlaget mitt er for lite til å trekke en sterk konklusjon, håper jeg at denne studien kan bidra inn i allerede eksisterende refleksjoner om læreres matematiske kunnskap for undervisning, og stimulere til videre diskusjon.

REFERANSER

Ball, Deborah Loewenberg. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* (Doctor of Philosophy), Michigan State University, Unpublished.

Ball, Deborah Loewenberg & Bass, Hyman. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*, 83-104.

Ball, Deborah Loewenberg & Bass, Hyman. (2002). *Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching.* Innlegg holdt ved Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group.

Ball, Deborah Loewenberg, Thames, Mark Hoover & Phelps, Geoffrey. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. doi:10.1177/0022487108324554

Baroody, Arthur J., Feil, Yingying & Johnson, Amanda R. (2007). An Alternative Reconceptualization of Procedural and Conceptual Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 115-131.

Bass, Hyman. (2003). Computational Fluency, Algorithms, and Mathematical Proficiency: One Mathematician's Perspective. *Teaching Children Mathematics, 9*(6), 322-327.

Cai, Jinfa & Ding, Meixia. (2017). On mathematical understanding: perspectives of experienced Chinese mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(1), 5-29. doi:10.1007/s10857-015-9325-8

Davis, Brent & Simmt, Elaine. (2006). Mathematics-for-Teaching: an Ongoing Investigation of the Mathematics that Teachers (Need to) Know. *An International Journal, 61*(3), 293-319. doi:10.1007/s10649-006-2372-4

De Jong, Ton & Ferguson-Hessler, Monica GM. (1996). Types and qualities of knowledge. *Educational psychologist, 31*(2), 105-113.

Denscombe, Martyn. (2010). *The good research guide: for small-scale social research projects* (4th ed. utg.). Maidenhead: Open University Press.

Dewey, John. (1904). The relation of theory to practice in education.

Hiebert, James & Lefevre, Patricia. (2009). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I James Hiebert (red.), Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics (s. 1-23): Routledge.

Hjardar, Espen, Pedersen, Jan-Erik & Jerner, Line. (2014). *Faktor : 8 : Grunnbok* (Bokmål[utg.]. utg.). Oslo: Cappelen Damm.

Hole, Arne. (2006). *Grunnleggende matematikk i skoleperspektiv* (4. utg. utg.). Oslo: Universitetsforl.

Jacobsen, Dag Ingvar & Postholm, May Britt. (2011). *Læreren med forskerblikk: innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforl.

Johannessen, Asbjørn & Christoffersen, Line. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forl.

Lagerstrøm, Bengt Oscar , Moafi, Hossein & Revold, Mathias Killengreen (2014). Kompetanseprofil i grunnskolen: Hovedresultater 2013/2014. Hentet 24. september, 2014, fra http://www.ssb.no/utdanning/artikler-og-publikasjoner/_attachment/197751?_ts=148a1618d30

Ma, Liping. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States* (Anniversary ed. utg.). New York: Routledge.

Martinussen, Geir & Smestad, Bjørn. (2010). Perlesnor og tom tallinje. I Hanne Hafnor Dahl & May Else Nohr (red.), *Tangenten* (Vol. 1, s. 30-34).

Nilssen, Vivi Lisbeth. (2012). *Analyse i kvalitative studier : den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforl.
Saabye, Malin, Fors, Kerstin & Pedlex norsk, skoleinformasjon. (2015). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet : grunnskolen* ([8. utg.]. utg.). Oslo: Pedlex.
Shulman, Lee S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.
Son, Ji-Won & Crespo, Sandra. (2009). Prospective Teachers' Reasoning and Response to a Student's Non-Traditional Strategy when Dividing Fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 235-261. doi:10.1007/s10857-009-9112-5
Star, Jon R. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404-411.
Valentina, Anita & Enge, Ole. (2015). Profesjonskunnskap for matematikklærerutdannere. *Bedre Skole, 2015 (4)*, 74-78.

VEDLEGG A: SPØRREUNDERSØKELSE

BAKGRUNNSINFORMASJON

SPØRREUNDERSØKELSE: BAKGRUNNSINFORMASJON

Denne informasjonen vil kun bli brukt for å velge ut hvilke informanter jeg ønsker å ta med meg videre i studien. Personlig informasjon vil ikke være tilgjengelig for noen andre enn meg. Alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert. Prosjektet følger ellers gjeldende retningslinjer for personvern. Det er naturligvis helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

NAVN: ALDER:

SKOLE:

JA, jeg underviser i matematikk ○

1. Hvilke/t klassetrinn underviser du på?

2. Hvor lenge har du arbeidet som lærer/mattelærer?

   a. Hvilke klassetrinn har du hatt?

