Tora Irene Moe

CAS - bruke for å lære, eller lære å bruke?

En kvalitativ studie av instrumentell skapelse hvor elever i videregående skole benytter CAS i arbeid med matematikk

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

Veileder: Frode Rønning

Juni 2019

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Da var det gjort, og masteroppgaven er levert. Oppgaven markerer slutten på studietiden, og jeg kan nå kalle meg for lektor i realfag. Arbeidet med masteroppgaven har vært lærerikt, spennende og krevende, og det er nå på sin plass å takke alle som har vært avgjørende i prosessen.

En stor takk rettes til Frode Rønning som med en stødig hånd har vist veien fra start til slutt. Du har en vanvittig fagkompetanse, er alltid i godt humør, og har gitt gode råd og konstruktive tilbakemeldinger gjennom hele arbeidsprosessen. Jeg unner alle en veileder av ditt kaliber.

Kjære mamma og pappa, takk for all støtte og oppmuntring, og for at dere alltid har troen på meg. Jeg hadde ikke klart å fullføre verken studier eller masteroppgaven uten å ha dere i ryggen. En spesiell takk til mamma som har vært en didaktisk sparringspartner i studietiden, og som inspirerte til masteroppgavens tema. Takk til lillesøster Kjersti for moralsk støtte, påspanderte middager, tips og triks for oppgaveskriving, korrekturlesing – listen er uendelig lang. Videre hadde ikke studietiden på NTNU vært den samme uten mine medstudenter; Elisabeth Børset, Marie Lajord, Ingrid Bekken Snøan, Ellen Øksendal og Jenny Kvamme. Dere har gjort fem år på og utenfor Gløshaugen minnerik og dere er grunnen til at jeg kommer til å savne studietiden. En stor takk rettes spesielt til Elisabeth Børset som har vært viktig for å holde humøret oppe i det daglige. I tillegg vil jeg takke venninnene hjemmefra som alltid venter på meg, og som minner meg på hva som faktisk er viktig her i livet.

Den siste og største takken går til læreren som slapp meg inn i klasserommet og til elevene som deltok i studien. Uten dere hadde oppgaven aldri blitt noe av. Tusen hjertelig takk!

Trondheim, juni 2019

Tora Irene Moe

Sammendrag

Studien har hatt til hensikt å følge utviklingen av en prosess, kalt *instrumentell skapelse,* hvor R1-elever benyttet CAS i GeoGebra i arbeid med vektorer.[1] Studien skulle besvare spørsmålet: *hvilke hindre kan identifiseres på veien til instrumentell skapelse?,* og skulle *beskrive elevenes utvikling i bruk av CAS ved arbeid med matematikk.* Studien er en kvalitativ etnografisk undersøkelse som ble gjennomført på en stor videregående skole i en norsk by.

Datamateriale ble generert ved bruk av video- og lydopptak. I en periode over to uker, ble én lærer filmet da han underviste i bruken av CAS i arbeid med vektorer. I tillegg ble fire elever filmet da de parvis arbeidet med CAS for å løse matematikkoppgaver knyttet til vektorer. Elevene som deltok i elevarbeidet ble også intervjuet med hensikt å få innblikk i elevenes egne tanker knyttet til interesse og motivasjon for å benytte seg av CAS ved løsning av matematikkoppgaver, i tillegg til noen spørsmål knyttet til hendelser fra elevarbeidet. Datamaterialet ble analysert ved hjelp av kategorier som ble utviklet med utgangspunkt i åpen koding.

Funn fra elevarbeidet identifiserte flere hindre. Noen hindre ble identifisert og koblet til utfordringer knyttet til *registerskifte,* altså utfordringer knyttet til overgangen fra å arbeide med matematikk på papir til å arbeide med matematikk i CAS. Andre hindre som ble identifisert ble knyttet til svakheter ved selve programvaren, og tilsier at kvaliteten av CAS ikke er god nok til å benyttes i videregående skole. Disse svakhetene beskrives også av elevene i intervjuet å være årsaken til at de på generelt grunnlag ikke ønsker å benytte seg av CAS. Elevene viste en utvikling av instrumentell skapelse da de kom over hindrene knyttet til registerskifte, og i de tilfellene hvor elevene håndterte CAS sine svakheter. Denne utviklingen viste seg imidlertid ikke å være realistisk, fordi elevene ble påvirket av forskningsdeltakelsen.

[1] R1 er et teoretisk rettet matematikkurs for realfagselever som tilbys på Vg 2.

Abstract

The study aims to follow the development of a process, called *instrumental genesis,* in the events students were using a technological tool, CAS in GeoGebra, to solve mathematical problems related to vectors. The students subjecting to this study were taking the mathematical course R1.[2] The study will investigate *what obstacles can be identified on the road to instrumental genesis,* and provide a *description of the students development of instrumental genesis when using CAS for mathematical work.* The study has a qualitative ethnographic design, and was conducted at a large upper secondary school in a Norwegian city.

The data was collected by use of video- and audio recordings. During a two-week period, one teacher was videotaped during lessons teaching CAS when working with vectors. Additionally, four students were videotaped while working in pair to solve mathematical problems, related to vectors, with the use of CAS. The same students were later interviewed with the intention to get an idea about their interest and motivation for using CAS to do mathematical work, alongside some questions dealing with previously conducted work. The generated data was analyzed using categories developed by the means of an open coding.

Findings from the students´ work revealed several obstacles. Firstly, some obstacles were identified and linked to challenges revolving a change of *register* – challenges caused by a shift from doing mathematical work on paper to doing mathematical work in CAS. Secondly, obstacles were also related to shortcomings of CAS itself, and the standard may be considered too low for use in upper secondary school level. The students also described the shortcomings as the main reason they choose not to use CAS in their mathematical work. Students´ development of instrumental genesis was visible when the overcame obstacles and handled some of the tools shortcomings. However, this development was not considered to be realistic as the students were affected by participation.

[2] R1 is a theoretical mathematics course offered to science students in 12th grade in Norwegian upper secondary schools.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for studien

Denne oppgaven handler om bruk av digitale hjelpemidler i matematikk i videregående skole. Matematikkelever, så vel som lærere, blir stadig pålagt å bruke nye digitale verktøy i matematikk. Ved innføring av digitale hjelpemidler i skolen oppstår det flere spørsmål: Kan man forvente at et verktøy umiddelbart blir nyttig og verdifull for både lærere og elever? Vil det være en automatikk i at elever klarer å benytte verktøyet på en produktiv og hensiktsmessig måte? Eller at elevene uten videre klarer å benytte kjente verktøy på nye bruksområder? Det er mange aktuelle problemstillinger å forske på.

I denne oppgaven tar jeg utgangspunkt i elevers arbeid med å lære å bruke et verktøy elevene kjenner til fra før, CAS i GeoGebra, på et nytt matematisk område nemlig vektorer. CAS (Computer Algebra Systems) er en samlebetegnelse på matematiske programvarer som har evnen til å regne med symboler i tillegg til tall. Bruk av CAS er obligatorisk ved eksamener i matematikkursene T, S1, S2, R1 og R2 på videregående skole, og det er derfor nødvendig at elever lærer å bruke CAS i arbeid med ulike matematiske områder. Säljö (2003) tar utgangspunkt et sosiokulturelt perspektiv når han omtaler læring og bruk av verktøy, også kalt *artefakter*, i kulturer. Et sentralt interesseområde innenfor sosiokulturell læringsteori er hvordan individer og grupper tilegner seg og utnytter fysiske og intellektuelle ressurser.

Det er gjennomført flere internasjonale studier relatert til studenter og lærere som benytter seg av andre CAS-verktøy, som for eksempel Derive eller Macsyma (Atkins, Creegan & Sloan, 1995; Mitic & Thomas, 1994; Thomas & Rickhuss, 1992; Wain, 1993). Noen av disse studiene ser blant annet på utfordringer knyttet til bruken av et CAS, mens andre ser nærmere på elevers læringsutbytte. Studiene får mer oppmerksomhet i teorikapitlet. Derimot har jeg ikke funnet forskning på bruken av CAS i GeoGebra i videregående skole, noe som i seg selv gir motivasjon for å gjennomføre denne masterstudien. Denne studien bygger på et kvalitativt etnografisk forskningsdesign som tar sikte på å undersøke prosessen hvor elever lærer å bruke CAS i tilknytning til et matematisk område som er nytt for dem. Utvalget som studeres tar et matematikkurs for realfagselever (R1) på Vg2, og vil over en periode på to uker observeres og intervjues.

I denne oppgaven er det flere sentrale begrep som innledningsvis kort må gjøres rede for. Begrepet *instrumentell skapelse* ligger i masterstudiens kjerne, og referer til en prosess hvor et *artefakt* utvikles til et *instrument* (Drijvers & Gravemeijer, 2005; Trouche, 2005). Prosessen er noe kompleks og forklares ytterligere i oppgavens teorikapittel, men kort forklart handler det om at brukeren av artefaktet må utvikle *instrumenterte handlingsskjema* for å kunne benytte artefaktet på en hensiktsmessig og produktiv måte. Instrumenterte handlingsskjema består av mindre teknologiske ferdigheter i tilknytning til artefaktet som må benyttes sammen med matematisk kunnskap med den hensikt å løse oppgaver. *Instrumenterte handlingsskjema* kombinert med et artefakt, danner et *instrument*. Instrumentell skapelse forklarer kompleksiteten bak det å lære å benytte artefakter, fornuftig og produktivt.

1.2 Formål og problemstilling

Studien har til hensikt å følge utviklingen av *instrumentell skapelse* hvor R1-elever benytter CAS i arbeid med vektorer. I oppgaven vil jeg først ta sikte på å besvare følgende spørsmål: *Hvilke hindre kan identifiseres på veien til instrumentell skapelse?* Deretter vil jeg *beskrive elevenes utvikling i bruk av CAS ved arbeid med matematikk.*

1.3 Oppgavens oppbygging

Oppgaven er delt inn i seks kapittel. I kapittel 2 vil jeg kort presentere digitale hjelpemidler sin funksjon i skolematematikken. Videre vil det gis en nærmere beskrivelse av det digitale hjelpemidlet, CAS, som danner grunnlaget for studien. I oppgavens kapittel 3 presenteres to teoretiske rammeverk som senere benyttes for analyse av det genererte datamaterialet. Det første rammeverket gjør rede for sentrale begrep vedrørende instrumentell skapelse, og disse begrepene legges til grunn for å *beskrive elevenes utvikling i bruk av artefaktet*. Det andre rammeverket vil benyttes for å kunne nærmere kunne besvare problemstillingen: *Hvilke hindre kan identifiseres på veien til instrumentell skapelse?* Dette omhandler at elevene, i arbeid med CAS, foretar et såkalt registerskifte. I oppgavens fjerde kapittel vil jeg gjøre rede for metoden studien baserer seg på. Her vil forskningsdesign og valg av metode presenteres og begrunnes. I tillegg vil jeg presentere metode for analyse av det genererte datamateriale, før kapitlet avsluttes med vurderinger av etiske hensyn og studiens reliabilitet og validitet. Oppgavens siste kapittel, kapittel 6, har til hensikt å drøfte og oppsummere funnene i lys av tidligere forskning. Avslutningsvis vil jeg foreta noen refleksjoner rundt prosjektets funn.

2 Digitale verktøy i matematikk

2.1 Digitale verktøy i matematikk

Skolen som kultur med sin samling av ideer, holdninger, kunnskaper og ressurser, har med tiden gjennomgått en gradvis utvikling (Säljö, 2003). Dette gjenspeiles blant annet i utviklingen av nye læreplaner, en økt tilgang på digitale hjelpemidler, endrede krav til lærerens faglige og pedagogiske kompetanse, samt endrede krav til hvilken kompetanse elevene skal sitte igjen med etter endt skolegang.

Bruken av digitale verktøy i matematikk, og i skolen generelt, har økt kraftig de siste ti årene. Som en konsekvens av et stadig mer digitalisert samfunn la regjeringen, ved Stortingsmelding nr 30 (2003-2004), frem forslag om at IKT skulle inn i skolen med hensikt på å forberede barn og unge til aktiv samfunnsdeltakelse. Blant annet viste meldingen til at bruk av IKT i opplæringen kunne motivere og bidra til læring. På denne bakgrunn introduserte Kunnskapsløftet (LK06) digitale ferdigheter som en femte grunnleggende ferdighet. Ferdigheten skulle nå vektlegges på lik linje som det å kunne lese, regne, og å kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig (Utdanningsdirektoratet, 2012).

Bruken av digitale hjelpemidler i matematikk forener matematisk og digital kompetanse. Digitale ferdigheter innebærer, ifølge Utdanningsdirektoratet (2012), å kunne bruke, navigere i, og tolke digital informasjon. Videre skal en kunne produsere og bearbeide produkter ved bruk av digitale verktøy, og kommunisere egen kunnskap til mottakere. I tillegg kreves digital dømmekraft og å kunne benytte verktøyet på en fornuftig måte. Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) definerer det å være god i matematikk ved hjelp av følgende fem komponenter. (1) *Forståelse*, av matematiske begreper, representasjoner, operasjoner og relasjoner. (2) *Beregning*, å utføre prosedyrer som involverer tall, størrelser, på en effektiv, nøyaktig og fleksibel måte. (3) *Anvendelse*, å formulere matematiske problemer og utvikle strategier for å løse problemer ved hjelp av (1) og (2). (4) *Resonnering*, å forklare og begrunne en løsning til et problem, eller utvide noe kjent til å forklare noe ukjent. (5) *Engasjement*, motivasjon for å lære matematikk, og vurdere matematikk som nyttig og verdifullt. Kilpatrick et al. (2001) påpeker at komponentene støtter hverandre og må utvikles samtidig. Forbindelsene mellom dem forsterkes og resulterer i en matematisk kompetanse som er varig, fleksibel og nyttig.

Ifølge National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) vil ikke bruken av digitale verktøy automatisk gjøre elevene bedre i matematikk, og slike verktøy kan heller ikke erstatte forståelse og basisferdigheter (NCTM, 2000, 2014). Derimot kan digitale verktøy støtte utviklingen av de fem komponentene (Kilpatrick et al., 2001). Økt forståelse av begreper og ideer kan opparbeides ved at elevene får mulighet til å visualisere funksjoner, veksle mellom ulike representasjoner og diskutere hva som foregår (NCTM, 2014). Bruk av digitale verktøy tillater en fleksibel måte å utføre prosedyrer for effektiv og nøyaktig beregning, og elevene får mulighet til å sjekke egne beregninger. Gjennom bruken av digitale verktøy har elevene også mulighet til å nærme seg matematiske problemer som ville vært for vanskelig eller tidkrevende ved bruk av andre metoder (NCTM, 2014). På denne bakgrunn muliggjør digitale verktøy at elevene heller fokuserer på å utvikle gode løsningsstrategier i stedet for å fokusere på avanserte beregninger (Kilpatrick et al., 2001). Til sist viser NCTM (2014) at digitale verktøy kan bidra til å forbedre elevers holdninger til matematikk og å øke motivasjon for å læring.

Utdanningsdirektoratet presiserer at å kunne bruke digitale verktøy i matematikk for realfag innebærer å ”bruke digitale verktøy til omfattende beregninger og visualisering. Det betyr å hente, bearbeide og presentere matematisk informasjon i elektronisk form. I tillegg vil det si å vurdere verktøyets hensiktsmessighet, muligheter og begrensninger” (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 4). På videregående skole er GeoGebra, i tillegg til lommeregneren, det mest brukte digitale hjelpemidlet i matematikk.

2.2 GeoGebra og CAS

Navnet GeoGebra er satt sammen av begrepene geometri og algebra, og er utviklet av Markus Hohenwarter. GeoGebra benyttes til undervisning og læring i matematikk i grunnskolen og videregående skole i Norge (Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen [Matematikksenteret], u.å). Programvaren er en gratis interaktiv applikasjon som består av graftegner, geometri-modul, CAS-modul, sannsynlighetskalkulator og regneark. I programmet kan man blant annet tegne to- og tredimensjonale figurer, jobbe med sannsynlighet, bruke vanlig regnearkfunksjoner, plotte og analysere funksjonsgrafer, og jobbe med algebra i CAS.

Et CAS er en pakke som består av tre deler: (1) et sett algoritmer som kan forenkle algebraiske uttrykk, løse ligninger, og utføre operasjoner, (2) et språk som gjør at algoritmene kan benyttes, og (3) et miljø for å bruke dette språket (Geddes, Czapor & Labahn, 1992). Et ”CAS-språk” skiller seg fra matematisk språk og naturlig språk, og ethvert CAS-verktøy har sine regler og begrensninger. På grunn av særegenheten oppleves ofte CAS-verktøyene som lite fleksible og brukeren av et slikt verktøy vil ikke kunne benytte uformelle notasjoner og strategier (Guin & Trouche, 1999). Det finnes mange CAS-programvarer som benyttes i dag; CAS i GeoGebra, Maple, Maxima, Wolfram Alpha, GAP m.fl. De forskjellige systemene kan være spesialisert for visse funksjoner. Eksempelvis er GAP spesialisert for gruppeteori og kombinatorikk. CAS i GeoGebra og Maple er eksempler på generelle CAS-programvarer som ikke har et primært funksjonsområde, men som kan benyttes innenfor mange matematiske emner.

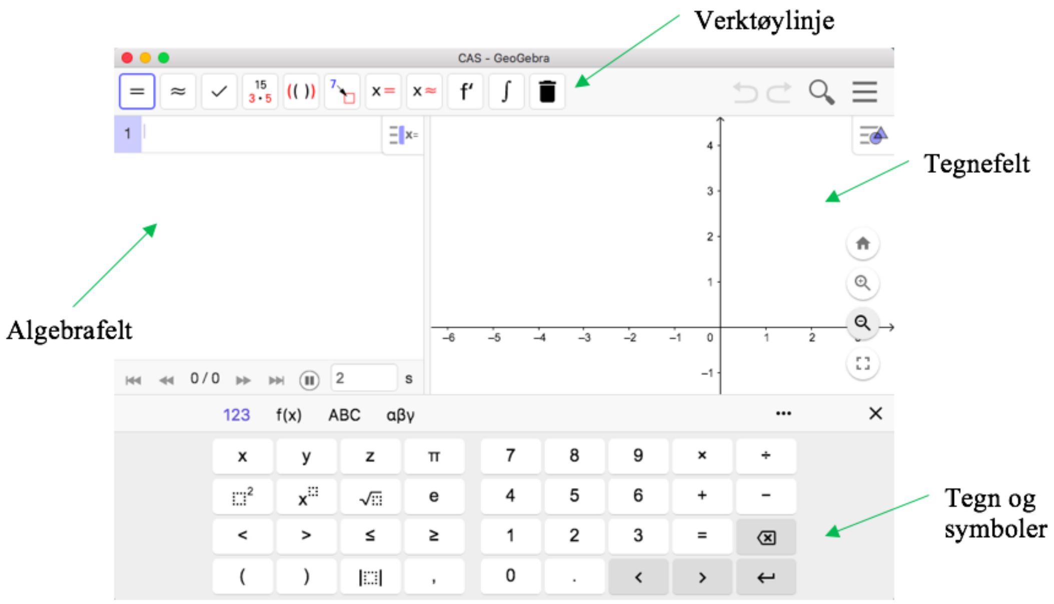
Utover i oppgaven kommer jeg ofte til å bruke begrepet CAS. Med ett unntak (i oppgavens kapittel 3.3) vil det kun refereres til CAS i GeoGebra.

2.3 Nærmere om CAS – syntaks og oppbygging

Fordi masteroppgaven tar utgangspunkt i bruken av CAS, er det nødvendig å gjøre nærmere rede for verktøyet sin oppbygging og syntaks. CAS har sin egen syntaks. Syntaks beskrives av Store norske leksikon å være regler for hvordan kodelinjer eller kommandoer skal settes sammen ved bruk av et programmeringsspråk eller skriptspråk (”Syntaks – IT”, 2018). Dersom en ikke følger reglene for syntaks, kan ikke kommandoen eller kodelinjen tolkes. Forenklet betyr dette at programmet ikke gjør det brukeren ønsker at det skal gjøre, fordi brukeren har skrevet noe som ikke er i tråd med syntaksreglene.

Norsk digital læringsarena (NDLA) og Matematikksenteret er noen av organisasjonene som har digitalt tilgjengelige brukermanualer for CAS. Brukermanualene for CAS er noe mangelfulle og utdaterte, da den nye versjonen av GeoGebra, GeoGebra 6.0, ble introdusert juni 2018. På bakgrunn av at manualene er noe utdaterte og mangelfulle vil det videre presenteres en enkel sammenfatting av brukermanualene. I tillegg vil jeg gjøre rede for noe informasjon som anses som nødvendig for beherskelse av grunnleggende bruk av CAS.

CAS-vinduet ved bruk av Macbook ser ut som vist i figur 2.1. Vinduet inneholder en verktøylinje, et algebrafelt, et tegnefelt, og et felt hvor en finner matematiske tegn og symboler som ofte brukes i matematikk. Feltet med tegn og symboler er nokså selvforklarende, da feltet inneholder symboler som kan brukes i algebrafeltet. Videre vil det redegjøres for bruken av algebrafeltet, tegnefeltet, og noen av funksjonene i verktøylinja.



Figur 2.1. Skjermbildet av et CAS-vindu.

Algebrafeltet

I algebrafeltet vises rader hvor hver rad har et inndatafelt øverst og et utdatafelt nederst. Vanlige betegnelser på det som skrives inn i et inndatafelt er "input", og det som kommer ut i utdatafeltet kalles for "output". Algebrafeltet kan hovedsakelig brukes til to ting. Det første er å forenkle algebraiske uttrykk eller løse ligninger. Uttrykket som skrives inn er input, og forenklingen/løsningen som kommer ut er output. Det andre er å bruke innebygde kommandoer i CAS til å finne ut noe. Ved bruk av slike kommandoer ligger det spesifikke innebygde algoritmer knyttet til kommandoen som brukes. Benyttelse av kommandoer i CAS innebærer at brukeren setter bort selve utregningen til programvaren. Eksempelvis kan vektorkommandoen, "$Vektor(A, B)$", benyttes for å finne vektoren mellom punktene A og B. Fordi kommandoen inneholder en spesifikk algoritme, er det ikke nødvendig for brukeren å gjøre utregninger for å finne vektoren. Brukeren må vite hvilken kommando som kan brukes, hva som må være bestemt for at en kommando kan brukes, når kommandoen kan brukes, og hva outputen betyr.

Jeg vil påpeke at selv om syntaksreglene i algebrafeltet følges, kan det forekomme at programmet ikke utfører en kommando eller det som står i kommandolinjen, eller at programmet gjør noe annet enn det får beskjed om. Dette kalles for en ”bug”. Årsaken til en bug er ofte ukjent, noe som innebærer at elevene må være kritiske og vurdere om outputen i CAS er rimelig. I resultatkapitlet vil det gis flere eksempler på bugs som forekommer når CAS benyttes til arbeid.

