Mari Ilbro Bergsrønning

Elevers generalisering og argumentasjon

En kvalitativ studie av tre grupper i arbeid med figur- og tallfølgeoppgaver

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Trondheim, mai 2018

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Denne masteroppgaven representerer avslutningen på min femårige lærerutdanning. I arbeid med denne oppgaven har jeg fått større innsikt forskningsfeltet, noe jeg vil ta med meg videre ut i skolen. Masterprosjektet har både vært interessant og lærerikt, samtidig som det har vært utfordrende. Det er derfor nødvendig å rette en takk til flere støttespillere det siste året.

Jeg vil først takke veileder Siri-Malén for innspill og hjelp jeg har fått gjennom hele prosessen med skrivingen av masteroppgaven. En stor takk går til læreren som ga meg lov til å låne elevene for å gjennomføre datainnsamlingen, og til elevene som ville delta i forskningsprosjektet. Uten dere hadde jeg ikke kunnet skrive denne oppgaven. Jeg vil også takke Lisbet og Inger Jorid for korrekturlesing og språklige innspill.

Videre vil jeg takke mine medstudenter, spesielt Trude, Siri og Kjersti for all støtte og lange pauser med mange latterkuler når dagene på lesesalen har blitt lange. Jeg vil takke venner og familie for støtte og for at dere alltid har hatt troen på meg.

Mari Ilbro Bergsrønning

Trondheim, mai 2018.

Innholdsfortegnelse

Figurliste

Tabelliste

1. Innledning

1.1. Bakgrunn for oppgaven

«Resultatet for de norske elevene på området Algebra utmerker seg internasjonalt som spesielt svakt.» (Grønmo et al., 2012, s. 25). I TIMSS-rapportene fra både 2012 og 2015 rapporteres det om vedvarende svake resultater i algebra for norske elever (Bergem, 2016; Grønmo et al., 2013). Dette er kritisk da det å ha grunnleggende ferdigheter innenfor tall og algebra er viktig for alle som bruker matematikk, og mange yrker og profesjoner krever bruk av matematikk (Grønmo et al., 2012, s. 27.). I følge English og Warren (1998) har det tradisjonelt sett vært slik at elevenes første møte med algebra har vært en ligning, med variabler som representerer noe ukjent. En slik tilnærming har gitt elevene liten mulighet til å undersøke og utforske, både sammenhenger og begrensninger ved ligninger og variabler (English & Warren, 1998). I tillegg til måten algebra blir introdusert på, kan elevers problemer med algebra komme av at elevene ikke blir introdusert for algebra før relativt sent i grunnskolen (Grønmo et al., 2012, s. 26).

For å bedre norske elevers kunnskaper innen området algebra vil jeg hevde at man må introdusere algebra på en annen måte og på et tidligere tidspunkt. En måte å gjøre det på er gjennom generaliseringsaktiviteter. Mason (1996) påstår at generalisering er hjerteslagene i matematikk og at uten generalisering vil ikke matematisk tenkning finne sted. Kaput og Blanton (2001) hevder at generalisering er fundamentalt for alt innen algebra, til og med symbolmanipulasjon, ved at man gir mening til symbolene som blir manipulert. Generaliseringsaktiviteter virker ut i fra dette å være en hensiktsmessig måte å introdusere algebra på. En generaliseringsaktivitet innebærer at elevene må generalisere for å løse oppgaven. Mason og Pimm (1984) definerer generalisering som å se det generelle i det spesielle og det spesielle i det generelle. Et eksempel på å se det generelle i det spesielle er å se et kvadrat, et rektangel og et trapes (det spesielle) for så å se at alle de tre figurene har til felles at de er firkanter (det generelle). Å se det spesielle i det generelle vil da være å se at en firkant (det generelle) kan være et rektangel (det spesielle).

Tilbake i 1996 skriver Bednarz, Kieran & Lee at det er gjennomført flere forsøk på å innføre algebra gjennom generaliseringsaktiviteter, spesielt i England (Bednarz, et al, 1996, s.7). I etterkant er det er gjort store mengder forskning på hvordan man kan introdusere algebra gjennom generaliseringsaktiviteter, da gjerne med figurfølger som utgangspunkt. For å introdusere algebra gjennom generaliseringsaktiviteter er det forsket både på hvordan fremtidige lærere, altså lærerstudenter, og elever generaliserer i arbeid med figurfølger (Becker & Rivera, 2006; Yesildere & Akkoc, 2010; Lannin, 2005). Når man forsker på generalisering og skal få innblikk i generaliseringen til elever og lærerstudenter, er man avhengig av at elevene forklarer hvordan de generaliserer. Lannin (2005) har forsket på elevers generalisering og argumentasjon i arbeid med figurfølger, fordi han mener at generalisering og argumentasjon ikke kan skilles. Han støtter seg til Radford (1996) som påstår at man i arbeid med generalisering ikke kan unngå spørsmålet om hvorvidt generaliseringen er gyldig. Elevenes syn på gyldighet kan man få innblikk i gjennom elevenes argumentasjon. Å forske på elevers generalisering innebærer altså at man også forsker på elevers argumentasjon samtidig. I følge Simon og Blume (1996) har fokuset frem til 1996 i stor grad vært på bevis og ikke argumentasjon, men i etterkant har også argumentasjon vært i fokus innen forskningen. To eksempler på det er Lannin (2005) og Stylianides (2008), som begge har utviklet et rammeverk for å analysere hvordan elever argumenterer for sine generaliseringer.

Lannin (2005) skriver at videre forskning bør undersøke ulike typer oppgaver som oppmuntrer elever til å undersøke flere typer argumentasjon og generaliseringsstrategier. I min oppgave vil jeg gå nærmere inn på dette ved å se på generalisering og argumentasjon i arbeid med oppgaver knyttet til både tallfølgeoppgaver og figurfølgeoppgaver. Jeg kan da se på om de ulike følgeoppgavene vil oppmuntre elevene til å bruke flere typer generaliseringsstrategier og argumenter for sine generaliseringer.

1.2. Formål og forskningsspørsmål

Tidligere i masterutdanningen har jeg jobbet litt med elevers generaliseringsstrategier og argumentasjon i møte med figurfølgeoppgaver og i den forbindelse har jeg prøvd ut noen figurfølgeoppgaver på elever da jeg var i praksis. I praksis opplevde jeg at arbeid med figurfølger førte til ulik bruk av generaliseringsstrategier og argumentasjon. Jeg fant denne oppdagelsen interessant og jeg ønsker derfor å se nærmere på elevers generalisering og argumentasjon. Ut i fra TIMSS-rapportene, som viser svake resultater for elever i norsk skole (Grønmo et al., 2012), vil jeg påstå at forsking på introduksjon av algebra gjennom generaliseringsaktiviteter er et viktig tema å forske på.

Som jeg viste tidligere er det mange som har forsket på generalisering og argumentasjon i arbeid med figurfølger (Becker & Rivera, 2006; Lannin, 2005; Lannin, Barker & Townsend, 2006; Stacey, 1989; Stylianides, 2008). Ettersom det har vært forsket mye på hvordan elever generaliserer og argumenterer i arbeid med figurfølger, vil jeg vinkle min oppgave til ikke kun å omhandle elevers arbeid med figurfølger, men jeg vil også se på hvordan elever generaliserer og argumenterer i arbeid med tallfølger. Det er interessant å se på om disse to typene følger gjør at elevene bruker ulike generaliseringsstrategier, eller om elevene bruker kun de samme generaliseringsstrategiene i arbeid med de tilhørende oppgavene. Mine forskningsspørsmål blir dermed:

> *Hvordan generaliserer en gruppe med tre elever i femte klasse i arbeid med figur- og tallfølgeoppgaver?*
> *Hvordan argumenterer elevene for sine generaliseringer?*

I forskningsspørsmålet blir det presisert at det er en gruppe elever som arbeider med følgeoppgavene. Elevene er satt sammen i grupper, for at jeg skal få innblikk i elevenes argumentasjon. Jeg ønsker å se på hvordan elevene argumenterer for sine generaliseringer overfor hverandre, fordi gyldigheten av et argument kan oppfattes forskjellig (Stylianides, 2008). Gjennom at elevene argumenterer til hverandre vil jeg da få et innblikk i hva elevene ser på som gyldige argumenter.

Forskningsspørsmålet krever også en oppklaring av hva figurfølgeoppgaver og tallfølgeoppgaver er. En tallfølge er en følge med tall, som fortsetter i et bestemt mønster. En tallfølgeoppgave er altså en oppgave knytte til denne tallfølgen. Det finnes flere oppgaver man kan bruke knyttet til tallfølgen, men jeg har valgt å bruke oppgaver hvor det er oppgitt et vist antall tall i følgen og man skal finne ut hvordan tallfølgen fortsetter. Målet med oppgaven er at elevene skal finne en regel slik at man kan finne hvilket som helst tall i følgen. En figurfølge er en tallfølge som er representert med figurer. I mine figurfølgeoppgaver kan det være oppgitt en eller flere figurer i en følge, hvor man skal finne antallet prikker eller pinner som figuren er bygd opp av. Også i tilknytning til figurfølgene er målet at elevene skal finne en regel, slik at de kan finne en hvilken som helst figur i følgen.

1.3. Metode

For å finne svar på mitt forskningsspørsmål har jeg valgt en kvalitativ tilnærming. Jeg har valgt observasjon som min kvalitative forskningsmetode, fordi det vil gi meg innblikk i elevers generalisering og argumentasjon i arbeid med følgeoppgavene. Jeg har valgt å gjennomføre observasjon av tre grupper med tre femteklasseelever i hver gruppe. Å observere gruppene vil gi meg innblikk i elevenes generaliseringsstrategier, da jeg legger til rette for at de kan snakke sammen om generaliseringsstrategiene sine og argumentere for sin generaliseringer, i motsetning til når de jobber alene.

For å kunne samle inn data om hvordan elever generaliserer i arbeid med figurfølgeoppgaver og tallfølgeoppgaver måtte elevene arbeide med både figurfølgeoppgaver og tallfølgeoppgaver. For at arbeidet med de ulike oppgavetypene skulle være sammenlignbart var oppgavene tilsvarende i form av to oppgaver med lineær vekst og en oppgave med geometrisk vekst av hver type oppgave. Før jeg skulle gjennomførte observasjonen av de tre gruppene i femte klasse hadde jeg en pilotundersøkelse på en gruppe femteklasseelever fra en annen skole for å kunne tilpasse både vanskelighetsgrad og formuleringen på oppgaven.

Under observasjonen av de tre gruppene i femte klasse fikk hver gruppe avsatt en time hver til å jobbe med oppgavene. Gruppen som skulle observeres ble tatt med inn på et eget rom, hvor jeg var til stede og observerte, samt at det ble tatt lydopptak og videoopptak. Jeg som observatør prøvde å være så lite deltakende som mulig for ikke å påvirke elevene. Hvilke metodiske valg jeg har tatt vil jeg komme nærmere inn på i metodekapitlet.

1.4. Oppgavens oppbygging

Videre er denne oppgaven delt inn i fem kapitler. Jeg vil i neste kapittel presentere teorien jeg skal bruke for å analysere og diskutere datamaterialet mitt. For å kunne belyse mitt forskningsspørsmål vil kapittelet bestå av teori om algebra, generalisering og argumentasjon. Tredje kapittel vil omhandle mine metodiske valg og gjennomføring av datainnsamling og analyse. Her vil jeg presentere mitt valg av forskningsmetode og oppgaver, samt hvordan jeg har samlet inn data for å kunne svare på mitt forskningsspørsmål. Tilslutt vil jeg forklare hvordan jeg har analysert datamaterialet og hvordan jeg har utformet mine rammeverk, og diskutere noen etiske refleksjoner rundt valg av metode. Fjerde kapittel er analysedelen, hvor jeg vil vise hvordan jeg har analysert mitt datamateriale ut i fra de teoretiske rammeverkene som jeg skisserer i metodekapittelet. I femte kapittel vil jeg drøfte mine funn fra analysen opp i mot annen forskning og teori jeg har presentert i teorikapittelet, samt at jeg vil drøfte metodekritikk knyttet til følgene og oppgavene jeg har valgt å bruke. Tilslutt vil jeg i sjette hoveddel konkludere og ha en avsluttende kommentar til forskningsspørsmålet, oppgaven og videre forskning.

2. Teori

I dette kapittelet vil jeg presentere teorien jeg skal bruke for å belyse mine forskningsspørsmål. Jeg vil begynne med å plassere min forskning innenfor algebra etter Kaput og Blanton (2001) sin inndeling av algebra. Deretter vil jeg presentere teori om generalisering, som innebærer å si noe om figur- og tallfølgeoppgaver, definere numerisk og figurativ generalisering, samt vise ulike generaliseringsstrategier. Tilslutt vil jeg presentere teori om argumentasjon og vise to rammeverk for argumentasjon.

2.1. Algebra

Algebra er ofte det folk tenker på når de tenker på matematisk språk (Mason, 1996). De ser for seg en rekke med algebraiske symboler og tror at algebra kun er symbolmanipulasjon, men Kaput og Blanton (2001) påstår at et slikt syn på algebra er for snevert. De mener at man trenger et bredere syn på algebra, og at det kan støtte integreringen av algebraisk resonering i alle trinn i skolen. Videre presenterer Kaput og Blanton (2001) en liste med fem deler som algebraisk resonering er organisert rundt:

1. Algebra som generalisering og formalisering av mønstre og begrensninger.
2. Algebra som formell manipulasjon av symboluttrykk.
3. Algebra som en studie av strukturer og systemer, abstrahert fra beregninger og relasjoner.
4. Algebra som studie av funksjoner, relasjoner og samvariasjon.
5. Algebra som et språk for håndtering av modeller og situasjoner.

Kaput og Blanton (2001) fremhever at de fem delene viser hvordan algebra har en dyp, men også variert tilknytning til alt av matematikk. De påpeker at de fem delene ikke må sees på som separate deler, men at de flyter inn i hverandre. Arbeid med figurfølger og tallfølger som denne oppgaven omhandler, går under det fjerde punktet på lista; algebra som studie av funksjoner, relasjoner og samvariasjon. Det fjerde punktet omhandler blant annet generalisering ut i fra tallfølger eller figurfølger, og å kunne gi en funksjonsbeskrivelse av variasjonen. I tillegg kan funksjonsbeskrivelsen være å beskrive en rekursiv sammenheng, altså hvordan en figur eller et tall kan beskrives med å ta utgangspunkt i foregående figur eller tall (Kaput & Blanton, 2001).

Et aspekt ved den fjerde delen i Kaput og Blantons (2001) sin inndeling i fem deler er å kunne gi en funksjonsbeskrivelse av variasjonen man har funnet ved å generalisere ut i fra tallfølger eller figurfølger. For å kunne gi en slik funksjonsbeskrivelse med symboler vil elevene behøve kunnskap om en variabel. English og Warren (1998) påstår at elevens innsikt i begrepet variabel er fundamentalt for at eleven skal lykkes i algebra. Tradisjonelt sett har elevers første møte med variabler vært en ligning, hvor variabelen representerer noe ukjent. I følge English og Warren (1998) gir det eleven liten mulighet til å undersøke, utforske og oppleve oppbyggingen av algebra. En annen tilnærming til variabler og algebra er gjennom generaliseringsaktiviteter. Kaput (2008) fremhever generalisering som viktig i algebra ved å vise til to kjerneaspekter ved algebra som innebærer generalisering. Det første kjerneaspektet er generalisering og uttrykking av generalisering i et stadig mer systematisk symbolsystem. Det andre kjerneaspektet er manipulasjon av generaliseringer uttrykt i organiserte symbolsystemer (Kaput, 2008). Det første kjerneaspektet er altså generalisering og å uttrykke sine generaliseringer. Det andre kjerneaspektet er å manipulere utrykkene man har funnet gjennom generalisering.

2.2. Generalisering

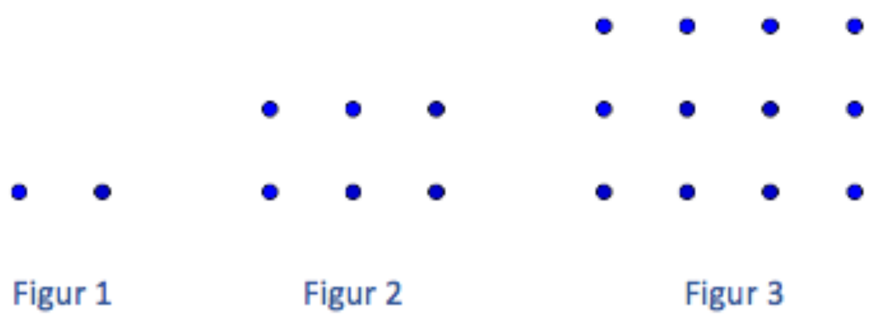
Generalisering er i følge Mason (1996) hjerteslagene i matematikken og han påstår at uten generalisering vil ikke matematisk tenkning finne sted. Mason (1996) definerer generalisering som å se det generelle i det spesielle og det spesielle i det generelle. Det innebærer både å kunne finne sammenhenger, altså det generelle i situasjonen, samt at man skal kunne bruke det generelle man har funnet på et spesielt tilfelle. Dette er noe som kan føre til problemer når man i skolen skal introdusere noe generelt. Læreren viser et eksempel hvor han skal vise noe generelt, mens elevene ser et eksempelet som et spesielt tilfelle som vises frem (Mason, 1996). Elevene kan oppleve lignende problemer når de selv skal uttrykke noe generelt. I følge Mason og Pimm (1984) kan elevene ha vanskeligheter med å representere noe generelt ved bruk av symboler. Når elevene skal gå fra å skrive tall til å bytte dem ut med symboler som representerer noe generelt, kan det altså oppstå utfordringer.

Mason (1996) påstår at generalitet er et oversett og undervurdert tema. Ettersom temaet er en stor del av matematikken er det viktig å forske og sette fokus på temaet. Generalitet er så sentralt i hele matematikken at mange profesjonelle ikke lenger legger merke til det, fordi det er så elementært for dem. Det er derfor viktig å være oppmerksom på generalitet og passe på at man legger til rette for at elever kan generalisere i matematikken (Radford, 2006).

2.2.1. Figurfølger og tallfølger

I forskning på generalisering har kanskje algebra fått mest oppmerksomhet i litteraturen (Stylianides, 2008). Samtidig er blant annet følgeoppgaver og generalisering ansett som viktige komponenter av algebra i læreplaner i mange land (Vale & Cabrita, 2008). Det kan man også se i forskningen på generalisering som introduksjon til algebra, hvor arbeid med figurfølge har fått stor plass. I min masteroppgave skal jeg se på elevenes generalisering og argumentasjon i arbeid med figurfølger, men i tillegg vil jeg også se på elevenes generalisering og argumentasjon i arbeid med tallfølger. Jeg vil nå presentere hva jeg legger i begrepene figurfølger og tallfølger.

En figurfølge er en følge bestående av figurer, hvor hver figur har et nummer i følgen (se figur 1). Begrepene figurtall og figurmønster brukes også, men jeg har valgt å bruke begrepet figurfølge. En tallfølge er en følge bestående av tall, hvor hvert tall har et nummer i følgen. I eksemplet i figur 2 er for eksempel tallet 5 tall nummer en i følgen.



Figur 1: Eksempel på en figurfølge.

5, 7, 9, 11, 13…

Figur 2: Eksempel på en tallfølge.

Oppgavene knyttet til en figurfølge eller en tallfølge er å knyttet til å finne andre figurer eller tall i følgen. Eksempelvis kan oppgaver knyttet til figurfølgen i figur 1 være å finne antall prikker i neste figur eller hvilken figur vil ha 56 pinner. Tilknyttet tallfølgen i figur 2 kan oppgaven være å finne tall nummer 22 i følgen, eller finne ut om tallet 100 vil være med i følgen.