3. Har du en pedagogisk utdannelse?

   a. Hvis ja:
      Hvilken utdannelse?

      i. Når tok du denne utdannelsen?

b. Hvis nei:
   Har du en annen utdannelse? Hvilken?

      i. Når tok du denne utdannelsen?

4. Hvor mange studiepoeng har du i matematikk?

5. Har du tatt kurs eller etterutdanning i matematikk?

   a. Hvis ja:
      Hvilke kurs?

      Hvilken etterutdanning og antall studiepoeng?

Ferdig utfylt spørreundersøkelse sendes på mail til aashild_v@[...].com

På forhånd, takk!

VEDLEGG B: INTERVJUGUIDE

MULTIPLIKASJON MED FLERSIFREDE TALL

Noen lærere for 6. klasse oppdaget at flere av elevene gjorde den samme feilen når de multipliserte med flersifrede tall.

Når de skulle løse denne oppgaven

123x645

var det flere av elevene som glemte å «flytte tallene» i hver linje. De løste oppgaven slik:

123x645
615
492
738
1845

istedenfor slik:
123x645
615
492
738
79335

Lærerne var enige om at dette var et problem, men de ble ikke enige om hva de skulle gjøre med det. Hva ville du ha gjort om du underviste 6. klasse og oppdaget at flere av elevene gjorde denne feilen?

OPPFØLGINGSSPØRSMÅL

- *Hvorfor?*
- *Kan du fortelle meg mer om det?*

Viser usikkerhet/spør om det er rett

- *Hva er det som gjør deg usikker?*

Forklare

- *Hva mener du er en gyldig forklaring?*

Minnetall

- *Hvordan vil du forklare hva et minnetall er?*

Sette inn nuller

- *Hva om en elev da spør 'Hvordan kan du det? Det endrer jo tallet (f.eks. fra 492 til 4920)'?*

DIVISJON MED BRØK

Hvordan løser du en slik oppgave?

$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} =$

Mange matematikklærere prøver å relatere matematikk til andre ting. Noen ganger prøver de å komme på hverdagssituasjoner eller tekstoppgaver for å vise hvordan man kan anvende matematikken, eller de prøver å komme på eksempler eller modeller som tydeliggjør hva som menes. Av og til er dette ganske utfordrende.

Kan du komme på en god situasjon, tekstoppgave eller en modell for regnestykket $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$?

Hvordan passer det med $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$?

OPPFØLGINGSSPØRSMÅL

- *Hvorfor?*
- *Gir algoritmen mening for deg?*
- *Er dette en generell metode?*
- *Kan du fortelle meg mer om det?*
- *Finnes det en annen måte å løse oppgaven på?*
- *Hvorfor fungerer det?*
    - *Hva mener du er en gyldig forklaring?*
- *Kan du komme på flere representasjoner?*

VEDLEGG C: INFORMASJONSSKRIV OG SAMTYKKEERKLÆRING

Åshild Valbø Sæther

[…]

6012 Ålesund

Tlf: […]
aashild_v@[...].com

Blindheim, [dato]

Til deg som er matematikklærer ved […] skole.

Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved NTNU (tidligere Høgskolen i Sør-Trøndelag), institutt for lærerutdanning. I masterprosjektet mitt ønsker jeg å undersøke læreres kunnskaper og ferdigheter i to temaer innenfor grunnleggende matematikk. Hvilken forståelse læreren har for det pensum som han/hun underviser i, vil naturligvis påvirke elevenes forståelse. Jeg synes derfor at dette er spennende og viktig å få mer kunnskap om. I den forbindelse ønsker jeg å samle inn datamateriale fra deg som underviser i matematikk.