Tegnefeltet og verktøylinje

Det som skjer i tegnefeltet knyttes til algebrafeltet, men tegnefeltet kan også fungere alene. Matematiske objekter fra algebrafeltet kan i noen tilfeller representeres i tegnefeltet, og dette indikeres ved at objektene er merket med en blå kule i radene i algebrafeltet.

Verktøylinja som vist i figur 2.1 inneholder flere funksjoner knyttet til det vi skriver inn i algebrafeltet. Noen av funksjonene i verktøylinja utfører spesifikke oppgaver som for eksempel å faktorisere et uttrykk eller å bytte ut variabler med kjente verdier. I tillegg finnes det symboler for likhetstegn som benyttes for å få en output. Likhetstegnet helt til venstre i verktøylinja i figur 2.1, ”=”, brukes til eksakte utregninger, forenkling av algebraiske input-uttrykk, og når symboler tilordnes matematiske objekter. Tilsvarende hurtigtast for denne funksjonen er å trykke enter på tastaturet. Likhetstegnet, ”≈”, vist i figur 2.1, gir en tilnærmet verdi ved numeriske beregninger. Funksjonene ”x=” og ”x≈” benyttes til løysing av ligninger. ”x=” produserer en eksakt (algebraisk) løsning for x, og ”x≈” produserer en tilnærmet verdi for x ved bruk av numeriske metoder.

3 Teoretisk rammeverk

I dette kapitlet vil jeg gjøre rede for to teoretiske rammeverk, og presentere tidligere forskning på ulike CAS-verktøy. Oppgavens kapittel 3.1 omhandler artefakters definisjon, betydning og posisjon i ulike kulturer, og det vil nærmere redegjøres for instrumentell skapelse, en prosess som gjør artefakter til meningsfulle verktøy for mennesker. Videre vil utvikling av menneskets indre kunnskaper knyttet til bruk av artefaktene, og hvordan menneskets kunnskaper synliggjøres gjennom hva de gjør med artefaktet presenteres. Det andre teoretiske rammeverket presenteres i kapittel 3.2 og fungerer som en støtte for funnene gjort i undersøkelsen. Rammeverket handler om hvordan matematiske objekter kan uttrykkes gjennom representasjoner som består av tegn og symboler, og som er basert på konvensjoner innenfor matematikk. Videre tas det utgangspunkt i hvordan matematiske objekter kan uttrykkes gjennom ulike representasjoner. I den forbindelse vil det gås nærmere inn på tegn og symboler sin betydning for de ulike representasjonene, og krav til kognitive ferdigheter ved et skifte mellom representasjoner. Til sist vil det i oppgavens kapittel 3.3 gjøres rede for forskning gjort på ulike CAS-verktøy.

3.1 Artefakter og mediering

Begrepene artefakt, verktøy, ressurs, redskap og hjelpemiddel refererer til noe som mennesker kan benytte når de skal løse problemer, utføre arbeid, bearbeide informasjon o.l. Begrepene skiller seg noe fra hverandre ved at det varierer om begrepene sikter til fysiske objekter, eller om verktøyene er immaterielle som for eksempel språk eller evner som mennesker innehar. Videre i denne oppgaven benyttes begrepet artefakt, som defineres av Verillon og Rabardel (1995, s. 81) til å være materielle eller abstrakte objekter som mennesker kan bruke når de utfører en oppgave. Innenfor matematikk kan det eksempelvis være CAS eller abc-formelen som brukes til å løse andregradsligninger.

Säljö (2003) tar utgangspunkt i et sosiokulturelt perspektiv når han omtaler læring og bruk av artefakter i kulturer. Et sosiokulturelt læringssyn bygger på en antagelse om at læring skjer gjennom bruk av språk og deltakelse i sosiale settinger. På barneskolen lærer elever å benytte seg av artefakter som blyant, linjal, kalkulator m.m. Videre lærer elevene å bruke mer komplekse artefakter som for eksempel datamaskin med ulike typer programvarer. Læringen skjer i en sosial setting hvor læreren ved bruk av språk formidler kunnskap om artefaktet, hva artefaktet gjør og hvordan det kan benyttes til å løse ulike problem. De fysiske artefaktene som er tilgjengelige i kulturen vi befinner oss i preger hvordan vi som mennesker begår oss i det miljøet vi befinner oss i (Säljö, 2003). Skolematematikken er ikke et unntak, noe som blant annet synliggjøres gjennom tilgangen til personlig datamaskin og de tilhørende ressursene som preger hvordan elever løser matematikkoppgaver.

Artefaktene, som utvikles av mennesker, inneholder menneskelige kunnskaper, konvensjoner og begreper. Artefakter har ingen verdi uten en bruker fordi artefaktet ikke kan fungere selvstendig. Säljö trekker frem lommeregneren som ett av flere eksempler. Lommeregneren kan ikke regne ut noe uten at en bruker bestemmer hva som skal regnes ut og utfører inntastingen. Når brukeren benytter seg av artefaktet får det en verdi, fordi bruken av det, i dette tilfellet lommeregneren, tillater utregning av store regnestykker på kort tid med høy presisjon. Gjennom sine eksempler viser Säljö til at artefakter blir en forlengelse av brukeren når vedkommende bruker artefaktet.

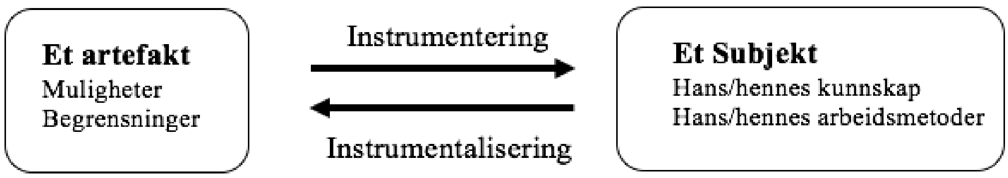
Hvordan artefaktet brukes synliggjør individets tenkning. Kombinasjonen av et artefakt og et tenkende individ skaper et større potensiale for problemløsning i ulike situasjoner. Säljö beskriver at i et sosiokulturelt perspektiv er det en grunnleggende tanke at de fysiske og de språklige/intellektuelle redskapene medierer virkeligheten i bestemte situasjoner. Forandring i intellektuelle ferdigheter og kunnskaper kan ikke sees med det blotte øye, men noen av disse forandringene blir synlige når vi observerer de redskapene eller verktøyene som individer bruker når de arbeider med konkreter. Et sosiokulturelt perspektiv på læring kan derfor være et spørsmål om hvordan vi tar i bruk artefakter for å tenke og utføre praktiske oppgaver (Säljö, 2003).

3.1.1 Instrumentell skapelse – Fra artefakt til instrument

Selv om mennesker har et artefakt til rådighet, er det ikke nødvendigvis slik at et individ kan nyttiggjøre seg det. Verillon og Rabardel (1995) skiller derfor mellom begrepene *artefakt* og *instrument*. Et artefakt er, som tidligere beskrevet, et materielt eller abstrakt objekt som mennesker kan benytte seg av. Ifølge Verillon og Rabardel må artefaktet bygges opp eller utvikles til et instrument for at brukeren kan benytte seg av artefaktet på en hensiktsmessig og verdifull måte. Da vil det ifølge Rabardel, som referert i Trouche (2005), dannes et meningsfullt forhold mellom artefaktet, eller en del av artefaktet, og brukeren knyttet til arbeid med en spesifikk type oppgave. Eksempelvis kan CAS brukes som et ledd i å løse en mer kompleks oppgave hvor det ikke eksisterer innebygde kommandoer som direkte gir svaret som det søkes etter, eller oppgaver som vil være vanskelig for brukeren å gjøre ved manuelle metoder på papir. Et eksempel på dette kan være dersom man har oppgitt funksjonen $f(x) = ax^2 + bx + c$, og skal finne ligning for linja som går gjennom punktene $(p, f(p))$ og $(q, f(q))$ hvor q og p er variabler. CAS gjør det mulig for elevene å finne svar som de vanskelig kan oppnå ved bruk av penn og papir. Prosessen når artefaktet utvikles til et instrument kalles for *instrumentell skapelse* (instrumental genesis) (Trouche, 2005).

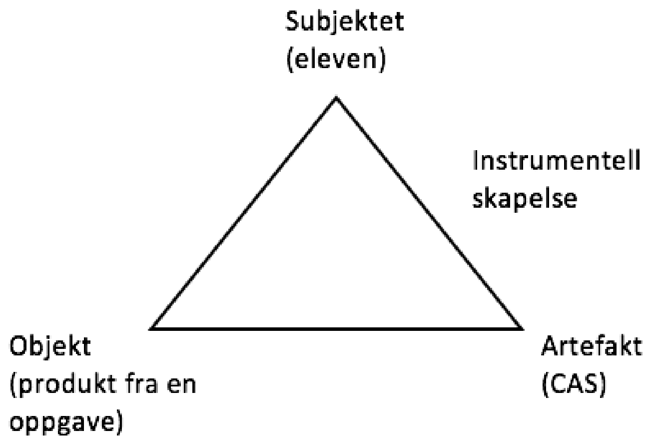
3.1.2 To prosesser i instrumentell skapelse

Trouche (2005) bryter ned instrumentell skapelse til en kombinasjon av to prosesser som virker mellom artefaktet og brukeren av artefaktet (subjektet). En *instrumentaliseringsprosess* (instrumentalization process) knyttet til artefaktet, og en *instrumenteringsprosess* (instrumentation process) som er knyttet til subjektet. Når et subjekt bruker et artefakt til å gjøre noe så viser figur 3.1 at prosessene virker i hver sin retning. Instrumentaliseringsprosessen innebærer at subjektet blir kjent med artefaktet; dets oppbygging, muligheter og begrensninger. I CAS innebærer dette selve bruken av programmet som inkluderer blant annet syntaks, kommandoer og hva programmet kan gjøre. Motsetningsvis vil artefaktet forme subjektet i instrumenteringsprosessen (Trouche, 2005). Artefaktet kan forme subjektet på mange måter. Eksempelvis når artefaktet påvirker subjektets arbeidsmetoder, når subjektet oppnår ny kunnskap ved benyttelse av artefaktet, eller når subjektet blir klar over hvordan artefaktet kan brukes, noe som videre påvirker hvordan subjektet velger å løse oppgaver.



Figur 3.1: Instrumentell skapelse gjennom instrumentering- og instrumentaliseringsprosess: en gjensidig påvirkning mellom et artefakt og et subjekt. (Trouche 2005, s. 144)

CAS er et artefakt som krever en bruker og en hensikt, hvor hensikten er å utføre en type oppgave eller å produsere et matematisk objekt. Eksempelvis kan oppgaven være å finne en vektor. Vektoren blir da det matematiske objektet/produktet. Kombinasjonen av eleven, CAS og det matematiske objektet danner en tredelt struktur, hvor det skjer en gjensidig påvirkning mellom komponentene i strukturen (figur 3.2). Ett av mange eksempel på hvordan subjektet, artefaktet og objektet påvirker hverandre kan være å la en elev (subjekt) løse en oppgave (objekt). Graden av elevens kjennskap til CAS (artefaktet) sine muligheter og begrensninger vil påvirke hvordan subjektet velger å løse oppgaven. På den andre siden kan eleven utvide sin kjennskap til CAS ved å løse oppgavene. Objektet kreves for at prosessene for instrumentalisering og instrumentering skal skje.



Figur 3.2: Instrumentet som en del av artefaktet og subjektet for en type oppgave. Hentet fra Drijvers og Gravemeijer (2005, s. 166).

3.1.3 Subjektets kognitive utvikling i sentrum for instrumentell skapelse

For at instrumentell skapelse kan skje fremhever Drijvers og Gravemeijer (2005) og også Trouche (2005) viktigheten av subjektets kognitive utvikling. Dette utdypes ved å bruke begrepet *mentalt skjema* (mental schema). Subjektets mentale skjema innenfor matematikk beskrives av Drijvers og Gravemeijer (2005), og handler om subjektet sin kognitive organisering av ideer og teorier som en eventuell løsningsstrategi tar utgangspunkt i, og den tekniske kunnskapen som kreves for å kunne bruke et artefakt. Ved introduksjon av nye verktøy og/eller ny matematisk kunnskap kreves det at den mentale strukturen utvikles.

Trouche (2005) viser til Rabardel som beskriver at utvikling av mentale skjema skjer gjennom en utvikling av *bruksskjema* (usage schemes) og *instrumenterte handlingsskjema* (instrumented action schemes). Subjektet sine bruksskjema er relatert til artefaktet, og utvikling skjer ved at subjektet bruker artefaktet i arbeid med elementære og konkrete oppgaver. Instrumenterte handlingsskjema er meningsfulle mentale skjema som bygges opp av flere bruksskjema. Her skjer det et samspill mellom kunnskap om matematiske teorier og ideer, og bruken av artefaktet. Spleising av flere bruksskjema kan innebære en integrering av nye matematiske ideer, teorier og/eller teknisk kunnskap i subjektets mentale skjema (Drijvers & Gravemeijer, 2005).

3.1.4 Instrumentert handlingsskjema

Et instrumentert handlingsskjema i sin helhet kan vanskelig la seg observere direkte fordi store deler er av en indre og personlig karakter, men gjennom å observere handlingene til subjektet kan en få tilgang til deler av skjemaet. Drijvers og Gravemeijer (2005) presenterer derfor det de kaller for *instrumenterte teknikker*, som er en ytre og synlig bestanddel i et instrumentert handlingsskjema. Nettopp fordi disse er synlige og observerbare, utgjør instrumenterte teknikker inngangen til analyse av instrumentell skapelse.

Teknikk er et sammensatt begrep. Teknikk beskrives av Artigue (2002) å være en måte å løse en oppgave på. Verdien av en teknikk vurderes etter verdien av produktet som dannes gjennom teknikken. En av verdiene er at teknikker kan bidra til forståelse for objektet som involveres, og derfor kan teknikker være kilde til spørsmål om matematisk kunnskap. Lagrange, som referert i Drijvers og Gravemeijer (2005, s. 169), påpeker at teknikk innenfor matematikk handler om mer enn bare regneferdigheter (skills) og algoritmer (procedures). Lagrange mener at teknikk krever mindre trening enn spesifikke regneferdigheter, og mer refleksjon enn algoritmer. Videre i denne oppgaven brukes Drijvers og Gravemeijer (2005, s. 169) sin definisjon av instrumentert teknikk; instrumentert teknikk innebærer et sett med regler og metoder i et teknologisk miljø som har til hensikt å løse en spesifikk type matematisk problem.

3.2 Tegn og semiotiske representasjonssystem

Semiotikk er læren om tegn (Peirce, 1998). Bruken av tegn står sentralt innenfor læring og utvikling av matematisk kunnskap (Duval, 2006; Presmeg, 2006). Vygotsky (1978) beskriver blant annet at tegn, når man kjenner dets betydning, blir til et mentalt instrument som benyttes ved mental aktivitet. Dette betyr at tegn også er artefakter. Et tegn er en form for representasjon og er noe som står for noe annet (Steinbring, 2006, s.134). Semiotiske representasjoner innenfor matematikken brukes til å uttrykke matematiske objekter og relasjoner mellom matematiske objekter. Et matematisk objekt kan eksempelvis være en vektor eller en funksjon. Siden matematiske objekter ikke kan studeres ved hjelp av sanser eller instrumenter, kan bare semiotiske representasjoner gi oss tilgang til dem (Duval, 2006). Gjennom språk og representasjoner kan vi uttrykke og gi ulike matematiske objekter en betydning.

3.2.1 Register

Duval (2006) benytter seg av begrepene semiotiske representasjonssystem og register. Et representasjonssystem er en måte å uttrykke et matematisk objekt på. Hvert system inneholder en mengde tegn som har spesielle betydninger, og samlingen av tegn og relasjonen mellom dem vil utgjøre et system. Duval beskriver fire ulike semiotiske representasjonssystem: naturlig språk, symbolspråk, illustrasjoner og diagrammer, og grafer og tabeller. Disse skiller seg fra hverandre med tanke på hvilke egenskaper de har. Hvert semiotiske representasjonssystem inneholder en mengde tegn, konvensjoner og regler som er spesielt for det spesifikke systemet. Tegn og symboler innenfor et system benyttes for å uttrykke et matematisk objekt innenfor representasjonssystemet. Et register er en spesiell form for semiotisk representasjonssystem, som kjennetegnes ved at det tillater en transformasjon mellom representasjoner (Duval, 2006, s. 111). Ulike register kan ha ulike kognitive funksjoner og innebære ulike kognitive utfordringer. Eksempelvis vil det være andre kognitive utfordringer ved å regne ut et regnestykke på papir, sammenlignet med å regne det ut på en kalkulator. Hvilket register en velger å jobbe innenfor har betydning for hvordan matematiske objekter kan representeres eller hvordan en oppgave løses, fordi de ulike registrene krever forskjellige kognitive ferdigheter.

3.2.2 Transformasjoner

Transformasjoner i matematikk innebærer en endring i eller mellom representasjoner. Duval (2006) skiller mellom to typer transformasjoner: *omdanning* (conversion) og *behandling* (treatment). *Behandling* kjennetegnes ved at aktiviteten foregår innenfor samme register, og avhenger av mulighetene for transformasjon i det gitte registeret. *Omdanning* er transformasjoner hvor det skjer et skifte av register. Det samme objektet vil da uttrykkes ved hjelp av representasjoner i et annet register. Dette er mulig for mange matematiske objekter. For eksempel kan det foretas flere transformasjoner av en funksjon, $y = x^2 - 1$, uttrykt ved symbolspråk. Behandling kan innebære å uttrykke funksjonen på en annen måte, eksempelvis $y = (x + 1)(x - 1)$, som bevarer det matematiske objektet (funksjonen) som det algebraiske uttrykket representerer. Omdanning, eller skifte av representasjonsform, kan innebære å få tilgang til funksjonen ved å tegne dens graf eller å angi en tabell for funksjonens koordinater.

Arbeid innenfor hvert av registrene krever at brukeren besitter unik kunnskap om tegn, symboler og konvensjoner relatert til de systemene som benyttes (Duval, 2006). Omdanning beskrives av Duval (2006) å være mer kompleks, fordi et bytte mellom ulike representasjonsformer krever at en gjenkjenner samme objekt ut fra to eller flere representasjoner som tilsynelatende ikke har noe til felles. Dette kan igjen eksemplifiseres ved å benytte funksjonen $y = x^2 - 1$. En grafisk fremstilling av funksjonen har ved første øyekast ikke noe til felles med uttrykket for funksjonen. For å kunne gjenkjenne funksjonssuttrykket fra den grafiske representasjonen kreves det at en må kunne identifisere flere kjennetegn, eksempelvis nullpunktene, i den grafiske framstillingen. Å gjenkjenne funksjonsuttrykket fra grafen krever på denne måten en annen type kunnskap av den som driver omdanning.

3.2.3 Kunnskaper for transformasjoner

For å foreta transformasjoner på representasjoner kreves det et komplekst sett med kunnskap innenfor de ulike registrene. Duval (2017) beskriver komponentene i slik kunnskap ved å skille mellom to sett begrep; *register* og *kode*, og *kommunikative* og *kognitive funksjoner*.

Kommunikative funksjoner tillater en formidling av informasjon, men hvilket medium som benyttes ved formidlingen vil sette ulike krav til den den som skal forstå informasjonen (Duval, 2017). Eksempelvis kan muntlig naturlig språk benyttes for å formidle et budskap, men ved å endre medium og benytte en skriftlig representasjon kreves det at mottakeren av budskapet har kunnskap om alfabetet for å kunne lese og forstå budskapet. Semiotiske system tillater utvikling og bruk av *kognitive funksjoner*. Kognitive funksjoner refererer til muligheten for tilegnelse av ny kunnskap og tillater kreativ tenkning ved å se sammenhenger gjennom transformasjon av representasjoner.

Et register og en kode skiller seg fra hverandre ved evnen til å foreta transformasjoner. Et register har, ifølge Duval (2017), alltid to egenskaper: (1) det referer til et objekt, og krever en kognitiv funksjon for å forstå representasjonen, (2) den kognitive funksjonen krever en kompleks samling av mindre meningsfulle kunnskapsenheter som er nødvendig for å bevege seg i og mellom representasjonssystem. De mindre kunnskapsenhetene er koder. En kode skiller seg ifølge Duval (2017) fra et register ved at koder ikke tillater transformasjon av representasjon. Koder består av sekvenser av symboler som korresponderer til et signal eller en mening, for eksempel alfabetet eller binærkoder. Hvert symbol i koden har én betydning, og en sammensetning av symbolene har en annen betydning. Dette kan eksemplifiseres ved å benytte eksemplet med å formidle et skriftlig budskap. For å kunne lese budskapet må man ha kunnskap om alfabetet, eller symbolene i koden, og kunnskap om hva ulike sammensetninger av symboler betyr, for å kunne lese og forstå budskapet. Med andre ord blir kodene mindre kunnskapsenheter og en bestanddel i registeret. Dette medfører to implikasjoner for å drive transformasjoner. For det første må man forstå de eventuelle kodene i representasjonen for å kunne foreta transformasjoner. For det andre må tegnene i kodene og deres betydning læres på forhånd, og dette må skje uavhengig av representasjon fordi kodene alene ikke tillater transformasjon. Duval (2017) beskriver at dette også viser noe av kompleksiteten ved å lære barn å lese. Duval gjør også kort rede for at koding benyttes innenfor andre skriftsystem. Ideogrammer er skrifttegn som står for et helt ord eller en idé. Matematiske symboler er et eksempel på et ideogram. Forståelse for kodene innenfor matematikk blir derfor nødvendig for å drive transformasjoner.

3.3 Tidligere forskning

Jeg har ikke funnet tidligere studier som har vært gjennomført i forbindelse med CAS i GeoGebra. Dette i seg selv er motivasjon for å gjennomføre undersøkelsen som presenteres videre i oppgaven. Derimot finnes det flere studier gjort på elevers og studenters bruk av andre CAS-verktøy. I dette kapitlet vil det videre presenteres annen teori og forskning knyttet til noen CAS-verktøy.

Studier gjort på 80- og 90-tallet på noen CAS-verktøy har ulike og tidvis motstridende funn. Aspetsberger og Kutzler (1989) fant at bruken av CAS-verktøyet Derive bidrar til økt læring i matematikk. En annen studie viste at et annet CAS, MuMath, gir økt forståelse innenfor noen matematiske områder og andre ikke (Thomas & Rickhuss, 1992). Buchberger (1990) argumenterer på sin side at når et område av matematikken blir trivielt, altså at det eksisterer algoritmer for å løse ethvert problem, så blir det ikke lenger hensiktsmessig å gjøre kalkulasjoner for hånd. Studiene av Pavelle og Stoutemyer, referert i Mitic og Thomas (1994), har funnet at det er store fordeler med et CAS. Blant annet fordi CAS muliggjør en utregning av oppgaver som er for vanskelige eller for tidkrevende til å løses for hånd, noe som er attraktivt i matematikkens verden.

