Masteroppgåve

Emilie Kvamme Fjeldstad

Strukturkompetanse i tidleg algebra - Ein kvalitativ studie av elevar på 2. og 5. trinn sitt arbeid med figurfølger

NTNU
Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Emilie Kvamme Fjeldstad

Strukturkompetanse i tidleg algebra

Ein kvalitativ studie av elevar på 2. og 5. trinn sitt arbeid med figurfølger

Masteroppgåve i Matematikkdidaktikk 1-7
Trondheim, mai 2018

NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Emilie Kvamme Fjeldstad

Strukturkompetanse i tidleg algebra

Ein kvalitativ studie av elevar på 2. og 5. trinn sitt arbeid med figurfølger

Masteroppgåve i Matematikkdidaktikk 1-7
Trondheim, mai 2018

Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Kunnskap for en bedre verden

Forord

Fem år på lærarstudiet går mot slutten og det som står igjen er å takke alle som har hjelpt og støtta meg i prosessen med å skrive denne masteroppgåva.

Fyrst vil eg takke rettleiaren min Tore Alexander Forbregd for god hjelp, tilbakemeldingar, råd og innspel. Vidare vil eg takke dei to skulane og alle lærarane som ynskja meg hjarteleg velkomen og som lot meg bruke av tida deira. Og ikkje minst må elevane som stilte opp på intervjua takkast.

Å skrive ei masteroppgåve er ikkje alltid lett. Prosessen hadde ikkje vore like positiv utan medstudentane på kontoret og andre gode studievener. Eg må òg takke kollektiv, vener og familie for all støtte og hjelp, og for at dei gjer kvardagen bra.

Ein ekstra takk går til Nicholas for gjennomlesing og svar på alle mine spørsmål.

Emilie Kvamme Fjeldstad

Trondheim, mai, 2018

Innhald

Figurliste

Tabelliste

1. Innleiing

Bevisstheit om matematiske mønster og strukturar ser ut til å vere svært viktig for unge elevar (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Sentralt for denne bevisstheita er mellom anna tidleg algebra (Mulligan & Mitchelmore, 2009), men mange finn algebra vanskeleg, og Utdanningsdirektoratet (2015) skriv at internasjonale undersøkingar som TIMMS viser at i talforståing og algebra presterer norske elevar under gjennomsnittet. TIMMS Advanced undersøkinga frå 2015, som mellom anna såg på matematikkompetansen til norske elevar som gjekk siste året på vidaregåande skule, viste at algebra var det matematiske området norske elevar hadde dei største utfordringane med (Grønmo, Hole & Onstad, 2016). Samtidig kan det sjå ut som den funksjonelle tenkinga som er så sentral i algebra ikkje er noko ein modnast inn til, men heller noko som er relatert til erfaringar som oppmodar til ein naturleg progresjon til symbolsk aktivitet (Jurdak & El Mouhayar, 2014; Wilkie & Clarke, 2016). Dersom dette stemmer bør tidlege erfaringar med funksjonell tenking få ein større plass i barneskulen.

Lins og Kaput (2004) skriv at det grovt sett er to syn på kva tidleg algebra er, og oppgåva mi vil basere seg på den siste av dei. Det fyrste representerer det som tradisjonelt har vore algebraundervisinga i skulen. Her er tidleg algebra det fyrste møtet elevar har med den tradisjonelle algebra i skulen. Då er algebra å skrive uttrykk med bokstavar som står for tal og tolke eller manipulere desse uttrykka (Stacey & MacGregor, 2001). Det er tidleg algebra fordi den kjem før all algebraen elevane kjem til å lære seinare (Lins & Kaput, 2004). Det andre synspunktet, synspunktet denne oppgåva tek utgangspunkt i, har sakte men sikkert vorte meir populært dei siste åra. Her er algebraen eit tidlegare møte med algebraisk resonnering, der målet er å fostre algebraisk tenking, ikkje å undervise spesifikt algebraisk innhald tidleg (Lins & Kaput, 2004). Ein slik algebra kan vere relevant for 7-åringar (Warren & Cooper, 2008) og moglegvis tidlegare. For slik Lins og Kaput (2004) ser det er ikkje målet med tidleg algebra å gjere elevar betre i algebramanipulasjon, men heller å fremje algebraisk resonnering. Målet er ei fleksibel, godt uttrykt og kraftfull tenking med vekt på det generelle. Om denne tidlege algebraen eigentleg kan klassifiserast som algebra er det ikkje semje om (Kaput, Blanton & Moreno, 2008; Radford, 2011), men det er stor semje om at ein bør fokusere på det generelle, og at generalisering er fundamentalt for algebra (Mason, 1996; Stacey & MacGregor, 2001).

1.1. Tidlegare forsking

Allereie i 1989 nytta Stacey (1989) figurfølger for å undersøke 9-13 åringar sitt arbeid med å generalisere lineære mønster, og bruk av veksande mønster har blitt ein vanleg måte å undersøke elevar si generalisering (t.d. Carraher, Martinez & Schliemann, 2008; Lannin, 2005; Lannin, Barker & Townsend, 2006; Warren & Cooper, 2008). Generalisering vert av mange sett på som kjernen i algebra (Mason, 1996). RAND MATHematics Study Panel (referert i Becker og Rivera, 2006, s. 95) skreiv i 2003 at fordi dei fleste studiar har fokusert på algebra på vidaregåande nivå, så veit ein lite om yngre elevar si læring om algebraiske idear og evner. I etterkant har det vore eit større fokus på algebra og dei yngste elevane. Fleire har sett på elevar nede på 2. trinn si generalisering (t.d. Cooper & Warren, 2011; Moss & McNab, 2011; Radford, 2011), ofte med utgangspunkt i figurfølger.

Det er vanskeleg for elevar å gå frå mønster til algebra. Elevane kan gjerne føresei det neste elementet i figurfølga, men dei kan likevel finne det vanskeleg eller umogleg å generalisere. Det er vanskeleg for dei å generere ein regel for å finne verdien til ein tilfeldig figur (Lannin, 2005; Lee, 1996; MacGregor & Stacey, 1995). I tillegg er det ei utfordring for elevar å grunngje generaliseringane, noko Lannin (2005) fann at elevane sjeldan gjorde. Warren og Cooper (2008) gjennomførte eit klasseromseksperiment på 8 år gamle elevar. Mange av vanskane elevane hadde spegla det som var funne i tidlegare forsking, men etter kvart som dei arbeida meir med desse vart problema mindre. Det ser ut til at algebraisk tenking kan utviklast frå arbeide med mønster og relasjonar (Carraher et al., 2008; Warren & Cooper, 2008; Wilkie & Clarke, 2016). Dette vert støtta av Lee (1996) som skriv at mellom anna abstraksjon av prikkemønster er i kjernen av algebra, og av Mulligan & Mitchelmore (2013) som skriv at å finne og uttrykke numeriske og romlege generaliseringar kan vere byrjinga på algebra og geometri, sjølv om Mulligan og Mitchelmore sitt fokus er på andre romlege aktivitetar enn figurfølger.

Wilike og Clarke (2016) fann at oppgåver i ulik grad opnar opp for å sjå ulike strukturar, og at kva strukturar elevane ser i figurane kan koplast til kva generaliseringsstrategiar dei nytta. Sjølv om struktur vert sett på på mindre områder har det vore veldig få studiar som har forsøkt å skildre generelle trekk ved strukturell utvikling i matematikken til unge elevar (Mulligan & Mitchelmore, 2013), noko Mulligan og Mitchelmore (2013) forsøker å ta tak i.

1.2. Forskingsspørsmål

Mulligan og Mitchelmore (2009) har funne ei bevisstheit om matematiske strukturar og mønster (AMPS) som går på tvers av matematiske områder, og dei skriv sjølve at tidleg algebra er sentralt i denne utviklinga. Som nemnt tidlegare i innleiinga er elevar si strukturelle utvikling noko det er lite forsking på, og algebra noko som norske elevar finn utfordrande. Difor ynskjer eg å sjå nærare på desse områda. Fokuset i denne masteroppgåva vil vere elevar på 2. og 5. trinn som viser høg strukturkompetanse i arbeid med figurfølger.

Forskingsspørsmåla mine er:

Korleis kjem høg strukturkompetanse i arbeid med direkte og nær generalisering av figurfølger til uttrykk på 2. og 5. trinn? Gjeve at det er kvalitative skilnadar mellom trinna, kva er skilnadane med tanke på struktur, generalisering og grunngjeving?

Mulligan og Mitchelmore (2009, s. 34) definerer struktur som måten matematiske mønster er organisert. Eit mønster kan skildrast som kva som helst føreseieleg regelmessigheit, og det involverer som regel numerisk, romlege eller logiske relasjonar (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Høg strukturkompetanse vert i denne oppgåva definert som å ha elevarbeid på eit høgt nivå på det Mulligan og Mitchelmore (2013) kallar AMPS, Awareness of Mathematical Pattern and Structure. Denne bevisstheita om matematiske mønster og strukturar vert delt inn i fem nivå og saman med rammeverk for generalisering og grunngjeving presentert i teorikapittelet.

Ein kan dele mønstergeneralisering inn i tre typar ut frå kor langt vekke figuren ein skal finne er frå dei figurane ein kjenner (El Mouhayar & Jurdak, 2016). Direkte generalisering er å finne verdien til ein figur når førre figur er gjeven. Nær generalisering er å finne verdien til ein figur som er nær, men ikkje direkte etter, førre gjevne figur, og fjern generalisering er å finne verdien som er relativt langt frå førre gjevne figur (El Mouhayar & Jurdak, 2016). I denne masteroppgåva vert figur nummer 1-3 gjevne. Figur nummer 4 vert direkte generalisering, figur nummer 10 vert sett på som nær generalisering og figur nummer 100 som fjern generalisering. I tillegg vil det vere eit fokus på generelle uttrykk for figurfølgene.

I denne studien har kvalitative skilnadar ei dobbel tyding. Det handlar både om at eg vil sjå på skilnad i kvalitet mellom trinna, men og at eg vil sjå på skilnadar ein finn ved å nytte kvalitative metodar. Målet er difor ikkje å kvantifisere skilnadar (Krumsvik, 2014), men heller sjå på kva skilnadane inneber og korleis dei ser ut.

1.3. Teori og metode eg vil nytte

For å svare på forskingsspørsmåla vil eg nytte Mulligan og Mitchelmore (2013) sitt AMPS-rammeverk til å sjå på skilnadar i strukturane elevane ser i figurfølgene. Eg har valt AMPS-rammeverket på bakgrunn av at forfattarane har funne at det ser ut som det eksisterer ein bevisstheit om matematiske mønster og strukturar som er konsekvent på tvers av matematiske områder som ser ut til å seie noko om generell matematikkompetanse. Eg er interessert i om rammeverket kan utvidast til å òg gjelde figurfølger. Rammeverket vert i utgangspunktet ikkje nytta på figurfølger, så eg har delt nokre av kategoriane opp i underkategoriar for å tilpasse det mitt bruk. Dette vert gjort greie for i metodekapittelet. Eit delmål med denne masteroppgåva er å sjå om ei slik utviding av rammeverket kan vere hensiktsmessig. For å seie noko om generaliseringa og grunngjevingane til elevane vert Lannin et al. (2006) og Lannin (2005) nytta. Slik får eg sett korleis elevane strukturerer figurane sine i samanheng med generaliseringsstrategiane og grunngjevingane deira. Rammeverka til Lannin et al. (2006), og Lannin (2005) viste seg i deira studiar hensiktsmessige til å undersøke arbeid med figurfølger. Difor har eg valt å gjere det same.

Metoden eg nytta var semistrukturerte intervju med elevpar (Kruuse, 1996). Elevane arbeida med figurfølger og vi samtala om oppgåver undervegs. Eg gjennomførte ein pilotstudie der eg mellom anna undersøkte om det var kvalitative skilnadar mellom trinna. I pilotstudien samtala eg fyrst med ein 2. klasse om ei figurfølge, for så å samtale med 6 elevpar frå den same 2. klassen og 3 elevpar frå 5. trinn. Basert på erfaringane eg gjorde meg i pilotstudien laga eg ein forbetra intervjuguide med eit meir spesifikt strukturfokus. Basert på denne intervjuguiden intervjua eg fleire elevar frå ein anna skule, høvesvis 6 elevpar frå 2. trinn og 5 elevpar frå 5. trinn. Dei to gruppene frå kvart trinn som viste høgast strukturkompetanse i direkte og nær generalisering er hovudfokuset i analysen. Eg hadde godkjenning frå NSD, signerte samtykkeskjema frå føresette (Vedlegg 2-4), og munnleg samtykke til deltaking frå elevane. Som ein del av datainnsamlinga filma eg intervjua og tok vare på elevarbeida.

1.4. Oppbygging og formålet med masteroppgåva

Denne oppgåva er delt inn i seks kapittel. Kapittel 2, teorikapittelet startar med kva algebra er og handlar om, i tillegg til ein presentasjon av ulike syn på om konvensjonelle symbol er naudsynt for at noko skal kunne definerast som algebra. Kapittelet tek òg føre seg kva figurfølger, funksjonar og mønster er, før det til slutt presenterer rammeverk for generalisering (Lannin et al., 2006), grunngjeving (Lannin, 2005) og struktur (Mulligan & Mitchelmore, 2013). Kapittel 3, metodekapittelet, presenterer datainnsamlinga, analysemetoden og korleis eg tilpassa AMPS-rammeverket til mitt bruk. Det avsluttar med nokre blikk på truverda til studien, etikk og metodekritikk. Analysekapittelet, kapittel 4, består først av ei kort analyse av AMPS-nivåa til alle gruppene i hovudstudien, deretter eit val av fire fokusgrupper, og så ei grundigare analyse av desse fire gruppene. Drøftinga, kapittel 5, diskuterer funna i analysen, særleg AMPS-nivå, strategiar, generalisering og elevane sine utfordringar. Deretter vert analyseverktøya diskutert. Kapittel 6 er konklusjonskapittelet som seier noko om bidraget til studien, metoden sin innverknad på resultata, implikasjonar masteroppgåva får og vidare forsking.

Formålet med masteroppgåva er å utvide kunnskapsbasen om tidleg algebra i den norske skulen. Ved å ta utgangspunkt i struktur kan ein kanskje sjå om det er ein hensiktsmessig måte å nærme seg området. Ved å nytte AMPS-rammeverket og tilpasse det figurfølger har eg forsøkt å seie noko om ei potensiell utviding av bruksområdet til rammeverket. Fokuset på kvalitative skilnader mellom 2. og 5. trinn kan fortelje noko om det ser ut til å vere ei utvikling i struktur, generalisering og grunngjeving. Eit delmål er å tydeleggjere kva som er dei største utfordringane til elevane, noko som kan legge føringar for undervisningsfokus framover.

2. Teorikapittel

Denne masteroppgåva handlar om algebra, og teorikapittelet startar med å sjå nærare på kva algebra er. Sidan datainnsamlinga tek utgangspunkt i figurfølger, er figurfølger, funksjonar og mønster fokuset vidare i masteroppgåva. Teorikapittelet avsluttar med ein presentasjon av rammeverka som vart nytta til å undersøke elevane sitt arbeid med figurfølger. Fyrst vert rammeverket for generalisering (Lannin et al., 2006) presentert, deretter rammeverket for grunngjeving (Lannin, 2005), før rammeverket for struktur (Mulligan & Mitchelmore, 2013) til slutt vert presentert.

2.1. Algebra

For å kunne snakke om figurfølger i samband med algebra er ein avhengig av å definere algebra, men korleis ein skal definere algebra og algebraisk resonnering, særleg på dei første trinna, er ei utfordring (Kaput, 2008). Som ein bakgrunn for studien min vil eg presentere to syn på kva som skal til for at noko kan kallast algebra og korleis det kan sjå ut på dei lågaste trinna. Kaput (2008) saman med Kaput et al. (2008) definerer ikkje tidlege algebra utan konvensjonelle algebraiske symbol som algebra, medan Radford (2010) argumenterer for at algebraiske symbol ikkje er ein føresetnad for at noko skal vere algebraisk.

2.1.1. Algebra avhengig av konvensjonelle symbol

For at noko skal kallast algebraisk set Kaput et al. (2008) mellom anna som krav at det skal nyttast konvensjonelle algebraiske symbol. Dei set òg krav til kva symboliseringsaktivitetar som kan kallas algebraiske. Ein algebraisk aktivitet må anten nytte symbol til å uttrykke generaliseringar, til dømes ved å uttrykke at summen av to partal alltid er eit partal, eller den må resonnere systematisk med slike generaliseringar, til dømes ved hjelp av grafar eller andre konvensjonelle algebraiske symbolsystem. Dersom krava vert oppfylt, men det vert nytta andre symbol som tradisjonelle aritmetiske symbol, munnleg tale, fysiske konkretar eller elevar sine eigne symbol er aktiviteten kvasialgebraisk aktivitet.

Kaput (2008) ser på algebra som to kjerneaspekt ved algebraisk resonnering som viser seg i tre trådar. Kjerneaspekta er å uttrykke generalisering på ein meir og meir systematiske måte med konvensjonelle symbolsystem, og handlingane ein utfører på generaliseringane. De i tre trådane er: (1) Algebra som studien av strukturar og system abstrahert frå utrekningar og relasjonar, inkludert generalisering av aritmetikk, (2) algebra som studien av funksjonar, relasjonar og avhengig variasjon og (3) algebra som bruk av ei samling modelleringsspråk, både innanfor og utanfor matematikk.

2.1.2. Figurfølger som kvasialgebraisk aktivitet

Figurfølger passer inn i tråd nummer to (Kaput, 2008). Dersom ein ser på algebra som ein matematisk disiplin er tråd nummer to strengt talt ikkje rein algebra, men heller analyse. Kaput (2008) behandlar likevel tråden som algebra sidan det er ein stor del av skulealgebra. Det er ei vanleg oppfatning at den andre tråden startar med grunnleggjande mønsteraktivitetar i barneskulen (Kaput, 2008). Tråd nummer to involverer ein bestemt type generalisering, generalisering mot ideen om funksjonar, der det å uttrykke generalisering kan tenkast på som å skildre systematisk variasjon i tilfelle på tvers av eit område. Eit døme kan vere å skildre korleis ei figurfølge utviklar seg. Det syntaktiske aspektet ved algebra vert mellom anna å endre forma til uttrykka som kjenneteiknar regelmessigheiter eller å samanlikne ulike mønsteruttrykk for å bestemme om dei er ekvivalente. Ein kan til dømes endre forma til uttrykka for figurfølger eller ein kan undersøke om to uttrykk er ekvivalente. I tråd nummer to finn ein kvasialgebraisk aktivitet i det å bygge generaliseringar av spesifikke kvantitative relasjonar på tvers av mange ulike notasjonar (Kaput et al., 2008). Til dømes kan ein elev uttrykke relasjonar ved hjelp av gestar og munnleg språk. Eit døme på ein kvantitativ relasjon som kan generaliserast er relasjonen mellom figurar i figurfølger. For at ein kvasialgebraisk aktivitet skal verte algebraisk er ein avhengig av å gå over til å representere variablar og funksjonsrelasjonar med konvensjonelle notasjonssystem.

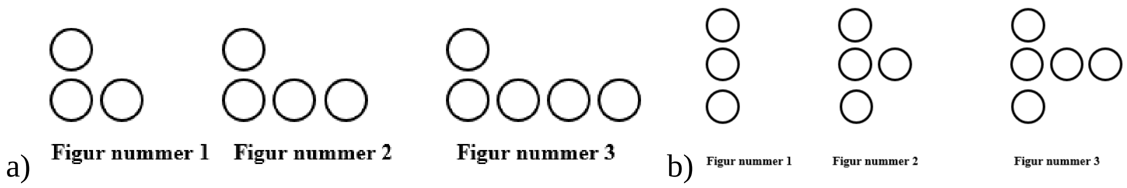
2.1.3. Algebra utan konvensjonelle symbol?

Radford (2010) argumentere for at ein ikkje er avhengig av formelle symbol for at noko skal vere algebraisk. Det handlar om å resonnere på bestemte måtar (Radford, 2011). Radford (2010) skriv at algebra handlar om å handtere ubestemmelegheit (indeterminacy) på analytiske måtar. Han påstår at konvensjonelle symbol berre er ein av mange semiotiske formar som er passande for å uttrykke ubestemmelegheit, både i grunnleggjande algebra og seinare i avansert algebra. Det betyr ikkje at den symbolske algebraen ikkje er kraftig, men heller at det òg eksisterer mange andre semiotiske måtar å uttrykke dei algebraiske ideane om mellom anna ukjente og variablar. Desse alternative uttrykksmåtane kan vere i staden for, eller saman med dei konvensjonelle algebraiske uttrykksmåtane. Radford (2010) skriv at dette er viktig då det eksisterer eit stort rom der elevar kan starte å tenke algebraisk, sjølv om dei enno ikkje, eller i liten grad, tek i bruk konvensjonelle algebraiske symbol. Dette rommet kan kallast sona for utvikling av algebraisk tenking, og Radford (2010) skriv at den i stor grad har blitt ignorert som eit resultat av eit fokus på å berre anerkjenne det algebraiske i det symbolske.

Min posisjon er at uavhengig om ein kan sette merkelappen algebra på elevar sitt arbeid med figurfølger, så er det sentrale om aktiviteten seinare kan leie til tradisjonell algebraisk tenking. Forfattarar som meiner at figurfølger kan ha ein slik funksjon er t.d. Warren og Cooper (2008).

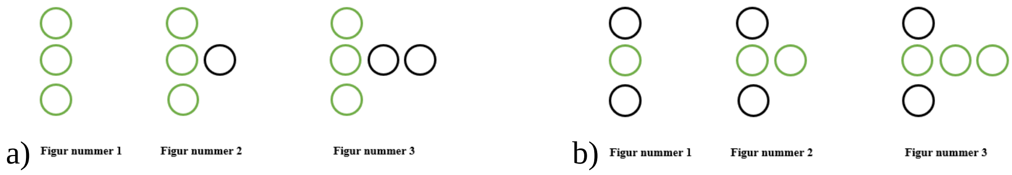
2.2. Figurfølger, funksjonar og mønster

Ei figurfølge er ein sekvens av figurar der objekta i figuren endrar seg frå ein figur til den neste, vanlegvis på ein føreseieleg måte (Billings, 2008). I Figur 1 er det presentert to figurfølger som har like mange sirklar i dei ulike figurnummera, men som ser annleis ut. Vanlege spørsmål i samband med figurfølger er om ein kan finne konkrete figurnummer eller ein generell regel (t.d. Cooper & Warren, 2011; Lannin, 2005; Radford, 2011; Rivera, 2010). For å betre skilje mellom dei 30 figurane som er nemnt i figurlista og figurnummera som er ein del av ei figurfølger, er figurar som er ein del av figurlista omtalt som «Figur» med stor forbokstav og i ein skriftstorleik mindre enn resten av teksten.



Figur 1: a) Figurfølga frå oppgåve 1 i masterprosjektet. b) Døme på figurfølge med like mange sirklar i kvar figur som den i Figur 1a.

Ulike individ kan sjå same mønster på ulike måtar (Rivera & Becker, 2008). To ulike måtar å dekomponere figurfølga i Figur 1b er vist i Figur 2.



Figur 2: To måtar å dekomponere figurfølga i Figur 1b.

Ei kopling mellom figurfølger og algebra er at figurfølger kan uttrykkast som algebraiske funksjonar. Utdanningsdirektoratet (2013, s. 3) skriv om funksjonar at «Ein funksjon beskriv endring eller utvikling av ein storleik som er avhengig av ein annan, på ein eintydig måte». I samband med figurfølgene over vil endringa i talet på sirklar vere ein storleik som er avhengig av figurnummer. Eintydig vil seie at eit bestemt figurnummer i ei figurfølge berre kan gje eit bestemt tal med sirklar i figuren. Til dømes kan ikkje figur 10 i figurfølgene over ha noko anna enn 12 sirklar.

Lineære funksjonar, som denne masteroppgåva tek utgangspunkt i, kan skrivast på forma $f(x) = ax + b$, og slik kan ein òg skrive talet på sirklar som ein funksjon av figurnummeret. I samband med figurfølger vil det vere naturleg å bytte ut bokstavane og heller skrive $S(n) = an + b$, der *S* er ein avhengig variabel som fortel talet på sirklar, *a* og *b* konstantar, og *n* ein uavhengig variabel som fortel figurnummeret (Billings, 2008). Talet på sirklar er avhengig av figurnummer. I figurfølger er *n* eit naturleg tal. På denne forma er *a* det variable bidraget til totale sirklar i figur *n*, og *b* det konstante bidraget for alle figurar. Slik kan begge figurfølgene i Figur 1 skrivast på forma $S(n) = 1n + 2$, der *S* er talet på sirklar i figuren og *n* er figurnummeret. To ulike fokus som er vanleg å ha i møte med mønster er anten å vere oppteken av relasjonen mellom figurane i sekvensen, eller å ha eit fokus på relasjonen mellom mønstera og figurnummera (Warren & Cooper, 2008).

Carraher et al. (2008, s. 4) skriv at eit mønster ikkje er eit matematisk objekt og at det ikkje er ei einigheit mellom matematikarar kva eit mønster er, eller kva som er eigenskapane og operasjonane deira. Samtidig handlar hovudområdet «Tal og algebra» i LK06 om å utvikle talforståing og innsikt i korleis tal og talbehandling inngår i system og *mønster*» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 2, mi kursivering). At mønster er nemnt i læreplanen gjer det svært relevant for norsk skule, og sjølv om det ikkje er einigheit om kva eit mønster er kan det likevel vere ein god måte å nærme seg algebra (Carraher et al. 2008). Mulligan, Mitchelmore og Prescott (2006, s. 209) har forsøkt seg på ein definisjon av mønster. Dei skriv at ein grovt sett kan definere eit mønster som ein numerisk eller romleg regelmessigheit, og at relasjonen mellom dei ulike komponentane i mønsteret dannar strukturen til mønsteret. Korleis ein ser på mønster og struktur kan variere. Mulligan og Mitchelmore (2013) ser ut til å meine det er noko som er ibuande i matematiske system, medan Battista (1999) og Battista og Clements (1996) ser ut til å meine at det er konstruert frå matematiske system. Mønster og struktur kan vere noko systemet i seg sjølv har, eller noko systemet har fått tvunge på seg. Dette vil bli drøfta nærare i ei utdjupinga av Mulligan og Mitchelmore (2013) sitt AMPS-rammeverk.

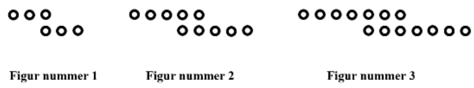
2.3. Generalisering

I samband med generalisering må Mason (1996) sine kjende ord om generalisering som hjerteslaget til matematikk trekkast fram. For han er generaliseringa så sentral at han skriv at dersom ikkje læraren er medviten nærvær til generaliseringa, og dersom læraren ikkje har som vane å få elevar til å arbeide med å uttrykke deira eigne generaliseringar, så har ikkje matematisk tenking funne stad. Generalisering handlar om «*seeing a generality through the particular* and *seeing the particular in the general*» (Mason, 1996, s. 65). Ein forsøker å sjå det generelle i det bestemte og det bestemte i det generelle. Til dømes dersom ein nyttar dei fyrste figurane i ei figurfølge til å kome med eit generelt uttrykk for figurfølga, eller dersom ein nyttar eit generelt uttrykk til å seie noko om eigenskapane til ein bestemt figur.

I samband med generalisering skriv Lannin (2005) at det er det sentralt kva grunngjeving ein har for generaliseringa, då generalisering ikkje kan skiljast frå grunngjeving. Elevane sine grunngjevingar gjev eit vindauge til å sjå på deira forståing av det generelle i reglane deira (Lannin, 2005). For å undersøke kvalitative skilnadar mellom 2. og 5. trinn vil det i analysekapittelet mellom anna bli sett på korleis elevane grunngjev generaliseringsstrategiane sine. Dette med utgangspunkt i rammeverket til Lannin (2005).

2.3.1. Rammeverket for generaliseringsstrategiar

For å undersøke elevar sine generaliseringsstrategiar kan ein nytte eit rammeverk av Lannin et al. (2006, s. 6) som er presentert i Tabell 1. For å forklare dei ulike strategiane vert figurfølga i Figur 3 nytta. Figurfølga er ei oppgåve som elevane fekk i pilotstudien dersom det vart tid.



Figur 3: Figurfølga frå oppgåve 4 i pilotstudien.

Rammeverket til Lannin et al. (2006, s. 6) består av fire ulike generaliseringsstrategiar som vert presentert i Tabell 1. Strategiane er eit kontinuum frå rekursive strategiar til eksplisitte strategiar. Det er glidande overgangar mellom strategiane, men det er stor skilnad på ytterpunkta.

Tabell 1: Rammeverk for generaliseringsstrategiar (Lannin et al. 2006, s. 6)

Generaliseringsstrategiar (Lannin et al. 2006, s. 6)

Strategi	**Skildring**
Eksplisitt	Det vert konstruert ein regel som gjer at ein med ein gong kan rekne ut ut-verdien for ein bestemt inn-verdi. Til dømes kan ein dele figuren inn i fleire delar og summere talet på sirklar i desse delane. Den øvste rada har ein sirkel, figurnummeret og figurnummeret. Det same har rada under.
Heil-objekt	Ein nyttar ein del av ei mengde til å konstruere ei større eining ved å multiplisere. Det kan, men treng ikkje, vere ein passande justering for for mange eller for få. Til dømes kan ein elev multiplisere talet på sirklar i figur 1 med ti for å inne figur 10, noko som ikkje gjev korrekt svar. Eller så kan eleven sjå vekk frå sirkelen på kvar rad, multiplisere dei fire andre sirklane med 10, og så legge til 2.
«Chunking»	Ein nytter eit rekursivt mønster til å bygge vidare på eit figurnummer ved å nytte ein kjent verdi. Ein finn ikkje etterfølgande figurar, men nyttar kunnskapen om etterfølgande figurar til å finne figurar lengre vekk.

