Reidi Steen Larssen

Kan kombinatorikk tegnes?

En kvalitativ studie av andretrinnselevers tegninger og strategier i kombinatorikk

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 1.-7. trinn
Veileder: Heidi Dahl og Benedikte Grimeland
Mai 2019

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Reidi Steen Larssen

Kan kombinatorikk tegnes?

En kvalitativ studie av andretrinnselevers tegninger og strategier i kombinatorikk

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 1.-7. trinn
Veileder: Heidi Dahl og Benedikte Grimeland
Mai 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på seks fine år på Rotvoll og Kalvskinnet, for noen år det har vært! Å skrive masteroppgave er en altoppslukende prosess. Arbeidet har vært utfordrende, men samtidig både spennende og interessant. Jeg har fått gjøre et dypdykk i faget som interesserer meg mest – matematikkdidaktikk. Likevel er det godt å være ferdig. Det synes nok de rundt meg og, jeg lover å ikke sammenligne kilometertelleren i bilen med kombinatoriske strategier mer.

Først og fremst vil jeg takke mine veiledere Heidi Dahl og Benedikte Grimeland for all hjelp jeg har fått i denne prosessen – for beroligende ord, støttende innspill og faglige diskusjoner. Jeg vil også takke familie, venner, kjæreste og medstudenter. Takk for støtte, motivasjon, latter og sårt etterlengtede avbrekk.

Sist, men ikke minst vil jeg takke de fire elevene som har vært informanter i dette prosjektet og deres kontaktlærer. Takk for at jeg fikk ta del i deres tenkemåter i matematikk, slik at denne masteroppgaven kunne ta form.

Trondheim, mai 2019

Reidi Larssen

Innhold

Figuroversikt

Tabelloversikt

1. Innledning

Som barn likte jeg faget matematikk fordi jeg syntes det var enkelt – jeg studerte eksemplene i læreboka og gjorde tilsvarende på oppgavene under. I dag liker jeg matematikk fordi jeg kan løse problem på flere ulike måter, fordi matematikken ikke gir en bestemt måte ulike oppgaver skal løses på slik jeg tidligere trodde.

1.1 Bakgrunn for oppgaven

Alle matematiske objekter er abstrakte, og vi har bare tilgang til dem gjennom ulike representasjoner av objektet (Duval, 2006). Matematisk aktivitet handler derfor om å manipulere disse representasjonene, som kan være symboler, skrevet tekst, grafer eller bilder. Et hvert matematisk problem kan løses på utallige måter, og eksemplet fra læreboka er ikke den eneste riktige. På en måte kan du si at arbeid med å manipulere representasjoner er hjerte av matematisk aktivitet – fordi det er det matematikk handler om. Dette er krevende, for hvilken representasjon skal man velge? Når elevene kommer til skolen har de kanskje lært å telle, kanskje bare som en regle, men et sted må man starte. Når elevene da skal lære seg å sammenligne, måle, utforske og illustrere må de ha noe å gjøre det med. Vi kan snakke om epler, bananer og hundrelapper, men det de lærer må på et tidspunkt løsrives fra konteksten og generaliseres. Bruken av representasjoner har en positiv effekt i læring av matematikk. Disse representasjonene inkluderer konkreter, muntlig språk og skriftlig språk. Den positive effekten representasjoner kan ha er å støtte elevene i å forstå konsept, løse problemer og kommunikasjon av matematiske ideer (Elia, Gagatsis & Demetriou, 2007). Men uavhengig av representasjonene læreren viser elevene, er det utviklingen av elevenes egne representasjoner som betyr noe for læring (Goldin & Shteingold, 2001). Når elevenes egne representasjoner er de som har betydning for læring, er det ikke de vi må se til for å se hva elevene kan? En type representasjon som er kjent for elevene er tegning, og studier av elevenes tegninger vil kunne si noe om måten elevene tenker på. Ifølge Palmér og van Bommel (2018) skiller tegning som problemløsning i kombinatoriske oppgaver seg fra andre matematiske tema, da kombinatorikk krever at elevene viser oppmerksomhet til hvert objekt i seg selv, og relasjonen mellom de ulike objektene. I addisjon er det for eksempel ikke viktig hvilke grupper med elementer som slås sammen først, mens i kombinatorikk er både plassering av det enkelte objektet viktig, sammen med objektets plassering i forhold til de andre objektene. På grunn av denne særegenheten ved kombinatorikk er både ikoniske og piktografiske representasjoner ansett å være passende, da der er viktig å skille like elementer fra hverandre. Å bruke tegn som er skapt av fellesskapet og ikke ligner på objektet, krever mer av elevene i kombinatorikkoppgaver fordi elevene må finne en måte å representere like elementer som har noen ulike egenskaper på. Situasjonene elevene møter i kombinatoriske problem er ofte svært virkelighetsnære, og handler om å telle antallet mulige kombinasjoner. Dette kan være for eksempel å finne ut hvor mange ulike antrekk en kan lage av et gitt antall bukser og gensere. For å løse kombinatoriske problem ved hjelp av tegn skapt av fellesskapet, må elevene bruke en notasjon som skiller mellom bukser og gensere, men også mellom ulike farger på plaggene.

1.2 Formål og forskningsspørsmål

I fagfornyelsen heter det at «Elevene skal jobbe mer med metoder og tenkemåter slik at de får større forståelse for faget» (Kunnskapsdepartementet, 2018). Formålet med dette forskningsprosjektet er å undersøke hvordan elever løser matematiske problem og representerer i matematikk. Dette er et stort, og kan gjøres på mange måter, med ulike matematiske tema og ulike representasjoner. For å avgrense oppgaven har jeg valgt det matematiske temaet kombinatorikk, og representasjoner i form av elevers egenproduserte tegninger, gjennom å undersøke andretrinnselevers tenkemåter i møte med kombinatorikk, som for dem i skolesammenheng er ukjent.

Hvilke strategier bruker fire andretrinnselever i møte med kombinatorikkproblem, og hvilken funksjon har tegning for elevenes arbeid?

For å samle inn datamateriale som kan vise hvordan elevene løser oppgaver i kombinatorikk har jeg gitt fire elever løsninger i to ulike oppgaver med tilhørende bilder eller konkreter, og observert elevene mens de løste oppgavene. I mitt forskningsprosjekt står tegning også sentralt, og derfor er det nødvendig også å samtale med elevene for å finne svar på hvorfor de tegner slik de gjør. Tegner de for å prøve-og-feile for å løse oppgaven? Eller tegner de kanskje for å vise meg hvordan de har løst oppgaven?

For å kunne svare på dette spørsmålet vil jeg presentere og analysere elevenes utsagn og tegninger. I analysen av elevenes strategier i kombinatorikk står English (1996) sitt rammeverk sentralt, hvor hun kategoriserer strategier i tre ulike faser: den uplanlagte fasen, overgangsfasen og odometerfasen. Med strategi mener jeg måten eleven har valgt å løse oppgaven på. Når man studerer elevers tegninger er det mange innfallsvinkler man kan ta. En mulighet er å se på hvordan de har tegnet, om tegningene er dekorative, om de inneholder mange detaljer, eller om det er ikoniske tegninger som inneholder bare det viktigste for å løse problemet. Da kombinatorikk er et spesielt emne med hensyn til tegning, ved at forskning har vist at piktografiske tegninger ikke viser en lavere matematisk forståelse enn ikoniske har jeg valgt en annen innfallsvinkel. Jeg ønsker å se på motivasjonen for å tegne, altså vil tegningens funksjon i denne oppgaven peke til hva som er årsaken til at elevene har tegnet. I analysen av elevenes tegninger har jeg tatt utgangspunkt i Teledahl (2017) og Stylianous (2011) kategorier for årsaken til at elevene bruker tegning i problemløsningsprosessen. Informantene i dette forskningsprosjektet har ikke arbeidet med kombinatoriske problem tidligere, og vil derfor trolig ikke ha en løsningsstrategi klar på forhånd. Arbeidet elevene gjør vil da være problemløsning. Når vi i matematikk arbeider med problem søker vi etter mulige handlinger for å nå et mål (Polya, 1981). Altså er det ikke problemløsning om eleven umiddelbart ser for seg hvordan problemet kan løses.

1.3 Oppgavens oppbygning

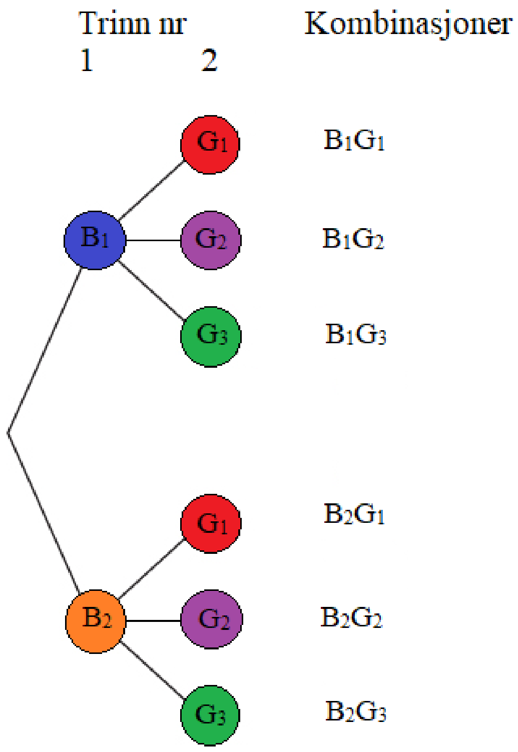
Denne studien er bygd opp av seks kapitler: innledning, teori, metode, analyse, diskusjon og avsluttende refleksjoner. Kapittel 1 er en beskrivelse av bakgrunnen og motivasjonen for tema for oppgaven, begrunnet med teoretiske betraktinger og egne erfaringer. Sammen med denne beskrivelsen av oppgavens oppbygning har dette kapittelet også inneholdt hensikten med studien og forskningsspørsmål. Teorikapittelet vil være en redegjørelse for den matematiske strukturen til kombinatoriske problem og en presentasjon av et rammeverk for å analysere elevers strategier for å løse kombinatorikkproblem. Videre i kapittel 2 redegjøres det for representasjoner i matematikk generelt, med særlig fokus på ulike måter å bruke tegning i problemløsningsoppgaver. Kapittel 3 er en beskrivelse av den metodiske tilnærmingen og de metodiske valgene jeg har tatt. Jeg vil beskrive konteksten for studien, hvordan datainnsamlingen er gjennomført og analysert. Når man forsker på mennesker, og kanskje spesielt barn, er det noen etiske betraktninger som må tas, disse vil også redegjøres for. Studiens gyldighet og pålitelighet preges også av valget av informanter. Det fjerde kapittelet er en presentasjon og analyse av datamaterialet som er samlet inn, opp mot den teorien som er presentert i kapittel 2. Kapittelet er todelt, med en analyse av elevenes strategier først, hvor tegningene elevene tegnet samt deres utsagn analyseres i lys av teori om elevers strategier i møte med kombinatorikkoppgaver. Videre analyseres datamaterialet opp mot teori om hvilke ulike måter det er vanlig for elever å bruke tegning på i problemløsningsoppgaver. Analysen tar utgangspunkt i elevenes utsagn og deres tegninger, og vil naturlig inneholde eksempler fra datamaterialet. I kapittel 5 vil sentrale funn fra analysearbeidet drøftes. Elementer i dette kapittelet er fordeler med tegning som representasjon, utfordringer elevene møter i arbeidet, kontekstens betydning og diskusjon av formell notasjon. Videre følger kapittel 6, en avslutning med oppsummering av de viktigste funnene. Sammen med avsluttende kommentarer, vil sentrale videre forskning foreslås.