Wain (1993) og Mitic og Thomas (1994) søker å beskrive problemene ved bruken av henholdsvis Derive og Macsyma – to ulike CAS-verktøy. Blant annet fant de at studenter og lærere har vanskeligheter med å forstå forskjellen mellom CAS-syntaks og matematisk notasjon, og vanskelig for å forstå når resultatene som produseres er ukorrekte. Videre påpekes det at hvis man ikke vet akkurat hva man gjør i Macsyma vil det ta mye lenger tid å løse oppgavene, enn det ville gjort for hånd. Og hvis en ikke kjenner til verktøyets begrensninger og muligheter vil Macsyma ikke kunne brukes effektivt. Mitic og Thomas (1994, s. 361) oppsummerer: "Hvis du vet hvordan du skal gjøre det, bruk et CAS. Hvis ikke, ikke.". Atkins, Creegan og Soan (1995) fant i sin studie at bruken av CAS-verktøyet Derive er mest lønnsom i tilfeller hvor elever allerede har den matematiske kunnskapen som kreves for løysing av oppgaver. Bruken av programvaren var derimot mindre lønnsom når elevene ikke hadde den matematiske kunnskapen som kreves.

Drijvers (2002) tar utgangspunkt i CAS-verktøyet Derive. Han gjør rede for flere hindre og går nærmere inn på hvorfor studenter opplever at bruken av CAS er vanskelig. Blant annet er det vanskelig å gjenkjenne ekvivalente uttrykk produsert av CAS, eksempelvis å gjenkjenne at $\sqrt{12}$ er det samme som $2\sqrt{3}$. Et annet hinder er å bare akseptere tilnærmede verdier $(1{,}732)$ og ikke eksakte algebraiske løsninger $(\sqrt{3})$. Flere hindre beskrives å være å forstå begrensningene i CAS og vanskeligheter med å lage strategier som hjelper CAS med å omgå dens begrensninger, vanskeligheter med å bestemme når CAS er nyttig. Og "the black box character" – at CAS ikke gir brukeren innsyn i hvordan det produserer en output. For å forklare elevenes vanskeligheter med å bruke Derive bruker Drijvers begrepene skjermteknikker (screen techniques) og papir-og-blyant-teknikker (paper-and-pencil techniques), hvor *teknikker* referer til fremgangsmåte og syntaks. Han hevder at forskjellen mellom de to teknikkene er for store, og at dette skaper problemer for elevene når de skal benytte Derive. Videre fører dette til at samarbeidet mellom CAS-verktøyet Derive og brukeren er utfordrende i tilfeller hvor det ikke finnes en direkte kommando for å løse en oppgave. For å unngå mange av studentenes vanskeligheter med CAS-verktøyet mener Drijvers at skjermteknikken og papir-og-blyant-teknikken bør oppfylle to kriterier: (1) teknikkene burde kreve lik fremgangsmåte og samme syntaks, og (2) skjermteknikken burde gi tilgang til operasjonene programvaren foretar. Han påpeker at observerte hindre må tas på alvor, fordi å møtet med dem kan lede til frustrasjon for studentene, og å ignorere hindrene kan føre til at frustrasjonen forsterkes. Dersom de tekniske hindrene får nok oppmerksomhet og studentene jobber seg gjennom dem så skapes det et potensiale for læring i matematikk og i bruken av artefaktet (Drijvers, 2002).

Artigue (2002) hevder at læring av teknikker er nødvendig for at instrumentell skapelse skal skje. Hun beskriver teknikker som på samme måte som Drijvers (2002) og skiller mellom papir-og-blyant teknikker og instrumenterte teknikker. Teknikker er en måte å løse oppgaver på, og er en kombinasjon av resonnement og rutinearbeid. Hun beskriver videre at idet en teknikk blir en rutine så reduseres matematikkens kompleksitet fordi teknikken blir til enkle handlinger, noe som påvirker synet på læring av matematikk og verdiene som knyttes til dem. Samtidig mener Artigue at enkelte teknikker *må* bli en rutine for at videre utvikling av kunnskap og instrumentell skapelse kan skje. Kompleksiteten av instrumentell skapelse har, ifølge Artigue, tidligere blitt undervurdert. Hun viser til en doktorgradsavhandling som undersøkte instrumentell skapelse ved bruken av TI92 kalkulatoren for å forklare prosessens skjørhet og kompleksitet. Studien som gikk over ett skoleår, tok utgangspunkt i å undersøke instrumentell skapelse og bruken av kalkulatoren i matematikkpensum i 11. klasse. Undersøkelsen viste at instrumentell skapelse er en tidkrevende prosess som består av sykluser av progresjon og regresjon. Ved slutten av skoleåret var utviklingen fremdeles skjør og elevene håndterte ikke kalkulatoren godt nok til at kunnskapen var varig.

4 Metode

Ved gjennomføring av et forskningsprosjekt må en ta en rekke valg knyttet til design av studie, valg av deltagere og hvordan datagenerering skal foregå. Hvordan dette gjøres må begrunnes ut fra studiens formål og problemstilling: *Hvilke hindre kan identifiseres på veien til instrumentell skapelse?* Og *beskrive elevenes utvikling i bruk av CAS ved arbeid med matematikk.* Med utgangspunkt i denne problemstillingen vil jeg i dette kapitlet presentere studiens design ut fra teori om kvalitativ forskning. Deretter vil jeg videre redegjøre for studiets utvalg og gjennomføring av datainnsamling. Her presenteres blant annet kriterier for utvalgene og deres bakgrunn, før detaljer for datainnsamlingen tydeliggjøres. Til sist vil etiske betraktninger og studiens validitet og reliabilitet diskuteres i egne delkapitler i lys av kvalitativ forskning.

4.1 Forskningsdesign

I denne studien har jeg valgt å benytte meg av forskningsmetoden som Robson og McCartan (2015) kaller for et fleksibelt forskningsdesign, også kalt kvalitativt forskningsdesign. Spesielt for fleksibelt forskningsdesign, er at forskningsspørsmålet utvikler seg etter hvert som arbeidet med studien pågår. Videre har jeg valgt å ta utgangspunkt i en etnografisk metode.

Etnografisk forskning springer ut fra antropologien. Forskning i et antropologisk perspektiv har til hensikt å beskrive, sammenligne og forklare menneskelig atferd på tvers av kulturer, mens etnografiske studier har som mål å beskrive én kultur (Robson & McCartan, 2015). Etnografisk forskningsmetode karakteriseres ved at forskeren innhenter informasjon om eksempelvis atferd, hendelser og hjelpemidler som brukes når personene i kulturen virker i sitt naturlige miljø. En forutsetning for et slikt forskningsdesign, er at forskeren plasserer seg i kulturen som skal studeres over en lengre tidsperiode (Postholm, 2005). Forskeren innhenter i denne perioden data, hovedsakelig gjennom deltagende observasjon og samtaler med menneskene i kulturen. Deltagende observasjon og formelle og uformelle samtaler er de mest sentrale og mest vanlige metoder for innsamling av data innenfor etnografisk forskningsdesign. Det er også disse metodene som er brukt i denne masterstudien.

Forskning som bygger på en etnografisk metode krever, som all annen kvalitativ forskning, at forskeren møter kulturen og menneskene som er i fokus på en åpen måte. Det er ingen retningslinjer for hvordan forskeren skal møte kulturen, men det hersker enighet om at forskeren må i forkant av studien lese seg opp og møte forskningsfeltet med forutsette problemstillinger (Fetterman 1998; Hammersley & Atkinson 1996; Malinowski 1922). Forskeren må derfor ha en formening om hva som skal studeres innenfor kulturen. Samtidig som forskeren må ha relevant kunnskap, må forskeren også være villig til å forkaste hypoteser og ideer dersom det kreves ut fra dataene som samles inn, og på denne måten legge til side subjektive holdninger og teorier (Malinowski, 1922).

4.2 Innsamling av data

For å kunne beskrive elevenes instrumentelle skapelsesprosess og finne eventuelle hindre på veien til instrumentell skapelse, var det naturlig å hente data i situasjoner der elevene brukte CAS. Elevene brukte CAS hovedsakelig ved to situasjoner: i undervisningssituasjon og i periodene de arbeidet med oppgaver på utlevert arbeidsplan. I tillegg var det relevant å få nærmere innsyn i elevenes egne tanker rundt CAS. Derfor vil jeg videre gjøre rede for to metoder brukt for innsamling av data: deltagende observasjon og intervju.

4.2.1 Deltagende observasjon

Deltagende observasjon er en sentral metode ved bruk av en etnografisk forskningsmetode og kjennetegnes ved at observatøren søker å bli en del av den observerte gruppen (Robson & McCartan, 2015). Denne typen observasjon skiller seg fra andre typer observasjon gjennom en større grad av deltakelse i gruppen som studeres. Dette medførte at jeg pratet med informantene i friminutt og andre settinger utenfor skoletimene, men da undervisningen startet trakk jeg meg tilbake og forsøkte å bli så anonym som mulig. Fordelen med å prate med elevene når settingen tillot det, var at elevene kanskje ble mer komfortable med min tilstedeværelse og min rolle som deltagende observatør.

Underveis i observasjonen ble det brukt videokamera som en støtte til innhenting av data. Informantene ble informert om at videokamera ble tatt i bruk, noe som også Postholm (2005) påpeker som viktig. Formålet med bruk av videokamera, var muligheten til å fange opp de små detaljene som forekommer ved bruk av CAS; alt fra hvilket likhetstegn informantene trykker på, til samtalen elevene imellom.

4.2.2 Intervju

I tillegg til uformelle samtaler underveis i datainnsamlingen, ble elevene som deltok intervjuet noen uker etter datainnsamlingsfasen med deltagende observasjon. Kvalitative intervju egner seg for å få tilgang på informasjon som er vanskelig å fange opp på andre måter (Postholm, 2005). Hensikten med intervjuet var å finne ut av elevenes egne tanker rundt interesse og motivasjon for å benytte seg av CAS ved løsning av matematikkoppgaver, i tillegg til noen spesifikke spørsmål knyttet til hendelser fra elevarbeidet. Til dette ble det benyttet et intervju som kan kategoriseres som et semi-strukturert intervju (se vedlegg). Robson og McCartan (2015) beskriver at dette formatet tar utgangspunkt i en intervjuguide, men tillater også en omrokkering av spørsmål og gir mulighet til å stille oppfølgingsspørsmål dersom informantenes utsagn er av ytterligere interesse.

Elevene ble intervjuet parvis, noe som begrunnes ut fra teoretiske og praktiske årsaker. Gruppeintervju er egnet for å hjelpe informantene til å komme på hendelser eller utdype hverandres beskrivelser av hendelser eller tanker (Postholm, 2005). Grunnet tidspress for å få gjennomført intervjuet, ble det også fornuftig at de ble intervjuet parvis.

4.3 Utvalg og gjennomføring

Metoden for innsamling av data krevde to grupper informanter; én lærer, og en elevgruppe. Videre vil derfor de to utvalgene og kriterier for dem presenteres, for så å redegjøre for lærerens og elevenes bakgrunn. Dernest vil det i detalj beskrives hvordan datainnsamlingen foregikk i de fasene CAS var involvert.

4.3.1 Utvalg for studien

For å finne en lærer som kunne bidra i studien ble avdelingsleder på den aktuelle skolen kontaktet for å få tillatelse til å ta videre kontakt med aktuelle lærere. Primært fokus var å finne en lærer som var villig til å la meg gjennomføre studien i sin klasse, og deretter rekruttere elever i klassen for gjennomføring av datainnsamling.

Valg av lærer baserte seg på to hovedkriterier: (1) Læreren som ble rekruttert måtte undervise i en klasse hvor CAS ble brukt, og (2) CAS måtte brukes i den perioden som var avsatt til å gjennomføre studien. Det førstnevnte kriteriet setter flere begrensninger. Først måtte den aktuelle læreren undervise i matematikk på videregående skole fordi CAS ikke benyttes i grunnskolen. Videre brukes CAS i fem av ni matematikkfag i videregående skole, og læreren måtte derfor undervise i ett av disse fagene. I tillegg var det ønskelig, men ikke et kriterium, at læreren hadde god digital kompetanse, hadde noen års arbeidserfaring, og at faget undervises i andre eller tredje klasse. Jeg ønsket ikke å samle data i første klasse fordi jeg ønsket at elevene som deltok i studien skulle kjenne til hvordan programvaren fungerer og å kunne grunnleggende bruk av CAS. Å finne forskningsdeltagere som oppfyller alle krav på ønskelista kan være vanskelig, og mye blir overlatt til tilfeldighetene. Utvalget bærer derfor preg av det Robson og McCartan (2015) beskriver som bekvemmelighetsutvalg (Convenience Sampling). Begrepet refererer til at utvalget er et resultat av hvilke lærere som var tilgjengelig for deltagelse i den perioden studien skulle gjennomføres. Til tross for at bekvemmelighetsutvalg er utbredt i forskerverdenen, innebærer strategien at en ikke vet om funnene er representative (Robson & McCartan, 2015). Dette får konsekvenser for pålitelighet og gyldighet når funnene i denne studien presenteres. Forskeren må derfor være bevisst begrensningene og unngå å generalisere funnene som fremkommer.

Studien ble begrenset til å følge én lærer som følge av mengde datamateriale, tidsbegrensning, og bestemmelser ute i den aktuelle skolen. Gjennom bekjentskaper rekrutterte jeg en lærer som underviste i R1 på en stor videregående skole i en by i Trøndelag. Klassen jeg fulgte var én av to R1-klasser på den aktuelle skolen. I en periode på to uker fulgte jeg læreren og den respektive klassen i ti skoletimer á 45 minutter.

Andre steg gikk ut på å rekruttere fire til seks elever i klassen som skulle ta del i en arbeidsfase hvor de skulle jobbe med CAS, med et påfølgende intervju. Jeg ønsket fire til seks elever fordi det skulle være nok datamateriale, men ikke for mye. I forkant av rekrutteringen foreslo læreren 12 elever som kunne være aktuelle for denne type datainnsamling. For å unngå språklige utfordringer i intervjuene og ved oppgaveløsning bestod utvalget av elever som snakket godt norsk. I tillegg bestod utvalget av middels-eller høytpresterende elever. Dette begrunnes ut fra at det var ønskelig at elevene hadde en viss basiskunnskap i CAS, i tillegg til at det var ønskelig at større matematiske utfordringer skulle unngås da det potensielt kunne ta fokuset bort fra instrumentell skapelse. De 12 elevene ble samlet i et friminutt hvor jeg informerte dem om hva som skulle foregå, hvor lang tid det kom til å ta, og hva deres og min rolle i denne fasen gikk ut på. Etter litt betenkningstid meldte fire elever seg til å være informanter i en slik datainnsamling.

4.3.2 Lærerens og elevenes bakgrunn

Ved bruk av etnografisk forskning er det relevant å gi en beskrivelse av kulturen som studeres (Postholm, 2005). For å kunne beskrive utviklingen og prosessen for instrumentell skapelse, er det relevant å redegjøre noe for elevenes og lærerens bakgrunn, læringsmiljøet i klassen og elevenes erfaring med vektorer og CAS. Læreren, som videre i oppgaven omtales som Per, er tidlig i 40 årene, er utdannet sivilingeniør, og har ca. 15 års arbeidserfaring i videregående skole. Per virket på mange måter å beherske læreryrket. For det første utviste han en faglig trygghet, og virket komfortabel med bruken av CAS. For det andre hadde han en tilsynelatende god tone med elevene, noe som reflekteres i dialogen med elevene som vekslet mellom faglige samtaler og en bruk av humor som elevene virket å respondere positivt på. Samtidig utstrålte han autoritet og det var klare regler om eksempelvis mobilhotell i timene. Videre bestod R1-klassen av 25 elever, hvorav 24 var tilstede i samtlige timer det ble samlet data. Klassens gjennomsnittlige standpunktkarakter til jul var 4,6, noe som indikerer at det var en faglig sterk elevgruppe. Klassemiljøet fremstod som godt og det var lite bråk i timene.

Elevene var på tidspunktet for datainnsamlingen ute i sitt fjerde semester hvor de bruker CAS, så det var rimelig å anta at elevene kjente til programmets oppbygging og syntaks. I forkant av datainnsamlingen i R1-klassen hadde elevene lært om vektorer i 2-3 uker. Med unntak av elevene som tok Fysikk 1 som programfag hadde ikke elevene kjennskap til vektorer fra før. Undervisningen og oppgavene i perioden før datainnsamlingen foregikk hovedsakelig uten bruk av CAS, og elevene skal da ha lært hva vektorer er, addisjon og subtraksjon av vektorer, parallelle vektorer og om vektorkoordinater. I timen før datainnsamlingen startet hadde elevene lært noe CAS i forbindelse med vektorkoordinater. Dette innebar en innføring i eksisterende kommandoer i CAS tilknytning til vektorer, hvordan de tar absoluttverdien av en vektor m.m. Elevenes forventede kunnskap innenfor vektorer og CAS redegjøres nærmere for i oppgavens kapittel 5.1.

4.3.3 Undervisning med CAS

Lærerens undervisning ble dokumentert ved bruk av videokamera, og i denne fasen av datainnsamlingen fungerte jeg som deltagende observatør. I undervisningen plasserte jeg meg bakerst i klasserommet, litt ut til siden, og satte opp videokamera ved siden av meg. Læreren underviste uten min påvirkning og brukte CAS i situasjoner han selv fant det naturlig. Lærerens undervisning fremfor klassen ble filmet i sin helhet.

4.3.4 Elevarbeid med CAS

De fire elevene som frivillig meldte seg som informanter til denne datainnsamlingen, jobbet i par slik at to elever samarbeidet på én datamaskin. Årsaken til at elevene skulle samarbeide begrunnes ut fra at hva elevene sier og gjør er inngang til å undersøke om verktøyet, eller artefaktet, utvikles til å bli et meningsfullt verktøy (Drijvers & Gravemeijer, 2005). Samarbeidet var derfor et forsøk på å trigge en faglig samtale om CAS-verktøyet i seg selv og de matematiske problemene som kunne oppstå. For å kunne dokumentere handlinger og utsagn ble arbeidsfasen filmet. Filmkamera ble derfor satt opp bak elevene med fokus på skjermbildet på datamaskinen.

Planene for hvor arbeidet skulle foregå og min rolle i denne fasen endret seg underveis i feltarbeidet. I utgangspunktet skulle begge gruppene sitte på ett stort grupperom og min rolle skulle igjen være deltagende observatør. Etter arbeidet var det tiltenkt å gjennomføre et intervju knyttet til arbeidet. Av praktiske årsaker og andre vurderinger var ikke dette mulig. Akustikken i rommet og kvaliteten på kameraet tillot ikke begge parene på ett rom. Jeg besluttet derfor at elevene skulle sitte på hvert sitt grupperom og heller følge én gruppe av gangen. Min rolle endret seg ytterligere da jeg opplevde elevene tittet seg bakover og så på meg da de skulle foreta operasjoner i CAS. Jeg opplevde situasjonen som kunstig, og at påvirkningen av min tilstedeværelse i grupperommet var for stor. Elevene fikk derfor jobbe alene på grupperommene.

I likhet med resten av klassen jobbet parene med oppgaver på arbeidsplanen. Det ble tatt to videoopptak á 40 minutter per gruppe, tilsammen 160 minutter med elevarbeid med CAS. Det ble ikke gitt begrensninger utover at elevene måtte gjøre utvalgte oppgaver på CAS, og at de skulle sitte på eget rom. Hvordan de benyttet CAS var opp til elevene, og de hadde mulighet til å be om hjelp fra læreren da grupperommene lå i nær tilknytning til klasserommet. Oppgavene parene samarbeidet om var hentet fra Heir, Engeseth, Moe og Borgan (2015, s. 277-294) som til vanlig brukes i faget. For å få hensiktsmessige data knyttet til bruken av CAS, og ikke bruke for mye tid på oppgaveregning på papir eller lete etter relevante oppgaver, hadde jeg på forhånd plukket ut oppgavene som skulle gjøres. Ettersom læreren til vanlig oppmuntret elevene til å regne alle typer oppgaver i boka ved bruk av CAS, var de utvalgte oppgavene opprinnelig beregnet for løsning både med og uten hjelpemidler.

4.3.5 Analyse av datamaterialet

Nilssen (2012) beskriver at analyse av et datamateriale starter med en åpen koding. Åpen koding er inspirert fra forskningsmetoden "grounded theory", hvor det forsøkes å utvikle nye teorier som har basis i datamaterialet. En vellykket åpen koding krever at forskeren må møte datamaterialet med et åpent sinn, og forsøke å legge bort en eventuell forforståelse av datamaterialet. Dette er ifølge Nilssen en umulig oppgave. Koding er første steg i prosessen for å redusere en stor mengde datamateriale i mindre tema eller kategorier som fanger essensen i datamaterialet. Forskeren må derfor forenkle og prøve å få mening ut av datamaterialet, og videre prøve å identifisere og sette navn på mønstre.

For å bli kjent med datamaterialet startet jeg med å se gjennom filmene og høre på lydopptakene, og noterte alt som var av interesse. Deretter ble alle opptak transkribert ved bruk av enkelte transkripsjonsnøkler for å gjøre det videre arbeidet lettere.

I starten av databehandlingen var jeg preget av at elevene på videoopptakene tydelig strevde med bruken av artefaktet, og jeg identifiserte raskt at artefaktet tidvis oppførte seg på en merkelig måte. På ett tidspunkt så jeg bare hindre på veien til instrumentell skapelse. Derfor bestemte jeg tidlig at to kategorier skulle hete *hindre som kobles til registerskifte*, og *svakheter ved artefaktet*. Kategoriene fikk sitt navn på bakgrunn av en potensiell årsak til at elevene strevde med CAS, og tok sikte på å besvare ett av oppgavens to spørsmål: *hvilke hindre kan identifiseres på veien til instrumentell skapelse*?

Etter å ha sett gjennom datamaterialet flere ganger, ble det derimot tydelig at måtene elevene strevde på skilte seg fra hverandre, og at artefaktet viste ulike svakheter. I praksis gikk jeg derfor motsatt vei av hva åpen koding fordrer fordi jeg først fant hovedkategoriene og deretter underkategoriene.