	Dersom ein veit at talet på sirklar i figur 4 er 18, kan ein finne at figur 10 har $18 + 4(6)$ sirklar, då det aukar med 4 sirklar for kvar figur og ein må legge til fire seks gongar for å kome til figur 10..
Rekursiv	Ein skildrar ein relasjon som eksisterer i situasjonen mellom etterfølgjande verdiar til den uavhengige variabelen. I dømet vert det for kvar figur lagt til 4 sirklar.

2.3.2. Rammeverk for grunngjeving

Sidan Lannin (2005) skriv at generalisering ikkje kan skiljast frå grunngjeving har han òg laga eit rammeverk for å kategorisere elevar sine grunngjevingar. Kategoriane i rammeverket går frå å ikkje grunngje til å kome med deduktive argument som er uavhengige av bestemte tilfelle. Rammeverket vert presentert i Tabell 2.

Tabell 2: Rammeverk for grunngjeving (Lannin, 2005, s. 236)

Rammeverk for grunngjeving (Lannin, 2005, s. 236)

Nivå på grunngjeving	**Skildring**
Nivå 0: Ingen grunngjeving	Svara tek ikkje opp grunngjeving. Eg tolkar det òg som ingen grunngjeving når ein elev til dømes svarar at figur 100 har 120 sirklar fordi 120 er eit stort tal, då det ikkje vert grunngjeve kvifor det må vere eit stort tal eller akkurat dette store talet.
Nivå 1: Referer til ekstern autoritet	Referer til at eit anna individ eller referansemateriale har påstått at noko er korrekt.

	Eg ser på det som å referere til ekstern autoritet når ein elev gjentek det ein medelev seier og nyttar det utan å vise forståing for kva og kvifor ho gjer som ho gjer.
Nivå 2: Empirisk beviser	Grunngjeving vert gjeve gjennom å vise til at nokre bestemte dømer er korrekte. Eg tolkar det som at elevane viser til at noko skjer eller at ein regel fungerer på nokre, men ikkje alle figurane gjeve i oppgåva.
Nivå 3: Generisk døme	Deduktiv grunngjeving som vert uttrykt i eit bestemt tilfelle. Ein argumenterer ut frå eit bestemt døme som illustrere det generelle. Eg tolkar det som generisk når elevane forklarer at noko gjeld for dei tre figurane i oppgåveteksten, og at det difor vil gjelde for andre òg.
Nivå 4: Deduktiv grunngjeving	Validitet vert gjeve gjennom eit deduktivt argument som er uavhengig av bestemte tilfelle. Eg tolkar det som deduktiv grunngjeving dersom elevane argumenterer med utgangspunkt i det generelle for figurfølga utan å snakke om enkeltfigurane. Har ein figurfølga i Figur 3 kan ein argumentere for at talet på sirklar i ein vilkårleg figur kan skrivast som $(1 + figurnummer + figurnummer) + (1 + figurnummer + figurnummer)$. Og difor vert det i figur 10 $(1 + 10 + 10) + (1 + 10 + 10)$ sirklar.

2.4. Bevisstheit om matematiske mønster og strukturar (AMPS)

Forskingsspørsmålet i denne oppgåva tek utgangspunkt i elevar som viser høg strukturkompetanse i direkte og nær generalisering. Oppgåva definerer høg strukturkompetanse som høge nivå på det Mulligan og Mitchelmore (2013) kallar AMPS, Awareness of Mathematical Pattern and Structure, bevisstheit om matematiske mønster og strukturar.

2.4.1. AMPS-omgrepet og relevans for oppgåva

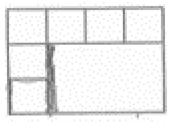
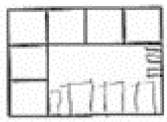
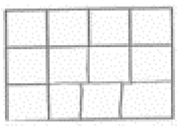
Mulligan og Mitchelmore har skrive mykje om denne bevisstheita om matematiske mønster og strukturar. Funna deira indikerer at AMPS er ein underliggande psykologisk tankemodell (Psychological construct) og at det er høg korrelasjon mellom AMPS-nivå og generell matematisk prestasjon (Mulligan & Mitchelmore, 2013). Mulligan og Mitchelmore (2013) har funne at nivået til elevane kan kategoriserast på ein reliabel måte i 5 kategoriar, 5 steg i eleven si strukturelle utvikling, og at elevane typisk held seg på same nivå på tvers av oppgåve. Det ser ut til at låg AMPS kan hindre tileigning av fundamental matematisk forståing frå ein tidleg alder, og dei fann lite framgang på AMPS-nivå hos elevane på dei lågaste nivåa (Mulligan & Mitchelmore, referert i Mulligan & Mitchelmore, 2013, s. 35-36). Kategoriane i rammeverket går frå å ikkje kjenne igjen dei viktigaste matematiske strukturane til å vere medviten nokre generelle eigenskapar ved strukturane (Mulligan & Mitchelmore, 2013).

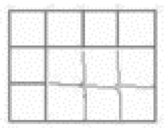
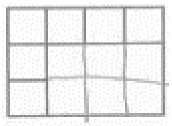
Mulligan og Mitchelmore (2013) konkluderer med at AMPS gjev ei enkel linse å studere elevar si tenking på mange ulike matematiske tema som ein møter i tidleg barndom. Det gjev ein meir uniform tilnærmingsmåte enn det ein får dersom ein ser på kvart tema for seg sjølv. Mulligan og Mitchelmore (2013) har fokusert på elevar på 1. og 2. trinn, men dei skriv at diverse utforskingar med eldre elevar føreslår at AMPS har eit mykje vidare bruksområde. Dei skriv òg at å utvide AMPS for seinare skuleår er eit lovande område for vidare forsking. Difor vil eg sjå på om AMPS kan nyttast på området figurfølger, til å samanlikne 2. og 5. trinn, og eventuelt kva tilpassingar som må gjerast.

AMPS består av to uavhengige komponentar (Mulligan og Mitchelmore, 2013). Ein kognitiv komponent som er kunnskap om struktur, og ein metakognitiv komponent som er ein tendens til å søke og analysere mønster. AMPS vert delt inn i 5 nivå som fortel noko om i kor stor grad eleven er i stand til å observere matematiske strukturar, vere interessert og representere. Dømer på oppgåver elevar har fått er å teikne detaljar på ei tom klokke og ein linjal, og å attskape eit 2x3 rektangel etter å ha fått sett eit glimt av figuren. Eg har plassert AMPS-rammeverket i ein tabell og henta dømer frå ei av oppgåvene i Mulligan & Mitchelmore (2013), ei oppgåve der elevane skal fylle ut eit ufullstendig rektangel ved hjelp av kvadrat. Rammeverket vert presentert i Tabell 3. Fokuset er ikkje på at elevane skal ha perfekte teikningar, men på kva mønster og strukturar dei ser.

Tabell 3: AMPS-rammeverket (Mulligan & Mitchelmore, 2013, s. 35, mi omsetjing). Rammeverket viser 5 steg i den strukturelle utviklinga. Døma er henta frå ei oppgåve i den same artikkelen (s. 39).

AMPS-rammeverket (Mulligan & Mitchelmore, 2013, s. 35, mi omsetjing)

Nivå	**Skildring**	**Døme**
1) Prestrukturell	Elevane vel nokre bestemte eigenskapar som appellerer til dei, men som ofte er irrelevante for det underliggande matematiske omgrepet.	 Prestructural
2) Framveksande	Elevane kjenner igjen nokre relevante eigenskapar, men er ikkje i stand til å organisere desse eigenskapane på ein passande måte.	 Emergent
3) Delvis strukturell	Elevane kjenner igjen dei viktigaste eigenskapane i strukturane, men representasjonane deira er upresise eller ufullstendige.	 Partial

4) Strukturell	Eleven representerer den gitte strukturen korrekt.	 Structural
5) Avansert	Svar som òg generaliserer dei underliggande strukturane til andre kontekstar. Dette i tillegg til å svare korrekt	 Advanced

Det siste nivået, avansert, var ikkje opphaveleg ein del av rammeverket, men eit nivå Mulligan og Mitchelmore la til då dei såg ein tendens til generalisering av dei underliggande eigenskapane (Mulligan & Mitchelmore, 2013, s. 35). I denne oppgåva vil dei fire fyrste nivåa nyttast til å analysere elevarbeid, men elevarbeid vil ikkje kategoriserast som avanserte.

2.4.2. Syn på struktur

AMPS-rammeverket (Mulligan & Mitchelmore, 2013) bygger på Battista (1999, s. 171) sin definisjon av romleg strukturering. Den omtalar romleg strukturering som den mentale operasjonen der ein konstruerer ein organisasjon eller form til eit objekt eller ei gruppe med objekt. Den mentale operasjonen bestemmer objektet sin natur, form eller komposisjon ved å identifisere dei romlege komponentane, relatere og kombinere desse komponentane og etablere innbyrdes relasjonar mellom komponentane og det nye objektet.

Slik eg tolkar Battista (1999) er romleg strukturering den mentale operasjonen der ein organiserer eller formar eit objekt eller ei gruppe objekt. Til dømes dersom ein elev sorterer 20 perler i grupper på fem, eller dersom ein elev fyller eit tomt rektangel med like store kvadrat. Den nye sorteringa eller det fylte rektangelet kan ein sjå på som eit nytt objekt. Korleis dette nye objektet skal vere forma, sett saman eller kva som er eigenskapane til objektet vert bestemt av dei mentale operasjonane. Dette vert gjort ved å identifisere dei romlege komponentane, relatere og kombinere desse komponentane og etablere innbyrdes relasjonar mellom komponentane og det nye objektet.

Sjølv om Mulligan & Mitchelmore (2013) bygger på Battista (1999) kan det sjå ut til å vere ein skilnad i syn på om struktur er noko som er ibuande i materialet, eller om det er noko eleven sjølv konstruerer. Battista (1999) skriv om elevar som konstruerer strukturering, og i

Battista og Clements (1996) reknar Battista med at individ ikkje les av ein struktur, men at individet sjølv dannar ein struktur som eit resultat av individet sine mentale handlingar som gjeld objekta. Mulligan og Mitchelmore (2013) skriv om medvit *om* matematiske mønster og strukturar. Det kan sjå ut som dei ser på struktur og mønster som noko som eksisterer og som ein kan vere medviten. Ein del av AMPS er ein metakognitiv komponent som går på tendens til å søke og analysere mønster. Kanskje kan ein sjå på det å søke mønster som å søke å konstruere mønster.

På trass av ein mogleg ueinigheit i syn på struktur mellom Mulligan og Mitchelmore (2013) og Battista og Clements (1996) har eg valt å nytte Mulligan og Mitchelmore sitt rammeverk som bakgrunn for studien min. Etter å ha tilpassa det til figurfølger vert det nytta til å seie noko generelt om strukturelle skilnadar mellom 2. og 5. trinn og til å velje ut fire fokusgrupper. Uavhengig av om elevar oppdagar eller konstruerer struktur kan ein plassere elevarbeid i AMPS-rammeverket og anten seie noko om kompetansen dei viser på å danne struktur eller kompetansen dei viser til å oppdage strukturar. Sidan eg nyttar AMPS-rammeverket vel eg å skrive om struktur som noko som er i buande figurane, då det er slik eg forstår deira skildring av struktur.

3. Metodekapittel

For å svare på forskingsspørsmålet mitt har eg tatt mange val med tanke på metode for datainnsamling og analyse. Det er desse vala dette kapittelet handlar om.

3.1. Forskingsdesign

Studien min er ein kvalitativ studie der eg fyrst klassifiserer 11 elevpar fordelt på 2. og 5. trinn sine arbeid med figurfølger ut frå strukturnivå, før eg ser nærare på struktur, generalisering og grunngjeving i fire samtalar der elevane viste høg strukturkompetanse. Eg gjennomførte først ein pilotstudie. Eg nytta pilotstudien til å finne ut om det er kvalitative skilnadar mellom 2. og 5. trinn, i tillegg til at den gav meg nyttig informasjon om kva tilpassingar eg burde gjere i oppgåver og spørsmål. Elevane er ikkje valt ut som eit representativt utval for elevar på 2. og 5. trinn, så studien kan ikkje skildre allmenngyldige generelle skilnadar. Målet er heller å få ei djupare forståing av dei bestemte tilfella som studien består av, og seie noko om korleis skilnadar kan sjå ut. Samtidig har eg forsøkt å gje ei transparent framstilling av gjennomføringa av studien slik at andre kan vurdere kvaliteten i forskinga (Tjora, 2017) og samanlikne liknande studiar med min.

Skal ein studere komplekse praksiskontekstar kan ein kvalitativ studie vere hensiktsmessig (Krumsvik, 2014). Slik eg tolkar det kan elevar sitt arbeid med matematikk både vere enkelt og komplekst. Ein kan måle talet på korrekte og gale svar, eller ein kan sjå på interaksjonen mellom elevar som samarbeider, diskusjonane og prosessane fram mot løysingane. Målet med denne studien er å finne ut kva skilnadar det er mellom 2. og 5. trinn i arbeid med figurfølger. Eg ynskja ikkje å talfeste skilnadar, men undersøke dei nærare og sjå på kompleksiteten i kontekstane, og valde difor ein kvalitativ metode. I tillegg gjev kvalitativ metode større moglegheit for å undersøke både kva elevar gjer og kva dei seier at dei gjer (Krumsvik, 2014). Ofte vert dette nytta til å sjå om det informantar seier at dei gjer er det same som det dei faktisk gjer (Krumsvik, 2014). Eg tenker at det òg kan vere ein måte for elevar å få forsvare arbeida sine og dele tankane sine. Kanskje kan elevar ha tenkt heilt rett, men ein liten feil, gjerne i samband med uformell notasjon, gjere at forskar ikkje forstår at eleven har forstått.

Datainnsamlinga gjekk ut på at eg filma elevpar medan dei løyste matematikkoppgåver på eit grupperom. Elevane og eg samtala om oppgåvene undervegs. Samtalene var i form av semistrukturerte intervju, då eg tok utgangspunkt i planlagde spørsmål, samtidig som eg utforma spørsmål undervegs ut frå det elevane svarte (Kruuse, 1996). Eg valde å kombinere metodane observasjon og semistrukturerte intervju, då Tjora (2012) skriv at ein ved å både observere og intervjue får informasjon om kva informantane gjer, men òg kva dei tenker om det dei gjer. Dette er nyttig for å forstå meir av skilnadane mellom 2. og 5 trinn. Sidan elevane visste at eg observerte dei, og sidan eg observerte og intervjua samtidig, var eg ein aktiv del av situasjonen, noko som gjorde meg til ein deltakande observatør (Tjora, 2012). Observasjon kan gje informasjon som til dømes elevane nøler, når dei ser løysinga med ein gong, når dei oppdagar feil og når dei retter den opp, medan intervju kan vere med på å klargjere kvifor dei gjorde som dei gjorde og kva arbeidet deira tydar. Sidan løysing av oppgåver er ein dynamisk prosess kombinerte eg observasjonane med semistrukturerte intervju, då det let meg ta utgangspunkt i planlagde spørsmål, samtidig som eg kunne stille spørsmål ut frå korleis elevane svarte (Kruuse, 1996). Å intervjue fleire samtidig kan gjere situasjonen tryggare for elevane og auke moglegheita for at borna kommenterer på kvarandre sine utsegn, noko som gjer at samtala vert meir på deira premiss, med deira logikk, språk og perspektiv (Kampmann, 2000). Dersom elevar kommenterer kvarandre sine utsegn, stiller spørsmål når den andre seier noko uklårt, og diskuterer seg imellom får eg meir informasjon om prosessen deira med løysing av oppgåver, då interaksjon kan generere data (Tjora, 2017). Eg valde å ikkje ha fleire enn to elevar på kvar gruppe då elevane oftast samarbeider med ein annan elev og det kan vere krevjande nok å sette seg inn i kva ein anna person tenker.

3.2. Datainnsamling

I studien min har eg samla inn empiri frå to skular i same kommune, med om lag likt tal på elevar. Den eine skulen vart nytta i pilotprosjektet mitt medan den andre vart nytta i hovudundersøkinga. Skulane er valt på bakgrunn av det Tjora (2017) kallar «bekvemmelighet». Ved begge skulane kjende eg lærarar eller tilsette i leiinga som var villige til å la meg kome til skulen. Dei fleste elevane på 2. trinn visste kven eg var før intervjua starta då eg anten hadde vore vikar eller besøkt klassen tidlegare. Med utgangspunkt i forskingsspørsmålet mitt ynskja eg å sjå på 2. og 5. trinn sitt arbeid med figurfølger. Eg valte å sjå på 2. trinn for å få innblikk i korleis dei minste elevane i barneskulen løyser oppgåver med figurfølger. Årsaka til at eg ikkje såg på 1. trinn er at dei på hausten nettopp har lært å gå på skulen og at det difor kan vere meir krevjande å intervjue dei. Særleg sidan intervju krev at dei er konsentrert over ein lengre periode. Målet med denne studien er å samanlikne dei yngste elevane med eldre elevar. Eg ynskja så gamle elevar som mogleg for å tydlegare sjå eventuelle skilnadar, samtidig som eg ynskja at dei ikkje hadde arbeida mykje med figurfølger slik at den formelle opplæringa på dette området var likast mogleg for trinna. Eg valde å ikkje sjå på eldre elevar enn 5. trinn då dei frå 5. trinn av høyrer inn under eit kompetansemål som handlar om geometriske mønster. Etter 7. trinn skal dei kunne «utforske og beskrive strukturar og forandringar i geometriske mønster og talmønster med figurar, ord og formlar» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 6). Eg spurte ikkje direkte, men ingen av lærarane eller elevane gav uttrykk for at dei hadde arbeida med slike oppgåver før. Elevpara var det lærarane til elevane som sette saman på bakgrunn av at eg ynskja elevar som kunne kommunisere godt saman. Dei trengte altså ikkje å vere på same nivå i matematikk. Alle elevane frå 2. trinn der foreldra hadde signert samtykke fekk delta i studien. Einaste unntaket var ein elev som var sjuk då eg var der. Nokre grupper bestod av ei jente og ein gut, medan andre grupper bestod av elevar med same kjønn.

Datainnsamlinga mi gjekk føre seg i tre omgangar. I pilotstudien gav eg i fyrste omgang ei figurfølge til ein heil 2. klasse. Deretter intervjua eg 6 elevpar frå same klassen om nye oppgåver, i tillegg til 3 elevpar frå ein klasse på 5. trinn. I hovudstudien samtala eg med til saman 6 elevpar frå to klassar på 2. trinn og til saman 5 elevpar frå to klassar på 5. trinn. Pilotstudien hjelpte meg til å få eit innblikk i kva som var passande oppgåver, korleis spørsmåla burde stillast og kva som burde vere fokusområde i hovudstudien. Hovudstudien baserte seg på ei utdjuping av to av oppgåvene frå pilotstudien. Alle intervjua vart filma, og eg valde å ikkje notere undervegs då eg var uroa for at elevane skulle bli opphengt i kva eg skreiv. Å ikkje notere gjorde det òg lettare å ha eit større fokus på elevane. Ein fordel med filming er at nokre gestar kan vere for små til at ein oppfattar dei i intervjusituasjonen, men ser ein gjennom datamaterialet fleire gongar oppdagar ein det kanskje på videoen (Tjora, 2017). Slike gestar er særleg sentralt i yngre elevar sitt arbeid med matematikk, då det kan vere ein del av måten dei kommuniserer og forklarer kva dei har tenkt og gjort. I analysekapittelet vert fleire situasjonar der elevane nyttar peiking i staden for ord, presentert.

3.2.1. Pilotstudie

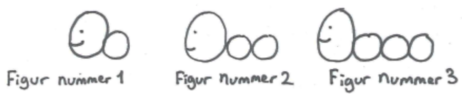
Opphaveleg skulle fyrste del av pilotstudien vere pilotstudie og gruppeintervjua vere hovudstudien. Målet var å finne ut korleis elevar på 2. trinn og 5. trinn løyste figurfølger og kva kvalitative skilnadar ein kunne finne. Etter å ha analysert datamaterialet fann eg at det var stor variasjon i kva strukturar elevane såg ut til å sjå. Dette var noko datamaterialet mitt kunne seie ein god del om, men som eg ynskja å vite endå meir om. Sidan eg fekk eit ynskje om å sjå grundigare på figurfølger med eit strukturperspektiv som utgangspunkt, valte eg å gjennomføre ein ny studie basert på dei to rundane med datasamling eg allereie hadde gjort, med oppgåver frå pilotstudien, men i tillegg med spørsmål som la vekt på korleis elevane teikna eller såg figurane. Dette vart innarbeida i ein intervjuguide som vil bli presentert grundigare i presentasjonen av hovudstudien. Fyrst vil eg presentere dei to fyrste datainnsamlingane som har vorte pilotstudien min.

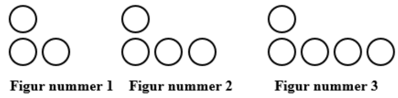
Pilotstudien gjekk føre seg i to delar, fyrst i ein heil 2. klasse. Deretter intervjua eg 6 elevpar frå 2. klassen og 3 elevpar frå 5. trinn om nye oppgåver med figurfølger. Dette var talet på grupper som passa ut frå kor mange som hadde godteke å vere med i studien og kor mange eg hadde moglegheit til å snakke med i det passande tidsrommet. Hensikta med å gjennomføre i heil klasse var for å få ei generell oversikt over kva eg kunne vente av elevane. I tillegg nytta elevane på 2. trinn mykje iPad til å skrive på, noko eg ynskja erfaring med før eg intervjua dei vidare.

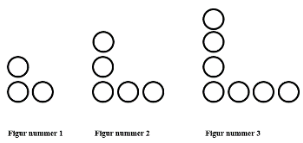
Fyrste del av pilotstudien var at ein 2. klasse fekk arbeide med ei figurfølge som eg samtala med dei om i heil klasse i etterkant. Denne oppgåva er kategorisert som introduksjonsoppgåve i Tabell 4. Gjennomføringa i heil klasse fann stad i midten av oktober 2017, og tok ein liten halvtime. Etter å ha spurt om nokon av elevane hadde lyst til å bli filma medan dei jobba, ein film berre eg og eventuelt rettleiaren min skulle sjå, valde eg ut eit elevpar som eg eg filma medan dei jobba. Eg nytta opptaket i førebuinga til andre del av pilotstudien. Sett bort frå at vi samtala om oppgåvene i etterkant i stadne for undervegs var oppgåva den same introduksjonen som elevpara frå 5. trinn fekk i sine intervju.

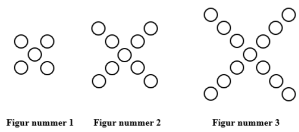
Del to av pilotundersøkinga, gruppeintervjua, gjekk føre seg om lag ein månad etter gjennomføringa i heil klasse. Intervjua tok 17-30 minutt på 2. trinn og 40-47 min på 5. trinn. 5. trinn, og figurfølgene elevane fekk er presentert i Tabell 4. Oppgåve 4 vart det i mange intervju lite tid til å sjå på. Før vi begynte med oppgåvene snakka vi om omgrepet figurnummer og eg spurte dei om talet på sirklar i figur 1, 2 og 3 som dei hadde framføre seg. Då alle oppgåvene spurte om figurnummer var det viktig at elevane hadde kjennskap til omgrepet. I tillegg fungerte det som oppvarmingsspørsmål, noko som kan gjere elevane ei tryggheit til at dei beherskar situasjonen (Tjora, 2017). Hovudfokuset i intervjuet var desse fire deloppgåvene: «Kor mange sirklar har figur nummer 4?», «Kor mange sirklar har figur nummer 10?», «Kor mange sirklar har figur nummer 100?», og etter å ha skrive opp eit figurnummer elevane ikkje fekk sjå «Kan de forklare meg korleis eg kan finne ut kor mange sirklar figuren min skal ha?». Spørsmåla handlar om direkte, nær og fjern generalisering, dei tre typar mønstergeneralisering som El Mouhayar og Jurdak (2016) skriv om. Målet med spørsmålet om det hemmelege figurnummeret var at elevane skulle uttrykke noko generelt.

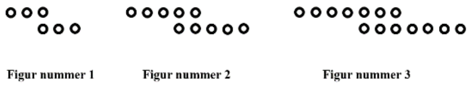
Tabell 4: Figurfølgene frå oppgåvene i pilotstudien. Elevane fekk oppgjeve dei tre fyrste figurane i kvar figurfølge. Oppgåve 1 og 3 vart nytta i hovudstudien

<table>
<tr><th>Oppgåve</th><th>Figurfølge</th></tr>
<tr><td>Introduksjon</td><td>

Basert på Blanton (2008, s. 169)</td></tr>
<tr><td>Oppgåve 1</td><td>

Inspirert av Warren og Cooper (2008, s. 175)</td></tr>
<tr><td>Oppgåve 2</td><td>

Basert på Rivera (2010, s. 213)</td></tr>
<tr><td>Oppgåve 3</td><td>

Basert på Måsøval (2011, s. 260)</td></tr>
<tr><td>Oppgåve 4</td><td>

Basert på El Mouhayar og Jurdak (2016, s. 202)</td></tr>
</table>

I oppgåvene som opphavleg ikkje hadde sirklar som komponentar er desse endra til sirklar, då det tek lengre tid å teikne t.d. eit kvadrat enn ein runding, og eg ynskja ikkje at tida skulle bli brukt på slike detaljar. Oppgåve 2 og 3 startar på det som hos høvesvis Rivera (2010) og Måsøval (2011) er figur nummer 2. Oppgåve 2 hadde opphaveleg to sirklar til venstre slik eg og har, men resten av sirklane var plassert litt lengre opp, slik at dei sto på høgde med mellomrommet mellom dei to sirklane til venstre. Oppgåvene er valt på bakgrunn av at dei alle har positiv lineær vekst. Sidan dette er ein kvalitativ studie ynskja eg å gå i djupna på positive og lineære figurfølger, i staden for å studere figurfølger med mange ulike typar strukturar. Eg valde figurfølger der introduksjonsoppgåva mellom anna kan skrivast på forma $S(n) = n + 1$, oppgåve 1 som $S(n) = n + 2$, oppgåve 2 som $S(n) = 2n + 1$ og oppgåve 3 som $S(n) = 4n + 1$, der *n* er figurnummeret. Desse uttrykka tenkte eg kunne vere ein naturleg progresjon. Introduksjonsoppgåva med larven har ein sirkel som tydeleg er større enn dei andre, og like mange sirklar i kroppen som figurnummeret. Slik er koplinga til figurnummeret ganske tydeleg, noko som er hensiktsmessig då ein ynskjer at elevane skal oppdage slike koplingar. Oppgåve 4 vart valt som ei ekstra oppgåve der det er vanskelegare å sjå koplingane til figurnummera, men figurfølga kan til dømes skrivast på forma $S(n) = 2(n + 1) + 2n$, eller som $S(n) = 4n + 2$

Intervjua starta med at elevane fyrst fekk informasjon om prosjektet og videoopptak. Deretter snakka vi saman om omgrepet figurnummer og tal på sirklar i dei ulike figurane på oppgåvearket. I den delen av pilotstudien som vart gjennomført i klasserommet fekk elevane i oppgåve å notere svara sine. I gruppeintervjua fekk elevane svare på spørsmåla munnleg, og vi samtala om det dei gjorde undervegs. I fyrste del av piloten erfarte at samtale med elevane gav meg nyttig informasjon. Den fyrste gruppa eg intervjua på grupperom fekk spørsmåla til oppgåve 1 nedskrive i starten, men lov til å svare munnleg. Eg erfarte at det fungerte dårleg at dei hadde spørsmåla framføre seg. Difor gjekk eg over til å stille spørsmåla munnleg. Elevane hadde moglegheit til å notere undervegs, og dersom dei sto fast bad eg dei teikne figurane. I tillegg bad eg dei innimellom å teikne figurane for å få sett om dei tok omsyn til strukturane.

3.2.2. Erfaringar frå pilotstudien

I pilotstudien gjorde eg meg nokre erfaringar som eg tok med meg i førebuingane av hovudstudien. Eg såg mellom anna at fleire elevar ikkje såg ut til å ta omsyn til struktur. I oppgåve 1 var det til dømes fleire elevar som teikna figur 4 som seks vassrette sirklar. Dette gjorde at eg i større grad la vekt på struktur i hovudstudien. Sjølv om elevane ikkje alltid tok omsyn til struktur, var oppgåve 1 den elevane gjorde det best på. Difor vart denne oppgåva tatt med vidare. I ettertid av pilotstudien såg eg at mange av elevane i arbeidet med introduksjonsoppgåva snakka om «ein meir», men det var vanskeleg å skilje om dei snakka om ein meir enn mengda sirklar i figuren eller ein meir enn figurnummeret. Oppgåve 4 vart òg tatt vekk då ikkje alle elevane på 2. trinn fann figur 4 og ingen fann figur 10, noko som gjer at ein får lite fokus på generalisering dersom ein undersøker svara deira. 5. trinn gjorde det bra på både oppgåve 2 og 3, men sidan 2. trinn gjorde det best på oppgåve 3 valde eg å ta den med vidare til hovudstudien. Det betyr ikkje at elevane fekk til alt, men at det er oppgåver elevar på 2. trinn kan oppleve noko mestring i møte med.

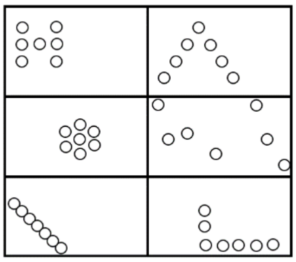
Frå pilotintervjua hadde eg god erfaring med å la elevane svare munnleg, noko ein òg kan argumentere for ut frå litteratur. Warren og Cooper (2008) fann at elevane ofte gjekk tilbake til svar på «lågare nivå» når dei vart bedne om å skrive generaliseringane skriftleg. Eg undersøkte elevar nede på 2. trinn. Å uttrykke ein generell figur skriftleg kan vere vanskeleg for elevar på 8. trinn (Radford, 2010), noko som gjer det rimeleg å rekne med at det vil vere minst like vanskeleg for elevar på 2. trinn. I tillegg kan ein viktig del av prosessen med å kjenne igjen ein funksjon og uttrykke den algebraisk vere ein verbal skildringsfase (Stacey og MacGregor, 2001).