2. Teori

Målet med denne oppgaven er å finne ut hvilke strategier fire andretrinnselever bruker når de løser kombinatorikkoppgaver og hvordan de bruker tegning i dette arbeidet. For å kunne svare på disse spørsmålene er det nødvendig med teori og forskning som beskriver og forklarer kombinatorikk og ulike strategier, og hvilke måter det er mulig å bruke tegning på. Jeg vil først se på kombinatorikk og hva som er spesielt med temaet og hvilke ulike strategier forskning til nå har vist. Siden tegning er en type representasjon, ser jeg det som nødvendig å gjøre rede for representasjoner generelt, før jeg går nærmere inn på tegning som en representasjon i problemløsning.

2.1 Kombinatorikk

For å kunne drøfte ulike strategier elever vanligvis bruker i møte med kombinatorikkoppgaver, er det nødvendig med en redegjørelse av hva kombinatorikk er. Det er flere måter å se på kombinatorikk på. Det kan betraktes som et emne hvor vi teller antallet mulige kombinasjoner i et forsøk, men også som multiplikasjon av de ulike mulighetene man har i problemet. Et forsøk innenfor kombinatorikk skiller seg fra deterministiske forsøk, ved at resultatet er ukjent (Kristensen & Wikan, 2016). Det vil si at vi ikke vet hva resultatet blir, men har muligheten til å finne alle ulike utfall på forhånd. I sannsynlighetsregning er dette viktig, da vi trenger å vite hvilke utfall som er mulige, for å finne sannsynligheten for at et spesifikt utfall inntreffer. Tenker man på kombinatorikk som ordning og gruppering av elementer i en mengde (Lysø, 2014), handler arbeid med kombinatorikk om å velge ut og arrangere objekter i en begrenset mengde, og telle antallet kombinasjoner. Det er et viktig emne i matematikk, siden den rike strukturen tillater at arbeid med kombinatorikk omfatter både telling, regning og sannsynlighet. English (1996) forklarer kombinatorikk som operasjonen av vektorprodukt, gjennom å systematisk slå sammen hvert objekt i X med hvert objekt i Y, dannes vektorproduktet av de to mengder X og Y. For å forklare kombinatorikk som emne vil jeg ta utgangspunkt i en mye brukt konkret problemstilling: problemet med å finne antallet antrekk to ulike bukser og tre ulike gensere kan danne. Sett at X er mengden bukser, og det er to bukser, kan vi skrive $X = [B_1, B_2]$, hvor B_1 angir bukse nr 1 og B_2 angir bukse nr 2. Y er på tilsvarende måte mengden gensere, $Y = [G_1, G_2, G_3]$, hvor G_1 angir genser nr 1, G_2 angir genser nr 2 og G_3 angir genser nr 3. Vektorproduktet vil gi en liste over alle ordnede par, der det første elementet i paret er hentet fra mengden X og det andre elementet i paret er hentet fra mengden Y. Med vektorprodukt er X x Y= [B_1G_1, B_1G_2, B_1G_3, B_2G_1, B_2G_2, B_2G_3]. Vi får vite ulike utfall, altså hvordan de ulike kombinasjonene ser ut. Tilsvarende er det om det er flere enn to mengder, systematisk slås alle objektene i alle mengdene sammen, til ordnede tripler om det er tre grupper, kvadrupler om det er fire grupper og så videre. Vektorproduktet gir en oversikt over alle kombinasjonene. Et valgtre kan være et nyttig redskap for å finne alle mulige utfall. I figur 1 til høyre er et mulig valgtre for problemet med antallet antrekk representert. Hvor man i første trinn velger en bukse, og i andre trinn velger genser. De ulike kombinasjonene er listet opp.



Figur 1: Valgtre

I mange tilfeller er vi ikke så interessert i å vite hvordan de ulike kombinasjonene ser ut, men interessert i antallet mulige kombinasjoner. Oversikten over alle mulige utfall gir også informasjon om dette, og kan være en måte å finne også antallet. Når man bare er ute etter antallet kombinasjoner er multiplikasjonsregelen hendig, da den er en lignende forklaring på hvordan kombinatorikk utspiller seg. Kristensen og Wikan (2016) mener multiplikasjonsregelen er den viktigste i kombinatorikk, den sier at et forsøk kan deles inn i *s* trinn. I det første trinnet er det N_1 mulige valg, i andre trinn N_2 mulige valg, tredje N_3 osv. Det totale antallet kombinasjoner forsøket kan utføres på er da $N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_s$ (Lysø, 2014; Kristensen & Wikan, 2016). I eksempelet med antrekk, kan vi si at det første trinnet i forsøket er å velge seg en bukse. Det kan gjøres på to ulike måter, da det er to ulike bukser å velge mellom (B_1 eller B_2), altså er $N_1=2$. Det andre trinnet i forsøket er å velge seg en genser, som kan gjøres på tre ulike måter (G_1, G_2 eller G_3). Altså er $N_2=3$. Det totale antallet kombinasjoner forsøket kan utføres på er derfor $N_1 \cdot N_2 = 2 \cdot 3 = 6$. En slik måte å tenke på kombinatorikk på vil gi antallet kombinasjoner som er mulig å danne, men sier ingenting om hvordan utfallet ser ut.

I ulike forsøk i kombinatorikk er det viktig å legge merke til føringer problemet gir. I problem som handler om å velge elementer fra den samme mengden gjentatte ganger vil det ha betydning for resultatet om allerede valgte elementer kan velges på nytt, altså om forsøket er med eller uten tilbakelegging (Kristensen & Wikan, 2016). En annen betingelse å ta i betraktning er om rekkefølgen elementene velges i er av betydning. Oppgaven: «Gitt de tre bokstavene A, B og C. På hvor mange måter kan ord på 3 bokstaver dannes?», gir ulike svar ut fra hva som tillates. Ved bruk av multiplikasjonsregelen kan forsøket utføres på $N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_s$ måter, hvor $N_1 = 3$, $N_2 = 3$ og $N_3 = 3$. Det totalet antallet løsninger vil da være $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, og alle mulige kombinasjoner tillates. Det innebærer løsninger hvor alle bokstavene i ordet er ulike (ABC), to av bokstavene er like (AAB) og alle bokstavene like (AAA). En løsning som godtar alle kombinasjonene, er et ordnet utvalg med tilbakelegging. Ordnet utvalg betyr at rekkefølge har noe å si (Kristensen & Wikan, 2016), og kombinasjonen ABC sees på som ulikt fra kombinasjonen ACB, og begge godtar derfor. At tilbakelegging er tillatt betyr at samme bokstav kan brukes flere ganger. Om tilbakelegging ikke er tillatt i oppgaven med å danne ord, må alle løsningene hvor bokstaver gjentas forkastes, og bare seks ord vil kunne dannes. Da vil oppgaven kunne betraktes på en annen måte – uavhengig av hvilken bokstav som velges som første bokstav i ordet, er det bare to bokstaver igjen å velge som andre bokstav og en igjen til siste. I første steg har man derfor 3 valgmuligheter, i andre steg 2 valgmuligheter og i tredje steg bare 1 valgmulighet, altså $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ulike kombinasjoner. I et uordnet utvalg er betingelsene annerledes, siden rekkefølgen på bokstavene her ikke har betydning, vil ABC ansees som samme løsning som ACB, og begge kan derfor ikke godtas. I et uordnet utvalg med tilbakelegging vil 10 kombinasjoner kunne dannes. Kombinasjoner hvor flere bokstaver er like kan brukes, men siden oppgaven forutsetter et uordnet utvalg vil AAB, ABA og BAA ansees å være like. Kombinasjonene som kan dannes ved uordnet utvalg med tilbakelegging er ABC, AAA, AAB, AAC, BBB, BBA, BBC, CCC, CCA og CCB. Siden rekkefølgen i uordnet utvalg ikke er av betydning vil det uten tilbakelegging bare være én kombinasjon som godtas, ABC.

2.2 Strategier i kombinatorikk

I dette delkapittelet vil jeg se nærmere på hvilke strategier elever vanligvis bruker i møte med kombinatorikkoppgaver. Ifølge English (1996) er kombinatorikk utfordrende, men meningsfull for elever, hvor noen er mer sofistikert enn andre. Det er ikke nok å undersøke elevenes handlinger når de løser visse problem, det er essensielt å forstå deres resonnering også (Halani, 2012). Etter en redegjørelse av teoretisk rammeverk vil jeg se nærmere på de ulike fasene strategier i kombinatorikk kan være i. Fasene er den uplanlagte fasen, som er preget av en prøv-og-feil-tilnærming til problemløsning, overgangsfasen, når et fremvoksende mønster trer frem i elevenes strategier og odometerfasen, når dette mønsteret er systematisk.

Lyn D. English har forsket mye på hvilke strategier unge barn bruker i kombinatorikk. I 1991 beskrev hun seks ulike strategier som strekker seg fra en tilfeldig utvelgelse til et fullstendig odometermønster i utvelgelsen av eksemplar. Dette var en større kvalitativ studie på 50 barn fra 4 til 9 år. I 1996 utgav English en lignende studie, hvor elevers strategier ble undersøkt. Informantene var 288 elever fra 8 til 12 år. Denne studien resulterte i tre ulike faser som beskrev elevers strategier: den uplanlagte fasen, overgangsfasen og odometerfasen. Tabell 1 under viser sammenhengen mellom de to studiene og beskrivelsene fra strategiene og fasene. I dette forskningsprosjektet vil fasene English (1996) beskriver stå sentralt, og elevenes strategier vil analyserer i lys av dem.