Det er viktig å være oppmerksom på at en figurfølge har en bestemt måte å være oppbygd på, men det gjelder ikke en tallfølge. I en figurfølge kan man ut i fra figurene finne en spesiell måte den vil utvikle seg på. Stylianides (2008) skriver at tallfølger derimot ikke har kun en måte å utvikle seg på. Svaret man gir på hvordan den vil fortsette beror på en antagelse (Stylianides, 2008). For eksempel kan tallfølgen i figur 2 fortsette med tallene 15, 17, 19, altså fortsette å øke med to. Man kan også si at tallfølgen vil fortsetter med 5, 7, 9, altså gjentar seg selv. Det finnes også mer komplekse sammenhenger man kan finne som gir andre fortsettelser på tallfølgen (Stylianides, 2008). I en tallfølge kan man altså ikke påstå at det er et riktig svar, selv om det er vanlig i klasserommet at man sier den fortsetter med 15, 17, 19. I min oppgave vil det ikke være problematisk, da jeg er åpen for flere tolkninger. Jeg skal se på hvordan elever generaliserer og argumenterer for sine generaliseringer og dersom elevene finner en annen sammenheng enn den som er vanlig er det interessant å høre hvordan de argumenterer for sin generalisering.

2.2.2. Numerisk og figurativ generalisering

Becker og Rivera (2006) har forsket på generalisering i arbeid med figurfølger og deler inn generalisering i to kategorier; numerisk generalisering og figurativ generalisering. De skriver at elever som hovedsakelig generaliserer numerisk er opptatte av tallene, og bygger sine generaliseringer på tall de finner i oppgavene og tall de finner mens de løser oppgavene. Becker og Rivera (2006) påpeker at elever som generaliserer numerisk ikke alltid er i stand til å argumentere for generaliseringene sine. De bruker ofte prøv og feil metode som numerisk strategi uten tanke for hva variablene representerer. I følge Becker og Rivera (2006) består noen av elevenes numeriske metoder av feil og motsigelser og de virker å være opptatt av at det skal stemme med informasjonen de har i oppgaven.

Becker og Rivera (2006) skriver at elever som hovedsakelig generaliserer figurativt er kapable til å argumenterer for sine generaliseringer, delvis fordi de er i stand til å knytte sine symboler og variabler til mønstret som genererer figurene. De virker å være i stand til å se sammenhengen mellom figurene i følgen, og å se hva som endrer seg og hva som er konstant. Becker og Rivera (2006) skriver også at elever som generaliserer figurativt ikke trenger å lage en tabell for verdier for å kunne lage en generell formel, i motsetning til elevene som i generaliserer numerisk som ofte vil lage en tabell.

Becker og Rivera (2006) påpeker at de bruker begrepene *hovedsakelig (predominantly)* figurativt og *hovedsakelig* numerisk, som innebærer muligheten for at noen elever generaliserer både numerisk og figurativt. Det er altså ikke slik at en elev generaliserer bare numerisk eller bare figurativt.

2.2.3. Generaliseringsstrategier

Det er mange som har forsket på generalisering og dermed er det også laget mange rammeverk for å si noe om elevers generalisering. Jeg vil nå se nærmere på tre rammeverk for generalisering, som har delt inn generaliseringsstrategien noe ulikt. De tre rammeverkene jeg vil se på er Stacey (1989), Lannin (2005) og Lannin et al. (2006) sine rammeverk. Stacey (1989) har delt inn sitt rammeverk i fem metoder som elevene brukte til å løse figurfølgeoppgaver. Lannin (2005) har laget et rammeverk basert på andre rammeverk, blant annet Stacey (1989) sitt rammeverk. Jeg velger likevel å presentere Lannin (2005) sitt rammeverk, fordi det er lagt til noen strategier fra Stacey (1989) sitt rammeverk, samtidig har Stacey noen strategier Lannin ikke nevner. I sin artikkel presenterer Lannin (2005) fem generaliseringsstrategier, som er delt inn i hvorvidt de er eksplisitt eller ikke-eksplisitte strategier. Lannin, et al. (2006) deler inn i fire generaliseringsstrategier for å analysere sitt datamateriale. Jeg vil nå presentere strategiene fra de tre artiklene og se på noen fellestrekk og ulikheter mellom rammeverkene.

I tabellen på neste side (tabell 1) har jeg laget en oversikt over generaliseringsstrategiene som er presentert i alle de tre artiklene og delt dem inn i eksplisitte og ikke eksplisitte generaliseringsstrategier.

	Stacey (1989)	**Lannin (2005)**	**Lannin et al. (2006)**
Ikke-eksplisitte generaliseringsstrategier	Telling	Telling Rekursiv	Rekursiv
Eksplisitte generaliseringsstrategier	Differansemetoden Helobjekt Lineærmetoden	Gjett og sjekk Helobjekt Kontekstuell	Helobjekt Klumping Eksplisitt

Tabell 1: Generaliseringsstrategier

Det er to ikke-eksplisitte strategier i de tre rammeverkene; telling og rekursiv. Stacey (1989) og Lannin (2005) skriver om telling (*counting*) som den første generaliseringsstrategien. Den består av å telle antallet man skal finne i figuren på en tegnet figur. Lannin (2005) nevner også at man kan bygge en modell med for eksempel klosser og telle antall klosser i modellen. Jeg vil presisere at denne generaliseringsstrategien kun er mulig å bruke i arbeid med figurfølger, da den forutsetter at elevene teller på en figur eller modell.

Den andre ikke-eksplisitte strategien er generaliseringsstrategien rekursiv (*recursive*). En strategi som blir presentert i artikkelen til Lannin (2005) og Lannin et al. (2006). De forklarer at rekursiv strategi er når man bygger på det foregående leddet eller de foregående leddene for å finne påfølgende ledd i følgen. Et eksempel hvor det er naturlig å bruke en rekursiv strategi er til å finne det neste tallet i Fibonaccifølgen. Tallfølgen begynner med tallene 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 … For å finne neste tall i følgen legger man sammen de to foregående tallene ($F(x) = F(x-1) + (F(x-2)$), dermed blir det $8 + 5 = 11$, så neste tall i følgen er 11. Lannin et al. (2006) mener det er to grunner til at en elev velger en rekursiv strategi i en figurfølgeoppgave. Den første grunnen er at eleven har funnet en rekursiv regel basert på oppdagelsen av en sammenheng mellom figurene i figurfølgen. For eksempel kan eleven se at antall pinner i figuren øker med tre for hver figur. Den andre grunnen er ikke knyttet til figuren og da ser elevene på tallene av antall pinner det er i figurene og ser at tallene øker med tre for hver gang. Lannin et al. (2006) presiserer her hvordan elevene kan generalisere numerisk eller figurativt når de skal finne en rekursiv formel. I en tallfølge vil det bare være mulig for elevene å finne en rekursiv strategi gjennom å se hvordan tallene øker.

I de tre rammeverkene jeg viser i tabell 1 er det flere eksplisitte generaliseringsstrategier. En av dem er generaliseringsstrategien gjett og sjekk. Denne strategien forekommer kun i Lannin (2005) sitt rammeverk og han beskriver strategien som at eleven gjetter en regel uten noen betraktninger om hvorfor denne regelen skal fungere. Ofte involverer strategien å eksperimentere med forskjellige regneoperasjoner og tall som blir gitt i oppgaven. Lannin (2005) presiserer at denne strategien kan føre til bruk av lokaltaktikk (*local tactics*) som i følge Mason (1996) innebærerat elevene prøver å finne en regel som passer i et spesielt tilfelle i følgen, i stedet for å se etter en generell sammenheng i problemsituasjonen.

Differansemetoden (*difference method*) er en eksplisitt generaliseringsstrategi, som Stacey (1989) presenterer i sitt rammeverk. Differansemetoden innebærer at man multipliserer nummeret i følgen med differansen mellom to påfølgende tall eller to påfølgende figurer i følgen. Denne metoden tar ikke høyde for at man kan ha en startverdi, men tar utgangspunkt i at følgen starter med null og har en fast differanse. Et eksempel på en tallfølge hvor differansemetoden ikke ville gitt riktig svar er tallfølgen 4, 6, 8, 10, 12… I tallfølgen er differansen mellom tallene to, og for å finne tall seks med differansemetoden ville man da multiplisert to og seks. Det blir 12, men ved en rekursiv genraliseringsstrategi ville tall nummer seks bli 14. Differansemetoden tar altså ikke høyde for at tallfølgen starter på tallet fire.

Helobjekt er også en eksplisitt generaliseringsstrategi og den finner man i rammeverkene i alle de tre artiklene (Lannin, 2005; Lannin et al., 2006; Stacey, 1989). Lannin (2005) beskriver strategien helobjekt som at eleven bruker en del som en enhet for å finne en større enhet ved å multiplisere. Et eksempel er: Hvis to appelsiner koster 3 kroner, hvor mange kroner koster åtte appelsiner? Man ser da at åtte appelsiner er fire ganger så mye som to appelsiner. Dermed tar man prisen for to appelsiner og bruker som en enhet og multipliserer med fire for å finne prisen for åtte appelsiner ($3\ kr * 4 = 12\ kr$). Lannin et al. (2006) legger til at elevene kan gjøre feil, for eksempel hvis man skal doble en figur som vil overlappe. Et eksempel er: Finn antall pinner i figuren med fire kvadrater når man har oppgitt figuren med to kvadrater. Strategien helobjekt vil da innebære å doble antall pinner i figuren med to kvadrater (figur 3) , men da vil en pinne overlappe og bli telt to ganger (se figur 4). Dermed må man, for at strategien skal gi riktig svar, trekke fra den pinnen som overlapper. Om man ikke er oppmerksom på for eksempel overlapping, kan strategien gi feil svar.

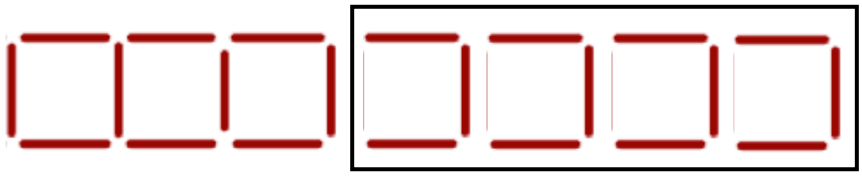
Figur 3: Figuren med to kvadrater.

Figur 4: Figuren med fire kvadrater (overlapping).

Stacey (1989) har oppdaget en variasjon av helobjekt, hvor elevene ikke multipliserer en tidligere enhet, men legger sammen flere tidligere enheter. For eksempel kan elevene legge sammen antall pinner i figuren med fire kvadrat og i figuren med åtte kvadrat for å finne antall pinner i figur nummer 12. Jeg vil påpeke at også med denne versjonen av helobjekt er det mulig å gjøre samme feil, ved for eksempel overlapping, som Lannin et al. (2006) nevner.

En av de eksplisitte generaliseringsstrategiene har ulikt navn i alle de tre rammeverkene. Stacey (1989) kaller det lineærmetoden (*linear method*), Lannin (2005) kaller strategien kontekstuell (*contextual*) og Lannin et al. (2006) kaller det eksplisitt (*explicit*) strategi. Stacey (1989) forklarer lineærmetoden som å bruke et mønster som innebærer at både multiplikasjon og addisjon er involvert, og som anerkjenner at rekkefølgen på regneoperasjonene er viktige. Det innebærer at elevene finner en formel på formen $A(x) = ax + b$ hvor b ikke kan være null. Lannins (2005) definisjon av generaliseringsstrategien kontekstuell er at man konstruerer en regel basert på informasjonen man får i følgen og relaterer regelen til en tellestrategi. Lannin et al. (2006) beskriver generaliseringsstrategien eksplisitt som å konstruere en regel som gjør det mulig å umiddelbart kalkulere en svarverdi dersom man setter inn hvilket nummer i følgen man skal finne. Alle strategiene innebærer å finne en regel, som man kan bruke til å finne svaret på hvilket som helst nummer i følgen, men forskjellen er måten man skriver regelen på, og hva den må ta utgangspunkt i.

Generaliseringsstrategien klumping (*chunking*) blir presentert kun i rammeverket til Lannin et al. (2006), men Stacey (1989) nevner i sin artikkel en variasjon i lineærmetoden som kan defineres som det Lannin et al. (2006) kaller klumping. I generaliseringsstrategien klumping bygger eleven på et rekursivt mønster ved å bygge en enhet på den kjente verdien. Et eksempel er å finne antall pinner i figuren med sju kvadrater når man vet at det er 10 pinner i figuren med tre kvadrater. Som man ser i figur 5 øker det med tre pinner for hvert kvadrat man legger til, som er det rekursive mønsteret man bygger på. Ettersom figuren med sju kvadrater har fire kvadrater mer enn figuren med tre kvadrater, multipliserer man fire med tre og finner da enheten man skal legge til, som vist i den svarte ruten i figur 5. Videre legger man til denne enheten med 12 pinner og finner at det er 22 pinner i figuren med sju kvadrater.



Figur 5: Figuren med sju kvadrater (klumping).

2.3. Argumentasjon

I følge Lannin (2005) kan man ikke skille generalisering og argumentasjon, man kan altså ikke se på generalisering uten også å se på argumentasjon. Radford (1996) påpeker også dette i sin artikkel hvor han skriver at man ikke kan unngå spørsmålet om hvorvidt generaliseringen er gyldig. For å vise om generaliseringen er gyldig må elevene altså argumentere for sine generaliseringer.

Simon og Blume skriver i 1996 at fokuset i forskningen tidligere har vært på bevis og ikke argumentasjon. Stylianides (2008) skriver at i skolematematikken har utviklingen av bevis ofte blir behandlet som en formell prosess, som er isolert fra andre matematiske aktiviteter. Å behandle bevis som en isolert del av matematikken påstår Stylianides (2008) er et problem, fordi elevene ikke får den matematiske innsikten som en matematiker kan få av å føre et bevis. Lannin (2005) påpeker også at det kan være utfordrende for elever å lage et gyldig argument for en generell påstand, fordi mange elever vil støtte seg på empirisk validering for å argumentere for sine generelle påstander. Denne utfordringen ser ut til å komme av at fokuset tidlig i skolen blir på det spesielle tilfellet i stedet for å finne generelle sammenhenger (Lannin, 2005). Påstandene fra Stylianides (2008) og Lannin (2005) vitner om at argumentasjon er en utfordring for elever.

Stylianides (2008) forklarer i sin artikkel at han velger å bruke begrepet bevis med en bredere mening enn den formelle prosessen med å bevise. I sin artikkel definerer han å bevise som et valid argument for eller mot matematiske påstander, som basert på aksepterte sannheter.

Stylianides (2008) bruker altså begrepet bevis for et gyldig argument som er en motsetning til et ikke-gyldig argument. Lannin (2005) definere et gyldig argument i sammenheng med algebraisk matematikk ved at det knytter generaliseringen til en generell sammenheng som eksisterer i oppgaven. Jeg vil videre i min oppgave bruke begrepene gyldig argument og ikke-gyldig argument.

Radford (2006) poengterer at gyldighet er en kompleks ide. Hvorvidt et argument er gyldig eller ikke kan oppleves forskjellig (Stylianides, 2008), fordi mennesker tenker forskjellig i matematikk (Radford, 1996). Et argument som er godtatt som gyldig i det matematiske fellesskapet trenger ikke å være godtatt som gyldig i et klasserom. (Stylianides, 2008). I et matematikklasserom er argumentasjonen sett på som gyldig når den møter kriteriene i det matematiske fellesskapet i klassen (Lannin, 2005). For at argumentet skal være gyldig må det altså baseres på aksepterte sannheter i det matematiske fellesskapet (Stylianides, 2008). Begrepet sannheter innebærer aksiomer, teoremer, definisjoner, typer resonering og representasjonsverktøy, som det bestemte fellesskap tar som en selvfølge på den gitte tiden (Stylianides, 2008). Det betyr at hva som blir sett på som en sannhet ikke vil være det samme i alle klasserom. I et klasserom med tiendeklasseelever vil kanskje en sannhet være at oddetall pluss oddetall er lik partall, fordi det har blitt argumentert for og godtatt i fellesskapet. I et klasserom med førsteklasseelever vil det kanskje ikke være en sannhet, fordi det er ikke argumentert for og godtatt i fellesskapet. Dermed kan en tiendeklassing bruke det som et argument; fordi oddetall pluss oddetall er partall. Hvis en førsteklassing sier det samme vil ikke argumentet være gyldig, fordi oddetall pluss oddetall er lik partall er ikke en sannhet i deres klasserom. Det vil si at hva som blir betegnet som et gyldig argument i klasserommet er i utvikling og er ikke objektivt eller fastsatt.

For å kunne si noe om elevers argumentasjon har flere laget rammeverk for argumentasjon. To av dem er Stylianides (2008) og Lannin (2005). Stylianides (2008) har laget et rammeverk for argumentasjon og bevis som inneholder tre komponenter; matematisk komponent, psykologisk komponent og pedagogisk komponent. Innen argumentasjon i matematikk i Stylianides (2008) sitt rammeverk har han delt inn i fire kategorier; empirisk argumentasjon, rasjonale, generisk eksempel og demonstrasjon. Lannin (2005) har i sin artikkel delt inn rammeverket for argumentasjon i fem nivåer, hvor nivå null er ingen argumentasjon, videre er nivåene; appellere til ekstern autoritet, empirisk bevis, generisk eksempel og deduktiv argumentasjon. Jeg vil nå presentere disse to rammeverkene.

I tabell 2 har jeg laget en oversikt over inndelingene av argumentasjon i de to rammeverkene jeg nå skal presentere. Tabellen viser en inndeling i ikke-gyldig og gyldig argumentasjon, og jeg vil begynne med å presentere de gyldige argumentasjonskategoriene fra begge rammeverkene.

	Lannin (2005)		**Stylianides (2008)**
Ikke-gyldig argumentasjon	Nivå 0	Ingen argumentasjon	
	Nivå 1	Appellere til ekstern autoritet	Empirisk argumentasjon
	Nivå 2	Empirisk bevis	Rasjonale
Gyldig argumentasjon	Nivå 3	Generisk eksempel	Generisk eksempel
	Nivå 4	Deduktiv argumentasjon	Demonstrasjon

Tabell 2: Argumentasjonsnivåer/kategorier

Både i Lannin (2005) og Stylianides (2008) sine rammeverk finner man kategorien generisk eksempel (*generic example*), som er en av to gyldige argumentasjonskategorier. Lannin (2005) definerer at for å være på dette nivået må elevens argumentasjon være deduktiv argumentasjon som tar utgangspunkt i et spesielt tilfelle. Stylianides (2008) definerer generisk eksempel som et argument som bruker et spesielt tilfelle som en representasjon for alle tilfeller. Et generisk eksempel er altså å vise noe generelt gjennom et spesielt tilfelle. Nivå fire i Lannins (2005) rammeverk heter deduktiv argumentasjon (*deductive justification*) og defineres ved at gyldighet er gitt gjennom deduktive argumenter som er uavhengig av et spesielt tilfelle. Deduktiv argumentasjon er det andre nivået som regnes som gyldig i Lannins (2005) rammeverk for argumentasjon. Tilsvarende kategori i Stylianides (2008) sitt rammeverk heter demonstrasjon (*demonstration*) og er definert som at den ikke avhenger av representasjonen av et spesielt tilfelle. Disse to kategoriene innebærer altså at man kommer med et gyldig argument som ikke er avhengig av et eksempel.

I tillegg til kategoriene med gyldig argumentasjon har Lannin (2005) tre kategorier og Stylianides (2008) to kategorier, som regnes som ikke-gyldig argumentasjon. I begge rammeverkene finner man kategorien empirisk argumentasjon (*empirical argument*), eller empirisk bevis (*empirical evidence*). Lannins (2005) definerer empirisk bevis som at elevenes argumentasjon er gitt gjennom riktighet i noen tilfeller. Stylianides (2008) definerer empirisk argumentasjon som et argument som gir mangelfulle bevis for den matematiske påstanden. Det innebærer at man viser at regelen gjelder for et utvalg eksempler, eller at man har sjekket at den gjelder for alle tilfeller men ikke uttrykker det (Stylianides, 2008). I Lannin (2005) sitt rammeverk er nivå to å appellere til ekstern autoritet (*appeal to external authority*). Argumentasjon på dette nivået innebærer at eleven argumenterer med at noen andre har sagt at påstanden er riktig, eller at eleven viser til andre kilder som har påstått at påstanden er riktig (Lannin, 2005). I tillegg finner man i Lannin (2005) sitt rammeverk et nivå null, som er ingen argumentasjon. I Stylianides (2008) sitt rammeverk finner man den ikke-gyldige argumentasjonskategorien rasjonale (*rationale*). Et argument går under kategorien rasjonale dersom det ikke refereres til noe som blir sett på som en sannhet i fellesskapet, som er essensiell for argumentasjonen, eller hvis argumentet er bygget på en sannhet, som ikke enda har blitt en sannhet i fellesskapet.