Ei utfordring eg møtte var at eg ikkje hadde det heilt klart om eg alltid skulle gje elevane alle deloppgåvene, eller gå vidare til neste oppgåve. Til dømes dersom ein elev ikkje klarte ei deloppgåve, eller dersom ein elev uttrykte noko generelt tidleg. Det gjorde at elevane fekk ulike deloppgåver, noko som gjorde analyse vanskelegare. For å unngå dette laga eg ein meir strukturert intervjuguide. Utdrag ligg som Vedlegg 5. Ei anna utfordring var å vere medviten språkbruk. Eg erfarte i pilotstudien at det var lett å snakke om «ein meir enn nummeret», eller berre «ein meir» i staden for «ein meir enn figurnummeret», noko som er meir presist og tydeleggjer kva ein snakkar om. Dette var eg medviten i hovudstudien.

3.2.3. Intervju med elevpar

Hovudstudien vart gjennomført i januar 2018. Hovudsakleg vart hovudstudien gjennomført på same måte som gruppeintervjua i pilotstudien. Hovudstudien består av intervju med 6 elevpar frå 2. trinn og 5 elevpar frå 5. trinn. I pilotstudien fann eg det hensiktsmessig å sjå på 6 grupper frå 2. trinn då det gav meg eit overblikk over trinna og fleire grupper eg kunne velje å sjå nærare på. På grunn av manglande tid fekk eg berre samtala med 5 grupper frå 5. trinn i hovudstudien. Intervjua med 2. trinn varte i 24-34 minutt, der gjennomsnittet var 30 minutt. Intervjua med 5. trinn varte i 19-32 minutt, der gjennomsnittet var 24 minutt. Både pilot og hovudstudie vart gjennomført på grupperom elevane var kjende med, noko som kan gjere elevane meir avslappa (Tjora, 2017). I tillegg er det hensiktsmessig då intervjua bør gå føre seg på ein stille og roleg plass (Doverborg & Samuelsson, 1991). Med unntak av ei ivrig gruppe frå 5. trinn vart intervjua ikkje gjennomført medan elevane hadde friminutt (Doverborg & Samuelsson, 1991). To elevar sat på ei side av eit bord og eg sat rett ovanfor dei på andre sida av bordet. Kameraet var retta mot elevane og bordflata og vart skrudd på etter at prosjektet var presentert og elevane hadde gjeve sitt samtykke til å bli filma. Etter intervjua samla eg inn elevarbeida.

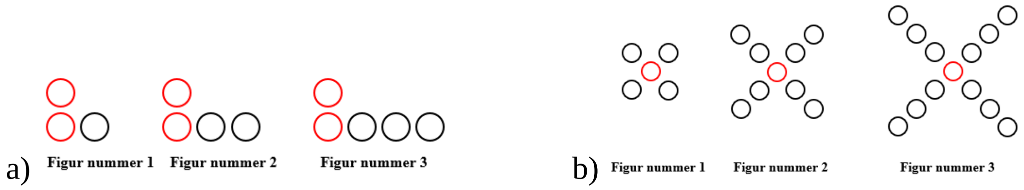
I staden for å starte intervjua med introduksjonsoppgåva med larven starta eg med fokus på struktur. Eg viste dei eit ark, Figur 4, med seks bilete som alle bestod av sju sirklar. Sirklane er plassert på ulike måtar og vi snakka om at *struktur* har noko å seie, ikkje berre tal på sirklar. Dette då mange elevar i pilotstudien teikna figurar utan omsyn til struktur, og eg difor ville sjå nærare på fenomenet. Ein komprimert versjon av bileta er vist under.



Figur 4: Samtalebilete om struktur

Eg utvida oppgåvene til å ha eit større fokus på struktur, samtidig som eg korta ned på talet oppgåver slik at intervjua ikkje skulle bli for lange. På bakgrunn av erfaringar frå pilotstudien valde eg ut oppgåve 1 og 3 i Tabell 4 til hovudstudien. Som ein introduksjon til sjølve figurfølgene samtala vi om omgrepet figurnummer, kor mange sirklar dei ulike figurane på oppgåvearket hadde, og at det er eit mønster, ein regel korleis figurane blir større. Saman med samtalen om struktur i bileta i Figur 4 fungerte dette som oppvarmingsspørsmål (Tjora, 2017). Eg stilte framleis spørsmål om tal på sirklar i figur 4, 10, 100 og hemmeleg figurnummer, men eg la til spørsmål om dei kunne teikne figur 4 og 10. I tillegg spurte eg om dei kunne forklare korleis figur 100 vil sjå ut og korleis hemmeleg figurnummer vil sjå ut eller korleis ein kan teikne den.

For å få meir samanliknbare resultat valte eg å lage ein meir strukturert intervjuguide. Eit utdrag frå intervjuguiden ligg som Vedlegg 5. Sjølv om strukturen i intervjua vart strengare var det framleis semistrukturerte intervju då eg, i tillegg til å følgje intervjuguiden, stilte spontane spørsmål til det elevane gjorde eller bad dei om å kommentere på kvarandre sine arbeid. Intervjuguiden var i form av eit flytskjema laga i programmet Mindmanager, og den tok utgangspunkt i erfaringar frå pilotstudien og situasjonar eg tenkte kunne oppstå. Ei større endring eg gjorde var å i nokre tilfelle gje elevar oppgåveark med figurfølgene dekomponer i to fargar, slik Figur 5 viser. Dette då Warren og Cooper (2008) skriv at ei slik oppdeling kan støtte elevane.



Figur 5: Figurfølger dekomponert i to fargar a) figurfølga frå oppgåve 1. b) figurfølga frå oppgåve 3.

Slik utdraget frå intervjuguiden i Vedlegg 5, fekk elevane figurane dekomponert i to fargar dersom dei ikkje visste korleis dei skulle teikne ein figur eller dersom dei teikna feil tal på sirklar. Dersom elevane hadde rett tal på sirklar, men feil struktur, snakka vi om bilda med sju sirklar i Figur 4 og viktigheita av struktur. Dersom dei ikkje endra svaret sitt til ein figur med korrekt struktur aksepterte eg svaret då eg ville sjå på kva effekt to fargar har dersom ein ikkje finn talet på sirklar, ikkje kva effekt det har dersom ein ikkje klarer å strukturere sirklane. Elevar som ikkje fann støtte i figuren med to fargar fekk spørsmål som retta fokus mot talet på svarte og raude sirklar i dei ulike figurane, og eventuelt korleis det kunne koplast til figurnummeret. Eksplisitte spørsmål for å sikre at elevane koplar mønsteret si form til posisjonen vert anbefalt av Warren og Cooper (2008). Intervjuguiden la òg opp til at alle fekk alle spørsmåla, sjølv om dei ikkje fekk til det førre.

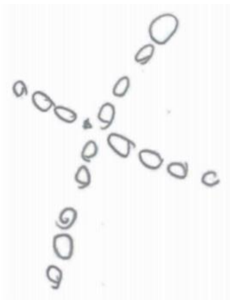
3.3. Analysemetode

Alle figurar og elevsitat er frå hovudstudien med mindre noko anna vert nemnt eksplisitt. Elevarbeida er koda og ut frå klassetrinn og gruppenummer. Gruppenamn har fyrst klassetrinn og så gruppenummer. Gruppe 21 er til dømes den 1. gruppa på 2. trinn. Dersom det er konkrete elevar som seier noko kjem bokstaven H eller V framføre klassetrinn ut frå om dei sat på høgre (H) eller venstre (V) side i rommet då opptaka vart tekne. H54 er ein elev som sat til høgre i rommet, går på 5. trinn og er frå den fjerde gruppa eg intervjua frå det trinnet. Eg har valt å ikkje gje elevane namn då kodar gjer det lettare å sjå kva trinn og gruppe elevane er frå, noko som er sentralt i studien min.

3.3.1. AMPS

I arbeidet med å sortere elevarbeid ut frå strukturering tok eg utgangspunkt i Mulligan & Mitchelmore (2013) sitt AMPS rammeverk. I tillegg forsøkte eg å kategorisere pilotstudien i fire kategoriar som Papic, Mulligan og Mitchelmore (2011) nyttar på figurfølger, då det kan seie noko om korleis Mulligan og Mitchelmore sjølve ser på figurfølger. Eg har valt å nytte AMPS-rammeverket då det deler elevarbeida inn i fleire kategoriar, og fordi det er eit meir generelt rammeverk som kanskje kan gjere at ein kan seie noko meir om elevar sitt medvit om struktur og mønster. Eg har gjort nokre tilpassingar som er presentert i Tabell 5, og som eg vil gå grundigare inn på. Då Mulligan og Mitchelmore (2013) sine kategoriar er generelle, laga eg enkle skildringar for kvar kategori. Desse vart seinare endra. Sidan prestrukturelle figurar har eigenskapar som ofte er irrelevante for det underliggande matematiske omgrepet (Mulligan & Mitchelmore, 2013, s. 35), såg eg på slike figurar som figurar som hadde både feil tal på sirklar og feil struktur. Framveksande definerte eg som rett tal på sirklar, men feil struktur. Dette då eg tolka rett tal på sirklar som ein relevant eigenskap og Mulligan og Mitchelmore (2013, s. 35) definerer kategorien som at eleven kan kjenne igjen nokre relevante eigenskapar, men ikkje er i stand til å organisere desse eigenskapane på ein passande måte. Delvis strukturell vert definert som at elevane kjenner igjen dei viktigaste eigenskapane i strukturane, men representasjonane deira er upresise eller ufullstendige (Mulligan & Mitchelmore, 2013, s. 35). Dette tolka eg som at figurane hadde nesten rett struktur. Korrekt struktur og rett tal på sirklar vart definisjonen på ein strukturell figur, då det handlar om at eleven representerer strukturen korrekt. Sidan sentrale omgrep i AMPS-rammeverket er «relevante eigenskapar» og «viktigaste eigenskapane» og «strukturen» (Mulligan & Mitchelmore, 2013, s. 35), laga eg eit dokument der eg definerte kva som var eigenskapane til ein strukturell struktur. Tabell 6 definerer kva som klassifiserer som ein strukturell figur i oppgåvene i hovudstudien, i tillegg til korleis dei andre nivåa vert definert. Utviklinga av kategoriane er vist i Vedlegg 6.

Etter å ha gjennomført hovudstudien nytta eg elevarbeida frå 2. trinn til å forbetre kategoriane før eg nytta 5. trinn sine svar til å undersøke om dei fungerte. Til slutt kategoriserte eg mesteparten av svara frå pilotstudien på ny. Då eg kategoriserte pilotstudien opplevde eg det som uheldig at prestrukturelle figurar ikkje kunne ha rett tal på sirklar og at framveksande måtte ha det. Difor endra eg definisjonane til nokre av kategoriane slik at dei kunne, men ikkje trengte å ha korrekt tal på sirklar. Eg endra prestrukturell til å vere at dei ikkje viser teikn til at struktur er relevant, og framveksande til at elevane forsøker å vise ein struktur og at dei kan, men ikkje treng, å ha korrekt tal på sirklar. Delvis strukturell delte eg opp i (1) nesten korrekt struktur, feil tal på sirklar, (2) korrekt struktur, feil tal på sirklar og (3) nesten korrekt struktur, korrekt tal på sirklar. Ei slik inndeling gjorde at eg ikkje fekk elevarbeid som kunne kategoriserast som framveksande. I tillegg hamna figurar med større manglar i kategorien delvis strukturell, noko teikningane i Figur 6 er døme på. Begge manglar eit tydeleg sentrum. Difor endra eg kategoriane slik at dei fell inn under ulike kategoriar av framveksande.

a)  b) 

Figur 6: To teikningar som først vart kategorisert som delvis strukturelle. Det er figur 4 oppgåve 2. a) Gruppe 22 sin 2a framveksande figur. b) Gruppe 24 sin 2b framveksande figur.

Dei kategoriane eg endte opp med er dei same som i AMPS-rammeverket, berre at eg i dei tre fyrste kategoriane skil mellom korrekt og feil tal på sirklar. I tillegg har eg laga ein kategori for elevarbeid der elevane teiknar ein av figurane dei har fått oppgitt i oppgåvearket. Denne kategorien er omtalt som kopi av figur frå oppgåvearket. Definisjonane eg har nytta er dei generelle definisjonane frå AMPS-rammeverket, og dei er presentert i Tabell 5.

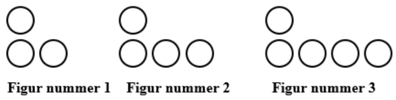
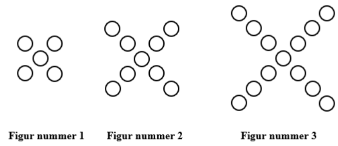
Tabell 5: AMPS-rammeverket slik eg har utvida det med generelle definisjonar basert på Mulligan og Mitchelmore (2013, s. 35)

Eit utvida AMPS-rammeverk	
AMPS-nivå	**Generell definisjon**
0) Kopi av figur frå oppgåvearket	Elevane teiknar ein kopi av ein av dei tre figurane som er oppgjevne i oppgåvearket.
1a) Prestrukturell	Elevane vel nokre bestemte eigenskapar som appellerer til dei, men som ofte er irrelevante for det underliggande matematiske omgrepet. Talet på sirklar er feil.
1b) Prestrukturell	Som 1a prestrukturell, men talet på sirklar er korrekt.
2a) Framveksande	Elevane kjenner igjen nokre relevante eigenskapar, men er ikkje i stand til å organisere desse på ein passande måte. Talet på sirklar er feil.
2b) Framveksande	Som 2a framveksande, men talet på sirklar er korrekt.
3a) Delvis strukturell	Elevane kjenner igjen dei viktigaste eigenskapane i strukturen, men representasjonen er upresis eller ufullstendig. Talet på sirklar er feil.
3b) Delvis strukturell	Som 3a delvis strukturell, men talet på sirklar er korrekt.
4) Strukturell	Elevane representerer strukturen korrekt. Rett tal på sirklar

Korleis eg definerer dei ulike nivåa for oppgåvene elevane fekk i hovudstudien er presentert i Tabell 6. I oppgåve 1 fann eg ingen mellomting mellom prestrukturell og delvis strukturell. Kanskje er dette då figurfølga er simplare enn den i oppgåve 2.

Tabell 6: Skildring av korleis eg har utvida AMPS-rammeverket (Mulligan & Mitchelmore, 2013), og kva som skal til for at oppgåvene frå hovudstudien min fell inn under dei ulike kategoriane.

AMPS-kategoriane for oppgåvene i hovudstudien

Strukturelt nivå	**Oppgåve 1**	**Oppgåve 2**
		
0) Kopi av figur frå oppgåvearket	Figuren er ein av dei tre figurane som er oppgjevne i oppgåvearket.	Figuren er ein av dei tre figurane som er oppgjevne i oppgåvearket.
1a) Prestrukturell	Figuren manglar anten to sirklar oppå kvarandre på venstre side, vassrette sirklar, eller begge delar.	Figuren har verken fire «armar» eller eit sentrum. Talet på sirklar er feil.
1b) Prestrukturell	Som 1a prestrukturell, men talet på sirklar er korrekt.	Som 1b prestrukturell, men talet på sirklar er korrekt.
2a) Framveksande	*Eg fann ingen mellomting mellom prestrukturell og delvis strukturell på denne oppgåva.*	Figuren har fire armar, men det er tydeleg at dei ikkje er like lange og/eller dei manglar eit tydeleg sentrum. Talet på sirklar er feil.
2b) Framveksande	*Eg fann ingen mellomting mellom prestrukturell og delvis strukturell på denne oppgåva.*	Som 2a framveksande, men talet på sirklar er korrekt.
3a) Delvis strukturell	Figuren har to sirklar over kvarandre på venstre side og vassrette sirklar ut frå desse to. Dei vassrette sirklane startar ikkje ved den nedste av dei to sirklane som står over kvarandre. Talet på sirklar er feil.	Figuren har eit tydeleg sentrum og har fire armar som går ut frå sentrum. Armane er om lag like lange, men har ikkje like mange sirklar i kvar. Talet på sirklar er feil.
3b) Delvis strukturell	Som 3a delvis strukturell, men talet på sirklar er korrekt.	Som 3a delvis strukturell, men talet på sirklar er korrekt.
4) Strukturell	Figuren har vassrette sirklar med ein sirkel over sirkelen lengst til venstre. Talet på sirklar er korrekt.	Figuren har eit eit tydeleg sentrum og fire armar ut frå sentrum med like mange sirklar i kvar arm. Talet på sirklar er korrekt.

3.3.2. Utval og analyse av fire fokusgrupper

For å finne svar på forskingsspørsmålet forsøkte eg å finne elevpara med høgast strukturkompetanse. For å få ei oversikt over kva AMPS nivå elevane sine arbeid er på laga eg Tabell 7. Tabellen viser kva som er det høgaste AMPS nivået gruppene er på på dei ulike oppgåvene. Denne informasjonen og informasjon om kva som er det lågaste nivået elevane er innom på dei ulike oppgåvene nytta eg til å lage radardiagram (Figur 13 og Figur 14) som viser kva som er det høgaste og lågaste AMPS nivået dei ulike gruppene er på i oppgåve 4 og 10. Ut frå radardiagrammet valde eg dei to gruppene frå kvart trinn som viste høgast strukturkompetanse.

For å analysere dei fire fokusgruppene transkriberte eg, med unntak av ein del av intervjuet med gruppe 24, intervjua i Nvivo 11 for så å skrive dei ut. Programmet gjer at ein slepp å bytte mellom tekst og videoprogram, noko som gjer transkripsjonen enklare. Elevane og mine sine utsegn er skrive på nynorsk og eg nytta ei enkel koding ved at eg skreiv handlingar i parentes «()», og to skråstrekar «//» dersom nokon snakkar samtidig. Elevane er koda slik det vart presentert i analysemetoden, og «E» tyder forfattaren av denne masteroppgåva. Dersom elevar i ettertid har endra figurar, til dømes ved å teikne på ekstra sirklar, er dette redigert vekk for å gje eit tydlegare bilete av korleis figuren såg ut på det aktuelle tidspunktet i samtala. Figur 25a viser ein figur der sirklar er redigert vekk medan Figur 25b viser korleis figuren såg ut etter at elevane teikna vidare på den. I tilfella der dette er vanskeleg er det kommentert kva som i ettertid har vorte endra. Eg nytta Lannin (2005) og Lannin et al. (2006) til å kategorisere grunngjeving og generalisering i utskrifter av transkripsjonane. I tillegg skreiv eg på dei ulike AMPS nivåa, då eg allereie hadde kategorisert alle elevarbeida. Etter å ha kategorisert mesteparten av samtalane laga eg skjematiske oversikter over samtalene. Kvar gruppe fekk eit skjema for kvar oppgåve. Skjemaa fortalte, med utgangspunkt i generaliseringsstrategiar, korleis samtalene utvikla seg, kva grunngjeving elevane hadde på dei ulike tidspunkta og kva strukturelt nivå figurane deira var på. Vidare såg eg på skilnadar og likskapar mellom kvar gruppe si oppgåve 1 og 2, og skilnadar og likskapar mellom dei ulike elevgruppene. I tillegg har eg sett på kva utfordringar elevane hadde, og når dei hadde behov for å få oppgåvearket med figurane dekomponert i to fargar. Eg har forsøkt å sjå på alle gruppene sin struktur samla, alle gruppene sine generaliseringsstrategiar samla og alle gruppene sine grunngjevingar samla, men erfarte at dette gjorde at ein mista oversikt over dei ulike gruppene og at det vart mykje gjentaking.

Difor har eg valt å presentere det ei og ei gruppe gjorde på oppgåve 1, for så å gjere det same for oppgåve 2. I drøftingskapitelet ser eg nærare på enkeltstrategiar og utfordringar på tvers av grupper.

3.4. Truverdigheita til studien

Sidan studien er min er ein kvalitativ studie med få informantar kan eg ikkje seie noko generelt om kva skilnadar ein finn mellom 2. og 5. trinn i norske skular, men eg kan seie noko om korleis det kan sjå ut og kva som kan vere potensielle utfordringar for elevar. Eg har forsøkt å gje ei transparent framstilling av alle ledda i studien for å gje truverdigheit til, og slik at andre kan vurdere kvaliteten i forskinga (Tjora, 2017). Analysen bygger på kjende artiklar og eg har gjort greie for korleis eg tolkar og nyttar omgrepa i analysen. For å ivareta reliabiliteten i dataproduksjonen var det viktig for meg at oppgåvene eg gav elevane var presise oppgåver med spørsmål som elevane kunne forstå (Krumsvik, 2014). Ved å gjennomføre ein pilotstudie fekk eg prøvd ut oppgåver og spørsmål som eg gjorde naudsynte endringar i før pilotstudien. Bruken av Nvivo 11 til transkribering gjorde det enklare å transkribere nøyaktig, noko som er viktig då analysen byggjer på transkripsjonane. Ein nøyaktig transkripsjon gjer studien meir reliabel (Krumsvik, 2014).

3.5. Etikk og metodekritikk

Før eg gjennomførte studien fekk eg godkjenning frå NSD. Sjølv om foreldra til alle elevane eg intervjua hadde signert at dei samtykka til deltaking og at dei hadde snakka med eleven om studien, var eg medviten at godkjenninga ikkje berre bør gjerast på førehand (Kampmann, 2000). Dette sjølv om t.d. Doverborg og Samuelsson (1991) erfarte at det var populært blant elevane å bli intervjua. Eg erfarte òg at fleire elevar som ikkje fekk delta i studien på grunn av manglande samtykkeskjema, var misnøgde. Undervegs i intervjua forsøkte eg å vere medviten om elevane såg ut til å ikkje ynskje å bli intervjua lengre (Kampmann, 2000). Undervegs spurte eg elevane om det var greitt med ei oppgåve til. Eit par gruppe på 2. trinn fekk tilbod om å avslutte undervegs i den andre oppgåva. Eg avslutta intervjuet med gruppe 22 tidleg då eine eleven uttrykte at han var veldig lei. Gruppe 23 vart lei halvvegs i oppgåve 2. Elevane fekk tilbod om å gå, men dei bestemte seg for å bli ei stund. Litt seinare sa eine eleven at han ville gå, så då avslutta vi intervjuet. Tjora (2017) skriv at ein må vere merksam på at ein kan skade informantane sine. Til dømes kan intervjua opplevast som ubehageleg. I intervjua forsøkte eg å legge vekt på at det var korleis elevane tenkte som var viktig, ikkje om dei fekk til alt. Eg la heller ikkje vekt på å påpeike feil elevane gjorde, men heller spørje om tankane bak. Målet var at elevane skulle oppleve at dei meistra situasjonen, sjølv om dei ikkje fekk alt til. For å ivareta elevane sin anonymitet (Tjora, 2017) har eg gjeve elevnamna kodar og ikkje presentert skulenamn.

Ei utfordring med observasjon er det som vert kalla forskingseffekt (Tjora, 2017). Både den som blir observert vert påverka av situasjonen (Tjora, 2017). Dette gjeld òg intervju (Tjora, 2017). Eg kan difor berre seie noko om dei kvalitative skilnadane mellom 2. og 5. trinn, slik eg tolkar dei i dei kontekstane dei føregjekk. Ved å presentere metode, elevarbeid og sitat opnar eg opp for at andre kan vurdere tolkingane mine, noko som kan ivareta truverdigheita i studien min, slik eg nemnte i førre avsnitt.

Krumsvik (2014) skriv at ikkje alle informantar gjev beskjed om dei ikkje forstår omgrep eller spørsmål. I tilfella der eg har stilt uklåre spørsmål og elevane har gjeve uttrykk for det har eg klargjort spørsmåla. Ved å gjennomføre ein pilotstudie har eg forsøkt å kontrollere kvaliteten på spørsmåla, for å sikre at det er tydelege spørsmål som elevar kan forstå, men eg kan ikkje vere sikker på at det ikkje eksisterer tilfelle der elevar ikkje har forstått kva eg spør om utan at eg har oppdaga det. Her trur eg at det kan vere ein fordel å intervjue fleire samtidig, då det at elevane får kommunisere med kvarandre kan gjere at samtala vert meir på deira premiss, med deira logikk, språk og perspektiv (Kampmann, 2000). Eg opplevde fleire tilfelle av at elevane spontant forklarte kvarandre korleis dei tenkte når dei svarte på oppgåvene, eller at elevar såg på kvarandre med blikk som tydeleg sa at dei ikkje forstod, før dei fortalte meg at dei ikkje visste svaret.

Studien min av fire fokusgrupper baserer seg på ei tilpassing som eg har gjort av AMPS-rammeverket for å kunne nytte det på figurfølger (Mulligan & Mitchelmore, 2013). Denne tilpassinga er gjort med utgangspunkt i Mulligan og Mitchelmore sine definisjonar, men basert på empiri frå oppgåvene eg har nytta i studien min. Det vil seie at sjølv om tilpassinga har fungert godt på dei oppgåvene og elevane eg har nytta må det meir forsking til for å kunne seie om det vil fungere i ein større studie på andre elevar.

Sjølv om eg har argumentert i teksten for at elevane skulle svare munnleg på oppgåver er det eit viktig moment ein må vere merksam på. Sjølv om munnlege svar verkar å vere rett må ein vere merksam på at ein «fyller inn» informasjon i svara til elevane (Warren & Cooper, 2008). Det er lett å tolke elevar sine svar dit ein ynskjer.

Tjora (2012) skriv òg at dei som blir studert kan endre oppførsel når dei vert filma. Fangen (2010) skriv vidare at born og unge i mindre grad blir påverka av filminga, at dei er meir avslappa enn vaksne. I pilotstudien opplevde eg ikkje kameraet som forstyrrande for datainnsamlinga mi. I hovudstudien var det fleire elevar som var litt meir opptekne av kameraet. Særleg V21 spurte ein del om kameraet, såg mykje på det og var til tider fnisete. Likevel jobba dei fleste godt og såg ikkje ut til å vere nemneverdig opptekne av kameraet, sjølv om eg ikkje kjenner elevane godt nok til å kunne seie at dei ikkje vart påverka. Sjølv om nokre elevar kanskje endra oppførsel trur eg dei positive sidene med filming veg opp for denne endringa. Filming gjev ein unik moglegheit til å fange opp detaljar (Tjora, 2012). Video gjev ikkje ein nøyaktig representasjon av situasjonen, til dømes vil val av utsnitt og kvalitet på videoen spele inn. Likevel gjev det ein meir komplett attgjeving av situasjonen enn det t.d. berre feltnotatar gjev (Tjora, 2012).

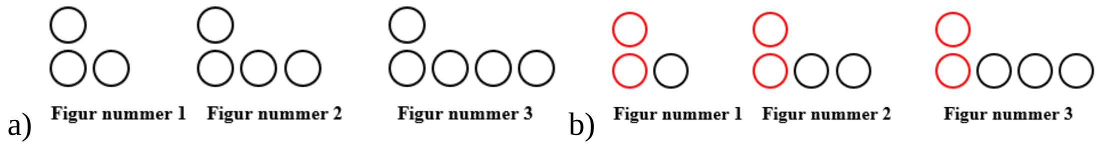
4. Analysekapittel

Analysekapittelet består av tre delar. Fyrste del er analyse av det matematiske og didaktiske potensialet i oppgåvene elevane arbeida med. Del to er ei kort og generell analyse av 2. og 5. trinn sine AMPS nivå. Den tredje delen er ei djupare analyse av to grupper frå 2. trinn og to frå 5. trinn som viste høg strukturkompetanse.

4.1. Matematisk og didaktisk potensiale i oppgåvene

I denne delen av teksten vil eg hovudsakleg analysere oppgåvene eg nytta i hovudstudien: oppgåve 1 og 3 i Tabell 4. Sjølv om oppgåvene hadde andre nummer i pilotstudien vil eg vidare definere dei som oppgåve 1 og 2 då det var slik dei vart presentert for elevane i hovudstudien. Oppgåvene og korleis dei vart dekomponert i to fargar er å finne i høvesvis Figur 7 og Figur 8. Det sentrale er talet på sirklar og kvar dei er plassert i forhold til kvarandre, men om sirklane er heilt nøyaktig plassert er ikkje det viktigaste. I denne masteroppgåva har eg valt å ta utgangspunkt i lineære funksjonar med positiv vekst og ein positiv konstant b. Ein positiv konstant b er valt då eg såg på det som lettare for elevane om den var positiv enn om den skulle vore negativ. Eg har valt å sjå på lineære uttrykk då desse er grunnleggjande funksjonar, noko som er hensiktsmessig når oppgåvene skal passe for elevar på 2. trinn. Utdanningsdirektoratet (2013, s. 3) skriv om funksjonar at «Funksjonar kan uttrykkjast på fleire måtar, til dømes med formlar, tabellar og grafar». Dette delkapittelet er ei analyse av korleis ein kan uttrykke og figurfølgene i hovudstudien, og kva matematisk og didaktisk potensiale oppgåvene har.

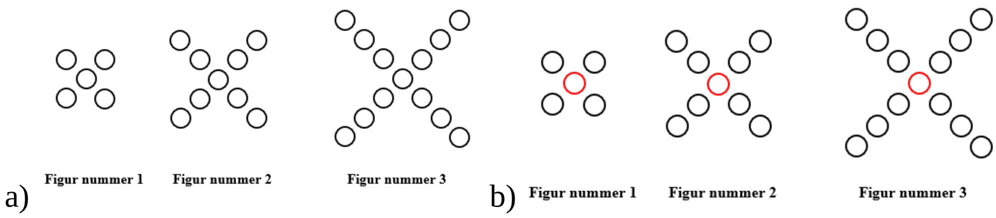
Figurfølga i oppgåve 1 kan skrivast på forma $S(n) = 1n + 2$, eller berre $S(n) = n + 2$, der 2 kan representerast av dei raude sirklane. Det var eit mål at funksjonen i den fyrste oppgåva skulle vere så grunnleggjande som mogleg, men likevel ha ei utvikling. Dersom figurane skal ha færrast mogleg sirklar, bør konstantane vere så låge som mogleg. Samtidig ynskja eg ikkje at nokon av konstantane a og b skulle vere lik 0. I pilotstudien erfarte eg at det var lite hensiktsmessig med figurfølger på forma $S(n) = 1n + 1$, då nokre elevar blanda tydinga til dei to konstantane. Difor laga eg ei oppgåve på forma $S(n) = n + 2$. Eg valde ei oppgåve som eg opplevde innbydde til positive ledd, sjølv om figurfølga til dømes kan skrivast på forma $S(n) = 3 + (n - 1)$. Eit slikt uttrykk er kanskje meir naturleg til dømes for Figur 2b som vart presentert i teorikapittelet som ein figur på same forma som figurfølga i oppgåve 1.