Fasene fra English (1996)	*Strategiene fra English (1991)*
Den uplanlagte fasen	A: Tilfeldig utvelgelse av eksemplar uten avvisning av gjentakende kombinasjoner
	B: Prøv- og feil, med tilfeldig utvelgelse og avvisning av gjentakende kombinasjoner
Overgangsfasen	C: Fremvoksende mønster, med avvisning av gjentakende kombinasjoner
	D: Konsekvent syklisk mønster, med avvisning av gjentakende kombinasjoner
Odometerfasen	E: Fremvoksende odometermønster, med mulig avvisning av gjentakende kombinasjoner
	F: Fullstendig odometermønster, ikke behov for avvisning av gjentakende kombinasjoner

Tabell 1: Sammenhengen mellom faser og strategier

Tabellen viser hvordan de seks strategiene kan betraktes som en del av fasene. Strategi A og B er strategier i den uplanlagte fasen, strategi C og D er strategier i overgangsfasen og strategi E og F er strategier i odometerfasen. Forskningsprosjektets utgangspunkt vil være fasene, fordi de rommer de ulike strategiene og i større grad er generaliserbar til andre typer oppgaver. I

English sine strategier fra 1991 er det for eksempel skille mellom strategier hvor det er behov for å avvise eksemplar. Dette er nyttig når konkreter blir benyttet i kombinatorikkoppgaver, men ved tegning er det ikke et like stort behov for dette skille, da elever tydeligere ser om kombinasjonen er dannet tidligere. Denne forskjellen mellom strategier med og uten avvisning av eksemplar er likevel ikke glemt i English sine faser, siden fasene har større rekkevidde, og strategien eleven bruker kan kategoriseres som tidlig eller sent i fasen. En strategi som bygger på en prøv-og-feil tilnærming som resulterer i mange gjentakende kombinasjoner vil for eksempel kunne kategoriseres som en strategi tidlig i den uplanlagte fasen.

2.2.1 Den uplanlagte fasen

Ifølge English (1996) utvikler elever strategier gradvis. Den første fasen er den uplanlagte, og er som navnet sier blottet for planlegging. Elever bruker i denne fasen prøv-og-feil-tilnærminger til problemløsning. Utvelgelsen av element i de ulike trinnene er følgelig tilfeldig (English, 1996). Siden utvelgelsen av element er tilfeldig er det lett å få gjentakelser. For å danne alle mulige kombinasjoner er det derfor i den uplanlagte fasen viktig at elevene kontrollerer sine løsninger, og avvise eventuelle kombinasjoner som er gjentakelser (English, 1996). Strategiene elevene kan bruke innenfor dette steget er både prøv-og-feil-strategier hvor de ikke avviser element når de først er valgt, og prøv-og feil-strategier hvor de tar stilling til om kombinasjonen tidligere er dannet, og derfor avviser gjentakelser (English, 1991). Felles er at elevene tilfeldig velger elementer i begge trinnene i problemløsningen. I problemet med å danne ord av tre bokstaver vil strategier i den uplanlagte fasen bære preg av at det ikke er en klar plan for problemløsningsprosessen. Ved å starte med ordet ABC, kan en strategi gå ut på å bytte om på bokstavene for å danne flere kombinasjoner. Løsninger i denne fasen kan se ut som eksemplene i figur 2, hvor kombinasjoner dannes ved en prøv-og-feil-strategi. I eksempel 1 er kombinasjonen BAC oppført to ganger. Å gjenta kombinasjoner er i denne fasen vanlig, og fasen innebærer både strategier hvor elevene oppdager gjentakelsene og videre avviser dem, og de strategiene hvor elevene ikke kontrollerer de ferdige dannede ordene. Eksempel 2 er et tilfelle hvor kombinasjonen BCA opptrer to ganger, men den gjentagende kombinasjonen avvises ved å stryke den ut. Begge disse eksemplene er strategier brukt i den uplanlagte fasen, hvor forskjellen er at eleven i eksempel 2 vurderer kombinasjonene som dannes, og avviser gjentakelser.

Eksempel 1:	Eksempel 2:
ABC	ABC
BAC	BCA
BCA	CAB
CAB	~~BCA~~
BAC	CBA
CBA	ACB

Figur 2: Eksempler på strategier i den uplanlagte fasen

Ved å arbeide med en ustrukturert prøv-og-feil-strategi vil det naturlig være vanskelig å holde kontroll på om alle kombinasjonene er dannet. Samtidig er det en utfordring å vite når man har funnet alle, da det ikke er noe struktur i fremgangsmåten. Derfor er det vanlig at for få eller for mange kombinasjoner er dannet ved bruk av strategier i den uplanlagte fasen (English, 1996).

2.2.2 Overgangsfasen

I motsetning til den uplanlagte fasen, har elevene i overgangsfasen en plan for problemløsningen. Navnet «overgangsfasen» tilsier også at dette er en fase i overgangen mellom prøv-og-feil-tilnærminger og algoritmiske tilnærminger. I denne fasen bruker elevene et mønster i utvelgelsen av element. Mønsteret er vanligvis knyttet til det første trinnet i forsøket (English, 1996), altså valg av en type element om kombinasjonene dannes fra ulike mengder. Elever som bruker en slik strategi viser et syklisk eller alternerende mønster i valg av element (English, 1991). Et alternerende mønster i problemet med å danne ord under forutsetningene uten tilbakelegging, hvor plasseringen til bokstavene har betydning, er at første bokstav i de ulike kombinasjonene varierer i rekkefølgen A, B, C. Tidlig i denne fasen er ikke dette mønsteret fullstendig, og elever kan mot slutten av prosessen gå over til å bruke en prøv-og-feil-tilnærming. Senere i fasen holder elevene fast med mønsteret, og benytter seg av det gjennom hele problemløsningsprosessen (English, 1991). Behovet for å bruke en prøv-og-feil-strategi er derfor ikke tilstede. Felles for hele fasen er at elevene ikke har en plan for det andre steget i forsøket, og enkelt bare velger element som skaper nye kombinasjoner. Upassende kombinasjoner blir derfor avvist. Eksemplene i figur 3 viser ulike måter elever i overgangsfasen kan løse ordproblemet.

Eksempel 1	Eksempel 2	Eksempel 3
ACB	ACB	ABC
BAC	BAC	BAC
CAB	CAB	CBA
ABC	ABC	ACB
	CBA	BCA
	BCA	CAB

Figur 3: Eksempler på strategier i overgangsfasen

I alle eksemplene ser vi er forsøk på et alternerende mønster, men eksempel 1 er ufullstendig, altså er ikke alle kombinasjonene funnet. I eksempel 2 er ikke mønsteret med å variere første bokstav fulgt gjennom hele løsningsprosessen, og en prøv-og-feil strategi er brukt for å finne de to siste kombinasjonene. Eksempel 3 er et eksempel fra sent i overgangsfasen, hvor mønsteret følges gjennom hele problemløsningsprosessen.

2.2.3 Odometerfasen

De mest sofistikerte strategiene for å løse kombinatorikkoppgaver viser en klar plan igjennom hele løsningsprosessen. Måten problemet løses på kan karakteriseres gjennom et odometer. Navnet «odometerstrategier» kommer fra likheten mellom strategiene og en kilometerteller på en bil (English, 1996). Halani (2012) forklarer strategien ved å se for seg et 3-sifret odometer, hvor tallet på hundrer- og tierplassen holdes konstant, mens enerplassen varieres syklisk, og odometeret beveger seg fra 000 til 001, 002 og så videre. Når alle tall fra 0 til 9 er brukt på enerplassen vil tierplassen endres fra 0 til 1, og holdes fast mens enerplassen varierer: 010, 011, 012 og så videre. Slik vil det fortsette helt til alle tall også er brukt på tierplassen med variasjonen av tall på enerplassen. Ved å følge et slikt mønster, vil odometeret endre tallet på hundrerplassen fra 0 til 1 og repetere hele prosessen. Jeg har valgt å holde på det engelske begrepet, da det ikke gir mening å snakke om «kilometerteller-strategier». Strategiene karakteriseres ved at et element holdes fast, og elementer fra den andre mengden varieres systematisk (English, 1996). Når alle kombinasjoner med det faste elementet er dannet, byttes det ut med et nytt element fra samme mengde, som på samme måte kombineres med de resterende elementene. Gjennom å syklisk variere med et konstant element, vil alle mulige kombinasjoner være mulig å danne på en effektiv og systematisk måte. Disse strategiene er nært knyttet den matematiske strukturen i kombinatorikk. Ifølge Lysø (2014) kan man finne antallet kombinasjoner ved å multiplisere alle de mulige valgene i de ulike trinnene. I bruk av odometerstrategier velges et element, som kombineres med alle de aktuelle elementene. Slik telles antallet mulige kombinasjoner i første trinn, før telleren nullstilles igjen, det faste elementet byttes ut med et fra samme mengde og de mulige kombinasjonene i neste trinn telles. Halani (2012) fant i sin forskning en måte å tenke på som valgte å kalle *The Wacky Odometer way of thinking*, som er strategier hvor et element holdes konstant og andre element varieres. Denne strategien skiller seg fra andre odometerstrategier, da elementet som holdes fast endrer posisjon i problemløsningsprosessen. Denne strategien er relevant når rekkefølge på de ulike elementene har betydning, som ved ordnet utvalg.

Eksempel 1	Eksempel 2	Eksempel 3
ABC	ABC	ABC
ACB	ACB	ACB
BCA	BAC	BAC
CAB	CAB	BCA
CBA	BCA	CAB
BAC	CBA	CBA

Figur 4: Eksempler på strategier i odometerfasen

Eksemplene over (figur 4) er ulike eksempler fra strategier i odometerfasen, i problemet med å finne antallet ord som kan dannes med de tre bokstavene A, B og C, i et forsøk med ordnet utvalg med tilbakelegging. I eksempel 1 er en odometerstrategi i begynnelsen av fasen brukt. Bokstaven A er først kombinert med de andre bokstavene, før den byttes ut med en ny bokstav: B. I dette eksempelet er ikke alle kombinasjonene med B som første bokstav funnet før den første bokstav byttes til C. Dette er vanlig for elever i begynnelsen av odometerstrategien, og tyder på at strategien ikke er fullutviklet (English, 1996). Eksempel 2 er et eksempel hvor *The Wacky Odometer way of thinking* er brukt. Her er alle kombinasjonene med A som første bokstav funnet først: ABC og ACB. Dette steget i problemløsningen er likt det første steget ved en standard odometerstrategi. Men i stedet for å bytte ut A med B eller C, endres heller plasseringen til A, slik at A er andre ledd, og de andre bokstavene varieres. Kombinasjonene BAC og CAB dannes da. Videre endres plasseringen igjen, og ordene BCA og CBA dannes.

