

Audal, Søndre

# Hvordan klassestørrelse og lærererfaring påvirker elevenes prestasjoner i Norge, Tyskland og USA

Bacheloroppgave i Samfunnsøkonomi

Mai 2020



# Hvordan klassestørrelse og lærererfaring påvirker elevenes prestasjoner i Norge, Tyskland og USA

Sondre Audal

Våren 2020



# Abstract

I løpet av mine tretten år på grunn- og videregående skole var jeg så, jeg vil si, heldig som fikk oppleve et stort sprang av lærere og deres erfaringer. Alt fra fem år til over 30 år. Begge ekstremalene var gode på vært sitt område og det ga læringen en ekstra dimensjon. Men var dette kun min egen oppfatning eller er det slikt nasjonalt og internasjonalt også: Er det sammenheng mellom lærererfaring og hvordan klassen presterer?

Jeg har også en forkjærlighet for Hans Rosling og hans måte å visualisere data på. Jeg opplever at man får en større forståelse over tallene bak og hva de egentlig betyr og representerer. Dette vil oppgavene bære preg av.

Kodene som er brukt ligger på GitHub og er åpen for både kjøring og gjennomtitting: <https://gist.github.com/sondreaudal/6afc4731a97a33b26e381c37d4342599>



# Sammen drag

Vi har sett igjennom over 14 000 besvarelser fra Norge, Tyskland og USA og satt de opp mot hverandre, og sett hvordan en verden med kun de tre landene ville gjort det. Vi ser at statistikken er vanskelig å tolke entydig, og at regresjonsmodellen gir en pekepinn som ikke alltid støttes av dataen. Vi ser at et klassevis-syn på regresjonsmodellen er mest fordelaktig og gir oss best  $R^2$ -verdi. Det viser seg også å vær stor enighet mellom den lille verdenen vår, med Norge, Tyskland og USA, og den store verden med alle PIRLS-landene.





# Innhold

<b>Abstract</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>Sammendrag</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>Innhold</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>Figurer</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>Tabeller</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>Akronymer</b> . . . . .	<b>xv</b>
<b>Ordliste</b> . . . . .	<b>xvii</b>
<b>1 Introduksjon</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 Materiale, metode og teoretisk rammeverk</b> . . . . .	<b>3</b>
2.1 Tidligere arbeid og antagelser . . . . .	3
2.2 Innledning . . . . .	3
2.3 Modellene . . . . .	4
2.3.1 Den kubiske modellen . . . . .	5
2.3.2 $R^2$ . . . . .	5
2.3.3 T-test . . . . .	5
2.4 Datasettene . . . . .	6
2.4.1 Norge . . . . .	6
2.4.2 Tyskland . . . . .	9
2.4.3 USA . . . . .	12
2.4.4 Verden . . . . .	15
<b>3 Resultater</b> . . . . .	<b>19</b>
3.1 Norge . . . . .	19
3.1.1 Individuell modell . . . . .	19
3.1.2 Klassemodell . . . . .	20
3.1.3 Kubisk . . . . .	20
3.2 Tyskland . . . . .	21
3.2.1 individuell modell . . . . .	21
3.2.2 Klassemodell . . . . .	22
3.2.3 Kubisk . . . . .	22
3.3 USA . . . . .	23
3.3.1 individuell modell . . . . .	23
3.3.2 Klassemodell . . . . .	24
3.3.3 Kubisk . . . . .	24
3.4 <i>The World</i> . . . . .	24

3.4.1	individuell modell . . . . .	25
3.4.2	Klassemodell . . . . .	25
3.4.3	Kubisk . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Diskusjon . . . . .</b>	<b>29</b>
4.1	Norge . . . . .	30
4.2	Tyskland . . . . .	31
4.3	USA . . . . .	31
4.4	Verden . . . . .	32
4.5	Svakheter . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Konklusjon . . . . .</b>	<b>35</b>
	<b>Bibliografi . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>A</b>	<b>Figurer . . . . .</b>	<b>39</b>
A.1	Verdivurdering av $\beta_3$ . . . . .	39
A.2	Norge . . . . .	40
A.2.1	$H_0$ - Resultater . . . . .	44
A.3	Tyskland . . . . .	45
A.3.1	$H_0$ - Resultater . . . . .	49
A.4	USA . . . . .	50
A.4.1	$H_0$ - Resultater . . . . .	54
A.5	Verden . . . . .	55
A.5.1	$H_0$ - Resultater . . . . .	59
A.6	Norge, Tyskland og USA i samme graf(er) . . . . .	60
<b>B</b>	$H_0$ – Forklart . . . . .	<b>63</b>
<b>C</b>	<b>H0-tabell . . . . .</b>	<b>65</b>

# Figurer

2.1	Viser problemet med tail testene . . . . .	6
2.2	Norge, klassestørrelse plottet mot testscoren. . . . .	7
2.3	Norge, lærererfaring plottet mot testscoren. . . . .	8
2.4	Norge, plotter klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklenes areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene. . . . .	8
2.5	Tyskland, klassestørrelse plottet mot testscoren. . . . .	10
2.6	Tyskland, lærererfaring plottet mot testscoren. . . . .	10
2.7	Tyskland, plotter klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklenes areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene. . . . .	11
2.8	USA, klassestørrelse plottet mot testscoren. . . . .	13
2.9	USA, lærererfaring plottet mot testscoren. . . . .	13
2.10	USA, plotter klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklenes areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene. . . . .	14
2.11	Score plottet mot klassestørrelse. . . . .	16
2.12	Score plottet mot lærererfaring. . . . .	16
2.13	Verden, klassestørrelse plottet mot testscoren. . . . .	17
2.14	Verden, lærererfaring plottet mot testscoren. . . . .	17
2.15	Verden, plotter klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklenes areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene. . . . .	18
3.1	Norge. Tredjegradspolynom, plottet lærererfaring mot testscore. Arealet til sirklene illustrerer antall elever som har en lærer med den gitte erfaringen. Den avleste scoren er gjennomsnittet. . . . .	21
3.2	Tyskland. Tredjegradspolynom, plottet lærererfaring mot testscore. Arealet til sirklene illustrerer antall elever som har en lærer med den gitte erfaringen. Den avleste scoren er gjennomsnittet. . . . .	23

3.3	USA. Tredjegradspolynom, plottet lærererfaring mot testscore. Arealet til sirklene illustrerer antall elever som har en lærer med den gitte erfaringen. Den avleste scoren er gjennomsnittet. . . . .	25
3.4	Verden. Tredjegradspolynom, plottet lærererfaring mot testscore. Arealet til sirklene illustrerer antall elever som har en lærer med den gitte erfaringen. Den avleste scoren er gjennomsnittet. . . . .	27
A.1	Ser hvordan vi går fram for å få ønsket effekt av $\beta_3$ . . . . .	39
A.2	Norges rådata. . . . .	40
A.3	Norge. Rådata plottet sammen med regresjons modellen $read = \beta_0 + \beta_1 teacherexp + \beta_2 clsiz$ . NB! Mangler brøkleddet. Til høyre ser vi de partiellderiverte til hhv. Teacher Experience og class size. . . .	41
A.4	Norge, klassestørrelse plottet mot testscoren. . . . .	41
A.5	Norge, lærererfaring plottet mot testscoren. . . . .	42
A.6	Norge, plotter klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklens areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene. . . . .	42
A.7	Norge, klassestørrelse plottet mot testscoren. . . . .	43
A.8	Norge, lærererfaring plottet mot testscoren. . . . .	43
A.9	$H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis . . .	44
A.10	$H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis . . .	44
A.11	$H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis . . . . .	44
A.12	$H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis . . . . .	45
A.13	Tysklands rådata. . . . .	45
A.14	Tyskland. Rådata plottet sammen med regresjons modellen $read = \beta_0 + \beta_1 teacherexp + \beta_2 clsiz$ . NB! Mangler brøkleddet. Til høyre ser vi de partiellderiverte til hhv. Teacher Experience og class size. . . .	46
A.15	Tyskland, klassestørrelse plottet mot testscoren. . . . .	46
A.16	Tyskland, lærererfaring plottet mot testscoren. . . . .	47
A.17	Norge, plotter klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklens areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene. . . . .	47
A.18	Tyskland, klassestørrelse plottet mot testscoren. . . . .	48
A.19	Tyskland, lærererfaring plottet mot testscoren. . . . .	48
A.20	$H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis . . .	49
A.21	$H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis . . .	49
A.22	$H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis . . . . .	49
A.23	$H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis . . . . .	50
A.24	USAs rådata. . . . .	50
A.25	USA. Rådata plottet sammen med regresjons modellen $read = \beta_0 + \beta_1 teacherexp + \beta_2 clsiz$ . NB! Mangler brøkleddet. Til høyre ser vi de partiellderiverte til hhv. Teacher Experience og class size. . . . .	51

A.26 USA, klassestørrelse plottet mot testscoren. . . . .	51
A.27 USA, lærererfaring plottet mot testscoren. . . . .	52
A.28 USA, plottet klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklenes areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene. . . . .	52
A.29 USA, klassestørrelse plottet mot testscoren. . . . .	53
A.30 Norge, lærererfaring plottet mot testscoren. . . . .	53
A.31 $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis . . .	54
A.32 $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis . . .	54
A.33 $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis . . . . .	54
A.34 $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis . . . . .	55
A.35 Verden rådata. . . . .	55
A.36 Verden. Rådata plottet sammen med regresjons modellen read = $\beta_0 + \beta_1 \text{teacherexp} + \beta_2 \text{clsize}$ . NB! Mangler brøkledet. Til høyre ser vi de partiellderiverte til hhv. Teacher Experience og class size. . . .	56
A.37 Verden, klassestørrelse plottet mot testscoren. . . . .	56
A.38 Verden, lærererfaring plottet mot testscoren. . . . .	57
A.39 Verden, plottet klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklenes areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene. . . . .	57
A.40 Verden, klassestørrelse plottet mot testscoren. . . . .	58
A.41 Verden, lærererfaring plottet mot testscoren. . . . .	58
A.42 $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis . . .	59
A.43 $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis . . .	59
A.44 $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis . . . . .	59
A.45 $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis . . . . .	60
A.46 Kombinert, all data samlet . . . . .	60
A.47 Kombinert, gjennomsnitt og standardavvik, kan se hvor (vår lille) verden plasserer seg i forhold til resten. . . . .	61
A.48 Landene kombinert. . . . .	61
A.49 Landene kombinert. . . . .	61
B.1 Nærbilde av grafen/tabellen, her ved figur A.42a. Rød strek indikere $\Delta\mu = 0$ . . . . .	64



# Tabeller

2.1	Deskriptiv analyse av Norge . . . . .	6
2.2	Kovarianser av interessevariabler - Norge . . . . .	7
2.3	Norge . . . . .	7
2.4	Deskriptiv analyse av Tyskland . . . . .	9
2.5	Kovarianser av interessevariabler - Tyskland . . . . .	9
2.6	Tyskland . . . . .	9
2.7	Deskriptiv analyse av USA . . . . .	12
2.8	Kovarianser av interessevariabler - USA . . . . .	12
2.9	USA . . . . .	12
2.10	Deskriptiv analyse av verden på individuelt nivå. . . . .	15
2.11	Kovarianser av interessevariabler, sett på et individuelt nivå - verden	15
2.12	Sett klassevis - Verden . . . . .	15
3.1	Oversikt over $\beta$ -veridene for Norge, sett på individueltvis . . . . .	19
3.2	Oversikt over $R^2$ -veridene for Norge, sett på individueltvis . . . . .	20
3.3	Oversikt over $\beta$ -veridene for Norge, sett klassevis . . . . .	20
3.4	Oversikt over $R^2$ -veridene for Norge, sett på klassen . . . . .	20
3.5	Norge. Den kubisk modellen, se ligning (3.4). . . . .	20
3.6	Oversikt over $\beta$ -veridene for Tyskland, sett på individueltvis . . . . .	21
3.7	Oversikt over $R^2$ -veridene for Tysland, sett individuelt . . . . .	22
3.8	Oversikt over $\beta$ -veridene for Tyskland, sett klassevis . . . . .	22
3.9	Oversikt over $R^2$ -veridene for Tysland, sett på klassen . . . . .	22
3.10	Tyskland. Den kubisk modellen, se ligning (3.4). . . . .	22
3.11	Oversikt over $\beta$ -veridene for USA, sett på individueltvis . . . . .	23
3.12	Oversikt over $R^2$ -veridene for USA, sett individuelt . . . . .	23
3.13	Oversikt over $\beta$ -veridene for USA, sett klassevis . . . . .	24
3.14	Oversikt over $R^2$ -veridene for USA, sett klassevis . . . . .	24
3.15	USA. Den kubisk modellen, se ligning (3.4). . . . .	24
3.16	Oversikt over $\beta$ -veridene for alle landene samlet, sett på individu- eltvis . . . . .	25
3.17	Oversikt over $R^2$ -veridene for verden, sett individuelt . . . . .	25
3.18	Oversikt over $\beta$ -veridene for verden, sett klassevis . . . . .	26
3.19	Oversikt over $R^2$ -veridene for verden, sett klassevis . . . . .	26
3.20	Kombinert. Den kubisk modellen, se ligning (3.4). . . . .	26





# Akronymer

**cls.** Class size. 19–26

**Dvs** Det vil si. 63

**etc** et cetera. 63

**evt.** eventuelt. 35

**f.eks** For eksempel. 30

**Gj.snitt** Gjennomsnitt. 6, 7, 9, 12, 15

**hhv.** henholdsvis. x, xi, 41, 46, 51, 56

**klassestr** Klassestørrelse. 3, 7, 63

**mhp** med hensyn på. 7, 30, 31

**mtp** med tanke på. 4, 12, 29, 33

**Std.avvik** Standardavvik. 6, 7, 9, 12, 15

**t.Exp** Teacher Experience. 19–26



# Ordliste

$\epsilon$  Feilmarginsvariabel. 19–26

**class size** Klassestørrelse, kontinuerlig. x, xi, xv, 29, 41, 46, 51, 56, 63

**read** Lesescore, kontinuerlig målevariabel . 7

**sensitivitet**  $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ , der  $x_i$  er en av modellvariablene. 20, 29

**tail test** I en T-test der du har  $\mu_i > \mu_j$ , i stedet for  $\mu_i = \mu_j$ . ix, 6

**Teacher Experience** Lærererfaring, målt i år. x, xi, xv, 41, 46, 51, 56



# Kapittel 1

## Introduksjon

Forholdet mellom lærer og elev er et viktig tema i skolepolitikken i Norge, og det har i de siste årene blitt rettet et særs fokus på lærertettheten <sup>12</sup>. I samfunnsøkonomisk sammenheng er dette av stor interesse da kostnadsbildet, både på kort og på lang sikt, er enormt. På kort sikt er kostnaden av å ha flere lærere og hvordan de pengene skal hentes, på lang sikt kan vi se på hva dalende skoleferdigheter (hvis det er casen) koster samfunnet. Vi kommer ikke til å foreta noen form for kostandsestimering og de overnevnte faktorene vil dermed ikke bli hensyntatt i analysen(e).

En annen egenskap som også mistekens å ha stor påvirkning, men som ikke kan læres, er erfaring. Man tenker ofte at ferske lærere kommer inn i klasserommet med en ny giv og mer energi, men kan mangelen på *hands-on experience* være en ulempe?

I denne oppgaven vil vi se nærmere på det er grunnlag for å si at klassestørrelsen har noe å si og om erfaring spiller en rolle. Vi skal også se om det er grunnlag for å påstå det samme i Tyskland og USA, og å se om det i tillegg er forskjell mellom nasjonene. Det ville vært veldig interessant og sett på utdanningen til lærerene også, men ingen av landene har noe statistikk på dette.

Vi vil utvide modellen underveis og tilføye én og én ekstra variabel, her kan vi også se på sensitiviteten til de variablene ved de ulike scenarioene.

Dette betyr at modellen vil gjennom gå følgende utvikling:

1.  $read = \beta_0 + \beta_1 teacherExp$
2.  $read = \beta_0 + \beta_1 teacherExp + \beta_2 clsiz$
3.  $read = \beta_0 + \beta_1 teacherExp + \beta_2 clsiz + \beta_3 \frac{teacherExp}{clsiz}$

Det viser seg også at det ser ut til å være interessant å se på tredjegradspolynomene

---

<sup>1</sup><https://www.utdanningsnytt.no/det-er-na-faerre-elever-per-laerer-enn-pa-noe-annet-tidspunkt-de-siste-ti-137554>

<sup>2</sup><https://www.utdanningsforbundet.no/var-politikk/kunnskapsgrunnlag/publikasjoner/2018/minstenorm-for-larertetthet--forberedelse-og-innforing-pa-skolene/><sup>3</sup>

med kun én av variablene.

$$read = \beta_3 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0 \quad (1.1)$$

Som nevnt tidligere vil vi denne oppgaven vil vi se nærmere på Norge, Tyskland og USA. Disse har blitt valgt siden vi i Norge ofte sammenlikner oss med dem, men dog er disse landene såpass forskjellige geografisk sett. Sett i sammenheng med PIRLS2001 ser vi her på land i øvre sjikt, med kun Norge under internasjonalt gjennomsnitt (Mueller [1]). Det viser seg også at alle landene har gode datasett med god utfyllingsprosent på de aktuelle fokusområdene, henholdsvis 95,35%, 84,15% og 93,57%. Det er da totalt 14 855 besvarelser, både gode og dårlige, fordelt slik:

- Norge: 3459 besvarelser.
- Tyskland: 7633 besvarelser.
- USA: 3763 besvarelser.

Alle ser på 4.klasse-elever, uten unntak.

I tillegg vil det bli presentert deskriptive, statistiske fakta, som gjennomsnitt, standardavvik, maksimum og minimum og kovariansen dersom vi ser på flere enn én variable.

## Kapittel 2

# Materiale, metode og teoretisk rammeverk

### 2.1 Tidligere arbeid og antagelser

Liknende studie er foretatt før, mest likt er kanskje S. Mueller, «Teacher experience and the class size effect — Experimental evidence [1]. Her er det ikke lagt vekt på nasjonalitet, og den analysen Muller har foretatt er generelt mer omfattende og fokuset er tilsynelatende mer på klasseromsmiljøene. I denne analysen tar vi ikke hensyn til lærernes alder (kun erfaring), vi antar at vær klasse kun har én lærer<sup>1</sup>, vi tar ikke hensyn til andelen begavede barn i de aktuelle klassen, ei heller foreldrekaraktistika. Vi har bevgavede barn i denne listen da jeg mistenker at det disse ikke bare vil ha en effekt i seg selv, men også støtte opp sine likemenn. En kjent kommentar som ofte kom opp når det var mange som trengte hjelp i klasserommet var: “Spør sidemannen.” Hvis denne sidemannen var en begaved person, så er det skjellig grunn til å mistenke at dette ville gitt en positiv effekt på læringsoppnåelsen. Også noe som Mueller [1] har et stort fokus på, er forstyrrelsesmomentet som, mest sannsynlig, vil oppstå med større klasser.

### 2.2 Innledning

Det er i hovedsak to måter å angripe datasettene som har blitt tildelt: se på de på et individuelt nivå, eller se på de på et klassenivå. Dette vil gi store utslag, spesielt med tanke på klassestørrelser og lærererfaring siden elevene her villa ha samme “score”. Ser man på et individuelt nivå, vil de store klassene dra snittet høyt opp, mens de små vil få lite å si. Eks på to klasser, én med to elever og én med 50 elver.

$$\overline{klassestr} = \frac{2 \cdot 2 + 50 \cdot 50}{2 + 50} = 48,15 \quad (2.1)$$

$$\overline{klassestr} = \frac{2 + 50}{2} = 26 \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>lærertetthet =  $\frac{1}{klassestrrelse}$

Her ser vi at ligning (2.1) går for den individuelle modellen og vil gi et misvisende gjennomsnitt hva angår klassestørrelser. Derimot ligning (2.2) går for klassemodellen og gir dermed et mer korrekt svar på hva den gjennomsnittlige klassen er. Dette problemet oppstår også for lærerdata, der de lærerne med de største klassen, igjen, vil ha større “vekting” enn lærerne med mindre klasser. Vi tar hensyn til dette og vil løse hver modell på både et individuelt (ligning (2.1) og klassenivå (ligning (2.2)). Det vil bli påpekt hva som er hva.

## 2.3 Modellene

Som nevnt i kapittel 1 vil vi gå igjennom modellen:

$$read = \beta_0 + \beta_1 teacher\_Exp + \beta_2 clsize + \beta_3 \frac{teacher\_Exp}{clsize}$$

Dette vil bli gjort ved hjelp av en enkel regresjonsmodell med flere variable.  $\frac{teacher\_Exp}{clsize}$  vil gi oss divisjon med null gitt som den står, det vil skape en asymptote som ikke er realistisk mtp dataen. Vi lager oss derfor en ny variabel som, for hvert individ/klasse er kovienten  $\frac{teacher\_Exp}{clsize}$ . Denne danner dermed en egen variabele,  $x_3$ . Denne får nå en ganske gunstig egenskap med at vi kan tolke den på et slikt vis om unge/uerfarne lærere bør ha store eller små klasser, og vektingen av denne mot de andre faktorene. Jo mer positiv den vektingen er, jo mer gunstig er det å ha uerfarne lærere på store til mellomstore klasser. Dette er illustrert i vedlegg A, figur A.1.

Kort oppsummert regner vi regresjonen slik:

$$\hat{y} = [1 \quad x_1 \quad x_2 \dots x_n] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$\beta$  estimeres ved

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \mathbf{M}_y^{-1} \mathbf{M} \quad (2.4)$$

der

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

der

$$m_{ij} = \begin{cases} cov(x_i, x_j) \cdot (n-1) & \text{for } i \neq j \\ var(x_i) \cdot (n-1) & \text{for } i = j \end{cases}$$



$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} m_{y1} \\ m_{y2} \\ \vdots \\ m_{yn} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

der

$$m_{yi} = \text{cov}(y, x_i) \cdot (n - 1)$$

$\beta_0$  finner vi ved

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}_1 - \dots - \beta_n \bar{x}_n \quad (2.7)$$

For å finne ut hvor nøykatig modellen våre er, og hvor godt de samsvarer til dataen, vil vi sjekke med en  $R^2$ .

### 2.3.1 Den kubiske modellen

For de kubiske modellen vil vi benytte oss av MATLABs innebygde funksjon *polyval*, som også bruker minste-kvadrats metode<sup>2</sup>.