Figur 7: Figurfølga i oppgåve 1. a) Opphaveleg figurfølge. b) Figurfølga dekomponert i to fargar.

For at ein figur i figurfølga skal vere strukturell må den ha vassrette sirklar med ein sirkel over sirkelen lengst til venstre, i tillegg til at talet på sirklar er korrekt. Ein eksplisitt måte å finne figur 100 er å nytte at talet på sirklar alltid er to meir enn figurnummeret, og difor legge 2 til 100. Ein gal måte å nytte heil-objekt-strategien vil vere å multiplisere talet på sirklar i figur 10 med ti for å finne figur 100, utan å justere for at ein har talt dei to sirklane til venstre ti gongar for mykje. Ei moglegheit er å multiplisere 10 med 10, for så å legge til konstanten 2. Ein måte å nytte «chunking» på for å finne figur 100 er å ta utgangspunkt i at figur 10 har 12 sirklar og at det er 90 figurar mellom figur 10 og 100. Sidan det aukar med 1 sirklar for kvar figur må ein legge $1 \cdot 90$ sirklar til dei 12 sirklane ein allereie har. Ein rekursiv strategi ville vore å addert ein og ein sirkel til ein kom til figur 100.

Figurfølga i oppgåve 2 kan skrivast på forma $S(n) = 4n + 1$, der 1 kan representerast av den raude sirkelen i sentrum. To av måtane ein kan sjå figuren på er som eit kryss beståande av to diagonalar eller som eit sentrum med fire «armar». Figurfølga kan vise elevane at figurfølger ikkje alltid handlar om kor mange fleire sirklar det er i figuren enn figurnummeret, og at ein nokre gongar kan finne igjen figurnummeret fleire gongar i figuren.



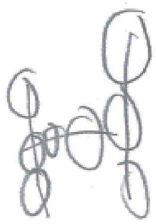
Figur 8: Figurfølga i oppgåve 2. a) Opphaveleg figurfølge. b) Figurfølga dekomponert i to fargar.

Strukturelle figurar har korrekt tal på sirklar, eit tydeleg sentrum og fire armar ut frå sentrum med like mange sirklar i kvar arm. Ein måte å finne talet på sirklar ved hjelp av ein eksplisitt strategi vil difor vere å addere figurnummeret fire gongar, ein gong for kvar arm, for så å legge til ein sirkel, sirkelen i sentrum. Ein korrekt måte å nytte heil-objekt for å finne figur 100 kan til dømes vere ved å ta utgangspunkt i figur 10 som til saman har 40 sirklar i armane, multiplisere dette med 10, for så å legge til sentrum. Ein gal måte vil vere å multiplisere dei 41 sirklane i figur 10 med 10 utan å justere for at ein har talt sentrum ti gongar. «Chunking» kan ein nytte ved å ta utgangspunkt i at figur 10 har 41 sirklar, og at det aukar med 4 sirklar for kvar figur. Då vil figur 100 ha $41 + 4(90)$ sirklar.

4.2. AMPS nivå og val av fokusgrupper

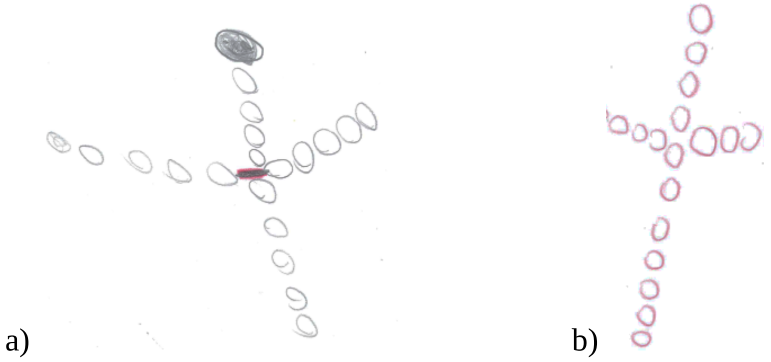
Resten av analysen er delt i to delar. Den fyrste delen er analyse av alle gruppene sine AMPS-nivå og eit val av fire fokusgrupper, to frå kvart trinn, med høgt strukturnivå. Den andre delen er hovuddelen som består av ei djupare analyse av dei fire fokusgruppene sine strukturnivå, generalisering, grunngjeving og utfordringar.

For å gjere analyseprosessen mest mogleg gjennomsiktig vil eg presentere ei analyse av elevarbeid som eg har kategorisert som prestrukturelle, framveksande, delvis strukturelle og strukturelle. Elevarbeida er kategorisert ut frå kriteria som vart presentert i Tabell 5 og Tabell 6 i metodekapittelet. Figur 9a er V21 sin prestrukturelle figur 10 i oppgåve 1. Eg tolkar den som 1a prestrukturell då eigenskapane til figuren er irrelevant for det underliggande matematiske omgrepet. Den manglar to sirklar oppå kvarandre på venstre side og dei vassrette sirklane på høgre side. Den har heller ikkje rett tal på sirklar. Figur 9b er òg ein prestrukturell figur. Den har vassrette sirklar, men manglar dei to sirklane som står oppå kvarandre på venstre side. Den er 1b prestrukturell då den har korrekt tal på sirklar.

a)  b) 

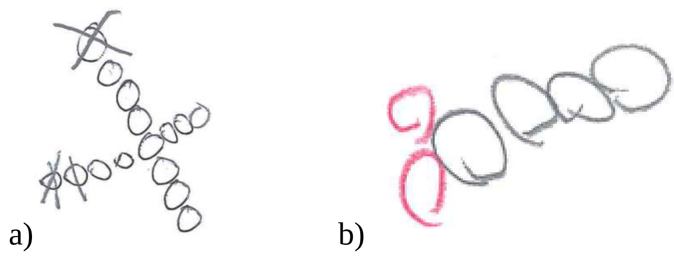
Figur 9. Dømer på prestrukturelle figurar. a) V21 sin 1a prestrukturelle figur 10 i oppgåve 1. b) H21 sin 1b prestrukturelle figur 10 i oppgåve 1.

Figur 10a er V22 sin 2a framveksande figur. Figuren er framveksande då eleven kjenner igjen nokre relevante eigenskapar, men dei er ikkje organisert på ein passande måte. Figuren har fire armar, men det er tydeleg at dei ikkje er like lange. Det er heller ikkje eit tydeleg sentrum og talet på sirklar er feil. Figur 10b er òg framveksande og har mange av dei same manglane. Sidan figuren har rett tal på sirklar er den 2b framveksande.



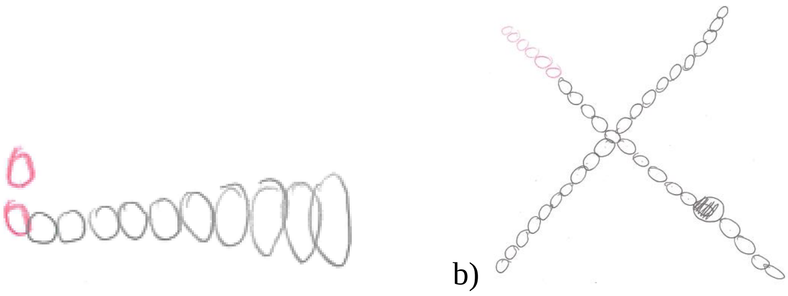
Figur 10: Dømer på framveksande figurar. a) V22 sin 2a framveksande figur 10 i oppgåve 2. b) V24 sin 2b framveksande figur 4 i oppgåve 2.

To dømer på delvis strukturelle figurar er å finne i Figur 11. Elevane har kjent igjen dei viktigaste eigenskapane, men representasjonane er upresise eller ufullstendige. Figur 11a har armar som kan drøftast om dei er om lag like lange, men sidan det berre ein av armane ser litt kortare ut enn dei andre og alle har anten tre eller fire sirklar tolkar eg det som delvis stukturell. Talet på sirklar er feil, noko som gjer figuren 3a delvis strukturell. Figur 11b er delvis strukturell då den har to sirklar over kvarandre på venstre side, i tillegg til nokre sirklar som om lag er vassrette. Dei vassrette sirklane står ikkje ved sida av den nedste av dei to sirklane over kvarandre. Talet på sirklar er korrekt og figuren er 3b delvis strukturell.



Figur 11: Dømer på delvis strukturelle figurar. a) V55 sin 3a) delvis strukturelle figur 4 oppgåve 2. Kryssa er teikna på i ettertid. b) V22 sin 3b delvis strukturelle figur 4 i oppgåve 1.

Figur 12 er to strukturelle figurar. Elevane har representert strukturen korrekt med korrekt tal på sirklar. Figur 12a har sirklar av litt ulik storleik som går litt inn i kvarandre. Likevel tolkar eg det som strukturell då den har to sirklar som står over kvarandre og vassrette sirklar som går ut frå den nedste av dei to sirklane som står over kvarandre. Figuren i Figur 12b er prega av at eleven har teikna vidare på ein annan elev sin figur. Sjølv om den består av to ulike fargar og sirklane går litt inn i kvarandre har sirkelen eit tydeleg sentrum og like mange sirklar i kvar arm. Difor tolkar eg den som strukturell.



a) b)

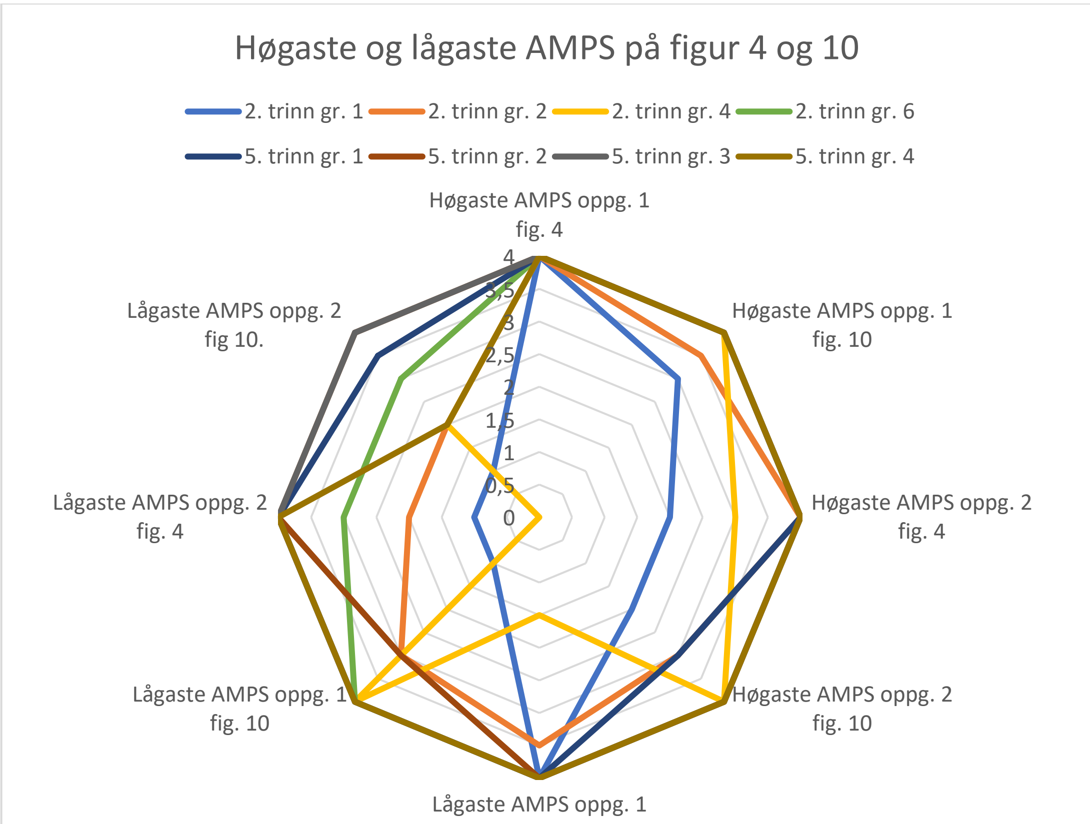
Figur 12: Døme på strukturelle figurar. a) V24 sin strukturelle figur 10 i oppgåve 1. b) H54 sin strukturelle figur 10 i oppgåve 2.

For å få ei oversikt over dei ulike gruppene i hovudstudien sine AMPS-nivå viser Tabell 7 kva kategori figurane deira kategoriserast i. Tabellen viser det høgaste nivået dei ulike gruppene er på i dei ulike oppgåve 4 og 10. Tabellen skil ikkje på om elevane hadde oppgåvearket med figurane dekomponert i to fargar eller ikkje. 2. Trinn er markert med blått medan 5. trinn er markert med gult.

Tabell 7: Gruppene sine høgaste AMPS-nivå for figur 4 og 10.

Høgaste AMPS-nivå for figur 4 og 10				
AMPS-nivå	**Oppgåve 1**		**Oppgåve 2**	
	Figur 4	Figur 10	Figur 4	Figur 10
0) Kopi av figur frå oppgåvearket				
1a) Prestrukturell				
1b) Prestrukturell (korrekt tal)				
2a) Framveksande			Gr. 21 Gr. 25	Gr. 21 Gr. 25
2b) Framveksande (korrekt tal)				
3a) Delvis strukturell		Gr. 21 Gr. 23	Gr. 24	Gr. 22
3b) Delvis strukturell (korrekt tal)		Gr. 22	Gr. 23	Gr. 51
4) Strukturell	Gr. 21 Gr. 22 Gr. 23 Gr. 24 Gr. 25 Gr. 26 Gr. 51 Gr. 52 Gr. 53 Gr. 54 Gr. 55	Gr. 24 Gr. 26 Gr. 51 Gr. 52 Gr. 53 Gr. 54 Gr. 55	Gr. 22 Gr. 26 Gr. 51 Gr. 52 Gr. 53 Gr. 54 Gr. 55	Gr. 24 Gr. 26 Gr. 52 Gr. 53 Gr. 54 Gr. 55

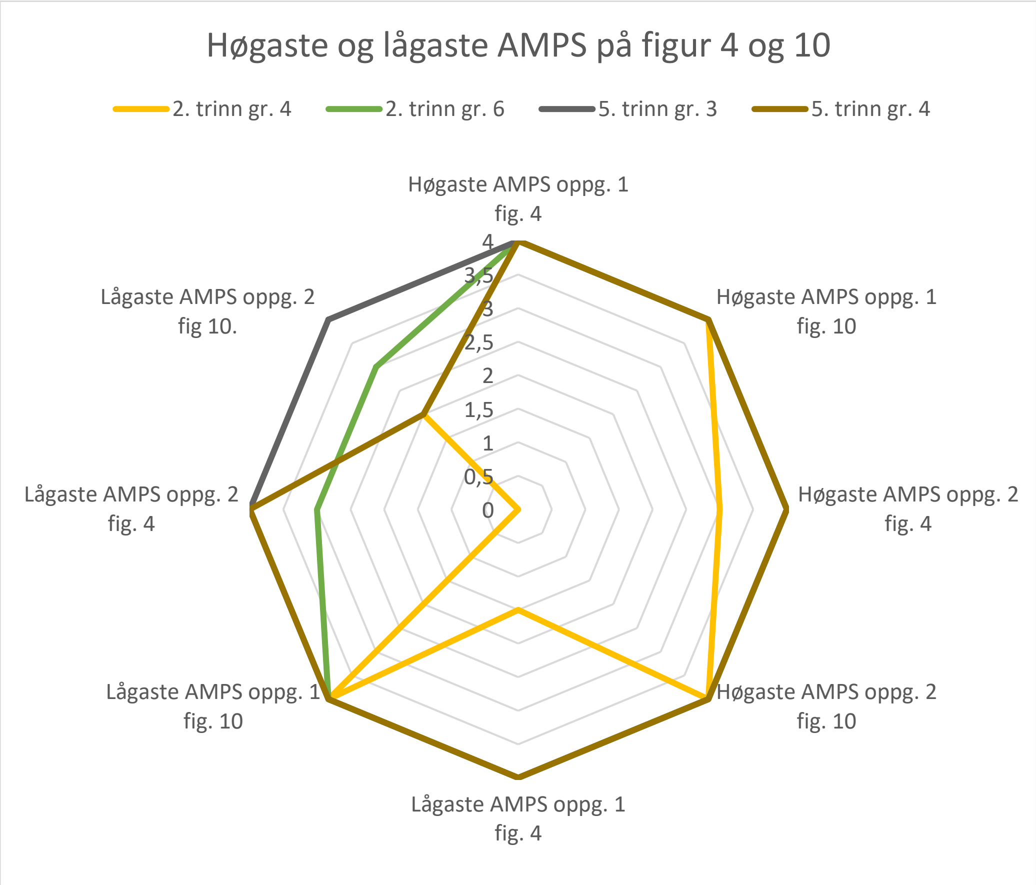
For å få sett på kvalitative skilnadar mellom grupper frå 2. og 5. trinn med høg strukturkompetanse har eg valt ut fire fokusgrupper. For å velje ut fokusgruppene har eg analysert det høgaste og lågaste AMPS-nivået til dei ulike gruppene sine teikningar av figur 4 og 10. Tabell 7 er eit godt utgangspunkt for å finne elevane med høgast strukturkompetanse, då den viser gruppene sine høgaste AMPS-nivå på dei ulike oppgåvene. Kva som er det lågaste nivået gruppene er innom kan òg seie noko om strukturkompetansen til elevane. Saman med dataa i Tabell 7 nytta eg informasjon om lågaste AMPS-nivå til å lage radardiagram som viser høgaste og lågaste AMPS-nivå gruppene er innom på dei ulike oppgåvene. Radardiagramma er å finne i Figur 13 og Figur 14. Gruppe 55 vil bli sett vekk frå då eine eleven var lite interessert i å svare. Det same vil gruppe 23 og 25 då det manglar data på nokre av spørsmåla. Figur 13 viser alle dei andre gruppene sine AMPS-nivå. Nivå 0,5 eksisterer ikkje. Nivå 0 er kopi av figur frå oppgåvearket, nivå 1 er 1a prestrukturell, nivå 1,5 er 1b prestrukturell, nivå 2 er 2a framveksande, nivå 2,5 er 2b framveksande, og nivå 3 er 3a delvis strukturell. Nivå 3,5 er 3b delvis strukturelt og nivå 4 strukturell. Målet var å finne dei gruppene som i størst grad kom opp på eit strukturelt nivå. Dersom fleire grupper hadde same nivå som sine høgaste nivå såg eg på kva som var det lågaste nivået dei var nede på. For å ha eit samanlikningsgrunnlag valde eg ut to grupper frå 2. trinn og 2 grupper frå 5. trinn. Det vart ikkje valt ut fleire då målet var å gå i djupna på datamengda.



Figur 13: Radardiagram for grupper sine lågaste og høgaste AMPS-nivå for figur 4 og 10. Nivå 0,5 eksisterer ikkje. Nivå 0 er kopi av figur frå oppgåvearket, nivå 1 er 1a prestrukturell, nivå 1,5 er 1b prestrukturell, nivå 2 er 2a framveksande, nivå 2,5 er 2b framveksande, og nivå 3 er 3a delvis strukturell. Nivå 3,5 er 3b delvis strukturell og nivå 4 strukturell.

Frå 2. trinn var gruppe 26 den einaste gruppa som var oppe på eit strukturelt nivå på alle oppgåvene. Gruppe 24 er den gruppa frå 2. trinn som, med unntak av gruppe 26, kom opp på dei høgaste strukturnivåa. Frå 5. trinn har gruppe 53 ingen elevarbeid som er på eit lågare nivå enn 4 strukturell. Blant dei andre gruppene på 5. trinn har gruppe 52 og 54 begge ei oppgåve som er på eit lågare nivå enn eit strukturelt nivå. Eg har valt å sjå djupare på gruppe 54 då dataa har sitt botnpunkt ein stad der gruppe 24 og 26 har det same. Der gruppe 52 har sitt botnpunkt har verken gruppe 24 eller gruppe 26 eit botnpunkt. Gruppe 24, 26, 53 og 54 vart valt som fokusgrupper då det er dei som ut frå AMPS på figur 4 og 10 ser ut til å ha høgast strukturkompetanse. Arbeida deira som ikkje er strukturelle vert presentert i analysen, medan arbeida deira som er strukturelle ligg som Vedlegg 1. Målet med studien er å finne kvalitative skilnadar mellom 2. og 5. trinn, og resten av analysen handlar om skilnadar ein finn mellom trinna når ein undersøker fokusgruppene.

Sentralt i forskingsspørsmålet i denne oppgåva er dei strukturelle nivåa elevane er innom. Figur 14 viser fokusgruppene sett opp mot kvarandre. Ein ser at fokusgruppene jamt over kjem opp på eit høgt strukturnivå, men at det varierer kva for nokre lågare nivå dei er innom på vegen dit. Alle dei strukturelle elevarbeida ligg som Vedlegg 1. Sett bort frå gruppe 24, som er på eit 3a delvis strukturelt nivå på eine oppgåva, slik Figur 25b viser, er alle fokusgruppene oppe på eit strukturelt nivå på alle oppgåvene. Elevarbeida som ikkje er strukturelle er hovudsakleg frå 2. trinn, men gruppe 54 har òg eit elevarbeid som ikkje er strukturelt. Elevane på 2. trinn er i mykje større grad enn elevane på 5. trinn innom figurar som ikkje er strukturelle på veg til å finne strukturelle figurar. Gruppe 24 er innom alle hovudkategoriane som ikkje er strukturelle. Gruppe 26 er innom den delvis strukturelle kategorien tre gongar, noko Figur 27 og Figur 28 viser, medan gruppe 54 har ein framveksande figur, noko Figur 35 viser. Som nemnt tidlegare har V53 berre strukturelle figurar. Med unntak av H24 sine teikningar av oppgåve 2 figur 4, vist i Figur 25, er alle figurane som ikkje er strukturelle frå før elevane fekk oppgåvearket med to fargar. Kva struktur elevane ser og kva konsekvensar det får vil bli sett grundigare på i seinare delkapittel.



Figur 14: Radardiagram for fokusgruppene sine lågaste og høgaste AMPS-nivå. Nivå 0,5 eksisterer ikkje. Nivå 0 er kopi av figur frå oppgåvearket, nivå 1 er 1a prestrukturell, nivå 1,5 er 1b prestrukturell, nivå 2 er 2a framveksande, nivå 2,5 er 2b framveksande, og nivå 3 er 3a delvis strukturell. Nivå 3,5 er 3b delvis strukturell og nivå 4 strukturell.

4.3. Oppgåve 1

Gruppene sitt arbeid med figurfølger består av mykje meir enn kva strukturelle nivå dei ulike arbeida er på. Korleis dei ulike gruppene løyste oppgåve 1 vert presentert i dei neste underkapitla. Deretter vert løysingane av oppgåve 2 presentert.

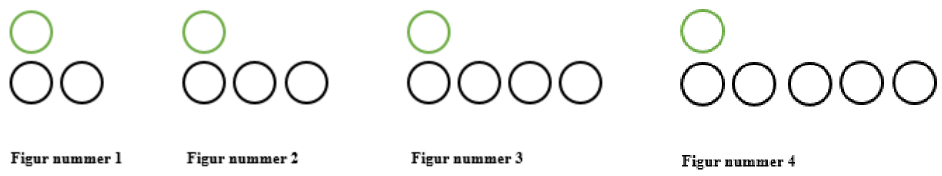
4.3.1. Gruppe 24

Gruppe 24 kom fram til korrekte svar på alle oppgåvene. Det var hovudsakleg V24 som snakka. H24 uttrykker ikkje så mange eigne forslag, men seier seg mykje einig i det V24 seier. Samtala startar med at V24 finn at figur 4 skal ha 6 sirklar, noko ho grunngjev i utdraget under.

E Kvifor seier du seks sirklar?

V24 Fordi der begynner to og så tre og så fire (peikar på figur 1, 2 og 3). Og så har du den prikken oppå (peikar på den øvste sirkelen i figur 1). Så då blir det seks.

Grunngjevinga er eit generisk døme då ho viser på alle figurane at det vert ein meir sirkel for kvar figur, sjølv om ho ikkje uttaler dette eksplisitt. Sidan ho ser på utviklinga frå figur til figur er strategien rekursiv. V24 ser figur 1, 2 og 3 som to, tre og fire sirklar med ein sirkel oppå, noko ein ser i grunngjevinga hennar for at figur 4 skal ha seks sirklar. Figur 15 viser korleis ein kan illustrere hennar dekomponering av figuren.



Figur 15: V24 si dekomponering av figurane i oppgåve 1.

Begge elevane i gruppa teiknar kvar sin figur 4. H24 sin figur er 1b prestrukturell, medan V24 sin er strukturell. Alle strukturelle figurar ligg i Vedlegg 1. H24 sin prestrukturelle figur er Figur 16.

Figur 16: H24 sin 1b prestrukturelle figur 4. Figuren har korrekt tal på sirklar.

I motsetning til V24 viser ikkje H24 her ei forståing for strukturen i figurane. Etter at elevane har teikna kvar sin figur peikar H24 ut V24 sin figur som den mest korrekte.

Elevane finn ikkje figur 10 før dei får oppgåvearket med to fargar. V24 forsøker å fortsette med ein rekursiv strategi som ikkje vert grunngjeve, noko utdraget under viser. Dekomponeringa hennar som vart vist i Figur 15 ser ikkje ut til å støtte ho.

V24	Hm. Fem, seks, (snakkar lågt), elleve
E	Okei. Kvifor skal det vere elleve då?
V24	Fordi det er meir enn, det er meir enn. Åja, det skal berre vere ti trur eg. Eller elleve.

Det kan sjå ut til at ho forsøker å telje seg oppover, men ikkje veit kvar ho skal stoppe. At ho er usikker på om det er ti eller elleve kan tyde på at ho blandar differansen mellom figurane og talet på sirklar i figur. Som nemnt grunngjev ho ikkje verken kvifor det skal vere meir enn noko, kor mykje det skal vere meir eller kva det skal vere meir enn.

Oppgåvearket med to fargar hjelp ikkje elevane med ein gong. Fyrst forsøker V24 å legge saman talet på sirklar i figur 1, 2 og 3, noko som tilfeldigvis gjev korrekt svar. Jamfør intervjuguiden samtala eg med elevane om kor mange raude og grå sirklar dei ulike figurane hadde. Eg spurte H24 «H24, kor mange raude sirklar er det i figur nummer 2 då? (peikar på figur 2) Sånne raude sirklar». Ho svara «Seks». Seks er talet på raude sirklar om ein legg saman figur 1, 2 og 3. Det kan sjå ut som elevane ikkje tydeleg skil mellom figurane, men heller legg saman sirklane i dei tre figurane på oppgåvearket.

På trass av at elevane hadde utfordringar med å finne figur 10 klarar V24 å teikne ein strukturell figur 4 og 10 med to fargar. Figur 10 har tidlegare blitt presentert i Figur 12a som eit døme på ein strukturell figur. V24 uttaler eksplisitt at figur 10 skal «Ha ti sånne grå og to raude prikkar over». At figurane skal ha dei raude prikkane over dei svarte er upresist, men teikningane er korrekte. Utsegna saman med teikninga viser at V24 at ho har endra dekomponering frå å ha ein del som består av vassrette sirklar og ein del som er den konstante sirkelen som står oppå, til å dele inn i raude og grå sirklar.

Strategien V24 nyttar for å finne figur 10 er eksplisitt. Eg tolkar reglar som vert danna for enkelttilfelle som eksplisitte så lenge dei ikkje tek utgangspunkt i ein bestemt figur og byggjer vidare på den, for då fell det under kategorien «chunking». Utdraget under viser at V24 eksplisitt koplar figurnummer til talet på svarte sirklar i figurane.

V24	Fordi der så er jo nummer 1 og den har berre ein sånn (peikar på svart sirkel i figur 1) og 2 har to på (peikar på svarte sirklar i figur 2) og 3 har tre på der (peikar på svarte sirklar i figur 3)

Sidan V24 viser at koplinga gjeld alle figurane i oppgåvearket er grunngjevinga hennar eit generisk døme.

Grunngjevinga over vil òg vere gyldig for figur 100. V24 nyttar oppdaginga i sitatet til å eksplisitt finne figur 100 som ho seier skal ha «100. 102 eigentleg, for du tel med dei der (peikar på dei raude sirklane i figur nummer 10)». Ho viser tydeleg at ho deler opp i raude og grå sirklar. For figur 100 klarar ho tydlegare enn for figur 10 å forklare korleis sirklane skal vere plasserte.

V24	Den skal ha 100 prikkar bortover sånn (lagar ein liten strek i lufta) og så skal den ha to over, nei ein over og ein ved sida av (peikar på dei raude sirklane i figur 10).

I dette sitatet seier ho ikkje lengre at dei raude sirklane skal stå over dei grå sirklane.

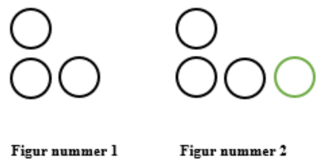
På spørsmål om kor mange raude sirklar hemmeleg figurnummer skal ha svarer V24 at den skal ha to fordi «Alle dei andre har 2», noko som er eit generisk døme då ho tydeleg refererer til konkrete figurar. På spørsmål om talet på svarte sirklar i hemmeleg figurnummer svara ho «Det talet», og ho bekreftar at «det talet» er det same som figurnummeret. Kvifor det skal vere like mange svarte sirklar som figurnummeret vert ikkje grunngjeve noko meir enn den grunngjevinga dei hadde for at det gjaldt for figur 10.