Til hovedkategorien *hindre som kobles til registerskifte* laget jeg først tre underkategorier: (1) *manglende bruk av kommandoer i CAS,* (2) *manglende kjennskap til forskjellen mellom vektorkommandoene*, og (3) *manglende kunnskap om syntaks i CAS*. Senere i arbeidet med datamaterialet la jeg til enda en underkategori. Dette funnet ble først bestemt til å være et eget hovedfunn, fordi jeg ikke vurderte funnet til å ha noe med registerskifte å gjøre, men underveis i arbeidet endret jeg mening da mine observasjoner kunne knyttes til artefaktet sine rammebetingelser. Den siste underkategorien ble derfor: (4) *endrede rammer for løysing av oppgaver påvirker elevenes arbeidsprosess*. Den andre hovedkategorien, *svakheter ved artefaktet*, inneholder tre underkategorier: (i) *innebygde bugs som krever mot-operasjoner,* (ii) *inkonsekvens ved representasjoner og transformasjoner,* og (iii) *inkonsekvens på grunn av tilfeldige bugs.*

Gjennom ytterligere prosessering av datamaterialet var det særlig ett eksempel som tydelig viste at elevene hadde en positiv utvikling sett i lys av instrumentell skapelse. Elevene ble flinkere til å benytte CAS, noe som ble synlig ved at elevene etterhvert overkom hindene. Jeg kalte derfor én kategori: *utvikling identifiseres når elevene kommer over hindre.* Dette betydde også at elevenes møte med hindre førte til utvikling i bruk av artefaktet. En andre kategori ble derfor gitt navnet *hindre for skapelsesprosessen er aktive komponenter i instrumentalisering- og instrumenteringsprosessen*. Disse to kategoriene ble samlet til én hovedkategori kalt *elevenes utvikling av instrumentell skapelse*. Hovedkategorien tar sikte på å belyse oppgavens andre formål: *beskrive elevenes utvikling i bruk av artefaktet ved arbeid med matematikk.*

4.4 Etiske hensyn

Ved gjennomføringen av kvalitative undersøkelser er det viktig å ivareta etiske hensyn ved planlegging, gjennomføring og presentasjon av data. Etiske problemstillinger omhandler blant annet spørsmål om balansegangen mellom retten til å vite, og retten til privatliv og personvern (Robson & McCartan, 2015). Med bakgrunn i etnografisk forskning lå det til rette for en nær kontakt med forskningsdeltagerne, og bruken av videoopptak gjør deltagerne i datainnsamlingen sårbar for personidentifisering. Dette krever refleksjon rundt etiske problemstillinger. Åpenhet om prosessen før, under og etter datainnsamlingen har vært viktig for å opparbeide tillitt fra både skoleledelsen og forskningsdeltagerne. Thagaard (2013) beskriver tre etiske retningslinjer som må tilfredsstilles ved gjennomføring av slike studier: informert samtykke, konfidensialitet og konsekvenser for forskningsdeltagerne.

Forskningsstudien har fått godkjenning fra Personvernombudet for forskning ved Norsk senter for forskningsdata (NSD) før innsamling av data startet. Studien har fått prosjektnummer 947536. I henhold til retningslinjene til NSD, ble elever og lærer informert om forskningsprosjektet gjennom et informasjonsskriv som inneholdt informasjon om mine forpliktelser knyttet til anonymisering av deltagerne, sikker oppbevaring av datamateriale som kunne benyttes til personidentifisering, konsekvenser for deltagelse i studien og deltagernes rettigheter. Informasjonsskrivene ble delt ut av læreren i forkant av studien og elevene ble oppmuntret til å ta kontakt med meg dersom de hadde ytterligere spørsmål om deltakelsen eller studien generelt. Samtykke til deltakelse ble gitt ved fysisk innlevering av samtykkeskjema ved oppstart av datainnsamlingen. Siden forskningsdeltagerne var 17 år og eldre, var de gamle nok til selv å kunne samtykke til deltakelse.

4.5 Reliabilitet og validitet

Ved gjennomføring av en studie er det viktig å tenke på kvaliteten av studien. For å vurdere kvaliteten er det vanlig å benytte seg av begrepene reliabilitet, validitet og generaliserbarhet. Reliabilitet knyttes til om en annen forsker får samme resultat ved å anvende den samme metoden, mens validitet handler om tolkningene av datamaterialet er gyldige i forhold til den virkeligheten som er studert (Thagaard, 2013)

På generelt grunnlag er det vanskelig å si noe om reliabilitet innenfor kvalitativ forskning. I intervju vil eksempelvis svarene være annerledes dersom det benyttes andre informanter. Thagaard (2013, s. 202), med henvisning til Silverman, viser til at hvordan reliabiliteten i kvalitative studier kan styrkes gjennom det han kaller for ”low-inference descriptors”, altså å hente data som er mest mulig atskilt fra forskerens fortolkninger. I undervisning og elevarbeid ble datamaterialet samlet ved hjelp av videokamera. Ifølge Thagaard (2013) vil innsamling av data gjennom bruk av videokamera utvikle data som er mer uavhengig av forskerens oppfatninger enn notater. Videokamera har også evnen til å dokumentere handlinger og utsagn på et høyt detaljnivå som ikke kan dokumenteres på alternative måter. Dette styrker reliabiliteten i studien.

Validitet kan vurderes ved å se om tolkningene som er gjort og resultatene av undersøkelsen er representativ for virkeligheten som er studert (Thagaard, 2013). Ifølge Tjora (2010) kan studiens validitet styrkes ved å være åpen om hvordan forskningen har foregått. Med dette menes blant annet å redegjøre for de valgene som er tatt, og ved å la forskningen foregå innenfor rammer av faglighet. Studiens validitet kan i tillegg styrkes gjennom triangulering, altså å generere flere sett data (Robson, 2011). Robson beskriver videre at triangulering kan innebære datatriangulering, at flere datakilder genereres, eller observasjonstriangulering, hvor mer enn én observatør er inne. En annen form for triangulering vil være å kombinere kvalitative og kvantitative metoder, eller å legge flere teorier til grunn for analysearbeidet. Min studie ble triangulert ved at data ble samlet gjennom intervju og filming av elevarbeid i to ulike elevgrupper.

Rammene for denne studien tillot ikke å følge klassen så lenge som etnografisk forskning fordrer. Optimalt burde datainnsamlingen og observasjonen vart lengre enn to uker, helst flere måneder (Postholm, 2005). Mangel på tid til observasjonsfasen kan ha medført at flere faktorer i undervisning og arbeid med CAS ikke ble avdekket. Dette gjelder faktorer som både kunne gitt mer tyngde til resultatene, men også faktorer som kunne motsi resultatene som presenteres i oppgavens kapittel 5.

En svakhet ved etnografisk forskningsdesign, er potensiale for at min tilstedeværelse i miljøet har påvirket læreren eller elevene med tanke på atferd, arbeidsmåte, grad av elevaktivitet i undervisningen m.m. Dette kan naturlig nok ha fått konsekvenser for kvaliteten på innsamlet data. Det bør påpekes at denne svakheten gjelder etnografiske forskningsdesign generelt, da tilstedeværelsen av forskeren er uvanlig for miljøet i seg selv (Postholm 2005; Robson & McCartan 2015; Thagaard 2013). Det samme gjelder bruken av videokamera, da videokamera ikke hører hjemme i kulturens naturlige miljø.

5 Analyse og resultater

Denne delen av oppgaven deles videre inn i tre kapittel. Først vil det i kapittel 5.1 redegjøres for elevenes forventede kunnskap om vektorer i matematikk og i CAS. Den forventede kunnskapen vil benyttes av elevene i datainnsamlingen, og utgjør derfor grunnlaget for elevarbeidet i CAS. I innledningen ble oppgavens to hovedproblemstillinger presentert. Kapittel 5.2 vil besvare ”hvilke hindre kan identifiseres på veien til instrumentelle skapelse?”. Deretter vil kapittel 5.3 vil ta sikte på å ”beskrive elevenes utvikling i bruk av artefaktet ved arbeid med matematikk”, med hovedfokus på instrumentalisering- og instrumenteringsprosessene.

5.1 Forventet kunnskap om vektorer og vektorer i CAS

Når elevene skal arbeide med vektorer i CAS må elevene ha noe matematisk kunnskap og noe kjennskap til enkelte kommandoer i CAS. I forkant av datainnsamlingen skal elevene blant annet ha lært om hva vektorer er, vektorkoordinater, posisjonsvektorer, og de skal blant annet ha lært algoritmene presentert i tabell 5.1. For å kunne løse de matematiske oppgavene i CAS som inngikk i datainnsamlingen basert på elevarbeid, kreves det i tillegg at elevene kjenner til definisjonen av skalarproduktet, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(x^\circ)$, at $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$ hvis og bare hvis $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, og at den korteste avstanden fra et punkt P ned på linja l måles langs normalen fra P til linja.

Tabell 5.1: Algoritmer elevene er forventet å kunne på papir

Formel	**Formelen brukes til**
$[x_1, y_1] \pm [x_2, y_2] = [x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2]$	Addisjon og subtraksjon av to vektorer
$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$	Produserer en vektor mellom punktene $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$
$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$	Skalarmultiplikasjon av to vektorer
$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$	Finner lengden av $\vec{u} = [x, y]$

I tillegg er det enkelte kommandoer i CAS elevene bør kjenne til for å kunne utnytte artefaktet på en hensiktsmessig måte. Tabell 5.2 viser de ulike kommandoene elevene må kjenne til i forbindelse med vektorer. Tabellen inneholder også kommandoer som elevene ikke har lært i forbindelse med vektorer (se rad 6-10), men jeg velger å presentere disse kommandoene fordi elevene benytter dem i arbeidsprosessen.

Tabell 5.2: Kommandoer elevene benyttet seg av i CAS i GeoGebra 6.0.

Kommando	**Kommandoen finner/produserer**
(x, y)	Et punkt
$Vektor(< Startpunkt >, < Sluttpunkt >)$	En vektor mellom to punkt
$Vektor(< Punkt >)$	En posisjonsvektor
$\lvert a \rvert$	Lengden av $\vec{a}$
$Linje(< Punkt >, < Punkt >)$	En linje gjennom to punkt
$Avstand(< Punkt >, < Objekt >)$	Avstanden mellom et punkt og et objekt. Objektet kan eksempelvis være et punkt eller ei linje
$NormalLinje(< Punkt >, < Linje >)$	En normal fra et punkt ned på en linje
$NormalLinje(< Punkt >, < Linjestykke >)$	En normal fra et punkt ned på et linjestykke
$NormalLinje(< Punkt >, < Vektor >)$	En normal fra et punkt ned på en vektor
$Skjæring(< Funksjon >, < Funksjon >)$	Et skjæringspunkt mellom grafen til to funksjoner

Elevene kan definere eksempelvis $\overrightarrow{AB}$ som vektoren mellom to punkt ved å skrive $AB \coloneqq Vektor(A, B)$ i inndatafeltet. AB kan da benyttes i andre kommandoer. Det bør påpekes at vektorer representeres i tegnefeltet med startpunkt i origo. I tillegg kan det nevnes at elevene kjenner til algoritmene som vektorkommandoene benytter, og kan eksempelvis finne en vektor mellom to punkt og finne lengden av en vektor ved bruk av penn og papir. Elevene skal kunne sette opp ligninger ved å kombinere kommandoene for å finne eventuelle ukjente.

5.2 Hindre på veien til instrumentell skapelse

Gjennom analysen ble det identifisert hovedsakelig to hindre for instrumentell skapelse. Det første funnet presenteres i oppgavens kapittel 5.2.1 og omhandler *hindre som kobles til registerskifte*. I den forbindelse presenteres det fire mindre funn som presiseres ytterligere innledningsvis i kapittel 5.2.1. Det andre funnet, *svakheter ved artefaktet*, presenteres i kapittel 5.2.2, og viser at artefaktet påvirker subjektet gjennom at CAS ikke fungerer som det er ment til å gjøre. Også i dette funnet presenteres det mindre funn som utdypes i sitt respektive kapittel.

Matematikkoppgavene elevene har løst presenteres forløpende, og er hentet direkte fra Heir et al. (2015, s. 277-294). Deretter vil det følge et løsningsforslag som jeg har laget for den spesifikke oppgaven. Det kan påpekes at enkelte oppgaver gjentas fordi to elevgrupper løste de samme oppgavene. Løsningsforslagene presenteres bare første gang matematikkoppgaven presenteres.

5.2.1 Hindre som kobles til registerskifte

Første hinder på veien til instrumentell skapelse knyttes til at elevene skifter register. Dette reflekteres gjennom fire ulike funn: (1) *manglende bruk av kommandoer i CAS* viser at elevene i starten ikke benytter seg av vektorkommandoer når de skal løse oppgaver, men tar med seg en matematisk notasjon beregnet for papir direkte over i CAS. (2) *Manglende kjennskap til ulike typer vektorkommandoer*: Elevene benytter varianter av kommandoene som krever at de må bruke algoritmer inni kommandoen. (3) Elevene utviser *manglende kunnskap om syntaks i CAS*. (4) Arbeid i CAS medfører *endrede rammer for oppgaveløsning som påvirker elevenes arbeidsprosess*.

Manglende bruk av kommandoer i CAS

Elevene benytter seg ikke av kommandoer i CAS, men skriver ut algoritmene og uttrykkene med en matematisk notasjon beregnet for løsning på papir. Denne metoden, heretter omtalt som kalkulatormetoden, eliminerer noe av CAS-kommandoenes nytte fordi de har evnen til å gjøre arbeidet for elevene. I det følgende presenteres to eksempler hvor dette synliggjøres og årsaken til at elevene benytter metoden kan kobles til registerskifte.

Bruk CAS til å bestemme verdien av k slik at vektorene blir ortogonale.	
a) $[2, 5]\ og\ [k, 2]$	*b)* $[-1, k]\ og\ [3, 3]$
c) $[k, k-4]\ og\ [1, 3]$	*d)* $[k-1, 3]\ \ og\ [k, -2]$

Oppgave 1.

1	Vektor(2, 5) Vektor(k, 2) = 0
	Løs: **{k = −5}**
2	Vektor(−1, k) Vektor(3, 3) = 0
	Løs: **{k = 1}**
3	Vektor(k, k − 4) Vektor(1, 3) = 0
	Løs: **{k = 3}**
4	Vektor(k − 1, 3) Vektor(k, −2) = 0
	Løs: **{k = −2, k = 3}**

Figur 5.1: Mulig løsningsforslag for oppgave 1 som benytter vektorkommandoer.

1	$2 \cdot k + 5 \cdot 2 = 0$
	Løs: **{k = −5}**
2	$-1 \cdot 3 + k \cdot 3 = 0$
	Løs: **{k = 1}**
3	$k \cdot 1 + (k - 4) \cdot 3 = 0$
	Løs: **{k = 3}**
4	$(k - 1) \cdot k + 3 \cdot (-2) = 0$
	Løs: **{k = −2, k = 3}**

Figur 5.2: Gruppe 2 sin løsning av oppgave 1.

Ved å sammenligne løsningsmetodene i figur 5.1 og 5.2 kan det observeres at elevenes arbeid representert i figur 5.2 ikke benytter vektorkommandoene for å sette opp ligningene. Måten elevene har valgt å sette opp uttrykkene er identisk med hvordan elevene ville løse oppgaven på papir. To vektorer skalarmultipliseres ved å regne ut summen av x-koordinatene multiplisert og y-koordinatene multiplisert. Elevene har på denne måten skrevet ut algoritmen som ligger skjult i metoden i figur 5.1. Elevene har benyttet CAS som en slags kalkulator, fordi de setter opp uttrykket som skal løses og bare overlater regningen og de algebraiske operasjonene til CAS. Dette er en metode som ikke utnytter artefaktets syntaks og muligheter, fordi CAS har evnen til å gjøre operasjonene som elevene gjør manuelt, forutsatt at artefaktet benyttes på en måte som gjør det mulig.

Elevenes valg av metode kan ut fra teorien begrunnes ut fra at elevene nå jobber i et nytt register. I arbeid med vektorer har elevene hovedsakelig jobbet innenfor papir-registret, og nå kreves det at elevene skal arbeide innenfor CAS-registret. CAS og papir kan defineres som register fordi de tillater transformasjoner. CAS og papir betegnes som to ulike registre da den ene inneholder tegn, regler og konvensjoner som ikke kan benyttes i den andre, og vise versa. Dette kan eksemplifiseres ved å sammenligne rad 2 i tabell 5.1 og 5.2. Kommandoen i rad 2 tabell 5.2 inneholder en skjult algoritme som gjør at CAS foretar automatisk behandling i CAS, som produserer en vektor. Kommandoen vil ikke fungere på papir, og følgelig må elevene manuelt benytte algoritmen i rad 2 tabell 5.1. Motsetningsvis kan ikke elevene benytte algoritmen i rad 2 tabell 5.1 i CAS. Dersom elevene skriver $[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$ inn i algebrafeltet, vil det ikke produseres en vektor, men på grunn av konvensjoner i GeoGebra blir det et punkt. Vektorkommandoer må derfor brukes i CAS når det er snakk om vektorer. Et annet eksempel er at de to registrene inneholder ulike tegn og symboler. Eksempelvis benyttes ":=" til tilordninger i CAS. Dette er en notasjon som elevene trolig ikke har kjennskap til, og som ikke er nødvendig for løsning av matematikkoppgaver på papir. Ved arbeid i papir-registeret bruker også elevene vektorpiler, eksempelvis $\overrightarrow{AB},$ for å indikere at det matematiske objektet er en vektor og ikke et punkt. I CAS er det derimot ikke mulig å tegne vektorpiler.

Både papir- og CAS-registrene har interne registre. På papir kan vektorene eksempelvis uttrykkes både gjennom symbolspråk og grafisk, og det samme gjelder innenfor CAS-registeret. Forskjellen på de to registrene er at de har ulik syntaks, og at papir-registret krever at brukeren av registret foretar manuelle transformasjoner. CAS-registret kan derimot foreta noen automatiske omdanninger. CAS har to interne registre: algebrafeltet og tegnefeltet. Algebrafeltet har evnen til å foreta automatiske behandlinger fordi kommandoene som benyttes har innebygde algoritmer. CAS kan foreta automatiske omdanninger fra algebrafeltet til tegnefeltet dersom to krav er oppfylt. For det første må det som skrives i inndatafeltet defineres, og for det andre kan det definerte kun bestå av kjente elementer. CAS tillater derimot ikke omdanning fra tegnefeltet til algebrafeltet. Dette kan eksemplifiseres. Dersom elevene kan tegner et linjestykke mellom A og B i tegnefeltet, AB, så vet ikke algebrafeltet at elevene har definert AB. Elevene kan derfor ikke benytte seg av AB i algebrafeltet.

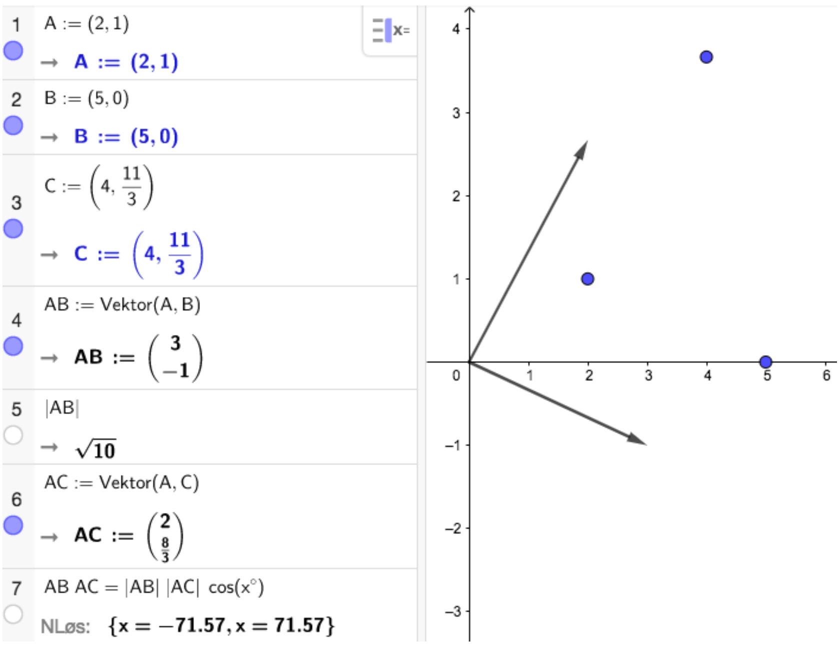
Kalkulatormetoden elevene benytter seg av i figur 5.2, viser at elevene løfter syntaksen fra papir-registeret direkte over i CAS-registeret ved at de skriver i algebrafeltet på samme måte som de gjør på papir. I mer komplekse oppgaver blir bruken av kalkulatormetoden lite hensiktsmessig, siden elevene foretar seg operasjoner som CAS kan gjøre for dem. Dette synliggjøres i påfølgende oppgave hvor det tas utgangspunkt i deler av elevenes fremgangsmåte.

Punktene $A(2, 1)$, $B(5, 0)$ og $C(4, \frac{11}{3})$ er hjørner i trekanten ABC.

a) Finn lengden av $\overrightarrow{AB}$.

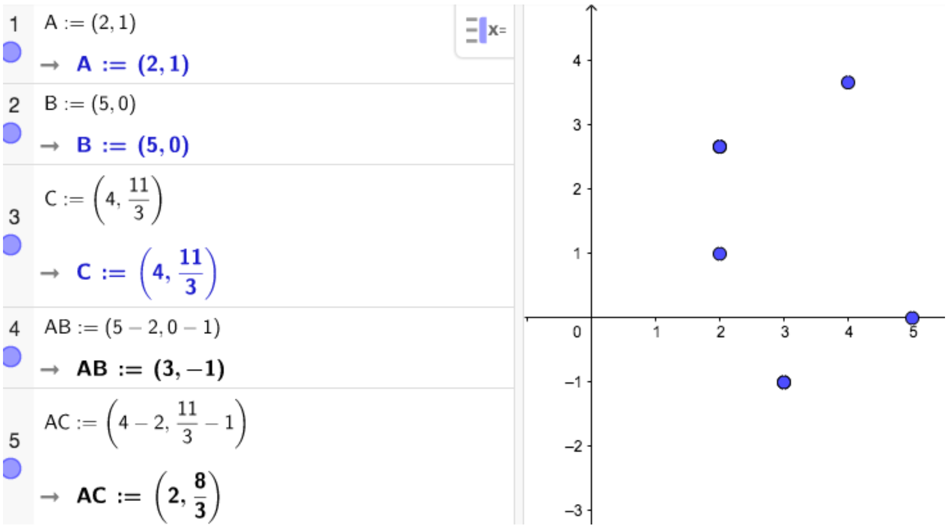
b) Bruk skalarproduktet til å finne vinkelen mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

Oppgave 2



Figur 5.3: Mulig løsningsforslag for oppgave 2.

Det behov for å tolke outputen, $x = -71{,}57$, $x = 71{,}57$, fra rad 6 figur 5.3. Den negative vinkelen oppnås ved å gå med klokka, fra $\overrightarrow{AB}$ til $\overrightarrow{AC}$ indikerer vinkelen i fjerde kvadrant. Motsatt vil $x = 71{,}57$ oppnås ved å gå $\overrightarrow{AC}$ til $\overrightarrow{AB}$ som indikerer vinkelen mellom vektoren i første kvadrant. For elevene er det kun aktuelt å benytte den positive løsningen, da det tas høyde for den negative løsningen på et senere matematikkfag (R2).



Figur 5.4: Første del av løsning på oppgave 2. Elevene finner vektorene AB og AC som et ledd i å finne vinkelen mellom dem.

Figur 5.4 viser hvordan elevene løfter syntaksen fra papir-registeret over i CAS-registeret. En vektor som går fra $A(x_1, y_1)$ til $B(x_2, y_2)$ kan skrives som $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. I figur 5.4, rad 4 og 5, kan det legges merke til hvordan elevene finner vektor AB og vektor AC. Elevene bruker algoritmen som gir dem vektoren når elevene gjør oppgaven innenfor papir-registeret, i motsetning til å utnytte artefaktets potensiale som vist i figur 5.3, rad 4 og 6.