### 2.3.2 $R^2$

$R^2$  forteller oss om forholdet mellom avstandsforskjellen i a) den estimerte modellen og gjennomsnittet og b) de faktiske verdiene og gjennomsnittet.

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (2.8)$$

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

Jo nærmere 1, jo bedre. Med så mye data, sprett over store intervaller, er det ikke til å unngå små  $R^2$ -verdier.

### 2.3.3 T-test

For å sjekke om vi har gjemmel til å hevde en påstand, kjører vi en t-test.

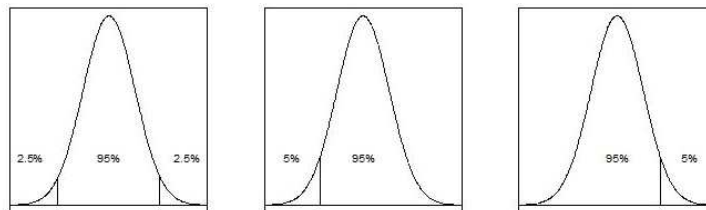
$$TS : \frac{\Delta \bar{X}_{1,2} - \Delta \mu}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_{0.05, n} \quad (2.9)$$

Der  $S_1$  og  $S_2$  er standardavviket til  $x_1$  og  $x_2$ . For å være helt sikker på arbeidet vårt, implementeres MATLABs egen to-variabel t-test-funksjon, *ttest2*<sup>3</sup>. Vi antar at alle datasettene har ulik varians. Alle testene kjøres med 5% signifikans nivå,

<sup>2</sup><https://se.mathworks.com/help/matlab/ref/polyfit.html>

<sup>3</sup><https://se.mathworks.com/help/stats/ttest2.html>

dette gjelder også der vi foretar en tail test. Dette gjør at forkastnings området (med en tail test) blir dobbelt så stort, se underliggende figur<sup>4</sup>.



Figur 2.1: Viser problemet med tail testene

## 2.4 Datasettene

Datasettene som er tilgjengelige er ikke alltid tilstrekkelig utfylt. Dette gjelder både kategori vis, altså at hele kolonnen mangler, og individuelt - noen mangler alder . Som nevnt innledningsvis var det totalt 14 855 besvarelser derav 13 266 var utfylt strekkelig for å foreta analysene. Tallene er fordelt slikt<sup>5</sup>:

- Norge: 3298 besvarelser.
- Tyskland: 6423 besvarelser.
- USA: 3545 besvarelser.

Med så mange besvarelser har det lite for seg å plote rådataen opp mot hverandre. Dette er dog gjort kun for å gjøre det og vil ligge vedlagt sammen med samtlige figurer i vedlegg A, her A.2, A.13 og A.24

### 2.4.1 Norge

Et dyppdykk i dataen fra Norge gir oss følgende:

	Lesescore	Lærererfaring	Klassestørrelse
Gj.snitt	497,45	16,57	20,90
Std.avvik	77,97	11,14	4,856
Maks	690	42	32
Min	228	1	4

Tabell 2.1: Deskriptiv analyse av Norge

En notis på tabell 2.1: vi ser at gjennomsnittet er noe lavere (2 poeng) enn det Solheim og Tønnessen[2] la fram. Dette betyr da at ved utskillingen har vi fjernet

<sup>4</sup>Figur hentet fra [http://jukebox.esc13.net/untdeveloper/RM/Stats\\_Module\\_4/mobile\\_pages/Stats\\_Module\\_47.html](http://jukebox.esc13.net/untdeveloper/RM/Stats_Module_4/mobile_pages/Stats_Module_47.html)

<sup>5</sup>Man kan regne dette ut ved hjelp av tallene fra kapittel 1, men for ordens skyld legger vi det til her.

en andel som, etter all sannsynlighet, lå over det internasjonale gjennomsnittet på 500 poeng.

Kovarianser	Lesescore	Lærererfaring	Klassestørrelse
Lesescore	6,079·1e03		
Lærererfaring	-34,08	124,18	
Klassestørrelse	7,55	-2,43	23,58

Tabell 2.2: Kovarianser av interessevariabler - Norge

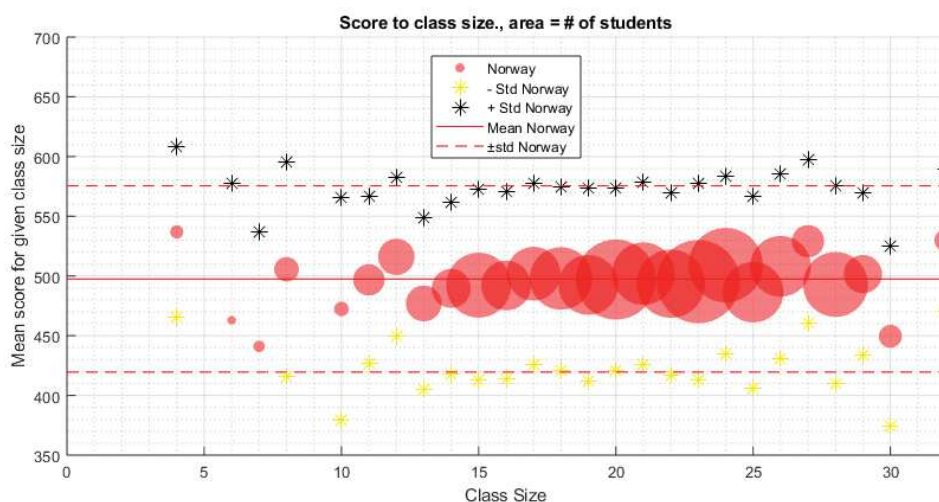
Tallene presentert i tabell 2.1 og 2.2 er regnet utifra ligning (2.1), altså mhp individet.

	Lærererfaring	klassestr
Gj.snitt	16,56	19,37
Std.avvik	11,08	5,40

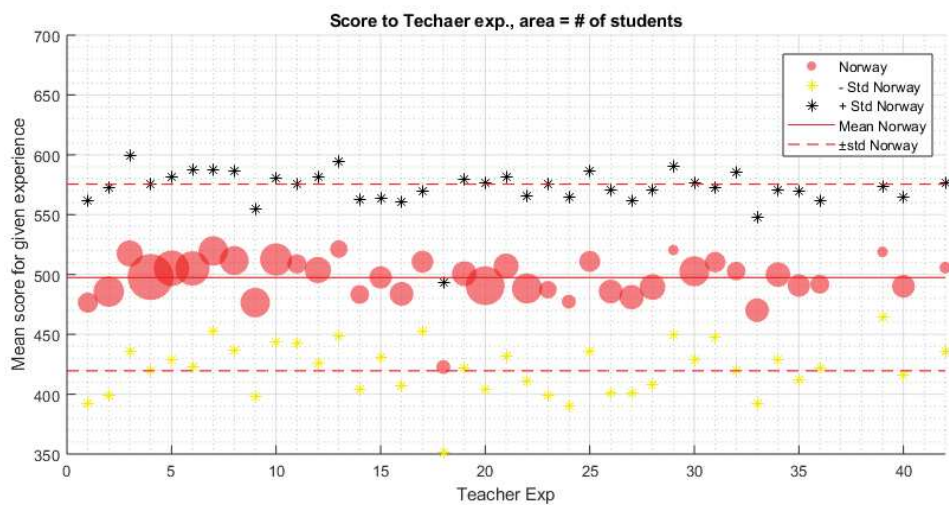
Tabell 2.3: Norge

Dersom vi tar utgangspunkt i filosofien i ligning (2.2), så vil vi få noen endringer, disse kommer fram i tabell 2.3. Maks/min vil logisk nok ikke forandre seg. Det har heller ikke mye for seg å se så nøye på read da denne fortsatt vil variere mye fra elev til elev, også innad i klassene. Vi ser her at det er liten forskjell på standardavviket og gjennomsnittet på lærersiden. Derimot er det en tydeligere forskjell når det gjelder dataen for klassestørrelsene.

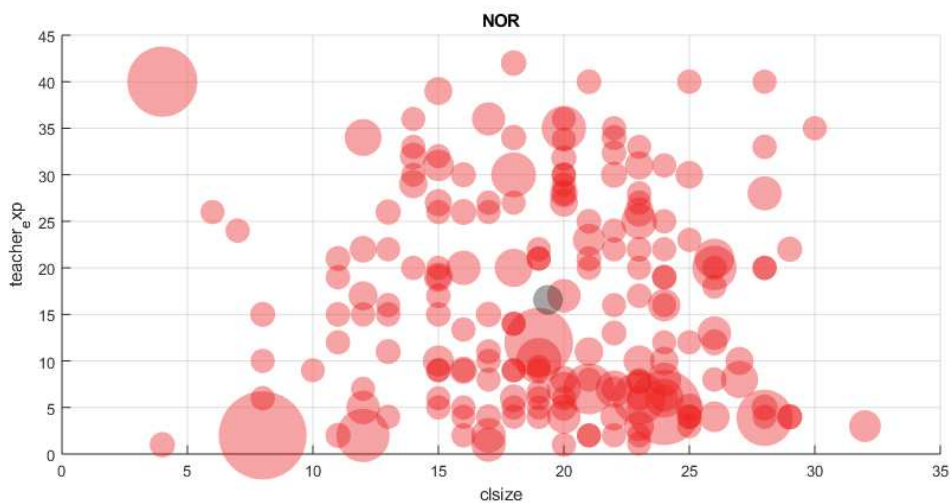
For å skjønne litt mer av hva tallene betyr, visualiserer vi dem.



Figur 2.2: Norge, klassestørrelse plottet mot testscoren.



Figur 2.3: Norge, lærererfaring plottet mot testscoren.



Figur 2.4: Norge, plotter klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklenes areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene.

## 2.4.2 Tyskland

Fra Tysland sine 6423 besvarelser fikk vi følgende:

	Lesescore	Lærererfaring	Klassestørrelse
Gj.snitt	535,95	22,42	23,13
Std.avvik	64,55	11,42	3,76
Maks	724	42	32
Min	289	1	9

**Tabell 2.4:** Deskriptiv analyse av Tyskland

Her ser vi også et avvik fra rapporten til Solheim og Tønnessen [2], her er det minus 4 poeng.

<i>Kovarianser</i>	Lesescore	Lærererfaring	Klassestørrelse
Lesescore	4,166·1e03		
Lærererfaring	5,91	130,44	
Klassestørrelse	20,20	-3,63	14,56

**Tabell 2.5:** Kovarianser av interessevariabler - Tyskland

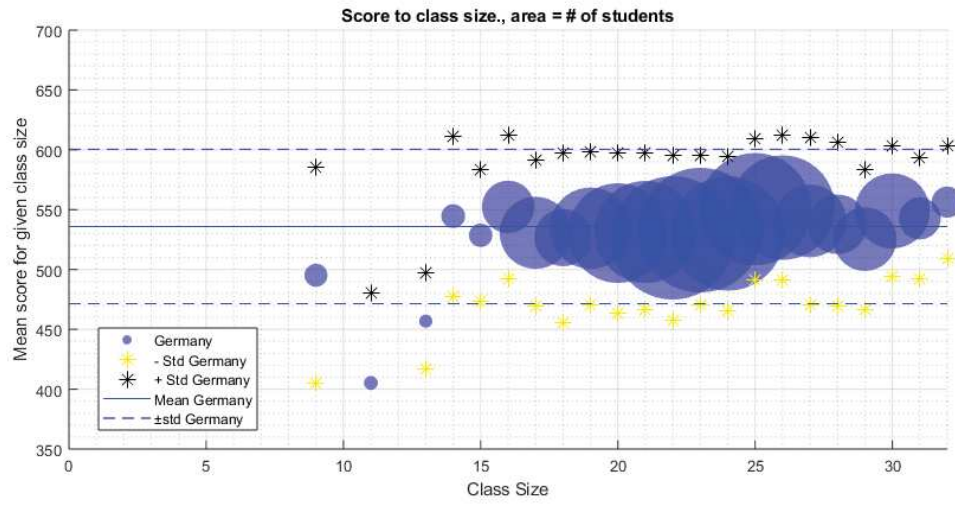
Også disse regnet ut med likning 2.1. Bruker så klassefilosifen (likning (2.2)) og får da:

	Lærererfaring	Kl.størrelse
Gj.snitt	22,52	22,50
Std.avvik	11,40	3,90

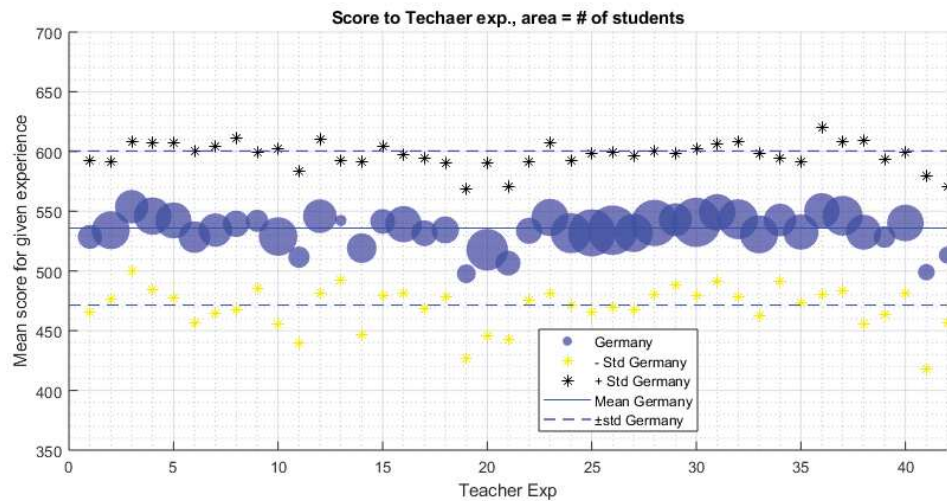
**Tabell 2.6:** Tyskland

Observerer at det er mindre forskjeller i de tyske dataen, sammenliknet med de norske.

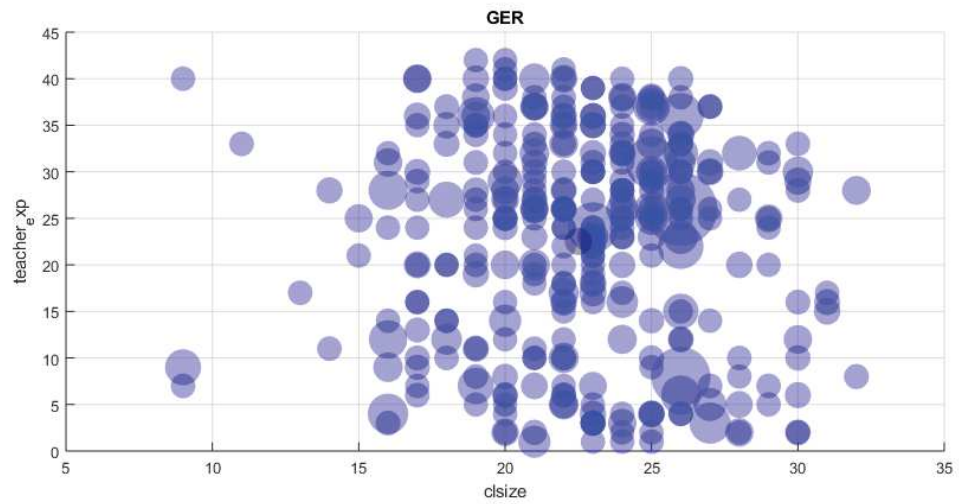
Illustrativt vil det se slikt ut:



Figur 2.5: Tyskland, klassestørrelse plottet mot testscoren.



Figur 2.6: Tyskland, lærererfaring plottet mot testscoren.



**Figur 2.7:** Tyskland, plotter klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklens areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene.

### 2.4.3 USA

USA presentere så følgende data:

	Lesescore	Lærer erfaring	Klassestørrelse
Gj.snitt	545,77	15,03	24,95
Std.avvik	80,11	10,95	5,01
Maks	743	46	39
Min	229	1	8

**Tabell 2.7:** Deskriptiv analyse av USA

Her faller sorteringen USA til gode, med en økning i gjennomsnittet på litt over 3 poeng.

<i>Kovarianser</i>	Lesescore	Lærer erfaring	Klassestørrelse
Lesescore	6,419·1e03		
Lærer erfaring	71,04	119,95	
Klassestørrelse	-32,20	3,85	25,15

**Tabell 2.8:** Kovarianser av interessevariabler - USA

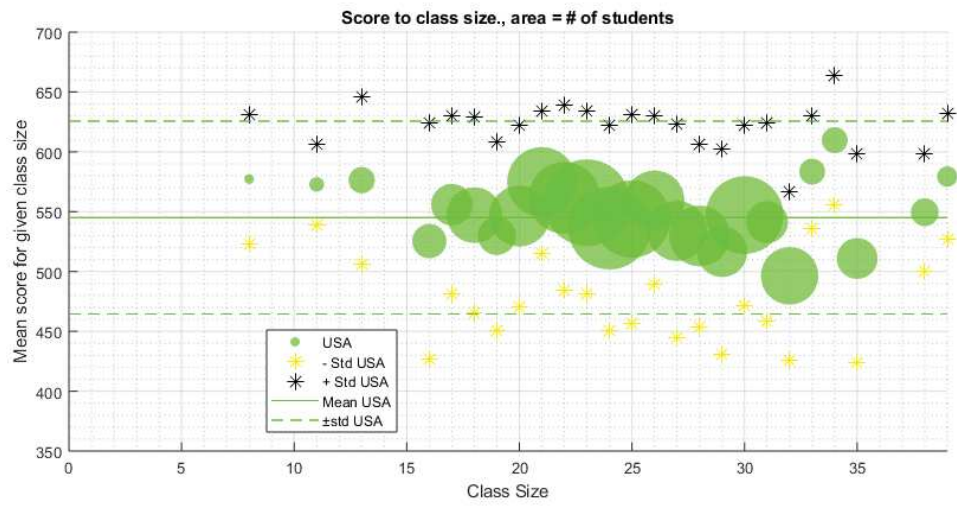
USA-elevene deles så opp i sine respektive klasser:

	Lærer erfaring	Kl.størrelse
Gj.snitt	14,90	23,85
Std.avvik	10,90	5,26

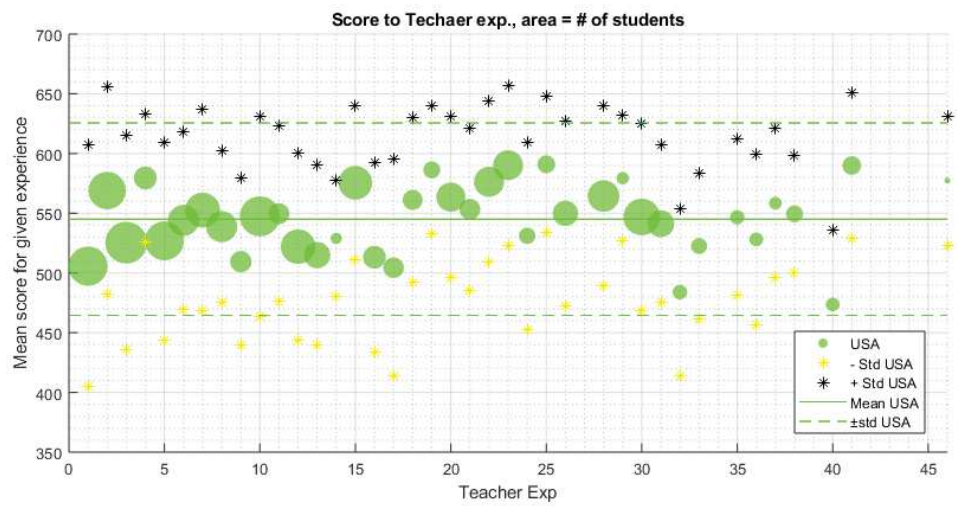
**Tabell 2.9:** USA

Vi ser her en marginal endring mtp lærererfaring, både på standardavvik og gjennomsnitt. Litt mer er det å se på klassestørrelse, standardavviket har økt med 5%. Snittet har krympet godt over 1 elev pr klasse. Dette tyder på USA har et par store klasser, vi ser en tendens til at USA har større klasser enn Tyskland og Norge.

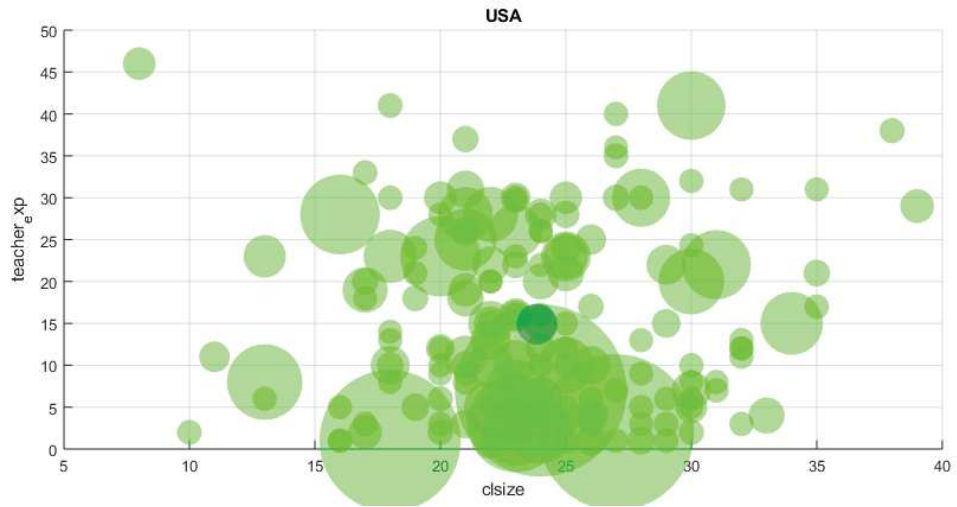




Figur 2.8: USA, klassestørrelse plottet mot testscoren.



Figur 2.9: USA, lærererfaring plottet mot testscoren.



**Figur 2.10:** USA, plotter klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklens areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene.

### 2.4.4 Verden

All data fra Norge, Tyskland og USA samles på én felles plass. Dette vil fra nå av bli kalt *the World*, eller bare *verden*. Merk at *verden* har en populasjonssammensetning der 24,9% er nordmenn, 48,4% er tyskere og 26,7% er amerikanere, så det er klart at tyskerne sine resultat vil ha en større påvirkning på vår verden enn det som ville vært i den reelle verden.