4.3.2. Gruppe 26

Gruppe 26 startar med at begge elevane finn figur 4 rekursivt. I sitatet under grunngjev V26 at det aukar med ein sirkel for kvar figur ved å vise at det er ein meir sirkel i figur 2 enn i figur 1.

V26	Ja, for der er det. Sidan der er det mindre (peikar på figur 1) og så blir det ein meir (Legg fingeren over sirkelen til høgre i figur 2) viss vi tar ein meir er den (peikar på figur 1) heilt lik som den (peikar på figur 2)

Måten V26 ser på figurane kan illustrerast med Figur 17.



Figur 17: V26 si dekomponering av figur 2 i oppgåve 1. Figur 2 er figur 1 med ein sirkel lagt til på høgre side

V26 demonstrerer at dersom ein legg til ein sirkel på figur 1 kan ein få figur 2. Dette illustrerer at det for kvar figur vert lagt til ein sirkel. Sidan ho ikkje viser at det gjeld for figur 3 er det ei empirisk grunngjeving.

V26 forsøker å nytte denne rekursive tankegangen vidare for å finne figur 10 ved å fortsette å telje oppover. Ho er tydeleg på at ho vil fortsette å telje vidare på figur 4 som har 6 sirklar, men utdraget under viser at ho har problem med å formulere kva ho skal telje til.

V26	Eller. Sidan. Vi må jo berre telje oppover
E	Oja.
V26	Så. Sidan nummer 4 er seks i då må vi berre telje oppover frå seks til ti.

Det kan sjå ut som V26 blandar talet på sirklar og figurnummeret, eller så er det eit upresist sitat. Hadde ho sagt noko sånt som «Sidan figur nummer 4 har seks sirklar så må vi berre telje oppover frå seks sirklar til vi når figur 10», hadde utsegna vore korrekt. Sjølv om ho ikkje uttrykker så klart munnleg kva ein skal gjere, klarer ho å nytte ein rekursiv strategi til å teikne figur 5 til figur 10 strukturelt og slik finne talet på sirklar i figur 10.

Medan V26 teiknar gjettar H26 at figur 10 skal ha 10 sirklar. «Det var ti og då tippar eg at det blir ti». Tipp-og-test er i Lannin et al. (2006) sitt rammeverk ein underkategori av eksplisitt strategi, men eg har valt å sjå på gjetting som ein eigen kategori då elevane berre gjettar og ikkje gjettar reglar som dei testar.

Elevane finn ikkje svaret på fleire oppgåver, og det kan sjå ut som dei ikkje trur det går an å finne figur 100 heller, noko samtala under illustrerer.

E	Okei. No kjem eit endå vanskelegare spørsmål. Figur nummer 100.
V26	Eeee
E	Går det an å finne ut av?

V26 Nei. Eg trur ikkje det.

Samtala fortset med at H25 svarar at det kan vere 120 «For det er eit stort tal». Elevane grunngjev ikkje kvifor det skal vere eit stort tal.

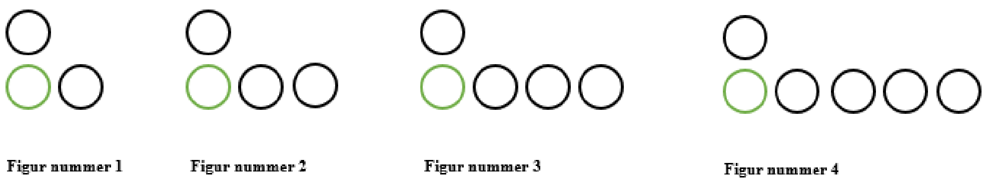
Etter at eg spør elevane «Kan vi finne ein regel for kor mange det skal vere? Ein måte vi kan finne ut av det utan å teikne alle saman?», endrar V26 måten å dekomponere figuren på, men tankegangen er framleis rekursiv og hjelp ho ikkje til å finne figur 100. Ho er oppteken av at figurane skal ha noko meir enn 1, og at det skal fortsette heile vegen.

V26 For kvart tal skal det vere noko meir. For nummer 2 skal det vere tre. Sidan då er det to meir enn ein.

E Okei. Skjønner.

V26 Og i nummer 2 skal det framleis vere noko meir, men ikkje to meir. Tre meir. Og skal det fortsette heile vegen.

Samtala fortset med at ho fortel at figur 1 har to sirklar meir enn ein, figur 2 har tre sirklar meir, figur 3 har fire meir og figur 4 har fem meir. På figur 1 peikar ho ut sirkelen nede til venstre som den eine som det vert lagt noko til. At ho skildrar at det skal fortsette heile vegen viser at ho tenker rekursivt. Korleis ho dekomponerer figurane er vist i Figur 18. For ho har Figur 1 to fleire sirklar enn 1, figur 2 har tre meir og figur 3 har fire meir.



Figur 18: V26 si nye dekomponering av figurane i oppgåve 1. Sirkelen nede til venstre er konstant. Figur 1 har 2 sirklar meir enn 1, figur 2 har 3 sirklar meir og figur 3 har 4 sirklar meir.

Etter at elevane fekk oppgåvearket med to fargar teiknar dei nye strukturelle figurar. H26 fekk beskjed om at ho ikkje trengte å teikne alle figurane mellom figur 4 og 10, men ho vel å gjere det likevel. Ho teiknar figur 4, 6, 7, 8, 9 og 10. Sjølv om ho ikkje teiknar figur 6 veit ho når ho skal slutte å teikne.

Vidare består resten av samtala av gjetting knytt til figur 100 og hemmeleg figurnummer. I samband med hemmeleg figurnummer uttrykker V26 «Ja, men vi kan gjette». Elevane vert heller ikkje einig i kor mange raude sirklar hemmeleg figurnummer skal ha. V26 meiner det skal vere 2, «for alle dei andre er». Alle dei andre figurane har 2 raude sirklar. H26 er ueinig, for det er ikkje det ho ser når ho ser på figurane dei har teikna.

H26	Nei, fire (peikar på dei raude sirklane i figur 6 og 8 som står over kvarandre)
H26	fire (peikar på dei raude i figur 7 og 9 som står over kvarandre)

H26 ser i figurane dei har teikna at det ser ut til at fire og fire raude sirklar heng saman. Ho har altså ikkje eit tydeleg bilete av at talet på raude sirklar er konstant. Det viser seg at V26 heller ikkje har det. Etter å ha vist at det hemmelege figurnummeret var 500 uttalte elevane kor mange sirklar figuren kunne ha.

H26	Ha raud sånn hundre og ta svart sånn fem (utydeleg ord)
V26	Ja. Ta hundre raude og svart fem

Det ser ut til at elevane ikkje har noko problem med å akseptere at talet på raude er 100 og ikkje konstant 2 slik det har vore tidlegare.

4.3.3. Gruppe 53

Gruppe 53 finn figur 4 på ein rekursiv måte. Begge elevane svarar samtidig at det vert 6 sirklar i figuren og V53 viser at det vert ein meir sirkel for kvar figur.

V53	Fordi at nummer 3 så var det fem, nei nummer 1 var det tre, nummer 2 fire og så fem (peikar på figur 3) og då er neste seks og så er det sju og åtte og vidare.

Et tolkar utsegna som eit generisk døme sjølv om ho ikkje eksplisitt seier at det aukar med ein for kvar av figurane ho snakkar om. Det rekursive aspektet er tydleg ved at ho seier at det fortset på same måten vidare. Ho teiknar vidare ein strukturell figur 4.

På spørsmål om figur 10 går V53 over til ein eksplisitt strategi, medan H53 ynskjer å fortsette å tenke rekursivt.

H53	Er det elleve?

V53	Eg veit ikkje. I nummer 1 er det to meir. Det er sikkert tolv. Eg veit ikkje.
H53	Den er tre (peikar på figur 1), og så fire (peikar på figur 2)

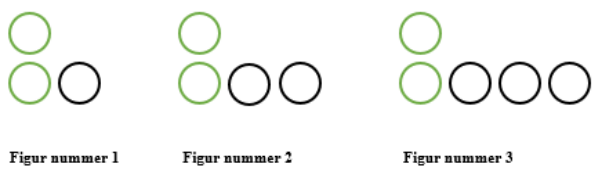
Det kan sjå ut til at H53 har same utfordring som gruppene på 2. trinn med å nytte «ein meir» regelen på ein figur som ikkje kjem direkte etter den ein kjenner. V53 endrar derimot tankegang til ein meir eksplisitt strategi som ho grunngjev empirisk.

V53	Fordi at figur nummer 1. Eg veit ikkje om det er riktig, men der er det to meir enn 1 (peikar på figur 1). Og så figur nummer 10 kan det vere at det er to meir enn 10 òg. Eg veit ikkje heilt.

Grunngjevinga til V53 er empirisk då den berre vert nytta på eit døme, og ho seier sjølv at ho ikkje er heilt sikker. H53 er heller ikkje sikker, men ho gjev eit generisk døme som koplar figurnummer til figurane i oppgåvearket.

H53	Eg veit ikkje. Eg trur det er tolv. Men eg veit ikkje heilt. Sidan der er det jo de to (peikar på dei lengst til venstre i figur 3) og så er det på ein måte dei tre som er det nummeret som står der (peikar på dei tre til høgre i figur tre og «figur nummer 3») (peikar på dei to til høgre i figur 2 og «figur nummer 2») (peikar på den til høgre i figur 1 og «figur nummer 1»)

H53 koplar dei vassrette sirklane, sett bort frå den heilt til venstre, til figurnummeret. Ho dekomponerer på same måte som eg gjer i oppgåvearka med to fargar, utan å ha fått arket. Dekomponeringa kan illustrerast som i Figur 19.



Figur 19: H53 si dekomponering av figurane i oppgåve 1. Det er to sirklar i tillegg til figurnummeret

H53 teiknar ein strukturell figur 10, og forklarer at ho trur den må vere rett då den kan delast opp i to og ti og det vert tolv sirklar til saman.

H53	Eg trur det er riktig, for då blir det tolv stykk med dei to (peikar på dei to til venstre). Det er ti (peikar på figuren) og to (peikar til venstre på figuren)

Den generiske grunngjevinga for figur 10 kan gjelde figur 100 òg, men sjølv om H53 har denne dekomponeringa er ho usikker på figur 100. V53 nyttar med ein gong ein eksplisitt strategi til å svarer 102 sirklar, noko som er korrekt. H53 lurer på om det kan vere 120, men ho held fast på at det er «I alle fall to meir». Det er mogleg at tala og figurnummeret vert for store til at H53 kan behandle dei komfortabelt.

V53 finn eit generelt og eksplisitt uttrykk for korleis ein kan finne talet på sirklar i ein ukjend figur. Dei grunngjev ikkje noko meir kvifor det fungerer.

E	De får ikkje vite kva figurnummer det er, men klarer de å seie noko om korleis eg kan finne ut av det?
V53	Du kan ta to meir enn det talet du har valt

V53 skildrar òg korleis figuren skal sjå ut.

V53	Eh. Sånn (teiknar to sirklar over kvarandre) og så
H53 og V53	Det talet bortover (H53 lagar gliderørsle med blyanten bortover)

V53 finn eit generelt uttrykk for korleis den hemmelege figuren skal sjå ut, og ho skildrar at ein skal ha to sirklar over kvarandre, før elevane seier i kor at ein i tillegg må ha «det talet», figurnummeret, bortover.

4.3.4. Gruppe 54

Elevane i gruppe 54 svarar i kor at figur 4 skal ha 5 sirklar, og på spørsmål om korleis dei finn svaret svarar dei i munnen på kvarandre. Strategien deira er rekursiv.

E	Oj. Det var kjapt. Korleis visste de det då?
V54//H54	På grun av at det vert ein meir//Fordi det går ein meir kvar einaste gong (peikar på figur 1, 2 og 3, og der figur 4, 5 og 6 kunne stått)
V54	Ja. Sånn at no var det fem der (peikar på sirkelen til høgre i figur 3, slik Figur 20 viser) og så tar du ein meir og då vert det seks.

Figur nummer 4

Figur 20: V54 si dekomponering av figur 4 i oppgåve 1. Figur 4 er figur 3 med ein sirkel lagt til på høgre side

Det rekursive ser ein aller tydlegast i H54 sine utsegn og handlingar ved at ho tydleg viser at regelen vil fortsette fleire figurar fram. Hennar grunngjeving er eit generisk døme, då det viser korleis det aukar på alle figurane. Det ser ut til at V54 ser på figurane som at det vert lagt til ein sirkel på høgre side for kvar figur, slik

Figur 20 viser. Når H54 skal teikne figur 4 tek ho ikkje utgangspunkt i at dei har funne at det skal vere 6 sirklar. I staden ser ho på figurane i oppgåvearket.

V54	(Teiknar figur 2) Eg må sjå litt på den (ser på dei førre figurane)
H54	Vi må ha to til
V54	(Teiknar to sirklar til)

Figuren til V54 er strukturell. Det er vanskeleg å seie korleis teikninga hadde vorte utan at H54 hadde sagt at ho trengte to sirklar til, men sidan ho allereie hadde sett den rekursive samanhengen, ser eg på det som sannsynleg at ho hadde fått det til på eiga hand òg.

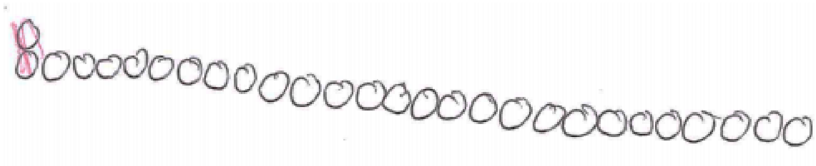
For å finne figur 10 forsøker dei seg både på ein «chunking» og ein heil-objekt-strategi, men dei finn figur 10 først når H54 tek i bruk det dei fann om at det vert ein meir sirkel for kvar figur og tel seg opp til tolv sirklar. Eg tolkar det som «chunking» dersom elevane byggjer vidare på ein kjent figur sjølv om dei ikkje nyttar differansen mellom figurane på ein korrekt måte. Mange av «chunking»-strategiane elevane nyttar handlar om å legge figurnummeret ein skal finne til førre kjende figurnummer. Når V54 forsøker seg på denne strategien er det ved å legge saman 4 og 10. Ho forklarer ikkje kvifor ho gjer det, men ein kan tenke seg at ho blandar figurnummer og talet på sirklar. Kanskje tenker ho at ein må legge til ti då ho skal finne figur ti og ein legg på ti for kvar gong. Når ho skulle finne figur 4 bygde ho på den tidlegare kjende figuren figur 3. No byggjer ho på den tidlegare kjende figuren 4, berre at ho byggjer på figurnummeret og ikkje på mengda med sirklar.

H54 seier at figur 6 har ti sirklar. Grunngjevinga hennar er ei forklaring på kva ho har gjort, ikkje kvifor det fungerer. Ho dobla figur 3 sine sirklar. «Fordi eg tok det (peikar på figur 3) og så dobla eg det», uttalte H54. Dette er ein heil-objekt-strategi då ho multipliserer ei mengde for å finne ei større eining. Seinare går ho tilbake til den rekursive strategien og tel vidare på figur 4 og finn at figur 10 har 12 sirklar. Ho teiknar òg ein korrekt strukturell figur.

V54 ynskjer å fortsette å nytte rekursive strategiar når dei skal finne figur 100.

V54	Då må eg, då skal eg berre plusse på her. Går det an. At eg berre plussar på det her? Må eg. Veit du kva? Eg berre plussar på her (byrjar å teikne). To, tre, fire,

V54 byrjar å teikne figur 100, men gjev seg før den er ferdig.



Figur 21: V54 si byrjande teikning av figur 100 i oppgåve 1. Det raude er teikna på i etterkant.

H54 forsøker seg heller på ein «chunking»-strategi. Ho legg hundre til talet på sirklar i figur 10. «Fordi ein berre tek berre pluss hundre». Ho får fyrst 113 då ho tenker at figur 10 har tretten sirklar. Etter at V54 kommenterer det kjem ho fram til at figur 100 har 112 sirklar.

Etter å ha fått oppgåvearket med to fargar er elevane klare på at figur 100 må ha to raude sirklar. H54 uttalte at «Dei hadde stått der» og peikar på dei raude sirklane i figur 2. Kor mange svarte det skal vere slit dei litt meir med. Etter å ha føreslått 98 sirklar ombestemmer V54 seg.

V54	Nei. Ikkje 98. Det er jo tre her sant (peikar på figur 3), så då må vi ta hundre minus tre, må vi ikkje det?
H54	Det er 97
H54	Nei, men det går ikkje for i den første så er det tre.

Kanskje kjem talet 98 frå at dei har tatt hundre sirklar og subtrahert dei to raude. Vidare er dei opptekne av at ein må ta utgangspunkt i figur 3, slik dei òg var når dei skulle finne figur 4 og 10. Samtala fortset med at V54 vurderer hundre svarte bortover som eit alternativ, men dei kjem fram til at det skal vere 110 svarte sirklar i figur 100. Dette byggjer på at før dei fekk oppgåvearket med to fargar fann dei at det skulle vere 112 sirklar i figuren. Ein kan klassifisere strategiane som eksplisitte, men dei gjeld berre for desse tilfella og er ikkje anvendelege for andre figurnummer.

Etter å ha samtala litt om talet på svarte sirklar i dei ulike figurane uttaler H54 «Dei som ikkje er raude det er nummeret her». Ho har altså kopla talet på svarte sirklar til figurnummeret. Eit problem med dette svaret er at spørsmålet er litt leiande. V54 tolka eit spørsmål frå meg om ein kunne finne igjen figurnummeret i figurane som eit spørsmål om korleis ein kunne vite kva rekkefølge figurane skulle kome i. For å klargjere spørsmålet svarar eg noko som kan sjåast på som traktkommunikasjon. «Men går det an å finne igjen talet ein og to og tre i desse figurane?». Samtidig er elevane i stand til å vise at talet på grå sirklar er like mange som figurnummeret. H54 seier først at figur 1 har ein svart sirkel, før ho rettar det til to.

H54	Men sidan her er det ein raud, ein svart (peikar på figur 1), to svarte (peikar på figur 2),
V54 og H54	tre svarte (peikar på figur 3)

Talet på svarte sirklar i figur 3 seier elevane i kor, men sjølv om dei ser ut til å vere einige om si nye oppdaging svarar begge nei på spørsmålet om det stemmer for figur 100 òg. Difor kan det drøftast om grunngjevinga kan klassifiserast som eit generisk døme, då dei ikkje har heilt klart kva tilfelle regelen deira vil gjelde. Det er ikkje så lett å få tak på grunngjevinga deira for at regelen ikkje gjeld figur 100, anna enn at dei tek utgangspunkt i at figuren har 112 sirklar. Dei fortel at den er annleis fordi den, jamfør H54 «har ikkje to fleire, den har tolv fleire». Dette «fordi vi har gått opp i runden og då skjer det». V54 legg til at «Det er nokre tal som ikkje går, men slik som her sånne (seier eit utydeleg ord) tal opp til, det går i alle fall ikkje med hundre og oppover trur eg.» Det ser ut til at elevane meiner at det er andre reglar som gjeld store tal.

På spørsmål om hemmeleg figurnummer generaliserer H54 og seier at det alltid er to meir enn figurnummeret. Strategien er eksplisitt, men har eit unntak for figur 100.

H54	Det er alltid to sånne som skal vere oppover
H54	Alltid to meir enn talet
V54	Ja

H54 Unntatt på hundre då

I utsegnene til elevane kjem dei med ein korrekt regel. Utsegnene er generelle og tek ikkje utgangspunkt i bestemte figurar, noko som er karakteristisk for deduktiv grunngjeving. Samtidig uttrykker ikkje elvane det som grunngjeving. For dei ser det ut til å vere svar på spørsmålet om ein kan finne ein regel.

I tillegg til å skildre kor mange sirklar det vert er H54 òg i stand til å skildre korleis ein skal plassere dei raude sirklane.

H54 Du kan teikne ein oppe og den kan du tenke at skal alltid vere raud (viser øvste sirkelen på byrjande figur 100). Og så skal alltid den under og vere raud.

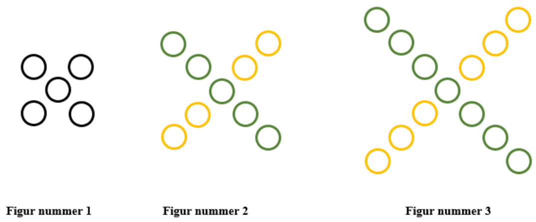
På spørsmål om kva meir ein skal teikne svarar ho at ein skal teikne dei som ikkje er fargelagte bortover.

4.4. Oppgåve 2

I oppgåve 2 viser elevane større variasjon i korleis dei teiknar figurane. Struktur, generalisering og grunngjeving vert sett nærare på i følgande delkapittel.

4.4.1. Gruppe 24

I oppgåve 2 forsøker V24 seg fyrst på noko som kan sjå ut som den rekursive strategien frå oppgåve 1 når ho finn figur 4. Ho tel sirklane i figur 3 og svarar at figur 4 kan ha fjorten sirklar. Dette grunngjev ho med at figur 3 har tretten sirklar. «Fordi der (peikar på figur 3) er det tretten. Det ser ut til at V24 trur at desse figurane òg aukar med ein for kvar figur. Grunngjevinga er ei form for empirisk grunngjeving då den viser til eit døme, men argumentasjonen er ugyldig då differansen mellom figurane ikkje er ein. Etter ei samtale med meg om regelen finn V24 att det er fire fleire sirklar i figur 2 enn i figur 1. Sidan ho ikkje undersøker om regelen stemmer for alle figurane er det ei empirisk grunngjeving. Når V24 viser at figur 2 har fire sirklar meir enn figur 4 tel ho fyrst fem sirklar i ein diagonal, noko som er illustrert med mørkegrøne sirklar i Figur 22. At det står igjen fire sirklar gjer at ho veit at differansen er fire, då figur 1 har fem sirklar. Ho tel talet på sirklar i figur 3 på same måte, og H24 tel sirklane i figur 5 på same måte.



Figur 22: V24 sin teljemåte i oppgåve 2. Først tel ho dei mørkegrøne, deretter dei gule. Etter å ha talt dei 5 mørkegrøne i figur 2 ser ho at det er 4 til overs. Sidan figur 1 har 5 sirklar vert differansen 4.

V24 finn ut at figur 4 har 17 sirklar, ved å legge til fire sirklar til figur 3. Teljinga i kryss viser ikkje så godt igjen i figurane elevane teikna. Elevane teiknar kvar sin versjon av figur 4. H24 sin figur er 1b prestrukturell og V24 sin er 2b framveksande, noko som er vist i Figur 23.

a)  b) 

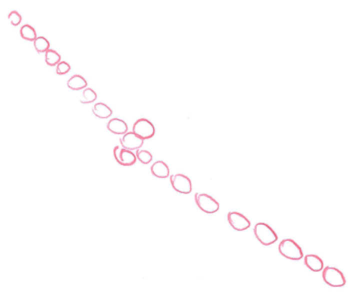
Figur 23: Gruppe 24 sine teikningar av figur 4 oppgåve 2. Figurane har 17 sirklar, noko som er korrekt. a) H24 sin 1b prestrukturell figur.b) V24 sin 2b framveksande figur. Figuren manglar eit sentrum og har tre sirklar til venstre, fire opp, tre til høgre og sju ned.

Slik som i oppgåve 1 teiknar H24 berre vassrette sirklar. V24 sin figur er framveksande då den har ein tydeleg struktur, men den manglar sentrale moment som eit tydeleg sentrum og like mange sirklar på kvar arm.

V24 forsøker seg feilaktig på ein rekursiv strategi for å finne figur 10.

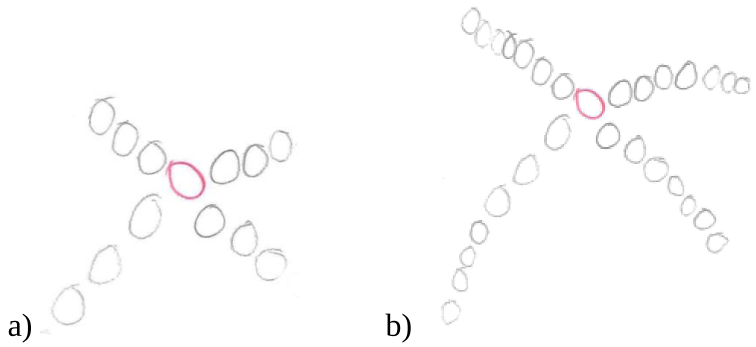
V24	Figur nummer 10. (13 sekund tenkepause). 21 skal det sikkert vere.
E	Kvifor 21?
V24	Det er 4 meir enn 17.

V24 adderer fire til figur 4 sine 17 sirklar og får at det er 21 sirklar i figur 10, ikkje 41. Dei 21 sirklane er utgangspunktet når H24 teiknar ein 2a framveksande figur, vist i Figur 24.



Figur 24: H24 sin 2a framveksande figur 10 oppgåve 2. Figuren har eit sentrum, ni sirklar opp til venstre og ned til høgre, ein sirkel opp til høgre og ned til venstre. Figuren har 21 sirklar, men burde hatt 41.

Denne figuren har meir struktur enn teikninga H24 laga av figur 4. Sidan det er antyding til eit kryss er figuren 2a framveksande. Etter å ha fått oppgåvearket med to fargar teiknar H24 figurar med armar som er like lange. Den fyrste figuren ho teiknar er ein kopi av figur 3, vist i Figur 25a. Etter at H24 uttaler at ho «trur det må vere litt fleire grå prikkar» teiknar ho ein 3b delvis strukturell figur med 7 sirklar i kvar arm, vist i Figur 25b.



Figur 25: H24 sine figur 4 i oppgåve 2. a) Kopi av figur 3 i oppgåvearket med tre grå sirklar i kvar arm. Figuren burde hatt fire sirklar i kvar grå arm. b) Ein 3a delvis strukturell figur. Figuren har 7 sirklar i kvar arm. Den burde hatt fire.

H24 uttaler at figuren liknar ein mann: «Viss vi hadde hatt eit hovud så hadde det vore ein mann». Dette er ikkje ein måte å sjå strukturen som støtter ho i arbeidet med å finne figur 10. V24 klarer derimot å gå vekk frå den rekursive tankegangen og kome fram til ein eksplisitt strategi.

V24	Eg trur eg veit det. Det må jo vere ti der, ti der, ti der og ti der (lagar fire strekar med fingeren ut frå ein raud sirkel ho allereie har teikna).

V24 klarer å nytte koplinga mellom mengde sirklar og figurnummer til å teikne ein strukturell figur. Denne eksplisitte strategien grunngjev ho med generiske dømer ved at ho viser at talet på svarte sirklar i figur 1, 2 og 3 er likt figurnummeret.

V24	Fordi eg såg litt der og så står det jo at det er nummer 3 der (peikar på «Figur nummer 3»). Og alle dei har tre slike (peikar på ein arm i figur 3). Og der står det 2 (peikar på «Figur nummer 2») og alle har to ut slik som er grå (peikar på ein arm i figur 2). Og der er det ein (peikar på «Figur nummer 1») og alle har 1 slik grå ut (peikar på arm i figur 1).

Figur 100 er det òg V24 som finn. Ho nyttar ein eksplisitt strategi. Fyst seier ho at det «skal vere hundre bortover (strekk armen i været), hundre bortover (strekk armen i været). Hundre og ein», men etter at eg spurte om ikkje hundre bortover og hundre bortover i alle fall måtte bli 200 skildra ho alle armane i figuren.

V24	Hundre bortover, hundre bortover, hundre bortover, hundre bortover (lagar fire strekar i lufta ut frå eit sentrum) og ein raud i midten.
E	Kor mange vert det?
V24	Hundre og. Nei ikkje hundre og ein. Hundre og førti ein. Førti ein. Hundre og førti ein.

V24 er altså i stand til å skildre korleis figuren skal sjå ut, men ikkje finne ut kor mange sirklar det vert til saman. Ei på femte trinn var og på veg til å sei «hundre og ført», men ho retta på seg sjølv.

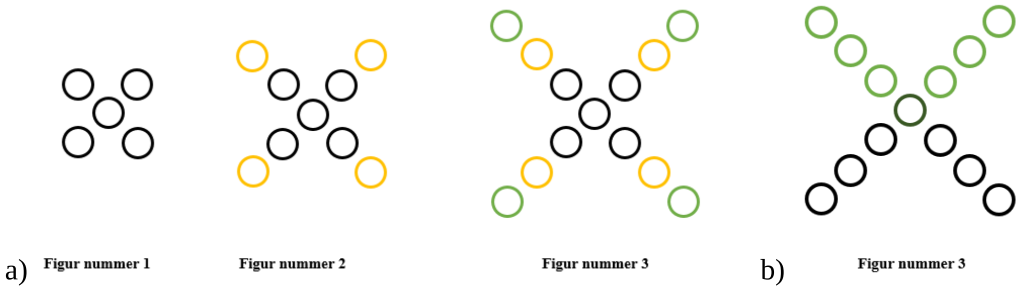
I samtala om hemmeleg figurnummer er V24 oppteken av at «Du treng i alle fall ein i midten», og ho teiknar ein raud sirkel. På spørsmål om kva som manglar når ein har den i midten svarar ho at «Du manglar sånne armar og bein og sånt». På spørsmål om kor mange det skal vere i armane og beina svarar ho «Det talet som er skjult». Seinare utdjupar ho «Du skal ha to armar og bein», «Og ein prikk i midten». At det hemmelege figurnummeret skal ha armar og bein byggjer kanskje på H24 sitt utsegn om at den eine figuren såg ut som ein mann.

4.4.2. Gruppe 26

I samband med figur 4 i oppgåve 2 oppdagar V26 eit rekursivt mønster, at kvar arm får ein meir sirkel for kvar figur.