3. Metode

I dette kapittelet vil jeg presentere de metodiske valgene jeg har tatt. Jeg vil begynne med å presentere min forskningsmetode og si noe om observasjon og min rolle som observatør. Videre vil jeg vise hvordan jeg har utformet oppgavene, før jeg forklarer hvordan jeg forberedte meg før observasjonen, og hvordan jeg gjennomførte observasjonen av elevene. Deretter vil jeg vise hvordan jeg har analysert datamaterialet mitt, og hvordan jeg har kommet frem til rammeverkene jeg har brukt. Tilslutt vil jeg si noe om validitet, reliabilitet og etiske refleksjoner rundt metoden jeg har brukt.

3.1. Valg av forskningsmetode

Etter å ha utformet et foreløpig forskningsspørsmål var det første metodiske valget jeg måtte ta, hvilken forskningsmetode jeg ville bruke. Valget sto mellom kvalitativ metode og kvantitativ metode. Denne oppgaven har som formål å belyse elevers generaliseringer og argumentasjon i arbeid med figurfølge- og tallfølgeoppgaver. Derfor vil det være nødvendig for meg å gå i dybden å se på hva elevene mener med det de sier. Kvalitativ metode var dermed passende for meg, fordi kvalitative metoder søker å gå i dybden og vektlegger betydning (Thagaard, 2013, s. 12). Som forsker i en kvalitativ studie vil jeg ha en påvirkning på utfallet. Både under innhenting av data og i analysen og fortolkningen av dataene vil jeg spille en viktig rolle (Thagaard, 2013, s. 22). Min påvirkningskraft under observasjonen og analysen vil jeg komme tilbake til.

3.1.1. Observasjon

For å kunne svare på mitt forskningsspørsmål er jeg avhengig av å samle inn data hvor jeg kan få innblikk i hvordan elever generaliserer og argumenterer for sine generaliseringer. For å innhente denne dataen er den kvalitative metoden observasjon hensiktsmessig, da observasjon innebærer at man ser, hører og opplever situasjonene der og da (Johannessen, Tufte & Christoffersen, 2010, s. 119). Det kunne også vært aktuelt å gjennomføre et intervju med elevene hvor de løser oppgaver og blir intervjuet om sine generaliseringsstrategier, men ved å gjennomføre et intervju ville jeg ikke fått innblikk i hvordan elevene argumenterer på samme måte som ved observasjon. Ved å gjennomføre observasjon kan jeg se hvordan elevene argumenterer til hverandre og i tillegg stille spørsmål dersom noe er uklart. Som Robson (2002, s. 310) skriver er det ikke nødvendig å spørre folk hva de tenker og føler under observasjon for å samle inn datamaterialet, men man kan ha muligheten til å spørre om noe er uklart.

Å dokumentere dataen som skal innhentes gjennom observasjon kan skje på mange måter, man kan både benytte seg av skjema, videoopptak og notater (Johannessen et al., 2010, s. 130). For å unngå at man ved å både observere og registrere samtidig går glipp av noe, har jeg valgt å benytte meg av opptak i form av både lyd og video. Ved å benytte meg av både video- og lydopptak unngår jeg at min hukommelse påvirker datainnsamlingen, som Johannessen et al. (2010, s. 132) påpeker at kan skje ved bruk av notater. Jeg vil i hovedsak ta utgangspunkt i det elevene sier og Thagaard (2013, s. 23) sier at opptak av samtaler gir materiale som egner seg for samtaleanalyse.

3.1.2. Min rolle som observatør

Å observere innebærer at man er til stede i situasjoner som er relevante for den dataen man ønsker å innhente (Johannessen et al., 2010, s. 119). Det betyr at jeg som observatør må ta noen valg om hvordan jeg skal observere aktørene. For å definere min rolle som observatør har jeg valgt å ta utgangspunkt i Gold (1958) sin kategorisering av feltroller. Gold (1958) skriver i sin artikkel om fire typer feltroller, som er sammensatt av observatørens åpenhet og i hvor stor grad observatøren er deltakende. Johannessen et al. (2010, s. 127) har skrevet om disse fire typene feltroller og har kalt dem ren observatør, tilstedeværende observatør, observerende deltaker og fullstendig deltaker. For å si noe om min rolle som observatør vil jeg i hovedsak bruke Johannessen et al. (2010) som bygger på Gold (1958) sin inndeling av feltroller.

Gold (1958) sin inndeling av feltroller er som sagt sammensatt av i hvilken grad observatøren er deltakende og observatørens grad av åpenhet. Holme og Solvang (1998, s. 105) påstår at et hovedskille for rollen som observatør går mellom åpen og skjult observasjon. Skjult observasjon innebærer at elevene ikke vet at man er en observatør (Johannessen et al., 2010, s. 126), for eksempel kunne jeg ha kommet inn i klassen som lærer uten å oppgi til elevene at jeg skal observere dem. Ved åpen observasjon vet derimot elevene at jeg observerer dem, noe som er nødvendig for å kunne få en godkjenning fra elevene og deres foresatte om at jeg kan gjennomføre datainnsamling hvor elevene blir observert (Johannessen et al., 2010, s. 126). Holme og Solvang (1998, s. 107) poengterer også at man ved åpen observasjon er avhengig av å bli akseptert i gruppa. Det kan være en utfordring, men ved å ha en rolle som observatør skal man bli akseptert i gruppa som observatør i motsetning til å prøve og være noe man ikke er. Det å gjennomføre datainnsamling med elever jeg ikke har kjennskap til fra før gjør også at jeg unngår en rollekonflikt, hvor jeg både er lærer og forsker. Å gjennomføre åpen observasjon åpner også for å stille spørsmål til elevene om hva de tenker og hvorfor de gjør som de gjør, noe som kan være hensiktsmessig og nødvendig i noen situasjoner. Jeg har nå argumentert for hvorfor åpen observasjon er mest hensiktsmessig for min rolle som observatør under datainnsamlingen, noe som utelukker de to feltrollene ren observasjon og deltakende observatør fra Gold (1958) sin kategorisering.

Videre er det i hvor stor grad man er delaktig som avgjør om man skal inneha rollen som observerende deltaker eller tilstedeværende observatør. Å plassere min rolle som deltakende eller ikke-deltakende synes jeg er en utfordring. Jeg ønsker å ha en ikke-deltakende rolle hvor elevene ikke trenger å forholde seg til meg som observatør, men jeg er likevel avhengig av å kunne stille noen spørsmål til elevene dersom de ikke forklarer hva de tenker og hva de gjør. Dermed vil jeg definere rollen min mer i retning av en deltakende rolle, hvor jeg samspiller med elevene ved å stille spørsmål når det er nødvendig. Å si at jeg er en deltakende observatør vil si at jeg har feltrollen observerende deltaker, og dersom jeg velger å si at jeg er en ikke-deltakende observatør vil jeg ha feltrollen tilstedeværende observatør (Johannessen et al., 2010, s.127). I sin definisjon av hva en tilstedeværende observatør er, skriver Johannessen et al. (2010, s. 128) at engasjementet hos observatøren kommer gjennom samtaler og intervjuer, men ikke som deltaker. Denne definisjonen åpner igjen mer for at jeg kan si at min feltrolle under observasjonen av elevene var en tilstedeværende observatør, fordi jeg ikke ønsker å være en deltaker i gruppa, men er avhengig av å kunne stille spørsmål når det er nødvendig. Jeg definerer altså min rolle som observatør som en tilstedeværende observatør, med forbehold om at jeg kan stille spørsmål til elevene om noe er uklart slik Johannessen et al. (2010, s. 128) definerer feltrollen tilstedeværende observatør.

3.2. Oppgaveutforming

For å kunne svare på forskningsspørsmålet og si noe om elevenes generalisering og argumentasjon i arbeid med henholdsvis figurfølgeoppgaver og tallfølgeoppgaver har jeg valgt å lage tre figurfølgesoppgaver og tre tallfølgeoppgaver (vedlegg 2). De tre figurfølgeoppgavene er satt sammen av to oppgaver med lineær vekst og en oppgave med geometrisk vekst. For å kunne sammenligne elevenes arbeid med de to settene med oppgaver består også tallfølgeoppgavene av to oppgaver med lineær vekst og en oppgave med geometrisk vekst. Jeg vil nå vise hvordan oppgavene er utformet og hvordan de kan løses.

3.2.1. Utforming av figurfølgeoppgaver

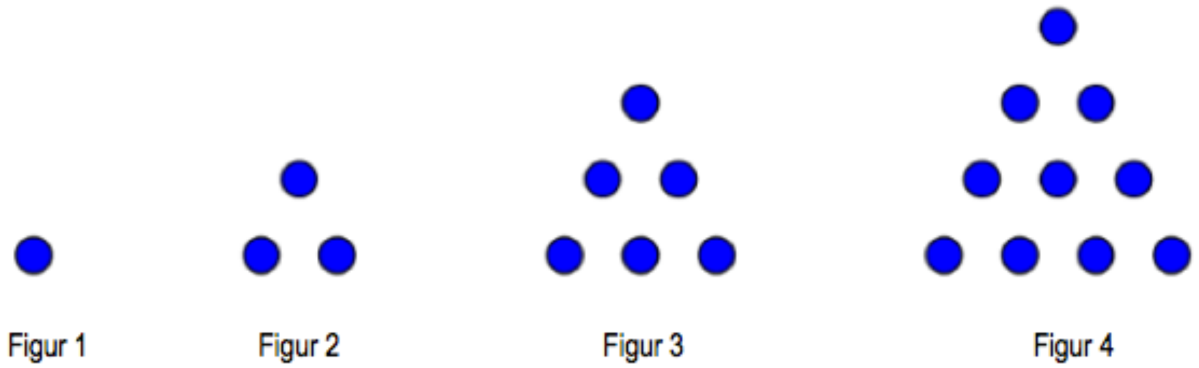
a. Hvor mange pinner trenger du for å lage figuren med 7 kvadrater?
b. Hvor mange pinner trenger man for å lage figuren med 8 kvadrater?
c. Hva med figuren med 14 kvadrater?
d. Hva med figuren med 100 kvadrater? Hvordan finner du ut det?

Figur 6: Kvadrater

Den første figurfølgen har jeg hentet fra Lannin (2005) sin artikkel og jeg har valgt å kalle oppgaven kvadrater. Figurfølgeoppgaven kvadrater er en oppgave med lineær vekst. I oppgaven får elevene utdelt figuren som er vist over. De får kun utdelt en figur, og har i utgangspunktet ingen forutsetning for å si noe om hvordan figuren vil øke. Da jeg gjennomførte piloten med denne oppgaven, opplevde jeg at elevene hadde problemer med å se hvordan figuren skulle utvikle seg. Oppgavene tilhørende figuren var i piloten utformet slik at jeg spurte etter «figur 7» og «figur 8». Jeg gjorde derfor en modifikasjon på oppgaven og omformulerte til «figuren med 7 kvadrater» og «figuren med 8 kvadrater». Å formulere seg slik forklarer for elevene at når jeg etterpå spør etter figuren med åtte kvadrater, må de bygge på figuren slik at det blir åtte kvadrater etter hverandre.

Oppgavene jeg har valgt tilhørende figuren skal legge til rette for at elevene kan bruke flere generaliseringsstrategier. De to første oppgavene, hvor jeg spør etter figuren med sju og åtte kvadrater, skal gi elevene mulighet til å bli kjent med figurfølgen. Det vil være naturlig at elevene bruker generaliseringsstrategien telle eller rekursiv for å finne svar på de to første oppgavene, da figurene de skal finne ligger så nære figuren de allerede har oppgitt (Stacey, 1989). I oppgave tre kan elevene fortsette med en rekursiv tilnærming, men ettersom figuren med 14 kvadrater har dobbelt så mange kvadrater som figuren med sju kvadrater, kan elevene prøve å bruke generaliseringsstrategien helobjekt. Helobjekt er en strategi som ikke vil gi riktig svar, da figurene vil overlappe slik jeg viste i teorikapittelet. Ved å legge inn oppgaven hvor elevene kan tro at de kan bruke generaliseringsstrategien helobjekt vil jeg kunne se om elevene knytter generaliseringen sin til figuren og oppdager at figuren vil overlappe. Elevene kan i den tredje oppgaven også bruke generaliseringsstrategien klumping, eksplisitt eller differansemetoden. Dersom elevene teller at de legger til tre pinner for hver gang kan de bruke generaliseringsstrategien klumping og legge sammen alle treerne de trenger å legge til, for så å legge til enheten av treere til antall pinner i figuren de har tatt utgangspunkt i. Generaliseringsstrategien klumping vil da gi riktig svar. Dersom elevene bruker differansemetoden på oppgave tre vil de multiplisere differansen mellom de påfølgende figurene, som er tre, med antall kvadrater i figuren de skal finne. I dette tilfellet ville de da multiplisert tre og 14. Elevene har da ikke tatt hensyn til den ekstra pinnen man trenger for å «lukke» det siste kvadratet, så strategien gir feil svar.

Den siste oppgaven hvor elevene skal finne antall pinner i figur nummer 100 har jeg valgt for å oppmuntre elevene til å prøve å finne en generell regel. Jeg forventer ikke at elevene skal finne en algebraisk regel og uttrykke den algebraisk, som for eksempel $F(n) = 3n + 1$, hvor n er nummeret på figuren og F(n) er antall pinner i figur n. Jeg forventer likevel at noen elever kan uttrykke en slik eksplisitt regel ved hjelp av ord. Elevene kan også bruke andre generaliseringsstrategier enn eksplisitt. De kan i utgangspunktet bruke de samme generaliseringsstrategiene som i foregående oppgave, men på grunn av at de skal finne antall pinner i figur nummer 100 vil det ikke være hensiktsmessig for elevene å bruke generaliseringsstrategien rekursiv. Generaliseringsstrategien rekursiv vil ta lang tid for elevene å regne ut og derfor vil det være hensiktsmessig å prøve en annen generaliseringsstrategi.

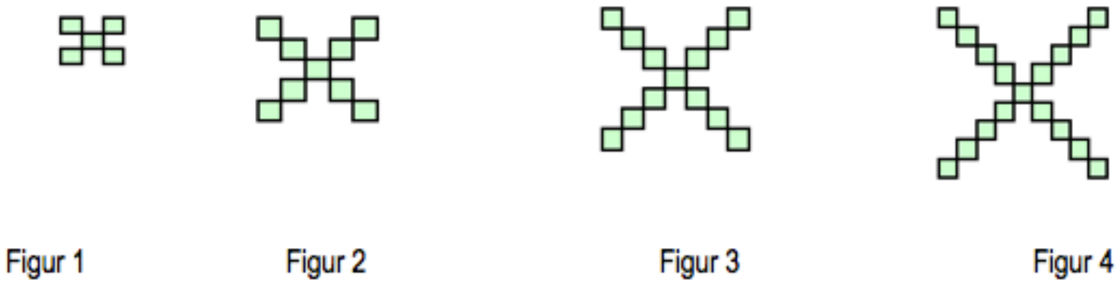


a. Hvor mange prikker er det i figur 5?
b. Hva med figur 7?
c. Hvor mange prikker er det i figur 14?
d. Hvor mange prikker det er i figur 100? Hvordan finner du ut det?

Figur 7: Trekanttall

Figurfølgeoppgaven trekanttall er en figurfølge med geometrisk vekst. Jeg har valgt å ha med en oppgave med geometrisk vekst for å få innblikk i om elevene tilpasser sine valg av generaliseringsstrategier på noen måte, eller om de angriper en figurfølge med geometrisk vekst på samme måte som figurfølgeoppgavene med lineær vekst. Elevene får i figurfølgeoppgaven utdelt figurfølgen over, som består av de fire første figurene i følgen. Elevene skal så løse oppgavene som står skrevet under figurfølgen. I likhet med figurfølgeoppgaven kvadrater skal de to første oppgavene til figurfølgen gi elevene mulighet til å bli kjent med følgen og det vil være nærliggende å tro at elevene også her velger generaliseringsstrategien telle eller rekursiv.

I forkant av datainnsamlingen var jeg skeptisk til om elevene kunne løse de to siste oppgavene tilhørende denne figurfølgen. Jeg fant likevel ut at det er interessant å se hvordan elevene vil angripe en slik oppgave og om de så begrensningene ved noen av generaliseringsstrategiene. I de to siste oppgavene skal elevene finne antall prikker i figur nummer 14 og 100. Den mest problematiske generaliseringsstrategien i denne figurfølgeoppgaven er helobjekt. Ettersom følgen har geometrisk vekst og dermed ikke samme differanse mellom hvert ledd, vil for eksempel det å doble antall prikker i figur nummer sju ikke gi antall prikker i figur nummer 14. Dersom elevene forholder seg til figuren og prøver å sette sammen to figurer, vil de se at generaliseringsstrategien helobjekt ikke vil gi riktig svar. Et problem oppstår også dersom elevene bruker differansemetoden, hvor de multipliserer differansen med figurnummeret, fordi det ikke er en fast differanse mellom antall prikker i de etterfølgende figurene i følgen.



a. Hvor mange klosser må man ha for å bygge figur 5?
b. Hva med figur 7?
c. Hvor mange klosser trenger man for å bygge figur 14?
d. Hvor mange klosser må man ha for å bygge figur 100? Hvordan finner du ut det?

Figur 8: Kryss

Den siste figurfølgen har jeg hentet fra artikkelen til Becker og Rivera (2006) og jeg har valgt å kalle figurfølgeoppgaven kryss. I likhet med figurfølgeoppgaven kvadrater har også denne figurfølgen lineær vekst. Derfor kan elevene bruke de samme generaliseringsstrategiene når de skal løse oppgavene tilhørende denne figurfølgen. Det som er forskjellen på de to figurfølgene med lineær vekst er oppbyggingen av figurene. Det er interessant å se på elevenes arbeid med begge disse figurfølgene, da oppbyggingen av figuren kan påvirke generaliseringsstrategien. I figurfølgen kryss kan elevene for eksempel telle antall klosser i figur nummer fire ved å se at det er fire klosser i hver av de fire armene i figuren og en kloss i midten. Det kan lede elevene til en eksplisitt generaliseringsstrategi, hvor de ser at de ser at antall klosser i hver arm er det samme som nummeret på figuren. De kan da se at de kan multiplisere nummeret på figuen med fire for å finne antall klosser i alle de fire armene, for så å legge til den ene klossen i midten ($F(n) = 4n + 1$).

Jeg vil påpeke igjen at jeg har valgt de samme tallene i oppgavene tilhørende de tre figurfølgene, fordi jeg da ikke trenger å ta hensyn til om tallene jeg har valgt i de ulike figurfølgeoppgavene påvirker elevenes valg av generaliseringsstrateg. Den tredje oppgaven tilhørende hver figurfølge har jeg, som nevnt tidligere, valgt for å avdekke om elevene knytter sin generalisering til figuren, eller om de kun forholder seg kun til tallene. Ved å spørre etter figur nummer 14 vil jeg se om elevene forholder seg til tallene og dobler antallet i figur nummer sju, eller om de forholder seg til figuren og ser hva dobling gjør med figuren.

3.2.2. Utforming av tallfølgeoppgaver

7, 14, 21, 28, 35 …

a. Hva er neste tall i tallfølgen?
b. Hva er tall nummer 7 i følgen?
c. Hva er tall nummer 12 i følgen?
d. Hva er tall nummer 100 i følgen? Hvordan finner du det?