Vi skiller mellom å *kombinere* dataen og å *samle* dataen. Å *kombinere* vil si å overlape dataen, mens å *samle* vil være å legge de sammen. Vi representerer nok en gang de forskjellige scenarioene. Det henvises igjen til vedlegg A for et par figurer som ikke har noe for seg i hovedteskten her. Grafisk så blir dette scenarioet

	Lesescore	Lærererfaring	Klassestørrelse
Gj.snitt	528,82	18,98	23,06
Std.avvik	74,85	11,72	4,64
Maks	743	46	39
Min	228	1	4

**Tabell 2.10:** Deskriptiv analyse av verden på individuelt nivå.

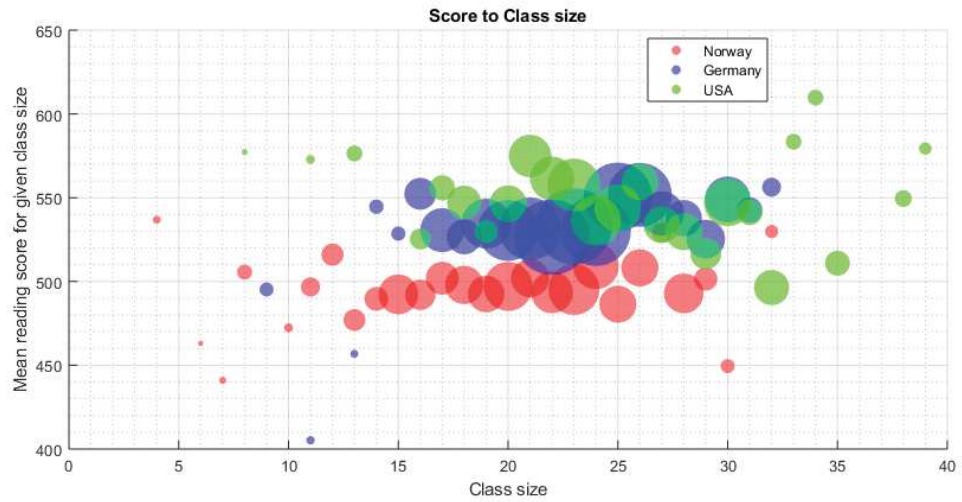
PRISL2001 hadde lagt scoringen på et slikt vis at det internasjonale gjennomsnittet skulle være 500 poeng [2], det er overhode ikke casen her. Dette er dog nevnt innledningsvis med at vi tok for oss en liten elite i denne undersøkelsen, med kun Norge under snittet.

<i>Kovarianser</i>	Lesescore	Lærererfaring	Klassestørrelse
Lesescore	5,603·1e03		
Lærererfaring	27,51	137,33	
Klassestørrelse	28,61	-1,93	21,51

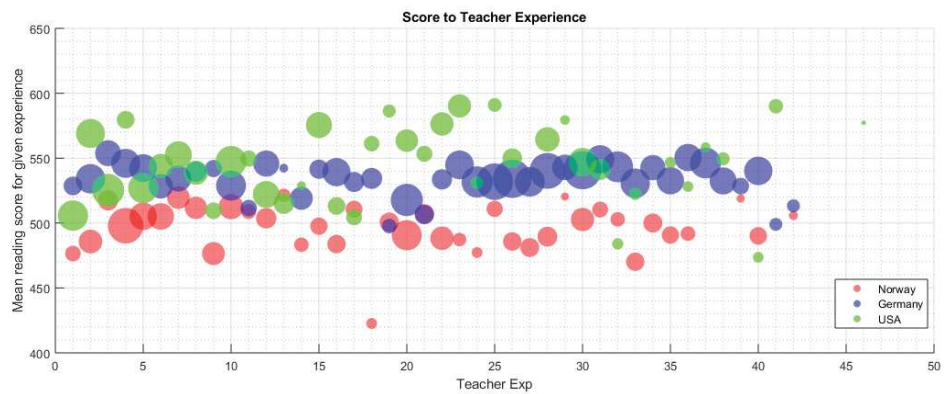
**Tabell 2.11:** Kovarianser av interessevariabler, sett på et individuelt nivå - verden

	Lærererfaring	Kl.størrelse
Gj.snitt	19.04	21,96
Std.avvik	11,72	4,99

**Tabell 2.12:** Sett klassevis - Verden

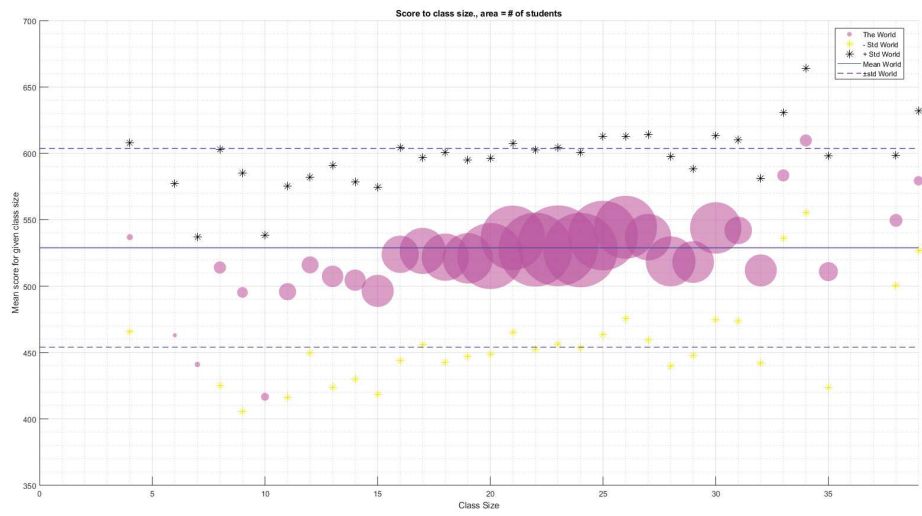


Figur 2.11: Score plottet mot klassestørrelse.

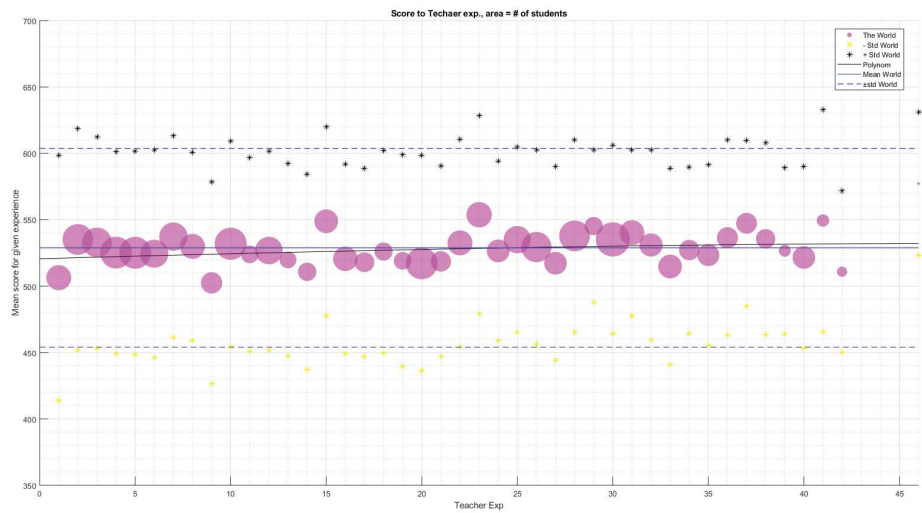


Figur 2.12: Score plottet mot lærererfaring.

Figur 2.11 og 2.12 viser *kombinert* data for verden.

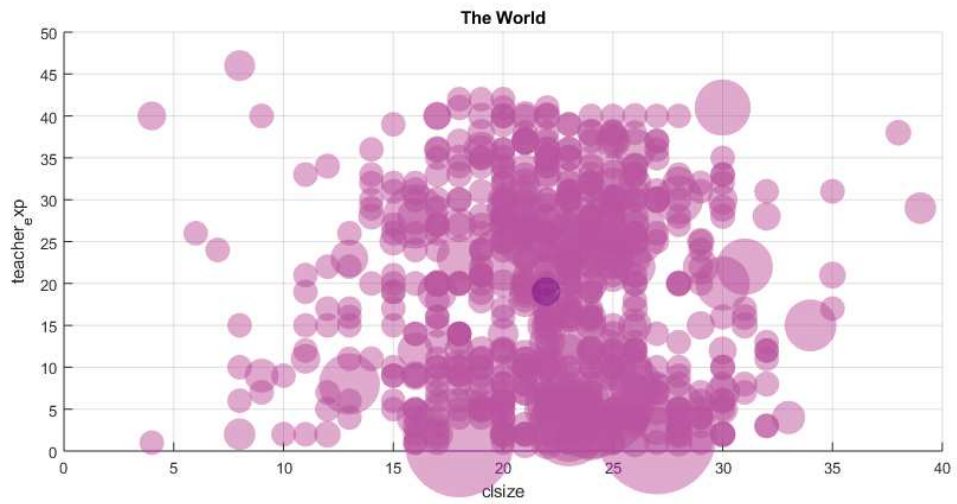


Figur 2.13: Verden, klassestørrelse plottet mot testscoren.



Figur 2.14: Verden, lærererfaring plottet mot testscoren.

Figur 2.13 og 2.14 viser verdens data for verden.



**Figur 2.15:** Verden, plotter klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklens areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene.

## Kapittel 3

# Resultater

Regresjonsgrafene ligger også i vedlegg A plottet sammen med rådataen. Disse er vurderte til å gi så lite og derfor utelatt fra selve hoveddokumentet. Minner også om at  $\frac{teacher\_exp}{clsize}$  ikke vil gi oss  $\frac{x_1}{x_2}$ , men heller danner en ny  $x_3$  som inngår i regresjonsanalysen. For å holde rede på hvilke likninger som er brukt på hvilke grafer lager vi en liste her:

$$y = \beta_0 + \beta_1 teacher\_exp + \epsilon_i \quad (3.1)$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 teacher\_exp + \beta_2 clsize + \epsilon_i \quad (3.2)$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 teacher\_exp + \beta_2 clsize + \beta_3 \frac{teacher\_exp}{clsize} + \epsilon_i \quad (3.3)$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 teacher\_exp + \beta_2 (teacher\_exp)^2 + \beta_3 (teacher\_exp)^3 + \epsilon_i \quad (3.4)$$

Det vil være litt mer utfyllende kommentarer i avsnitt 3.1, men det samme vil være gjeldene til de under.

### 3.1 Norge

#### 3.1.1 Individuell modell

	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
Kun t.Exp	502,00	-0,274		
Kun t.Exp og clS.	495,79	-0,269	0,292	
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	482,64	-0,876	0,915	11,90

**Tabell 3.1:** Oversikt over  $\beta$ -veridene for Norge, sett på individueltvis

Den endelige likningen kommer, for Norge, sett på et individuelt nivå, da ut som:

$$y = 482,64 - 0,876x_1 + 0,915x_2 + 11,90x_3 + \epsilon_i \quad (3.5)$$

Legg merke til at sensitiviteten til t.Exp er negativ gjennom hele modellen. Det vil si at økt lærererfaring vil ha en, tilsynelatende, negativ effekt på testresultatene. Det kommer også frem at større klasser ser ut til å ha en positiv effekt på testresultatene.

$R^2$  verdiene blir da som følgende.

	$R^2$
Kun t.Exp	0,0015
Kun t.Exp og clS.	0,0019
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	0.0040

**Tabell 3.2:** Oversikt over  $R^2$ -veridene for Norge, sett på individueltvis

Vi kommer tilbake til  $R^2$ -veridene i senere kapitler.

### 3.1.2 Klassemodell

	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
Kun t.Exp	499,55	-0,155		
Kun t.Exp og clS.	496,40	-0,153	0,160	
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	417,04	-0,157	2,591	1,120

**Tabell 3.3:** Oversikt over  $\beta$ -veridene for Norge, sett klassevis

Den endelige likningen kommer, for Norge, sett på et klassenivå, da ut som:

$$y = 417,04 - 0,157x_1 + 2,591x_2 + 1,120x_3 + \epsilon_i \quad (3.6)$$

$R^2$  verdiene blir da som følgende.

	$R^2$
Kun t.Exp	0,0029
Kun t.Exp og clS.	0,0037
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	0,1023

**Tabell 3.4:** Oversikt over  $R^2$ -veridene for Norge, sett på klassen

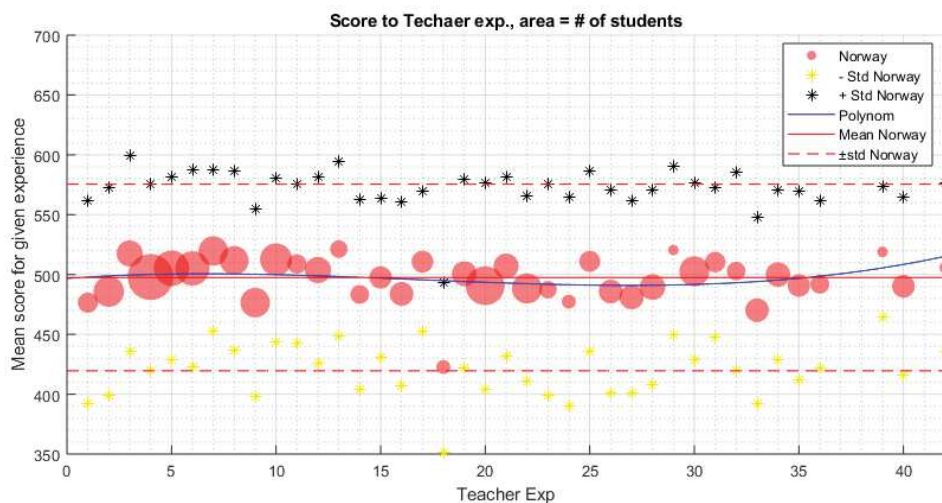
### 3.1.3 Kubisk

Den kubiske modellen tar kun for seg lærererfaring og lager en regresjonsanalyse basert på klassens gjennomsnittscore.

$$\begin{array}{cccc} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 496,76 & 1,250 & -0,117 & 0,002 \end{array}$$

**Tabell 3.5:** Norge. Den kubisk modellen, se ligning (3.4).





**Figur 3.1:** Norge. Tredjegradspolynom, plottet lærererfaring mot testscore. Arealet til sirklene illustrerer antall elever som har en lærer med den gitte erfaringen. Den avleste scoren er gjennomsnittet.

Dette polynomet har vil ha ekstremalpunkter gitt følgende

$$\frac{dy}{dx} = 0,006x^2 - 0,234x + 1,250 = 0 \tag{3.7}$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 6,388 \quad \vee \quad x_2 \approx 32,61 \tag{3.8}$$

## 3.2 Tyskland

### 3.2.1 individuell modell

	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
Kun t.Exp	534,93	0,045		
Kun t.Exp og clS.	500,52	0,086	1,449	
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	516,85	0,777	0,753	-15,66

**Tabell 3.6:** Oversikt over  $\beta$ -veridene for Tyskland, sett på individueltvis

Den endelige likningen kommer, for Tyskland, sett på et individuelt nivå, da ut som:

$$y = 516,85 + 0,777x_1 + 0,753x_2 - 15,66x_3 + \epsilon_i \tag{3.9}$$

$R^2$  verdiene blir da som følgende.

	$R^2$
Kun t.Exp	6,4337e-05
Kun t.Exp og clS.	0,0071
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	0,0080

Tabell 3.7: Oversikt over  $R^2$ -veridene for Tysland, sett individuelt

### 3.2.2 Klassemodell

	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
Kun t.Exp	534,19	0,046		
Kun t.Exp og clS.	492,92	0,077	1,803	
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	40,179	0,198	12,21	8,777

Tabell 3.8: Oversikt over  $\beta$ -veridene for Tyskland, sett klassevis

Den endelige likningen kommer, for Tyskland, sett på et klassenivå, da ut som:

$$y = 40,179 + 0,198x_1 + 12,21x_2 + 8,777x_3 + \epsilon_i \quad (3.10)$$

$R^2$  verdiene blir da som følgende.

	$R^2$
Kun t.Exp	2,4077e-04
Kun t.Exp og clS.	0,0438
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	0,4341

Tabell 3.9: Oversikt over  $R^2$ -veridene for Tysland, sett på klassen

### 3.2.3 Kubisk

Se avsnitt 3.1.3.

$$\begin{array}{cccc} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 549,88 & -3,672 & 0,195 & -0,003 \end{array}$$

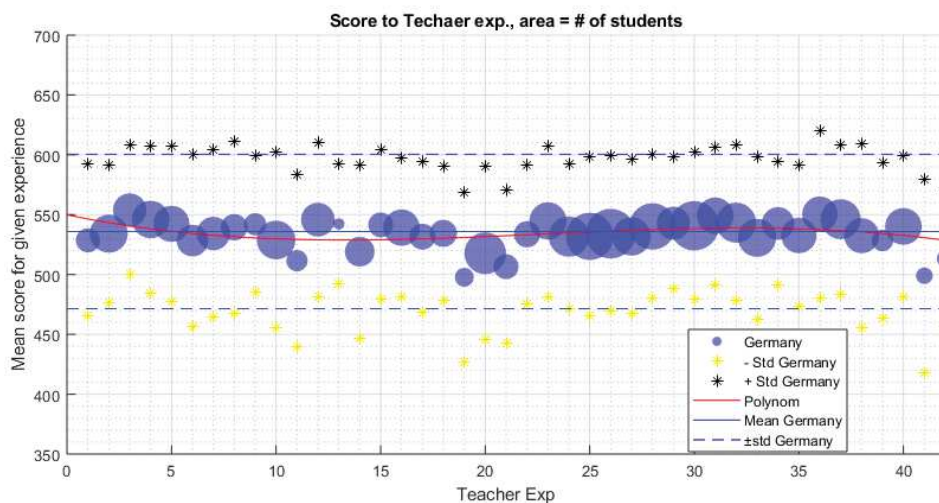
Tabell 3.10: Tyskland. Den kubisk modellen, se ligning (3.4).

Ser at polynomet har ekstremalpunkter ved

$$\frac{dy}{dx} = -0,009x^2 + 0,390x - 3,672 = 0 \quad (3.11)$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 28,84 \quad \vee \quad x_2 \approx 14,49 \quad (3.12)$$

Ser fra figur 3.2 og ligning (3.12) at  $x_2$  er bunnpunktet og  $x_1$  er toppunktet. Intuitivt vil det si at de tyske lærerne har en topp ved 28,84 års erfaring.



**Figur 3.2:** Tyskland. Tredjegradspolynom, plottet lærererfaring mot testscore. Arealet til sirklene illustrerer antall elever som har en lærer med den gitte erfaringen. Den avleste scoren er gjennomsnittet.

### 3.3 USA

#### 3.3.1 individuell modell

	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
Kun t.Exp	535,81	0,620		
Kun t.Exp og clS.	569,01	0,663	-1,357	
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	577,39	1,130	-1,695	-11,11

**Tabell 3.11:** Oversikt over  $\beta$ -veridene for USA, sett på individueltvis

Den endelige likningen kommer, for USA, sett på et individuelt nivå, da ut som:

$$y = 577,39 + 1,130x_1 - 1,1695x_2 - 11,11x_3 + \epsilon_i \tag{3.13}$$

$R^2$  verdiene blir da som følgende.

	$R^2$
Kun t.Exp	0,0071
Kun t.Exp og clS.	0,0141
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	0,0145

**Tabell 3.12:** Oversikt over  $R^2$ -veridene for USA, sett individuelt

### 3.3.2 Klassemodell

	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
Kun t.Exp	531,98	0,839		
Kun t.Exp og clS.	541,56	0,845	-0,406	
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	104,44	0,0644	9,647	8,652

**Tabell 3.13:** Oversikt over  $\beta$ -veridene for USA, sett klassevis

Den endelige likningen kommer, for USA, sett nå på et klassenivå:

$$y = 104,44 + 0,0644x_1 + 9,647x_2 + 8,652x_3 + \epsilon_i \quad (3.14)$$

$R^2$  verdiene blir da som følgende.

	$R^2$
Kun t.Exp	0,0292
Kun t.Exp og clS.	0,0307
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	0,3821

**Tabell 3.14:** Oversikt over  $R^2$ -veridene for USA, sett klassevis

### 3.3.3 Kubisk

Se avsnitt 3.1.3.

$$\begin{array}{cccc} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 514,83 & 4,652 & -0,161 & 0,002 \end{array}$$

**Tabell 3.15:** USA. Den kubisk modellen, se ligning (3.4).

Finner igjen polynomets ekstremalpunkter:

$$\frac{dy}{dx} = 0,006x^2 - 0,322x + 4,652 = 0 \quad (3.15)$$

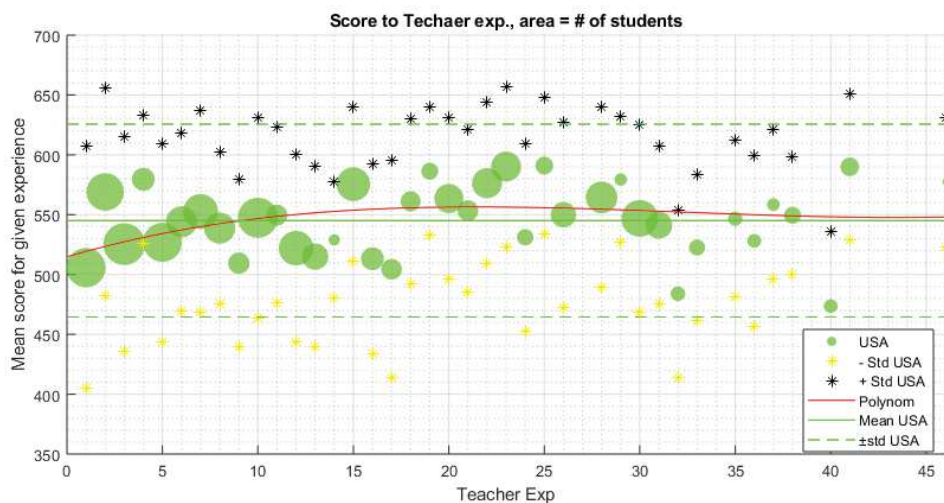
Ligning (3.15) har ingen reelle røtter, men på figur 3.3 kan det se ut som at faktisk finnes et toppunkt rundt 20 årserfaring. Legger vi til én ekstra desimal på tallene som er brukt i tabell 3.15, så får vi at det finnes reelle røtter.

$$\frac{dy}{dx} = 0,0051x^2 - 0,3242x + 4,6515 = 0 \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 41,69 \quad \vee \quad x_2 \approx 21,88 \quad (3.17)$$

## 3.4 The World

Vi ser her på all samlet data for våre tre land.