Eksempel 3 er når mønsteret er fulgt gjennom hele problemløsningsprosessen, fordi alle kombinasjonene er dannet gjennom å holde et element fast, mens de andre elementene varieres. A holdes først fast som første bokstav, og gjennom å endre plasseringen til de to resterende bokstavene, dannes kombinasjonene ABC og ACB. Videre endres første bokstav til B, og kombinasjonene BAC og BCA dannes, før C velges som første bokstav, og de to siste kombinasjonene dannes. Dette er et eksempel med tre elementer fra samme mengde, og det er bare seks kombinasjoner som kan dannes under forutsetningene som ligger til grunn. Men strategien er generaliserbar, fordi alle kombinasjoner i et hvilket som helst kombinatorikkproblem vil kunne dannes på denne systematiske måten. Ved store tall vil det selvsagt være tidkrevende, og kanskje ikke nødvendig å vite eksakt hvordan alle kombinasjonene ser ut, men gjennom å systematisk variere med et konstant element, er det større sannsynlighet for å finne alle kombinasjonene.

Selv om strategiene ved bruk at en odometertilnærming gir mulighetene til å systematisk danne alle mulige kombinasjoner, nevner English (1991, 1993, 1996) noen utfordringer elever som bruker slike strategier kan møte. Elevene kan mangle eller gjenta noen kombinasjoner, men også å lete etter flere kombinasjoner når alle er funnet. Ifølge English (1996) oppdager som regel elevene disse manglene, og legger til de kombinasjonene som mangler eller trekker fra de kombinasjonene som er gjentakelser. Slike utfordringer møter gjerne elevene tidlig i odometerfasen, mens senere i fasen vil odometerstrategien være fullstendig og derfor uten behovet for å avvise eksemplar (English, 1993).

2.3 Representasjoner i matematikk

Matematikk skiller seg fra andre fag i at vi ikke har en fysisk tilgang til faget. I biologi kan vi studere organer, i kjemi kan vi observere stoffer skifter farger, mens i matematikk har vi ikke denne direkte tilgangen til kunnskap. Spesielt for matematikk er at de matematiske ideene ikke kan observeres, da de ikke er fysiske, men abstrakte. Derfor har vi bare tilgang til dem gjennom ulike representasjoner av objektet (Duval, 2006). Hvor vi i biologi kan se, kjenne og lukte på for eksempel en nyre, kan vi ikke i matematikk verken se, kjenne eller lukte på for eksempel addisjon. Den eneste måten vi kan arbeide med addisjon på er gjennom å representere. Vi kan tegne objektene som skal slås sammen, gjøre det fysisk med konkreter, forklare med ord eller bruke matematisk notasjon. Goldin og Shteingold (2001) skiller mellom interne og eksterne representasjoner. Eksterne representasjoner er vedtatte måter å representere et begrep på, og kan være ulike symboler, tallinjer og konkreter. I undervisningen er de eksterne representasjonene de læreren bruker for å meddele kunnskap med elevene (Miura, 2001). De interne representasjonene skiller seg fra de eksterne ved at de ikke er skapt i fellesskapet, men er individuelle måter å tenke og representere et matematisk objekt på, som personlige bilder av begrepet (Goldin & Shteingold, 2001). Interne representasjoner kan være like som de eksterne, men de kan også være helt annerledes, fordi de preges av hvordan individet tenker på objektet. I matematikk bruker vi representasjoner for å kommunisere mentale representasjon, og som et verktøy for å produsere ny kunnskap (Duval, 2004).

Duval (2006) har delt representasjoner inn i ulike representasjonssystem: Naturlig språk, geometriske figurer, symbolske system og kartesiske grafer. Naturlig språk innebærer representasjoner som forklaringer eller teorem, og kan uttrykkes både muntlig og skriftlig. Geometriske figurer kan være tegninger, skisser, mønstre eller figurer som kan konstrueres med hjelpemiddel. Det symbolske systemet innebærer skriftlige utregninger og bevis og er preget av et mer formelt språk. De kartesiske grafene kan være diagrammer og grafer. Siden vi bare har tilgang til matematiske objekt gjennom representasjoner, er vi i matematisk problemløsning nødt til å velge et representasjonssystem. I denne oppgaven står geometriske figurer som representasjonssystem sentralt, da elevene arbeider med å manipulere tegningene sine for å løse problemet. Likevel blir oppgaven presentert for elevene gjennom muntlig språk, som går inn under representasjonssystemet naturlig språk. Elever som bruker tegning i problemløsningsprosessen er derfor nødt til å endre fra en representasjon til en annen, fra muntlig språk til tegning, før de kan løse problemet ved hjelp av tegningen. Valg av representasjonssystem er i matematikk viktig, da ulike representasjoner har ulike potensialer, og vil derfor åpne for ulike aspekter ved det matematiske objektet. Tegning vil for eksempel kunne vise aspekter ved kombinatorikk som ikke skreven tekst viser like eksplisitt. Et annet viktig element er at det matematiske objektet vi representerer ikke må forveksles med innholdet i den semiotiske representasjonen som er valgt (Duval, 2004). For å løse problem må vi arbeide i representasjonene, og manipulerer for å finne en løsning. Duval (2004) beskriver to ulike måter å endre representasjoner på. Behandlinger skjer innenfor det samme semiotiske systemet, og kan være å manipulere matematiske uttrykk eller tegninger. Når elevene manipulerer tegningene sine arbeider de i samme representasjonssystem, og manipulasjonene de gjør er en behandling. Skjer endringen av representasjonen fra et system til et annet kalles det omdannelse, og kan være å endre fra en tegning til et matematisk uttrykk. Utfordringen med omdannelser er å kjenne igjen det matematiske objektet i den nye representasjon, som kan se ganske ulik ut fra den forrige. I en problemløsningsprosess er ofte begge disse transformasjonene nødvendig. Ifølge Duval (2004) kan det være hensiktsmessig å bruke hverdagskontekster i matematikkundervisningen, fordi det for elevene kan gi mening til matematiske objekt. Hverdagskontekster kan være utgangspunkt for mange ulike representasjoner og bidra til å skape gode interne representasjoner gjennom visualisering. Likevel er det mange aspekter ved et matematisk objekt som ikke kan dekkes gjennom kontekster. Omdannelsen fra en kontekst til symbol er en krevende transformasjon, og kan føre til at elevene mister det matematiske objektet og derfor opererer med to ulike objekter fordi de er i ulike representasjonssystem.

2.4 Hvorfor tegne

I tillegg til å undersøke hvilke kombinatorikkstrategier elevene i dette forskningsprosjektet benyttet seg av, er fokusområdet å studere elevenes bruk av tegning. Siden jeg i datamaterialet mitt har tilgang til både elevenes tegninger og deres utsagn, ønsker jeg ikke bare å se på tegning som er ferdig resultat, men i større grad se på årsaken til at elevene velger å tegne. Rammeverket brukt i dette forskningsprosjektet for å forstå hvilken funksjon elevenes tegninger har i deres arbeid med kombinatorikkoppgaver bygger i hovedsak på to studier: Teledahl (2017) og Stylianou (2011).

Teledahl (2017) har gjennom en empirisk kvalitativ studie studert hvordan unge elever skriver når de kommuniserer deres matematiske problemløsning. Informantene var mellom 8-12 år, og 512 elevbesvarelser ble analysert. Hennes funn indikerer at elever bruker bilder, ord, tall og layout for å løse matematiske problem. For denne oppgaven er det funnene hennes fra hvordan elever bruker tegning som er mest interessant, da hun fant at elevene tegnet på fire ulike grunnlag: for å fastsette betingelser, redegjøre for prosessen, representere svaret og som en illustrasjon.

Stylianou (2011) så i sin kvalitative forskning på likheter mellom problemløsning hos eksperter og hos elever, og sammenlignet hvordan de representerte i problemløsning. Studien ble gjennomført på 24 elever på 11-12 år. Kategoriene av måte å bruke representasjoner på beskrevet i denne forskningen er som et verktøy for å: forstå, utforske, overvåke og kontrollere.

Det finnes flere innfallsvinkler å studere elevers tegninger fra. Jeg har valgt å ta utgangspunkt i forskning på hvilken funksjon tegning har for eleven. Altså vil ikke tegningen analyseres som et produkt. For å tilpasse kategoriene til denne forskningen har jeg valgt å bruke kategoriene tegne for å forstå problemet, utforske, redegjøre for prosessen og representere svaret. Tabell 2 viser mine kategorier, sammen med kategoriene fra Teledahl (2017) og Stylianous (2011) forskning. Etter å ha funnet likheter mellom disse to forskningene har jeg valgt en alternativ kategorisering, som støtter seg på kategoriene fra begge studiene. Disse kategoriene er utgangspunkt for strukturen i dette delkapittelet, og begreper fra Teledahl (2017) og Stylianou (2011) vil drøftes. Teledahl (2017) sin beskrivelse av tegning for å redegjøre for prosessen innebærer både planlagte og uplanlagte manipulasjoner. I denne oppgaven har jeg valgt i større grad å skille mellom disse. Dette fordi jeg i tillegg til å studere tegningens funksjon, også ser på hvilken strategi elevene bruker, og det da er viktig å skille mellom utforsking og redegjørelse, da det kan være sammenheng mellom planlagte eller uplanlagte manipulasjoner og strategien elevene bruker.

	Teledahls kategorier	*Stylianous kategorier*
Forstå problemet	Illustrasjon Fastsette betingelser for problemet	Forstå informasjon
Utforske	Redegjøre for prosessen med uplanlagte manipulasjoner	Utforske
Redegjøre for prosessen	Redegjøre for prosessen med planlagte manipulasjoner	Overvåke
Representere svaret	Representere svaret	Kontrollere og evaluere

Tabell 2: Sammenhengen mellom kategoriene for tegning

Styrken til Teledahls forskning er at det er en større studie, med elever fra flere klassetrinn, fra 8-årsalderen til 12-årsalderen. Stylianous mindre studie sammenligner elevers måte å representere på med eksperters, og bruker kategorier fra analysen av ekspertenes representasjoner i analysen av elevers representasjoner. Jeg synes det er hensiktsmessig å bruke begge disse studiene da det kan si noe om hvilke måter som anses å være vanlig å tegne på, fra et ekspertperspektiv, og hva som er mest vanlig hos elever i barneskolen generelt. Studiene har overlappende kategorier, og vil derfor kunne støtte hverandre og utfylle hverandre.