I første omgang vil jeg be deg svare på en kort spørreundersøkelse. Den består av noen enkle bakgrunnsspørsmål, om for eksempel utdanningsnivå, alder og hvilke/t klassetrinn du underviser på. Dette gjør jeg fordi jeg ønsker å samle inn data fra lærere med litt forskjellig bakgrunn. Utfra spørreundersøkelsen velger jeg ut hvilke informanter jeg ønsker å ta med videre i studien. Om du får spørsmål om å bli med videre, så går det ut på å gjennomføre et intervju på ca. 30 minutter. Intervjuet vil bli gjennomført i løpet av [april-juni]. Det vil skje mellom meg og deg, uten at andre er til stede. Med samtykke fra deg, vil det bli tatt lydopptak av intervjuet. Det vil i hovedsak være spørsmål knyttet til undervisning av to temaer. Med hensyn til datamaterialets validitet, vil du ikke kunne få mer informasjon om innholdet i intervjuet på forhånd. Opptakene vil kun bli hørt av meg og eventuelt min veileder. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre, vil involverte personer bli anonymisert. Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet ved utgangen av 2017.

Det er ikke bindende for din deltagelse om du velger å besvare spørreundersøkelsen. Du står helt fritt til å takke nei dersom du får spørsmål om å delta i studien som intervjuobjekt.

Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er naturligvis helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Jeg håper du synes at dette kan være interessant og viktig, og ønsker å besvare spørreskjemaet. Det vil glede meg om du også er villig til å bli intervjuet ved en senere anledning.

Har du noen spørsmål er det bare å kontakt med meg på e-post eller telefon.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen

Åshild Valbø Sæther

Åshild Valbø Sæther

[…]

6012 Ålesund

Tlf: […]
aashild_v@[...].com

Blindheim, [dato]

Til deg som er lærer i matematikk på 5.-7./8.-10.-trinn ved […] skole.

Anmodning om tillatelse til lydopptak av intervju.

Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved NTNU (tidligere Høgskolen i Sør-Trøndelag), institutt for lærerutdanning. I masterprosjektet mitt ønsker jeg å undersøke læreres kunnskaper og ferdigheter i to temaer innenfor grunnleggende matematikk. Hvilken forståelse læreren har for det pensum som han/hun underviser i, vil naturligvis påvirke elevenes forståelse. Jeg synes derfor at dette er spennende og viktig å få mer kunnskap om. I den forbindelse ønsker jeg å samle inn datamaterialer fra deg som underviser på 5.-7.-trinn.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, har jeg i samråd med min veileder kommet til at det er gunstig å ta lydopptak av intervjuet. Derfor ber jeg om tillatelse fra deg til å kunne gjøre lydopptak. ***Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern.*** Det er naturligvis helt frivillig å delta og du kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Intervjuet vil skje mellom meg og deg, uten at andre er til stede. Det vil i hovedsak være spørsmål knyttet til undervisning av de to temaene. Opptakene vil kun bli hørt av meg og eventuelt min veileder. Det kan bli aktuelt å presentere et skriftlig materiale basert på lydopptaket av intervjuet, eventuelt også skriftlig materiale som er produsert under intervjuet. **Materialet vil da være anonymisert, og presenteres bare om du samtykker til dette.** Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet ved utgangen av 2017.

Vennligst signer samtykkeerklæring på side 2 og 3.

SAMTYKKEERKLÆRING FOR GJENNOMFØRING AV INTERVJU

Som del av masterprosjektet, ber jeg om tillatelse til å holde et intervju med deg, samt ta lydopptak av dette.

Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

Sett kryss i den ruta som passer:

☐ Jeg gir tillatelse og er klar over at deltagelsen er frivillig, og at jeg når som helst og uten grunn kan trekke meg fra prosjektet.

☐ Jeg gir ikke tillatelse.

Dato: ………………………

Navn: ……………….……………………. …………………..

Underskrift informant: …………………………………………………………..

Underskrift student: …………………………………………………………..

SAMTYKKEERKLÆRING FOR PRESENTERING AV ANONYMISERT MATERIALE

Jeg ber om tillatelse til å presentere materiale fra intervjuet med deg i masteroppgaven min, og ved en eventuell presentasjon/eksamen.

Forutsetningen for tillatelsen er at alt materiale blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

Sett kryss i den ruta som passer:

☐ Jeg gir tillatelse til at anonymisert materiale fra intervjuet kan presenteres.

☐ Jeg gir ikke tillatelse.

Dato: ………………………

Navn: ……………….……………………. …………………..

Underskrift informant: …………………………………………………………..

Underskrift student: …………………………………………………………..