**Figur 3.3:** USA. Tredjegradspolynom, plottet lærererfaring mot testscore. Arealet til sirkelene illustrerer antall elever som har en lærer med den gitte erfaringen. Den avleste scoren er gjennomsnittet.

### 3.4.1 individuell modell

	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
Kun t.Exp	525,02	0,200		
Kun t.Exp og clS.	493,54	0,219	1,350	
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	498,66	0,455	1,130	-5,226

**Tabell 3.16:** Oversikt over  $\beta$ -veridene for alle landene samlet, sett på individueltvis

Den endelige likningen kommer, for verden, sett på et individuelt nivå, da ut som:

$$y = 498,66 + 0,455x_1 + 1,130x_2 - 5,226x_3 + \epsilon_i \quad (3.18)$$

$R^2$  verdiene blir da som følgende.

	$R^2$
Kun t.Exp	9,84e-04
Kun t.Exp og clS.	0,0080
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	0,0082

**Tabell 3.17:** Oversikt over  $R^2$ -veridene for verden, sett individuelt

### 3.4.2 Klassemodell

Verden sett klassevis:

	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
Kun t.Exp	521,43	0,284		
Kun t.Exp og clS.	482,49	0,288	1,770	
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	426,95	0,274	5,750	2,665

**Tabell 3.18:** Oversikt over  $\beta$ -veridene for verden, sett klassevis

Den endelige likningen kommer, for verden, sett nå på et klassenivå:

$$y = 426,95 + 0,274x_1 + 5,750x_2 + 2,665x_3 + \epsilon_i \quad (3.19)$$

$R^2$  verdiene blir da:

	$R^2$
Kun t.Exp	0,0059
Kun t.Exp og clS.	0,0473
t.Exp, clS. og $\frac{t.Exp}{clS.}$	0,1767

**Tabell 3.19:** Oversikt over  $R^2$ -veridene for verden, sett klassevis

### 3.4.3 Kubisk

Se avsnitt 3.1.3.

$$\begin{array}{cccc} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 520,65 & 0,394 & -0,002 & -3,062e-05 \end{array}$$

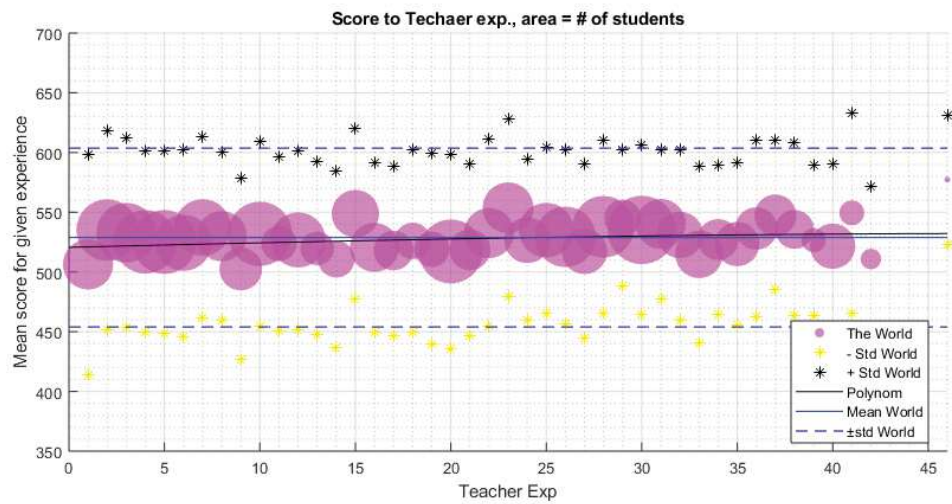
**Tabell 3.20:** Kombinert. Den kubisk modellen, se ligning (3.4).

Finner igjen polynomets ekstremalpunkter:

$$\frac{dy}{dx} = -9,186 \cdot 10^{-5}x^2 - 0,004x + 0,394 = 0 \quad (3.20)$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 47,24 \quad \vee \quad x_2 \approx -90,79 \quad (3.21)$$

Det fascinerende her er at røttende faller utenfor rekkevidden til lærererfarin-  
gene - det er ingen som er i nærheten av å ha 47 års erfaring i dette studiet. Her  
sier altså regresjonen at det ikke finnes en optimal lærererfaring.



**Figur 3.4:** Verden. Tredjegradspolynom, plottet lærererfaring mot testscore. Arealet til sirklene illustrerer antall elever som har en lærer med den gitte erfaringen. Den avleste scoren er gjennomsnittet.





## Kapittel 4

# Diskusjon

Gjentagende over hele analysen er en økende  $R^2$ -verdi, noe som betyr at modellen blir bedre og bedre for hver faktor som ble lagt til. Vi tar utgangspunkt i de siste likningene for landene (kapittel 1, ligning (3.3)), der vi av  $R^2$ -veridene kan se at det er klassemodellen som passer aller best<sup>1</sup>. Rent analytisk, med innsatte tall fra diskriptive analysene fra avsnitt 2.4, får vi at Norge troner øverst (494,83), USA er ikke langt bak (493,85) og Tyskland havner nederst her (450,74). Dette strider mot det vi kan se grafisk, der ser det ut til at Norge stiller litt svakt mot Tyskland og USA mtp testscoren. Også PRLS 2001-rapporten [2] støtter grafen vår.

Vi kjører en T-test og bruker ligning (2.9), med  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ , for å sjekke om det er noen av landene som har abnormale store verdier for noen av kategoriene/segmentene. Der kommer det fram at Norge har, med 5% signifikansnivå, ligger under gjennomsnittet i vår verden når det gjelder lesescore. Altså må man ta denne regresjonsanalysen kun som en veiledning.

Vi innleddet oppgaven med å spørre om det var en sammenheng mellom klassestørrelse og lærererfaring. I kapittel 3 så vi at alle de gode modellen"(altså de med laveste  $R^2$ -verdi), har en positiv sensitivitet for økning i klassestørrelse, så regjeringens plan om å øke lærerertettheten, kanskje jobber mot sin hensikt. Vi skal se litt på det siden. HVa angår lærererfaring, ser vi at det er varierende fortegn på  $\beta_1$  : Norge har negativt, Tyskland og USA har positive. Felles for alle er at de relativt lave i absoluttverdi og at  $|\beta_3| > |\beta_1|$ , noe som betyr at  $\beta_3$  vil overkjøre det negative pådraget (for Norge) fra  $\beta_1$ . Dette gitt at vi ikke har en stor class size<sup>2</sup>.

Vi ser på om det er grunnlag for å hevde noe som helst og tester ekstensivt. Oppsettet blir da:

$$\begin{array}{lll} \textit{Both} : H_0 : \mu_1 = \mu_2 & \textit{Left} : H_0 : \mu_1 \not< \mu_2 & \textit{Right} : H_0 : \mu_1 \not> \mu_2 \\ & H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 & H_1 : \mu_1 < \mu_2 & H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{array}$$

<sup>1</sup>tabell 3.4, 3.9 og 3.14 sammenliknet med tabell 3.2, 3.7 og 3.12

<sup>2</sup>classsize  $< \frac{\beta_3}{\beta_1}$

Vi tar oss ikke bryet med å skrive ned alt i detalj, det forekommer i vedleggene. Det vil også ligg ved en  $H_0$ -tabell, her er en oversikt over alle hypotesetesten som ble kjørt, og utfallet av dem<sup>3</sup>.

Oppgaven skulle se på om det er noe grunnlag for å hevde lærererfaring og klassestørrelse har en påvirkning på lesescoren. Vi ser på et intervall fra -150 til +150 i scoreforskjell og tester både mhp lærererfaring og klassestørrelse. Det tilsvarer 32 mulig kombinasjoner. Alle figurene/svarene ligger i vedlegg A, vedlegg A.2.1, A.3.1, A.4.1 og A.5.1. Figuren er forklart nærmere i vedlegg B. MATLAB's tester har en tendens til å bryte sammen ved lavt forsøksstall, som når vi f.eks ser på tallene klassevis, der det noen ganger kun er et par stykker. Grunnen til nedbrytingen er at den får et veldig lavt antall frihetsgrader. Dette er grunnen til de mye dårlige resultatene når vi ser på et klassenivå.

Vi ser antydninger til det Mueller [1] anmoder: Vi ser et en klar forskyvning i overlappende forventingsverdi til både Norge, *the World* og USA ved en klasse på rundt 33 elever. Mueller [1] estimerte i sin modell at 34 skulle være et slags *threshold*, grenseverdi.

I hypotesetestene har vi sett helt bort fra  $\frac{teacher\_exp}{clsiz}$  da vi dataen vil bli enda mer kuppet og resultatene vil da nærmest se ubrukelig ut. Det vi ser derimot fra tabell 3.1, 3.6, 3.11 og 3.16<sup>4</sup> er at det er stor variasjon mellom  $\beta_3$ -veridene, alt fra -15,66<sup>5</sup> til +11,90<sup>6</sup>. Det er også bemerkelsesverdig stor forskjell mellom Tyskland, sett individueltvis, og Tyskland sett klassevis. Fokuserer man på modellene som har gitt best  $R^2$ -verider, så snevrer det inn spannet av  $\beta_3$ -verdier til å falle mellom 1,102 og 8,777<sup>7</sup>, med andre ord, utelukkende positive bidrag, og med relativ høy vektning.

Det ble som nevnt kjørt en del hypotesetester. Får å få et bedre innblikk i hvor (u)jevnt forventingsveriden er sammen, så kjøres testen med en simulert endring (kall det en boost eller nedjekkelse). Oppsummering av  $H_0$ -testene (figurene i vedlegg A):

## 4.1 Norge

På individuelt nivå ser vi at statistikken i Norge peker mot at 13 er en fordelaktig størrelse, det er lite gunstig å øke til 14. Etter å ha passert 14 er det litt hipp som happ hvilken klassestørrelse de har. Det skjer et nytt hopp ved 24 elever, der det ikke er gunstig å gå til 25, men er du på 25 elever, så er det ønskelig å øke til 26 og 27 elever. Man vil ikke opp til 28. Testene over 30 sees på som *outliers* og vi tar ikke en konklusjon på de. Akkumulert ser vi at det er en svak oppgang i det vi bekker 30. Sett klassevis ser vi noe av det samme: 13 er gunstig, ikke lurt å øke ved 25 elever, men det er en større forskjell når vi ser på det akkumulerte: klart

<sup>3</sup>Vedlegg excel-ark

<sup>4</sup>og deres klassevariant, tabell 3.3, 3.8, 3.13 og 3.18

<sup>5</sup>Tyskland, individuell, tabell 3.6

<sup>6</sup>Norge, individuell, tabell 3.1

<sup>7</sup>Norge klassevis og Tyskland klassevis

over  $y_0$ -linjen.

På lærererfaringssiden er det en del opp og ned, men vi trekker ut følgende: Det er noe å hente å gå fra to til tre års erfaring, men ikke tre til fire. Hvis du er på fire har det lite å si før de når åtte årserfaring. Her er det ikke gunstig å gå til ni, men er du på ni kan du like så godt gå til ti. Vi får et kjempesprang i ytelse ved 18 årserfaring. Her er det mye å tap ved å gå til 19. Utover 19 ser det ut som at lite foranderer seg, kan tolk 33 årserfaring som en potensiell topp. Akkumulert ser vi at grafen holder seg på den gode siden av  $y_0$ -streken frem til 13/14, da krysser den og kommer aldri under igjen.

## 4.2 Tyskland

Det er vanskeligere å fatte en beslutning på Tyskland sin front hva klassestørrelse angår. Til tross for at de ligger någen lunde rundt  $\Delta\mu = 0$  så er de pekende litt skrått oppover, noe som indikerer en svak negativ trend. En klassestørrelse på 25 og 26 ser gunstig ut, 27 har et fall. Akkumulert ser vi at det store droppet i starten sørger for at grafen slutter under  $y_0$ -linjen, den kryper dog oppover mot slutten. Ser man klassevis på denne delen, så er det ingenting å konkludere med, annet enn at det er en negativ trend om du overstiger 26. Klassevis er det avhengig om du klarer å teste et lite antall eksempler (vår hjemmelagde) eller ikke (MATLABs). Med et lite antall vil du starte med en kraftig dropp, noe som sørger for at den holder seg under linjen. Til tross for at MATLABs akkumulertgraf slutter over  $y_0$ , så ser vi på deltaen at det er lite utslag.

For lærerfaringen sin del så ser tre års erfaring veldig gunstig ut. Deretter har vi en svak, uønsket trend frem til syv år. Den henter seg ikke inn, men holder seg slik de påfølgende tre årene, så er det en ny negativ knekk. Et vendepunkt ved 13 årserfaring. Både 13 og 14 er gode år, mens så er det nedover igjen, svakt. En større, negativ knekk kommer ved 19/20 årsskiftet. Den henter seg litt inn ved 23 og 24 år. Så er det jevnt. Noe fordeler kommer ved 34 år, men den varer ikke lenge før den fordelen er nøytralisert. Akkumulert ser vi at grafen bare øker og øker, noe som ikke er gunstig. Klassevis er det altfor store områder til å kunne konkludere med noe som helst, noe som tyder på svake tester, lite utvalg og/eller stor varians. Fra 22 til 23 år ser ut som et positiv steg. Også her er den akkumulerte avhengig av antallet i test-populasjonen: MATLABs sine tester viser en svakt nedgang i leseresultater, mens den hjemmelagde er langt oppe - begge er uansett ugunstige.

## 4.3 USA

Det er utrolig mye spredning i  $H_0$ -testresultatene til USA sett mhp klassestørrelse, relativt resten av landene. 18 elever ser fordelsaktig ut, før den peker svakt nedover både på 19 og 20, så er den svakt opp 21 og 22. Så er det tre steg med nedgang, etterfulgt av to med oppgang, før det igjen går nedover i tre steg. Ved 30

(altså der vi endte opp), så er den veldig positiv til å øke med én elev. Når det er gjort, så er den utrolig negativ til å øke med én ny. Men etter den negative eneheten, så er den positiv i de to påfølgende økningene. Så bærs det utfor et stup. Ser vi på testene klassevis, så er det store områder som dekkes, nok en gang: tegn på dårlig testgrunnlag. Det er heller ingen klar trend, annet enn en gunstighet med å ha 22 elever. Både klassevis og enkeltvis er det mye opp og ned, dette gjør at akkumulert er det også mye opp og ned, men det ser ut til ta den avslutter over  $y_0$ -linjen, så ugunstig, men den svinger mye igjennom hele løpet.

Sett individueltvis på lærererfaringen, så er det store sprang, både opp og ned, og det hele ser ut som en jojo. Det er ikke mulig å fatte en konklusjon her. Klassemessig så ser det ut som fem årserfaring er en liten topp. Ellers er det også her store områder. Dette kommer klart fram på delta-grafen, ser også at den akkumulerte sliter med å etablere seg på én side av streken. Sett klassevis ser vi at det er noe forskjell mellom vår modell og MATLABs. Sistenevnte er noe mer pessimistisk enn den andre, én siste måling på vår modell sender akkumulertlinje under  $y_0$ , men MATLABs avslutter godt over.

## 4.4 Verden

På verdensbasis er det mye bevegelse når det gjelder individuelle klassestørrelsetyelse: Vi ser en negativ trend fra åtte til 11, for så positiv 12 og 13. Så holder den seg nøytral frem til en ny opptur fra 16 til 17. Så holder den seg rolig frem til 21 før den er positiv til å øke til 22. 23 er ikke ønskelig. Deretter holder den seg rundt  $\Delta\mu = 0$ , med kun små utslag. Fra 27 til 28 er det negativt utslag, samme gjelder fra 29 til 30, men det ser lyst ut å gå opp til 31, men ikke 32 og 33. Ser meget lovende ut å ha klassestørrelser på 34 og 35. Ser vi igjennom akkumuleringen, ser vi at den holder seg godt under  $y_0$ -linjen, indikere at det der fordelsmessig. Sett klassevis så er grafen rimelig flat, lite å melde foruten en fordel å gå til 17, så er det noe ulemper ved å øke fra 27 til 28 elever. Dog positiv til å gå fra 30 til 31. Ser vi på MATLAB sin graf er det rimelig dødtløp hele veien, en siste topp sørger for at den legger seg over  $y_0$ .

Lærerens erfaring er positiv til å gå fra ett til to års erfaring. Etterfulgt kommer en negativ trendbølge, dog 11 ser ut som en topp da den er positiv og 12 er negativ. Den fortsetter og holder seg nogen lunde rundt null-punktet. Det er litt oppgang fra 22 og utover til 24, men det er et stort fall ned til 25. Det forsetter i en svak negativ trend frem til 28, der snur det til svakt positivt til 30. Ny svak nedtur frem til 33. Testen viser lovende resultater å øke til 34, dog ikke 35, men 36 og 37 ser på ny lovende ut. Utover 37 peker nedover. Klassevis er kurven flat med negativt utslag på ni og positiv på ti. Positiv fra 15 til 16, svak negativ på 17, flat etterpå. Det er noe oppgang ved 23 og 25, før den så faller ved 25 en negativ trend følger så frem til 29. Etter 29 er den så og si flat. Her er det også store områder mot slutten, indikerer svak test. Akkumulertsett er grafene bemerkelsesverdige like, klassevis og individuell. For begge ser vi at summert er den stigende etter 2 årserfaring. Krysser 0-linja mellom åtte og ni år, dupper så vidt under 14 før den holder

seg jevnt over.

## 4.5 Svakheter

Det er en del svakheter med det den analysen som vi har foretatt oss. Vi har ikke tatt hensyn til kostnad, dette er noe av det viktigste for politikkvalg, vi har ikke sett på sertifisering og utdanningen til lærerne, vi har ikke sett på individkarakteristika blant elevene. Det er heller ikke til å stikke under en stol at vår verden er langt unna av å representere den verden som PIRLS har satt sammen for oss. Jeg har kjørt samme oppsett med alle landene i PIRLS-testen. Da har det blitt sett på over 122 000 besvarelser. Det er blir ikke stort bedre enn det som allerede er nevnt ovenfor: det svaier mye og er ingen klare trender. Kan nevne at mtp  $\beta$ - og  $R^2$ -verider, så følger hele verden etter det vi kan tolke fra vår lille verden. Så på grunnlag kan man si at det er dårlig å ha en så liten verden, med kun to land, men vi ser at det samme mønsteret gjentar seg.



## Kapittel 5

# Konklusjon

Oppgaven har sett på om lærererfaring og klassestørrelse har en påvirkning rundt testscoren. En har satt fokus på om det er en forskjell på en ser på individer eller klasser. Kostnadsbildet er ikke hensyntatt på noen nivå. Det er altså to ting som skal konkluderes:

- a) Hva sier regresjonsmodellen(e)?
- b) Støtter dataen vi har dette?

Modellene er alle i favør store klasser og erfaringsrike lærere. Den gir også ganske stor fordel med større klasser, altså en stor  $\beta_2$  sammenliknet med  $\beta_1$  og  $\beta_3$ . Alle de beste modellen, altså med høyest  $R^2$ -verdi, har koeffisienter:

$$\beta_1 < \beta_3 < \beta_2$$

Vi ser at modellene vektlegger klassestørrelse mest og det anses som en positiv vektning - jo større, jo bedre. Dermed er det gunstigere å ha uerfarne lærere på stor og mellomstore klasser. Dette strider mot teorien som ble foreslått innledningsvis med *hands-on experience*, men dette støttes hos Muller [1],

Statistikken er ikke-konkluderende og vi ser klart at det er mye overlappende forventningsverdier, disse blir skjært ganske midt på i tillegg. Dette antyder at en tenkt sannsynlighetsfordeling er ganske overlappende og at forventningsveridene er ganske like. Så man skal justere testscoren relativt mye ( $\pm 10\%$ ) før man har grunnlag til å hevde at det er noe å hente med én ekstra enhet av enten klassestørrelse/lærerfaring. Det skal også nevnes at det finnes noen sprang i disse grafene, der han har gjemmel til å si at det er fordelsmessig å øke med én enhet. Problemet er at dette ikke er et vedvarende mønster, men heller ser ut som et engangstilfelle. Evt. kan en betrakte dette som et toppunkt, gitt at sekvensen er "lønnsomt å gå frem, for så å ikke være lønnsom å gå frem ved neste enhet". Da kan tolke det som den foretrukne klassestørrelsen/lærerfaringen. Da skulle man ideelt sett ha sammenliknet denne "toppen" med større sprang (to og tre enheter ekstra), for å faktisk sjekke om dette er et toppunkt eller ikke.

Fra figurene ( $H_0$ -testene i vedlegg A) og diskusjon rundt de (kapittel 4) ser en at det er vanskelig å fatte en felles konklusjon. Hva klassestørrelse angår, sett

endringsvis, så har Norge en klar favoritt ved 13, Tyskland rundt 25/26 og USA, i like het med verden, 22. Ingen har sin prefererte klassestørrelse i det nedre kvartalet av rekkevidden. Norge ligger på grensen mellom nedre og midtre kvartil. Tyskland og Verden har alle (noen av) sine favoritter i øvremidte kvartil av klassestørrelsespannet. Det kan se ut som at verden foretrekker en klassestørrelse på 31, den ligger i øvre kvartil.

Altså, for Norge sin del så støtter statistikken den nye lærereformen<sup>1</sup>, da det er rundt en klassestørrelse på over 17 det virkelig begynner å gå i feil retning. Det er dessverre lite data på små klasser (sub 15 elever), ihvertfall sett klassevis. Ser man at på enkeltnivå og akkumulerer endringen, så skimter det mer igjennom at små til mellomstore (altså mellom 12 og 20 elever) klasser er fordelaktig. Dette mønsteret ser vi også til Tyskland og til en viss grad USA. USA skal sies å generelt ha litt større klasser og dermed ser vi at de faktisk “trives” opp til 25 elever.

Sett på verden klarer ikke vi å finne en optimal løsning ut i fra statistikken, da må vi over på regresjonsmodellen(e). Statistisk sett (også tatt i betraktning alle landene) at det er vanskelig å fatte en konklusjon på verdensbasis, den akkumulerte grafen, som fanger opp “kokende frosk-effekten”<sup>2</sup>, holder seg nesten konstant under likegyldighetslinjen ( $y_0$ ) dersom vi kun ser på vår lille verden. Tar vi alle land i betraktning så ser vi at den eskalerer i negativ retning etter passert 25 cirka.