Figur 9: Tallfølge 1

Den første tallfølgeoppgaven er en tallfølge med lineær økning, som jeg har valgt å kalle tallfølge 1. Tallfølgeoppgaven kan være lett for elevene dersom de gjenkjenner sjugangen. Før oppgaven blir gitt til elevene har jeg derfor en forventning om at elevene tidlig kan finne en eksplisitt fremgangsmåte for å finne svar på oppgavene tilhørende tallfølgen. I denne tallfølgeoppgaven er det mulig å bruke alle generaliseringsstrategiene bortsett fra telle, fordi generaliseringsstrategien telle forutsetter at det er en figur å telle på. I likhet med figurfølgeoppgavene skal de to første oppgavene tilhørende tallfølge 1 gi elevene mulighet til å bli kjent med tallfølgen. Det vil være naturlig for elevene å bruke generaliseringsstrategien rekursiv, men dersom elevene gjenkjenner tallfølgen som sjugangen vil de også kunne bruke generaliseringsstrategien eksplisitt. Det er spesielt at i tallfølge 1 kan alle generaliseringsstrategiene gi riktig svar. Både differansemetoden og helobjekt, som jeg har påpekt vil gi feil svar i de tre figurfølgene, vil gi riktig svar i denne tallfølgeoppgaven. Det kommer av at tallfølgen har en fast differanse, som er sju og ingen startverdi, altså tall nummer null ville vært null.

1, 4, 9, 16, 25 ...

a. Hva er neste tall i tallfølgen?
b. Hva blir tall nummer 7 i følgen?
c. Hva blir tall nummer 12 i følgen?
d. Hva med tall nummer 100 i følgen? Hvordan finner du det?

Figur 10: Tallfølge 2

Tallfølge 2 kan være en mer komplisert oppgave for elevene enn forgående oppgave grunnet at den har geometrisk vekst. Tallfølgen er kvadrattallene, og det kan forekomme at elevene gjenkjenner tallene i følgen som kvadrattallene og da vil bruke en eksplisitt strategi på alle de tilhørende oppgavene. Dersom elevene ikke gjenkjenner tallfølgen som kvadrattallene, kan oppgavene by på utfordringer for elevene. Det vil være nærliggende for elevene å finne svar på de to første oppgavene ved generaliseringsstrategien rekursiv. Den tredje oppgaven kan elevene også løse rekursivt, men det vil være svært tidkrevende for elevene å skulle finne tall nummer 100 i følgen ved generaliseringsstrategien rekursiv. Derfor ønsker jeg med disse tallfølgeoppgavene å se hvordan elevene løser oppgaven når mange av generaliseringsstrategiene ikke vil gi riktig svar og generaliseringsstrategiene som gir riktig svar kan være vanskelige å komme frem til.

7, 11, 15, 19, 23 ...

a. Hva er neste tall i tallfølgen?
b. Hva er tall nummer 7 i følgen?
c. Hva er tall nummer 12 i følgen?
d. Hva er tall nummer 100 i følgen? Hvordan finner du det?

Figur 11: Tallfølge 3

Den siste tallfølge jeg har valgt er igjen en tallfølge med lineær vekst og heter tallfølge 3. Tallfølgen skiller seg likevel fra tallfølge 1 ved at startverdien ikke er null, altså at tall nummer null i følgen ikke ville vært null, men tre. Det innebærer at generaliseringsstrategiene helobjekt og differansemetoden ikke vil lede til riktig svar uten modifikasjoner. På samme måte som i alle de andre følgeoppgavene skal de to første to oppgavene tilhørende tallfølge 3 gi elevene muligheten til å bli kjent med tallfølgen. Elevene kan se etter sammenhenger og mønster i hvordan følgen utvikler seg. Jeg forventer at elevene velger generaliseringsstrategien rekursiv for å finne svar på de to første oppgavene. Den tredje oppgaven er også mulig å løse med generaliseringsstrategien rekursiv, men det er mulig at elevene vil forsøke å bruke generaliseringsstrategien helobjekt for å finne tall nummer 12, fordi de allerede har funnet tall nummer seks. Problemet er som sagt at tallfølgen har en startverdi, og generaliseringsstrategien vil gi feil svar. Det samme problemet vil oppstå om elevene bruker differansemetoden. For å løse de to siste oppgavene tilhørende tallfølge 3 vil det være hensiktsmessig for elevene å bruke generaliseringsstrategien klumping eller eksplisitt. En eksplisitt strategi vil være å multiplisere tallnummeret med fire og legge til tre ($f(n) = 4n + 3$). For å finne tall nummer 12 i følgen ved å bruke generaliseringsstrategien klumping kan man ta utgangspunkt i tall nummer fem i følgen, som er 23. Man ser så at man kan legge til fire for hvert tall i følgen og finner at tall nummer 12 er sju mer enn tall nummer fem. Dermed finner man totalen av hva man skal legge til, som er fire multiplisert med sju, altså 28. Så legger man til enheten 28 til tall nummer fem i følgen og får 51 ($28 + 23$). Samme strategi kan man også bruke for å finne tall nummer 100 i følgen.

Den tredje oppgaven tilhørende tallfølgene skiller seg fra den tredje oppgaven tilhørende figurfølgene, ved at jeg spør etter tall nummer 12 i motsetning til figur nummer 14. Jeg har valgt et annet tall for at elevene ikke skal oppleve at jeg spør etter det samme og at de derfor skal bruke de samme generaliseringsstrategiene som de brukte i tredje oppgave tilhørende figurfølgene. Likevel har jeg valgt tallet 12 som ikke er veldig forskjellig fra tallet 14, i form av hvilke generaliseringsstrategier elevene kan velge. Jeg vil påpeke at jeg kunne brukt andre oppgaver i tillegg, for eksempel kunne jeg kommet med en hypotese og fått elevene til å vise hvorfor det er slik eller hvorfor det ikke er slik. Fokuset ville da vært kun på elevenes argumentasjon og jeg har valgt å fokusere på elevenes generalisering og se på hvordan de argumenterer for sine egne generaliseringer. I tillegg ville jeg ved en slik type oppgave ikke fått innblikk i om elevene selv tar initiativ til å argumentere for sin generaliseringer, da oppgaven er at de skal argumentere.

3.3. Praktiske forberedelser

I forkant av innsamlingen av datamateriale til masteroppgaven gjennomførte jeg en pilotundersøkelse. Gjennomføringen av pilotundersøkelsen hadde som hensikt å avdekke problemer med oppgavene i form av vanskelighetsgrad og tiden elevene trengte til å arbeide med oppgavene. Piloten ble gjennomført med en gruppe på tre elever i femte klasse. Jeg gjennomførte pilotundersøkelsen på en annen skole enn datainnsamlingen, for at elevene ved skolen jeg skulle gjennomføre datainnsamlingen ved ikke skulle arbeide med oppgavene før datainnsamlingen. Etter piloten gjorde jeg som tidligere nevnt noen modifikasjoner på formuleringene i oppgaveteksten.

Innsamlingen av datamaterialet til denne masteroppgaven ble gjennomført på femte trinn på en skole i Midt-Norge. Jeg hadde ingen kriterier for valg av skole, så jeg valgte en skole som var tilgjengelig for meg. Rektoren på skolen var positiv til at jeg kunne gjennomføre innsamling av datamaterialet til masteroppgaven innen matematikkfaget. Jeg sto fritt til å velge klasse og valgte da femte klasse. Det er flere grunner til at jeg valgte femte klasse. For det første ønsket jeg en klasse som ikke hadde arbeidet med figurfølgeoppgaver og tallfølgeoppgaver. I tillegg ønsket jeg en klasse jeg ikke hadde kjennskap til fra tidligere, da jeg ønsket å kun være forsker og ikke lærer.

For å kunne innhente informasjon om elevers generalisering og argumentasjon var jeg avhengig av at elevene fortalte hva de gjorde og ved å sette dem sammen i grupper la jeg til rette for at elevene kunne snakke sammen og dermed forklare sine generaliseringer og argumentere for dem. At elevene snakket sammen var svært viktig for å kunne si noe om argumentasjon og om hvorvidt gruppa så behovet for argumentasjon. Det var viktig at elevene var trygge i settingen og sammen med de andre elevene i gruppa. Klassens matematikklærer hjalp meg med å velge ut elever da hun kjenner elevene og hvordan de kan arbeide sammen i grupper. Uavhengig av kjønn og hvilket nivå elevene var på matematisk valgte vi ut totalt ni elever som skulle delta i datainnsamlingen. I kvalitativ metode er fokuset på å gå i dybden på et lite utvalg (Thagaard, 2013, s. 12), derfor valgte jeg å observere kun ni elever. Jeg anså ni elever som overkommelig med tanke på etterarbeid i form av transkripsjon og analyse, men at det likevel ville gi et variert datamateriale. Videre ble de ni deltakerne delt inn i tre grupper med tre elever i hver gruppe. Gruppestørrelsen ble da liten nok slik at alle fikk muligheten til å bidra, samtidig var det flere enn to slik at det er større sjanse for at elevene hadde forskjellige synspunkter og at det derfor kunne oppstå en diskusjon.

I forkant av observasjonen av elevgruppene forberedte jeg meg ved å lage noen spørsmål som jeg kunne stille elevene underveis i oppgaveløsingen. Spørsmålene kunne jeg stille dersom elevene ikke i tilstrekkelig grad forklarte hva de gjorde og hvorfor de gjorde det. Mason (1996) poengterer at det kan være fristende å stille elever spørsmål som skal lede elevene til strategien man selv tenker er best, som ikke nødvendigvis er elevenes strategi. Derfor prøvde jeg å utforme spørsmålene slik at de i minst mulig grad skulle være ledende for elevene. For å unngå at elevene skulle oppfatte spørsmålene som ledende var jeg også oppmerksom på at spørsmålene ikke bare måtte brukes når elevene gjorde noe galt eller bare når de gjorde noe riktig. Noen av spørsmålene jeg forberedte var: Kan du forklare hva du gjør? Hvorfor blir det …? Kan du overbevise de andre?

3.4. Gjennomføring

For å gjennomføre observasjonen ble elevgruppene bestående av tre elever tatt med på et eget rom, da jeg ikke hadde behov for å observere hele klassen. Hver gruppe hadde avsatt inntil en time, noe som jeg ut i fra oppgavenes omfang og piloten, anså som nok tid. Det viste seg å bli akkurat nok tid. Gruppene ble tatt ut fra klassen, men observasjonen ble alltid gjennomført når klassen hadde matematikkundervisning, slik at det ikke gikk utover andre fag. Det var viktig for meg at elevene var trygge i situasjonen under observasjonen. Jeg startet derfor med å fortelle om hvorfor jeg skulle observere dem mens de jobbet med oppgavene og at det kun var jeg som skulle høre og se på opptakene. Videre poengterte jeg også at jeg var interessert i samtalen dem imellom for å få innblikk i hvordan de kommer frem til svaret og dermed ikke så opptatt av selve svaret. Før elevene gikk i gang med oppgaveløsingen fortalte jeg om hvordan opptaksutstyret ble brukt, da de viste interesse for hvordan og hvorfor jeg skulle ta opptak av det de sa og gjorde fra de kom inn i rommet. Under observasjonen var elevene engasjerte og det virket som de tidvis glemte at de ble observert. Dynamikken i gruppene varierte, og i en gruppe var det bare to av elevene som bidrog i store deler av oppgaveløsningen. Det var da vanskelig å avgjøre om jeg skulle blande meg inn og prøve å inkludere eleven som ikke bidro i oppgaveløsningen, men etter hvert tok de to andre elevene selv tak og prøvde å inkludere eleven.

3.5. Analysemetode

Jeg vil nå forklare hvordan jeg har analysert datamaterialet jeg har innhentet. Datamaterialet bestod av tre timer med lyd og videoopptak og jeg har bearbeidet materialet gjennom mange runder med koding. Et fellestrekk for de fleste kvalitative tilnærminger er at de dataene forskeren analyserer, uttrykkes i form av tekst (Thagaard, 2013, s. 23). Slik er det også i mitt forskningsprosjekt, så etter å ha innhentet datamaterialet, altså lydopptak og videoopptak begynte jeg med å transkriberte elevenes uttalelser Jeg brukte videofilene til å transkribere ut i fra slik at jeg også kunne skrive ned spesielle ting jeg så, for eksempel blikkene elevene utvekslet, om noen virket usikre eller om elevene tegnet noe på arkene. Dette gjorde jeg for å få et overblikk over situasjonen i transkripsjonen. Deretter startet jeg kodingsprosessen.

Kvalitativ forskning er ingen lineær prosess og jeg har gjennomført koding i flere runder (Thagaard, 2013, s. 11). Jeg brukte transkripsjonen til å kode ut i fra, og brukte da Excel, fordi det gir muligheten til å kode i flere runder. I første runde med koding prøvde jeg å kode datamaterialet åpent, men ettersom jeg hadde lest teori om generaliseringsstrategier var det vanskelig å ikke få fokus på det. Derfor fortsatte jeg i neste runde med å kode ut i fra rammeverket til Lannin (2005). Jeg valgte å kode ut i fra Lannin (2005) sitt rammeverk for generalisering, fordi det var et rammeverk jeg var kjent med fra før. Lannin (2005) sitt rammeverk består av de fem generaliseringsstrategiene; telle, rekursiv, helobjekt, gjett og sjekk og kontekstuell. Under kodingen ut i fra Lannin (2005) sitt rammeverk oppdaget jeg at det ikke dekte alle de generaliseringsstrategiene jeg fant i datamaterialet mitt. Derfor valgte jeg å hente noen generaliseringsstrategier fra rammeverk i andre artikler. Jeg fant først generaliseringsstrategien klumping i rammeverket til Lannin et al. (2006). I tillegg bidro rammeverket til Lannin et al. (2006) med generaliseringsstrategien eksplisitt, som jeg valgte å bytte ut med generaliseringsstrategien kontekstuell fra Lannin (2005) sitt rammeverk, da den i utgangspunktet kun kan brukes på figurfølger og ikke tallfølger. I tillegg til disse to generaliseringsstrategiene hentet jeg differansemetoden fra Stacey (1989) sin artikkel. Etter å ha tilføyd generaliseringsstrategiene klumping, eksplisitt og differansemetoden i rammeverket mitt kunne jeg kategorisere alle generaliseringsstrategiene jeg hadde funnet i datamaterialet. Oversikt over alle generaliseringsstrategiene jeg brukte i rammeverket mitt er vist i tabell 3.

Generaliseringsstrategi	Forklaring
Telle	Elevene teller antallet i figuren. (Forbeholdt figurfølgeoppgaven, da man ikke kan telle uten en figur.)
Rekursiv	Bygger påfølgende ledd på et eller flere foregående ledd ved å addere differansen.
Helobjekt	Bruker en del som en enhet for å finne en større enhet ved å multiplisere, eventuelt adderer.
Gjett og sjekk	Gjetter en regel og sjekker om den stemmer. Eventuelt bare gjetter en regel.
Differansemetoden	Multiplisere differansen mellom to påfølgende ledd med nummert på leddet i følgen man skal finne.
Klumping	Ta utgangspunkt i et tidligere ledd og legger til en enhet.
Eksplisitt	Lage en regel som umiddelbart beregner et svar gitt nummeret på leddet i figurfølgen eller tallfølgen.

Tabell 3: Rammeverk generalisering

I utgangspunktet er alle generaliseringsstrategiene i tabell 3 hentet fra rammeverk laget for å analysere arbeid med figurfølger, ikke tallfølger. Likevel vil jeg også bruke dem til å analysere elevenes arbeid med tallfølger, bortsett fra generaliseringsstrategien telle. Tellestrategien er forbeholdt figurfølgene, fordi den innebærer at man må telle på en figur. De resterende seks generaliseringsstrategiene i tabeller er ikke forbeholdt arbeid med figurfølge og krever ikke at elevene må knytte generaliseringen sin til figuren.

I neste runde med koding, kodet jeg transkripsjonene ut i fra Becker og Rivera (2006) sin numeriske og figurative generalisering, for også å få en indikasjon på om elevene forholdt seg hovedsakelig til figurene eller tallene i figurfølgeoppgavene. Det er kun relevant å se på hvorvidt elevene generaliserer numerisk eller figurativt når elevene arbeider med figurfølgeoppgavene. Det kommer av at å generalisere figurativt innebærer å forholde seg til figuren og i tallfølgeoppgaver er det ingen figur å forholde seg til. For å avgjøre om elevene forholdt seg til figuren i figurfølgeoppgaven så jeg etter at elevene forklarte sin strategi ut i fra figurene eller tallene i oppgaven. I tillegg så jeg på hvorvidt elevene greide å argumentere for sine generaliseringer, fordi Becker og Rivera (2006) skriver at elever som generaliserer figurativt er i stand til å argumentere gyldig for sine generaliseringer. Ved å se på disse to faktorene ville jeg avgjøre om elevene generaliserer hovedsakelig numerisk eller figurativt. Det er også viktig å påpeke at jeg bruker begrepen hovedsakelig numerisk og hovedsakelig figurativ, fordi elevene ikke nødvendigvis forholder seg kun til tallene eller kun til figuren.

Etter å ha kodet transkripsjonen ut i fra rammeverket mitt for generaliseringsstrategier og sett om elevene generaliserte hovedsakelig numerisk eller figurativt, gikk jeg videre til å se på hvordan elevene argumenterte for sine generaliseringer. Ettersom jeg hadde kodet transkripsjonen flere ganger tidligere ville jeg nå gå over til å kode rett fra videoopptaket. Under kodingen av elevenes generalisering hadde jeg fått et inntrykk av at elevene ikke argumenterte så mye, derfor begynte jeg med å kode videoopptaket ved at jeg skrev ned det jeg oppfattet som argumentasjon og hva jeg oppfattet som et forsøk på argumentasjon. I tillegg skrev jeg ned når en elev ikke argumenterte for sin generalisering. Videre valgte jeg å bruke Stylianides (2008) sitt rammeverk for generalisering til å kategorisere argumentasjonen jeg hadde funnet i videoopptaket. For å kategorisere argumentasjonen jeg hadde funnet i videoopptaket ut i fra Stylianides (2008) sitt rammeverk for argumentasjon gikk jeg tilbake til transkripsjonen for å se på elevenes argumentasjon. I tillegg til argumentasjon for generaliseringsstrategiene forekom det at elevene argumenterte ved å gjenta regneoperasjonene sine. Jeg har derfor valgt å legge til en kategori i mitt rammeverk for argumentasjon som jeg kaller argumentasjon ved regneoperasjon. Jeg har også brukt en av Lannin (2005) sine kategorier, ingen argumentasjon, for å få en oversikt over når elevene ikke argumenterer. Rammeverket jeg endte opp med å kode ut i fra er presentert i tabell 4.

Argumentasjonskategorier	**Beskrivelse**
Ingen argumentasjon	Ingen argumentasjon.
Argumentasjon ved regneoperasjon	Argumenterer ved å gjenta regneoperasjonen de har utført.
Empirisk argumentasjon	Argumenterer med at det er riktig for noen eksempler.
Rasjonale	Argumentasjon som ikke refererer til sannheter i fellesskapet.
Generisk eksempel	Argumenterer ved å bruke et spesielt tilfelle som en representasjon for det generelle.
Demonstrasjon	Argumentasjon som ikke avhenger av en representasjon av et spesielt tilfelle.

Tabell 4: Rammeverk argumentasjon

For å få en oversikt over generaliseringsstrategiene og argumentasjonen til elevene i de ulike oppgavene lagde jeg en tabell med oversikt over generaliseringsstrategiene (eksempel i tabell 5) og en tabell med oversikt over argumentasjon (eksempel i tabell 6). I tabellen med oversikt over generaliseringsstrategiene krysset jeg av for alle generaliseringsstrategiene gruppen var innom i løpet av oppgaven. I tabellen med oversikt over argumentasjonen krysset jeg også av for alle argumentasjonskategoriene jeg fant i hver oppgave. I hvilken grad elevene generaliserte hovedsakelig numerisk eller figurativt så jeg det ikke som nødvendig å lage en tabell over, da jeg fikk god oversikt over dette gjennom kodingen av transkripsjonene.