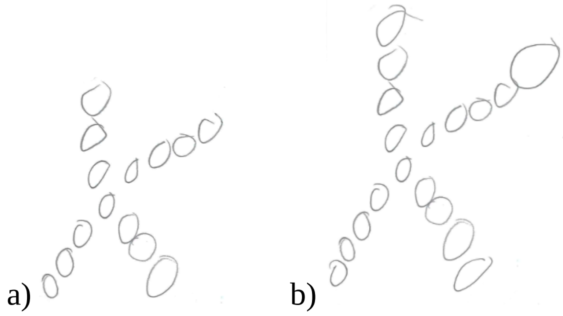
V26 Der er det ein (peikar på arm i figur 1), der er det to (peikar på arm i figur 2) og så er det tre (glir fingeren over arm i figur 3) på sida. Så då må det berre vere ein større på kvar.

V26 oppdagar og grunngjev den rekursive strategien med eit generisk døme, eit mønster som gruppe 24 brukte som argument for ein eksplisitt strategi. Denne måten å sjå figurane som noko som aukar med ein på kvar arm for kvar figur er illustrert i Figur 26a. Etter utsegna frå V26 uttaler H26 «Femten», at figur 15 skal ha 15 sirklar. Ei årsak til at H26 seier at det vert 15 sirklar kan vere at ho slik som V24 har tenkt at det aukar med ein sirkel for kvar figur, eller fordi ho tolkar det V26 seier om at det skal «vere ein større på kvar» som at det vert ein meir sirkel for kvar figur. Då ho tidlegare talde sirklar i figur 3 talde ho sentrum to gongar og fekk at figuren har fjorten sirklar, noko Figur 26b viser. Ho talde òg ein sirkel for mykje då ho seinare talde på figur 4. Dersom H26 byggjer på V26 sine utsegn kan det sjåast på som å referer til ekstern autoritet.



Figur 26: a) V26 si dekomponering av figurane i oppgåve 2. Det aukar med ein sirkel på kvar arm for kvar figur. b) H26 sin teljemåte. Ho tel fyrst dei lysegrøne sirklane inkludert sentrum, deretter dei mørkegrøne inkludert sentrum.

H26 teiknar to 3b strukturelle figurar: Figur 27a og b. Dei har eit tydeleg sentrum og om lag like lange armar. Den fyrste figuren har 14 sirklar, noko V26 meiner er litt lite, så H26 teiknar vidare på den slik at den får 18 sirklar.



Figur 27: H26 sine 3a delvis strukturelle figur 4 oppgåve 2. a) Figuren har eit sentrum, tre sirklar opp til venstre, fire opp til høgre, tre ned til høgre og tre ned til høgre. Kvar arm burde hatt fire sirklar. b) Figuren har eit sentrum, fire sirklar opp til venstre, fem opp til høgre, fire ned til høgre og fire ned til venstre. Kvar arm burde hatt fire sirklar.

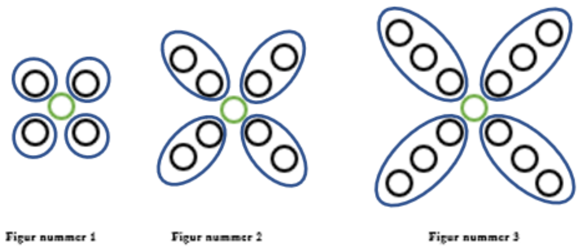
Elevane er ikkje heilt nøgde med korleis figurane ser ut. V26 seier at figuren ikkje ser heilt lik ut som figur 3, at den går litt langt ut til eine sida og H26 at «den er litt skeiv». V26 svarar bekreftande på spørsmål om talet på sirklar er korrekt.

Den rekursive tankegangen fortsette og V26 uttaler i samband med figur 10: «Berre ta ein meir kvar gong». Dette nyttar H26 i ein «chunking»-strategi, då ho med utgangspunkt i figur 4 samtidig seier «Det blir ti meir». At det vert ein meir for kvar figur har dei allereie argumentert for med eit generisk døme. «Chunking»-strategien er den same feilaktige strategien som H54 nytta i oppgåve 1 då ho fann at figur 100 hadde 112 sirklar. V26 teiknar figur 10, vist i

Figur 28, og når ho teiknar teiknar ho rundt og rundt. Dette passar med å legge til ein og ein. Figuren er ein 3a delvis strukturell figur då den har om lag like lange armar og eit tydeleg sentrum, men feil tal på sirklar.

Figur 28: H26 sin 3a delvis strukturelle figur 10 oppgåve 2. Figuren har eit sentrum, 10 sirklar opp til venstre, 12 opp til høgre, åtte ned til høgre og åtte ned til venstre. Kvar arm burde hatt 10 sirklar. Figuren har 39 sirklar. Den burde hatt 41. Figuren er teikna på tre A4 ark.

Figur nummer 100 gjettar elevane på og V26 uttaler at ein kan teikne figur 100 ved hjelp av firkantar. «Det er berre å ta hundre og to tusen firkantar». Det er ikkje sikkert at dette er eit seriøst forslag frå eleven. Det kan like gjerne vere eit uttrykk for at ho ikkje veit og difor berre seier noko. Eller så kan det hende at tala er for store for eleven. Etter å ha fått oppgåvearket med to fargar teiknar H26 med ein gong ein strukturell figur. No teiknar ho ein og ein arm og dekomponerer figuren i eit sentrum med fire armar, slik Figur 29 viser. På same måte teiknar ho ein ny strukturell figur 10. Ho har altså endra teiknestrategi.



Figur 29: H26 si dekomponering av figurane i oppgåve 2. H26 endrar til å sjå figuren som eit sentrum, med fire armar som er like store. Kvar arm er ringa rundt med blått.

V26 argumenterer empirisk for at figuren er korrekt ved på peike på figur 3 og 4 og seie at «Det der er 3 og det er 4». At det faktisk er tal på sirklar i ein arm ho snakkar om kjem tydlegare fram i eit seinare sitat av H26. Dette sitatet er ei grunngjeving for figur 10, ein figur V26 seier at ho «Har ikkje peiling» på kvifor skal ha 10 sirklar i kvar arm.

H26	Fordi der er det ein, to, tre, fire (tel på ein arm i figur 4) om det er nummer 4.

Det ser ut til at H26 ser koplinga mellom korleis figuren ser ut og kva figurnummer den har. Utsegna er eksplisitt og ho grunngjev empirisk ved å vise at det fungere på figur 4, men òg på figur 3. På spørsmål om figur 100 er det V26 som svarar fyrst.

E	Då lurer eg på. Figur 100, kor mange blir det i den?
V26	Hundre på kvar
H26	Hundre på den her sida (peikar på armen ned til høgre i figur 10)

Det er ikkje sikkert V26 forstår koplinga mellom figur og figurnummer, men ho er i stand til å anvende det H26 seier. Det er H26 som grunngjev kvifor det skal vere ein raud sirkel i midten.

V26	Ein i midten (peikar på den raude sirkelen i figur 10)
E	Korleis visste de det?
H26	Fordi det er alle er ein i midten (peikar på sentrum i figur 1, 2, 3, 4 og 10)

Det eksplisitte utsegna til V26 vert grunngjeve med generiske dømer av H26 når ho peikar på figurane. V26 kjem fram til at figurnummeret er om lag like mange sirklar som ein treng i kvar arm i figuren.

V26	Fordi at det store talet er akkurat så mange prikkar som vi må ha. Eller cirka.
E	Så viss de hadde visst talet så hadde det vore akkurat så mange sirklar som de måtte ha?
V26	Ja. På alle sidene (peikar på armane i figur 4). Og i midten (peikar på sentrum i figur 10).

V26 verkar ikkje heilt sikker på at det blir nøyaktig korrekt tal på sirklar, men ho uttrykker noko generelt på ein eksplisitt måte, noko dei tidlegare har argumentert for med generiske dømer. Ein kan tolke det siste utsegna som at ho er einig i at det er nøyaktig like mange sirklar i kvar arm som figurnummeret, i tillegg til at det skal vere ein sirkel i sentrum.

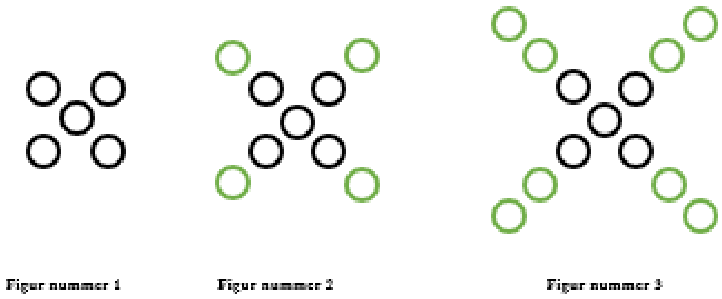
H26 meiner at figur 1000, figuren elevane får vite var det hemmelege figurnummeret, ikkje har 4001 sirklar, «For og då det blir ikkje 1000». H26 svarer at figur 100 har «Hundre på kvar». Hennar fokus har tidlegare i samtala ikkje vore på den totale mengda sirklar. Kanskje gjer det samtala om den totale mengda for figur 1000 forvirrande. Ei anna moglegheit kan vere at tala er så store at logikken forsvinn, slik det har vorte presentert tilfelle av tidlegare i analysen.

4.4.3. Gruppe 53

Det ser ut til at H53 og V53 ser på figurane på to ulike måtar, sjølv om begge er rekursive. H53 byrjar å forklare at ein tek fire fleire sirklar på figur 2, og V53 legg til at figur 1, 2 og 3 har fått lagt på høvesvis tre, fire og fem sirklar. H53 er ueinig med V53 og fortset å forklare korleis ho ser figuren.

H53	Der òg tek dei på. Berre at der tek dei på fire (peikar på dei ytste sirklane i figur 2)
V53	Der tar dei på tre (peikar på figur 1), fire (peikar på figur 2), sikkert (peikar på figur 3). Kanskje.
H53	(Ristar på hovudet). Der blir det åtte (peikar på figur 3). Der er den som var heilt i byrjinga (lagar ei sirkelrørsle rundt fem sirklar i midten av figur 3) og så er det (peikar på kvar av armane i figur 3)

Det kan sjå ut til at H53 ser samanhengen med at det aukar med fire sirklar for kvar figur. At ho viser at det gjeld frå figur 1 til 2 og figur 2 til 3 kan sjåast på som eit generisk døme. Figur 30 er ein illustrasjon av korleis H53 dekomponerer figurane. Figur 1 er eininga. I tillegg er det ein del som er lagt til og som vert større og større for kvar gong. Det er vanskeleg å gje ei sikker forklaring på kva V53 gjer når ho snakkar om at det vert lagt til 3, 4 og sikkert 5 sirklar.

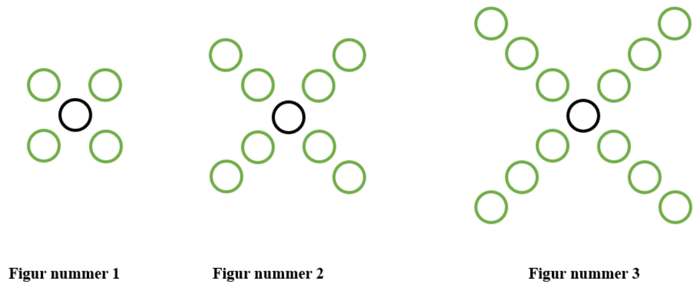


Figur 30: H53 si dekomponering av figurane i oppgåve 2. Figur 1 er eininga som det vert lagt til noko rundt. Det rundt aukar med fire sirklar for kvar figur.

V53 endrar til ein rekursiv strategi som ho grunngjev med eit generisk døme, ho viser at figurane består av sentrum og at det på alle figurane vert lagt til fire rundt, slik at figur 1 har fire rundt sentrum, figur 2 har åtte og figur 3 har tolv.

V53	Men då. Vi plussar fire mellom trur eg. For den er fire rundt (peikar på figur 1) og så er det åtte rundt (peikar på figur 2) så er det tolv rundt (peikar på figur 3)

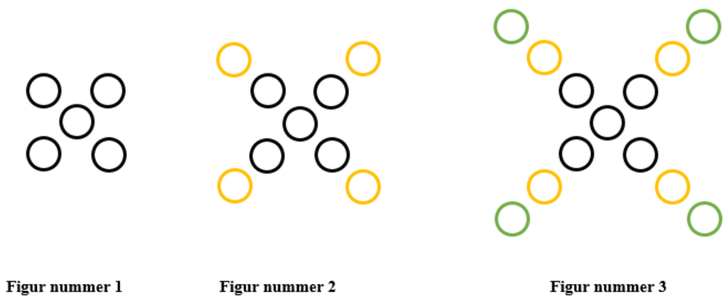
At det ser ut til at V53 ser figurane som eit sentrum som får meir og meir lagt til seg er illustrert i Figur 31.



Figur 31: V53 si dekomponering av figurane i oppgåve 2. Figurane har eit sentrum med noko rundt. Det rundt aukar med fire for kvar figur.

Elevane forsøker seg på kvar sine strategiar for å finne figur 4. V53 finn figuren ved å finne at sidan figur 3 har tolv sirklar utanfor sentrum, så har figur 4 seksten sirklar utanfor. I forsøket på å finne figur 4 går H53 over til eit sterkare fokus på at det vert fire meir for kvar figur, og ho finn figur 4 ved å legge til fire sirklar til figur 3 sine sirklar. Utsegna under viser fokuset på fire meir for kvar figur, og at desse vert lagt til ytst på førre figur. Figur 1 er framleis utgangspunktet, og Figur 32 er ein illustrasjon av korleis det ser ut til at H53 ser figurane.

H53	Eg trur det er fire pluss, for der er den (peikar på figur 1) og så har du plussa på fire stykk (peikar på dei ytste i figur 2). Og då er det den (peikar på figur 3) plussa på fire stykk (peikar på dei ytste i figur 3).



Figur 32: H53 si nye dekomponering av figurane i oppgåve 2. Figur 1 er utgangspunktet. Deretter vert det lagt til fire sirklar ytst for kvar figur.

I teikninga av figur 4 teiknar V53 ein strukturell figur ved å teikne ein arm om gongen. Det er ein annleis måte å delkomponere enn det ho har vist tidlegare. H53 er framleis fokusert på figur 1 som eining, og ho uttaler at «Du må teikne slik at det blir 5 på terningen».

Når elevane skal finne figur 10 samarbeider dei om H53 sin metode med å legge til fire for kvar figur. Dei stegtel i kor til dei finn løysinga før H53 teiknar ein strukturell figur. Deira tidlege generiske dømer vil framleis vere gyldige.

Elevane forsøker mykje som ikkje leier fram før dei får oppgåvearket med to fargar. H53 forsøker seg på heil-objekt-strategiar, både ved å doble talet på sirklar i figur 10 og ved å multiplisere det med 10. Ho føreslår òg at «Vi må ta den (peikar på figur 10) heilt opp til hundre». Det er litt utydeleg kva ho meiner med dette, men ei tolking er at dei skal fortsette på figur 10, slik dei talde vidare på figur 4 for å finne figur 10. H53 har eit forslag for korleis dei kan nytte ein «chunking»-strategi til å byggje vidare på figuren. Ho seier at dei kan «teikne hundre sånne småprikkar til», noko H53 finn at vert 141. Dette er same «chunking»-strategien som gruppe 26 nyttar for å forsøke å finne figur 10. Elevane er òg innom å svare 100 på kvar arm, men ingen av dei kan grunngje, og dei konkluderer med at det er feil. H53 går tilbake til tankegangen om å legge til fire på kvar figur, og uttaler at «Vi plussar på fire for kvar». V53 føreslår at dei kan legge til ti om gongen: «Kva viss vi hadde tatt ti om gongen då?», kanskje for å effektivisere. H53 er ikkje heilt sikker på om det fungerer, for ho mister kontroll på kor mange gongar ein har lagt til. Det ender med at V53 heller ikkje veit om denne «chunking»-strategien fungerer.

Elevane finn at dei kan ta tjue pluss fem sirklar på kvar arm, men dei konkluderer med at dei ikkje veit om det vil fungere. Tjuefem sirklar på kvar arm gjev hundre sirklar til saman på armane. Kanskje blandar dei figurnummer og mengde sirklar. Før dei får oppgåvearket med figurane i to fargar er dei innom tanken på å multiplisere talet på sirklar i figur 1 med hundre, ein heil-objekt-strategi ingen andre nyttar. Dei går raskt vidare til ein eksplisitt strategi og V53 føreslår nitten sirklar «på kvar», men ho kan ikkje grunngje kvifor. Kanskje er det ei blanding mellom tal på sirklar og figurnummer 100. Dersom ein har nitten sirklar på kvar arm og tel med sentrum fire gongar får ein 100 sirklar.

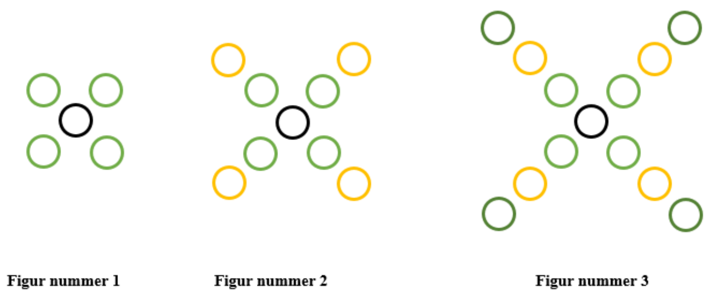
Etter å ha fått oppgåvearket med to fargar ser H53 på utgangspunktet som den eine sirkelen i sentrum, slik V53 gjorde i starten, berre at H53 ikkje samlar resten av sirklane, men deler dei opp i fire og fire.

H53	Då var det eigentleg berre ein dei begynte med. Tok dei berre fire og fire og fire.

Måten å sjå på sirklane vert underbygga av ei seinare utsegn.

H53 Men dei byrja med den (peikar på sentrum i figur 1). Og så tok dei på fire og fire kanskje.

Ein slik måte å dekomponere er illustrert i Figur 33.



Figur 33: H53 si nye dekomponering av figurane i oppgåve 2. Det er eit sentrum som ein legg fire og fire sirklar til for kvar figur.

Saman teiknar elevane ein strukturell figur 4 med to fargar, medan V53 fortset eit fokus på det rekursive og prøver å finne figur 5: «Femmaren er jo (4 sekund pause) tjueein på». H53 legg merke til ei kopling mellom figur og figurnummer som gjer at ho finn figur 100. Strategien er eksplisitt og grunngjevinga er empirisk, då den ikkje forklarer om regelen fungerer på figur 1.

H53 Men det er jo fire på kvar når det er nummer 4, tre på kvar når det er nummer 3, to på kvar når det er nummer 2 (peikar på figurane og «figur nummer»).

Koplinga gjer at elevane finn at det vert hundre sirklar på kvar arm, 401 sirklar til saman. Grunngjevinga for hemmeleg figurnummer er den empiriske grunngjevinga for figur 100. På spørsmål om hemmeleg figurnummer kjem V53 med figur 13 som døme:

V53 Viss det er for eksempel figur nummer 13 så skal du ha tretten på kvar side og ein i midten

H53 skildrar korleis ein kan teikne ein figur.

H53 Oja. Ein runding i midten og det talet som er figurnummeret (peikar der det står «figur nummer 3») tar du kor på kor mange du vil ha på (peikar på armane i figur 3) rundt.

Utsegna er litt upresist, men ho viser at ein har like mange sirklar som figurnummeret i armane.

4.4.4. Gruppe 54

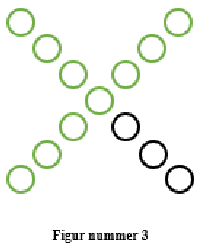
Gruppe 54 snakkar ikkje om det same i starten. H54 ser tidleg koplinga mellom figur og figurnummer, slik H26 gjer i Figur 29, og uttrykker ein eksplisitt samanheng som vert grunngjeve med generiske dømer.

H54	Eg veit det. I midten så er det jo ein då (peikar på sentrum i figur 2). Så skal det alltid vere to (lagar strekar med fingeren over armane i figur 2). Her når det er nummer 2 (peikar på «figur nummer 2») så skal det vere to her, to på kvar (lagar strekar med fingrane på armane i figur 2). Og her skal det vere ein (peikar på figur 1) og her er det tre på kvar (lagar strekar med fingeren langs armane i figur 3).

H54 sine generiske dømer kan ein sjå som bakteppe for seinare argument. V54 ser derimot ikkje ut til å vere med på grunngjevinga og ho ser ut til å forsøke å finne ein eksplisitt regel som fortel kor mange sirklar ein må legge til figurnummeret for å finne talet på sirklar i figuren.

V54	Ja. For her er det ti meir enn det talet der (peikar på «figur nummer 3»). For her er det ein, to, tre (tel armen ned til høgre og glir ein finger ut armen opp til høgre, inn til sentrum, ut armen opp til venstre, inn til sentrum og ut armen ned til venstre).

Korleis V54 deler opp figur 3 er vist i Figur 34.



Figur 34: V54 si dekomponering av figur 3. Ho tel fyrst dei tre svarte sirklane. Deretter lar ho fingeren gli frå sentrum og opp til høgre, tilbake til sentrum, opp til venstre, tilbake til sentrum og ned til venstre.

H54 byggjer ikkje vidare på V54 sine utsegn, men forklarer heller korleis ein kan dekomponert i to fargar.

H54	Viss den der er fargelagt (fargar sentrum i figur 2 grå) så er dei andre ikkje fargelagt (lagar fire strekar i lufta over armane i figur 2). Og det er to som ikkje er farge, to på kvar side som ikkje er fargelagt (lagar fire strekar i lufta over armane i figur 2). Her er det tre som ikkje er fargelagt (lagar strekar med fingeren på armane i figur 3). Her er det to (lagar strekar med fingeren over armane i figur 2). Her er det ein (peikar på figur 1).

H54 innfører den dekomponeringa i to fargar som dei andre gruppene fekk oppgjeve. Ho nyttar dekomponeringa til å finne figur 4. Framgangsmåten hennar er å stegtelje med fire då figuren skal ha fire sirklar i kvar arm.

H54	Ja. Eg tenker. Fire, åtte, tolv, seksten (peikar på armane i figur 3) sytten (peikar på sirkelen i sentrum av figur 3).

V54 nyttar ikkje same dekomponering når ho skal teikne figur 4. Ho ser på den eine diagonalen som ein samanhengande del som ho forsøker å teikne først.

V54	(Teiknar fem sirklar på skrå nedover) Kor mange er det nedover? (Peikar på figur 3 og tel at den har sju sirklar på skrå nedover). Nei eg skjønte ikkje heilt oppgåva.

Kanskje går progresjonen til H54 sine eksplisitte uttrykk for raskt. V54 let H54 fullføre figur 4. Ho teiknar ein strukturell figur med eit raudt sentrum. Det ser ut til at V54 har tatt med seg vidare det ho fann i oppgåve 1, for ho uttaler at det skal vere to raude sirklar i figuren: «Det må jo vere alltid to som er fargelagt».

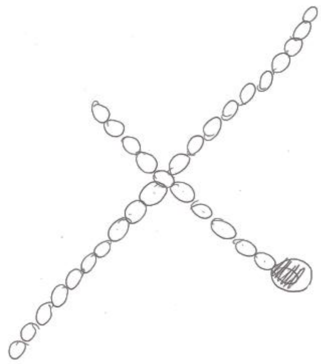
I samband med figur 10 svarar H54 raskt «Då er det 10 utanfor», altså ti sirklar i kvar arm. V54 har fleire utsegn kopla til figurnummeret.

V54	Ja. Du må alltid sjå på det nummeret (peikar på figurnummera som står under kvar figur). Det er det som er det viktige.

Og

V54 Sånn at her er det tre (peikar på «Figur nummer 3») og her er det tre (peikar på ein arm i figur 3). Sant. Her er det fire (peikar på «Figur nummer 4») fire, fire, fire, fire (peikar på armane i figur 4).

Sjølv om V54 tilsynelatande forklarer koplinga mellom figur og figurnummer vert det utfordrande for ho å teikne figur 10 og ho teiknar ein 2a framveksande figur med fire, ti, seks, og ti siklar i armane, Figur 35. Til saman har armen opp til venstre og armen ned til høgre ti sirklar. Om det er bakgrunnen for valet av sirklar er vanskeleg å seie. H54 rettar opp figuren slik at den vert strukturell.



Figur 35: V54 sin 2a framveksande figur 10 oppgåve 2. Figuren har eit sentrum, fire sirklar opp til venstre, ti opp til høgre, seks ned til høgre og ti ned til venstre. Sirkelen ned til høgre er i ettertid streka over og teikna ny. Kvar arm burde hatt ti sirklar.

I samband med figur 4 nemnte H54 at: «Så figur nummer 100 er det hundre utanfor», men V54 er meir usikker på kva ho skal svare når eg seinare spør ho om talet på sirklar i figuren..

V54 Det må jo vere hundre. Eller ti på der (peikar på ein arm i figur 10).

Utsegna er eksplisitt, men vert ikkje grunngjeve. Etter at H54 har forklart at det vert hundre i kvar arm og fire hundre til saman gjentek V54 hennar utsegn. Ingen av dei nemner sentrum. Det er H54 som fyrst skildrar hemmeleg figurnummer, men dei kjem begge med dømer. Undervegs avbryt dei kvarandre litt.

H54 Du har

V54 Du må tenke

H54 talet ditt med det hemmelege talet. Du tar ein i midten. Den byrjar du med.

V54 (Fargelegg sentrum i figur 3)

H54	Ein i midten. Så teiknar du det hemmelege talet ditt utanfor (lagar fire strekar i lufta med handa)
V54	Ja for eksempel viss det er nummer 3 så må du teikne alltid tre utanfor (lagar strekar i lufta over armane i figur 4). For eksempel viss du skal teikne
H54	For eksempel talet 5. Då skal du teikne fem utanfor (Lagar fire strekar i lufta som i eit kryss) kvar. Og så skal det vere ein i midten.

V54 vert litt avbroten i forklaringane sine av H54, men det kan sjå ut som ho hadde ei større forståing på slutten av samtala enn ho hadde i arbeidet med figur 100. Ho fargelegg ein sirkel, ikkje to slik ho tidlegare sa det skulle vere. Litt etter at eg hadde vist at det hemmelege figurnummeret var 50 og at det vart 201 sirklar i figuren skildra V54 korleis den skulle sjå ut.

V54	Og viss du skal teikne som eit femtal sånn som (lagar kryss over figur 10 med fingeren) og ditt hemmelege tal er 50 så må du ta 50 der, 50 ut der, 50 ut der og 50 ut der (fører pennen over armane i figur 10) pluss ein (peikar på sentrum i figur 10). Slik som du har gjort der berre at du ikkje har teikna (peikar på utrekninga av hemmeleg figurnummer)

5. Drøfting

Forskingsspørsmåla i denne oppgåva handlar om høg strukturkompetanse i arbeid med direkte og nær generalisering av figurfølger, korleis det kjem til uttrykk i 2. og 5. trinn sitt arbeid med figurfølger, og eventuelle kvalitative skilnadar mellom 2. og 5. trinn med tanke på struktur, generalisering og grunngjeving. Funna i analysen fortel mykje om likskapar og skilnadar mellom trinna. Desse blir summert opp i neste delkapittel. Deretter vert AMPS-nivå, strategiar, generalisering og utfordringar diskutert. Til slutt vert rammeverka drøfta.

5.1. Funna i analysen

Analysen viste at elevane på 5. trinn jamt over hadde elevarbeid på høgare AMPS-nivå enn elevane på 2. trinn. Dei to gruppene frå kvart trinn som hadde høgast AMPS nivå på direkte (figur nummer 4) og nær (figur nummer 10) generalisering vart valt ut. Alle gruppene hadde hovudsakleg eit strukturelt nivå som høgaste nivået sitt på alle spørsmåla, men 2. trinn hadde mykje fleire arbeid som ikkje var strukturelle før dei kom fram til strukturelle figurar. Gruppene frå 2. trinn var avhengige av å få eit oppgåveark der figurane var dekomponert i to fargar, for å finne figur nummer 10 på to oppgåver (Gr. 24) og figur nummer 4 på ei (Gr. 26) oppgåve. Slik har 2. trinn hatt meir støtte for å kome fram til svara. Alle gruppene forsøkte ulike strategiar som ikkje førte fram til korrekte svar. 5. trinn var dei einaste som nytta heil-objekt som strategi, medan berre ei gruppe frå 2. trinn nytta gjetting. Alle gruppene forsøkte seg på «chunking». Desse strategiane vart i liten grad grunngjeve.

H24 og H26 svara minst ein gong feil på talet på raude sirklar. Alle gruppene ser ut til å blande talet på sirklar og figurnummer. Gruppe 54 ser ut til å vere den einaste som ikkje fekk problem med at tala vart for store.

Sett bort frå at gruppe 54 ikkje fann figur 100 i oppgåve 1 og at gruppe 26 ikkje fann figur 100 og hemmeleg figurnummer i den same oppgåva, fann elevane svar på alle oppgåvene. Hovudsakleg hadde svara ei empirisk grunngjeving eller eit generisk døme som bakgrunn. Ser ein på kva generaliseringsstrategiar som gav dei korrekte svara finn ein berre rekursive og eksplisitte strategiar. Gruppe 54 fann alle svara eksplisitt, men elles fann elevane ein eller to figurar rekursivt før dei fann resten eksplisitt. For å finne figurar som ikkje er direkte etter førre kjende figur ser det i oppgåve 1 ut til at elevane må dekomponere figurane på ein slik måte at heile figuren får lagt til ein sirkel for kvar figur. Med mindre ein av delane er figurnummeret fungerer det ikkje at berre ein del av figuren vert større, noko ein ser i V24 sin dekomponering presentert i Figur 15. I oppgåve 2 ser det ut til at elevane anten må sjå at dei kan addere fire sirklar til figur 3 for å få figur 4 og fortsette på same måten til dei finn figur 10, eller dei må sjå at det er like mange sirklar i kvar arm som figurnummeret. Eit døme på det siste er H26 si dekomponering, som vist i Figur 29. Med unntak av gruppe 26 i oppgåve 1 fann alle gruppene ei generell skildring av dei hemmelege figurnummera, sjølv om det varierte kor presise skildringane var.