Når elever bruker tegninger i arbeid med problemløsning kan det gjøres på ulike grunnlag, altså kan behovet for å tegne være ulikt. Noen elever tegner for å forstå problemet, andre for å redegjøre for prosessen. Når elevene redegjør for prosessen kan tegningen være lik som når de bruker tegningen for å utforske. En siste måte å bruke tegningen på er å representere svaret. Det kan elevene gjøre for seg selv, for å kunne kontrollere løsningene sine, eller for å kommunisere løsningen til andre. I dette delkapittelet vil jeg gå nærmere inn på hvordan elever tegner når de bruker tegningen på disse ulike grunnlagene.

2.4.1 Tegne for å forstå problemet

Når vi i møter et nytt matematisk problem, må vi sette oss inn i det, og prøve å forstå problemet for å kunne løse det. Dette kan gjøres med ulike representasjoner, muntlig språk, matematisk notasjon, visuelt, med konkreter eller med tegning som et hjelpemiddel. Ifølge Teledahl (2017) kan årsaken til at elever tegner være å konstatere betingelser for problemet. Blant de yngre elevene er det ikke dette en vanlig måte å bruke tegning på (Teledahl, 2017), men hensikten er å forstå problemet og betingelsene gjennom en oppklaringstegning. Teledahl (2017) beskriver også en måte å bruke tegning i problemløsingsprosessen på, som hun kaller illustrasjon. Det er en tegning som illustrerer deler eller hele problemet eller noe som er irrelevant for problemet, og tegningen har som funksjon å sette i gang tankeprosessen. Å tegne for å konstatere betingelser og å tegne for å illustrere problemet er begge måter å tegne for å forstå problemet på, og derfor har jeg valgt å kategorisere disse som måter å tegne for å forstå problemet på. Dette fordi tegninger som illustrerer deler eller hele problemet har som funksjon å gi en visualisering av konteksten, som er en måte å forstå problemet på. Stylianou (2011) beskriver også tegning som et verktøy for å forstå oppgavens betingelser, gjennom å kombinere ulike aspekter ved det gitte problemet, som gir muligheter til å se hvordan de ulike aspektene påvirker hverandre. Nytteverdien i tegning på denne måten er å kunne se muligheter og begrensninger i problemet (Stylianou, 2011). Et eksempel på å bruke tegning for å forstå problemet i oppgaver med å kombinere plagg til ulike antrekk kan være å tegne to ulike kombinasjoner. Ved å gjøre dette kan eleven fastsette og forstå betingelsen at et plagg kan brukes flere ganger, så lenge det kombineres med ulike plagg. Tegner eleven for eksempel bukse B_1 og genser G_1 som et antrekk, og B_1 og G_2 som et annet, vil det være tydeligere for eleven å se at antrekkene er ulike, selv om de inneholder et likt element. Denne typen oppgave er litt spesiell, da det velges et element fra to ulike mengder, bukser og gensere. Slike sammensetninger fører til at elevene ikke trenger å ta stilling til om samme element kan brukes flere ganger i samme kombinasjon, da det vil være unaturlig å danne kombinasjoner med to bukser eller to gensere. I oppgaven med å danne ord av tre bokstaver er det et større behov for å fastsette betingelser. For å forstå dette problemet må elevene klargjøre om bokstavene kan gjentas, og om rekkefølgen har noe å si, altså om det er ordnet eller uordnet utvalg, med eller uten gjentakelse. En oppklaringstegning kan for eksempel her inneholde flere kombinasjoner som inneholder de samme bokstavene i ulike rekkefølge (ABC og BAC) hvor den ene er strøket over, eller forbundet med en linje for å vise at kombinasjonene er like om det er et uordnet utvalg.

2.4.2 Tegne for å utforske

I arbeid med representasjoner i matematikk vil det ofte være et behov for å manipulere representasjonene, for å løse matematiske problem. Elever som tegner i problemløsningsprosessen er intet unntak. Likevel kan årsaken til at elevene manipulerer være ulike. For å kommunisere sin matematiske forståelse eller slippe å ha alt i hode kan elevene tegne manipulasjoner de har sett for seg. Om manipulasjonene elever gjør i arbeid med problemløsningsprosessen ikke er planlagte manipulasjoner, er de ofte mer rotete, noe som er naturlig for tegninger som er utforskende, hvor elevene ikke har en plan for hva de skal gjøre før de begynner å tegne (Teledahl, 2017). Elever som bruker tegning for å forenkle utforskingsprosessen bruker tegningen for å identifisere videre informasjon og implikasjoner (Stylianou, 2011). Tegninger er da en representasjon hvor det er mulig å manipulere og på den måten utdype og søke i problemet. Ifølge Teledahl (2017) kan det være en utfordring å skille mellom manipulasjoner som er planlagte og manipulasjoner som er utforskende, fordi de utenfra kan se like ut. En kan tenke seg at forskjeller i utdyping kan indikere at manipulasjonene er en del av en strategi som er planlagt på forhånd. Teledahl (2017) fant i sin forskning at dette kunne relateres til orden og tålmodighet hos eleven. Altså kan løsninger som ser ut til å være planlagte på forhånd egentlig være utforskende. På tilsvarende måte kan utforskende tegninger hvor eleven prøver og feiler være systematiske, og dermed se ut som en tegning som redegjør for problemløsningsprosessen med planlagte manipulasjoner.

2.4.3 Tegne for å redegjøre for prosessen

Når vi arbeider med matematiske problem, har vi som nevnt tidligere noen ganger behov for å benytte representasjoner for å utforske problemet, og da kan tegning være et godt hjelpemiddel. Andre ganger er det ikke selve prosessen ved å løse problemet som skaper behovet for å tegne eller representere, men heller et behov for å kommunisere sin matematiske forståelse til andre. Ofte kan også representasjoner brukes for å slippe å huske informasjon, når problemløsningsprosessen egentlig foregår ved hjelp av visualisering eller matematisk notasjon, men tegning blir brukt for å slippe å «ha alt i hode». Slike måter å bruke tegning på kalles redegjørelse for problemløsningsprosessen.

Ifølge Teledahl (2017) kan elever bruke tegninger for å redegjøre for problemløsningsprosessen. Et viktig element i en slik bruk av tegning er å gjøre prosessen eksplisitt, slik at leseren kan følge prosessen. Dette kan gjøres gjennom sekvensering, gjentakelse eller utkrysning. Når elever gjør problemløsningsprosessen eksplisitt gjennom å sekvensere er det oftest vist kronologisk fra venstre mot høyre eller ovenfra og ned. Ved å gjenta kan elevene gjøre små forandringer i de ulike delene av tegningen, slik at leseren kan følge prosessen. Teledahl (2017) skiller mellom planlagte og utforskende manipulasjoner i disse tegningene, og i denne kategorien har jeg bare valgt å ta med de planlagte, fordi utforskende tegninger og planlagte tegninger er ulike måter å tilnærme seg problemløsningsprosessen på. De utforskende tegningene skapes i prosessen, mens de planlagte manipulasjonene er en gjengivelse av elevens prosess. Måten Teledahl (2017) beskriver tegning som redegjørelse for prosessen med planlagte manipulasjoner stemmer overens med Stylianou (2011) sin beskrivelse av tegning som et overvåkningsverktøy. Fokuset er litt ulikt, da Teledahl (2017) studerer hvordan elever kommuniserer, mens Stylianou (2011) ønsker å finne ut hvilken funksjon representasjoner har i elevers matematiske problemløsing. Å bruke tegning som et verktøy for å overvåke, gir en mulighet til å kombinere all informasjonen de har om problemet eksternt, for å slippe å «ha alt i hode» (Stylianou, 2011). Å bruke tegning for å redegjøre for problemløsningsprosessen kan være både til nytte for eleven selv og for å presentere prosessen for andre. Tegner elevene for å lettere kunne holde oversikt, for å slippe å ha alt «i hode» er tegningen til hjelp i selve problemløsningsprosessen (Stylianou, 2011). Kommunikasjon kan også være årsaken til at elever redegjør for problemløsningsprosessen gjennom å tegne, da for å være sikker på at leseren kan følge prosessen (Teledahl, 2017).

2.4.4 Tegne for å representere svaret

En annen måte å bruke tegning på er å tegne for å representere svaret. Teledahl (2017) beskriver denne bruken av tegning som et verktøy for å representere svaret for en leser, mens Stylianou (2011) beskriver det som et verktøy for at eleven selv skal kunne kontrollere sine løsninger. Når elever tegner for å representere svaret på problemet er de som oftest komplementert med ord eller forkortelser (Teledahl, 2017). Bakar, Way og Bobis (2016) fant også i sin forskning elever som tegnet etter å ha løst problemet. Funksjonen tegningen hadde for disse elevene var å vise løsningen på problemet. Representasjonen elevene tegner er da en omdannelse fra et annet representasjonssystem, hvor de i utgangspunktet har brukt konkreter for å løse problemet.

2.5 Hvordan tegne

Visuelle representasjoner er i matematikklæringen viktig, både for å støtte refleksjon og som et hjelpemiddel for å kunne kommunisere matematiske ideer (Elia, Gagatsis & Demetriou, 2007). Bilder er dynamiske verktøy som kan støtte elevenes matematiske tenking og kommunikasjon med andre elever, og språket elevene knytter til bildene gir læreren innsikt i elevenes forståelse og tenking (Whitin & Whitin, 2001). Uavhengig av hvilken skrevet representasjon elevene velger å bruke organiserer de i arbeid med problemløsing teksten, gjennom å strukturere den. Elever strukturerer teksten på ulike måter, ved å tegne piler, skape avstand for å separere, koble sammen og organisere ulike deler av den (Teledahl, 2017).