	Generaliseringsstrategi	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d
Gruppe 1	Telling	X			X	X				X			
	Rekursiv		X			X	X				X		
	Helobjekt			X	X			X				X	X
	Gjett								X				
	Gjett og sjekk								X				
	Klumping												
	Eksplisitt								X				

Tabell 5: Utklipp fra oversiktstabell generaliseringsstrategier

	Argumentasjonskategorier	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d
Gruppe 1	Ingen argumentasjon	X	X		X			X		X		X	
	Argumentasjon ved regneoperasjon			X		X	X						X
	Empirisk argumentasjon										X		
	Rasjonale												
	Generisk eksempel								X				
	Demonstrasjon												

Tabell 6: Utklipp fra oversiktstabell argumentasjon

Etter å ha laget en oversikt over generaliseringsstrategiene og argumentasjonen elevene brukte i alle oppgavene, så jeg at det var noen typiske trekk i hvordan elevene generaliserte i de ulike oppgavene. I tillegg hadde jeg i transkripsjonen skaffet meg en god oversikt over hvorvidt elevene generaliserte hovedsakelig numerisk eller figurativt. Videre så jeg også noen spesielle tilfeller i valg av generaliseringsstrategier. Mine funn ble da basert på typiske trekk og spesielle trekk i valg av generaliseringsstrategier. Disse funnene knyttet jeg så til argumentasjonen elevene brukte i de ulike tilfellene og hvorvidt elevene generaliserte hovedsakeligfigurativt eller numerisk.

3.6. Validitet og reliabilitet

En viktig del av et forskningsprosjekt er å reflektere rundt validiteten og reliabiliteten til prosjektet. Validitet handler om hvorvidt tolkningen av dataen man har samlet inn representerer det som virkelig skjer (Thagaard, 2013, s. 204). I en kvalitativ studie er det vanskelig å påstå at det man tolker ut i fra datamaterialet er det som skjer i virkeligheten, nettopp fordi jeg som forsker må tolke elevutsagnene i mitt datamateriale. Thagaard (2013, s. 205) drar frem begrepet gjennomsiktighet som viktig for validiteten i en kvalitativ studie. Jeg prøver å gjøre mine oppgave gjennomsiktig for leseren ved å tydeliggjøre mine tolkninger i analysen som jeg legger til grunn for mine konklusjoner.

Reliabilitet er knyttet til datamaterialet man henter inn og om man kan gjennomføre en lik undersøkelse å få det samme datamaterialet (Johannessen et al., 2010, s. 229). For en kvalitativ studie er det ikke hensiktsmessig å stille slike krav, da det kan være mange faktorer som påvirker observasjonen jeg har gjort, som ikke kan gjenskapes av andre. Det er ikke mulig å gjennomføre en lik datainnsamling, blant annet fordi jeg som observatør påvirker elevene og spørsmål jeg stiller kan påvirke dem. Min rolle som observatør vil også bygge på mine tidligere erfaringer og jeg vil derfor kunne tolke en situasjonen annerledes. Alle disse er faktorer som kan påvirke dataen jeg samler inn, derfor vil det være vanskelig å gjenskape en lik datainnsamling og få samme resultat. For å styrke reliabiliteten i denne oppgaven har jeg gjennom hele oppgaven prøvd å gi inngående beskrivelser av konteksten og en detaljert og åpen beskrivelse av fremgangsmåten min gjennom hele forskningsprosjektet.

Johannessen et al. (2010) påpeker at observasjon er situasjonsavhengig og ettersom jeg observerte ni femteklassinger er det i hovedsak de ni elevene jeg kan si noe om og ikke andre femteklassinger. Likevel kan forskningen og det jeg finner ut i denne oppgaven være et bidrag til forskningsområdet og noe andre forskere kan bygge videre på senere.

3.7. Etiske refleksjoner

Mine refleksjonen rundt etiske problemer startet da jeg søkte om godkjennelse av prosjektet mitt til norsk senter for forskningsdata (NSD). Da prosjektet var blitt godkjent tok jeg kontakt med skolen, hvor elevene fikk utdelt et samtykkeskjema (Vedlegg 1). I samtykkeskjemaet fikk elevene og deres foresatte informasjon om forskningsprosjektet, hva det innebærer å delta og hva som ville skje med informasjonen om dem. Elevene fikk også informasjon om at de når som helst kunne trekke seg fra forskningsprosjektet uten noen grunn. Foreldre eller foresatte kunne skrive under på at de samtykket i elevens deltakelse i prosjektet og at eleven var informert og også ga sitt samtykke.

Datamaterialet jeg har innhentet til dette masterprosjektet innebærer videoopptak og lydopptak, som vil bli slettet etter prosjektets slutt, i henhold til retningslinjene til NSD. I transkripsjonene av elevenes samtaler og utdragene i denne oppgaven er elevenes navn endret for å anonymisere dem.

Den nære kontakten mellom forsker og aktørene reiser en rekke etiske utfordringer (Thagaard, 2013, s. 19). Selv om jeg skulle innhente datamaterialet i løpet av en liten tidsperiode (en time per gruppe), oppstår det en unaturlig situasjon hvor elevene er oppmerksomme på at de blir observert. Deltakende observasjon er i prinsippet basert på subjekt-subjekt-forhold mellom forsker og aktørene i forskningsprosjektet (Thagaard, 2013, s. 19). Konsekvensene av dette prinsippet innebærer en oppfatning av at både forsker og deltaker påvirker forskningsprosessen (Thagaard, 2013, s. 19). Som diskutert tidligere i metodekapittelet så jeg det som nødvendig å ha muligheten til å stille noen spørsmål om noe virket uklart. Om det påvirket elevene videre i deres arbeid er vanskelig å si, men jeg hadde i forkant, som nevnt tidligere laget noen spørsmål som hadde som mål å ikke lede elevene til å tro at de gjorde noe feil eller riktig. På den måten ønsket jeg å påvirke elevene og datamaterialet minst mulig.

4. Analyse

I denne delen av oppgaven skal jeg se nærmer på enkeltepisoder fra datamaterialet for å belyse forskningsspørsmålene mine: *Hvordan generaliserer tre grupper med elever i møte med figur- og tallfølgeoppgaver? Hvordan argumenterer elevene for sine generaliseringer?* For å kunne svare på forskningsspørsmålene mine vil jeg bruke rammeverkene for generalisering og argumentasjon som jeg skisserte i metodekapittelet.

Dette kapittelet vil jeg dele inn i to deler, hvor den første delen er organisert etter typiske trekk i elevenes generaliseringsstrategier og den andre gelen er organisert etter spesielle tilfeller i elevenes generaliseringsstrategier. Jeg vil begynne med å presentere den typiske måten elevene generaliserer og argumenterer på i arbeid med figurfølgeoppgavene og tallfølgeoppgavene i datamaterialet mitt. Jeg har valg å vise utdrag fra en gruppes arbeid med en av figurfølgeoppgavene og utdrag fra en gruppes arbeid med en av tallfølgeoppgavene for å vise den typiske generaliseringen og den typiske argumentasjonen jeg har funnet i datamaterialet. Etter å ha vist de typiske trekkene i datamaterialet vil jeg vise tre av de spesielle tilfellene jeg har funnet i elevens arbeid med følgeoppgavene. Jeg har valgt ut de spesielle tilfellene på bakgrunn av at det skjer noe spesielt enten i argumentasjonen eller i oppgaveformuleringen, som gjør at elevene velger andre generaliseringsstrategier enn de typiske trekkene. Jeg vil påpeke at de tre spesielle tilfellene ikke er de eneste tilfellene som skiller seg fra tendensen i datamaterialet, men at de tre spesielle tilfellene er valgt ut, fordi de viser hva som får elevene til å velge andre generaliseringsstrategier.

4.1. Typiske trekk

4.1.1. Tendensen i figurfølger

Jeg vil nå vise de typiske generaliseringene og den typiske argumentasjonen elevene bruker i arbeid med figurfølgeoppgavene i datamaterialet mitt. De typiske trekkene i valg av generaliseringsstrategi, som jeg nå skal vise, finner jeg i seks av ni tilfeller i datamaterialet. Det vil si at elevene i stor grad bruker de samme generaliseringsstrategiene på tvers av gruppene og figurfølgeoppgavene. De typiske trekkene i valg av generaliseringsstrategier er at elevene begynner med å telle på figuren for å finne svar på første oppgave og deretter går over til en rekursiv strategi. Før elevene på de to siste oppgavene bruker en form for generaliseringsstrategien helobjekt (tabell 7). Generaliseringsstrategiene elevene velger virker å henge sammen med om elevene generaliserer numerisk eller figurativt. På de to første oppgavene generaliserer elevene hovedsakelig figurativt, mens de går over til å generalisere hovedsakelig numerisk i de to siste oppgavene. Det innebærer at elevene generalisere hovedsakelig numerisk når de bruker generaliseringsstrategien helobjekt i figurfølgeoppgavene. Et typisk trekk ved elevenes arbeid med figurfølger er altså at elevene går fra figurativ til numerisk generalisering.

	Generaliseringsstrategier
Oppgave a)	Telle
Oppgave b)	Rekursiv
Oppgave c)	Helobjekt
Oppgave d)	Helobjekt

Tabell 7: Typiske generaliseringsstrategier, figurfølgeoppgavene

I datamaterialet mitt er det også noen måter elevene argumenterer på som er typiske. I utdragene skal jeg vise eksempler på to argumentasjonskategorier som er typiske i datamaterialet mitt. Det er de to kategoriene ingen argumentasjon og argumentasjon ved regneoperasjon. Disse to argumentasjonskategoriene går i stor grad igjen i datamaterialet mitt. Kategorien ingen argumentasjon er svært fremtredende når verken jeg eller noen andre i gruppa stiller spørsmål ved generaliseringen eleven gjør, altså tar ikke eleven selv initiativ til å argumentere for generaliseringen sin. Kategorien argumentasjon ved regneoperasjon er i stor grad fremtredende når elevene får spørsmål om sine generaliseringer og samtidig har generalisert feil. I mange tilfeller blir argumentasjon ved regneoperasjon godkjent av gruppa og de går dermed videre til neste oppgave.

Utdragene som er et eksempel på typisk generalisering og argumentasjon, er hentet fra gruppe 1 sin dialog under arbeid med oppgaven kvadrater. Elevene har fått utdelt figuren på neste side med tilhørende oppgaver (figur 12). Første oppgave elevene har løst er å finne antall pinner man trenger for å bygge figur nummer sju. De har gjennom å telle pinnene i figuren funnet at de trenger 22 pinner for å bygge figur nummer sju, de har altså brukt generaliseringsstrategien telle. Videre har elevene funnet antallet pinner de trenger for å lage figuren med åtte kvadrater gjennom å legge til tre pinner på figuren under, altså generaliseringsstrategien rekursiv. I utdraget på neste side har elevene kommet til oppgaven hvor de skal finne antall pinner i figur nummer 14.

Figur 12: Figur nummer sju fra oppgaven kvadrater.

21. Martha: Jeg tenker at det må bli 44
    (De andre nikker.)
22. Forsker: Kan dere forklare hvorfor?
23. Mette: Fordi at man bare ganger 22 med to.

I utdraget over påstår Martha i uttalelse 21 at man må ha 44 pinner for å bygge figur nummer 14. Uttalelse 23 tyder på at Mette tar utgangspunkt i at det er 22 pinner i figur nummer sju og ettersom sju multiplisert med to er 14 så må man kunne multiplisere 22 med to for å finne antall pinner i figur nummer 14. En slik generalisering faller inn under generaliseringsstrategi helobjekt, fordi Mette tar utgangspunkt i en del som en enhet og multipliserer for å finne svaret. Som Lannin (2005) også påpeker leder ikke denne strategien alltid frem til riktig svar, slik som i dette tilfellet hvor svaret de kommer frem til er feil. I tillegg til at uttalelse 23 viser at Mette bruker generaliseringsstrategien helobjekt, viser den også at generaliseringen er hovedsakelig numerisk. Jeg vil si at generaliseringen er numerisk, fordi Mette ikke uttrykker noen tilknytting til figuren, men bruker tall de har funnet fra før for å finne svar på oppgaven. Gruppa har da gått fra å forholde seg til figuren, da de telte antall pinner i figur nummer sju, til å forholde seg til tallene de har funnet tidligere i oppgavene, altså generaliserer de hovedsakelig numerisk i dette utdraget.

Det er verdt å merke seg at etter at Martha i uttalelse 21 foreslår at svaret blir 44 nikker de andre i gruppa. Det kan tyde på at elevene ikke ser det som nødvendig at Martha argumentere for generaliseringen sin. Uttalelse 23 svarer Mette på hvorfor det blir 44, med å si at de multipliserer 22 med to. Dette utsagnet kan være Mettes måte å forklare generaliseringsstrategien helobjekt på, men ettersom hun gjør dette ved å si hvilken regneoperasjon de har gjennomført vil jeg kategorisere det som argumentasjon ved regneoperasjon. Det at Mette ikke utdyper videre hvordan de har kommet frem til svaret 44 kan igjen tyde på at elevene ikke ser det som nødvendig å argumentere for generaliseringen sin. Man kan også tolke uttalelse 23 som at Mette ikke kan forklare generaliseringen til Martha og derfor svarer med å gjengi regneoperasjonen. I alle tilfeller havner argumentasjonen i kategorien argumentere ved regneoperasjon, fordi Mette ikke argumenterer for generaliseringsstrategien, men ved å gjenta regneoperasjonen. Å argumentere slik er i stor grad gjennomgående i datamaterialet mitt. I utdraget ser man også at elevene ikke stiller spørsmål til Marthas uttalelse 21 og at det er forskeren som stiller spørsmål. Det virker altså ikke som at elevene er kritiske til andres generaliseringer.

I utdraget under fortsetter elevene i gruppe 1 med oppgaven kvadrater. Elevene skal finne antall pinner man trenger for å lage figuren med 100 kvadrater.

24. Martha: Hva med figur 100?
25. Harald: Det går an å tenke at vi har 10 kvadrater, bare legge på tre til, så kan vi ta 10 ganger 10.

Alle elevene blir stille og begynner å tegne for seg selv. Elevene teller ulikt og diskuterer hva som er riktig.

37. Mette: Jeg fikk 31.
38. Harald: Okay, da tar vi 31 ganger 10.
39. Mette: 31 ganger 10 blir 310.

I uttalelse 25 kommer Harald med et forslag som ligner på strategien de brukte for å finne antall pinner i figur nummer 14. Likevel er det en liten forskjell, fordi Harald vil finne antall pinner i figur nummer 10 for så å multiplisere for å finne antall pinner i figur nummer 100. Generaliseringsstrategien faller i likhet med forrige inn under helobjekt, da Harald bruker en del som en enhet og multipliserer for å finne svaret. I motsetning til i forrige utdrag, hvor elevene skulle finne antall pinner i figur nummer 14, snakker elevene nå om en figur. I uttalelse 25 forklarer Harald at han vil finne antall pinner i 10 kvadrater for så å multiplisere med 10. Han forholder seg her til figur nummer 10, men bruker tallene til å finne antall pinner i figur nummer 100. Ettersom Harald går over til å regne bare med tallene og ikke knytter svaret de finner til utformingen av figuren vil jeg si at Harald tilslutt generaliserer hovedsakelig numerisk i dette utdraget.

I utdraget over forklarer Harald sin strategi i uttalelse 25, hvor han forklarer hvordan han vil finne antall pinner i figur nummer 100 ved hjelp av figur nummer 10. Jeg vil ikke kategorisere denne uttalelsen som argumentasjon, da Harald forklarer hva han gjør og ikke argumenterer for hvorfor. Jeg vil derfor kategorisere argumentasjonen for generaliseringsstrategien som ingen argumentasjon. Det er verdt å merke seg at ingen spør etter noen argumentasjon eller stiller seg kritisk til verken generaliseringen eller svaret Harald finner. I tillegg vil jeg nevne at elevene ikke uttrykker seg skriftlig i arbeid med figurfølgeoppgavene, men at store deler av arbeidet de gjør foregår muntlig.

4.1.2. Tendensen i tallfølger

Her vil jeg vise typiske generaliseringer og typisk argumentasjon elevene bruker i arbeid med tallfølgeoppgavene. Når jeg skal se på de typiske trekkene i tallfølgeoppgavene velger jeg å ikke ta med oppgaven tallfølge 1. Tallfølge 1 er en oppgave som skiller seg fra de andre oppgavene med tanke på utforming og derfor også generaliseringsstrategier, noe jeg vil komme tilbake til når jeg skal presentere noen spesielle tilfeller senere i analysen. Ved å ekskludere tallfølge 1 forekommer de typiske generaliseringsstrategiene i arbeid med tallfølgeoppgavene i fem av seks tallfølgeoppgaver i mitt datamateriale. De typiske trekkene i valg av generaliseringsstrategi i arbeid med tallfølger er at elevene starter med generaliseringsstrategien rekursiv og holder seg til den inntil de skal finne tall nummer 100 i følgen. Elevene går da over til generaliseringsstrategien helobjekt (tabell 8). Elevene venter altså til de skal finne tall nummer 100 før de bytter fra en ikke-eksplisitt generaliseringsstrategi til en eksplisitt generaliseringsstrategi.

	Generaliseringsstrategier
Oppgave a)	Rekursiv
Oppgave b)	Rekursiv
Oppgave c)	Rekursiv
Oppgave d)	Helobjekt

Tabell 8: Typiske generaliseringsstrategier, tallfølgeoppgavene

I tillegg til typiske generaliseringsstrategier vil utdragene vise eksempler på det typiske trekket når det gjelder elevenes argumentasjon for sine generaliseringer i arbeid med tallfølgeoppgaver. Det som er gjennomgående og som utdragene vil vise er at eleven ikke argumenterer for sine generaliseringer. Det finnes noen tilfeller i datamaterialet, hvor elevene enten argumenterer ved regneoperasjon eller empirisk argumentasjon, men det forekommer svært sjeldent, og da i tilknytning til at jeg stiller spørsmål til elevene om generaliseringen deres. Den gjennomgående argumentasjonskategorien er altså ingen argumentasjon.

Utdragene jeg har valgt for å eksemplifisere de typiske trekkene i elevers generaliseringer og argumentasjon i arbeid med tallfølgeoppgavene, er hentet fra gruppe 3 sitt arbeid med oppgaven tallfølge 2. I oppgaven tallfølge 2 har elevene fått utdelt tallfølgen 1, 4, 9, 16, 25, altså kvadrattallene, men ingen av gruppene gjenkjente følgen som kvadrattallene. I utdraget under begynner elevene med oppgaven hvor de skal finne neste tall i tallfølgen.

176. Sverre: Hva er neste tall i tallfølgen?
177. Olav: Hæ?
178. Sverre: De har lagt på tre der. Og her har de lagt på fem. Der har de lagt på sju.
179. Olav: Ja, men jeg skjønner det ikke.
180. Sverre: På en har de lagt på tre så det blir fire. På fire har de lagt på fem så det blir ni. Også på ni har de lagt på sju så da blir det 16. Her har du lagt på ni. (Peker på tallet 25 i tallfølgen.)
181. Ragnhild: Tre, fem, sju, ni.
182. Olav: Å, det er to. Det går opp med to. Tre, fem, sju, ni.
183. Sverre: Ja, så der blir det 11.
184. Olav: Ja, så blir det 13.
185. Sverre: Ja, men 25 pluss 11.

I utdraget over begynner elevene med første oppgave tilhørende tallfølge 2, hvor de skal finne neste tall i tallfølgen. Elevene begynner med å lete etter en sammenheng mellom tallene og i uttalelse 178 ser Sverre hvordan tallfølgen øker. I uttalelse 182 påpeker Olav at differansen øker med to for hver gang. I uttalelse 183 sier Sverre at det vil øke med 11 og i uttalelse 185 legger han sammen 25 og 11 for å finne tall nummer seks i tallfølgen. Dermed har de en rekursiv strategi for å komme i gang med oppgaven, fordi de bygger påfølgende ledd på det foregående leddet. I uttalelse 180 forklarer Sverre hvordan han går frem for å finne neste tall i følgen, men det er ikke argumentasjon for generaliseringen, da han bare gjentar differansen mellom tallene uten å knytte det til generaliseringen. Heller ikke senere i utdraget over argumenterer elevene for sin generalisering, som betyr at argumentasjonen i dette utdraget går under kategorien ingen argumentasjon.

Videre i arbeidet med tallfølge 2 fortsetter elevene i gruppe 3 å løse oppgavene rekursivt. Først legger de sammen 36 og 13 og finner at tall nummer sju i følgen er 49. Når elevene skal finne tall nummer 12 i tallfølgen fortsetter de rekursivt, men når de skal legge sammen 81 og 19 regner de feil og får 110, noe som også fører til at tall nummer 12 i følgen blir 154, i stedet for 144. I utdraget under har elevene kommet til oppgaven hvor de skal finne tall nummer 100 i tallfølgen.