På lærererfaringsiden ser at vi alle har en topp rundt ferkse lærere (to til fem år), denne effekten holder seg til rundt ti års erfaring, dette gjelder samtlige. Ellers er Tyskland tilsynelatende lite brysom, med preferanser over hele rekkevidden, dog så er det en svak oppgang som er vanskelig å fange opp om man ikke ser på det store bildet. Ser man klassevis så er det veldig lite utslag for Tyskland, men det er en positiv effekt under seks år, før den snubler litt opp og ned. USA hadde sprett data, og fem år så ut til å være favoritten. På grunn av de store svingene så er det lite å hente på akkumuleringen. På verdensbasis ligger det, i likhet med Tyskland, spredt godt utover, men vi ser at 22 og 23 også ser ut som noe av det mest ønskede om man ser på enhetsendringer. Igjen likhet med Tyskland så går det svakt oppover (negativt) etter passert ti år.

Oppsummert så vil ingen ha de 25% største og/eller minste klassene, men, i varierende omfang, noe rundt midten. Noe binært kan man si at lærererfaringsresultatene: enten innen de første fem årene, eller så må vi passere 30+, dog som nevnt over: det er en negativ trend ved økende erfaring. Ferske lærere forblir dermed den statistiske favoritten, til tross for at regresjonsmodellen foretrekker de mer erfarne.

---

<sup>1</sup><https://www.udir.no/tall-og-forskning/finn-forskning/tema/hvordan-gar-det-med-norm-for-larertetthet/>

<sup>2</sup>En frosk som blir kastet ut i en kokende bad vil hoppe ut, men en som begynner i et kaldt bad som sakte blir oppvarmet, blir kokt ihjel.



# Bibliografi

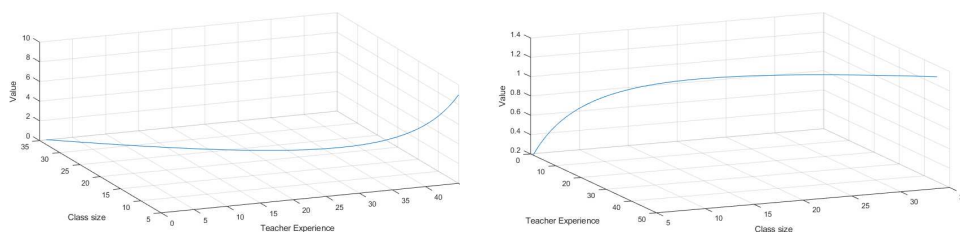
- [1] S. Mueller, «Teacher experience and the class size effect — Experimental evidence», eng, *Journal of Public Economics*, årg. 98, nr. C, s. 44–52, 2013, ISSN: 0047-2727.
- [2] R. G. Solheim og F. E. Tønnessen, «En norsk kortversjon av den internasjonale rapporten om 10-åringers lesekunnskaper», *Senter for leseforskning*, apr. 2003.



# Vedlegg A

## Figurer

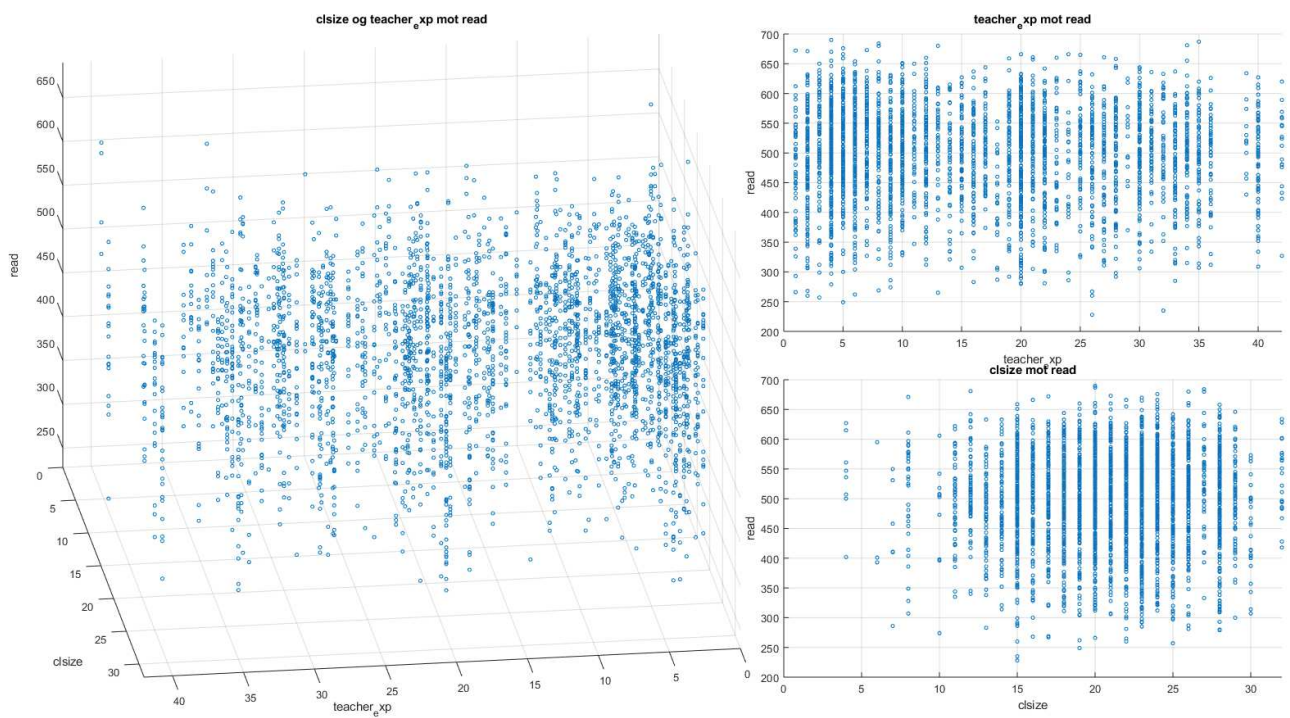
### A.1 Verdivurdering av $\beta_3$



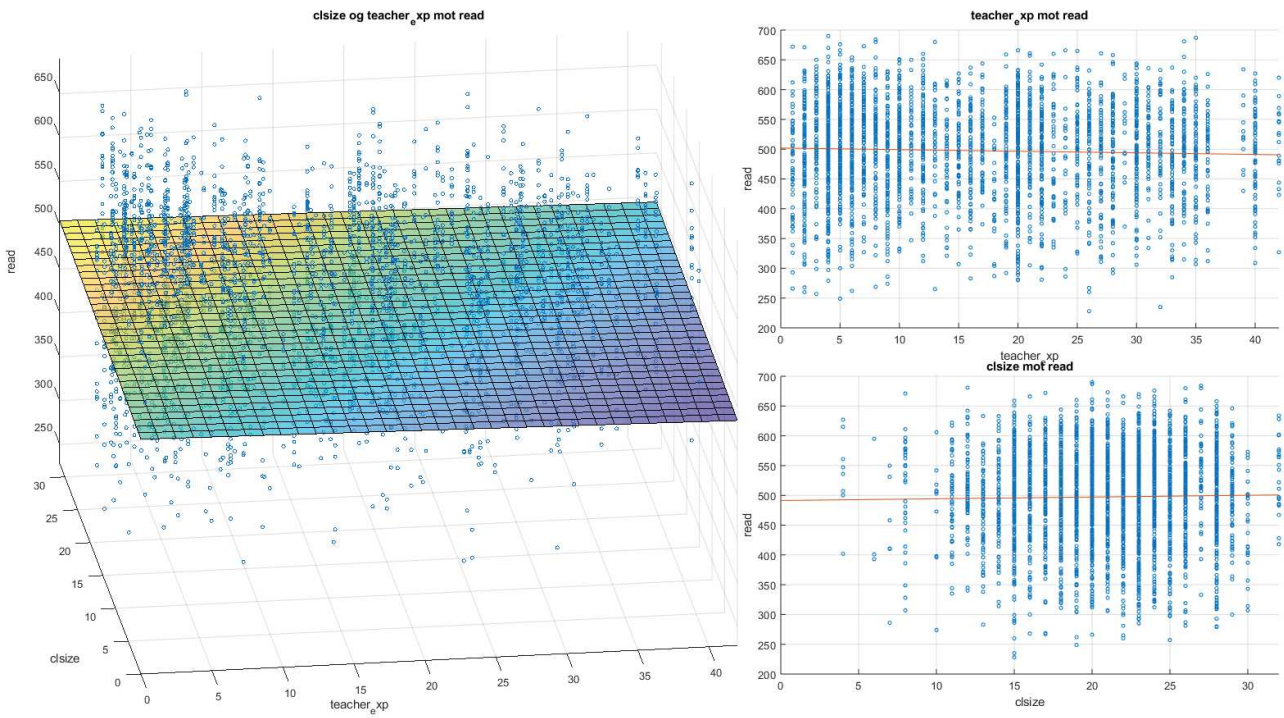
(a) Økende lærererfaring med minkende klasse- (b) Økende lærererfaring med økende klassestørrelser størrelser

Figur A.1: Ser hvordan vi går fram for å få ønsket effekt av  $\beta_3$

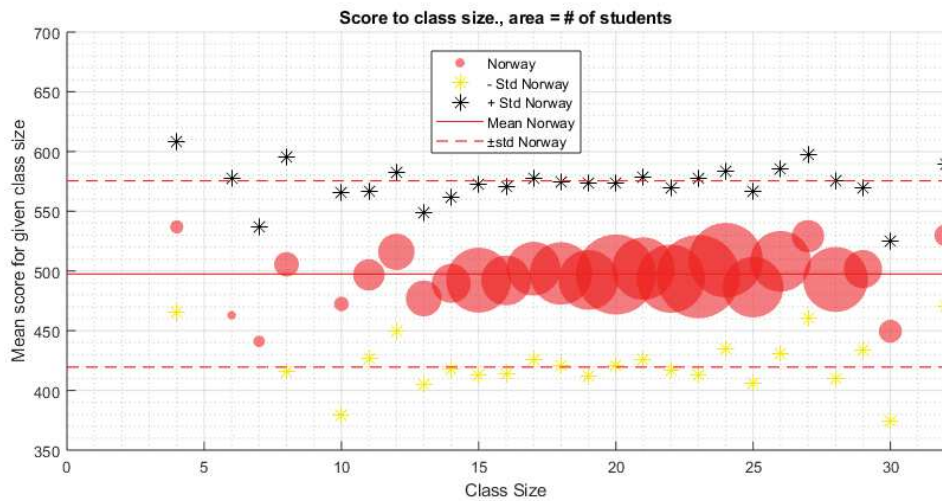
## A.2 Norge



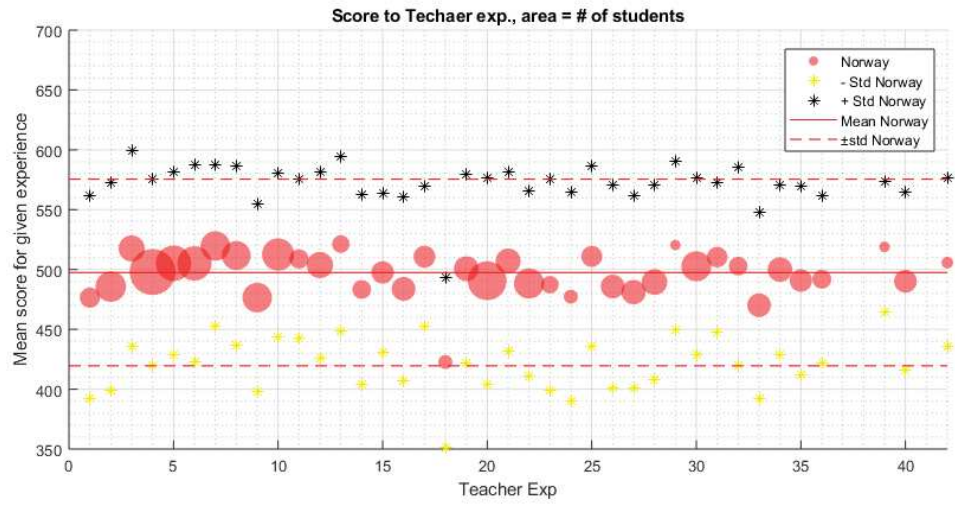
Figur A.2: Norges rådata.



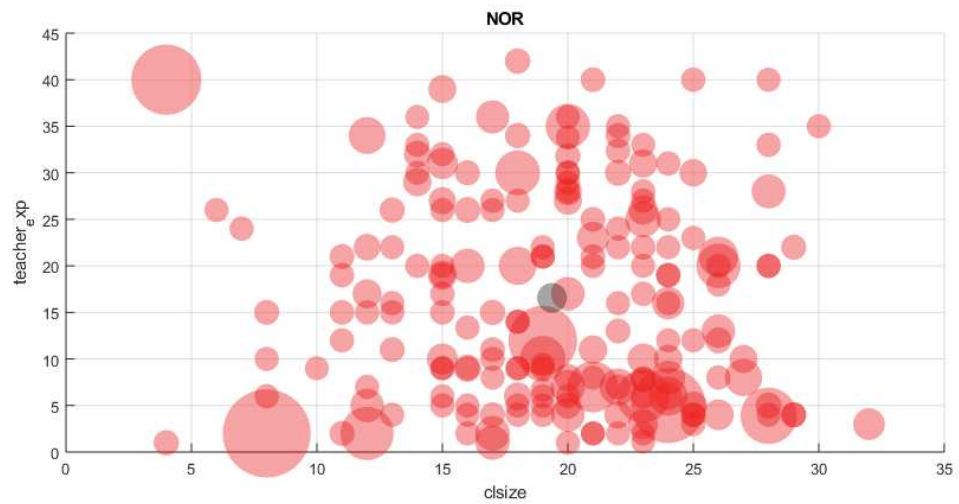
**Figur A.3:** Norge. Rådata plottet sammen med regresjons modellen  $read = \beta_0 + \beta_1 teacher\_xp + \beta_2 clsizsize$ . NB! Mangler brøkkledet. Til høyre ser vi de partiellderiverte til hhv. Teacher Experience og class size.



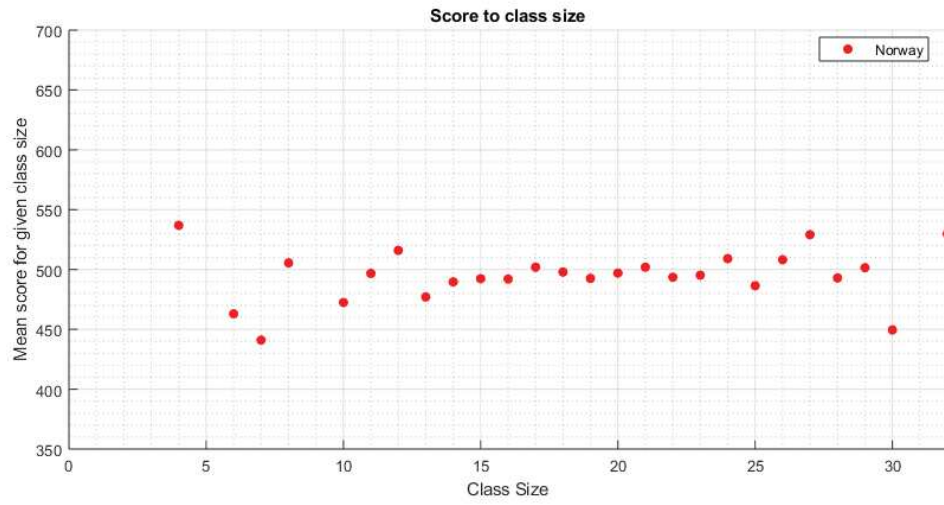
**Figur A.4:** Norge, klassestørrelse plottet mot testscoren.



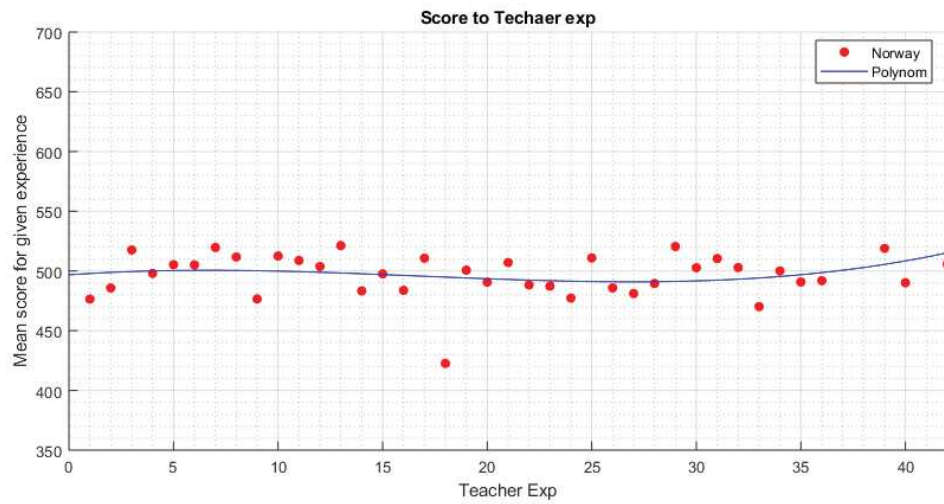
Figur A.5: Norge, lærererfaring plottet mot testscoren.



Figur A.6: Norge, plotter klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklenes areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene.



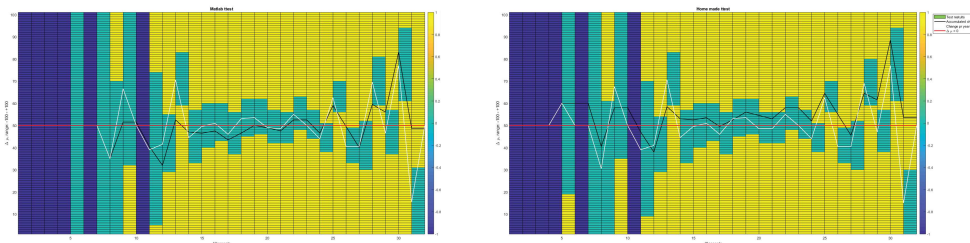
Figur A.7: Norge, klassestørrelse plottet mot testscoren.



Figur A.8: Norge, lærererfaring plottet mot testscoren.

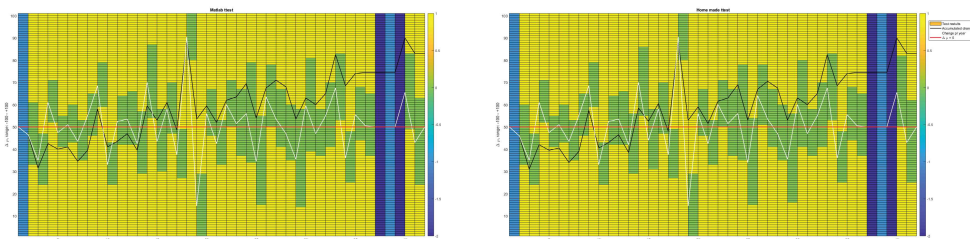
## A.2.1 $H_0$ - Resultater

### Individuelt



(a) Norge, individuell, ser på klassestørrelse, med MATLABs ttest2 (b) Norge, individuell, ser på klassestørrelse, med egen ttest-script

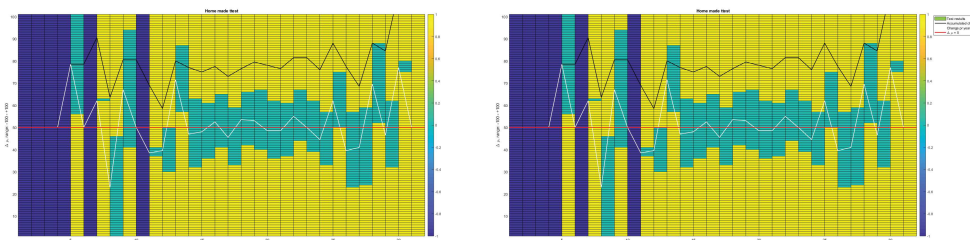
**Figur A.9:**  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis



(a) Norge, individuell, ser på lærererfaring, med MATLABs ttest2 (b) Norge, individuell, ser på klassestørrelse, med egen ttest-script

**Figur A.10:**  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis

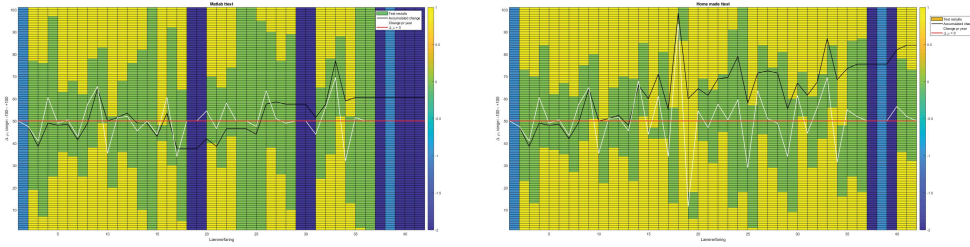
### Klassevis



(a) Norge, klassevis, ser på klassestørrelse, med MATLABs ttest2 (b) Norge, klassevis, ser på klassestørrelse, med egen ttest-script