Matematisk sett er det vektorer de har funnet, men på grunn av konvensjoner i GeoGebra blir AB og AC i figur 5.4 definert som punkter. Punkter i algebrafeltet i GeoGebra står som horisontale koordinater i utdatafeltet, mens vektorer står vertikalt. Så fremt man kjenner disse konvensjonene, kan omdanningen fra algebrafeltet til tegnefeltet avsløre at GeoGebra tolker AB og AC som punkter. Dette avsløres ved at AB og AC står horisontal i algebrafeltet, i tillegg til at det er fem punkter i tegnefeltet i figur 5.4. Hvordan CAS responderer på punktene AB og AC når de skal finne vinkelen mellom dem vil jeg gjøre rede for senere i resultatdelen.

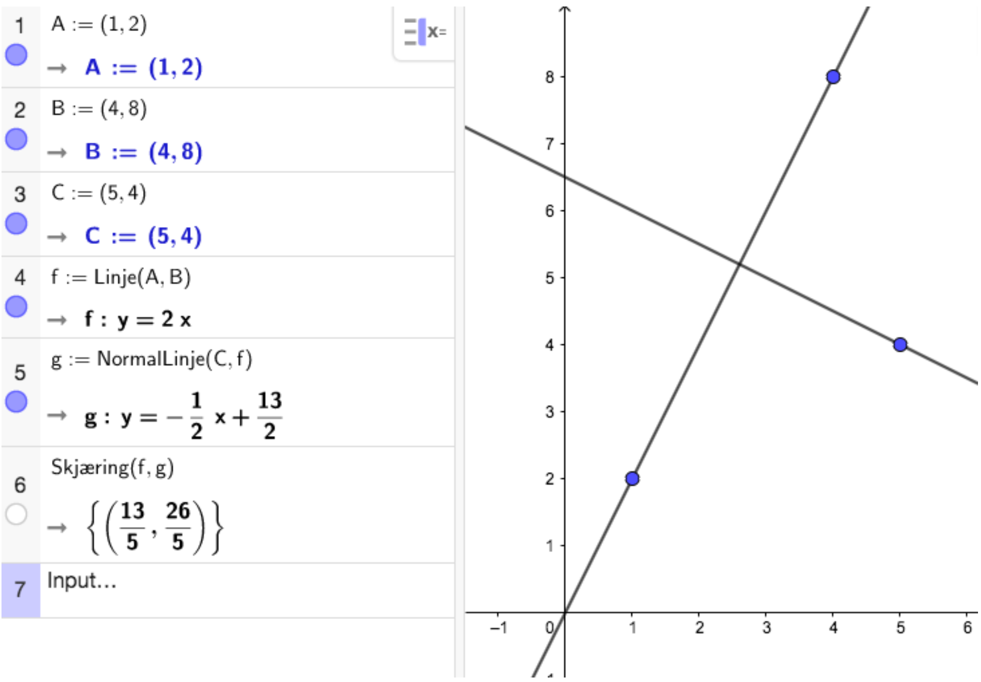
Kommandoer GeoGebra kan falle inn under det Duval (2017) beskriver som koder. Kommandoer kan betegnes som koder, fordi en kommando i seg selv består av en sekvens av bokstaver, og sammensetningen av bokstavene representerer i dette tilfellet en idé eller et matematisk objekt. I kommandoen ligger det også en innebygd algoritme som igjen består av sekvenser av symboler. Dersom kommandoene i GeoGebra fungerer som koder, kan ikke elevene benytte seg av kodene før de er blir oppmerksomme på at de eksisterer. Kunnskap om vektorkommandoene blir derfor en forutsetning for å kunne benytte CAS-registeret på en hensiktsmessig måte i arbeid med vektorer.

Manglende kjennskap til ulike typer vektorkommandoer

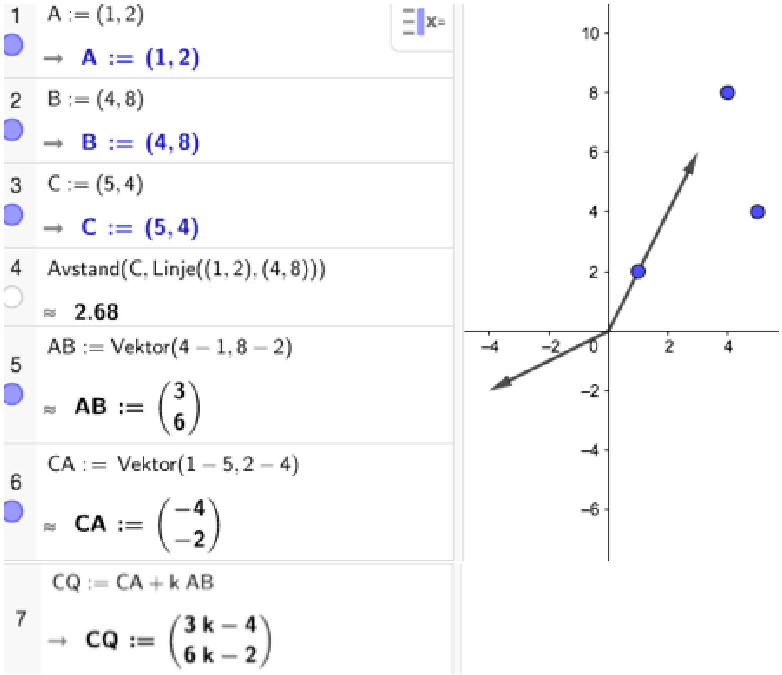
Fra kalkulatormetoden skjedde en videre utvikling da elevene begynte å benytte seg av kommandoene. Fordi elevene valgte én spesifikk variant av kommandoene, krevde det at kommandoen ble brukt i kombinasjon med kalkulatormetoden. Dette reflekteres i deler av elevenes arbeid med å løse følgende oppgave:

Mellom A og B går det en vei. Fra C skal kommunen lage en ny vei som gir forbindelse med veien AB. Koordinatene til punktene er gitt ved $A = (1, 2)$, $B = (4, 8)$ og $C = (5, 4)$. Alle lengdemål er i kilometer. Hvor må denne veien treffe AB for at den skal bli kortest mulig.

Oppgave 3.



Figur 5.5: Mulig løsningsforslag for oppgave 3.



Figur 5.6: Elevene finner vektorene AB og CA som et ledd i å løse oppgave 3.

Input i rad 5 og 6 i figur 5.6 er en kombinasjon av algoritmer fra papir-registeret (kalkulatormetoden) og bruk av CAS-kommando. At elevene starter å ta i bruk vektorkommandoer viser en utvikling knyttet til instrumentaliserings-prosessen, fordi elevene begynner å benytte seg av muligheter som gjør at input resulterer i faktiske vektorer. Elevene bruker vektorkommandoen for posisjonsvektor og benytter seg av en algoritme fra papir-registeret, inni kommandoen. Elevene viser dermed at de kjenner til én av kommandoene som gir dem vektorer.

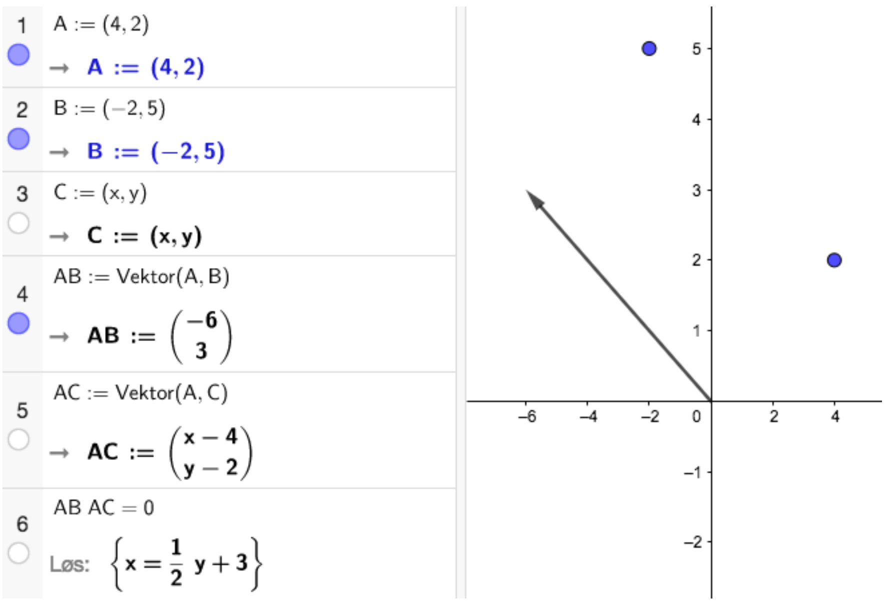
Løsningsforslaget i figur 5.5 og elevarbeidet i figur 5.6 skiller seg fra hverandre hovedsakelig ved valg av løsningsstrategi. I arbeidet pekte elevene, i tegnefeltet, på punktet hvor linja fra C ned på $\overleftrightarrow{AB}$ skjærer $\overline{AB}$, og kalte skjæringspunktet for Q. Elevene forsøkte å uttrykke $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{AB}$ (rad 7, figur 5.6), før de stoppet opp. Strategien hadde ledet frem ved å benytte uttrykket for $\overrightarrow{CQ}$, i kombinasjon med at $\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Da kunne elevene funnet k og deretter Q. Strategien elevene benyttet i sitt forsøk på å løse oppgaven er slik de ville løst den ved bruk en fremgangsmåte i papir-registeret og er lett gjenkjennelig i Heir et al. (2015, s. 293), men metoden blir raskt noe kompleks i CAS. Dette indikerer at fremgangsmåten innenfor papir-registeret også løftes over i CAS, og at løsningsstrategi som egner seg i papir-registeret ikke nødvendigvis egner seg i CAS-registeret. Registerskifte kan derfor innebære at elevene må benytte alternative løsningsstrategier, som igjen innebærer bruk av andre bruksskjema. Hvilke fremgangsmetoder elevene bruker ved arbeid med CAS flyter over i andre funn, og det er vanskelig å sette et tydelig skille mellom funnene fordi de henger sammen. Elevenes fremgangsmetoder får mer oppmerksomhet i funnet *endrede rammer for løysing av oppgaver påvirker elevenes arbeidsprosess*.

Manglende kunnskap om syntaks i CAS

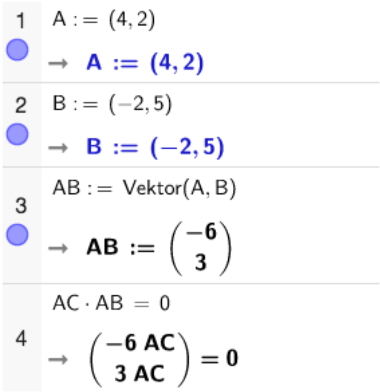
Elevene må lære å kjenne CAS sin syntaks for å kunne bruke verktøyet på en hensiktsmessig måte. Det vil nå presenteres et eksempel hvor elevene forsøker å løse en matematikkoppgave ved å skrive noe i inndatafeltet som CAS ikke forstår.

Vi har gitt punktene $A = (4, 2)$ og $B = (-2, 5)$. Finn koordinatene til et punkt C slik at $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$.

Oppgave 4.



Figur 5.7: Mulig løsningsforslag på oppgave 4. Output i rad 6 gir en generell løsning på oppgaven.



Figur 5.8: Elevenes forsøk på å løse oppgave 4.

Figur 5.8 viser at elevene benytter seg av en ugyldig syntaks, og elevene får erfare hvordan CAS kommuniserer og dens begrensninger i å forstå hva brukeren forsøker å gjøre. Matematisk sett er elevenes fremgangsmåte korrekt, men idet elevene bruker koden AC i rad 4 i figur 5.8 oppfatter CAS AC som én variabel.

Syntaks i CAS kan knyttes til koder, på samme måte som kommandoer, fordi det handler om sammensetningen og rekkefølgen symbolene skal komme i for at CAS skal forstå hva brukeren ønsker at det skal utføre. Siden elevene bestemmer at AB skal representere et matematisk objekt, i dette tilfellet vektoren mellom punktene A og B, kan definering av $\overrightarrow{AB}$ betegnes som en kode. Ugyldig syntaks innebærer blant annet å bruke symboler som ikke har en mening.

CAS oppfatter AC som én variabel i rad 4 figur 5.8 fordi elevene ikke har bestemt at AC skal stå for vektoren mellom A og C, noe som må skje før koden kan AC benyttes. Når elevene gjør denne oppgaven i papir-registeret, så må de også ha uttrykk for vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ for å kunne multiplisere dem. Siden CAS har potensiale for å gjøre den algebraiske manipulasjonen for å løse ligningen, kan det lettere gå i glemmeboka at CAS også må vite hva $\overrightarrow{AC}$ er. Dette eksemplet handler derfor om utfordringer ved registerskifte fordi elevene må kode de matematiske objektene som er nødvendig for å løse oppgaven i CAS.

Endrede rammer for løysing av oppgaver påvirker elevenes arbeidsprosess

Når elevene arbeider i et annet register enn de er vant med innenfor vektorer, må også elevene tilpasse arbeidsmetodene til de rammebetingelsene CAS bærer med seg. Elevenes arbeidsprosess påvirkes ved at algebrafeltet ikke alltid tillater en systematisering av den matematiske tankeprosessen, altså fri skriving. Dette er en konsekvens av artefaktets syntaks og regler. Elevene må derfor vite nøyaktig hva de skal skrive når de skriver. I tillegg påvirkes elevenes arbeidsprosess gjennom feedback fra artefaktet som gjør at elevene prøver seg frem for å få riktig svar. Disse funnene fremkommer i påfølgende eksempler.

Finn $\lvert\vec{u}\rvert$ når $\vec{u}\cdot\vec{v} = 12$ når $\lvert\vec{v}\rvert = 15$, og vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved $\cos\angle(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Oppgave 5.

1 $\quad 12 = u \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

NLøs: $\{u = 1.13\}$

Figur 5.9: Mulig løsningsforslag for oppgave 5.

1 $\quad x \cdot 15 = 12$

Løs: $\left\{x = \frac{4}{5}\right\}$

Figur 5.10: Steg 1 i elevenes forsøk på å løse oppgave 5.

Elevene vet at $\vec{u}\cdot\vec{v} = 12$ og at $\lvert\vec{v}\rvert = 15$, og i figur 5.10 forsøker de å finne $\vec{u}$ eller $\lvert\vec{u}\rvert$ som et ledd i å løse oppgaven, og lar $\vec{u} = x$ eller $\lvert\vec{u}\rvert = x$. Hva x egentlig står for fremkommer ikke av datamaterialet. Elevene benytter uttrykket $\vec{u}\cdot\vec{v} = 12$ og erstatter $\vec{v}$ med $\lvert\vec{v}\rvert = 15$. Dette tyder på at de har regnet som om produktet av lengdene er 12.

2 $\quad \frac{4}{5} \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = x$

Figur 5.11: Steg 2 i elevenes forsøk på å løse oppgave 5.

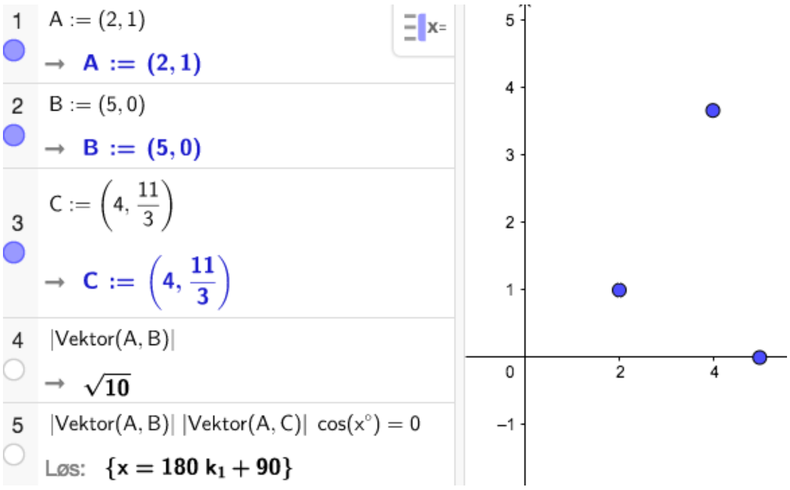
Outputen i figur 5.10, $x = \frac{4}{5}$, benyttes videre i figur 5.11. Hvis $x = \frac{4}{5}$ fra figur 5.10 tolkes som at $x = \lvert\vec{u}\rvert$, så er figur 5.11 et korrekt uttrykk for $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Arbeidet presentert i figurene 5.10 og 5.11 viser at elevene sliter med å løse oppgaven når de ikke vet hva de skal skrive i inndatafeltet. Ved sammenligning av arbeidsprosessen i papir- og CAS-registeret, vil arbeid i papir-registret i større grad tillate elevene å strukturere sin matematiske tankeprosess. Eksempelvis ved å arbeide med uttrykket presentert i figur 5.9 i papir-registeret, har elevene muligheten til å skrive opp definisjonen av skalarproduktet i forkant av eventuelle operasjoner og beregninger som gjøres. En slik strukturering kan skape en bevissthet rundt kjente og ukjente størrelser, og har potensiale til en større bevissthet rundt hva elevene faktisk finner i figur 5.10. Av to årsaker tilbyr ikke CAS muligheten for strukturering av tankeprosess. For det første kan ikke artefaktet benytte identisk matematisk notasjon for definisjonen av skalarproduktet uten feilmelding, altså kan ikke elevene skrive inn $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(x^{\circ})$. I tillegg kan algebrafeltet bare benyttes til tilordninger eller å utføre et arbeid i form av matematiske operasjoner. Å skrive definisjonen av skalarproduktet i algebrafeltet kan ikke betegnes som tilordning eller arbeid. For å benytte CAS og spesielt algebrafeltet til løysing av ligninger må derfor elevene vite nøyaktig hva de skal skrive inn. På denne bakgrunn vil artefaktet sin struktur og rammer for løysing av oppgaver påvirke subjektets arbeidsprosess og hvordan det løser oppgaver i algebrafeltet. Dette innebærer krav til andre kognitive ferdigheter i arbeidsprosessen hos subjektet. Hvordan artefaktet påvirker subjektet vil kunne knyttes til instrumenteringsprosessen.

Neste eksempel knyttes til at elevene får feil svar når de bruker ukorrekte og/eller mangelfulle matematiske uttrykk i inndatafeltet, noe som videre kan knyttes til mangelfull forståelse av de matematiske ideene som kreves for å løse oppgaven. Elevene responderer med å prøve seg frem for å få riktig svar. Elevarbeidet som presenteres bygger på oppgave 2, og har allerede blitt presentert med løsningsforslag i figur 5.3. Minner likevel om at oppgaven lyder som følger.

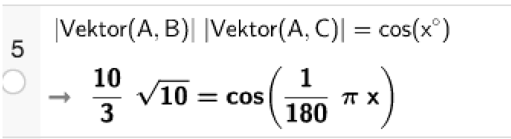
Punktene A $(2, 1)$, B $(5, 0)$ og C $(4, \frac{11}{3})$ er hjørner i trekanten ABC. c) Finn lengden av $\overrightarrow{AB}$. d) Bruk skalarproduktet til å finne vinkelen mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$."

Oppgave 2

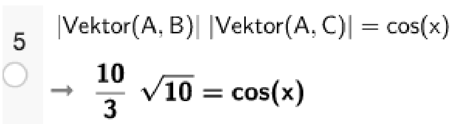


Figur 5.12: Elevarbeid. Skal finne vinkel mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

Hva elevene henter fra outputen i rad 5 figur 5.12 fremkommer ikke av datamaterialet. Jeg forstår heller ikke hvordan CAS har produsert outputen, men dette får ikke videre oppmerksomhet. Elevene forsøker videre å endre uttrykket i rad 5 i figur 5.12. To eksempler på hvordan de endret rad 5 presenteres i figur 5.13 og 5.14.



Figur 5.13: Elevarbeid fortsetter. $cos(x°)$ flyttes over.



Figur 5.14: Elevarbeid fortsetter. Gradetegnet fjernes.

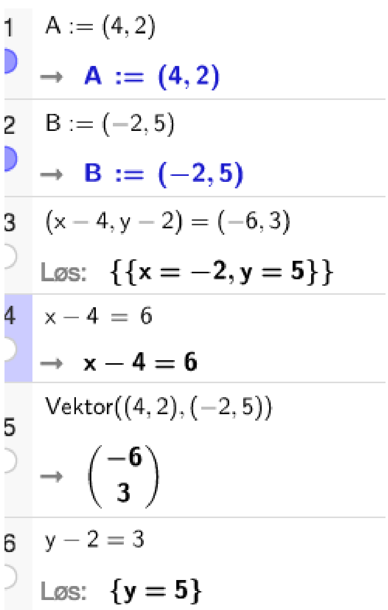
Figurene 5.12-5.14 representerer tre av elevenes flere forsøk på å løse oppgaven. Uttrykket i figur 5.12 rad 5 er mangelfullt, fordi elevene har satt uttrykket lik 0. Uttrykket skal egentlig være lik skalarproduktet av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$, og elevene bruker derfor ikke all informasjon som er oppgitt. En av elevene peker på outputen i rad 5 figur 5.12 og sier: ”*Hvis dette er null, så betyr jo det at det er* $90°$*. Da må jo cosinus være på den andre siden, for den vet vi ikke...*”. Elevene flyttet derfor $\cos(x°)$ over på den andre siden av likhetstegnet som vist i figur 5.13. Elevene har noe rett i det de sier: når $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ er vinkelen mellom vektorene $90°$. Jeg bruker ikke mer tid på å forklare hva elevene gjør feil eller hva de kan ha tenkt i forsøk på å løse oppgaven.

Ut fra eksemplene presentert i figur 5.12-5.14 er at det virker som om CAS påvirker elevene til å prøve seg fram og foreta ulike grep i håp om at svaret skal bli riktig. Dersom elevene ikke er fornøyde med outputen som produseres, stimulerer det elevene til å foreta operasjoner som skal løse problemet. Det finnes flere eksempler på andre operasjoner elevene foretok seg for å løse denne oppgaven, men eksemplene tilfører ikke noe nytt til resultatene og jeg valgte derfor å ikke ta dem med. Alle av elevenes forsøk på å løse oppgaven hadde tilfelles at de gjorde små grep i håp om at CAS produserte et riktig svar. Grepene gikk ut på å endre det matematiske uttrykket som vist i figur 5.13, eller å endre syntaksen i uttrykket. Eksempelvis ved å fjerne gradetegnet (se figur 5.14).

Neste oppgave viser også hvordan matematiske utfordringer skaper problemer når elevene skal benytte seg av CAS. I tillegg viser eksemplet at ved ett tilfelle besitter elevene nødvendig matematisk kunnskap for å løse oppgaven, men at de ikke får uttrykt det i algebrafeltet. Løsning for følgende matematikkoppgave er tidligere presentert i figur 5.7.

Vi har gitt punktene $A = (4, 2)$ og $B = (-2, 5)$. Finn koordinatene til et punkt C slik at $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$.