Tegning gir elever muligheten til å tenke tilbake på tidligere erfaringer og kunnskap, utvikle nye ideer og strategier og løse problemer. Tegneaktiviteten i problemløsningsprosessen kan også gi elevene tilgang til deres mentale aktivitet og får muligheten til å reflektere over den (Papandreou, 2014). Ifølge Bakar et al (2016) er det to typer tegninger elever kan produsere – piktografiske og ikoniske. Piktografiske tegninger er realistiske avbildninger av objektene problemet innehar. Ikoniske er mer abstrakter, og er enkle streker og former tegnet for å representere de påtenkte objektene. Velez og da Ponte (2013) kaller de ikoniske representasjonene for skjematiske, men videre vil jeg bruke begrepet ikoniske representasjoner for de abstrakte representasjonene som for eksempel enkle streker og bokstaver. Ikoniske representasjoner er mindre tidkrevende enn piktografiske og forutsetter at eleven kan trekke ut det viktigste av informasjon i problemet. Curruthers og Worthington (2006) mener lærere bør oppfordre elevene som tegner piktografisk til å bruke mer effektive former for telling heller enn å fokusere på detaljerte, artistiske tegninger. De ikoniske tegningene er mer løsrevet fra konteksten, da elementer i problemet representeres på en enklere måte. Dette krever forståelse for at en representasjon ikke trenger å se ut som objektet det skal representere. En ikonisk representasjon av et marsvin kan være en sirkel eller en bokstav, og inneholder få detaljer som ikke er nødvendige. Ifølge Saundry og Nicol (2006) kan elever som fokuserer på detaljer i sine tegninger risikere å miste det matematiske objektet, da de kan være mer opptatt av å tegne utdypende og artistiske tegninger. Det varierer blant elever om tegningen bærer preg av detaljer eller om de er enklere ikoniske representasjoner. Kombinatorikk er et spesielt emne innenfor matematikk. Palmer og van Bommel (2016) undersøkte i sin forskning om det var noen sammenheng mellom elevenes representasjoner og hvordan de løste kombinatorikkoppgaver, og om disse sammenhengene var tilsvarende tidligere forskning på elevers representasjoner av kvantitet. Resultatene deres indikerer at de piktografiske representasjonene elevene tegner gir en mer systematisert løsning, mens ikoniske representasjoner ofte fører til løsningsforslag med gjentakende kombinasjoner. Grunnen til dette kan være at det tar lengre tid å produsere piktografiske representasjoner, og at elevene derfor har bedre tid til å tenke og dermed planlegge mens de tegner.

I problemløsning er det ikke alle elevene som spontant tegner, og noen tegner ikke i det hele tatt. Ifølge Saundry og Nicol (2006) kan elever også bare visualisere bildene og behandle informasjonen i problemet på en visuell måte. Ifølge Saundy og Nicol (2006) er det nyttig for lærere å undersøke tegning som problemløsning, da det kan føre til at læreren blir bevisst på ulike måter å tolke elevers utførelser på. Ved å undersøke tegning som problemløsning, kan læreren føle seg tryggere på å kjenne igjen og gi troverdighet til elevers tidlige representasjoner, og sette fokus på prosessen og ikke bare produktet.

2.6 Tidligere forskning

Pessoa og Borba (2012) konkluderte i sin kvalitative forskning på femåringer at unge barn kan arbeide konkret med enkle kombinatoriske situasjoner. Datamaterialet deres viste at elevene fikk til å velge ut de nødvendige elementene for problemet, men hadde vanskeligheter med å avgjøre om rekkefølgen på elementene var av betydning og å finne alle mulighetene. Zapata-Cardona (2018) gjorde en kvalitativ undersøkelse på tre barn fra 6-8 år, med det velkjente problemet med kombinasjoner av skjorter og bukser. De fant at elevene ikke uten oppfordring brukte samme element flere ganger, altså anså de en bukse som «oppbrukt» om den var brukt i en kombinasjon. Resultatene fra Piaget og Inhelder (1975) og English (1993) indikerer også at elever bruker empiriske tilnærminger og enkle strategier i det første møte med kombinatorikk. Flere undersøkelser har sett på elevenes kombinatoriske forståelse, men de fleste har brukt konkreter i datainnsamlingen. Palmer og van Bommel (2018) gjorde en større studie på 123 på seks år, hvor elevene tegnet. Deres datamateriale indikerer at elever som tegner piktografiske representasjoner har færre gjentakelser enn de som tegner ikoniske.

3. Metode

I dette kapitelet vil jeg beskrive og begrunne metodene jeg har brukt i datainnsamlingen og analysen. Først vil jeg se på prosjektets forskningsdesign, hvor jeg redegjør for den kvalitative metoden datainnsamlingen bygger på. Videre redegjør jeg for selve datainnsamlingsprosessen og de valgene jeg har tatt med tanke på at andretrinnselever er informanter og hvordan jeg gjennomførte innsamlingen. Deretter tar jeg for meg bearbeidelsen og analysearbeidet før jeg til slutt diskuterer troverdighet og etiske betraktninger.

3.1 Forskningsdesign

Hensikten med dette prosjektet er å undersøke hvordan fire andreklasseelever løser kombinatorikkoppgaver, og hvilken funksjon tegning har for dem i løsningsprosessen. For å finne ut dette så jeg det som nødvendig å gi elevene oppgaver i kombinatorikk, samtale med dem og observere deres arbeid. Datamaterialet i dette prosjektet er lite og nært knyttet til informantene. Derfor vil jeg kalle undersøkelsen for en småskala kvalitativ undersøkelse.

I kvalitativ forskning har forskeren en åpen interaksjon med informantene, og forskningen gransker temaet dypere enn en ren gjenfortelling av handlinger og atferd (Cohen, Manion & Morrison, 2018). Kvalitativ forskning er et stort begrep som omfatter en rekke kvalitative tilnærminger som kan virke nokså ulike fra hverandre. Noen drives frem av empiri, mens andre er teoridrevet. Som regel er kvalitativ forskning fremdrevet av både empiri og teori (Tjora, 2017), altså imellom induktiv og deduktiv forskning. Ifølge Tjora (2017) studerer vi gjennom observasjon det elever gjør, mens i et intervju studeres det elever sier at de gjør. Derfor er det naturlig for meg, som er ute etter strategiene elevene bruker, å benytte en kombinasjon av observasjon og intervju. Min deltakelse er for viktig til å si at jeg bare observerer, og elevene i arbeid med oppgavene for viktig til å si at jeg bare intervjuer. Min deltakelse i dette forskningsprosjektet besto i å gi elevene oppgavene, observere mens de arbeidet og stille spørsmål underveis i arbeidet og når de mente de var ferdige med oppgavene.

Mulighetene jeg hadde for å stille spørsmål i gjennomføringen av datainnsamlingen, gav meg større innblikk i elevenes løsningsmetode. Jeg kunne spørre etter utdypninger, gjentakelser og oppklaringer, for å sikre at jeg ikke misforsto elevene. Det å være tilstede, gav meg også mulighet til å notere ned observasjoner som ikke ville være tilgjengelig i lydopptaket, som kroppsspråk, peking og andre ikke-verbale handlinger som kunne være viktig i analysearbeidet. Som nevnt valgte jeg i min datainnsamling å bruke lydopptaker. Som forsker gjør det at man i intervjusituasjonen kan konsentrere seg om informanten, sørge for god kommunikasjon og flyt i samtalen, i visshet om at alt som blir sagt blir tatt opp (Tjora, 2012). Jeg vurderte tidlig at jeg ikke ville benytte videoopptak i innhentingen av data. Det ville være en styrke, da jeg ikke hadde trengt å notere like mye i samtalene med elevene. Jeg ville også fått et lettere arbeid med transkriberingen, da det kan være utfordrende å høre hvem som snakker, og man i større grad er avhengig av å huske hva det snakkes om. Elevene pekte for eksempel i tegningene sine. Med videoopptak hadde jeg ikke trengt å notere ned hva elevene pekte på. I tillegg til at det stilles strengere krav fra NSD for å få godkjenning til å ta videoopptak under datainnsamling, så jeg det ikke som en nødvendighet, da jeg mente det ville ta mye mer fokus fra elevene med et videokamera i rommet enn en lydopptaker.

Innenfor kvalitativ forskning kan innsamlingen av datamateriale gjennomføres i en liten gruppe av befolkningen. Datainnsamlingen i dette prosjektet er gjennomført i en liten gruppe elever på andre trinn, og er derfor ikke representativt for alle elever på andretrinn, bare for seg selv. Dette kalles non-probability samples (Cohen et al., 2018). Resultatene i denne forskningen vil altså bare kunne tale for seg selv, og lignende studier vil kunne gi andre resultater. Likevel vil resultatene si noe om hvordan elever på andre trinn *kan* løse oppgaver i kombinatorikk, og hvilken funksjon tegning *kan* ha i dette arbeidet.

3.2 Gjennomføring av datainnsamlingen

Jeg vil nå presentere og redegjøre for valg av informanter til forskningsprosjektet og hvordan datainnsamlingen ble gjennomført.

3.2.1 Valg av informanter

Jeg valgte å samle inn datamateriale på en skole i Trondheim kommune. Jeg hadde ikke kjennskap til skolen fra før, men kjente to av lærerne. Grunnen til at jeg valgte denne skolen, var fordi disse lærerne arbeidet som kontaktlærere på 2. trinn, som var den aldersgruppen jeg ønsket å gjennomføre datainnsamlingen på. Jeg ønsket informanter som ikke hadde jobbet med kombinatorikk før, og som derfor ikke hadde lært noen strategier for å løse oppgaver i kombinatorikk. Med dette som utgangspunkt falt valget på unge elever i barneskolen. Samtidig ville jeg at elevene skulle være trygge, og siden datainnsamlingen fant sted på høsten, i det førstetrinnselevene nettopp hadde startet på skolen, valgte jeg å bruke andretrinnselever i min datainnsamling. Et valg av informanter ut fra kriterier som dette kalles betinget utvelging (purposive sampling) (Cohen et al., 2018), da et kriterium for valg av informanter var at de gikk på andre trinn. Etter å ha tatt kontakt med en av lærerne og fått positivt svar, utarbeidet jeg et informasjonsskriv som læreren sendte med sine rundt 15 kontaktelever hjem.

Jeg la ingen føringer for hvilke av elevene som skulle delta i datainnsamlingen, men sa læreren kunne bestemme hvem som skulle delta. Læreren valgte elever som han mente ville tørre å delta muntlig, og som trolig ville føle seg trygge i situasjonen. Siden de resterende elevene i klassen hadde undervisning når jeg gjennomførte datainnsamlingen valgte læreren bort elever som eksempelvis hadde vært borte fra skolen tidligere og gått glipp av undervisning i det faget den resterende klassen hadde når datainnsamlingen fant sted. Videre satte læreren sammen grupper på to som av erfaring fungerte godt sammen. For å sikre anonymitet har de fire informantene mine fått de fiktive navnene Andreas, Bendik, Caroline og Daniel. Navnene er tilfeldige navn med forbokstavene A, B, C og D, for å gjøre analysearbeidet lettere, da jeg kunne markere tegningene med bokstaver.