5.1.1. Høg strukturkompetanse i direkte og nær generalisering.

Frå 2. trinn var det gruppe 26 som viste høgast strukturkompetanse i direkte og nær generalisering, medan det frå 5. trinn var gruppe 53. Sjølv om gruppe 26 presterte betre enn gruppe 24, fann gruppe 24 figur 100 og hemmeleg figurnummer på begge oppgåvene, noko gruppe 26 berre gjorde på eine. Frå 5. trinn fann gruppe 53, gruppa med høgast strukturkompetanse, svar på alle oppgåvene, medan gruppe 54 som var nede på eit 2a framveksande nivå på ei oppgåve mangla korrekt svar på figur 100 i den andre oppgåva. Dette gjer at ein ikkje kan seie at høg AMPS i direkte og nær generalisering må vere ein indikator på høg kompetanse når det kjem til å finne generelle figurar. AMPS-nivåa ser i min studie berre ut til å kunne seie noko om figur 4 og 10, figurane elevane teikna.

5.1.2. Konsekvent AMPS på figurfølger?

Mulligan og Mitchelmore (2013) fann at elevar på 1. og 2. trinn var iaugefallande konsekvent i kva strukturelt nivå dei viste. Ut frå mitt datamateriale kan eg ikkje seie så mykje om konsekvent AMPS-nivå då eg har fokusert på grupper og ikkje enkeltindivid. Det var større variasjon i gruppene frå 2. trinn enn gruppene frå 5. trinn. Eg valde å sjå på grupper i staden for enkeltelevar då eg tenkte at det ville gjere at elevane kommuniserte meir matematikk og at situasjonen vart tryggare. Utsegna til elevane i kvar gruppe er så kopla saman og dei byter på å svare på spørsmål, så det er ikkje hensiktsmessig å sjå på enkeltelevar isolert frå gruppa. Fokusgruppene mine er ikkje representative for dei andre gruppene i studien då eg har valt ut dei som i størst grad kjem opp på eit strukturelt nivå. Ser ein på enkeltelevane i fokusgruppene, på trass av at dei vert påverka av kvarandre og ikkje alle svarer på alle oppgåvene, er elevane konsekvente på AMPS-nivåa i enkeltoppgåvene, men ikkje naudsynt på tvers av oppgåver. I ei oppgåve held dei seg på eit hovudnivå, men dei kan veksle på om dei er på a eller bi i nivået. Dei kan til dømes gå frå 2a framveksande til 2b framveksande, men ikkje noko meir enn det. Einaste gongane det er ei større endring er etter at dei får oppgåvearket med to fargar. Endringa er då at elevane går over til sturkturelle figurar. Eit unntak er H24 som etter å ha fått oppgåvearket med to fargar teiknar ein kopi av ein figur frå oppgåvearket, for så å teikne på fleire sirklar slik at den vert 3a delvis strukturell.

5.1.3. Kvifor er 2. trinn innom fleire AMPS nivå enn 5. trinn?

Så godt som alle figurane som ikkje er strukturelle er frå før elevane fekk oppgåvearket med to fargar. Med eit unntak var elevane på 2. trinn avhengige av oppgåvearket med to fargar for å finne figur 10. Halvparten av 2. trinn sine strukturelle figur 4 vart teikna etter at elevane fekk oppgåvearket med to fargar. Det vil seie at 2. trinn på fleire oppgåver var avhengig av oppgåvearket med to fargar for å kome seg opp på eit strukturelt nivå, eit oppgåveark dei ikkje fekk før etter at dei hadde teikna ein figur som ikkje var strukturell. I samband med dette oppgåvearket hadde vi ofte samtaler om kopling mellom figur og figurnummer. Elevane på 5. trinn fekk til å teikne figur 4 og 10 utan støtte frå oppgåvearket med to fargar. I dei tilfella der dei fekk behov for oppgåvearket med to fargar for å finne figur 100 kan det godt hende at dei ikkje hadde klart å skildre korleis ein kan teikne figuren på ein strukturell måte før dei fekk dekomponeringa. Det vil seie at når oppgåvene vert vanskelegare er det ikkje sikkert at gruppene på 5. trinn framleis er på eit strukturelt nivå. Dette dersom ein utvidar rammeverket til å gjelde figurar ein ikkje kan teikne.

5.1.4. Heil-objekt og eit svakare bilete av situasjonen

Lannin et al. (2006) fann i si undersøking at elevar som får inn-verdiar som er multiplar av tidlegare kjende verdiar ofte nyttar heil-objekt-strategiar for situasjonar med positiv lineær vekst, noko alle oppgåvene i denne masteroppgåva har. Elevar med dårleg visuelt bilete av situasjonen nyttar ofte heil-objekt-strategien på ein gal måte, medan dei som har eit sterkt visuelt bilete ser behovet for å justere heil-objekt-strategien på bakgrunn av at ein tel for mykje eller for lite av det ynska kjenneteiknet (Lannin et al., 2006). Eg tolkar Lannin et al. si omtale av visuelt bilete som at det handlar om korleis elevar oppfattar situasjonen, om dei er opptekne av korleis figuren ser ut, eller berre av mengder i figurane. Ingen av elevane på 5. trinn justerer for at dei tel for mykje. Begge gruppene på 5. trinn prøver seg på dobling utan suksess. Med mindre ein doblar talet på sirklar i høvesvis figur 2, 5 og 50 er ikkje det å doble ein gong ein god strategi for å finne figur 4, 10 og 100, då det ikkje vil gje korrekt svar. Ei årsak til at 2. trinn ikkje nyttar heil-objekt-strategien i det heile kan vere at den baserer seg på multiplikasjon, og multiplikasjon i læreplanen kjem inn som eit kompetansemål etter 4. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det å doble og halvere er eit kompetansemål etter 2. årssteget (Utdanningsdirektoratet, 2013), så det er mogleg dei har arbeida mot dette kompetansemålet, men som nemnt er det sjeldan ein hensiktsmessig strategi. Ser ein på når elevane nyttar heil-objekt-strategiane er det i samband med at dei forsøker seg på ulike strategiar for å finne figur 10 eller figur 100. Kanskje er det litt strengt å seie at elevane har eit dårleg visuelt bilete av situasjonen, men dei har i alle tilfella eit rekursivt syn på situasjonen, og sidan dei ikkje koplar figur til figurnummer er det vanskeleg å vite kva som kan multipliserast og kva som vil vere konstant. Det er fyrst når dei klarer å sjå denne koplinga til figurnummeret at dei kjem seg vidare. Skal ein nytte heil-objekt-strategien korrekt er ein avhengig av å ha ei forståing for kva som er konstant og kva som varierer. I denne oppgåva nyttar elevane som har denne forståinga heller eksplisitte strategiar. For 2. trinn kan dette ha samanheng med at det anten krev multiplikasjon eller gjenteken addisjon, og gjenteken addisjon kan ofte vere tidkrevjande og utvfordrande. Lannin et al. (2006) skriv at elevane sine strategiar vert påverka av at dei søker effektivitet.

5.1.5. «Chunking» og gjetting

«Chunking»-strategien vert nytta i dei same tilfella som heil-objekt-strategien, tilfella der elevane prøver ut ulike strategiar for å finne figur 10 eller 100. Slik elevane nyttar strategien handlar den om addisjon eller subtraksjon. Kanskje er det tilbøyelegheita til å nytte addisjon og subtraksjon, rekneartar som elevane kjenner best, som gjer at alle gruppene både 2. og 5. trinn endar opp med å nytte «chunking». Slik Lannin et al. (2006) definerer «chunking» er det å nytte ein rekursiv samanheng sentralt. Det er mogleg at elevane ikkje er på veg mot ein «chunking»-strategi, men at dei heller blandar talet på sirklar og figurnummer, då tre av gruppene sin «chunking»-strategi handlar om at dei adderer figurnummeret dei skal finne til førre kjende figur. I eit tilfelle kan det vere ein mislukka rekursiv strategi, då elevane i oppgåve 2 legg til fire sirklar på figur 4 for å finne figur 10. Blanding av tal og figurnummer vil bli sett grundigare på i delkapittelet om utfordringane elevane møter.

Elevar med dårleg visuelt bilete nyttar ofte «gjett-og-test» strategiar for å utvikle generaliseringar, då med fokus på numeriske relasjonar heller enn relasjonar som er kopla til situasjonskonteksten (Lannin et al, 2006). Kanskje er det eit dårlegare visuelt bilete som gjer at 26 som einaste gruppe gjettar. Det som skil gruppe 26 si gjetting frå Lannin et al. (2006) er at dei skildrar ein strategi der elevane gjettar reglar, for så å teste dei, medan gruppe 26 berre gjettar endelege svar.

5.1.6. Rekursive generaliseringsstrategiar

Dersom inndataverdiane er nære, uavhengig av oppgåvetype og visuelt bilete av situasjonen, har elevar ein tendens til å nytte rekursive reglar (Lannin et al., 2006). Likevel kan ein elev sitt visuelle bilete av ein situasjon ofte lede til markant ulike syn på deira rekursive regel. Lannin et al. (2006) skriv at elevar med sterke visuelle bilete av ein situasjon forsøker å kople ein rekursive regel til problemsituasjonen, medan dei elevevane som fokuserer på numeriske verdiar kan ha liten forståing for korleis deira rekursive reglar kan koplast til problemkonteksten. At nære inndataverdiar har ein tendens til å gje rekursive strategiar stemmer med funna i denne masteroppgåva. Det betyr ikkje at elevane må lukkast med dei rekursive strategiane. Med unntak av gruppe 26 som i oppgåve 1 finn figur 10 ved å teikne figur 5-10, så klarer ikkje 2. trinn å finne figur 10 rekursivt. Dette kan ha ein samanheng med korleis dei ser figurane. V24 ser på figurane i oppgåve 1 som to, tre og fire sirklar med ein sirkel oppå. Denne tankegangen hjelp dei til å finne at figur 4 består av fem sirklar og ein oppå, noko som er vist i Figur 15, men det gjer ikkje at dei finn figur 10. V26 som ser figur 2 som figur 1 med ein sirkel lagt til på høgre side, vist i Figur 17, klarar å nytte dette til å teikne figurane opp til 10. V54 har det same synet på figur 4, noko som kan forklare kvifor dei òg fann figur 10 rekursivt, sjølv om dei tel i staden for å teikne figurane. Det kan òg nemnast at H53 såg figuren på same måte som på oppgåvearket med to fargar, noko som gjorde at dei kunne finne figur 10 eksplisitt.

V24 sitt syn på figurane i oppgåve 2 gjer det òg vanskeleg å fortsette rekursivt då V24 ser figuren som oppdelt i to diagonalar, som vist i Figur 22. Den rekursive regelen ser ikkje ut til å vere kopla til strukturen anna enn at V24 ser at dei fem sirklane i figur 1 kan svare til eine diagonalen i figur 2. Måtane dei ser figurane hjelp dei ikkje til å finne figur 10. Deira rekursive løysing er å legge til 4 sirklar på figur 4 sine 17 sirklar. V26 ser på oppgåve 1 som at det aukar med ein på kvar arm for kvar figur, som vist i Figur 26, men klarer ikkje å nytte dette til å finne figur 10. V53 ser figur 1 som ei eining det vert lagt til noko på, fire sirklar for kvar figur, som vart vist i Figur 32. Dette synet liknar mykje på V26 sitt, så ein kan ikkje seie sikkert kvifor det leier til suksess for V53 og ikkje V26. Gruppe 53 stegtel i kor med 4 frå figur 4 og finn figur 10. Kanskje er stegteljinga ein lettare operasjon for 5. trinn. Det krev trass alt at ein både adderer 4 om gongen og held styr på kor mange gongar ein har addert. V54 nyttar eksplisitte strategiar.

5.1.7. Eksplisitte generaliseringsstrategiar

Lannin et al. (2006) fann i si undersøking at eksplisitte strategiar sjeldan var den fyrste strategien elevane nytta, noko som stemmer godt med mine funn. Det var berre gruppe 54 som på oppgåve 2 starta med å finne figur 4 eksplisitt. Resten av gruppene starta med rekursive strategiar. Hos Lannin et al. (2006) var eksplisitte strategiar noko som vart nytta meir når elevane leita etter meir effektive metodar, gjerne i samband med innverdiar som var relativt fjerne frå førre kjende innverdi. Om det er for å effektivisere, fordi figurnummera vert høge, eller ein kombinasjon, at elevane går over til å finne figurar eksplisitt er vanskeleg å seie. Figur 100 og hemmeleg figurnummer vert i alle tilfelle funne eksplisitt. Dersom elevane ikkje er på eit eksplisitt nivå frå starten av skjer det ei utvikling til denne strategien i løpet av samtala til denne strategien. Einaste unntaket er gruppe 26 som ikkje finn meir enn figur 10 i oppgåve 1. I over halvparten av tilfella vert figur 10 òg funne eksplisitt, då både av 2. og 5. trinn. Dette stemmer godt med Wilkie og Clarke (2016) som i sin studie fann at den vanlegaste overgangen var frå rekursiv til eksplisitt. Det må nemnast at elevane på 2. trinn ikkje hadde nokon hensiktsmessige eksplisitte strategiar før dei fekk oppgåvearket med to fargar. Kanskje er oppgåvearket ei av årsakene til at dei går over til eksplisitte strategiar. Elevane på 2. trinn ser ut til å vere avhengige av oppgåvearket med to fargar for at ei hensiktsmessig utvikling til den eksplisitte strategien skal skje. Det same er gruppene frå 5. trinn på ei oppgåve kvar.

5.1.8. Hemmeleg figurnummer

Bruk av fjerne inndata kan oppmode til bruk av eksplisitte strategiar (Lannin et al., 2006), noko som mine funn òg har vist. I teorikapittelet skreiv eg om Mason (1996) som såg på generalisering som kjernen i algebra, og i innleiinga nemnte eg at mange har skrive om kor vanskeleg det er for elevar å generere ein regel for ein tilfeldig figur. Difor vil eg sjå nærare på elevane sine generaliseringar av hemmeleg figurnummer.

Sidan eg skriv opp eit hemmeleg figurnummer er figurnummeret ein ukjent. Målet er likevel ikkje at elevane skal finne denne ukjente, men at dei skal uttrykke noko generelt, noko dei fleste gruppene gjorde. Einaste unntaket var gruppe 26 i oppgåve 2. Dei uttalte at ein kan prøve å gjette. Ikkje alle gruppene grunngav figurnummeret konkret, men ein kan sjå på tidlegare grunngjeving som grunngjevinga for hemmeleg figurnummer. Gruppe 26 si grunngjeving er empirisk. Det kan diskuterast om gruppe 54 si grunngjeving er eit generisk døme i oppgåve 2 då dei har eit unntak for figur 100, men resten av grunngjevingane deira og dei andre gruppene sine er generiske dømer.

Når elevane snakkar om det hemmelege figurnummeret i oppgåve 1 omtaler dei det som «det talet», «talet» eller «nummeret». Ingen seier «figurnummeret». I oppgåve to snakkar gruppe 53 om «figurnummeret», medan gruppe 54 omtalar det som «det hemmelege talet». Ei utfordring med denne oppgåva ser ut til å vere korleis ein skal skildre sirklane som går ut frå midten. V24 omtaler det som «armar og bein og sånt». V26 omtalar det som «sidene» samtidig som ho peikar på ein figur. H53 fortel at du tar på «kor mange du vil ha rundt» samtidig som ho peikar på dei fire stadane sirklar går ut frå sentrum. H54 seier at «Så teiknar du det hemmelege talet ditt utanfor», samtidig som ho lagar fire strekar i lufta. Det ser ut til at det er utfordrande for elevane å snakke om figurane, sjølv om elevane på 5. trinn er tydlegast. Ein ser at elevane stort sett er avhengig av gestar, både for å skildre korleis figurane skal sjå ut, men òg for å få uttrykt at talet på siklar er fire gongar figurnummeret pluss ein.

5.1.9. Elevane sine utfordringar

Det er naturleg nok vanskeleg for elevane å grunngje strategiane som ikkje fungerer. Sett bort frå gruppe 54 nyttar alle empirisk grunngjeving som ein av måtane dei grunngjev på. Det er i dei fleste tilfella vanskeleg å vite om elevane ikkje har testa ein regel på alle figurane i oppgåvearket, eller om dei har testa på alle, men let vere å nemne det. Manglande deduktiv grunngjeving kan skuldast at dei ikkje ser behov for å abstrahere seg frå dei konkrete figurane når det er dei konkrete figurane vi samtalar om.

På begge gruppene frå 2. trinn er det ein elev som tar feil av kor mange raude sirklar det er i ein figur i oppgåve 1. At talet på raude sirklar er konstant er eit grunnleggjande premiss for figurfølgene og det gjer det svært vanskeleg å finne figurar dersom ein har feil tal på raude sirklar som utgangspunkt. V54 har ei liknande utfordring når ho i arbeidet med oppgåve 2 uttaler at det alltid skal vere to raude. Dette er etter at H54 har vist korleis ein kan fargelegge sentrum i figurane raude, men utan at dei har fått oppgåvearket med to fargar. V54 tek med seg vidare frå oppgåve 1 at figurane skal ha to raude sirklar. Det kan tyde på at ho ikkje ser at dei raude sirklane kan ha funksjonen som konstante i konkrete figurfølger, noko det ser ut til at H54 har oppdaga.

Alle gruppene ser på minst eit tidspunkt ut til å blande figurnummer og tal på sirklar. Kanskje kan denne utfordringa koplast til utfordringa med språket. Manglande presisering gjer det i fleire tilfelle vanskeleg å ha kontroll på om talet representerer det kardinale eller ordinale i situasjonen.

Begge gruppene frå 2. trinn og ei gruppe frå 5. trinn ser ut til å ha fått utfordringar med at tala vert for store. For store tal var 100 eller større. Ei forklaring på at 2. trinn hadde størst utfordringar kan vere at dei er yngre og at tala difor er foholdsmessig større for dei. Dei er elevar på 2. trinn og eit kompetansetrinn etter 2. årssteg er å: «telje til 100, dele opp og byggje mengder opp til 10, setje saman og dele opp tiargrupper opp til 100 og dele tosifra tal i tiarar og einarar» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 4). I læreplanen er det altså ikkje lagt opp til at elevar skal kunne behandle tala opp til 100 før etter 2. årstrinn.

5.2. Analyseverktøya

Lannin et al. (2006) sitt rammeverk for generaliseringsstrategiar er tilpassa figurfølger, men eg såg likevel på det som hensiktsmessig å tolke nokre av kategoriane vidare enn slik dei står omtalt i artikkelen. Til dømes tolka eg det som «chunking» når elevane bygde vidare på ein figur for å finne ein annan figur som ikkje var direkte etter ein kjend figur, uavhengig av om dei multipliserte differansen mellom figurane i prosessen. Eg kunne vald å ikkje kategorisere desse elevutsegnene som generalisering, men eg fann det meir hensiktsmessig å utvide definisjonane og klargjere dette, då det er lettare å samanlikne elevarbeid som ein kan setje ein merkelapp på. Lannin (2005) sitt rammeverk kravde at eg definerte tydeleg korleis eg tolka dei ulike kategoriane, då eg opplevde det som litt uklårt. Til dømes definerte eg generisk døme som ei forklaring på at noko gjeld for alle figurane i oppgåvearket. Etter desse klargjeringane fungerte rammeverket godt til å seie noko om korleis elevane grunngav.

Som ein del av oppgåva har eg tilpassa AMPS (Mulligan & Mitchelmore, 2013) til figurfølger, både ved å gje ei konkret skildring for dei to oppgåvene i hovudstudien min, men òg ved å gje ei meir generell skildring som ein kan ta utgangspunkt i for å kategorisere andre figurfølger. Tilpassingane mine er forankra i Mulligan og Mitchelmore sine skildringar av kategoriane. Eg erfarte at AMPS fungerte godt til å skilje mellom ulike nivå på elevarbeida for figur 4 og 10, men at det ikkje kunne indikere korleis elevane ville prestere i generalisering av figurfølgene. Det er ikkje sikkert det er det mest hensiktsmessige å samanlikne på tvers av figurfølger då figurfølger kan variere mykje i vanskegrad. I tillegg til å sjå ein struktur må ein ha ei forståing for korleis denne endrar seg. Kanskje eignar AMPS seg best til å seie noko om elevane har oppdaga strukturen i enkeltoppgåver, og eventuelt sjå dette opp mot vanskegraden til figurfølga. Korleis ein elev ser strukturen kan seie noko om han eller ho har gjort ei kopling til figurnummeret, og om denne koplinga er hensiktsmessig, noko som er naudsynt for å kunne uttrykke ein generell figur. Om ein skal undersøke om AMPS er konsekvent er det nok meir hensiktsmessig å undersøke ein elev om gongen, sjølv om ein mister verdifullt samspel mellom elevar. Då eg ikkje gjennomførte dei oppgåvene Mulligan og Mitchelmore (2013) gjennomførte kan eg ikkje seie om ein elev som er konsekvent på eit nivå i deira inndeling vil vere på same nivå i mi inndeling i arbeid med figurfølger.

6. Konklusjon

I denne masteroppgåva har eg forsøkt å sjå nærare på elevar sin strukturkompetanse ved å sjå på elevpar frå 2. og 5. trinn som i intervju med meg viste høg strukturkompetanse i direkte og nær generalisering. Fokuset har vore på denne direkte og nære generaliseringa, men og på fjern generalisering og generelle figurar.

6.1. Bidrag til forskingsfeltet

Bidraget til studien er å seie noko om korleis høg strukturkompetanse kan kome til uttrykk på 2. og 5 trinn, og kva kvalitative skilnadar ein kan finne mellom trinna med tanke på struktur, grunngjeving og generalisering. Korleis høg strukturkompetanse kan kome til uttrykk har eg vist gjennom analysen og i oppsummeringa av den. Difor vil fokuset i hovudsak vere på dei kvalitative skilnadane. Sjølv om eg ikkje kan seie at gruppene eg har intervjua er representative for 2. og 5. trinn kan det sjå ut som det har skjedd ei utvikling frå 2. til 5. trinn. Med tanke på struktur fann eg for alle gruppene i hovudstudien at 5. trinn generelt var på eit høgare nivå enn 2. trinn. 5. trinn var på alle oppgåvene oppe på eit strukturelt nivå, sett vekk frå ei gruppe som i eit tilfelle var på eit 3b delvis strukturelt nivå. Dei neste avsnitta handlar om fokusgruppene som eg valde ut.

Ser ein på enkeltelevar i desse gruppene var einaste gongane det var større endringar i strukturnivå etter at elevane fekk oppgåvearket med to fargar. Dette er svært interessant, men der er for lite data på dette til å konkludere noko endeleg. Det som kan konkluderast med er at oppgåvearket med to fargar var ei støtte for elevane. Gruppene frå 2. trinn fekk oftare og tidlegare oppgåvearket med to fargar enn 5. trinn. I tre av fire tilfelle støtta to fargar elevane på 2. trinn til å finne svar på oppgåvene. I to av to tilfelle var det ei støtte for elevane på 5. trinn. Ein elev, H54, innførte eit raudt sentrum i oppgåve 2 utan å ha fått oppgåvearket med to fargar. Det er interessant at elevar sjølve og på eige initiativ kan ta i bruk ei slik dekomponering. Ser ein på kor mange oppgåver elevane får til gjorde 5. trinn det best, då alle fann alle dei generelle figurane medan ei gruppe på 2. trinn hadde figur 10 som høgaste figur dei fann i oppgåve 2.

Med tanke på grunngjeving ser ein at elevane grunngav lite dei generaliseringsstrategiane som ikkje fungerte. Dei generaliseringsstrategiane som fungerte vart grunngjeve empirisk og med generiske dømer. Både 2. og 5. trinn nytta empirisk grunngjeving, men berre den eine gruppa frå 5. trinn nytta ei slik grunngjeving. Ser ein på kva generaliseringsstrategiar elevane nytta då dei fann svar på oppgåvene nytta ei gruppe på 5. trinn på ei oppgåve berre eksplisitte strategiar. Elles starta gruppene rekursivt før dei gjekk over til eksplisitte strategiar. Gruppene på 2. trinn fann ikkje dei hensiktsmessige eksplisitte strategiane før dei fekk oppgåvearket med to fargar. Dette gjaldt til dels gruppene på 5. trinn òg, men berre på ei oppgåve kvar. I tillegg hadde elevane generaliseringsstrategiar som ikkje leia fram. Berre ei gruppe gjetta, ei gruppe frå 2. trinn.

Ein finn igjen mykje av dei same utfordringane på 2. og 5. trinn. Alle gruppene ser ut til å ha minst eit tilfelle der dei blanda talet på sirklar og figurnummer. Begge gruppene på 2. trinn tok feil på talet på raude sirklar, noko som i kvar oppgåve er konstant. V54 trudde at det skulle vere to raude sirklar både i figurane i oppgåve 1 og i oppgåve 2, men dette er utan at ho fekk oppgåvearket for oppgåve 2 med to fargar. Sett bort frå gruppe 54 såg alle gruppene ut til å oppleve at tala vert for store.

I tillegg til å sjå på skilnadar mellom trinna har eg tilpassa AMPS-rammeverket. Eg har funne at det kan vere ein hensiktsmessig måte å kategorisere figurane til elevane i denne studien og seie noko om strukturkompetansen deira i desse tilfella, men at høg strukturkompetanse ikkje ser ut til å indikere høg prestasjon i å finne generelle figurar. Funna viser at struktur kan vere eit hensiktsmessig perspektiv som kan gje nyttig og interessant informasjon om elevar sitt arbeid med figurfølger og generalisering.

6.2. Metoden sin innverknad på resultat

Kven som intervjuar elevar og når dei vert gjennomført vil påverke resultatet. Likevel såg eg fordelane med intervju som større enn ulempene. For meg var det viktig å la elevane svare munnleg og kunne stille oppfølgingsspørsmål. At elevane vart støtta av oppgåvearket med to fargar kan tyde på at dei fungerte hensiktsmessig. For å auke reliabiliteten med tanke på seinare forsking har eg forsøkt å framstille studien på ein transparent måte slik at andre kan vurdere analysane og konklusjonane mine. At konklusjonen, slik eg tolkar det, er ei følgje av resultat frå ei transparent datainnsamling og analyse, gjer studien valid. Endringar som kunne vore gjort er å i større grad be elevane om å grunngje og å i større grad styre samtalene slik at elevane som trengte lengre tid til å tenke fekk tid til dette. Spørsmål om kopling mellom figurnummer og mengde sirklar kunne òg vore formulert tydlegare på førehand slik at elevane fekk likare spørsmål. Ei anna endring er at eg i nokre tilfelle spurte elevar konkret om tal på raude eller svarte sirklar i hemmeleg figurnummer før dei fekk mogleg til å svare på det generelle spørsmålet om tal på sirklar, noko som gjorde at elevane fekk mindre moglegheit til å vise ein slik kompetanse på eiga hand.

6.3. Didaktiske implikasjonar og vidare forsking

Som nemnt i innleiinga er algebra eit område som er utfordrande for norske elevar. Med min studie har eg tilført kunnskap om elevar sitt arbeid med tidleg algebra. Slik eg tolkar resultata kan figurfølger vere ein hensiktsmessig måte å nærme seg generalisering. Med tanke på undervising ser det ut til at dekomponering av figurar i to fargar og fokus på kopling mellom figur og figurnummer kan vere gode måtar å støtte elevar på, noko Warren og Cooper (2008) òg fann. Funna mine viser at ein mellom anna må vere medviten at det ikkje alltid er intuitivt at ein farge kan representere ein konstant del av ein figur, at store tal kan gje utfordringar, og at det er lett å blande figurnummer og mengda i ein figur. For mange elevar var det utfordrande å uttrykke funna sine, og det hadde vore spanande å sett nærare på om eit fokus på språk og omgrep ville letta generaliseringa til elevane. Sidan dette er ein mindre studie hadde det vore interessant å sett om ein fann dei same utfordringane og skilnadane med andre elevar og fleire figurfølger. Min innfallsvinkel til den tidlege algebraen har vore struktur og AMPS. Det må meir forsking til om ein skal kunne seie noko om relasjonen mellom nivåa slik Mulligan og Mitchelmore (2013) nyttar dei og slik eg nyttar dei. I min studie fann eg ikkje at dei yngste elevane var konsekvente på tvers av oppgåver, men det hadde vore interessant å sett om det er nokre figurfølger der ein finn at elevane konsekvent er på same nivå som på dei opphavelege AMPS-oppgåvene.

Litteraturliste

Battista, M. T. (1999). The Importance of Spatial Structuring in Geometric Reasoning. *Teaching Children Mathematics, 6*(3), 170-178.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 258-292. doi:10.2307/749365

Becker, J. R. & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. I S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (red.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, s. 95-101). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Billings, E. M. H. (2008). Exploring generalization through pictorial growth patterns. I C. E. Greeenes & R. N. P. Rubenstein (red.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: Seventieth Yearbook* (s. 279-293). Reston, VA: NCTM.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, *40*(1), 3-22. doi:10.1007/s11858-007-0067-7

Cooper, T. J. & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise: Models, Representations and Theory for Teaching and Learning. I J. Cai & E. Knuth (red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 187-214). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Doverborg, E. & Samuelsson, P. I. (1991). *Att förstå barns tankar : metodik för barnintervjuer*. Solna: Almqvist & Wiksell.

El Mouhayar, R. & Jurdak, M. (2016). Variation of Student Numerical and Figural Reasoning Approaches by Pattern Generalization Type, Strategy Use and Grade Level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(2), 197-215. doi:10.1080/0020739X.2015.1068391

Fangen, K. (2010). *Deltagende observasjon* (2. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Grønmo, L. S., Hole, A. & Onstad, T. (2016). *Ett skritt fram og ett tilbake: TIMSS Advanced 2015. Matematikk og fysikk i videregående skole.* Henta frå http://www.oapen.org/search?identifier=637299

Jurdak, M. E. & El Mouhayar, R. R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics, 85*(1), 75-92. doi:10.1007/s10649-013-9494-2

Kampmann, J. (2000). Børn som informanter og børneperspektiv. I P. S. Jørgensen & J. Kampmann (red.), (s. 23-53). København: Børnerådet.

Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teacers of Mathematics.

Kaput, J. J., Blanton, M. L. & Moreno, L. (2008). Algebra From a Symbolization Point of View. I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (red.), *Algebra in the Early*

Grades (s. 19-55). New York: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teacers of Mathematics.