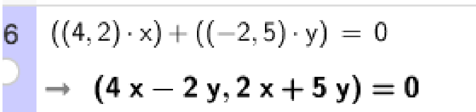
Oppgave 4



Figur 5.15: Første del av elevenes arbeid for å løse oppgave 4.

For å få verdiene i inndatafeltet i rad 3 i figur 5.15 har elevene brukt algoritmen for vektor mellom to punkt. Elevene har funnet $(x-4, y-2)$, ved å benytte algoritmen i rad 2 i tabell 5.1, og ved å la punktet $\text{A} = (4, 2)$ og trolig ved å tenke på C som (x, y). Elevene har altså funnet $\overrightarrow{AC}$. På samme måte har de funnet og $(-6{,}3) = (-2-4, 5-2)$, som er lik $\overrightarrow{AB}$. Uttrykket i rad 3 betyr da at elevene har satt $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$, som produserer en output som gir at vektorene er like, altså at $C = B$. Dette oppfyller ikke betingelsen $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$. For å løse oppgaven kan de finne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ som de har gjort, men for å få den generelle løsningen på oppgaven måtte elevene ha skrevet $(x-4, y-2) \cdot (-6{,}3) = 0$, eller et ekvivalent uttrykk.

Videre sier en av elevene: *"Vi må bruke den $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$."*



Figur 5.16: Elevarbeid del 2.

Eleven har rett i at algoritmen $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$ leder frem dersom $\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1)$ og $\overrightarrow{AC} = (x_2, y_2)$, men algoritmen som beskrives med ord kan ikke gjenkjennes i elevenes arbeid i figur 5.16. Elevenes utsagn tyder derfor på at de tenker riktig, men at de ikke får uttrykt disse tankene i CAS.

Igjen synliggjør eksemplet fra figur 5.16 elevenes utfordringer med tanke på arbeidsprosess. CAS sin oppbygging og struktur tillater ikke elevene å "kladde" eller strukturere hvordan de skal løse matematikkoppgaver på samme måte som når elevene gjør oppgaven på papir. På denne måten tvinges elever som jobber i CAS å hoppe over kladden som muliggjør en systematisering av hvilke matematiske objekter de har oppgitt, funnet og hvilke operasjoner som må gjøres med de matematiske objektene for å løse oppgaven. Det blir da et større hinder å formulere seg riktig i inndatafeltet. Dette reflekteres også i figur 5.16 hvor de tenker riktig, men uttrykker seg på en måte som ikke samsvarer med utsagnet. Så igjen har det med en overgang fra papir-registeret til CAS-registeret å gjøre. Elevene får ikke overført det de tenker i papir-registeret ($x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$) til CAS-registeret. Ut fra outputen kan også elevene se at svaret ikke er korrekt, men artefaktet gir ikke indikasjoner på hvor problemet ligger. På denne måten vil artefaktets struktur påvirke subjektet i arbeidsprosessen med å løse oppgaven.

Oppsummering

Uten grunnleggende kunnskap om syntaks kan ikke brukeren kommunisere med CAS, og uten kunnskap om kommandoene blir det mer hensiktsmessig å arbeide i papir-registeret. Dette betyr at elevene må utvikle bruksskjema i tilknytning til CAS. Utvikling av elevenes bruksskjema kommer til syne ved at syntaksen fra papir-registeret løftes over i CAS-registeret, og at de begynner å ta i bruk vektorkommandoer. Elevenes utfordringer knyttet til registerskifte påpekes av én av elevene i intervjuet som sier: *"Du vet ikke helt om det du skriver er riktig med tanke på hva CAS ønsker at du skal skrive inn..."* Eleven påpeker at selv om de kjenner til hvordan de skal løse oppgavene med penn og papir, er de usikre på hvordan dette fungerer i CAS. Innføring av bruken av artefaktet innenfor vektorer blir utfordrende for elevene, fordi de fremdeles er i prosessen med å kjenne til de kodene som er nødvendig for å foreta registerskifte på en god måte.

Eksemplene presentert i figur 5.10-5.14 viser at matematiske utfordringer skaper inngangsproblemer i bruken av CAS da de ikke vet nøyaktig hva de skal skrive inn i inndatafeltet. Elever trekker selv frem matematiske utfordringer som én av årsakene til at det er vanskelig å benytte seg av CAS: *"Jeg tror at hvis vi hadde kunnet matematikken bedre så hadde det vært lettere å bruke CAS. Når du er litt usikker på matematikken, og ganske usikker på CAS så... hvordan skal du gjøre det da?".* Grunnleggende matematisk kunnskap innenfor de ulike emnene er altså en forutsetning for at elevene skal kunne løse de spesifikke oppgavene ved bruk av artefaktet.

Matematisk usikkerhet fører til at elevene prøver seg frem i håp om å få riktig svar. Samtidig, når elevene har tilstrekkelig matematisk kunnskap, vil rammebetingelsene i CAS i disse tilfellene begrense en fri tankeprosess for systematisering av kjente, ukjente og løysing av oppgaven. CAS påvirker derfor elevenes arbeidsprosess, og løysing av matematikkoppgaver i CAS må koordineres på en annen måte enn i papir-registeret. Dette er kanskje det viktigste funnet i denne masteroppgaven, og i oppgavens kapittel 6.4 vil funnet få mer oppmerksomhet.

5.2.2 Svakheter ved artefaktet

CAS har vist seg å ha noen svakheter som påvirker elevene i deres benyttelse av artefaktet. Funnene deles i tre: (1) Innebygde bugs gjør at CAS foretar seg noen operasjoner som krever at brukeren må foreta nye mot-operasjoner for å få en output i et ønskelig format. (2) CAS fremstår som inkonsekvent ved representasjoner og transformasjoner. (3) CAS er inkonsekvent på grunn av tilfeldige bugs. Grunnet påvirkningen dette har på elevene, som fremkommer i intervjuene, kan dette funnet potensielt identifiseres som det største hinderet på veien til instrumentell skapelse fordi artefaktets atferd påvirker motivasjonen for å benytte CAS.

Innebygde bugs i CAS krever mot-operasjoner

Ved ett tilfelle foretok CAS seg operasjoner hvor brukeren av artefaktet må respondere med det som kan betegnes som merkelige mot-operasjoner for å få output på et ønskelig format. Eksemplet som benyttes er hentet fra Per sin undervisning. Per har til hensikt å vise elevene en av utfordringene de kan møte på når de skal finne vinkelen mellom to vektorer på CAS. Følgende eksempel er derfor hentet fra CAS-undervisningen, og figur 5.17-5.20 beskriver Per sin løsning på oppgaven. Oppgaven lyder som følger:

For to vektorer $\vec{u}$ *og* $\vec{v}$ har vi at $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ og $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. Finn $\angle(\vec{u}, \vec{v})$

Oppgave 5.

2 $8 = 3 \cdot 4 \cdot \cos(x^\circ)$

Løs: $\left\{ x = \frac{360\ k_1\ \pi - 180\ \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)}{\pi}, x = \frac{360\ k_1\ \pi + 180\ \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)}{\pi} \right\}$

Figur 5.17: Steg 1. Eksakt løsning for vinkelen mellom to vektorer.

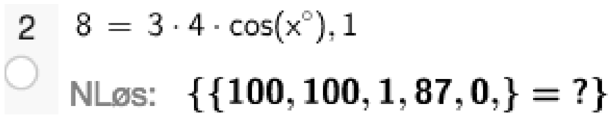
Videre trykker Per på ”x≈” for å få en numerisk verdi for vinkelen som vist i figur 5.18.

2 $8 = 3 \cdot 4\ \cos(x^\circ)$

NLøs: $\{x = 1128.19\}$

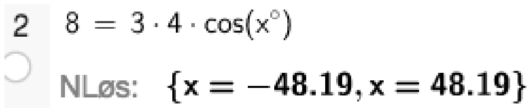
Figur 5.18: Steg 2. Numerisk løsning for én vinkel mellom to vektorer.

CAS gir ikke automatisk ut en vinkel i første kvadrant. For å komme rundt dette problemet viser Per frem et triks som gir vinkelen i første kvadrant. Dersom man skriver ",1" bak uttrykket i inndatafeltet gir CAS en output som beskrevet i figur 5.19.



Figur 5.19: Steg 3. Skriver ",1", med output som indikert.

Deretter tar man bort ",1" og får et svar i første og fjerde kvadrant.



Figur 5.20: Løsning for vinkel i første og fjerde kvadrant.

Ved å behandle det matematiske uttrykket i inndatafeltet i figur 5.17 i papir-registeret får man $\cos(x) = \frac{2}{3}$ og videre at $x = cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$, forutsatt at x er gitt i radianer. Dette er et svar elevene i større grad er vant med, men i tillegg kan man legge til $360°$ til vinkelen k antall ganger. Dette er ekvivalent med $x = cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) + 2k_1\pi$. Utdatafeltet i samme figur indikerer at uttrykket $x = cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) + 2k_1\pi$ er multiplisert med $\frac{180}{\pi}$ fordi vinkelen skulle gis i grader. Elevene som ble intervjuet i etterkant av datainnsamlingen fikk fremlagt figur 5.17 med hensikt i å finne ut om elevene forstod svaret, eller deler av svaret. Elevene fikk litt betenkningstid og lov til å prate sammen, men ingen av gruppene kom med forslag til hva deler av svaret betydde.

I figur 5.18 har Per benyttet "x≈" for å få en numerisk tilnærmet verdi for vinkelen, og en output på $x = 1128{,}19$. I dette tilfellet gjør CAS noe som det kan stilles spørsmålstegn til. For å få $x = 1128{,}19$ har CAS brukt $k_1 = 3$, men det er ukjent hvorfor den spesifikke verdien er valgt til fordel for andre verdier. Per viste hvordan elevene kommer rundt denne problematikken og introduserte ",1"-trikset som vist i figur 5.19. Hvorfor trikset fungerer er vanskelig å si noe om uten å kunne studere algoritmen CAS benytter. Outputen, som et resultat av trikset i figur 5.19, vises først som $\{\{100, 100, 1, 87, 0\} = ?\}$ som jeg ikke kan forklare. Videre fjernet Per ",1" fra inndatafeltet, og det resulterte i to vinkler. Hva som er årsaken til det CAS foretar seg, hvorfor $k_1=3$ og hvorfor ”1”-trikset fungerer kan jeg ikke forklare.

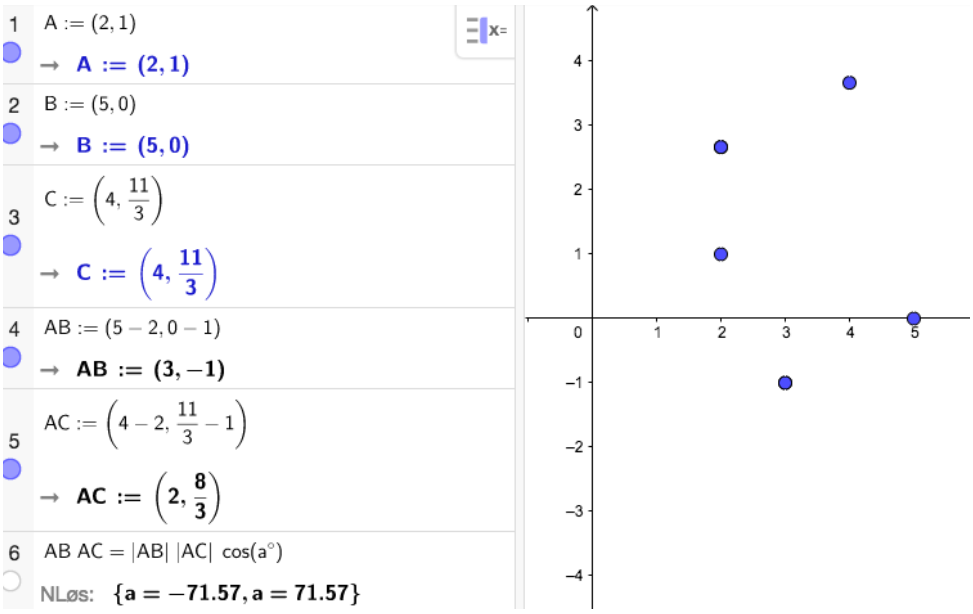
Elevene som ble intervjuet ble også vist dette eksemplet for å få innsyn i hvordan læring av slike triks påvirker dem. Elevene ble blant annet spurt om de ble nysgjerrige på hvorfor CAS-trikset fungerer. Én elev uttalte: ”*Det er ikke alltid det er så viktig for meg å vite hvorfor ting skjer, ofte har jeg nok med å vite hvordan jeg skal gjøre det for å komme frem til riktig svar...*”. En annen elev sa: ”*Vi prøver jo å tenke litt på hvorfor CAS gjør sånn og prøve å finne ut om vi har skrevet noe feil, eller om CAS ikke vil regne ut det du prøver å finne ut...*”. Siste utsagn refererte til at eleven trodde at han har gjort noe feil når han må skrive ”ulogiske ting*”* i algebrafeltet.

Inkonsekvens ved representasjoner og transformasjoner i CAS

Videre presenteres et eksempel hvor CAS foretar seg operasjoner som viser at artefaktet er inkonsekvent i representasjoner og i transformasjoner. Følgende matematikkoppgave bygger videre på et eksempel presentert i kapittel 5.2.1 med løsningsforslag i figur 5.3. Minner om at oppgaven lyder som følger:

Punktene A $(2, 1)$, B $(5, 0)$ og C $(4, \frac{11}{3})$ er hjørner i trekanten ABC. e) Finn lengden av $\overrightarrow{AB}$. f) Bruk skalarproduktet til å finne vinkelen mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.”

Oppgave 2.



Figur 5.21: Elevene finner vinkelen mellom to vektorer.

Siden løsningsforslaget for oppgaven er presentert tidligere tas det utgangspunkt i elevenes besvarelse. Ved å se på rad 4 og 5 og tegnefeltet i figur 5.21 kan det observeres at CAS har definert AB og AC som punkter. En slik observasjon forutsetter kunnskap om syntaksen i CAS. På bakgrunn av at CAS har definert AB og AC som punkter, skal det ikke være mulig å få outputen i rad 6 i figur 5.21. Lengden av et punkt er lik null, og det er ikke mulig å multiplisere to punkt. Altså må CAS tolke dem som vektorer.

Eksemplet viser at CAS er inkonsekvent på to forskjellige måter. For det første har CAS definert AB og AC definert som punkter, men likevel behandler CAS punktene som vektorer. Årsaken til dette er vanskelig å forklare uten å få tilgang til algoritmen, men det kan skyldes en feil i programvaren. For det andre kreves det ikke at elevene benytter seg av ",1" –trikset for å få en vinkel i første kvadrant, i motsetning til eksemplet presentert i figur 5.17-5.20.

På tross av inkonsekvens fra CAS endte elevene endte opp med riktig svar. Da elevene fant ut at svaret var riktig snudde de seg mot kamera og viste tommel opp samtidig som de smilte. Elevene la tilsynelatende ikke merke til de motsigende operasjonene CAS foretok, og inkonsekvensen i eksemplet er ganske god gjemt. På papir kan godt $(3, -1)$ bety en vektor. Det problematisk at CAS ikke alltid gir en feilmelding om gyldigheten av input fordi det kan bidra til misoppfatninger med tanke på bruken av artefaktet.

Inkonsekvens på grunn av tilfeldige bugs

Ifølge elevene som ble intervjuet, er det ikke uvanlig at CAS ikke responderer eller gjør feil når det brukes til både enkle og mer komplekse operasjoner. Elevene har også lært hva de skal gjøre når dette skjer. De to påfølgende eksemplene viser hvordan dette vil se ut. Første eksempel trenger ikke knyttes til en oppgave fordi det viser at CAS ikke responderer når brukeren gir beskjed om å gjennomføre enkle operasjoner.

Figur 5.22: CAS løser ikke enkel ligning.

Figur 5.22 viser hva som skjer da elevene benytter seg av funksjonen ”x=” for å produsere en output. Figuren viser at CAS ikke gir en output eller noen form for feilmelding da elevene forsøker å løse ligningen i CAS. Arbeidsarket som ble benyttet var ikke skrevet i tidligere da elevene hadde åpnet en ny fil for oppgaven. Elevene forklarer selv hvorfor de må bruke et nytt ark når de starter på en ny oppgave: ”... *For eksempel så må du ha ny fil når du skal gjøre ny oppgave fordi CAS husker noe av det du har gjort tidligere”.* I dette tilfellet var arket elevene benyttet ikke skrevet i fra før, og det er uvisst hvorfor CAS ikke utfører de behandlingene det får beskjed om å utføre. Elevene åpnet deretter et nyttarbeidsark, skrev inn uttrykket på nytt, og CAS produserte en output, $x = \frac{4}{5}$.

På tross av at CAS er inkonsekvent på hva det velger å løse og ikke, viser eksemplet at elevene tilpasser seg artefaktet ved å foreta handlinger som artefaktet lystrer. De vet at CAS skal klare å løse oppgaven og identifiserer hva de må gjøre for å klare å løse oppgaven. Noe som inngår i utviklingen av elevenes bruksskjema.

Neste eksempel som introduseres viser noe av det samme. De påfølgende figurene som presenteres reflekterer den andre elevgruppa sitt arbeid med å løse en oppgave som ble presentert i kapittel 5.2.1 med løsningsforslag i figur 5.1. Minner om at oppgaven lyder som følger.

Bruk CAS til å bestemme verdien av k slik at vektorene blir ortogonale.

a) $[2, 5]\ og\ [k, 2]$	*b)* $[-1, k]\ og\ [3, 3]$
c) $[k, k-4]\ og\ [1, 3]$	*d)* $[k-1, 3]\ \ og\ [k, -2]$

Oppgave 1.

$$(2 \cdot k) + (5 \cdot 2) = 0$$

Figur 5.23: CAS løser ikke ligning med k som ukjent.

Elevene bruker "x=" for å få en output, men CAS reagerer ikke og gir heller ikke en feilmelding. Den ene eleven sier: *"den vil ikke at vi skal bruke x er lik".* Responsen til elevene er å bytte ut variabelen k med x i inndatafeltet, men CAS reponerer på samme måte. Den andre eleven sier: *"har vi ødelagt ruta? Ta å prøv b-oppgaven i en annen rute"*. Elevene bytter ut k med x, og bruker "x="-funksjonen i menylinja.

$$(x \cdot 1) + ((x - 4) \cdot 3) = 0$$

Løs: $\{\mathbf{x = 3}\}$

Figur 5.24: CAS løser ligning med x som ukjent.

Elevene sjekker fasit og det er riktig. Elevene starter på neste deloppgave.

$$((k - 1) \cdot k) + (3 \cdot \ -2) = 0$$

Figur 5.25: Elevene skal løse ligning med k som ukjent.

Den ene eleven sier: *"du må huske og bruke x da".*

$$((x - 1) \cdot x) + (3 \cdot \ -2) = 0$$

Løs: $\{\mathbf{x = -2, x = 3}\}$

Figur 5.26: Elevene bytter ut k med x før de løser ligningen.

Årsaken til at CAS ikke ville regne ut uttrykket i figur 5.23 er antageligvis en bug. Problemet gjør seg ikke alltid gjeldende fordi CAS skal kunne behandle uttrykket uavhengig av hvilken variabel som benyttes. Dette bekreftes i elevenes arbeid presentert i figur 5.2 hvor CAS løste identiske ligninger med hensyn på k. Elevene påpeker også selv at det er noe galt med raden de jobber i.

Elevene viser at de vet at CAS har potensiale til å løse ligningen og tar derfor nødvendige grep, som for eksempel å bytte rute, for at CAS skal løse ligningen. Elevenes teknikker og utsagn i elevarbeidet indikerer at de er på vei til å beherske artefaktet i tilfeller hvor de vet at CAS skal klare å løse ligningen. Samtidig bytter elevene ut variabelen k til med x (se figur 5.24 og 5.26). Variabelskiftet kan bety én av to ting. Enten så tilpasser elevene seg artefaktet fordi de ser at CAS ikke løser uttrykket med hensyn på k, eller så har de en oppfatning av at CAS ikke kan løse ligning med k som variabel. Førstnevnte viser en utvikling av bruksskjema fordi de er på vei til å beherske artefaktet, og artefaktet virker tilbake på subjektet (instrumenteringsprosess). Sistnevnte viser et potensiale for utvikling av bruksskjema, og at instrumentaliseringsprosessen fremdeles pågår.

Elevene oppsummerer i intervjuet hvordan det påvirker dem i tilfeller hvor verktøyet foretar seg uventede handlinger. To av elevene forklarer at det er årsaken til at de pleier å hoppe over oppgaver som krever bruk av CAS. Alle fire elevene som deltok i elevarbeidet var tydelige på at de ikke likte å benytte seg av verktøyet som en konsekvens av at artefaktet ikke er pålitelig. Elevene uttalte blant annet: *"Ofte vet jeg ikke helt hva som skjer, men det kan jo hende at jeg ikke er flink nok på CAS... når det blir sånn så gjør det at det blir lite motiverende å holde på med..."* Den andre eleven utfyller: "*Man blir litt irritert egentlig, for det er småting som du ikke helt forstår. F.eks. så må du ha ny fil når du skal gjøre ny oppgave fordi CAS husker noe av det du har gjort tidligere".* En tredje elev sa: "*jeg får ikke så lyst til å bruke CAS når det ikke gjør det jeg har lyst til at det skal gjøre*". Tar man elevene bokstavelig i sine beskrivelser kan det tolkes som at programvarens tilfeldige atferd gjør at elevene ikke ønsker å benytte seg av det.

Oppsummering

I instrumentell skapelse er det en fordel om artefaktet responderer på en måte som er i tråd med elevenes handlinger. Når CAS ikke utfører de operasjonene det får beskjed om, eller gjør noe annet enn det får beskjed om å gjøre, mister elevene motivasjonen for å bruke artefaktet.

Artefaktets påvirkning på subjektet blir negativ. Det samme gjelder dersom bruken av CAS krever ekstra operasjoner for å svaret som etterspørres i oppgaven.

Til tross for at artefaktet ikke er konsekvent, viser resultatene at elevene utvikler bruksskjema for å håndtere tilfeller hvor artefaktet, grunnet tilfeldigheter, ikke utfører de operasjonene det får beskjed om å gjøre.

5.3 Elevenes utvikling av instrumentell skapelse

For å beskrive utviklingen av elevenes bruk av artefaktet i forbindelse med matematikk tar jeg utgangspunkt i instrumentaliserings- og instrumentaliseringsprosessen. Dette kapitlet deles inn i to deler (1) Hindre for skapelsesprosessen er aktive komponenter i instrumentaliserings- og instrumenteringsprosessen. (2) Utvikling identifiseres når elevene kommer over hindre.

5.3.1 Hindre for skapelsesprosessen er aktive komponenter i instrumentaliserings- og instrumenteringsprosessen

Eksemplene som identifiserer hindre på veien til instrumentell skapelse, i oppgavens kapittel 5.2, reflekterte noen tilfeller hvor instrumentalisering- og instrumenteringsprosessen var aktive. Hindrene oppsummeres og presiseres derfor i lys av instrumentalisering- og instrumenteringsprosessen med hensikt på å beskrive elevenes utvikling i bruk av artefaktet ved arbeid med matematikk.