**Figur A.11:**  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis

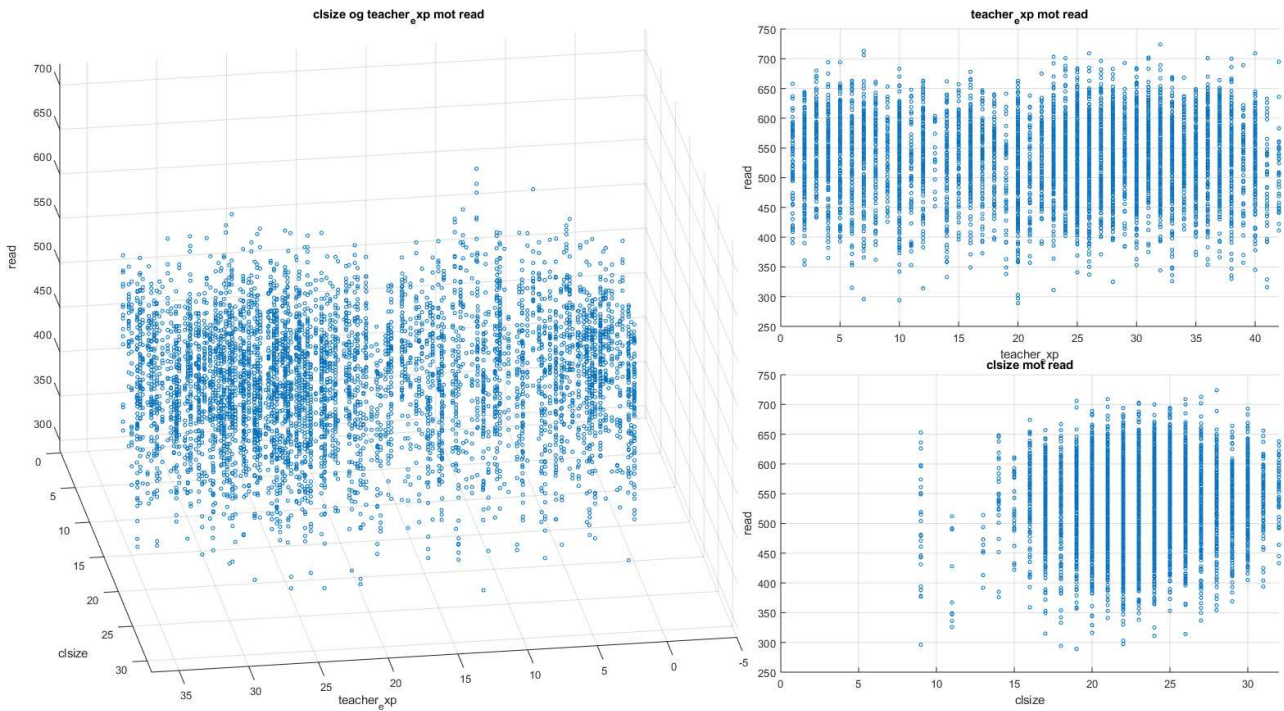




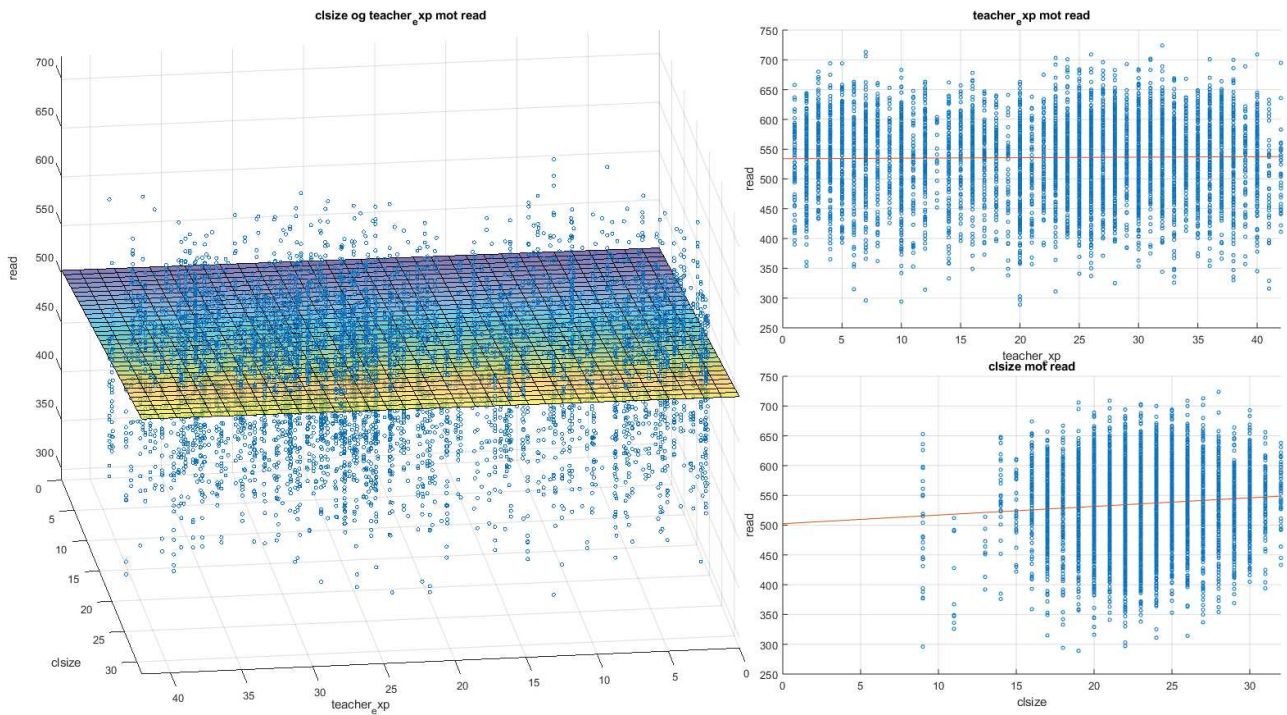
(a) Norge, klassevis, ser på lærerergaring, med MATLABs test2  
 (b) Norge, klassevis, ser på klassestørrelse, med egen test-script

Figur A.12:  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis

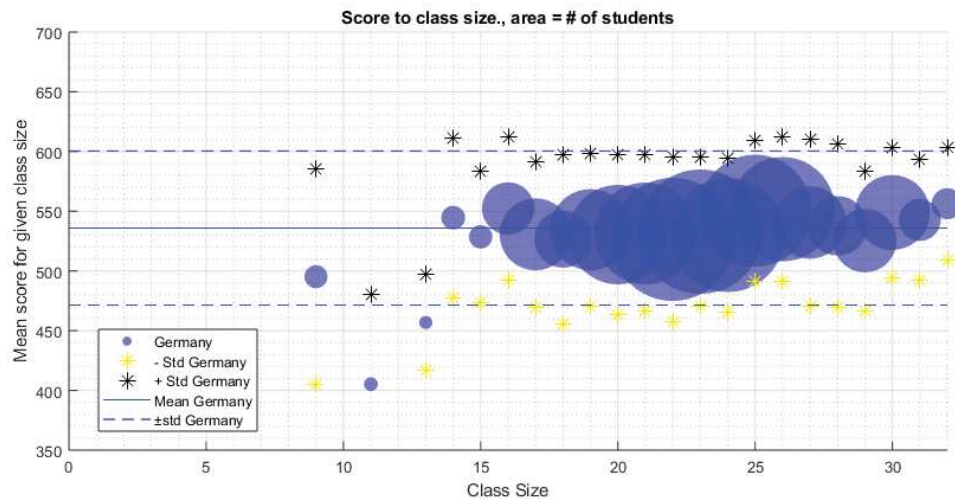
### A.3 Tyskland



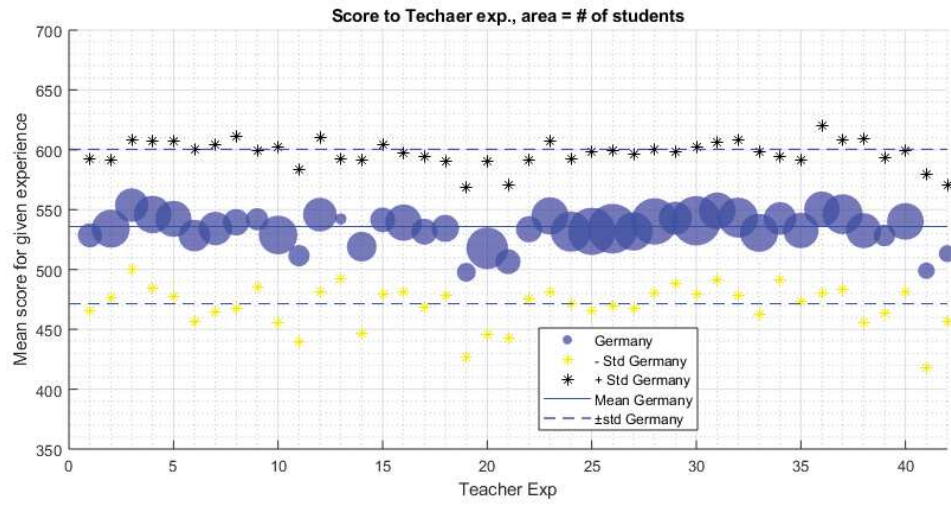
Figur A.13: Tysklands rådata.



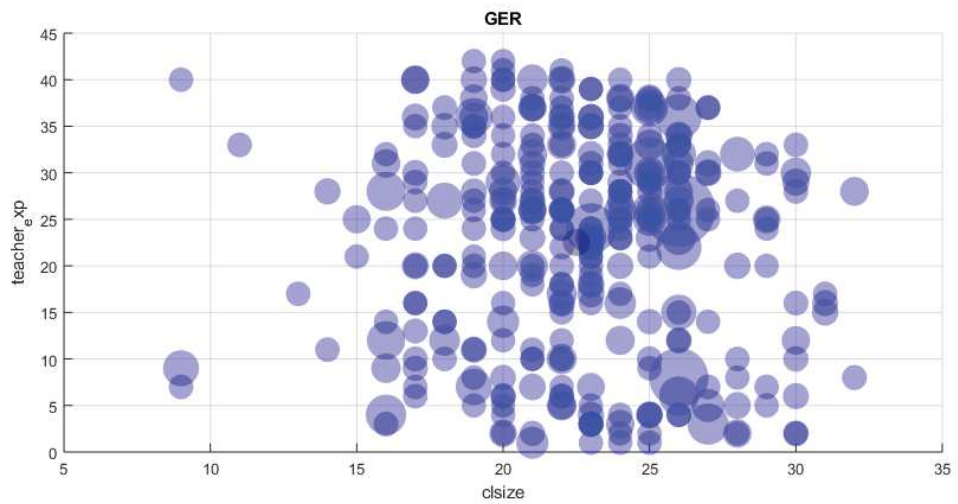
**Figur A.14:** Tyskland. Rådata plottet sammen med regresjons modellen  $read = \beta_0 + \beta_1 teacher\_xp + \beta_2 clsizs$ . NB! Mangler brøkleddet. Til høyre ser vi de partiell-deriverte til hhv. Teacher Experience og class size.



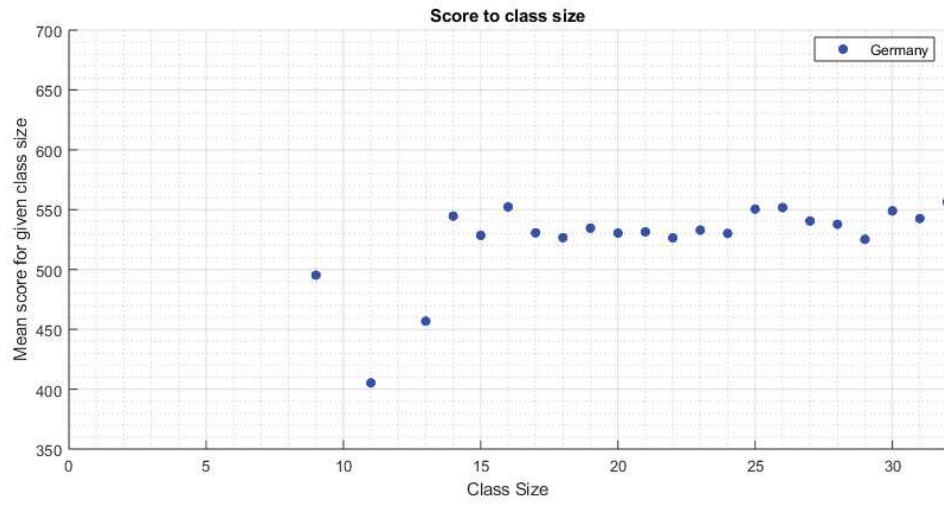
**Figur A.15:** Tyskland, klassestørrelse plottet mot testscoren.



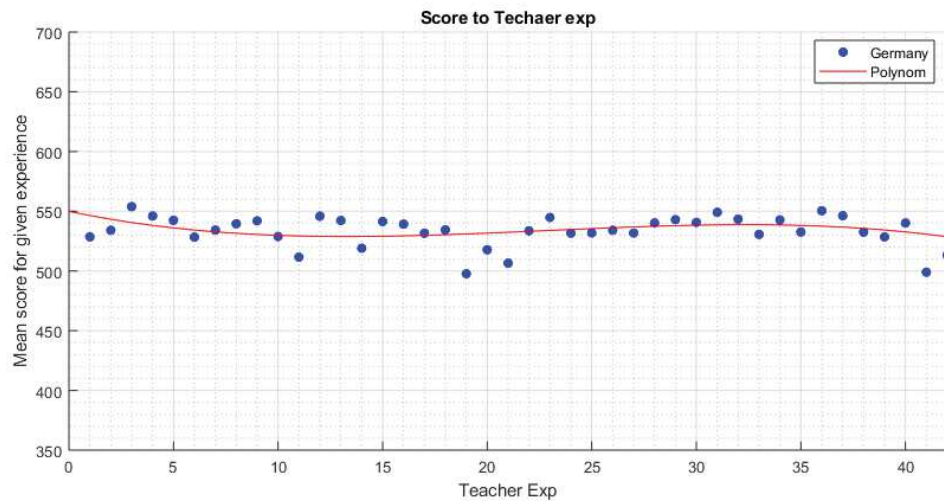
Figur A.16: Tyskland, lærererfaring plottet mot testscoren.



Figur A.17: Norge, plotter klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklenes areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene.



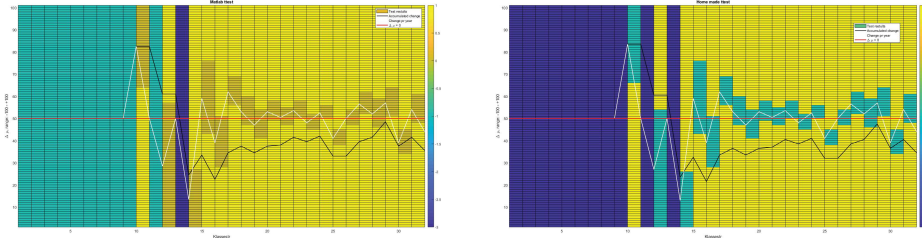
Figur A.18: Tyskland, klassestørrelse plottet mot testscoren.



Figur A.19: Tyskland, lærererfaring plottet mot testscoren.

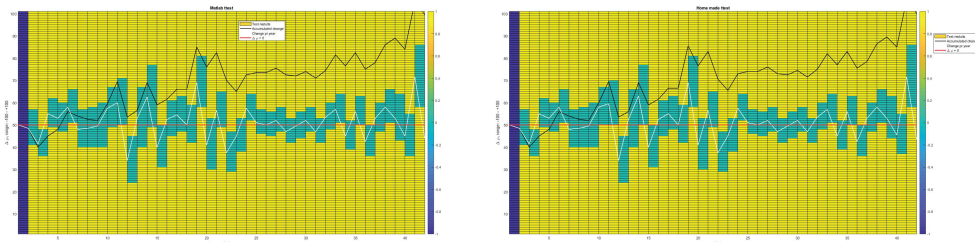
### A.3.1 $H_0$ - Resultater

#### Individuelt



(a) Tyskland, individuell, ser på klassestørrelse, (b) Tyskland, individuell, ser på klassestørrelse, med MATLABs ttest2 med egen ttest-script

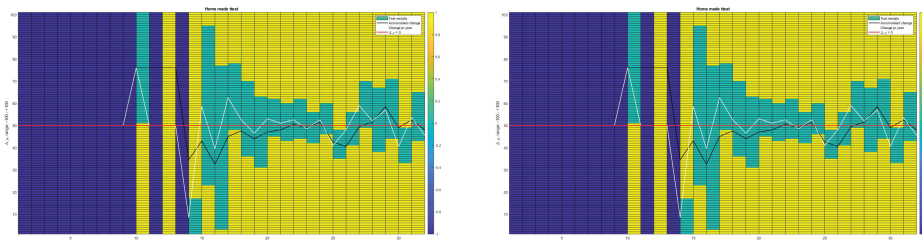
**Figur A.20:**  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis



(a) Tyskland, individuell, ser på lærerergaring, (b) Tyskland, individuell, ser på klassestørrelse, med MATLABs ttest2 med egen ttest-script

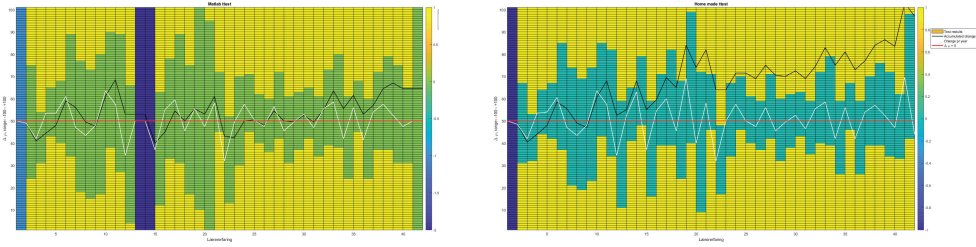
**Figur A.21:**  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis

#### Klassevis



(a) Tyskland, klassevis, ser på klassestørrelse, (b) Tyskland, klasse, ser på klassestørrelse, med MATLABs ttest2 med egen ttest-script

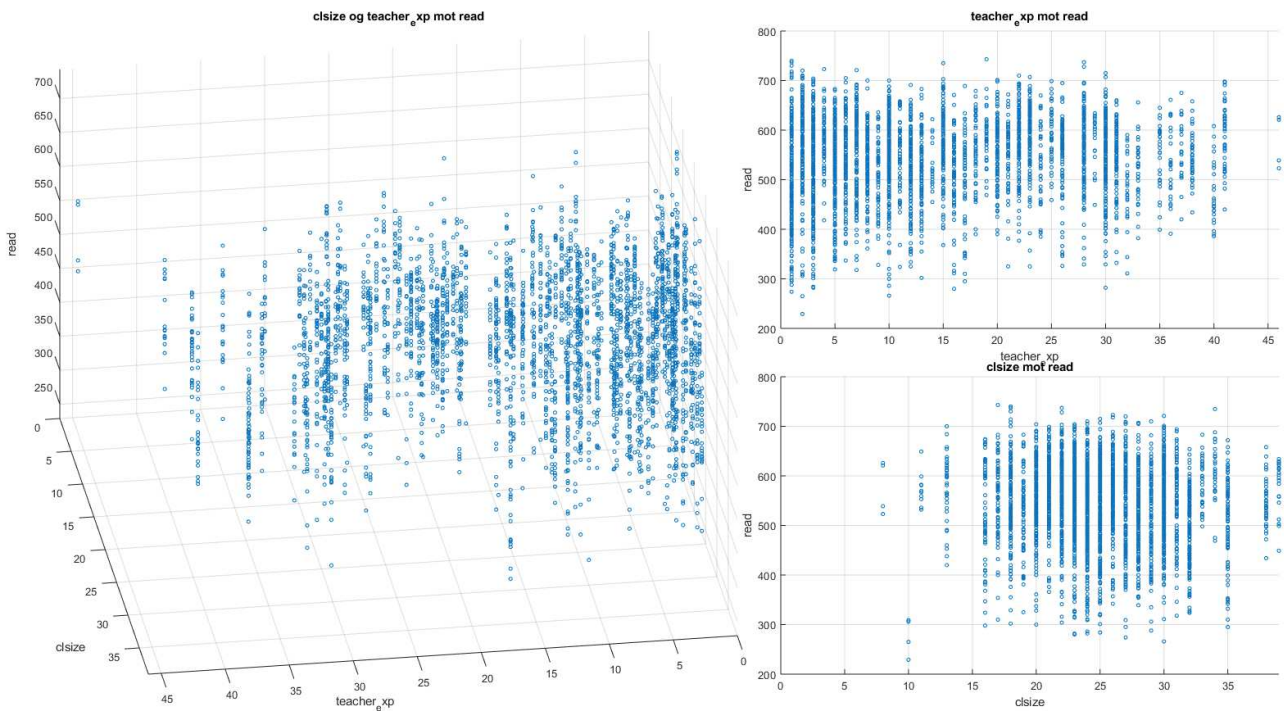
**Figur A.22:**  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis



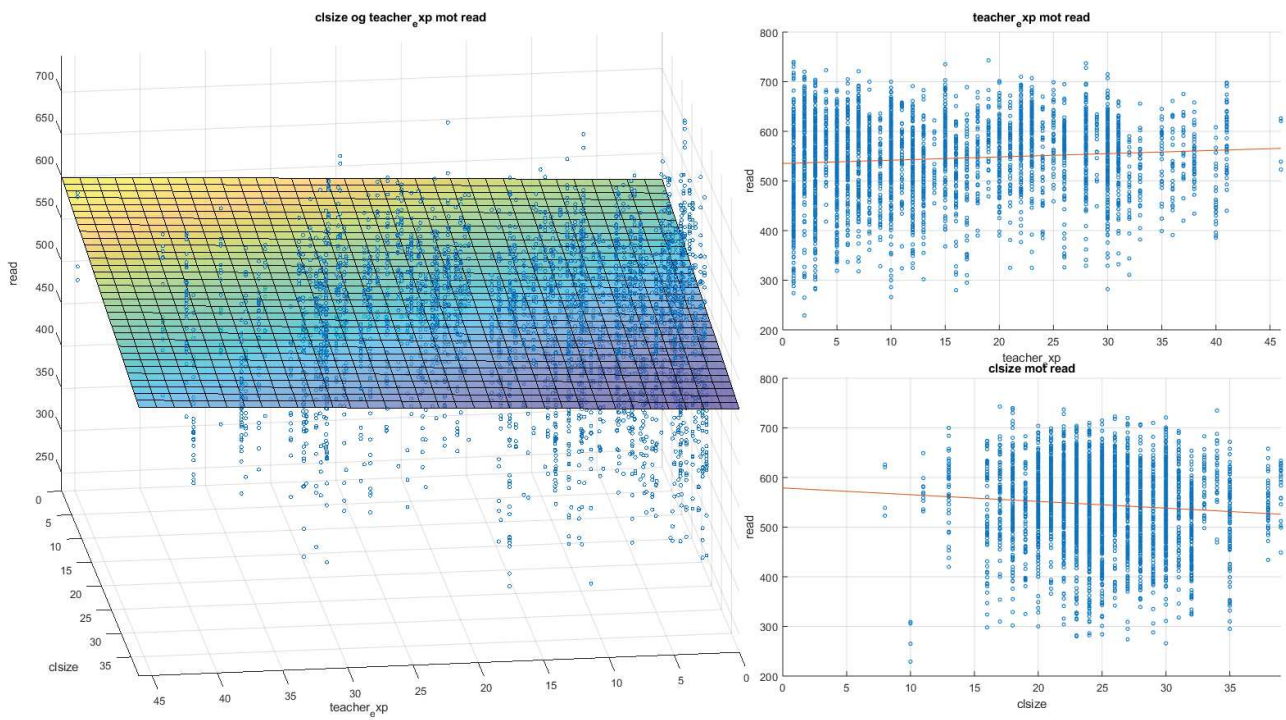
(a) Tyskland, klassevis, ser på lærererfaring, med MATLABs test2 (b) Tyskland, klassevis, ser på klassestørrelse, med egen ttest-script