3.2.2 Gjennomføring

Datainnsamlingen foregikk på et grupperom på skolen, som elevene var kjente med. En kjent lokasjon, uten risiko for å bli avbrutt er en forutsetning for en god intervjuatmosvære (Cohen et al., 2018). Grupperommet var utstyrt med et kvadratisk bord, og på forhånd hadde jeg lagt klart blanke ark og fargeblyanter slik at de var lett tilgjengelig for elevene. Hver samtale med elevgruppene varte i om lag 45 minutter. Jeg tok lydopptak av samtalene, tok notater underveis og samlet inn det skriftlige arbeidet elevene produserte. Siden dette var mitt første møte med elevene, brukte jeg litt tid på å bygge en positiv relasjon til elevene. Det gjorde jeg ved å være til stede i klasserommet fra starten, og fortalte min relasjon til to av lærerne på trinnet. Ifølge Cohen et al. (2018) er det en god ide at elevene ser intervjueren rundt om på skolen før intervjuene blir gjennomført. Det er viktig å la barn kjenne på hvor viktig de er (Doverborg &

Pramling, 1992; Cohen et al., 2018), derfor forklarte jeg også bruken av lydopptaker. Jeg sa til elevene at jeg brukte lydopptaker for å være sikker på at jeg fikk med meg alt det viktige de sa.

Ifølge Kampmann (2000) kan det være betryggende for barn om de intervjues i grupper. Jeg har valgt å gjennomføre datainnsamlingen med to elever om gangen. Dette har jeg gjort i samråd med veileder og elevenes lærer, nettopp for at situasjonen skal føles trygg for elevene. En annen fordel med gruppeintervju er at barna kan kommentere og utfylle hverandre, og dermed prege samtalen (Kampmann, 2000). Dette ser ikke jeg som en fordel i min datainnsamling. Jeg ønsket å se på hvordan elevene løste oppgavene, altså hvilke strategier de brukte og hvordan de eventuelt brukte tegning i løsningen. I det ligger det at jeg ønsket at elevene skulle jobbe individuelt med oppgaven. Om jeg hadde intervjuet elevene en og en, hadde jeg med sikkerhet kunne si at dette var deres løsning, upåvirket av andre elever. Likevel har jeg valgt å intervjue to og to, fordi jeg synes det veier tyngst at elevene føler seg trygge i situasjonen.

Etter å ha snakket litt løst og fast, fikk elevene presentert «antrekkproblemet». Før elevene startet med arbeidet snakket vi felles om eventuelle spørsmål elevene hadde. Dette valgte jeg å gjøre fordi jeg ville at elevene skulle føle seg trygge. Oppgavene var for elevene problemløsningsoppgaver, siden jeg antok at de ikke hadde en strategi klar på forhånd. Fordi oppgavene kunne virke vanskelig for elevene hadde jeg med bilder av klesplaggene i de ulike fargene. Elevene arbeidet selvstendig med problemet, og samtidig som jeg observerte hva de gjorde, stilte jeg spørsmål til hver enkelt elev. Jeg noterte viktige elementer som ikke kom til å komme tydelig frem i lydopptaket. Det kunne være hva elevene pekte på da de i sin forklaring for eksempel sa «den buksa til den genseren». Måten jeg noterte dette kunne være «oransje → blå 05:35», eller bare «o b 5:35». Ut fra disse notatene forstod jeg da jeg transkriberte samtalene i etterkant at 5 minutter og 35 sekunder ut i samtalen er det den oransje buksa og den blå genseren eleven peker på. I tillegg gjentok jeg ofte det elevene sa, for å gjøre transkripsjonsarbeidet enklere. På tilsvarende måte arbeidet elevene med den andre oppgaven. Her hadde jeg med tre bamser som lignet på marsvin, for å konkretisere oppgaven.

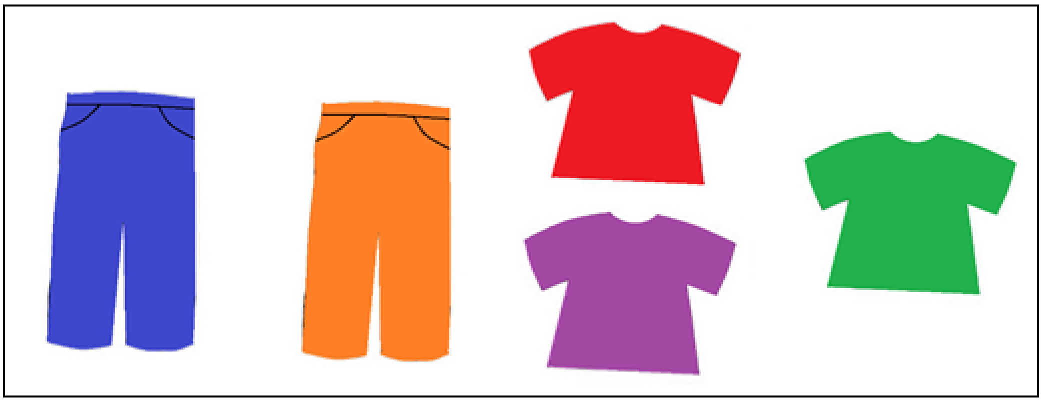
3.3. Presentasjon av oppgaver

Elevene i dette forskningsprosjektet fikk to ulike kombinatorikkoppgaver muntlig presentert, sammen med bilder eller konkreter. Jeg vil i det følgende presentere de to oppgavene i samme rekkefølge som de ble presentert for elevene, begrunne hvorfor jeg har valgt disse oppgavene, og drøfte likheter og ulikheter med oppgavene.

3.3.1 Utforming av oppgaver

I datainnsamlingen ble elevene presentert to ulike kombinatorikkoppgaver. Antrekkproblemet er en oppgave med sammensetting av elementer fra to mengder. Problemet går ut på å finne antallet kombinasjoner som er mulig å danne med to ulike bukser og to ulike gensere. I tillegg til at jeg leste opp oppgaveteksten for elevene, fikk de se bilder av de ulike plaggene (se figur 5). Oppgaven lød som følger:

«*Jeg skal på ferie, og kofferten min er så liten at dette er alt jeg har plass til. Jeg vil ikke gå i de samme antrekkene flere dager på denne ferien. Hvor mange forskjellige antrekk kan jeg bruke? Hvor mange dager kan jeg være på ferie om jeg ikke skal bruke de samme antrekkene flere dager?*»



Figur 5: Bilde som ble presentert sammen med antrekkproblemet

Den andre oppgaven, marsvinproblemet, er sammensettinger av elementer fra bare en mengde. Her er problemet elevene fikk å finne antallet kombinasjoner tre ulike marsvin kan kombineres. Oppgaven elevene fikk er tilknyttet bilde i figur 6 og er følgende:

«Disse tre marsvinene er søsken. Når de skal se på TV på ettermiddagene, krangler de alltid om hvem som skal sitte hvor. Jeg lurer på om dere kan hjelpe marsvinene med å finne ut på hvor mange ulike måter de kan sitte?»

Figur 6: Konkretene som ble presentert sammen med marsvinproblemet

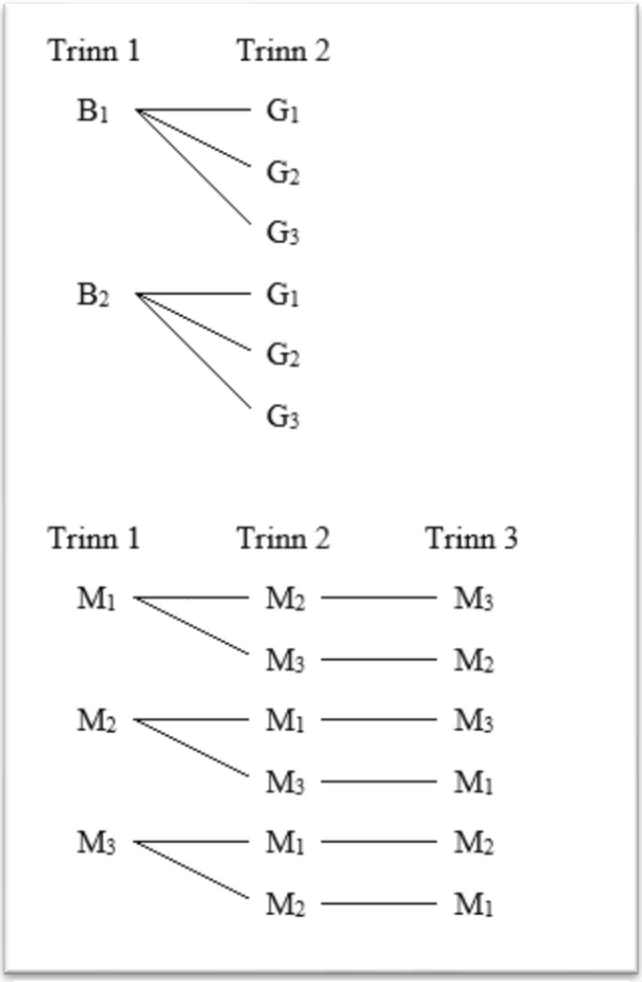
Oppgavene brukt i datainnsamlingen er inspirert fra litteraturen innenfor kombinatorikk med små barn. Oppgaven med marsvinene som krangler om hvor de skal sitte, er hentet fra van Bommel og Palmer (2018), som gav elevene i sin forskning tilsvarende oppgave. Bjørnene ble byttet ut med marsvin, fordi det var slike bamser som var tilgjengelig i tre ulike farger på lekebutikken. I forberedelsene til datainnsamlingen vurderte jeg å endre på tallene brukt i oppgaven, men valgte å holde fast ved tre elementer. Grunnen til at jeg i min datainnsamling valgte å ha tre elementer i denne oppgaven, var at jeg på forhånd hadde en hypotese om at elevene kunne komme til å bruke en strategi som involverte å bytte plass på to av marsvinene. Da møter de et problem med det siste marsvinet, som må sitte på samme sted. Jeg ønsket å se hvordan de håndterte denne problemstillingen om den oppsto. Ifølge English (1996) er det vanlig for elever å oppfatte «ulik» som «ulik på alle mulige måter», og derfor ikke godta to løsninger hvor et element har lik plassering. Oppgaven med de ulike antrekkene er inspirert av English (1991), hvor hun undersøker barns strategier i kombinatorikkoppgaver. I hennes forskning benytter elevene konkreter i større grad, da de får tildelt pappfigurer av bamser som skal kles i plagg med ulike farger. Siden jeg også har et mål om å se på hvilken funksjon tegning har for elevene i problemløsningsprosessen, valgte jeg naturlig nok å ikke ha disse konkretene.