Instrumentaliseringsprosessen er knyttet til artefaktet og kjennetegnes som nevnt ved at subjektet blir kjent med artefaktets muligheter, begrensninger og oppbygging. Elevene kjenner til elementær bruk og artefaktets oppbygging da de har brukt CAS i mer enn tre semester. Instrumentaliseringsprosessen og elevenes utvikling baserer seg derfor først og fremst på artefaktets muligheter og begrensninger ved arbeid med vektorer. Utfordringene elevene møtte i elevarbeidet i oppgavens kapittel 5.2 synliggjør at elevene ble kjent med artefaktet i tilknytning til vektorer.

Funnene *manglende bruk av kommandoer i CAS, manglende kjennskap til de ulike vektorkommandoene* og *manglende kunnskap om syntaks* knyttes til instrumentaliserings-prosessen. Elevene innledet arbeidet med å løfte en matematisk notasjon fra papir-registret direkte over i CAS, og viste hvordan de kunne benytte verktøyet til ligningsløsning (se eksempelvis figur 5.2). For det første synliggjør elevenes metoder en utvikling fordi de benyttet CAS innenfor et nytt matematisk emne. For det andre viste elevene at de kjente til at CAS kan benyttes for å løse ligninger, noe som viste at elevene på forhånd hadde utviklet bruksskjema knyttet til ligningsløsning. Videre utviklet elevenes metode seg til en kombinasjon av bruk av kommando og bruk av algoritmer inni kommandoen (se figur 5.6). Da elevene tok i bruk én av vektorkommandoene CAS tilbyr ble instrumentaliseringsprosessen synliggjort gjennom at de benytter noen av mulighetene CAS tilbyr. Da identifiseres også et utviklet bruksskjema knyttet til bruk av vektorkommandoer. Figur 5.8 reflekterte at elevene erfarte noen av CAS sine begrensninger da de brukte en ulovlig syntaks. Viktigheten av å lære hvordan subjektet kan kommunisere med CAS og inngår i elementær bruk av artefaktet og instrumentaliseringsprosessen.

Gjennom det fjerde funnet i oppgavens kapittel 5.1 fremgår det at CAS medfører at *endrede rammer for løysing av oppgaver påvirker elevenes arbeidsprosess.* Dette funnet knytter seg sterkest til instrumenteringsprosessen fordi det handler om at artefaktet påvirker elevene med tanke på hvordan de begår seg ved løysing av matematikkoppgaver i CAS. For det første gjenspeiles dette i at output fra artefaktet stimulerer til at elevene prøver seg frem. For det andre vil artefaktet sin syntaks og regler ha betydning for hvordan elevene kan uttrykke seg, det begrenser mulighetene for systematisering av kjente, ukjente og løysing av oppgaven. Hvordan systematiseringen foregår i artefaktet vil derfor forme subjektet med tanke på hvordan de forsøker å løse oppgaven. Instrumenteringsprosessen kan videre innebære utvikling av nye bruksskjema fordi elevene får erfare hva som fungerer og ikke.

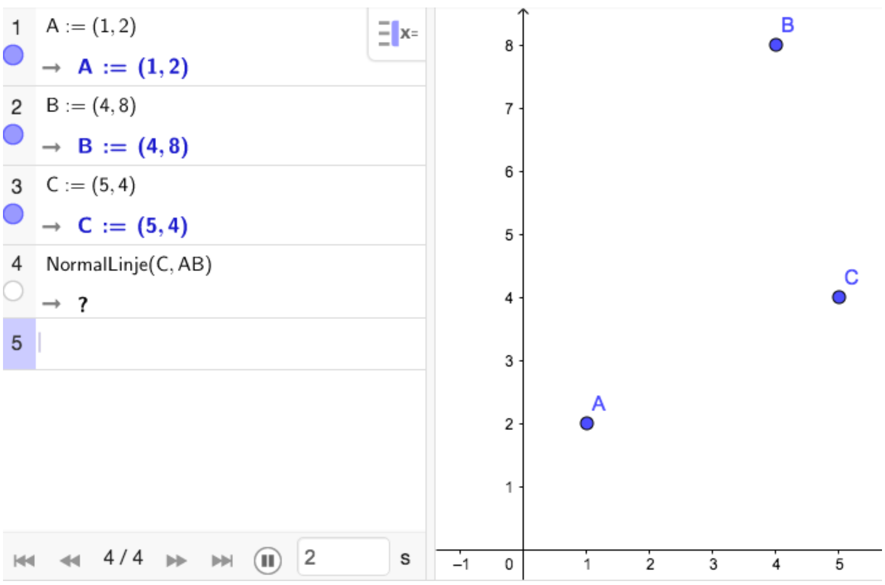
Funnet, *svakheter ved artefaktet*, kan knyttes til både instrumentaliserings- og instrumenteringsprosessen. Når det oppstår tilfeldige bugs (se eksempelvis figur 5.22) kreves det av elevene at de vet hva de må gjøre når artefaktet ikke oppfører seg som det skal. Det kreves også at elevene kjenner til operasjonene som er nødvendige for å få en ønsket output (figur 5.19). De to eksemplene handler om å bli kjent med begrensningene i CAS og å utvikle bruksskjema for å håndtere dem. Samtidig handler det om å identifisere at artefaktet skal klare å utføre de operasjonene som det får beskjed om. Artefaktet påvirker derfor subjektet til å være kritisk til en output som produseres, og videre påvirkning skjer når elevene tilpasser seg artefaktet (se eksempel 5.23-5.26). En mer uheldig påvirkning på subjektet ved tilfeldige bugs forklares av elevene: *"jeg får ikke så lyst til å bruke CAS når det ikke gjør det jeg har lyst til at det skal gjøre*".

5.3.2 Utvikling identifiseres når elevene kommer over hindre

I denne delen av oppgaven vil det presenteres ett lengre eksempel som synliggjør elevenes utvikling i bruk av artefaktet. Det finnes flere eksempler som kan støtte opp om den identifiserte utviklingen, men det valgte eksemplet får frem de fenomenene jeg har grunnlag for å si noe om. Eksemplet viser noen av utfordringene presentert i oppgavens kapittel 5.2.1 som elevene tar grep om og løser. Hindrene som kommes over vil knyttes til instrumentaliserings- og instrumenteringsprosessen. Matematikkoppgaven som eksemplet baserer seg på var den siste oppgaven elevgruppen gjorde i datainnsamlingen, og løsningsforslag for oppgaven ble presentert i figur 5.5.

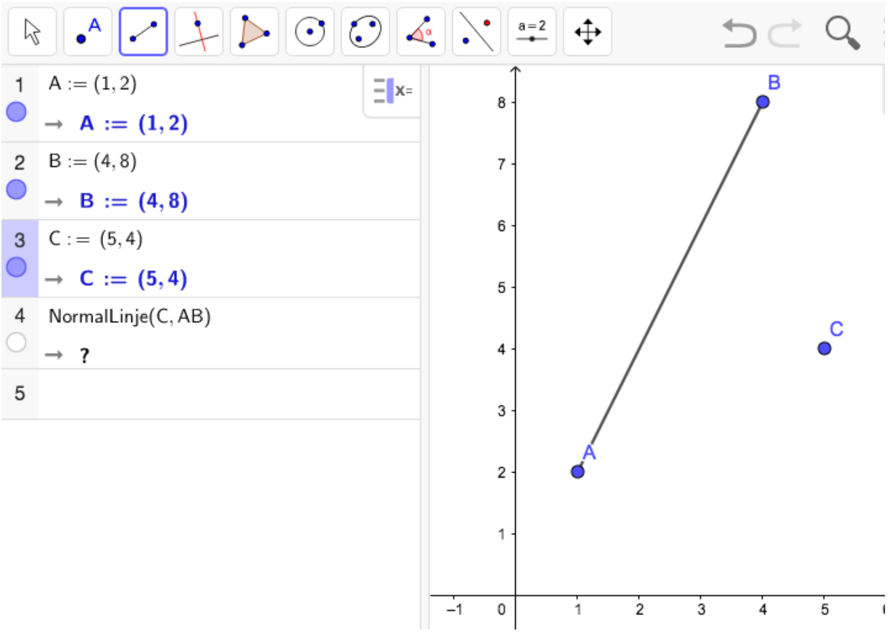
Mellom A og B går det en vei. Fra C skal kommunen lage en ny vei som gir forbindelse med veien AB. Koordinatene til punktene er gitt ved $A = (1, 2)$, $B = (4, 8)$ og $C = (5, 4)$. Alle lengdemål er i kilometer. Hvor må denne veien treffe AB for at den skal bli kortest mulig.

Oppgave 3.



Figur 5.27: Første del av elevarbeid. Definerer punktene A, B, C og bruker kommandoen NormalLinje som indikert i rad 4.

I figur 5.27 rad 4 benytter elevene seg av kommandoen $NormalLinje(< Punkt >,$ $< Linje >)$, en kommando som elevene har lært i forbindelse med et tidligere emne. Outputen i rad 4, "?", indikerer at kommandoen ikke er mulig. En elev uttaler: *"Ja, den vet* *ikke at AB er ei linje"*. Elevenes respons er å trykke seg over i tegnefeltet og benytte menyfunksjoner for å tegne et linjestykke mellom to punkt (se figur 5.28).



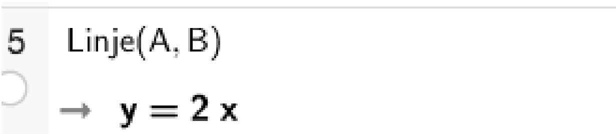
Figur 5.28: Andre del av elevarbeid. Tegner linjestykke mellom A og B, og benytter kommando som indikert i rad 4.

Etter å ha tegnet linjestykket mellom A og B, $\overline{AB}$, forsøker elevene på nytt å benytte seg av kommandoen, $NormalLinje(< Punkt >, < Linjestykke >)$, indikert i figur 5.28, rad 4, med samme output fra CAS. Den ene eleven sier: "*Tror han ikke nå at dette er en da?"*.

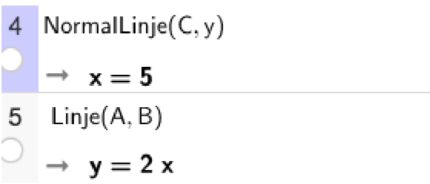
Elevene erfarer og kommuniserer at de må definere AB for å kunne benytte AB i kommandoen i rad 4 figur 5.27. Dette viser blant annet at elevene blir kjent med, og ser, begrensningene i CAS (instrumentaliseringsprosess). Elevene identifiserer med andre ord en syntaksfeil fordi de bruker koden AB som de enda ikke har definert. Sett i lys av hindret *manglende kunnskap om syntaks i CAS* som ble presentert i oppgavens kapittel 5.2.1, viser elevene nå en utvikling av instrumentell skapelse. Utviklingen gjenspeiles i at elevene på egenhånd identifiserer og verbaliserer at de ikke har fulgt syntaks, og gjør tiltak for å prøve å løse problemet.

Figur 5.28 viser at elevene forsøker å løse syntaks-problemet. Elevene tegner $\overline{AB}$, og forsøker deretter å bruke kommandoen i rad 4. Kommandoen er heller ikke nå mulig. Elevens påfølgende utsagn: "*tror han ikke nå at dette er en da?"*, kan tolkes som at eleven mente at han nå hadde definert AB, og at kommandoen burde fungert. CAS sin respons og hvordan elevene videre løser problemet tyder på at elevene erfarer at algebrafeltet ikke kan hente objekter fra tegnefeltet som er en av begrensningene i CAS (instrumentaliseringsprosess). Til tross for at operasjonen, å tegne $\overline{AB}$, ikke muliggjorde bruken av kommandoen, $NormalLinje(< Punkt >, < Linjestykke >)$, tyder operasjonen på at elevene forsøker å tilpasse seg artefaktets rammer. Instrumenteringsprosessen synlig fordi responsen fra artefaktet får elevene til å forsøke å finne en alternativ fremgangsmåte.

Elevenes videre arbeid fortsetter i de påfølgende figurer, hvor de bygger videre på allerede eksisterende rader i figur 5.28. Når CAS ikke tar inn $\overline{AB}$ fra tegnefeltet, responderer elevene med å bruke kommandoen $Linje(< Punkt >, < Punkt >)$ i rad 5 figur 5.29. Etter å ha fått output $y = 2x$ for linja, viser figur 5.30 at elevene benytter de kommandoen $NormalLinje(< Punkt >, < Linje >)$ i rad 4 ved å representere linja med y.



Figur 5.29: Tredje del av elevarbeid. Elevene bruker kommandoen for linje mellom punktene to punkt.

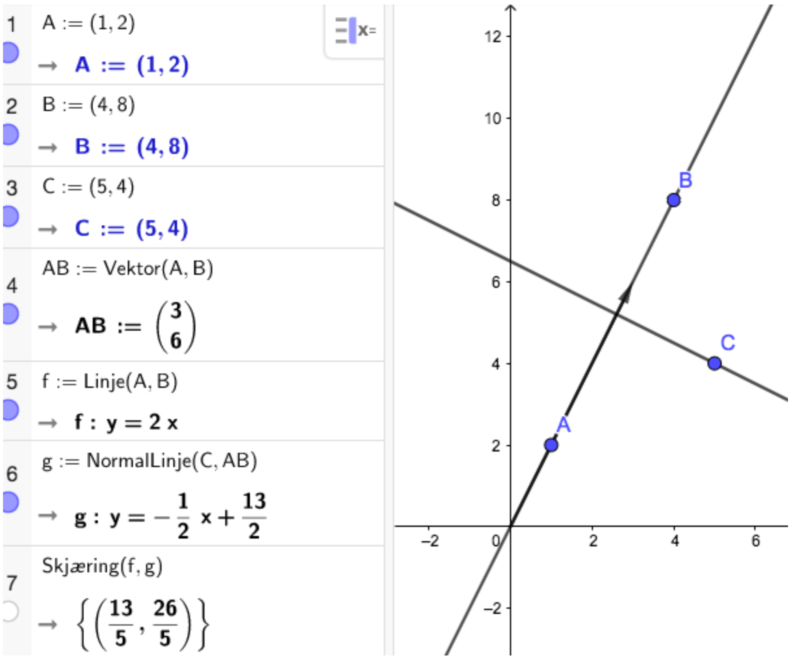


Figur 5.30: Fjerde del av elevarbeid. Elevene benytter y fra rad 5 inn i kommandoen i rad 4.

Figur 5.30 viser at elevene bruker uttrykket for y fra rad 5 inn i kommandoen for normallinja i rad 4. Ved arbeid i papirregisteret er det naturlig å bruke y fordi CAS har funnet at $y = 2x$ for linja gjennom A og B. Siden elevene ikke har definert y til å være $2x$ vil ikke CAS ta inn uttrykket for linja. Dette kan derfor knyttes til et mislykket registerskifte. Samtidig gir CAS en output $x = 5$. Hva CAS foretar seg er vanskelig å si med sikkerhet. Én mulighet er at artefaktet behandler y som linja $y = 0x + 0$ og får en normallinje i $x = 5$. Utover dette er det vanskelig å tolke outputen ytterligere. Det kan påpekes at kommandoen i rad 4 hadde produsert den ønskede outputen dersom elevene hadde brukt kommandoen $NormalLinje\big(C, Linje(A, B)\big)$. Denne kommandoen, $NormalLinje(< Punkt >, < Linje >)$, tillater å bruke kommandoen, $Linje(< Punkt >, < Punkt >)$, inni kommandoen for normallinja.

I oppgavens kapittel 5.2.1 ble en av hindrene presentert som *endrede rammer for løysing av oppgaver påvirker elevenes arbeidsprosess*. Funnet viste blant annet at det var vanskelig for elevene å tilpasse seg et nytt register som følge av rammefaktorene CAS bærer med seg, og elevene hadde vansker for å uttrykke ideene korrekt. Elevenes utvikling gjenspeiles nå i at de uttrykker de matematiske ideene korrekt i CAS, og at grepene elevene foretar seg handler om å uttrykke ideene med en syntaks som gjør at de kan brukes i nye ideer og kommandoer. I tillegg kan det legges merke til at elevene faktisk benytter kommandoer, som også gjør arbeidet med å identifisere og korrigere syntaksfeil lettere. Hinderet *manglende bruk av kommandoer i CAS*, er ikke lenger synlig i elevenes arbeid. Utviklingen sett i lys av instrumentell skapelse viser seg i at elevene nå tar grep for å tilpasse seg artefaktets rammebetingelser, og at elevene faktisk benytter seg av kommandoer.

Elevene visket vekk alle radene med unntak av de tre første radene i figur 5.28, og begynte på nytt. I figur 5.31 har elevene definert $\overrightarrow{AB}$ i rad 4, og i rad 5 og 6 benyttet henholdsvis kommandoene $Linje(< Punkt >, < Punkt >)$ og $NormalLinje(< punkt >, < vektor >)$. Uttrykkene i rad 5 og 6 stod først uten tilordning, men da elevene i rad 7 skulle bruke kommandoen "$Skjæring < funksjon >, < funksjon >)$" fant elevene at de måtte definere uttrykkene i rad 5 og 6 før kommandoen kunne benyttes.



Figur 5.31: Femte del av elevarbeid. Bruker kommandoene som indikert fra rad 4-7.

Utvikling i elevenes bruk av artefaktet gjenspeiles blant annet i at elevene tar i bruk hensiktsmessige og riktige kommandoer for å løse oppgaven. Hindre for instrumentell skapelse som tidligere ble presentert; *manglende bruk av kommandoer i CAS*, og *manglende kjennskap til de ulike typer vektorkommandoer* er ikke synlig i elevenes arbeid i figur 5.31.

Igjen kan det observeres at elevene tilpasser seg artefaktet og dets rammebetingelser. Elevene fjernet det som laget problemer for dem og bygde opp oppgaven på en alternativ måte. Tilpasningen reflekteres i figur 5.31 hvor de definerte $\overrightarrow{AB}$ for å kunne benytte vektoren videre i kommandoen $NormalLinje(< Punkt >, < Vektor >)$ i rad 6. Elevene fant på denne måten at problemet kunne løses ved å bruke en alternativ kommando for normallinje, normallinje mellom punkt og vektor, i stedet for kommandoen $NormalLinje(< Punkt >, < Linje >)$. Kommandoen $NormalLinje(< Punkt >, < Vektor >)$, er like fornuftig å bruke som kommandoen $NormalLinje(< Punkt >, < Linje >)$, men kommandoene forutsetter bruken av ulike matematiske objekter: enten vektor eller linje. Bruken av kommandoen $NormalLinje(< Punkt >, < Vektor >)$ krevde at elevene først definerte $\overrightarrow{AB}$. Fremgangsmetoden løste elevenes problemer som ble knyttet til registerskifte, og er et eksempel på hvordan bruken av CAS former elevenes fremgangsmetode (instrumenteringsprosess). I etterkant av å bruke kommandoene i rad 5 og 6, definerte elevene uttrykkene til å være henholdsvis f og g for å kunne benytte dem i kommandoen i rad 7.

Videre viste elevene at de kjente til CAS sin syntaks, som igjen kan knyttes til både instrumentalisering- og instrumenteringsprosessen.

Elevenes strategier ble kontinuerlig formet etter de rammebetingelsene CAS bærer med seg. *Endrede rammer for oppgaveløsning påvirker elevenes arbeidsprosess,* som tidligere var et hinder, fungerer nå som en ressurs for instrumentell skapelse fordi elevene tar grep for å tilpasse seg artefaktets rammer for oppgaveløsning. *Arbeidsprosessen* og hendelsesforløpet i det lengre elevarbeidet kan beskrives som en syklus av operasjon-respons-operasjon som knyttes til instrumentalisering- og instrumenteringsprosessen. Tabell 5.3 viser en oppsummering av det lengre eksemplet, og viser hvordan elevenes operasjoner fører til en respons fra CAS, og deretter svarer elevene på responsen ved å utføre nye operasjoner. Som tabellen viser forsøker elevene kontinuerlig å gjennomføre operasjoner. Når operasjonene ikke er gyldige innenfor CAS-registeret som konsekvens av syntaksfeil eller bruken av kommandoer, produseres det en respons fra CAS. Responsen gjør at elevene svarer med å utføre én eller flere operasjoner slik at operasjonen de i utgangspunktet ønsket å utføre, fungerer. Når elevene erfarer hva som fungerer og ikke, vil det innebære at de lærer å kjenne artefaktets muligheter og begrensninger (instrumentaliseringsprosess), som videre vil forme elevenes fremgangsmåte for å løse matematikkoppgaven i CAS (instrumenteringsprosessen).

Tabell 5.3. Elevenes svar og operasjon til responser i CAS.

Operasjon/ respons	**Operasjoner gjennomført og responser av elever (E), og responser fra CAS (C)**	**Figur-referanse**
Operasjon (E)	Kommando $NormallLinje(C, AB)$	Rad 4 i 5.27
Respons (C)	Output: ?	
Operasjon (E)	Tegner $\overline{AB}$ i tegnefeltet og bruker kommando $NormallLinje(C, AB)$	Rad 4 i 5.28
Respons (C)	Output: ?	
Operasjon (E)	Bruker kommando $Linje(A, B)$, og deretter	5.29

Respons (C)	Output: $y = 2x$	
Operasjon (E)	Bruker kommando $NormallLinje(C, y)$	Rad 4 i 5.30
Respons (C)	Output: $x = 5$	
Operasjon (E)	Visker ut radene. Definerer $\overrightarrow{AB}$.	Rad 4 i 5.31
Respons (C)	Output: $AB \coloneqq \binom{3}{6}$	
Operasjon (E)	Kommando: $Linje(A, B)$	Rad 5 i 5.31
Respons (C)	Output: $y = 2x$	
Operasjon (E)	Kommando $NormallLinje(C, AB)$	Rad 6 i 5.31
Respons (C)	Output: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$	
Operasjon (E)	Bruker kommandoen $Skjæring(< Funksjon >, < Funksjon >)$	Rad 7 i 5.31
Respons (E)	Elevene skjønner at de må definere linja mellom A og B, og normallinja fra C til AB for å bruke kommandoen	Rad 5 og 6 i 5.31
Operasjon (E)	Definerer $f \coloneqq Linje(A, B)$ og $g \coloneqq NormallLinje(C, AB)$	Rad 5 og 6 i 5.31
Operasjon (E)	$Skjæring(f, g)$	Rad 7 i 5.31
Respons (C)	$\left(\frac{13}{5}, \frac{26}{5}\right)$	

Gjennom arbeidet med denne matematikkoppgaven tar elevene i bruk flere ”nye” kommandoer. Eksempelvis kommandoene: $Linje(< Punkt >, < Punkt >)$, : $Skjæring(< Funksjon >, < Funksjon >)$, og ulike varianter som produserer en normallinje fra et punkt til et annet matematisk objekt. Elevene har ikke lært kommandoene i forbindelse med vektorer, men har tilegnet seg kunnskap om dem gjennom arbeid innenfor andre matematiske områder. Når elevene tar i bruk tidligere kjente kommandoer tar de med andre ord i bruk nye bruksskjema. Å bruke tidligere lærte bruksskjema innenfor et nytt matematisk område kan alene indikere en utvikling i skapelsesprosessen fordi elevenes kunnskap om bruksskjemaet sitt funksjonsområde utvides, og elevene får flere kort å spille på når de skal løse matematikkoppgaver i vektorer. Dette kan sterkt knyttes til instrumenteringsprosessen fordi elevene blir mer klar over hvordan artefaktet kan benyttes for å løse oppgaver om vektorer. Et sentralt poeng er at elevene tar i bruk flere bruksskjema i kombinasjon med matematiske ideer for å løse oppgaven. Dette er nettopp dette som ligger i begrepet *instrumenterte handlingskjema.* At elevene tar i bruk instrumenterte handlingsskjema indikerer en utvikling i instrumentell skapelse.