199. Ragnhild: Men nå må vi finne en ny måte.
200. Sverre: Ja, på 100. På tall nummer 10 er det 110.
201. Ragnhild: 110 ganger 10?
202. Olav: Ja. Da tar vi 11 ganger 10. Det blir 110.
203. Sverre: 1100 blir det.

I utdraget over må elevene komme med en ny strategi for å løse oppgaven, fordi det vil ta for lang tid å fortsette med den rekursive strategien helt opp til tall nummer 100 i følgen. Elevene må da finne en eksplisitt strategi for å kunne finne tall nummer 100 i følgen. I uttalelse 201 foreslår Ragnhild at de kan multiplisere 110 med 10. 110 er tallet de fant som tall nummer 10 i tallfølgen. De vil altså multiplisere tall nummer 10 med 10 for å finne tall nummer 100 i følgen. Ettersom de tar utgangspunkt i en del som en enhet (110) og multipliserer for å finne svaret er generaliseringsstrategien deres helobjekt. I likhet med forrige utdrag er det ingen av elevene som stiller spørsmål ved generaliseringsstrategien eller svaret de finner og derfor argumenterer ingen av elevene for generaliseringsstrategien sin. Dermed går også argumentasjonen i dette utdraget under kategorien ingen argumentasjon.

4.2. Spesielle tilfeller

Jeg vil nå gå over til å se på tre spesielle tilfeller fra datamaterialet. Jeg vil igjen påpeke at de utdragene jeg presenterer ikke er alle tilfellene som fraviker det typiske, men tilfeller som er interessante da det er noe spesielt som gjør at det fraviker det jeg har vist at er de typiske trekkene. De tre spesielle tilfellene jeg vil vise er spesielle på hver sin måte. I det første tilfellet er det flere forslag til generaliseringsstrategier gruppa kan bruke og gjennom at elevene argumenterer for sine generaliseringsstrategier kommer de frem til en eksplisitt generaliseringsstrategi. I det andre eksemplet kommer også elevene frem til en eksplisitt generaliseringsstrategi, men regnestykket de må finne svar på er så vanskelig at de konkluderer med at det er for vanskelig. Tilslutt vil jeg presentere et tilfelle, hvorelevene velger andre generaliseringsstrategier enn de typiske trekkene på grunn av oppgaveutformingen. Utdragene jeg har valgt for å vise den spesielle oppgaven, viser hvordan alle gruppene har løst den spesielle oppgaven og hvordan den har påvirket deres valg av generaliseringsstrategier.

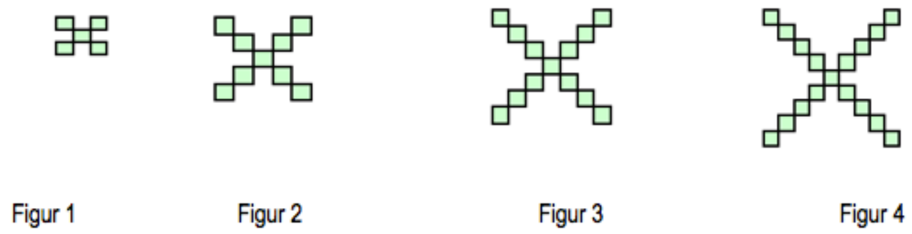
4.2.1. Fra klumping til eksplisitt

Som nevnt tidligere viser det første spesielle tilfellet hvordan det at elevene har flere generaliseringsstrategier og derfor forskjellige svar leder til at elevene argumenterer for sine generaliseringer. Ved at elevene må argumentere for sine generaliseringer kommer de i dette tilfellet frem til en eksplisitt generaliseringsstrategi. Elevene begynner her med å løse oppgaven med generaliseringsstrategien telle, før de går over til generaliseringsstrategien klumping i tredje oppgave. Dette utdraget er det eneste tilfellet hvor generaliseringsstrategien klumping forekommer i datamaterialet mitt. Ved at en annen elev foreslår at de skal bruke generaliseringsstrategien helobjekt begynner elevene å argumentere for hvorfor sin generaliseringsstrategi leder frem til riktig svar, og i løpet av argumentasjonen har generaliseringsstrategien klumping blitt til eksplisitt (tabell 9).

	Generaliseringsstrategier
Oppgave a)	Telle
Oppgave b)	Telle
Oppgave c)	Klumping - Helobjekt - Eksplisitt
Oppgave d)	Eksplisitt

Tabell 9: Spesielle generaliseringsstrategier, fra klumping til eksplisitt

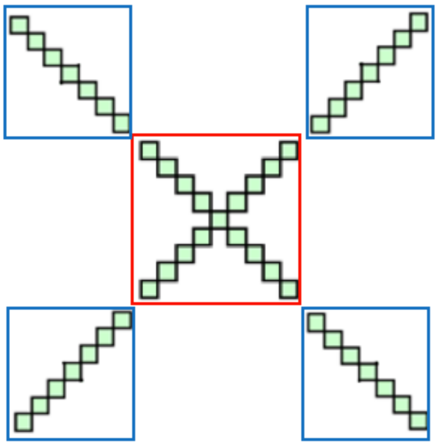
Utdragene på neste side er hentet fra gruppe 3 sitt arbeid med oppgaven kryss. Elevene får i oppgaven kryss utdelt figurene på neste side (figur 13). Oppgaven er å finne antall klosser man trenger for å bygge figurene i følgen. Den første oppgavene er å finne antall klosser man trenger for å bygge neste figur i følgen. Gruppe 3 så da at de kunne tegne på fire klosser på figur nummer fire og fant ut at det var 21 klosser i figur nummer fem. For å finne svar på hvor mange klosser man må ha for å bygge figur nummer sju fortsatte de å tegne på til sammen tre klosser til på hver arm av figur nummer fire. De fant da ut at de måtte ha 29 klosser for å bygge figur nummer sju. Elevene skal i utdraget på neste side fortsette med neste oppgave, som er å finne antall klosser man trenger for å bygge figur nummer 14.



Figur 13: Figurene fra oppgaven kryss.

126. Sverre: Hvor mange klosser trenger man for å bygge figur 14?
127. Olav: Hva er sju ganger fire?
128. Sverre: 28.
129. Olav: Hva er 28 pluss 29?
130. Ragnhild: 57.
131. Olav: Da er det 57.
132. Forsker: Hvorfor er det det?
133. Olav: Hvis man legger på sju fire ganger.

I utdraget over har Olav et forslag til hvordan de kan finne antall klosser man trenger for å bygge figur nummer 14. I uttalelse 133 forklarer Olav at han vil legge til sju klosser fire ganger på antall klosser i figur nummer sju for å finne antall klosser i figur nummer 14. Olav legger sammen sju klosser fire ganger og vil dermed legge på 28 klosser på de 29 klossene i figur nummer sju, noe man ser i uttalelse 129. Uttalelse 129 viser altså at Olav vil legge til en enhet (de blå rutene i figur 14) til et ledd han allerede har funnet (den røde ruten i figur 14). Denne generaliseringsstrategien heter klumping.



Figur 14: Illustrasjon av generaliseringsstrategien klumping

Ut i fra det Olav sier i uttalelse 133 antar jeg at han tenker at han skal legge til sju klosser på hver arm av krysset på figur nummer sju. Dersom dette er tanken til Olav, forholder han seg til figuren for å finne antall klosser i figur nummer 14, noe som betyr at han generaliserer figurativt. Olav argumenterer ikke for sin generalisering i utdraget på forrige side og det er ikke tydelig for Sverre at man kan bruke denne metoden. Derfor kommer han med et forslag på en annen måte de kan finne antall klosser i figur nummer 14 i utdraget under.

134. Sverre: Men sju pluss sju blir jo 14, så hva om vi legger sammen de? Hvis vi legger sammen 29 pluss 29. Da blir det jo svaret på figur 14.
135. Ragnhild: Ja, men da blir det mer enn det. (peker på regnestykket 29+28)
136. Sverre: Det blir 58.
137. Forsker: Hvorfor blir det 58?
138. Sverre: Fordi sju pluss sju blir jo 14 og svaret på sju ble 29.

I utdraget over kommer Sverre med en ny strategi for å finne antall klosser man trenger for å bygge figur nummer 14. Sverre bruker generaliseringsstrategien helobjekt, fordi han i uttalelse 134 forklarer at han vil legge sammen 29 med seg selv, fordi sju pluss sju er 14. Sverre ser på delen 29 som en enhet men uttrykker ikke at han vil multiplisere for å finne svaret. Han vil legge sammen enheten med seg selv, som er det samme som å multiplisere enheten med to, derfor vil jeg si at generaliseringsstrategien til Sverre er helobjekt.

Sverre forholder seg i utdraget over til figuren i uttalelse 134 i form av at han omtaler figur nummer 14. Likevel bruker Sverre tallene han har fra før til å finne antall klosser i figur nummer

14, noe som leder meg til at Sverre har en hovedsakelig numerisk generalisering i dette utdraget. I uttalelse 134 prøver Sverre å overbevise Olav om sin generaliseringsstrategi, men i utdraget under virker det ikke som Olav blir overbevist av Sverres argumentasjon. I utdrag 135 legger Ragnhild merke til at svarene blir ulike og Sverre og Olav må derfor argumentere for sine generaliseringsstrategier. I utdraget under fortsetter Olav å argumentere for sin løsning av oppgaven.

139. Olav: Men hvis det blir 14 pluss 14 pluss 14 pluss 14. 14 ganger 4, hva blir det? Regn ut 28 pluss 28. 28 pluss 29, det blir jo det!
140. Sverre: Hvorfor det?
141. Olav: 28 pluss 28 det er 14 der, 14 der, 14 der og 14 der (peker på armene på figuren) også en i midten. Det blir 28 pluss 29.
142. Sverre: Okay.
143. Olav: Det er 57.

I utdraget over responderer Olav på Sverres forslag om å doble 29 for å finne antall klosser man trenger for å bygge figur nummer 14. I uttalelse 141 forklarer Sverre hvordan han legger sammen antallet klosser i hver arm for så å legge til en i midten. Sverre kommer ikke med noen algebraisk formel som vil gi svaret på hvilken som helst figur i følgen, men han har funnet en måte å finne hvor mange klosser man trenger for å bygge hvilken som helst figur i følgen. Ettersom Olav har funnet en måte å finne antall klosser i hvilken som helst figur vil jeg si at generaliseringsstrategien hans er eksplisitt. I uttalelse 141 knytter Olav strategien sin til figuren, fordi han forklarer hvordan det skal være 14 i hver arm gjennom å peke på dem også legge til en i midten. Ettersom Olav knytter generaliseringen sin til figuren generaliserer han hovedsakelig figurativt.

I uttalelse 141 argumenterer Olav for sin generaliseringsstrategi, fordi Sverre spør hvorfor det blir slik. Argumentasjonen til Olav bygger på figur nummer 14, hvor han forklarer at det er 14 i hver arm på figuren og en i midten. Denne argumentasjonen vil jeg si havner i kategorien generisk eksempel, da Olav argumenterer for en generell regel ut i fra figur nummer 14. At Olav har funnet en generell regel, som han kan bruke i alle tilfeller støttes av utdraget på neste side hvor Olav bruker regelen han har funnet for å finne antall klosser i figur nummer 100.

144. Olav: Da er det figur 100.Vent da, hvis det skal være 100 på hver så blir det 100 pluss 100 pluss 100 pluss 100. Det blir 400 også pluss den i midten.

145. Ragnhild: Ja, det blir 401

I utdraget over legge Olav sammen de 100 klossene i hver arm og klossen i midten. Med det viser han ar han har funnet en regel som han kan bruke til å finne hvilken som helst figur i følgen.

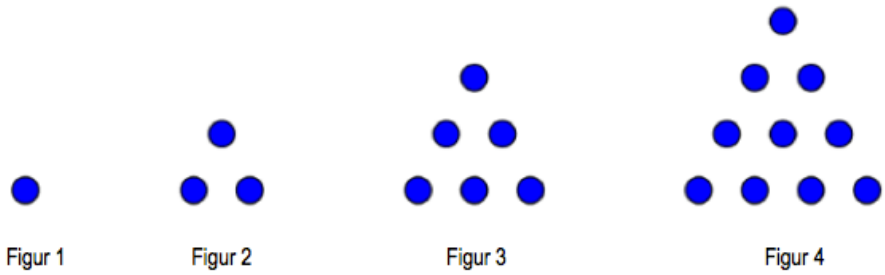
4.2.2. Eksplisitt er vanskelig å regne ut

Nå vil jeg vise eksempelet på et spesielt tilfelle hvor elevene kommer frem til en eksplisitt strategi. Elevene går bort fra generaliseringsstrategien helobjekt som en elev motbeviser med å komme med et eksempel hvor den ikke gjelder. Dermed prøver elevene å finne en annen generaliseringsstrategi som de kan bruke (tabell 10). Elevene finner da en eksplisitt strategi, men regnestykket den eksplisitte strategien gir dem er så vanskelig å regne ut at det ender med at elevene konkluderer med at oppgaven er for vanskelig. Utdragene vil vise hvordan det å stille spørsmål ved en annen generaliseringsstrategi, kan gjøre at elevene kommer frem til en eksplisitt strategi.

	Generaliseringsstrategier
Oppgave a)	Telle
Oppgave b)	Telle
Oppgave c)	Helobjekt
Oppgave d)	Helobjekt - Eksplisitt

Tabell 10: Spesielle generaliseringsstrategier, eksplisitt vanskelig å regne ut

I utdragene er gruppe 1 i gang med å løse oppgavene tilhørende oppgaven trekanttall. I oppgaven trekanttall har elevene fått utdelt figurene i figurfølgen på neste side som er de fire første trekanttallene (figur 15). Tilhørende figurfølgen er fire oppgaver, som elevene skal svare på. Den første oppgaven elevene får er å finne ut hvor mange prikker det er i neste figur nummer i følgen. For å finne svar på oppgaven tegnet elevene en rekke med fem prikker på figur nummer fire for så å telle alle prikkene. De fant da ut at det var 15 prikker i figur nummer fem. For å finne svar på hvor mange prikker det er i figur nummer seks bruker gruppe 1 samme strategi og kommer frem til at det er 28 prikker. For å finne antall prikker i figur nummer 14 dobler elevene antall prikker i figur nummer sju, men argumenterer ikke for hvorfor.



Figur 15: Figurene fra oppgaven trekanttall

Utdraget under er hentet fra senere i samtalen mellom elevene i gruppe 1. Elevene har her gått videre til oppgaven hvor de skal finne antall prikker i figur nummer 100. Harald har i forkant av utdraget foreslått at svaret er 1000 og prøvd å forklare hvorfor uten at de andre i gruppa har blitt overbevist.

81. Harald: Hvis du skal ta 10 den veien og 10 oppover da blir jo det 100, fordi 10 ganger 10 er 100. Så tar du 100 ganger 10.
82. Martha: Ja, men det skal jo være 100 den veien og 100 oppover og 100 tilbake. Da har vi 300, men hva som skal være inni det vet ikke jeg.
83. Mette: Men sju ganger sju er 49 og svaret her ble 28, så det går i alle fall ikke an. Går det egentlig an å finne ut?

Harald prøver i utsagn 81 igjen å forklare for gruppa hvordan han har kommet frem til 1000. Det virker som Harald først ønsker å finne antall prikker i figur nummer 10 for så å multiplisere med 10 for å finne antall prikker i figur nummer 100. For å finne figur nummer 10 vil Harald multiplisere 10 og 10, altså multiplisere sidene i figuren. Haralds generaliseringsstrategi er helobjekt, selv om Harald ikke bruker tall han har funnet før, men han vil bruke en del (tall nummer 10) og multiplisere med 10 for å finne svaret.

Harald prøver å knytte sin generalisering til figuren, når han i uttalelse 81 snakker om at det er 10 den veien. Likevel bruker han tallene i oppgaven til å finne tall nummer 100 når han vil gange antall prikker i figur nummer 10 med 10. Det virker heller ikke som Harald forholder seg til oppbyggingen av figuren da han vil multiplisere 10 med 10 for å finne antall prikker i figur nummer 10, som om figuren var et kvadrat. Ettersom Harald bruker tallene til å finne antall prikker i figur nummer 100 vil jeg si at Harald har en hovedsakelig numerisk generalisering i dette utdraget.

I uttalelse 81 prøver Harald å argumentere for sin generalisering. Argumentasjonen til Harald er spesiell og vanskelig å kategorisere, fordi generaliseringen er feil. Harald prøver å argumentere for sin generalisering ut i fra figuren, men sjekker ikke om strategien fungerer i noen andre tilfeller. Ettersom Harald prøver å bruke figuren som et eksempel og argumentere ut ifra den vil jeg likevel kategorisere argumentasjon som generisk eksempel. I uttalelse 83 skjer det noe interessant, som ikke skjer noen andre steder i datamaterialet. Mette viser at strategien ikke fungerer ved å vise til figur nummer sju hvor det er 28 prikker, og Haralds strategi ville gitt 49 prikker. Mette kommer her med et moteksempel for å vise at Haralds strategi ikke vil fungere i andre sammenhenger, fordi den ikke fungerer i det eksemplet. Ettersom Mette motbeviser strategien til Harald i utdraget på forrige side går gruppa videre og vil prøve å finne en ny strategi i utdraget under.

89. Forsker: Kan du forklare hva du gjør? (Henvender seg til Martha.)
90. Martha: Jeg prøver å plusse sammen alt. Det er jo 100 nederst, også blir det 90, fordi her blir det fire, tre, to en. (Peker på figur 4)
91. Mette: Nei, det blir 100, 99, 98.

(Martha forstår ikke hva Mette mener)

96. Martha: Det er 100 prikker bortover, også er det 90 prikker, fordi her er det jo fire, tre, to og en (peker på figur fire). Også…
97. Mette: Men da blir det plutselig 10 mindre da.
98. Martha: 10 mindre?
99. Mette: Fordi 100 også ble det 90. Her så tar de en mindre (peker på figur fire), men du tar plutselig 10 mindre.

(Elevene er usikre og blir stille.)

100. Martha: Det nytter ikke. Man må jo ta alle tallene opp til 100 å regne sammen.

I utdraget over prøver gruppa å finne en ny strategi for å finne antallet prikker i figur nummer 100. I forkant har elevene diskutert at det tar for lang tid å tegne figuren. I uttalelse 90 gjør Martha en oppdagelse om at man i figur nummer fire legger sammen tallene fire, tre, to og en og generaliserer det til at man kan legge sammen 100, 90 og videre nedover. Videre retter Mette på generaliseringen i uttalelse 91 og sier at man må legge sammen 100, 99, 98 og så videre. Elevene har her funnet en eksplisitt strategi, fordi de kan ta utgangspunkt i hvilken som helst figur i følgen. Selv om elevene ikke uttrykker regelen som et algebraisk uttrykk har de en eksplisitt generaliseringsstrategi, fordi de bruker figuren til å finne en måte å finne hvilken som helst figur i følgen på. Ettersom elevene ikke greier å uttrykke regelen på en algebraisk måte, mener Martha i uttalelse 100 at det ikke nytter og elevene forlater oppgaven.

Martha bruker figuren aktivt i sin forklaring av hva hun tenker, noe som vises i uttalelse 90, hvor hun henviser til figur nummer fire. Det virker også som at Mette forholder seg til figuren når hun i uttalelse 90 forklarer at det vil være 100, 99, 98 og så videre. Ettersom de forholder seg til figuren kan jeg si at generaliseringen deres er figurativ. I uttalelse 90 forklarer Martha sin generalisering og knytter den til en figur, noe som kan kategoriseres som argumentasjon med generisk eksempel, selv om generaliseringen er feil. Det er interessant at Martha i uttalelse 96 argumenterer på samme måte som i uttalelse 90, selv om Mette har uttrykt at hun ikke er enig i argumentasjonen i uttalelse 91. Det kan tyde på at Martha ikke kan argumentere for sin generalisering på andre måter.