Figur A.23:  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis

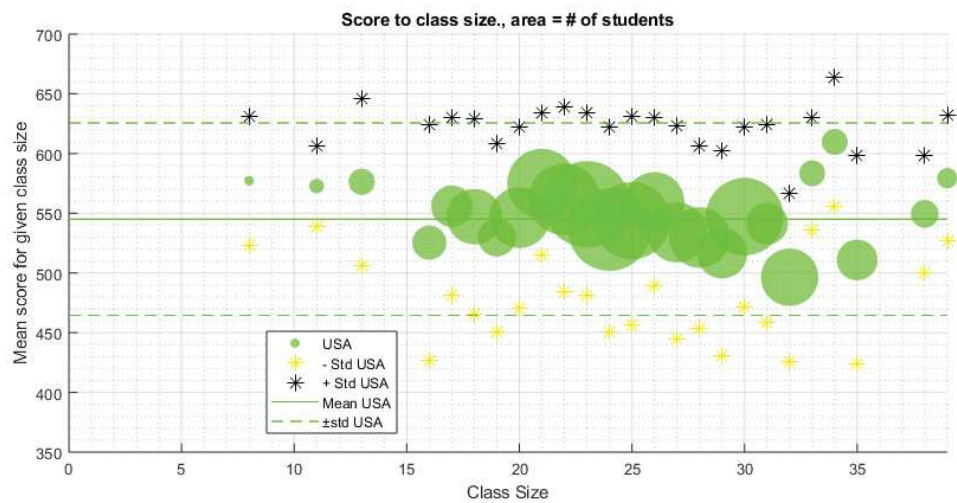
## A.4 USA



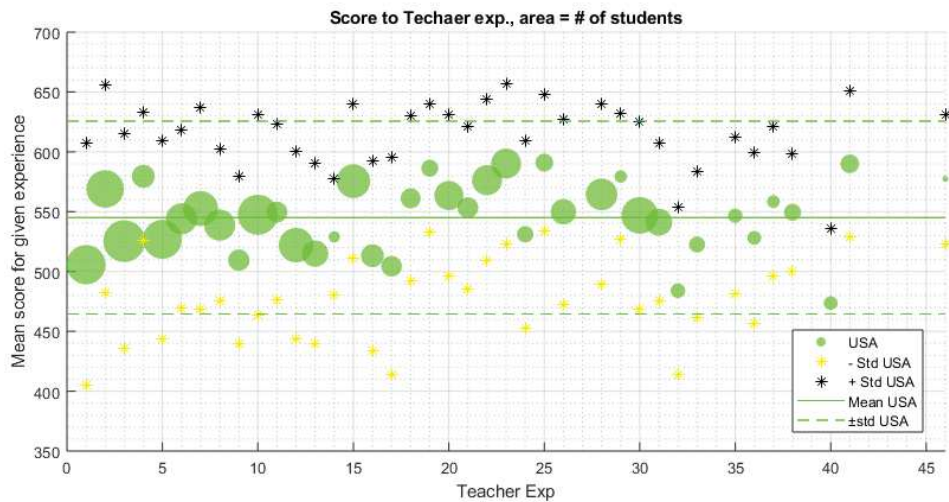
Figur A.24: USAs rådata.



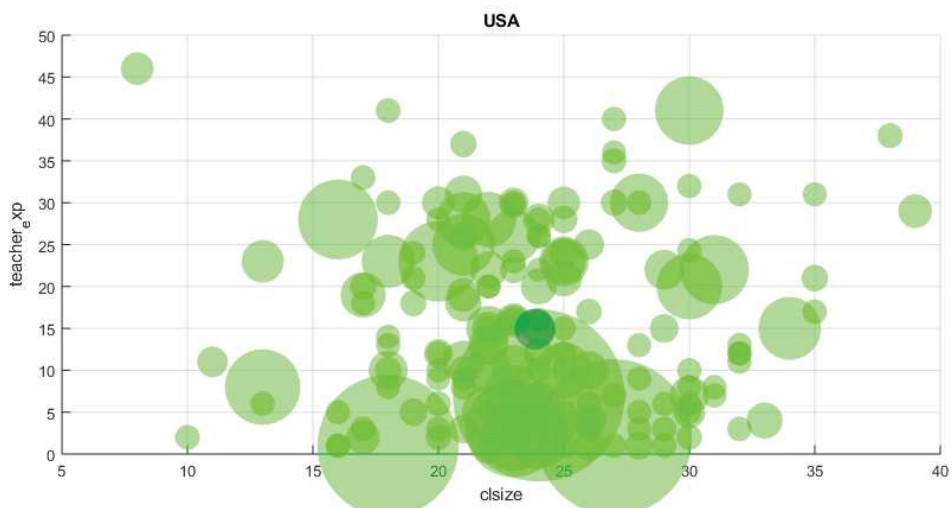
**Figur A.25:** USA. Rådata plottet sammen med regresjons modellen  $read = \beta_0 + \beta_1 \text{teacher\_exp} + \beta_2 \text{cls\_size}$ . NB! Mangler brøkkledet. Til høyre ser vi de partiellderiverte til hhv. Teacher Experience og class size.



**Figur A.26:** USA, klassestørrelse plottet mot testscoren.

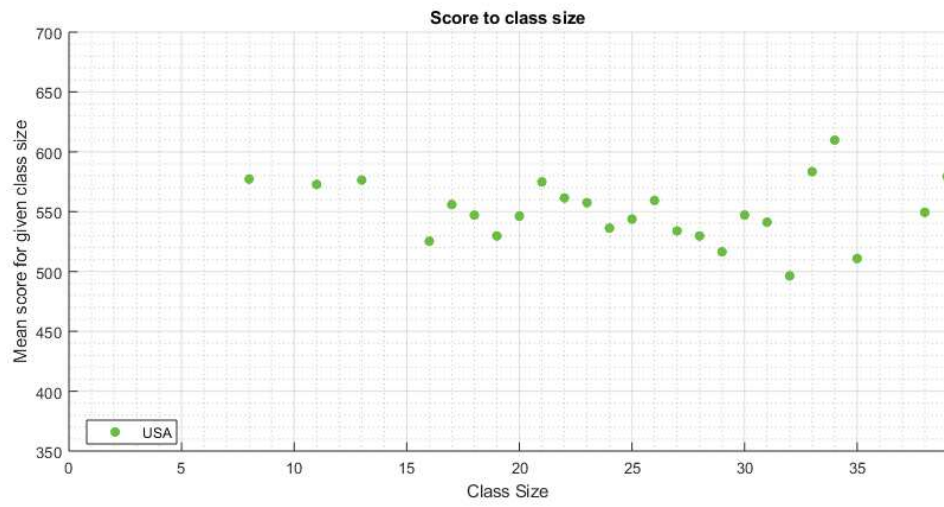


Figur A.27: USA, lærererfaring plottet mot testscoren.

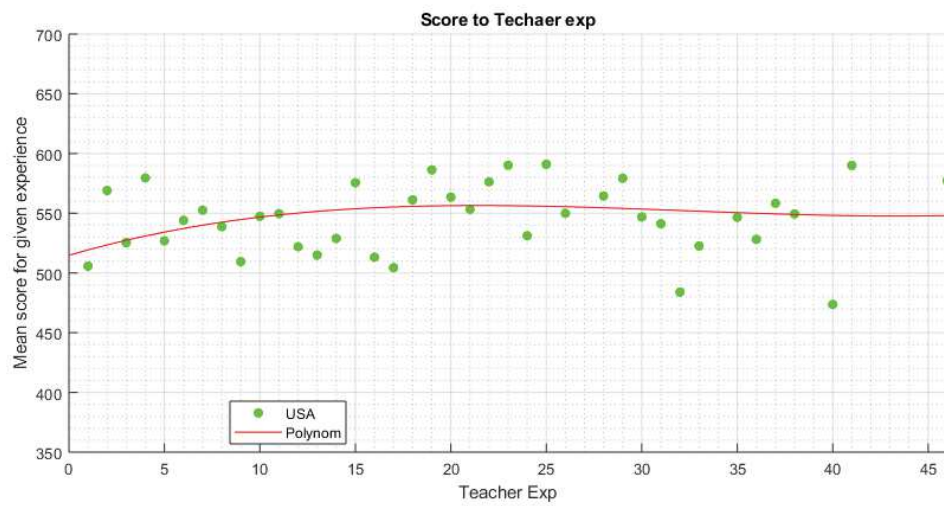


Figur A.28: USA, plottet klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklenes areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene.





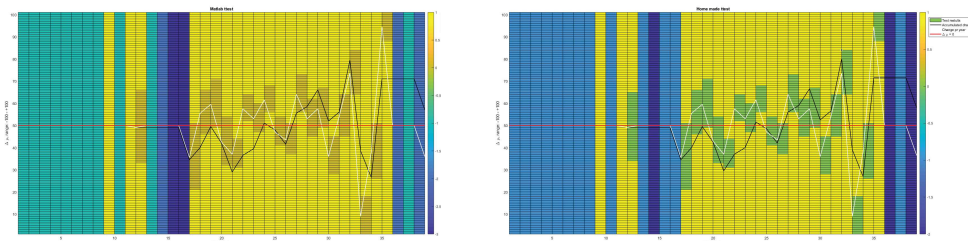
Figur A.29: USA, klassestørrelse plottet mot testscoren.



Figur A.30: Norge, lærererfaring plottet mot testscoren.

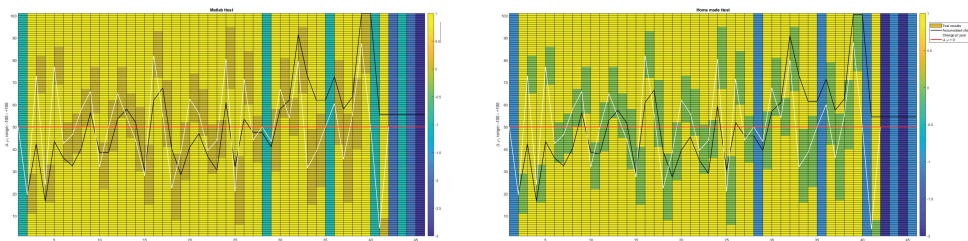
### A.4.1 $H_0$ - Resultater

#### Individuelt



(a) USA, individuell, ser på klassestørrelse, med MATLABs ttest2 (b) USA, individuell, ser på klassestørrelse, med egen ttest-script

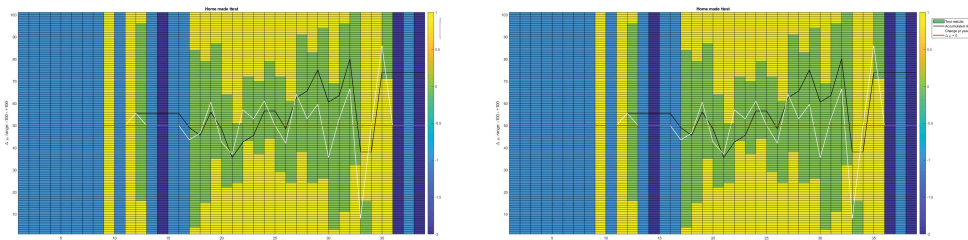
**Figur A.31:**  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis



(a) USA, individuell, ser på lærererfaring, med MATLABs ttest2 (b) USA, individuell, ser på klassestørrelse, med egen ttest-script

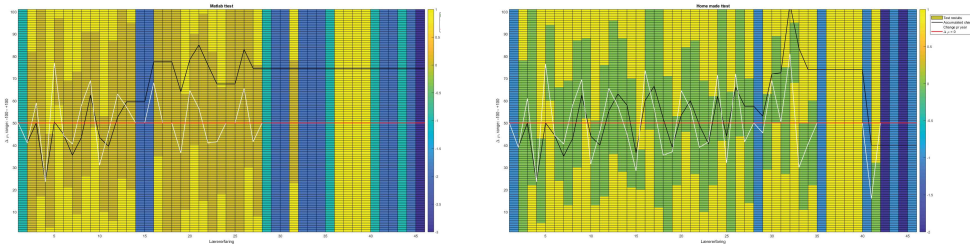
**Figur A.32:**  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis

#### Klassevis



(a) USA, klassevis, ser på klassestørrelse, med MATLABs ttest2 (b) USA, klassevis, ser på klassestørrelse, med egen ttest-script

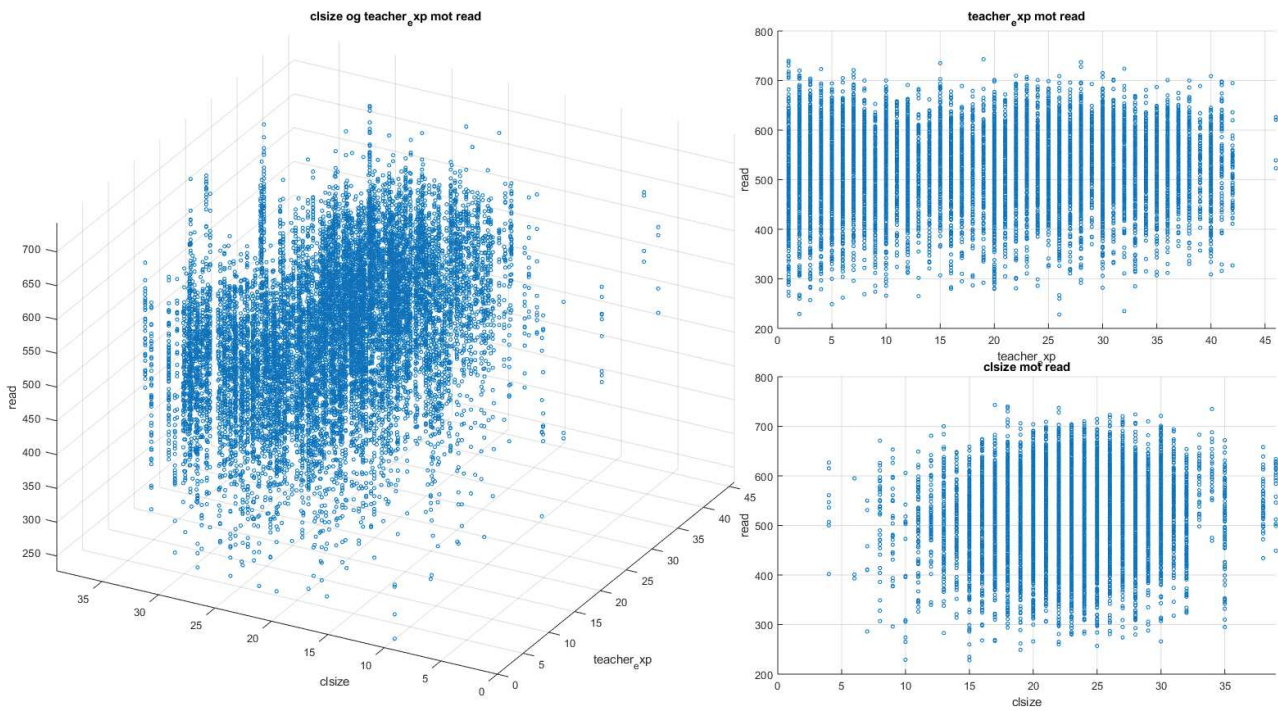
**Figur A.33:**  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis



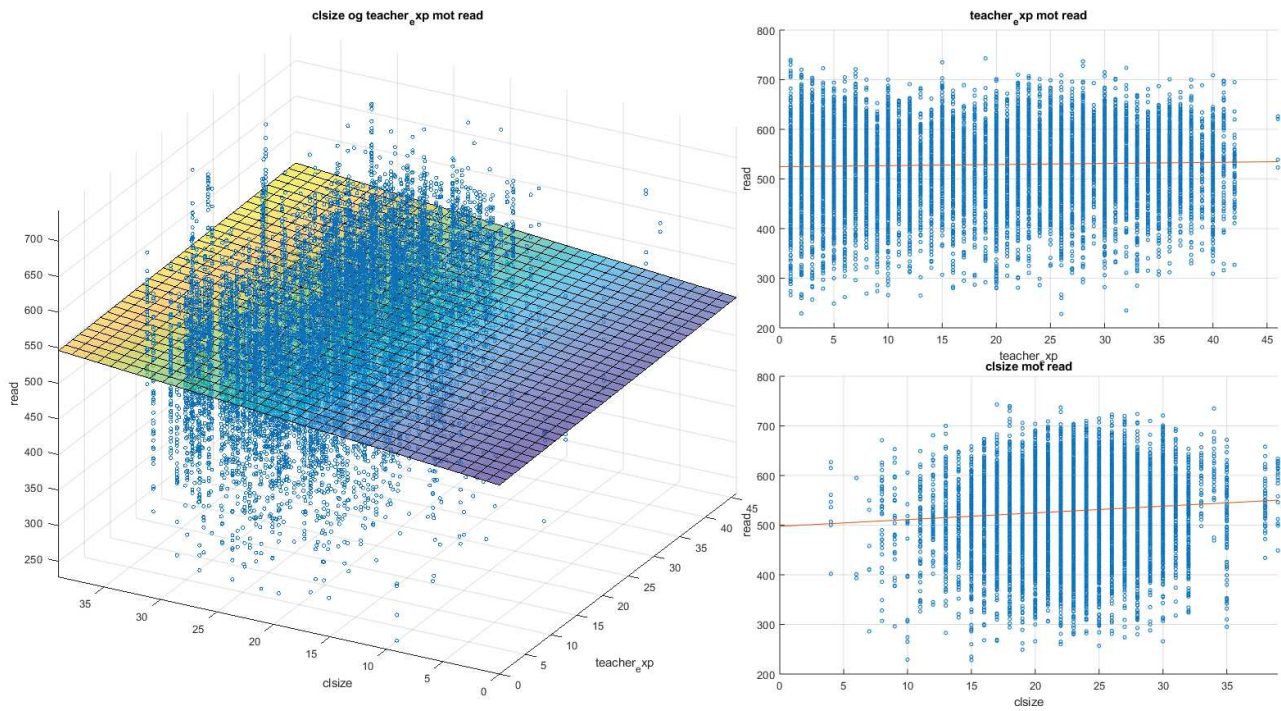
(a) USA, klassevis, ser på lærererfaring, med MATLABs test2  
 (b) USA, klassevis, ser på klassestørrelse, med egen test-script

Figur A.34:  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis

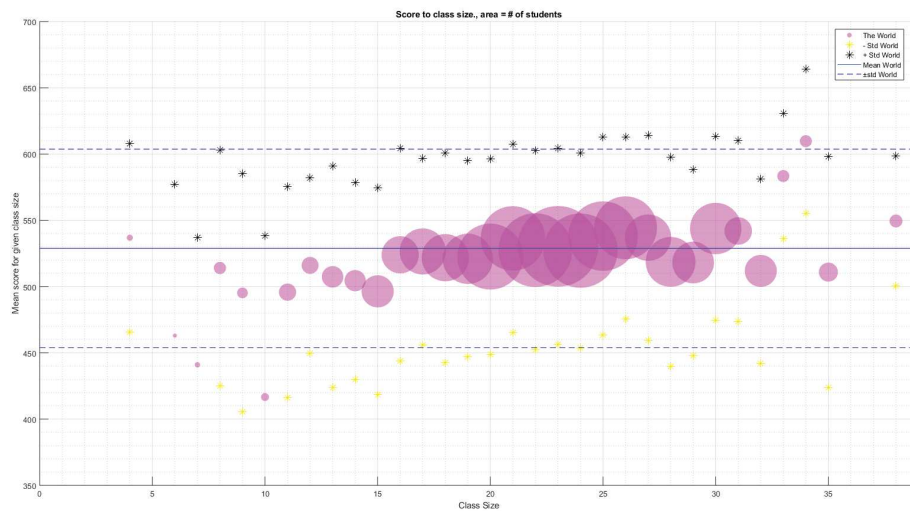
## A.5 Verden



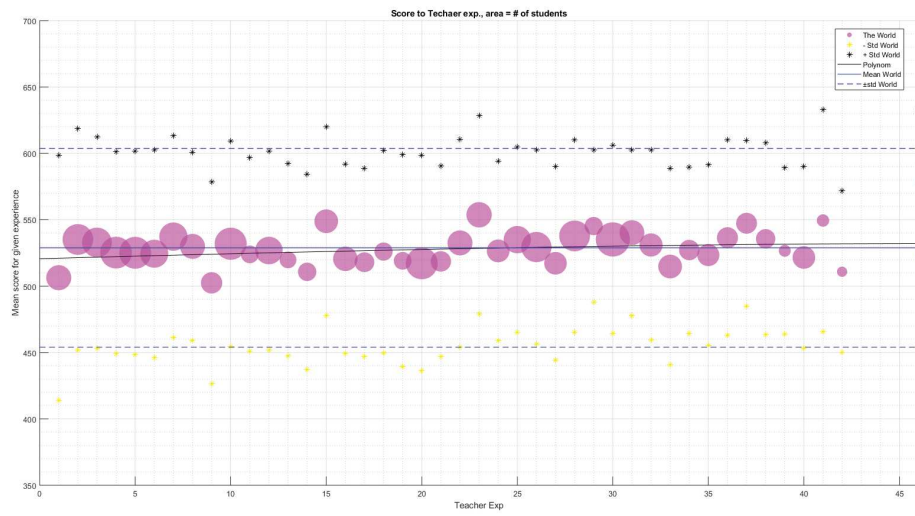
Figur A.35: Verden rådata.