Ved løsning av matematikkoppgaven dette eksemplet bygger på, benytter elevene seg av mer enn bare regneferdigheter og algoritmer. Ved sammenligning med den andre gruppa som løste den samme oppgaven løsrev disse elevene seg fra en algoritmisk tankegang knyttet til papir-registeret. En kombinert bruk av tegnefeltet og algebrafeltet, og hvordan de responderte på feilmeldinger underveis i arbeidet synliggjør en høyere grad av refleksjon som krever mer enn bare regneferdigheter og algoritmer.

I intervjufasen mente disse elevene at det gikk bedre å arbeide på CAS mot slutten. Ved oppfølgingsspørsmål på hva som var årsaken til at det svarte en av dem: *"Jeg vet ikke. Vi hopper som oftest over oppgavene hvor vi må bruke CAS... og nå måtte vi jo... det la litt press på oss med tanke på at vi ble filmet, kanskje hadde det noe og si".* Elevene er inne på et sentralt poeng innenfor instrumentell skapelse. Utvikling i skapelsesprosessen fordrer at elevene faktisk benytter seg av artefaktet og ikke minst har utholdenhet i møte med utfordringer.

6 Drøfting

Undersøkelsen som danner grunnlaget for denne oppgaven har gitt innsyn i noen hindre elever møter på veien til instrumentell skapelse, og oppgaven har gitt en beskrivelse av elevenes utvikling av instrumentell skapelse. I denne delen av oppgaven vil jeg i 6.1, vurdere noen av funnene fra undersøkelsen ut fra andre studier på andre CAS-verktøy. I kapittel 6.2 vil verdien av det å lære å bruke CAS til elementære oppgaver innenfor vektorer drøftes. Deretter vil jeg i kapittel 6.3 så å si noe om utviklingen av instrumentell skapelse i denne studien er realistisk. Avslutningsvis vil jeg i 6.4 komme med noen anbefalinger og mulige implikasjoner av bruken av CAS.

6.1 Studien sett i lys av annen forskning

Noen av funnene gjort i denne studien har noen likhetstrekk med forskningen gjennomført på 90- og tidlig 2000-tallet. Resultatene fra oppgavens kapittel 5.3.1 viser blant annet at elevene løfter over en matematisk notasjon fra papir-registeret over i CAS i GeoGebra. Disse funnene er gjenkjennbare i studiene gjennomført av Wain (1993) og Mitic og Thomas (1994) som viser at elevene sliter med forskjellen mellom matematisk notasjon og CAS-syntaks. I tillegg koblet jeg flere hindre til registerskifte. *Registerskifte* har store likhetstrekk med et skifte mellom *papir-og-blyant-teknikker* og *skjermteknikker* som ble beskrevet i oppgavens kapittel 3.3. Ved et skifte fra papir-registeret til papir-registre, kreves det at elevene benytter andre fremgangsmåter og ferdigheter, altså krever det bruk av andre *teknikker*. Hinderet *manglende kjennskap til syntaks i CAS*, og *manglende bruk av kommandoer i CAS* skyldes at teknikkene i de to registrene er veldig forskjellig og er uvant for elevene. Hinderet *endrede rammer for oppgaveløsning påvirker elevenes arbeidsprosess*, kan også knyttes til Drijvers (2002) sin forklaring om at elever har vanskelig for å utvikle strategier for løsning av oppgaver tilpasset CAS-verktøyet sine begrensninger og syntaks. Min omtale av registerskifte innebærer derfor flere av Drijvers sine identifiserte utfordringer fordi arbeid innenfor CAS-registret krever både bruk av andre teknikker, en tilpasning av andre rammefaktorer for oppgaveløsning og andre ferdigheter. Å benytte registerskifte som en mulig forklaring på hindrene presentert i oppgavens kapittel 5.2.1 finner derfor støtte i Drijvers sin forskning.

Viktigheten av å ha tilstrekkelig matematisk kunnskap ble i oppgavens kapittel 5.2.1 beskrevet som en forutsetning for å kunne benytte CAS hensiktsmessig. Studien gjennomført av Atkins et al. (1995) viser også at bruken av CAS-verktøy er mest lønnsom når elevene har tilstrekkelig matematisk kunnskap. Likevel var det i noen eksempler i elevenes arbeid vanskelig å forstå om det faktisk var matematikken som var problemet, eller om det var *endrede rammer for oppgaveløsning* som gjorde at elevene ikke fikk uttrykt den kunnskapen de potensielt satt inne med. Disse to faktorene henger sammen for at elevene skal kunne benytte artefaktet hensiktsmessig.

Tidligere forskning, ved Drijvers (2002), presenterer også utfordringer knyttet til bruken av CAS-verktøy som er, ut fra mitt datamateriale, vanskelig å si noe om. Eksempelvis kan jeg basert på datamaterialet verken bekrefte eller avkrefte implikasjoner om elevenes evne til å gjenkjenne ekvivalente uttrykk, eller *”*the black box character” – at CAS ikke gir brukeren tilgang til operasjonene som foretas. Sistnevnte kan likevel tenkes å ikke gjøre arbeidet i CAS enklere.

6.2 Verdien av teknikker

Elevenes arbeid viser at de øver på *teknikker* for å kunne benytte CAS i forbindelse med vektorer. Elevene benytter seg eksempelvis av lærte teknikker når de bruker kommandoer for å finne vektorer, finne vektorer som oppfyller et matematisk utsagn, eller løse ligninger med hensikt på å finne ukjente.

Under datainnsamlingen fikk jeg inntrykk av at CAS ble benyttet som et slags supplement i undervisningen. Elevene fikk først klassisk tavleundervisning hvor matematiske algoritmer og setninger ble presentert. Dersom de hadde spørsmål fikk de en muntlig/skriftlig forklaring på tavla. CAS ble deretter tatt frem som et supplement: *”*...og slik gjør dere dette i CAS*”.* Underveis i datainnsamlingen lurte jeg på hva som egentlig var poenget med å lære teknikkene og utføre de enkle prosedyrene i CAS dersom de ikke lærer noe nytt av å gjøre det. Da kunne jo elevene like gjerne gjøre oppgavene på papir. Underveis i arbeidet med oppgaven har svaret på dette spørsmålet blitt noe klarere. Ved å trekke linjer til hva det betyr å være god i matematikk vil også rutinearbeid bidra til at elevene blir flinkere i matematikk, fordi rutinearbeid nettopp handler om å utføre *prosedyrer nøyaktig og fleksibelt.* Å utføre prosedyrer faller under én av de fem komponentene som Kilpatrick et al. (2002) mener inngår i det å være god i matematikk. Videre lærer elevene å *anvende* CAS for å utvikle strategier for å løse matematiske problemer, og i tillegg kreves det et matematisk *resonnement* i tråd med artefaktets syntaks. Artigue (2002) hever i tillegg at enkelte teknikker må bli en rutine for at videre utvikling av kunnskap kan skje. Dersom en tolker hennes påstand riktig, er læring av teknikker og rutinearbeid et nødvendig steg på veien til instrumentell skapelse. Elevene må kjenne til de elementære teknikkene for bruk av artefaktet, for å benytte dem til videreutvikling av både digitale ferdigheter og matematisk forståelse. Dette betyr også at en ikke bør undervurdere verdien av at elevene bruker tid på å lære basisferdigheter i CAS innenfor de ulike matematiske emnene.

6.3 En realistisk utvikling av instrumentell skapelse?

Gjennom oppgavens kapittel 5.3 ble det gjort rede for elevenes utvikling av instrumentell skapelse. I møte med problemer i tilknytning til bruk av artefaktet, lærte elevene etterhvert hvordan ulike problemer kunne løses, og utviklet dermed egne kunnskaper og ferdigheter knyttet til bruken av artefaktet. Når elevene finner ut hvordan de kan løse problemene de møter på, kommer de også stadig lenger ut i skapelsesprosessen. Dette funnet støttes av Drijvers (2002) som hevder at hindre gir potensiale for læring i bruk av Derive i arbeid med algebra.

Selv om elevene viste en utvikling av instrumentell skapelse, kan det stilles spørsmål om utviklingen er representativ for andre elever, eller for de samme elevene i en ”normal situasjon”. Datagenereringen i elevarbeidet foregikk ved bruk av videokamera. Videokamera i seg selv hører ikke hjemme i klasserommet, og som poengtert i oppgavens kapittel 4.5 skaper dette en svakhet i datainnsamlingen fordi det kan påvirke individene i kulturen som undersøkes. Noen av elevene forklarte i intervjuet hvordan kameraet sin tilstedeværelse påvirket dem i deres arbeid. I ett av to intervju utfyller elevene hverandre. Først sier den ene eleven: ”*Det var motiverende å gjøre oppgavene*”, før den andre eleven avbryter og sier: ”*med kamera bak ja*”. Den første utfyller ytterligere: ”*ja, det pushet på til å gjøre oppgavene. Tror ikke vi har gjort like mange oppgaver hvis vi hadde sittet i klasserommet, nei.”*. Med andre ord sier elevene at videokameraet utgjorde et ytre press som gjorde at de ville fortsette å prøve og løse matematikkoppgavene. Videokameraet ble på denne måten et positivt press i retning instrumentell skapelse. Det kan videre stilles spørsmål ved om hvordan utviklingen i skapelsesprosessen hadde forløpt dersom elevene ikke var forskningsdeltakere.

Uten et videokamera som utgjør et ytre press, er det opp til elevene å ”holde ut” ved møte med hindre. Det er grunn til å anta at dersom hindrene er for mange og for store, vil elevene kunne oppleve frustrasjon (Drijvers, 2002), og uten hjelp vil elevene antageligvis gi opp. Dette betyr at utvikling av instrumentell skapelse krever en *balansegang* mellom *kompleksitet og antall hindre*, og elevenes *progresjon* i bruken av artefaktet. Med andre ord må det være nok hindre til at elevene utvikler seg, men ikke for mange eller for store sånn at de gir opp.

Elevene sier selv at: ”*vi hopper vel egentlig over CAS-oppgavene*...” og ”*jeg får ikke så lyst til å bruke CAS når det ikke gjør det jeg har lyst til at det skal gjøre*”. I klassen var det 24 elever, og i praksis er det vanskelig for læreren å hjelpe alle med alt. På grunnlag av antall og typer hindre elevene møtte i sitt arbeid, at tilstedeværelsen av videokamera la et press på at de måtte fortsette å prøve i møte med hindre, og elevenes generelle utsagn om motivasjon for bruk av artefaktet, viser studien antageligvis en større utvikling av instrumentell skapelse i arbeid med vektorer enn hva som er realistisk.

6.4 Veien videre

Denne studien viser at bruk av CAS har implikasjoner for elever generelt, og funnene vil ha betydning for min undervisningspraksis når jeg til høsten skal jobbe som lærer i videregående skole. Avslutningsvis vil jeg nå komme med én anbefaling, én bemerkning og oppfordring, og ett spørsmål som jeg sitter igjen med etter arbeidet med masteroppgaven.

Anbefalingen handler om hvordan elever kan benytte papir og blyant i kombinasjon med CAS for å lette samarbeidet med CAS. Overgangen fra papir-registeret til CAS-registeret er såpass stor at elevene sliter med å løse oppgavene matematisk korrekt og med en syntaks som CAS godkjenner. På dette grunnlag fremsetter jeg et forslag som potensielt kan lette elevenes samarbeid med CAS. Anbefalingen går ut på å benytte papir ved siden av CAS med hensikt å danne et mellomledd mellom papir-registeret og CAS-registeret. Elevene kan på denne måten friere strukturere løsningsstrategien i forkant av at de bruker CAS. Dette muliggjør en større bevissthet rundt hvilke matematiske utsagn som må gjelde for å løse oppgaven, identifisering av kjente og ukjente, og videre hvilke matematiske objekter som må defineres og/eller identifiseres for å løse oppgaven. Dette kan eksemplifiseres med matematikkoppgaven som figur 5.9 viser løsningsforslag på. Dersom elevene i forkant av bruken av CAS hadde ”kladdet” definisjonen av skalarproduktet på papir, og identifisert kjente og ukjente, ville de kanskje ha klart å løse oppgaven. Den samme prosessen kunne potensielt ha hjulpet elevene i arbeidet som ble presentert i 5.16.

Bemerkningen handler om at elevene hadde kommet lenger i skapelsesprosessen dersom de hadde benyttet et CAS-verktøy som er mer pålitelig og konsekvent. Den høye frekvensen av ”mystisk oppførsel” observert i denne studien betyr at elevene mest trolig hadde kommet lenger i skapelsesprosessen ved bruk av et annet CAS-verktøy. I tillegg sier elevene selv at artefaktets oppførsel reduserer motivasjonen for å bruke det. Det må naturligvis påregnes å bruke tid på å lære å bruke digitale verktøy, men å lære triks for å håndtere merkelige output og uforklarlige operasjoner i CAS tar fokuset bort fra mer hensiktsmessig bruk av artefaktet. Disse problemene knyttes direkte til CAS i GeoGebra, og tilsier at programvaren bør utbedres av hensyn til elevenes tidsbruk og læringsutbytte. Alternativet er å benytte seg av en annen CAS-programvare som er mer pålitelig og konsekvent. Jeg argumenterer ikke for at videregående skoler skal bytte til en annen CAS-programvare, men det er bekymringsverdig at CAS i GeoGebra ikke fungerer som det er tiltenkt, og følgelig reduserer elevenes motivasjon for å bruke CAS. Én ting er imidlertid sikkert: instrumentell skapelse skjer ikke dersom artefaktet ikke tas i bruk. Jeg oppfordrer derfor Norsk GeoGebra institutt til å utbedre CAS. Hvis dette ikke gjøres, bør videregående skoler, av hensyn til elevene, benytte en annen CAS-programvare.

Til sist har jeg lurt på hva som skjer med elevenes algebraforståelse og evnen til å regne med symboler dersom CAS i GeoGebra får bestå i matematikkfagene i videregående skole. Undersøkelser viser at elevers og studenters tallforståelse er dårligere i dag enn for noen tiår siden (Norsk matematikkråd [NMR], u.å; Sletsjøe, 2010), og det kan stilles spørsmål ved om algebraforståelsen kommer til å følge lignende utvikling. Norsk matematikkråd har siden 1984 gjennomført en forkunnskapstest i matematikk ved norske universiteter og høyskoler (NMR, u.å). Den har siden 2001 blitt gjennomført hvert andre år med uendrede oppgaver, og tar sikte på å følge utviklingen av elevers ferdigheter i matematikk. Her testes blant annet studenters tallforståelse, evnen til å skifte mellom ulike representasjonsformer, nøyaktige beregninger og overslag. Utviklingen siden 1984 viser at elevene har blitt betraktelige mye dårligere til å regne. Dette kan kanskje skyldes kalkulatorens inntog. Kalkulatoren har muliggjort en enkel og effektiv metode for beregninger, som kun krever at brukeren setter opp uttrykket som skal beregnes. Ved å dra paralleller til CAS sin evne til å regne med matematiske symboler, kan det stilles spørsmål ved om elevenes forståelse og evne til manipulasjon av variabler kommer til å reduseres på samme måte som elevenes tallforståelse. Hvis dette er tilfellet, er det av stor bekymring. Fordi algebra er et basisspråk i matematikk, og beherskelse av algebra legger et grunnlag for videre læring i matematikk og akademiske utdanninger og fagutdanninger, er det viktig at algebraforståelsen *ikke* reduseres. Elevenes algebraforståelse blir derfor et aktuelt forskningsområde i nær fremtid.

Arbeidet med denne oppgaven har vært lærerikt, og har gitt meg flere viktige erfaringer jeg kommer til å ta med meg når jeg tar fatt på læreryrket til høsten. Den viktigste erfaringen jeg tar med, er forståelse for kompleksiteten bak det å lære å benytte seg av nye digitale verktøy, og ikke minst kjente digitale verktøy innenfor nye matematiske områder. Dersom CAS består ved fagfornyelsen, kommer jeg også til å undervise på en måte jeg ikke ville gjort uten de erfaringene arbeidet med oppgaven har gitt. Blant annet vil jeg forsøke å kombinere bruken av CAS med "kladdeark" for å systematisere løsningsstrategien, og skape bevissthet rundt hva elevene må definere for å benytte CAS på en hensiktsmessig måte med korrekt syntaks. Da kan kanskje noen av hindrene elevene møter på, bli mer overkommelige. Videre tar jeg med meg kunnskapen om at de mange hindrene elevene møter på i bruken av CAS, må følges opp og få så mye oppmerksomhet som det lar seg gjøre.

7 Referanser

Artigue, M. (2000). Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. I *Proceedings of the Annual Meeting of the GDM. Potsdam*, 2000. Hentet fra: http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000/

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274.

Aspetsberger, K., & Kutzler, B. (1988). *Using a computer algebra system in an Austrian high school*. I Collins, J. H., Estes, N., Cattis, W. D., & Walker, D. (red.), Proceedings of the sixth international conference on technology and education, *CEP Consultants Ltd, 2*, 476-479.

Atkins, N., Creegan, A., & Soan, P. (1995). You can lead students to DERIVE but can you make them think? *International Derive Journal, 2*(1), 63-82.

Buchberger, B. (1990). Should students learn integration rules? *ACM Sigsam Bulletin, 24*(1), 10-17.

Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*(3), 189-209.

Drijvers, P. (2002). *Learning mathematics in a computer algebra environment: Obstacles are Opportunities, 34*(5), 221-228.

Drijvers, P., & Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: Examples of algebraic schemes. I D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (red.), *The didactical challenge of symbolic calculators. Turning a computational device into a mathematical instrument* (s. 163-196). New York, NY: Springer.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – the registers of semiotic representations*. Cham: Springer International Publishing.

Fetterman, D. M. (1998). *Etnography: Step by Step*. Newbury Park, CA: Sage Publications, Inc.

Geddes, K. O., Czapor, S. R., & Labahn, G. (1992). *Algorithms for computer algebra*. New York, NY: Kluwer Academic Publishers.

Guin, D., & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: Necessity of intrumental orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der*

Mathematik, *34*(5), 204-211.

Hammersley, M., & Atkinson, P. (1996). *Feltmetodikk. Grunnlaget for feltarbeid og feltforskning.* (Oversatt av T.M. Andersen og A. Sjøbu). Oslo: Ad Noram Gyldendal.

Heir, O., Engeseth, J., Moe, H., & Borgan, Ø. (2015). Matematikk R1 (2. utg). Skien: Askehoug.

KD (2006). Kunnskapsløftet. Læreplanverket for kunnskapsløftet (Midlertidig utg. juni 2006 ed.). Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(2), 205-263.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Malinowski, B. (1922). *Argonauts of the Western Pacific*. London: Routledge.

Matematikksenteret. (u.å). Norsk GeoGebra-institutt. Hentet 11.05.19 fra: https://www.matematikksenteret.no/geogebra

Mitic, P., & Thomas, P. (1994). Pitfalls and limitations of computer algebra. *Computers and Education*, *22*, 355-361.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

NCTM. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

NESH. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier: Den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.

Norsk matematikkråd. (u.å). NMRs forkunnskapstester. Hentet fra: https://matematikkradet.no/nmrtest.html

Peirce, C. S. (1998). What is a sign? I The Peirce Edition Project (red.), *The essential Peirce* (Vol. 2, s. 4-26). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforlaget.

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the “connections” standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*,163-182.

Robson, C. (2011). *Real world research* (3 utg.). Chichester: Wiley.

Robson, C., & McCartan, K. (2015). *Real world research: A resource for social scientists and practitioner-researchers* (4. utg.). Oxford: Blackwell.

Säljö, R. (2009). *Læring i praksis. Et sosiokulturelt perspektiv*. Oslo: J. W. Cappelens forlag AS.

Sletsjøe, A. B. (2010). *Trenger mang digitale verktøy for å lære matematikk?* Universitetet i Oslo. Hentet fra: https://folk.uio.no/arnebs/Gyldendal.pdf

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 133-162.

Syntaks - IT. (2018). I *Store norske leksikon*. Hentet 05.06.2019 fra https://snl.no/syntaks_-IT

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse – en innføring i kvalitativ metode* (4. utg.). Oslo: Fagbokforlaget.

Thomas, P. G., & Rickhuss, M. G. (1992). An experiment in the use of computer algebra in the classroom. *Education and Computing*, *8*(3), 255-263.

Tjora, A. (2010). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis*. Oslo: Gyldendal Akademisk.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. I D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (red.), *The didactical challenge of symbolic calculators. Turning a computational device into a mathematical instrument* (s. 137-162). New York, NY: Springer.

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk for realfag – programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT3-01).* Hentet fra: https://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Hele/Grunnleggende_ferdigheter

Utdanningsdirektoratet. (2012). Rammeverk for grunnleggende ferdigheter. Hentet fra: https://www.udir.no/globalassets/upload/larerplaner/lareplangrupper/rammeverk.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT-04).* Hentet fra: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Grunnleggende_ferdigheter

Verillon P., & Rabardel P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology of Education*, *9*(3), 77-101.

Vygotsky, L. (1978). Interaction between learning and development. *Readings on the* *development of children*, *23*(3), 34-41

Wain, G. (1993). Some technical problems in the use of DERIVE with school pupils. *International DERIVE Journal*, *1*(1), 49-55.

Wolcott, H. F. (1999). *Etnography, a way of seeing*. Walnut Creek, CA: A division of Sage Publications, Inc.

8 Vedlegg

Intervjuguide

Hvordan har det vært å delta på undersøkelsen?

Ber elevene se på et eksempel:

- Hva klarer dere å hente noe fra første bilde?
- Hva gjør det med dere, når dere lærer sånne triks?

CAS

- Hva opplever dere som positivt med CAS? Hvorfor?
- Hva opplever dere som negativt med CAS? Hvorfor?

- I hvilken grad føler dere at dere lærer matematikk av å bruke CAS?

- Hvor ofte bruker du CAS når hjelpemidler er tillat ved oppgaveløsning?
- Hvor mye trener du på oppgaveløsing i CAS?

Vurdering av svar

- Når CAS gir deg et svar som ikke stemmer med fasiten, hva er din respons?
    - Vurderer du din egen fremgangsmåte?
    - Hva tenker du på når du vurderer fremgangsmåten?
    - Vurderer du andre årsaker til at svaret ikke stemmer overens med fasiten?

NTNU

Kunnskap for en bedre verden