4.2.3. Sjugangen

Det siste spesielle tilfellet er oppgaven tallfølge 1. Oppgaven tallfølge 1 skiller seg fra de andre oppgavene med at den er sjugangen og derfor lett for elevene å gjenkjenne. Tallfølgen som disse oppgavene omhandler påvirker elevenes generaliseringsstrategier i arbeid med oppgavene. Påvirkningen av generaliseringsstrategier gjelder alle gruppene og alle de tre gruppene har brukt de samme generaliseringsstrategiene som eksemplet jeg vil vise. Elevene begynner også med generaliseringsstrategien rekursiv, slik som de typiske trekkene i arbeid med tallfølgeoppgaver, men når elevene kommer til tredje oppgave går de over til generaliseringsstrategien eksplisitt (tabell 12). Jeg vil påpeke at argumentasjonen i disse utdragene ikke er spesielle, men typiske i datamaterialet.

	Generaliseringsstrategier
Oppgave a)	Rekursiv
Oppgave b)	Rekursiv
Oppgave c)	Eksplisitt
Oppgave d)	Eksplisitt

Tabell 11: Spesielle generaliseringsstrategier, sjugangen

I utdragene under er gruppe 3 i gang med oppgaven tilhørende tallfølge 1. I tallfølge 1 har elevene fått oppgitt tallene 7, 14, 21, 28, 35. I første oppgave skal elevene finne ut hvilket tall som er det neste i følgen. Elevene i gruppe 3 fant ut at tallene i følgen steg med sju mellom hvert ledd og forklarte at de la til sju til tall nummer fem i følgen for å finne at tall nummer seks ble 42. Samme strategi brukte elevene for å finne tall nummer sju i følgen, hvor de la sammen 42 og sju og fant at det ble 49. I utdraget under fortsetter elevene med oppgavene og skal finne tall nummer 12 i følgen.

164. Ragnhild: Vi skal finne tall nummer 12.
165. Olav: Ja, hvilket tall er nummer 12 i følgen? Nummer 12 er 84.
166. Sverre: Hvorfor det?
167. Olav: Fordi vi tar bare 14 pluss 70. Fordi 12 er mer…
168. Ragnhild: Ja, det blir 84.
169. Forsker: Hvordan fant du nummer 12 i følgen?
170. Olav: Først fant jeg 70, for det var sju ganger 10. Også plusset jeg på to mer og det er 14, fordi 7 pluss 7 er 14.
171. Sverre: Ja.

Forklaringen til Olav i utsagn 167 om at han legger sammen 14 og 70 for å finne tall nummer 12 i følgen, kan sammen med forklaringen i uttalelse 170 tolkes som at han multipliserer 12 med sju. Ved å gå ut i fra at Olav multipliserer 12 og sju for å finne tall nummer 12 i følgen har han generaliseringsstrategien eksplisitt, fordi han finner en regel som han kan bruke til å finne hvilket som helst tall i følgen. Utdraget på neste side er fortsettelsen på gruppe tre sitt arbeid med tallfølge 1, som underbygger min påstand om at Olav har en eksplisitt generaliseringsstrategi.

172. Olav: Jeg tror jeg vet nummer 100. For hvis man tar sju ganger 10 som er 70 også legger på en null bak så blir det 700.

173. Forsker: Hvordan fant du det?

174. Olav: Fordi hvis det er et for stort gangetall, så kan man ta vekk nullen og da blir det 7 ganger 10. Det blir 70 og så legger man på 0 og det blir 700.

I utdraget over ser man at Olav allerede i uttalelse 172 viser at han bruker regelen han fant i forrige utdrag. Heller ikke i dette utdraget sier Olav hvilket regnestykke han bruker for å finne svaret, men ut i fra det han sier om hvordan han multipliserer i uttalelse 172 og uttalelse 174 kan man se at Olav multipliserer 100 og sju for å finne tall nummer 100 i følgen. Han bruker da den samme regelen som han fant da han skulle finne tall nummer 12 i følgen, noe som styrker påstanden om at han har en eksplisitt generaliseringsstrategi.

Olavs argumentasjon i disse to utdragene vil jeg kategorisere som argumentere med regneoperasjon. I uttalelse 167 argumenterer Olav ved å forklare regneoperasjonen og ikke generaliseringsstrategien sin. Det samme skjer i uttalelse 170 og i uttalelse 174. Olav argumenterer da ikke for sin generalisering og derfor kategoriserer jeg det som argumenterer ved regneoperasjon. Man kan merke seg at Olavs argumentasjon kommer som svar på spørsmål fra forsker, noe som kan tyde på at verken Olav eller resten av gruppa ser det som nødvendig å argumentere for siner generaliseringer.

5. Drøfting

Mitt forskningsspørsmål er *Hvordan generaliserer en gruppe med tre elever i arbeid med figur- og tallfølgeoppgaver? Hvordan argumenterer elevene for sine generaliseringer?* I dette kapittelet vil jeg bruke teorien jeg presenterte i teorikapittelet og se det opp mot mine funn fra analysen for å svare på mitt forskningsspørsmål. Jeg har valgt å dele inn drøftingen min i fire hoveddeler. Først vil jeg oppsummer funnene jeg fant i analysekapittelet. Deretter vil jeg drøfte funnene mine med utgangspunkt i generaliseringene elevene har gjort. I tredje del vil jeg ta utgangspunkt i elevenes argumentasjoner og drøfte funnene jeg har gjort. Tilslutt vil jeg drøfte hvordan oppgaveutformingen kan ha påvirkning på elevenes valg av generaliseringsstrategier. Jeg vil påpeke at når jeg tar utgangspunkt i generalisering vil jeg ikke ekskludere elevenes argumentasjon. Det samme gjelder når jeg tar utgangspunkt i argumentasjon. Dette er fordi generalisering og argumentasjon ikke kan skilles (Lannin, 2005).

5.1. Oppsummering av analysen

I analysekapittelet begynte jeg med å vise de typiske trekkene i figurfølgeoppgavene. Elevene brukte da generaliseringsstrategiene telle og rekursiv på de to første oppgavene, før de gikk over til generaliseringsstrategien helobjekt i de to siste oppgavene (tabell 12). Overgangen til generaliseringsstrategien helobjekt innebar også at elevene gikk fra hovedsakelig figurativ generalisering til hovedsakelig numerisk generalisering, hvor de ikke lenger forholdt seg til figuren i samme grad som tidligere. Da elevene skulle argumentere for sine generaliseringer i arbeid med figurfølgeoppgavene, var det typisk at argumentene gikk under kategorien argumentasjon ved regneoperasjon, dersom noen stilte spørsmål ved generaliseringsstrategien deres, eller ingen argumentasjon, dersom ingen var kritiske. .

I elevenes arbeid med tallfølgeoppgavene var de typiske trekkene ved valg av generaliseringsstrategier at elevene begynte med generaliseringsstrategien rekursiv og holdt seg til den helt til de kom til siste oppgave, hvor de gikk over til generaliseringsstrategien helobjekt (tabell 12). Å argumentere for disse generaliseringene var ikke et typisk trekk, fordi elevene i stor grad ikke argumenterter for sine generaliseringer, altså var argumentasjonskategorien ingen argumentasjon gjennomgående. Det forekom likevel tilfeller av argumentasjon ved regneoperasjon og empirisk argumentasjon når noen stilte spørsmål ved generaliseringsstrategien, men det var ikke typisk i datamaterialet.

	Figurfølgeoppgaver	**Tallfølgeoppgaver**
Oppgave a)	Telle	Rekursiv
Oppgave b)	Rekursiv	Rekursiv
Oppgave c)	Helobjekt	Rekursiv
Oppgave d)	Helobjekt	Helobjekt

Tabell 12: Oversikt over tendensene i generaliseringsstrategier

Etter å ha presentert de typiske trekkene for både figurfølgene og tallfølgene i analysekapitelet viste jeg tre eksempler på spesielle tilfeller fra datamaterialet, hvor alle eksemplene var spesielle på hver sin måte. Det første eksemplet jeg viste var at to elever hadde forskjellige forlag til generaliseringsstrategier, hvor de to generaliseringsstrategiene, helobjekt og klumping ga forskjellig svar. Ettersom elevene ikke var enige om generaliseringsstrategi måtte de argumentere for sin generaliseringsstrategi, og gjennom å argumentere for generaliseringsstrategien klumping kom elevene frem til en eksplisitt generaliseringsstrategi. Det andre spesielle tilfellet jeg viste var hvordan elevene, gjennom at noen var kritiske til generaliseringsstrategien helobjekt, prøvde å finne en annen generaliseringsstrategi. Den kritiske holdningen til generaliseringsstrategien helobjekt gjorde at en av elevene kom med et moteksempel, som viste at strategien var feil. Dermed fant elevene en eksplisitt strategi, men fordi elevene ikke greide å regne ut regnestykket de hadde funnet, konkluderte de med at det ikke gikk. Det tredje og siste spesielle tilfellet jeg viste et eksempel på hadde forekommet flere ganger i datamaterialet, men kun i sammenheng med oppgaven tallfølge 1. Alle gruppene greide i arbeid med oppgavene tilhørende denne tallfølgen å komme frem til generaliseringsstrategien eksplisitt for de to siste oppgavene. I tillegg var det ingen av gruppene som argumenterte for sine generaliseringer.

5.2. Generalisering

Å gå fra ikke-eksplisitte til eksplisitte generaliseringsstrategier er i følge English og Warren (1998) problematisk for noen elever. Som vist i analysen var tendensen i tallfølgeoppgavene at elevene ventet helt til de skulle finne tall nummer 100 før de gikk vekk fra sin rekursive strategi. Elevene virket å ikke være interesserte i å finne en annen fremgangsmåte før de måtte. Da elevene først gikk over til en eksplisitt strategi, var det generaliseringsstrategien helobjekt som gikk igjen, slik jeg viste i analysen. En forklaring på at en generaliseringsstrategi går igjen, selv om den er feil kan ifølge Stacey (1989) være at elevene ser helobjekt som en enkel metode å bruke for å finne en løsning, og at de derfor ikke vil prøve å finne noen annen generaliseringsstrategi. English og Warren (1998) mener at for at elevene skal ønske å gå fra en ikke-eksplisitt til en eksplisitt generaliseringsstrategi, må man hjelpe elevene med å knytte sin additive strategi, altså deres ikke-eksplisitte strategi, til en multiplikativ strategi. Videre mener de at følgeoppgaver kan være en arena for å hjelpe elevene med å se disse essensielle ideene. Det virker da som at læreren i større grad må inn for å veilede elevene i arbeid med følgeoppgavene, slik Lannin (2005) også påstår.

Et av funnene som jeg viste i analysen var at elevene i arbeid med figurfølger gikk fra figurativ til numerisk generalisering og ikke fra numerisk til figurativ generalisering. Dersom elevene generaliserte hovedsakelig numerisk for å finne figur nummer 14 i en oppgave gikk de ikke tilbake til figuren og generaliserte hovedsakelig figurativt for å finne figur 100 i figurfølgen. De holdt seg da til hovedsakelig numerisk generalisering til de ble ferdige med oppgaven. Becker og Rivera (2006) nevner i sin artikkel at en av elevene de har sett på gikk fra å generalisere hovedsakelig figurativt til å generalisere hovedsakelig numerisk. Vale og Cabrita (2008) skriver at lærere har en tendens til å utforske det mer numeriske i figurfølgeoppgaver, og kanskje kan dette påvirke elevene i deres generaliseringer. Kanskje må en endring i lærernes fokus på hvordan man kan generalisere til.

I analysen viste jeg også at da elevene forlot den hovedsakelig figurative generaliseringen og gikk over til å generalisere hovedsakelig numerisk fikk elevene feil svar. I Lannin et al. (2006) sin undersøkelse fant han at elevene beholdt koblingen til figuren når de generaliserte rekursivt, men mistet koblingen til figuren i utviklingen av eksplisitte strategier. Becker og Rivera (2006) skriver at elever som generaliserer hovedsakelig numerisk ofte setter opp tabeller for å få en oversikt og generaliserer ut i fra tallene i tabellen, men det har ingen av elevene gjort i mitt datamateriale. English og Warren (1998) anbefaler at man bruker tabeller sammen med figurfølger og at det kan være en fordel at tallene presentert i tabellen er virkelige tall. Både i mitt datamateriale og i Becker og Rivera (2006) sin forskning har man sett at elever som generaliserer hovedsakelig numerisk gjør feil, og de er ikke i stand til å argumentere for sine generaliseringer på en gyldig måte. I en tallfølgeoppgave vil det kun være mulig å generalisere numerisk. Hvordan vil det påvirke om elevene generaliserer riktig og om de greier å argumentere for sine generaliseringer?

I et av de spesielle tilfellene i analysen viste jeg hvordan en gruppe gikk fra generaliseringsstrategien klumping til eksplisitt. Olav, som gjorde disse generaliseringene forholdt seg gjennom hele prosessen til figurene i oppgaven. Olav hadde altså en overgang fra en figurativ strategi til en annen figurativ strategi. En slik overgang har også Becker og Rivera (2006) funnet i sin forskning. Man ser i mitt datamateriale at elevene kommer frem til en eksplisitt strategi, når de generaliserer figurativt. Det vil være et problem for tallfølgeoppgavene da det kun er mulig å generalisere numerisk i arbeid med dem, da det ikke er figurer. Det vil være et argument for at man bør bruke figurfølgeoppgaver til å introdusere algebra med, da man ønsker at oppgaven skal lede til en eksplisitt strategi, som man kan utvikle et algebraisk uttrykk fra, slik English og Warren (1998) anbefaler. Problemet med figurfølgeoppgaver er i følge English og Warren (1998) at de setter begrensninger ved at variablene kun kan være positive heltall. Samtidig kan det være en styrke ved at elevene får knytte variablene til konkrete kontekster og dermed kan man unngå å få svar som 14,72 barn eller 2,583 busser (English & Warren, 1998).

I analysen viste jeg et eksempel på et spesielt tilfelle i datamaterialet mitt, som forekom i den eneste figurfølgeoppgaven med geometrisk vekst. Elevene gikk fra en helobjektstrategi over til å generalisere eksplisitt, men endte opp med å måtte forlate den eksplisitte strategien, fordi de mente det ville ta for lang tid å regne ut. Mason (1996) beskriver i sin artikkel at elevene kan manipulere en figur for å finne en telleregel, som er det elevene gjør i dette tilfellet. Mason (1996) poengterer at det er en vanlig måte å finne en regel på og nevner historien om Gauss. Historien om Gauss beskriver hvordan Gauss fant en måte å legge sammen alle tallene fra en til 100, altså formelen for trekanttallene. Å legge sammen tallene fra en til 100 er regnestykket elevene i eksemplet sliter med. Forskjellen mellom Gauss og elevene fra eksempelet var at Gauss fant en enkel måte å legge sammen tallene på, mens elevene fra mitt datamateriale ikke greide å finne en enkel måte å regne sammen alle tallene på. Dermed gikk elevene videre og vekk fra den eksplisitte strategien de hadde funnet. At elevene må forlate den eksplisitte strategien og gå over til en annen strategi er synd, fordi elevene ikke opplever at den eksplisitte strategien er riktig, da de ikke er i stand til å regne ut svaret. Elevene konkluderer til slutt med at oppgaven er for vanskelig og får dermed ikke en følelse av at en eksplisitt strategi vil hjelpe dem å finne hvilken som helst tall i følgen, men at en eksplisitt strategi er for vanskelig.

5.3. Argumentasjon

Funn jeg gjorde i datamaterialet knyttet til argumentasjon var at elevene skriver lite under oppgaveløsingen. Elevene uttrykker seg i stor grad muntlig. Et annet funn var at elevene ikke var kritiske til sine generaliseringer og derfor ikke argumenterte for generaliseringene sine. Det siste funnet jeg vil drøfte innen argumentasjon er at elevene argumenterer ved å gjenta regneoperasjonen de har gjennomført.

Det første funnet jeg vil drøfte er at elevene uttrykker seg hovedsakelig muntlig under oppgaveløsingen. I analysen viste jeg at det var gjennomgående i datamaterialet at elevene uttrykte seg muntlig. Det eneste elevene skrev ned var svarene de fant i oppgavene og eventuelt tegnet på figurene i arbeid med figurfølgene. I eksemplet hvor Olav gikk fra generaliseringsstrategien klumping til eksplisitt uttrykte ikke Olav reglene han fant skriftlig. Verken regelen han fant med generaliseringsstrategien klumping eller eksplisitt. Ingen av elevene uttrykte reglene med symboler, eller skrev ned noe for å uttrykke generaliseringsstrategiene sine. Elevene uttrykte seg muntlig, noe som i følge Mason (1996) ikke er uvanlig. Han sier at når barn snakker viser de evnen til å generalisere, fordi språk representerer en bevegelse vekk fra det spesielle og til det generelle. Å generaliserer er altså ikke noe nytt for elevene, men å generalisere matematisk og å skulle uttrykke generaliseringene matematisk er nytt for dem.

Elevene i datamaterialet gjør ingen forsøk på å uttrykke regelen med symboler eller skriftlig på noen annen måte. Det kan komme av at elevene ikke ser det som nødvendig å skrive ned regelen eller at de ikke kan å formulere en regel med symboler. Dersom elevene ikke har jobbet med variabler eller sett eksempler på regler uttrykt med variabler er det ikke overaskende at elevene ikke uttrykker seg skriftlig. English og Warren (1998) har også funnet at elevene opplevde det enklere å uttrykke sine generaliseringer muntlig enn å uttrykke dem skriftlig. I artikkelen til Radford (2006) skriver han også om elevers vanskeligheter med å uttrykke regler ved hjelp av variabler og symboler. Ettersom elevene ikke uttrykker seg skriftlig kom de ikke inn på variabler og symboler for å representere det generelle og English og Warren (1998) skriver at målet med å introdusere algebra gjennom figurfølgeoppgaver er at elevene skal få et annet første møte med variabler, men får egentlig elevene et møte med variabler? Dersom elevene får en oppgave uten noen forkunnskaper om variabler og algebra vil ikke elevene nødvendigvis begynne å uttrykke variabler. Å introdusere elevene for variabler krever mer enn bare en figurfølgeoppgave. Læreren må inn i bildet og eventuelt bygge videre på elevenes generaliseringer og vise hvordan elevene kan uttrykke seg med variabler og lede dem i den retningen. Å introdusere algebra og variabler gjennom figurfølgeoppgaver krever altså mye av læreren (Lannin, 2005).

Det andre funnet jeg nevnte var at elevene ikke var kritiske til sin egen eller andres generaliseringsstrategi. Som vist i analysen tenderte elevene i arbeid med figurfølge til å finne figur 14 og figur 100 gjennom generaliseringsstrategien helobjekt. Helobjekt er en strategi som ikke alltid fører til riktig svar, fordi elevene ikke tar hensyn til for eksempel overlapping av figurene (Stacey, 1989). Men hvorfor legger ikke elevene merke til at de ikke får riktig svar og at figurene overlapper? I mitt datamateriale ser man at elevene ikke bruker figurene og til å forklare hvorfor de kan bruke generaliseringsstrategien helobjekt. Elevene forholder seg til tallene de finner og multipliserer eller adderer dem uten å vise hva som skjer med figuren. Dermed ser de ikke at figuren for eksempel overlapper. Elevene generaliserer hovedsakelig numerisk når de bruker generaliseringsstrategien helobjekt (Becker & Rivera, 2006), og derfor legger de ikke merke til at figuren overlapper. Stacey (1989) påpeker også at elevene ikke sjekker om regelen deres fungerer i andre tilfeller i følgen, og mener det er flere grunner til at elevene velger å ikke sjekke om regelen fungerer i andre tilfeller. Argumentene kan være at regelen gir svar og at et svar er bedre enn ikke noe svar. I tillegg er regelen enkel og om de finner ut at denne regelen ikke stemmer med andre tilfeller kan det være vanskelig å finne en ny regel som fungerer (Stacey, 1989). Videre påpeker Stacey (1989) at elever som tror de har funnet en sammenheng som er riktig vil bruke den uten forbehold. Lannin (2005) skriver i sin artikkel at det å gi elevene oppgaver hvor de skal si noe om andres strategier for å løse oppgaven, kan bidra til en økning i hvor kritiske elevene er til sine egne generaliseringsstrategier også.