Krumsvik, R. J. (2014). *Forskingsdesign og kvalitativ metode - ei innføring*. Bergen: Fagbokforlaget.

Kruuse, E. (1996). *Kvalitative forskningsmetoder: i psykologi og beslægtede fag* (1. utg.). København: Dansk psykologisk Forlag.

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 3-28. doi:10.1007/bf03217440

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258. doi:10.1207/s15327833mtl0703_3

Lee, L. (1996). An Initiation into Algebraic Culture through Generalization Activities. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 87-106). Dordrecht: Springer Netherlands.

Lins, R. & Kaput, J. (2004). The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study* (s. 45-70). Dordrecht: Springer Netherlands.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal, 7*(1), 69-85.

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 65-86). Dordrecht: Springer Netherlands.

Moss, J. & McNab, S. L. (2011). An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Functions and Co-variation. I J. Cai & E. Knuth (red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 277-301). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. doi:10.1007/BF03217544

Mulligan, J., Mitchelmore, M. & Prescott, A. (2006). Integrating concepts and processes in early mathematics: The Australian Pattern and Structure Awareness Project (PASMAP). I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (red.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, s. 209-216). Prague, Czech Republic: PME.

Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (2013). Early Awareness of Mathematical Pattern and Structure. I L. D. English & J. T. Mulligan (red.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (s. 29-45). Dordrecht: Springer Netherlands.

Måsøval, H. S. (2011). *Factors constraining students' establishment of algebraic generality in shape patterns: a case study of didactical situations in mathematics at a university college.* (Doktorgradsavhandling, University of Agder). Henta frå http://hdl.handle.net/11250/2394000

Papic, M. M., Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237-268.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19. doi:10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. I J. Cai & E. Knuth (red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 303-322). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 65-82. doi:10.1007/s11858-007-0062-z

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 73*(3), 297-328. doi:10.1007/s10649-009-9222-0

Stacey, K. & MacGregor, M. (2001). Curriculum Reform and Approaches to Algebra. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (red.), *Perspectives on School Algebra* (Vol 22, s. 141-153). Dordrecht: Springer Netherlands.

Tjora, A. H. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (2. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Tjora, A. H. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (3. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

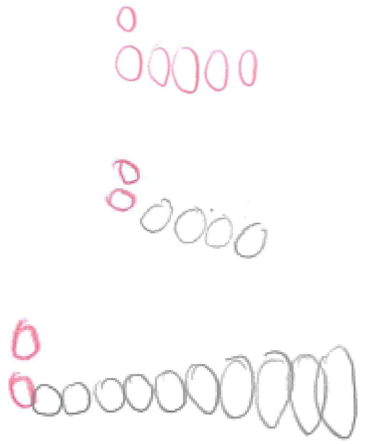
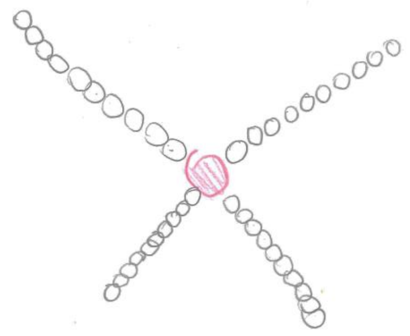
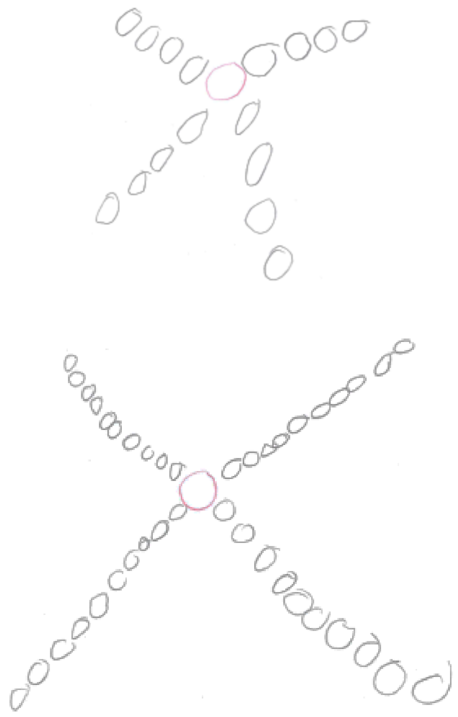
Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag.* Henta 18. mars 2016 frå http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf

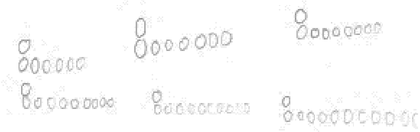
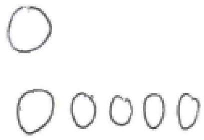
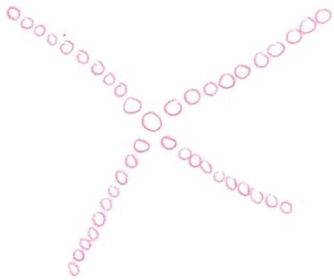
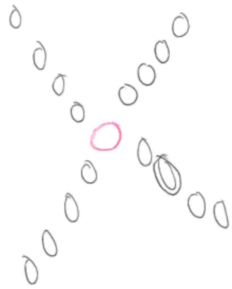
Utdanningsdirektoratet. (2015). *Matematikk fellesfag - veiledning til læreplaner*. Henta 13. februar 2018 frå https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/veiledning-til-lp/matematikk-fellesfag---veiledning-til-lareplan/

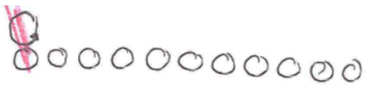
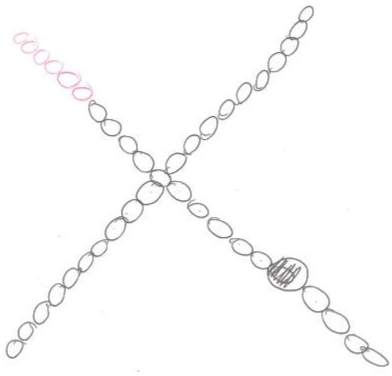
Warren, E. & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 171-185. doi:10.1007/s10649-007-9092-2

Wilkie, K. J. & Clarke, D. M. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal, 28*(2), 223-243. doi:10.1007/s13394-015-0146-y

Vedlegg 1: Fokusgruppene sine strukturelle figurar

Elev	Oppgåve 1	Oppgåve 2
V24		
H26		

V26		
V53		
H53		 
V54	 (opphaveleg utan raudt)	

H54	 (opphaveleg utan raudt)	 

Vedlegg 2: Brev til foreldre/føresette til elevar på 2. trinn i pilotstudie

Emilie Kvamme Fjeldstad

emiliekf@stud.ntnu.no

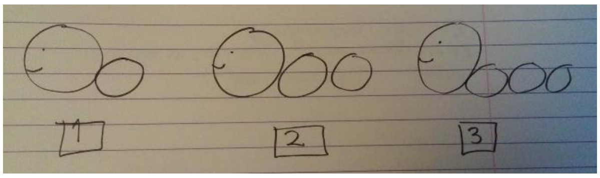
Tlf: 90094041

Trondheim, 02.11.17

Til foreldre/føresette for elevar på 2. trinn ved …..

Førespurnad om videoopptak og deltaking i forskingsprosjekt

Eg er student på masterprogrammet i matematikkdidaktikk ved NTNU. Studiet har som mål å utdanne studentar til barneskulelærarar med solid kompetanse i undervising av matematikk. No skal eg gjennomføre masterprosjektet mitt som handlar om elevar sitt arbeid med algebraoppgåver på 2. trinn. Dette vil eg gjere ved å sjå på korleis elevar løyser oppgåver med figurfølger. Eg har allereie besøkt klassen til eleven din/dykkar og saman med elevane mellom anna arbeida med ei figurfølge om ein larve. Ei hensikt med økta var at elevane som ynskjer å delta i masterprosjektet mitt skal vite kven eg er og litt om kva dei eventuelt seier ja til å delta på. Spørsmål vi arbeida med handla om kor mange sirklar ulike figurar vil bestå av. Vi såg på kor mange sirklar figur 4, 10 og 100 vil bestå av.



Deltaking i prosjektet er frivillig, og ein kan når som helst trekke seg utan å kome med ei forklaring. Då vil alle opplysingar bli anonymisert med ein gong. Masterprosjektet er uavhengig av deltaking i undervisinga og vil gå føre seg ved at eg i november tar grupper med 2-3 elevar ut på eit grupperom i inntil ein skuletime per gruppe. Der vil vi løyse oppgåver med figurfølger og snakke saman om oppgåvene. For å få så godt datamateriale som mogleg ynskjer eg å ta videoopptak av desse arbeidsøktene, men for å gjere dette treng eg din/dykkar godkjenning. Det innsamla materialet vil bli behandla med respekt for dei involverte, og det vil bli anonymisert. Prosjektet vil følgje gjeldande retningslinjer for personvern, og kodar for pseudonym vil bli oppbevart fråskilt frå resten av datamaterialet.

Opptaka vil berre bli sett av meg, min rettleiar og eventuelt andre masterstudentar i matematikk og deira rettleiar ved NTNU. I oppgåva mi vil det ikkje vere mogeleg å kjenne igjen enkeltindivid då alt er anonymisert. Når masteroppgåva mi er fullført, etter planen i juni 2018, vil alle videoopptak og innsamla personopplysingar (som t.d. skule, alder og kjønn) slettast.

Dersom de lurer på noko må de gjerne ta kontakt med meg på telefon eller e-post. Kontaktinformasjonen min står øvst i skrivet. Rettleiaren min Tore Alexander Forbregd, universitetslektor ved NTNU, kan kontaktast på tore.a.forbregd@ntnu.no.

Eg vonar de synes prosjektet er viktig og interessant, og at de let borna dykkar delta. Dersom du/de OG barnet ditt/dykkar gjev tillating til at det kan bli tatt videoopptak av han/ho i arbeid med matematikk haker du/de av for dette i transponder.

Takk!

Med vennleg helsing

Emilie Kvamme Fjeldstad

Vedlegg 3: Brev til foreldre/føresette til elevar på 5. trinn i pilotstudie

Emilie Kvamme Fjeldstad
emiliekf@stud.ntnu.no
Tlf: 90094041
Trondheim, 02.11.17

Til foreldre/føresette for elevar på 5. trinn ved …..

Førespurnad om videoopptak og deltaking i forskingsprosjekt

Eg er student på masterprogrammet i matematikkdidaktikk ved NTNU. Studiet har som mål å utdanne studentar til barneskulelærarar med solid kompetanse i undervising av matematikk. No skal eg gjennomføre masterprosjektet mitt som handlar om algebra i barneskulen. Eg vil mellom anna sjå på korleis elevar på 2. og 5. trinn løyser nokre matematikkoppgåver.

Deltaking i prosjektet er frivillig, og ein kan når som helst trekke seg utan å kome med ei forklaring. Då vil alle opplysingar bli anonymisert med ein gong. Masterprosjektet er uavhengig av deltaking i undervisinga og vil gå føre seg ved at eg i november tar grupper med 2-3 elevar ut på eit grupperom i inntil ein skuletime per gruppe. Der vil vi arbeide med nokre oppgåver og snakke saman om korleis dei har tenkt. For å få så godt datamateriale som mogleg ynskjer eg å ta videoopptak av desse arbeidsøktene, men for å gjere dette treng eg din/dykkar godkjenning. Det innsamla materialet vil bli behandla med respekt for dei involverte, og det vil bli anonymisert. Prosjektet vil følgje gjeldande retningslinjer for personvern, og kodar for pseudonym vil bli oppbevart fråskilt frå resten av datamaterialet.

Opptaka vil berre bli sett av meg, min rettleiar og eventuelt andre masterstudentar i matematikk og deira rettleiar ved NTNU. I oppgåva mi vil det ikkje vere mogeleg å kjenne igjen enkeltindivid då alt er anonymisert. Når masteroppgåva mi er fullført, etter planen i juni 2018, vil alle videoopptak og innsamla personopplysingar (som t.d. skule, alder og kjønn) slettast.

Dersom de lurer på noko må de gjerne ta kontakt med meg på telefon eller e-post. Kontaktinformasjonen min står øvst i skrivet. Rettleiaren min Tore Alexander Forbregd, universitetslektor ved NTNU, kan kontaktast på tore.a.forbregd@ntnu.no.

Eg vonar de synes prosjektet er viktig og interessant, og at de let borna dykkar delta. Dersom de gjev tillating til videoopptak fyller de ut svarslippen på baksida og leverer den til eleven sin lærar. Dersom du/de ikkje ynskjer at barnet dykk deltek i studien ser du/de vekk frå skrivet.

Takk!

Med vennleg helsing
Emilie Kvamme Fjeldstad

Svarslipp

Eg/vi gjev tillating til at det kan bli tatt videoopptak av arbeid med matematikk der ______________________ (eleven sitt førenamn og etternamn) deltek.

Eg/vi har snakka med barnet vårt om dette, og han/ho har og gjeve sitt samtykke.

____

(Stad og dato)

____

(underskrift frå føresette/foreldre)

Vedlegg 4: Brev til foreldre/føresette til elevar i hovudstudie

Emilie Kvamme Fjeldstad
emiliekf@stud.ntnu.no
Tlf: 90094041
Trondheim, 07.12.17

Til foreldre/føresette for elevar på 2. og 5. trinn ved …..

Førespurnad om videoopptak og deltaking i forskingsprosjekt

Eg er ein student på NTNU sitt masterprogrammet i matematikkdidaktikk. Masterprogrammet har som mål å utdanne studentar til barneskulelærarar med solid kompetanse i undervising av matematikk. No skal eg gjennomføre masterprosjektet mitt som handlar om algebra i barneskulen. Eg vil mellom anna sjå på korleis elevar på 2. og 5. trinn løyser nokre matematikkoppgåver.

Deltaking i prosjektet er frivillig, og ein kan når som helst trekke seg utan å kome med ei forklaring. Då vil alle opplysingar bli anonymisert med ein gong. Masterprosjektet er uavhengig av deltaking i undervisinga og vil gå føre seg ved at eg i januar tar grupper med 2-3 elevar ut på eit grupperom i inntil ein skuletime per gruppe. Der vil vi arbeide med nokre oppgåver og snakke saman om korleis dei har tenkt. For å få så godt datamateriale som mogleg ynskjer eg å ta videoopptak av desse arbeidsøktene, men for å gjere dette treng eg din/dykkar godkjenning. Det innsamla materialet vil bli behandla med respekt for dei involverte, og det vil bli anonymisert. Prosjektet vil følgje gjeldande retningslinjer for personvern, og kodar for pseudonym vil bli oppbevart fråskilt frå resten av datamaterialet.

Opptaka vil berre bli sett av meg, min rettleiar og eventuelt andre masterstudentar i matematikk og deira rettleiar ved NTNU. I oppgåva mi vil det ikkje vere mogeleg å kjenne igjen enkeltindivid då alt er anonymisert. Når masteroppgåva mi er fullført, etter planen i juni 2018, vil alle videoopptak og innsamla personopplysingar (som t.d. skule, alder og kjønn) slettast.

Dersom de lurer på noko må de gjerne ta kontakt med meg på telefon eller e-post. Kontaktinformasjonen min står øvst i skrivet. Rettleiaren min Tore Alexander Forbregd, universitetslektor ved NTNU, kan kontaktast på tore.a.forbregd@ntnu.no.

Eg vonar de synes prosjektet er viktig og interessant, og at de let borna dykkar delta. Dersom de gjev tillating til videoopptak fyller de ut svarslippen på baksida og leverer den til eleven sin lærar. Dersom du/de ikkje ynskjer at barnet dykk deltek i studien ser du/de vekk frå skrivet.

Takk!

Med vennleg helsing
Emilie Kvamme Fjeldstad

Svarslipp

Eg/vi gjev tillating til at det kan bli tatt videoopptak av arbeid med matematikk der ______________________ (eleven sitt førenamn og etternamn) deltek.

Eg/vi har snakka med barnet vårt om dette, og han/ho har og gjeve sitt samtykke.

____

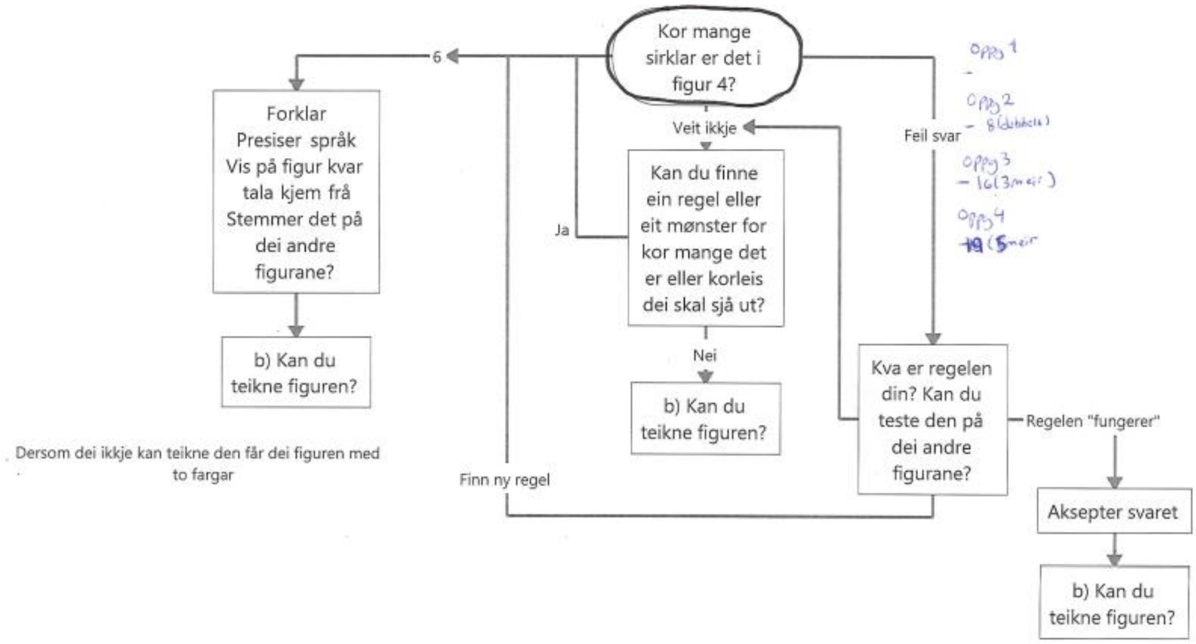
(Stad og dato)

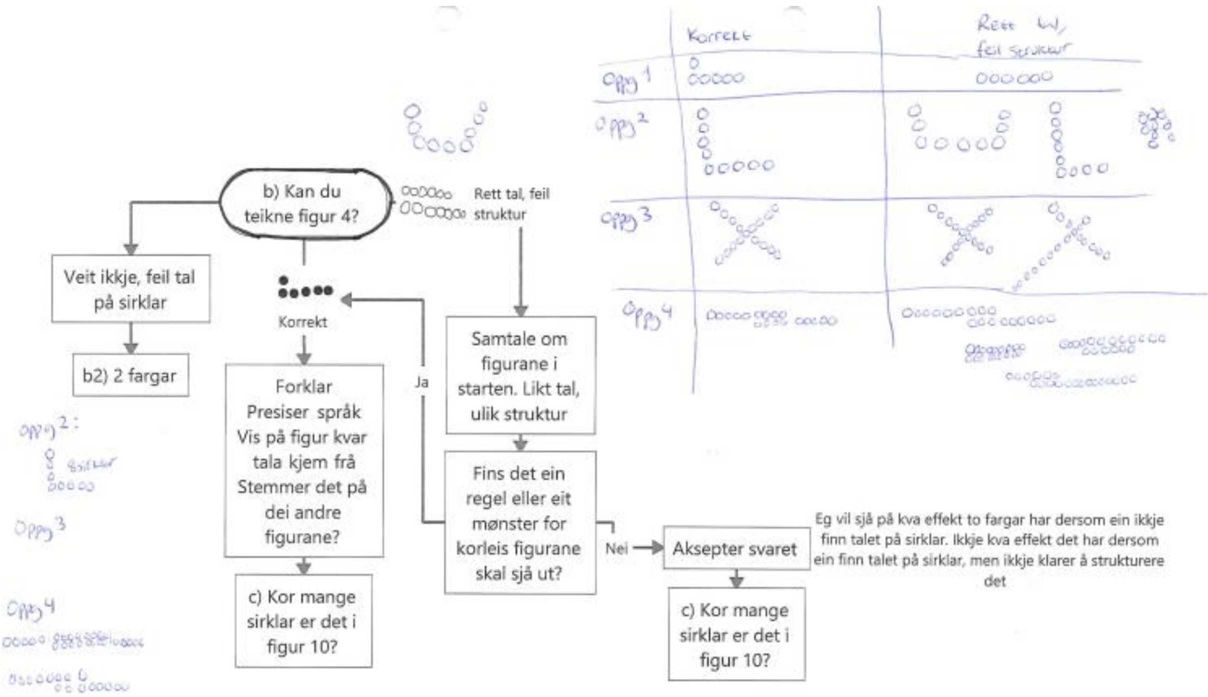
____

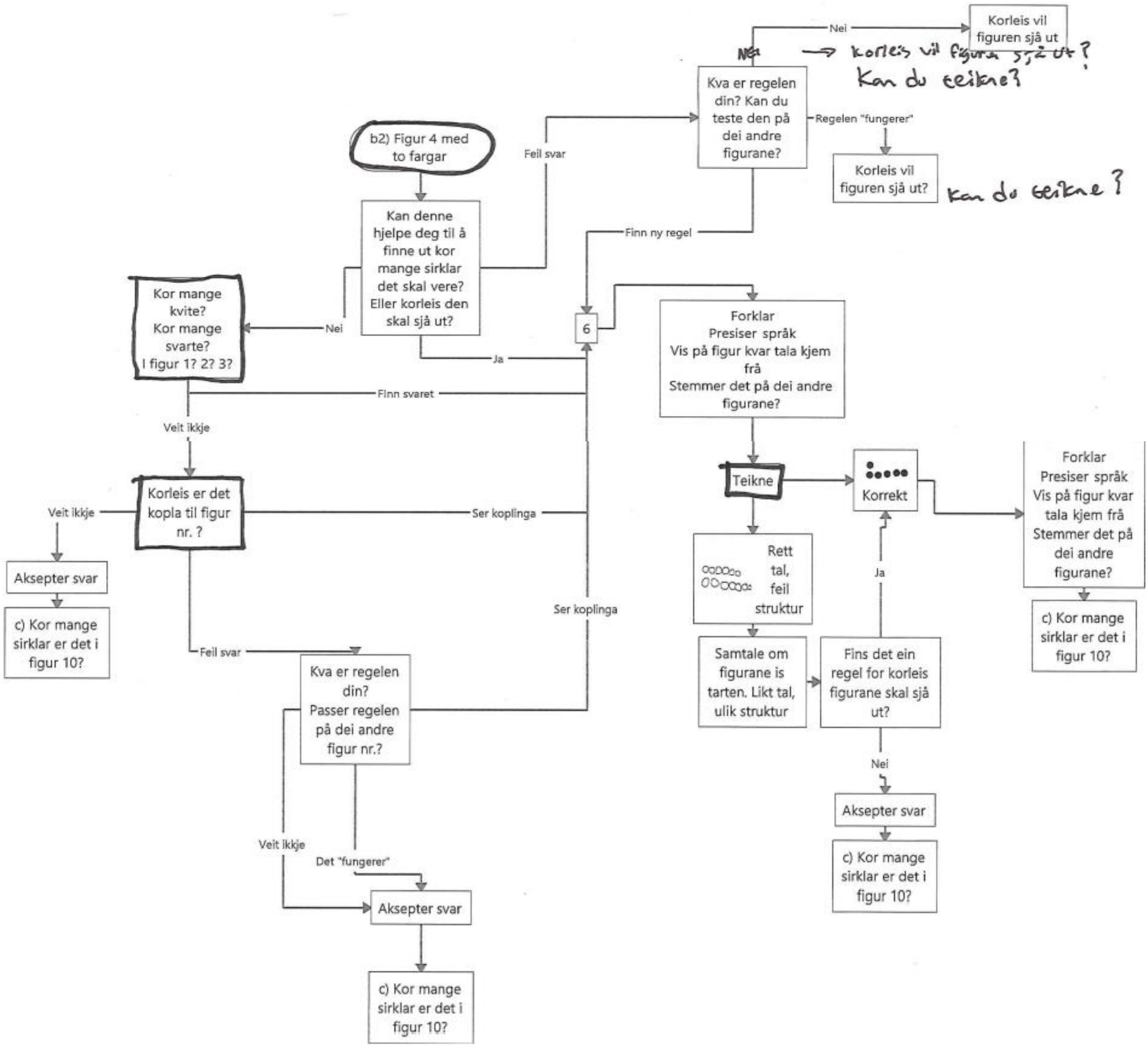
(underskrift frå foreldre/føresette)

Vedlegg 5: Utdrag frå intervjuguide

Utdraget er frå spørsmåla om figur 4. Intervjuguiden inkluderer òg handskrivne dømer på kva som kan vere galt svar eller struktur i både oppgåvene som vart nytta i hovudstudien (oppgåve 1 og 3) og nokre av dei som vart nytta i pilotstudien (oppgåve 2 og 4). Tilsvarande skjema vart laga for figur 10, figur 100 og hemmeleg figurnummer. Desse er ikkje teke med då dei tek for stor plass.






b2) Figur 4 med to fargar
Kan denne hjelpe deg til å finne ut kor mange sirklar det skal vere? Eller korleis den skal sjå ut?
Feil svar
Kva er regelen din? Kan du teste den på dei andre figurane?
Nei
Korleis vil figuren sjå ut
Nei
→ korleis vil figuren sjå ut ?
Kan du teikne?
Regelen "fungerer"
Korleis vil figuren sjå ut?
Kan du teikne ?
Finn ny regel
Nei
Kor mange kvite? Kor mange svarte? I figur 1? 2? 3?
Ja
6
Forklar
Presiser språk
Vis på figur kvar tala kjem frå
Stemmer det på dei andre figurane?
Finn svaret
Veit ikkje
Korleis er det kopla til figur nr. ?
Veit ikkje
Ser koplinga
Aksepter svar
c) Kor mange sirklar er det i figur 10?
Teikne
Korrekt
Forklar
Presiser språk
Vis på figur kvar tala kjem frå
Stemmer det på dei andre figurane?
Rett tal, feil struktur
Ja
c) Kor mange sirklar er det i figur 10?
Ser koplinga
Feil svar
Kva er regelen din? Passer regelen på dei andre figur nr.?
Samtale om figurane is tarten. Likt tal, ulik struktur
Fins det ein regel for korleis figurane skal sjå ut?
Nei
Aksepter svar
c) Kor mange sirklar er det i figur 10?
Veit ikkje
Det "fungerer"
Aksepter svar
c) Kor mange sirklar er det i figur 10?

Vedlegg 6: Tabell over tilpassingar av AMPS

Tabell 8: Utviklinga av tilpassinga av AMPS-rammeverket. Definisjonane til høgre i tabellen er Mulligan og Mitchelmore (2013) sine skildringar av kategoriane, med mi inndeling i feil/tal på sirklar. I tillegg har eg lagt til ein kategori der elevane teiknar ein kopi av ein av figurane dei fekk oppgitt i oppgåvearket.

<table>
<tr><td>AMPS-nivå</td><td colspan="5">Skildring</td></tr>
<tr><td>0) Kopi av figur frå oppgåvearket</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">0) Teiknar kopi av ein figur frå oppgåvearket.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1) Prestrukturell</td><td rowspan="2">Feil struktur. Feil tal på sirklar</td><td colspan="3" rowspan="2">Viser ikkje teikn til at struktur er relevant. Både korrekt og feil tal på sirklar.</td><td>1a) Elevane vel nokre bestemte eigenskapar som appellerer til dei, men som ofte er irrelevante for det underliggande matematiske omgrepet. Talet på sirklar er feil.</td></tr>
<tr><td>1b) Elevane vel nokre bestemte eigenskapar som appellerer til dei, men som ofte er irrelevante for det underliggande matematiske omgrepet. Talet på sirklar er korrekt.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2) Framveksande</td><td rowspan="2">Feil struktur. Rett tal på sirklar</td><td colspan="2" rowspan="2">Forsøker å vise ein struktur.</td><td>Forsøker å vise ein struktur. Feil struktur, men likevel ein struktur. Feil tal på sirklar.</td><td>2a) Elevane kjenner igjen nokre relevante eigenskapar, men er ikkje i stand til å organisere desse på ein passande måte. Talet på sirklar er feil</td></tr>
<tr><td>Forsøker å vise ein struktur. Feil struktur, men likevel ein struktur. Korrekt tal på sirklar.</td><td>2b) Elevane kjenner igjen nokre relevante eigenskapar, men er ikkje i stand til å organisere desse på ein passande måte. Talet på sirklar er korrekt</td></tr>
<tr><td>3) Delvis strukturell</td><td>Nesten rett struktur</td><td>Korrekt struktur. Feil tal på sirklar.</td><td>Nesten korrekt struktur. Feil tal på sirklar</td><td>*Elevarbeida viste ikkje dei viktigaste eigenskapane i strukturane, så denne kategorien</td><td>3a) Elevane kjenner igjen dei viktigaste eigenskapane i strukturen, men representasjonen er upresis eller</td></tr>
</table>

				vart flytta til framveksande	ufullstendig. Talet på sirklar er feil.
			Korrekt struktur. Feil tal på sirklar.	Har med dei viktigaste eigenskapane til figuren. Feil tal på sirklar.	
		Nesten korrekt struktur. Korrekt tal på sirklar	Nesten korrekt struktur. Korrekt tal på sirklar.	Har med dei viktigaste eigenskapane til figuren. Korrekt tal på sirklar.	3b) Elevane kjenner igjen dei viktigaste eigenskapane i strukturen, men representasjonen er upresis eller ufullstendig. Talet på sirklar er korrekt.
4) Strukturell	Korrekt struktur og rett tal på sirklar.				Elevane representerer strukturen korrekt. Rett tal på sirklar