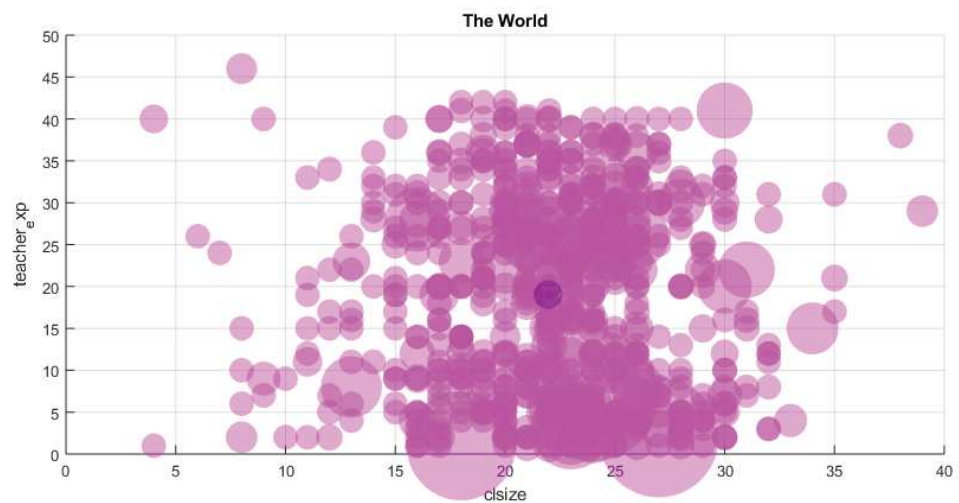
**Figur A.36:** Verden. Rådata plottet sammen med regresjons modellen  $read = \beta_0 + \beta_1 teacher xp + \beta_2 clsizsize$ . NB! Mangler brøkkledet. Til høyre ser vi de partiell-deriverte til hhv. Teacher Experience og class size.



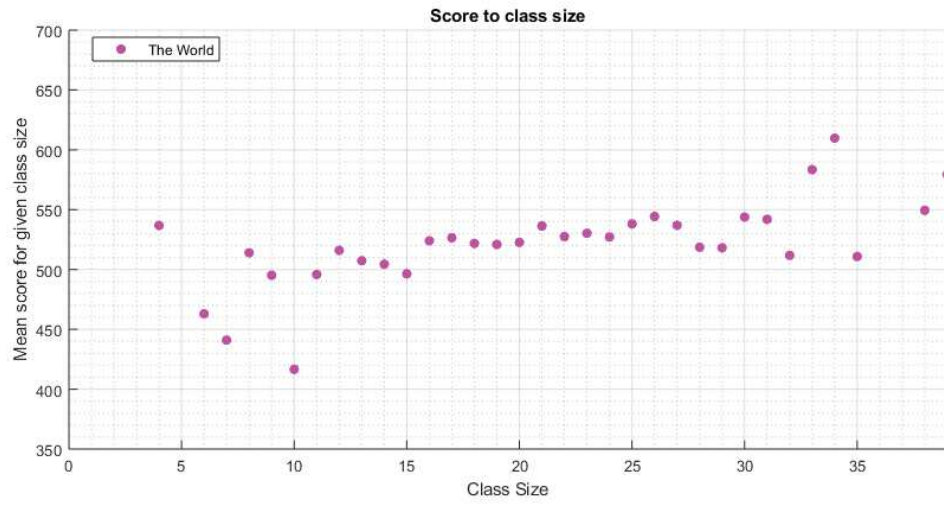
**Figur A.37:** Verden, klassestørrelse plottet mot testscoren.



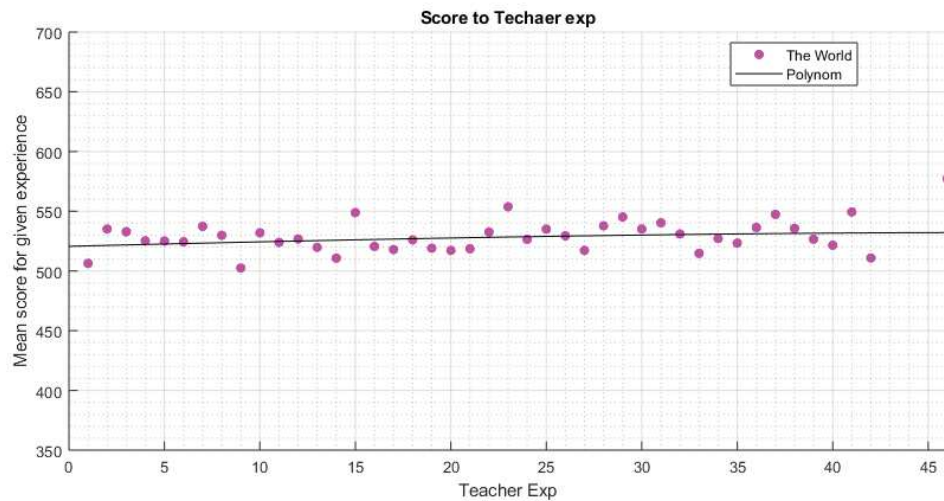
Figur A.38: Verden, lærererfaring plottet mot testscoren.



Figur A.39: Verden, plottet klassevis og viser lærererfaring og klassestørrelse ved hjelp av posisjon. Klassens gjennomsnittscore kommer frem av sirklens areal. Snittet er markert i svakt svart, dette er snitt av alle variablene.



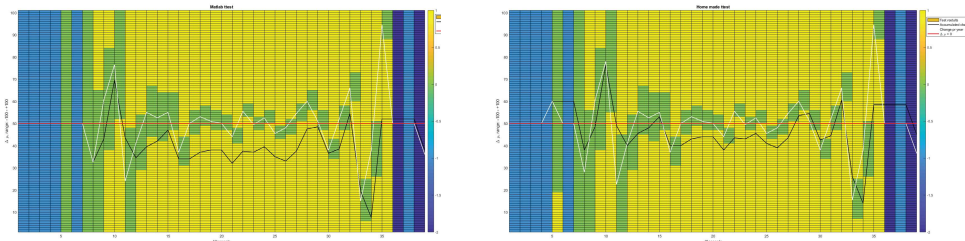
Figur A.40: Verden, klassestørrelse plottet mot testscoren.



Figur A.41: Verden, lærererfaring plottet mot testscoren.

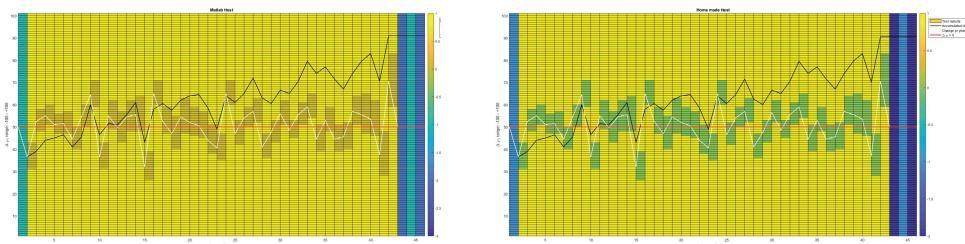
### A.5.1 $H_0$ - Resultater

#### Individuelt



(a) Verden, individuell, ser på klassestørrelse, (b) Verden, individuell, ser på klassestørrelse, med MATLABs ttest2 med egen ttest-script

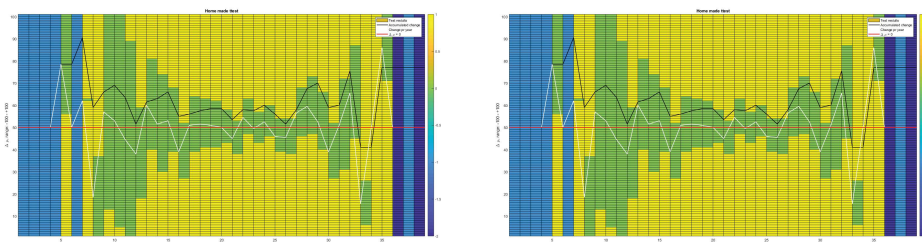
**Figur A.42:**  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis



(a) Verden, individuell, ser på lærerergaring, med MATLABs ttest2 (b) Verden, individuell, ser på klassestørrelse, med egen ttest-script

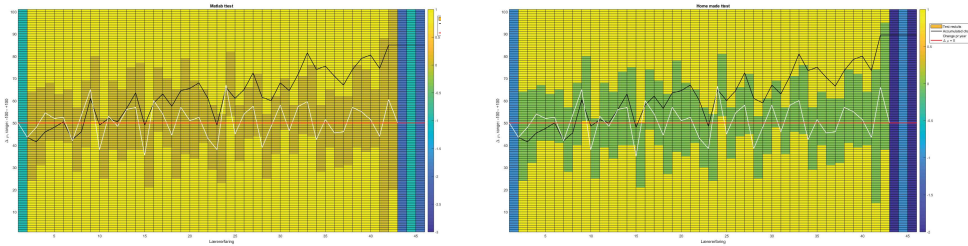
**Figur A.43:**  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, individueltvis

#### Klassevis



(a) Verden, klassevis, ser på klassestørrelse, med MATLABs ttest2 (b) Verden, klassevis, ser på klassestørrelse, med egen ttest-script

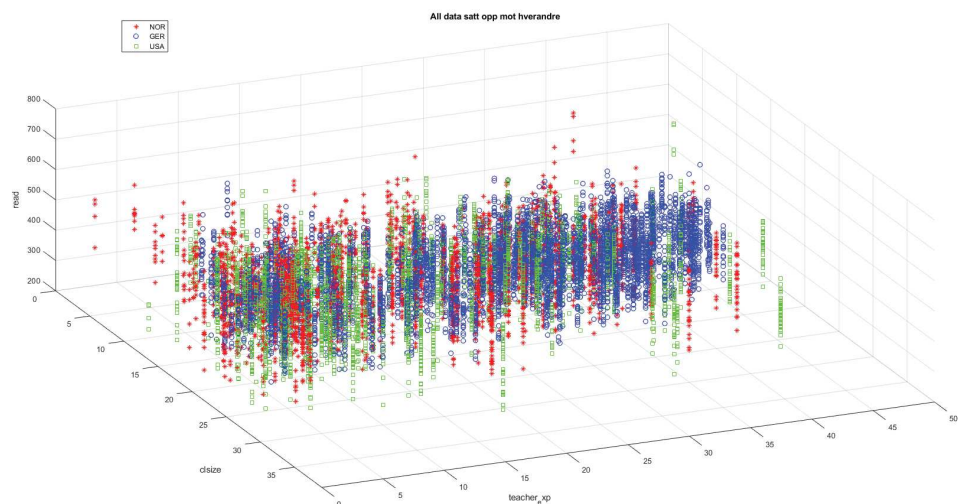
**Figur A.44:**  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis



(a) USA, klassevis, ser på lærererfaring, med MATLABs test2  
 (b) Verden, klassevis, ser på klassestørrelse, med egen ttest-script

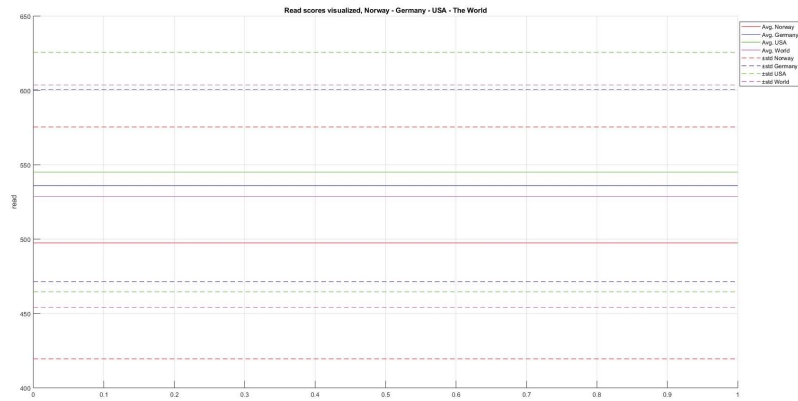
**Figur A.45:**  $H_0$ -Testresultat, ser på endring i klassestørrelse, klassevis

## A.6 Norge, Tyskland og USA i samme graf(er)

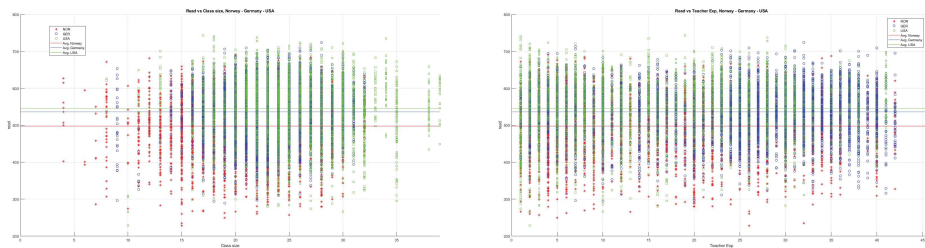


**Figur A.46:** Kombinert, all data samlet



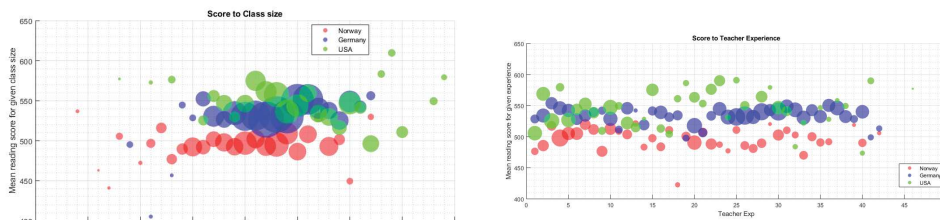


**Figur A.47:** Kombinert, gjennomsnitt og standardavvik, kan se hvor (vår lille) verden plasserer seg i forhold til resten.



**(a)** Kombinert, lesescore mot klassestørrelse      **(b)** Kombinert, lesescore mot lærererfaring.

**Figur A.48:** Landene kombinert.



**(a)** Kombinert, lesescore mot klassestørrelse. Areal = populasjon. **(b)** Kombinert, lesescore mot lærererfaring. Areal = populasjon.

**Figur A.49:** Landene kombinert.



## Vedlegg B

### $H_0$ – Forklart

Figuren viser et fargekart over testresultatene som er kjørt. Vi tar for oss aksene:

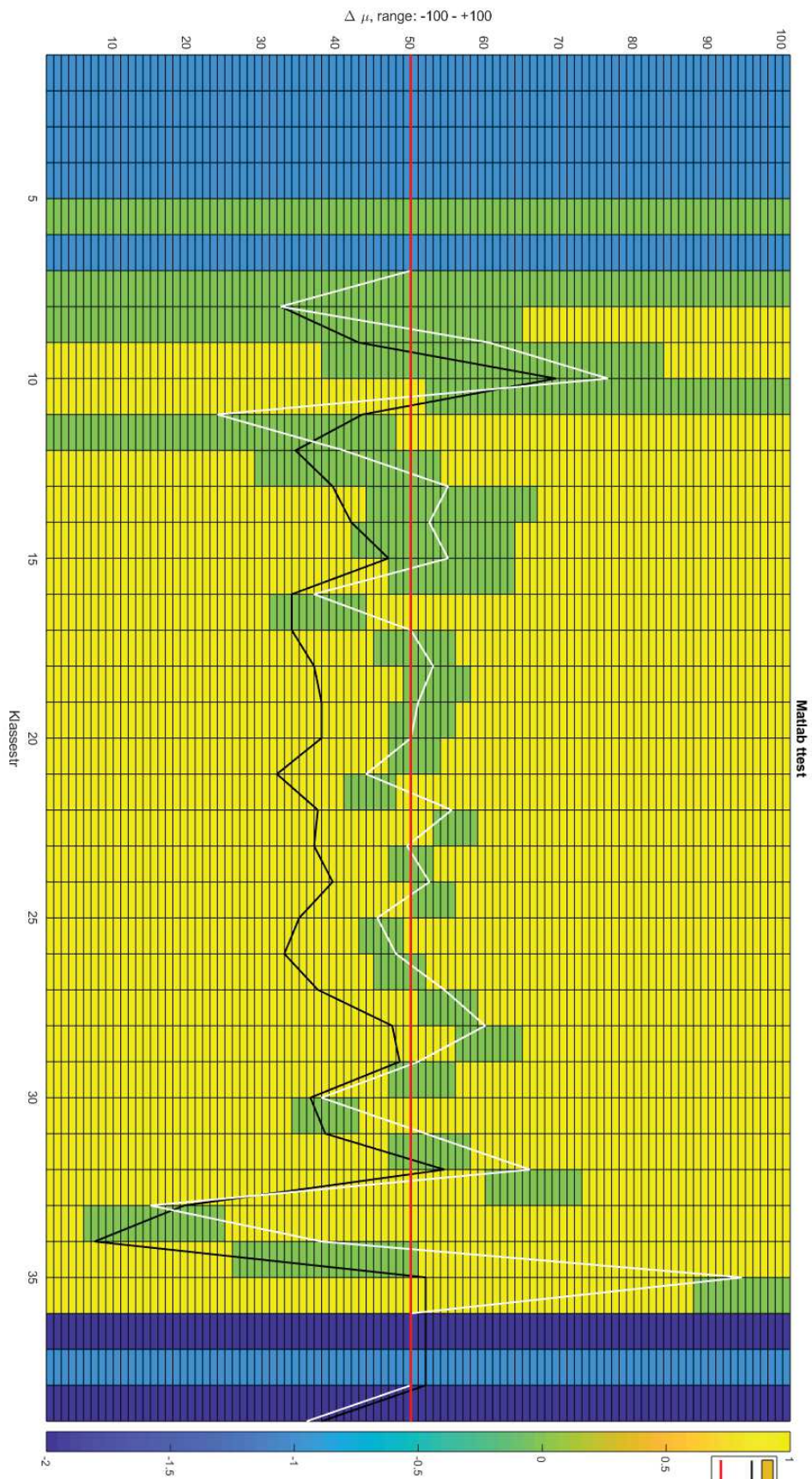
- X-aksen: viser klassestørrelse/lærer erfaring som heltall.
- Y-aksen: koden er satt opp slik at  $\mu_1 - \mu_2 = \Delta\mu$ , der  $\Delta\mu \in [-100, 100]$  med en steglengde 2. Dvs  $\Delta\mu = 0$  ved  $Y = 50$ .

Fargekodene er varierende fra graf til graf, dette skyldes ulike scenarioer som gir oss forskjellige svar, dette kan være en tom test, altså ingen data, det kan være deling på null etc. Hovedtrekket er for såvidt greit: lave tall blir kaldere, større tall blir varmere. De ulike tallene betyr da:

- -2: Tom test eller deling på 0 - altså  $n = 1$  for en gitt klassestr eller class size.
- -1: Ingen test foretatt.
- 0: Forkaster ikke null-hypotesen. Der altså  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta\mu$
- 1: Forkaster null-hypotesen.

Programmet sammenlikner  $\mu_p$  og  $\mu_{p+1}$  og plasserer resultatet ved  $x = p$ . Tolkningen av figuren(e) blir derfor: *Ved den gitte klassestørrelsen, eller lærer erfaringen, hvor mye må man endre forventingsverdien til  $X_2$ , altså  $\mu_2$ , før det er grunnlag for å si at  $\mu_p$  og  $\mu_{p+1}$  ikke har samme forventingsverdi.* Området hvor du har 0 i verdi, er området hvor man kan si at forventingsverdien er den samme. Arealet som dekkes av 0-verdien kan sees på som området hvor forventningsverdien/utvalget er overlappende og/eller kommer fra samme populasjon. Et stort areal tyder på mye overlapp, eller et lavt testantall som tillater "svake" resultater. Hvis en får 0 **over**  $Y=15$ , betyr det at det er **ikke** hensiktsmessig å gå fram til  $p+1$ . Får en 0 **under**  $Y=15$  derimot, **er** det hensiktsmessig å øke med én enhet. Den hvite streken viser endringen fra enhet til enhet, og går mot midten av 0-søylen. Den svarte er akkumulert endring, altså summen av de endringene som har vært, dette lar oss se om de små bidragene annullerer de store sprangene.

NB! Som nevnt i oppgaven er det svakheter rundt disse testen, dermed blir disse kun rådgivende og en må være litt kritisk til noen resultater - ihvertfall når man ser der det ofte er et lite antall i populasjonen.



Figur B.1: Nærbilde av grafen/tabellen, her ved figur A.42a. Rød strek indikere  $\Delta\mu = 0$ .

**Vedlegg C**

**H0-tabell**

1: Accept H1.

0: Accept H0.

-----

Both: H0:  $\mu_1 = \mu_2$ .

Left: H1:  $\mu_1 < \mu_2$ .

Right: H1:  $\mu_1 > \mu_2$

Value in cell = P-value, if not otherwise stated, value = 1

1	H1
0	H0

		Mu_2	MATLAB - Both			
Mu_1			World	Norway	Germany	USA
Read	World					
	Norway		1,58E-92			
	Germany		6,00E-12	5,19E-125		
	USA		4,24E-27	1,24E-130	6,55E-09	
Experience	World					
	Norway		5,70E-28			
	Germany		8,35E-85	1,79E-125		
	USA		2,68E-78	4,05E-09	9,45E-211	
Class size	World					
	Norway		3,54E-112			
	Germany		0,2665	1,72E-112		
	USA		3,73E-88	2,45E-234	1,61E-77	

		Mu_2	MATLAB - Left			
Mu_1			World	Norway	Germany	USA
Read	World					
	Norway		7,90E-93			
	Germany					
	USA					
Experience	World					
	Norway		2,85E-28			
	Germany					
	USA		1,34E-78	2,02E-09	4,72E-211	
Class size	World					
	Norway		1,77E-112			
	Germany		0,8668			
	USA					

	Mu_2	MATLAB - Right			
Mu_1		World	Norway	Germany	USA
Read	World				
	Norway				
	Germany	3,00E-12	2,59E-125		
	USA	2,12E-27	6,21E-131	3,27E-09	
Experience	World				
	Norway				
	Germany	4,17E-85	8,97E-126		
	USA				
Class size	World				
	Norway				
	Germany	0,1332	8,62E-113		
	USA	1,87E-88	1,22E-234	8,05E-78	

		Home- Regular			
		World	Norway	Germany	USA
Read	World				
	Norway	1			
	Germany	1	1		
	USA	1	1	1	
Experience	World				
	Norway	1			
	Germany	1	1		
	USA	1	1	1	
Class size	World				
	Norway	1			
	Germany	0	1		
	USA	1	1	1	

		Home - MAD			
		World	Norway	Germany	USA
Read	World				
	Norway	1			
	Germany	1	1		
	USA	1	1	1	
Experience	World				
	Norway	1			
	Germany	1	1		
	USA	1	1	1	
Class size	World				
	Norway	1			
	Germany	0	1		
	USA	1	1	1	