Det siste funnet jeg gjorde i datamaterialet var at elevene, når de skulle argumentere for sine generaliseringer, endte de opp med å argumenterte ved å gjenta regneoperasjonen de hadde gjennomført. I figurfølgene generaliserer elevene hovedsakelig numerisk når de skal finne tall nummer 14 og tall nummer 100, som jeg viste i analysen. Elevene ender da opp med å gjøre gale generaliseringer, som ikke leder frem til en riktig regel. I artikkelen til Becker og Rivera (2006) fant de at elever som generaliserte hovedsakelig numerisk ikke kunne argumentere med gyldige argument for generaliseringen sin. Det er også mange tilfeller i mitt datamateriale et eksempel på. Som vist i analysen argumenterte elevene i stor grad ikke gyldig da de skulle argumentere for sine generaliseringsstrategier. I følge Lannin (2005) kan det være utfordrende for elevene å lage gyldige argumenter, noe det også er for elevene jeg har observert. Elevene argumenterte i liten grad for sin generaliseringsstrategi, men for regneoperasjonene, altså argumentasjonskategorien annen argumentasjon, som jeg har valgt å kalle den.

Men hvorfor argumenterer elevene ved å gjengi regneoperasjonen de har gjennomført i stedet for å argumentere for generaliseringsstrategien sin? Et av svarene på dette spørsmålet kan være at elevene ikke er vant med å argumentere for generaliseringene sine. Lannin (2005) skriver at det i skolen er mer fokus på å finne det spesielle i motsetning til å finne det generelle, og at elevene derfor ikke argumenterer for det generelle. Dersom elevene ikke tidligere har blitt bedt om å argumentere for hvordan de generaliserer og tenker, kan de ikke være klar over at det er det man forventer at de skal gjøre i en slik situasjon. En annen grunn til at elevene forklarer regneoperasjonen i stedet for generaliseringsstrategien sine er at de i klassen har arbeidet mye med regneoperasjoner og hvordan man skal gjennomføre dem. Da vil elevene ha vært vant med å snakke om hvordan de utfører en regneoperasjon, og de kan være påvirket slik at de vil svare ved å gjengi regneoperasjonen, fordi de tror det er det man forventer. Et tredje alternativ er at elevene mener at generaliseringsstrategien er selvforklarende og at de ikke ser behov for å argumentere og forklare generaliseringsstrategien utover det de har gjort da de løste oppgaven.

5.4. Oppgavekritikk

Jeg har nå drøftet elevenes generalisering i arbeid med figurfølgeoppgavene og tallfølgeoppgavene og hvordan elevene argumenterer for sine generaliseringer. Hvordan elevene generaliserer avhenger av hva elevene skal generalisere (Radford, 1996). Det vil si at hvordan elevene generaliserer henger sammen med hvilke oppgaver elevene får.

Et eksempel som jeg har vist i analysen er fra elevenes arbeid med tallfølge 1. Tallfølgen skiller seg fra de andre oppgavene elevene har jobbet med, fordi tallfølgen er sjugangen og har derfor ingen startverdi. Som vist i analysen gjenkjente elevene tallfølgen og så fort at den økte med sju. Elevene holdt seg likevel til rekursiv strategi for å finne de to neste tallene i tallfølgen, men gikk direkte over til en eksplisitt strategi da de skal finne tall nummer 12 og 100 i følgen. Elevene virket å ha sett fra starten at man kunne multiplisere nummeret på tallene de skal finne med sju, noe som stiller spørsmål ved oppgaven. Det skiller seg ut at elevene finner en eksplisitt strategi så fort. Jeg stiller da spørsmålet: Hvilken generalisering gjør elevene egentlig i denne oppgaven? Trenger elevene generalisere, eller vet de allerede at disse tallene er starten på sjugangen? Ut i fra uttalelsene og at elevene tidlig går over til en eksplisitt strategi, noe de ikke har gjort ofte på andre oppgaven, kan man påstå at elevene gjenkjenner sjugangen. I tillegg ser man i analysen at elevene ikke argumenterer for generaliseringene de gjør i forbindelse med tallfølge 1. Det gjør det både vanskelig å vite hva som ligger bak elevenes generalisering og om de har sett en annen sammenheng enn at det er sjugangen.

Alle gruppene kom frem til en eksplisitt strategi i denne oppgaven, uten å vise noen fremgangsmåte. Derfor antar jeg at elevene gjenkjente sjugangen. Er oppgaven da for enkel? Som en introduksjon til algebra opplever jeg at oppgaven kan være både bra og dårlig. Elevene kommer frem til en regel for å finne hvilket som helst tall og kan da ta steget over til å prøve å uttrykke regelen algebraisk med bruk av symboler, noe som i følge English og Warren (1998) er fundamentalt for å lykkes i algebra. Samtidig går ikke elevene gjennom en generaliseringsprosess hvor de ser etter sammenhenger i følgen, noe som igjen kan føre til at de ikke får innsikt i hva symbolene i et uttrykk representerer. Om oppgaven er god eller dårlig kommer altså an på hva man ønsker å oppnå med oppgaven.

Alle oppgavene tilknyttet de ulike følgene er utformet tilnærmet likt med tanke på hvilke generaliseringsstrategier de fremmer. Lannin et al. (2006) skriver i sin artikkel at utformingen av en oppgave kan påvirke elevene i hvilken generaliseringsstrategi de velger å bruke. Ettersom alle oppgavene tilknyttet følgene er såpass like kan det påvirke variasjonen i datamaterialet, i form av at man ikke får variasjon i generaliseringsstrategiene. Variasjonen i følgens økning, i form av lineær eller geometrisk vekst, kan derimot påvirke elevenes valg av generaliseringsstrategier slik at de bruker ulike generaliseringsstrategier. I tillegg kan det at elevene jobber med både figurfølger og tallfølger være med å gjøre at elevene generaliserer på ulike måter.

6. Avsluttende refleksjoner og konklusjoner

Jeg innledet denne masteroppgaven med å presentere to forskningsspørsmål som jeg ville finne svar på gjennom denne oppgaven. De to forskningsspørsmålene var: *Hvordan generaliserer en gruppe med tre elever i femte klasse i arbeid med figur- og tallfølgeoppgaver? Hvordan argumenterer elevene for sine generaliseringer?* For å kunne svare på forskningsspørsmålene har jeg gjennomført observasjon av tre grupper med elever i arbeid med figurfølgeoppgaver og tallfølgeoppgaver. Gjennom bearbeiding og analyse av datamaterialet mitt har jeg skaffet meg tilstrekkelig innsikt for å kunne si noe om elevenes generaliseringer og argumentasjon.

Elevenes valg av generaliseringsstrategier har jeg i analysen vist at består hovedsakelig av generaliseringsstrategiene rekursiv og helobjekt, i tillegg til generaliseringsstrategien telle i figurfølgeoppgavene. De to generaliseringsstrategiene rekursiv og telle er knyttet til figurativ generalisering og helobjekt strategien i disse tilfellene er knyttet til numerisk generalisering. Elevenes argumentasjon knyttet til generaliseringene som var typisk besto enten av at elevene ikke argumenterte eller at de argumenterte ved å gjenta regneoperasjonen de hadde gjennomført. Argumentasjonen og valg av generaliseringsstrategi virket å henge sammen, da elevene i et av de spesielle tilfellene gikk fra generaliseringsstrategien klumping til eksplisitt ved at de argumenterte for sin generalisering. Argumentasjonen i det tilfellet gikk under kategorien generisk eksempel som er en av de to gyldige argumentasjonskategoriene. I tillegg var generaliseringen da hovedsakelig figurativ gjennom alle oppgavene knyttet til figurfølgen i motsetning til det typiske trekket. Andre funn jeg fant i analysen og har drøftet er at elevene ikke skriver i arbeid med følgeoppgavene, men uttrykker seg muntlig og tidvis tegner figurer for å telle på. Det er ikke overaskende da man i muntlig tale ofte generaliserer, men det kan være en utfordring da oppgavene skal være en introduksjon til algebra. Et annet funn som henger sammen med at elevene generaliserte mye feil i datamaterialet var at elevene manglet et kritisk blikk både på sine egne generaliseringer og på de andre i gruppa sine generaliseringer. Det førte til at elevene i liten grad argumenterte for sine generaliseringer bortsett fra dersom jeg som observatør stilte spørsmål. Da elevene så skulle argumentere for sine generaliseringer, gjorde de det ved å gjenta regneoperasjonen de hadde gjennomført.

Jeg vil dermed konkludere med at elevenes generaliseringsstrategier i stor grad følger et fast mønster i arbeid med både tallfølgeoppgaver og figurfølgeoppgaver. Forskjellen er at elevene holder seg til en ikke-eksplisitt generaliseringsstrategi lengere i arbeid med tallfølgeoppgavene.

Med tanke på argumentasjon, argumenterer elevene i liten grad for sine generaliseringer og de få gangene elevene argumenterer for sine generaliseringer, bruker de ofte ikke gyldige argumenter, som for eksempel argumentasjon ved regneoperasjon.

I forskningsspørsmålet ligger det at elevene jobber med figurfølgeoppgaver og tallfølgeoppgaver. Det vil derfor være naturlig å si noe om hvorvidt de to følgeoppgavetypene gjør utslag på elevenes generaliseringer og argumentasjon for generaliseringene. I innledningen nevner jeg også at Lannin (2005) mener at videre forskning burde undersøke ulike typer oppgaver og om de oppmuntrer til flere typer argumentasjon og generalisering. Som jeg har drøftet i foregående kapittel er de numeriske generaliseringene elevene gjør i figurfølgeoppgavene feil, mens de figurative generaliseringene leder til riktig svar. I en tallfølgeoppgave vil det kun være mulig å generalisere numerisk, man kan da påstå at elevene vil generalisere feil i tallfølgeoppgaver. Med tanke på argumentasjon har analysen og drøftingen vist at elevene kan bruke gyldig argumentasjon når de generaliserer figurativt, men ikke når de generaliserer numerisk. Hvorvidt elevene argumenterer gyldig eller ikke kommer altså an på generaliseringen de gjør. Det er ikke mulig å si ut i fra denne kvalitative undersøkelsen at det er en klar sammenheng mellom oppgavetypen og generaliseringene og argumentasjonen elevene bruker, da det kan være mange andre faktorer som virker inn på elevenes valg av generaliseringsstrategier. En gruppe som har forkunnskaper om variabler og algebra kan kanskje gjennomføre numeriske generaliseringer som er riktige. Likevel vil jeg si at i min forskning virker det som at figurfølger, som gir muligheter for figurativ generalisering, åpner for flere og riktig generaliseringsstrategier.

Ut i fra analysen og drøftingen i denne masteroppgaven vil jeg påstå at figurfølgeoppgaver og tallfølgeoppgaver i seg selv ikke er en introduksjon til algebra og variabler. I likhet med Lannin (2005) mener jeg at introduksjon til variabler og algebra gjennom figurfølgeoppgaver og tallfølgeoppgaver innebærer nye utfordringer for læreren. For å kunne bruke figurfølgeoppgaver og tallfølgeoppgaver mener Lannin (2005) at det å utvikle elevenes kunnskap om gyldigheten av deres argumentasjon er essensiell. Dette er noe læreren må ta tak i. Lee (1996) skriver at lærerens jobb er å få elevene til å se det matematisk aksepterte i følgen og fra det velge ut det som er matematisk nyttig.

6.1. Videre forskning

Som nevnt i innledningen til denne masteroppgaven er det forsket mye på generalisering og argumentasjon i figurfølgeoppgaver. Jeg har i min oppgave vinklet forskningsspørsmålet slik at det også omhandler tallfølgeoppgaver og sett på elevers generalisering og argumentasjon i arbeid med figur- og tallfølgeoppgaver. Ettersom min forskning i utgangspunktet kun kan si noe om de ni elevene jeg har observert, hadde det vært interessant å se mer på hvordan tallfølgeoppgaver skiller seg fra figurfølgeoppgaver som introduksjon til algebra og variabler. Å se på elever i samme trinn og sammenligne om elever som presterer høyt og elever som presterer lavt i matematikk generaliserer og argumenterer ulikt. Spesielt interessant ville det vært å sett på elevers arbeid med tallfølger og figurfølger i høyere klassetrinn, hvor elevene har noen kunnskaper om algebra og variabler fra før. I tillegg ville det vært interessant å gått nærmere inn på hvordan en lærer kan hjelpe og legge til rette for generalisering og argumentasjon i arbeid med oppgaver knyttet til tallfølger og figurfølger.

7. Referanser

Becker, J. R. & Rivera, F. (2006). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. I J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Red.), *Proceeding of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (s. 465-472). Praha: Charles University.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. I N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. (s. 3-12). Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-94-009-1732-3_6

Bergem, O. K. (2016). Hovedresultater i matematikk. I O. K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (Red.), *Vi kan lykkes i realfag: Resultater og analyser fra TIMSS 2015*. (s. 22-43). Oslo: Universitetsforlaget.

English, L. D. & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The mathematics teachers, 91*(2), 166-170.

Gold, R. L. (1958). Roles in sosiological field observations. *Social forces, 36*(3), 217-223. doi: 10.2307/2573808

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram: Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika forlag.

Holme, I. M. & Solvang, B. K. (1998). *Metodevalg og metodebruk*. Oslo: Tano Aschehoug

Johannessen, A., Tufte, P. A. & Christoffersen, L. (2010). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (4. utg.). Oslo: Abstrakt forlag

Kaput, J. J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part 1: Transforming task structures. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study Vol 1.* (s. 344-351). Melbourne: The university of Melbourne.

Kaput, J. J. (2008) What is algebra? What is algebraic reasoning?. I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in early grades*. (s. 5-18). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical thinking and learning, 7*(3), 231-258. doi: 10.1207/s15327833mtl0703_3

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic Generalisation Strategies: Factors Influencing Student Strategy Selection. *Mathematics Education Research Journal 18*(3), 3-28.

Lee, L. (1996). Initiation into algebraic culture: Generalization. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (s. 87-106). Dordrecht: Springer.

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. I N. Bernarz, C. Kiera & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching*. (s. 65-86). Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-94-009-1732-3_5

Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational studies in mathematics*, 15(3), 277-289. doi: 10.1007/BF00312078

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (s. 107-111). Dordrecht: Springer.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. I S. Alatorre, J. L. Saiz & A. Mendez (Red.), *Proceedings of the 28th conference* *of the international group for the psycology of mathematics education* (s 2-21). Mexico: Universidad pedagogica nacional.

Robson, C. (2002). *Real world research* (2. utg.). Oxford: Blackwell.

Simon, M. A. & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of mathematical behavior, 15*(1), 3-31.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164. doi: 10.1007/BF00579460

Stylianides, G. J. (2008). An analytical framework of reasoning-and-proving. *For the learning of mathematics, 28*(1), 9-16.

Thagaard, T. (2013). S*ystematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode* (4. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Vale, I & Cabrita, I. (2008). Learning through patterns: A powerful approach to algebraic thinking. I K. Kumpulainen & A. Toom (Red.), *The Proceedings of the 18th annual conference of the European teacher education network,* (s. 63-69) Helsinki: ETEN.

Yesildere, S. & Akkoc, H. (2010). Algebraic generalization strategies of number patterns used by pre-service elementary mathematics teachers. *Procedia social and behavioral sciences, 2*(2010), 1142-1147.

8. Vedlegg

8.1. Vedlegg 1 – Samtykkeskjema

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

" Generalisering i arbeid med figurtall og tallfølger"

Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved NTNU, fakultet for lærer- og tolkeutdanning. Jeg skal dette året skrive min masteroppgave. I mitt masterprosjekt vil jeg undersøker hvordan elever generaliserer i arbeid med figurtall og tallfølger og i den forbindelse må jeg foreta noen undersøkelser i skolen.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Å delta i denne studien innebærer at elevene vil bli observert i arbeid med oppgaver. Elevene vil i grupper på tre samarbeide om å løse oppgaver i inntil en time. For å få et så godt datamateriale som mulig har jeg i samråd med min veileder kommet frem til at det vil være ønskelig å gjøre videoopptak av elevarbeidet under observasjonen. Av elevene som godtar å delta i undersøkelsen vil det i samråd med deres lærer velges ut hvem som blir med i studien.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Opptakene vil kun høres og ses av meg og eventuelt min veileder og alle deltagere i undersøkelsen vil bli anonymisert i masterstudien. Videoopptak vil bli oppbevart på en passordbeskyttet PC som kun forskeren har tilgang til.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 1. juli 2018. Når prosjektet avsluttes vil alle opptak av elever slettes og alle elever er da anonymisert i masteroppgaven.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med:

Mari Ilbro Bergsrønning
Tlf: xxx xx xxx
Mail: mib1994@hotmail.com

eller

Veileder
Siri-Malén Høynes
Tlf: xxx xx xxx
Mail: siri.m.hoynes@ntnu.no

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg/ vi gir samtykke til at det foretas videoopptak av oppgaveløsning hvor ________________________ (elevens fornavn og etternavn) er med.

Jeg/vi har snakket med vårt barn og han/hun har også gitt sitt samtykke.

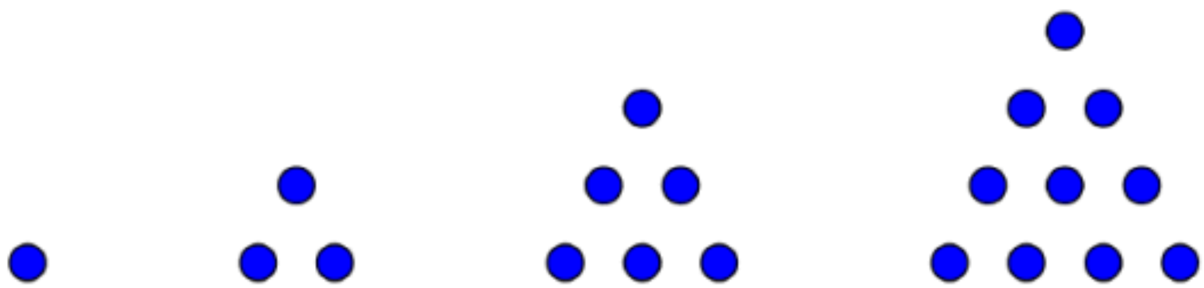
____
(Dato)

____
(Underskrift av foresatte/foreldre)

Kvadrater

Hvor mange pinner trenger du for å lage figuren med 7 kvadrater?
Hvor mange pinner trenger man for å lage figuren med 8 kvadrater?
Hva med figuren med 14 kvadrater?
Hva med figuren med 100 kvadrater? Hvordan finner du ut det?

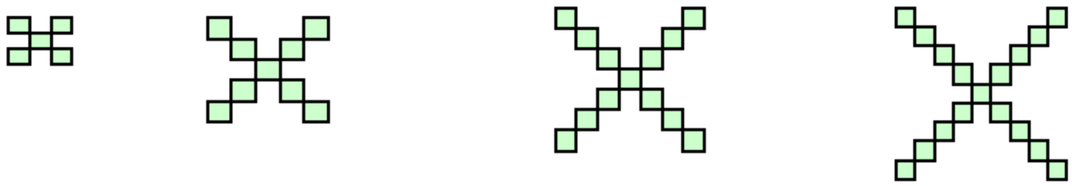
Trekanttall



Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

Hvor mange prikker er det i figur 5?
Hva med figur 7?
Hvor mange prikker er det i figur 14?
Hvor mange prikker det er i figur 100? Hvordan finner du ut det?

Kryss



Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

Hvor mange klosser må man ha for å bygge figur 5?
Hva med figur 7?
Hvor mange klosser trenger man for å bygge figur 14?
Hvor mange klosser må man ha for å bygge figur 100? Hvordan finner du ut det?

Tallfølge 1

7, 14, 21, 28, 35 …

Hva er neste tall i tallfølgen?
Hva er tall nummer 7 i følgen?
Hva er tall nummer 12 i følgen?
Hva er tall nummer 100 i følgen? Hvordan finner du det?

Tallfølge 2

1, 4, 9, 16, 25 …

Hva er neste tall i tallfølgen?
Hva blir tall nummer 7 i følgen?
Hva blir tall nummer 12 i følgen?
Hva med tall nummer 100 i følgen? Hvordan finner du det?

Tallfølge 3

7, 11, 15, 19, 23 …

Hva er neste tall i tallfølgen?
Hva er tall nummer 7 i følgen?
Hva er tall nummer 12 i følgen?
Hva er tall nummer 100 i følgen? Hvordan finner du det?