Siden elevene jeg valgt å bruke som mine informanter var andretrinnselever valgte jeg å konkretisere presentasjon av oppgavene mer enn jeg ville gjort med eldre elever. Jeg konkretiserte marsvinoppgaven ved å ha med konkreter i form av bamser i forskjellige farger, og antrekkoppgaven ved å vise figurer av de ulike plaggene. Da det var fem forskjellige farger i antrekkoppgaven, tenkte jeg at det ville være mye å huske på for elevene, selv om det ikke for oppgaven er viktig spesifikt hvilken farger det er. Å konkretisere presentasjonen av oppgaven valgte jeg å gjøre fordi jeg ønsket å se hvordan elevene løste oppgavene, og så det derfor ikke som nødvendig at mye av tiden gikk til å forstå oppgavene.

3.3.2 Matematikken i oppgavene

Problemene elevene ble stilt ovenfor handlet om å finne antall kombinasjoner. Ifølge Lysø (2014) kan et forsøk i kombinatorikk deles inn i *s* trinn. I det første trinnet er det N_1 mulige valg, i andre trinn N_2 mulige valg, tredje N_3 osv. Det totale antallet kombinasjoner forsøket kan utføres på er da $N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_s$.

Antrekkpromblemet forteller at det er et utvalg på to ulike bukser og tre ulike gensere. Hvert antrekk består av en bukse og en genser, og problemet er å finne det totale antallet sammensettinger, altså hvor mange mulige antrekk som kan dannes. Dette kan vi finne ut ved å dele opp forsøket i to trinn. Første trinn er å velge en bukse, og andre trinn å velge en genser. For hver bukse som velges i trinn 1, er det tre gensere som kan velges i trinn 2, se figuren 7. Til den første buksen B_1 er det mulig å benytte tre ulike gensere, og vil gi antrekkene B_1G_1, B_1G_2, B_1G_3. Den andre buksen, B_2, kan kombineres på tilsvarende måte, B_2G_1, B_2G_2, B_2G_3. Antall kombinasjoner er derfor $2 \cdot 3 = 6$. Plaggene kan altså kombineres på seks ulike måter. Marsvinproblemet kan løses på tilsvarende måte. Siden det er tre seter i sofaen, vil det være totalt tre trinn. I det første trinnet er det også tre marsvin å velge mellom, M_1, M_2 og M_3. Uavhengig av hvilket marsvin man velger i trinn 1 er det i trinn 2 bare to marsvin å velge mellom. Velger man M_1 i første trinn, kan bare M_2 og M_3 velges i andre trinn. I det siste trinnet har vi valgt to marsvin allerede, og det er da bare et marsvin igjen. Da vil $N_1 = 3$, $N_2 = 2$ og $N_3 = 1$, og antallet



Figur 7: Koffertproblemet (øverst) og marsvinproblemet (nederst)

mulige kombinasjoner er $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Siden det er tre marsvin som samtidig skal sitte i sofaen, er det ikke rom for tilbakelegging i løsningene. Det betyr at et marsvin ikke kan sitte på flere seter i sofaen samtidig. En annen forutsetning i oppgaven er at det har noe å si hvor hvert enkelt marsvin sitter, altså er det et ordnet utvalg. Løsningen $M_1M_3M_2$ vil være ulik fra løsning $M_1M_2M_3$, og derfor også være gyldig.

Forskjellene mellom de ulike oppgavene er mer enn bare antallet trinn. I oppgaven med klærne er trinnene uavhengige av hverandre. Det ene trinnet er valg av bukse og det andre valg av genser, altså velger vi blant ulike sett. I marsvinoppgaven velger vi fra samme mengde, og trinnene er derfor avhengig av hverandre. Trinn 2 er avhengig av trinn 1 og trinn 3 avhengig av trinn 2. Når mengden vi velger elementer fra er det samme i alle trinnene vil antallet mulige valg reduseres med ett element for hvert trinn.

3.4 Bearbeiding og analyse

Analysering av datamateriale er en prosess hvor forskeren får en mer komplekst og helhetlig forståelse av datamaterialet, gjennom å dele opp helheten. Det er viktig at forskeren er bevisst på at funn kan stride med forskerens forventninger (Postholm, 2010). I dette delkapittelet vil jeg redegjøre for arbeidet med bearbeidelsen og analysen av datamaterialet.

3.4.1 Transkripsjon

I etterkant av datainnsamlingen ble lydopptakene transkribert og anonymisert. Ifølge Nilssen (2012) vil tekster produsert av forskeren aldri kunne bli helt nøyaktige. Transkripsjoner av lydopptak vil bare kunne fange opp det verbale språket, og mimikk, tonefall og annen ikke verbal-kommunikasjon vil falle bort. Feltnotatene jeg tok underveis i datainnsamlingen, kunne jeg i etterkant tilføye transkripsjonen. I arbeidet med å transkribere samtalene prøvde jeg så godt jeg kunne å gjengi elevenes utsagn korrekt. Dette gjorde jeg for å unngå å tolke elevenes utsagn i selve transkripsjonen. Likevel endret jeg dialektene til elevene, og skrev transkripsjonene på bokmål, for å overholde de etiske retningslinjene, og hindre at elever kunne gjenkjennes. At jeg på forhånd hadde bestemt meg for hva som var viktig, la føringer for tolkningene jeg gjorde i det jeg skrev ned observasjoner (Nilssen, 2012). Derfor prøvde jeg å så godt som mulig å bare skrive ned handlingene elevene gjorde, slik som «oransje → blå», som betyr at eleven pekte på buksen som var oransje først og så den blå genseren. Dette gjorde jeg for å unngå å tolke i notatene jeg tok under selve gjennomføringen av datainnsamlingen.

Av erfaring vet jeg at det er vanskelig å skille stemmer jeg ikke kjenner fra hverandre, derfor brukte jeg elevenes navn i samtalene. Dette for å lette arbeidet i etterkant, da det kan være vanskelig å høre hvem som snakket. De gangene jeg ikke hadde sagt elevens navn, hørte jeg gjennom delen av samtalen, og så på de ulike tegningene for å fastslå hvem som snakket. Da det bare var to elever i gangen, var dette enkelt å gjøre.

I transkriberingsprosessen var det deler av samtalene jeg unnlot å transkribere. Dette gjorde jeg fordi det var utsagn som ikke var relevante for oppgaven. Et eksempel er en elev som begynte å snakke om et program på barne-TV. Selv om jeg ikke transkriberte deler som dette, lyttet jeg og tok tiden. Dette kunne jeg skrive som «barne-TV, 45 sekunder» i transkripsjonen, da jeg tenkte det kunne være viktig å vite hvor lenge eleven var ufokusert, og hvor lenge den andre eleven hadde sittet og arbeidet. Transkripsjoner av samtaler er gjengivelser av talespråk til skriftspråk og ifølge Kvale og Brinkmann (2015) vil transkripsjonene være svekket da de mangler stemmeleie og kroppsspråk. I transkripsjonen brukte jeg tegnsetting for å markere ikke-verbale handlinger. De ikke verbale handlingene jeg skrev i transkripsjonen bygger på feltnotatene jeg tok under datainnsamlingen. Feltnotatene mine inneholdt tidspunkt fra lydopptaket, altså skrev jeg 03:45 sammen med den ikke verbale handlingen en elev utførte 3 minutter og 45 sekunder ut i samtalen. I transkripsjonsarbeidet flettet jeg derfor inn de ikke verbale handlingene fra feltnotatene fortløpende mens jeg transkriberte. Dette gjelder i hovedsak ikke-verbale handlinger som ble skrevet som tekst i parentes i transkripsjonen, da avbrytelser og pauser gjenkjennes i lydopptakene. Tegnsettingen jeg brukte i transkripsjonen for ikke verbale handlinger er:

-	Avbrutt av andre
[…]	Pause lengre enn 3 sekunder
[n]	Pause i n sekunder
(tekst i parentes)	Ikke-verbal handling

3.4.2 Analysearbeidet

Etter gjennomføringen og transkriberingen av samtalene, tok jeg fatt på analysearbeidet. Forskningsspørsmålet i dette prosjektet «Hvilke strategier bruker andretrinnselever i møte med kombinatorikkproblem, og hvilken funksjon har tegning i dette arbeidet?» la naturlig noen retningslinjer for analysearbeidet.

Organisering og presentering av data er et kjerneelement i kvalitativ dataanalyse (Cohen et al., 2018). Jeg har valgt å organisere, analysere og presentere mitt datamateriale etter tema. I selve analysearbeidet studerte jeg først datamateriale med tanke på hvilke kombinatorikkstrategier elevene brukte. I arbeidet så jeg på tegningene og transkripsjonen fra samtalen. Jeg tok utgangspunkt i elevenes tegninger, og leste transkripsjon flere ganger for å forstå hvordan eleven hadde tenkt. Tegningen alene ga en indikasjon på hvilken strategi eleven hadde brukt, mens transkripsjonen utfylte, støttet eller avviste tegningens indikasjon. For å forstå hvordan elevene hadde tenkt brukte jeg algebraisk notasjon som for eksempel B_1G_1, for å representere at eleven først har kombinert en bukse med en genser, og videre B_2G_2 om elevens neste kombinasjon var sammensatt av en annen bukse og en annen genser. For hver enkelt kombinasjon elevene skapte, så jeg på tegningen og transkripsjonen sammen for å finne den riktige algebraiske notasjonen. På den måten kunne jeg kategorisere elevenes strategier ut fra English (1996) sine faser. Videre valgte jeg ut utsagn fra eleven som var interessante med tanke på elevens strategi.

I andre del av analysearbeidet fokuserte jeg i større grad på tegningene, da jeg var ute etter å studere hvilken funksjon tegningene kunne ha for eleven. Med bakgrunn i andre del av forskningsspørsmålet: hvilken funksjon har tegning for eleven, studerte jeg tegningene, og utsagnene som var knyttet til hvorfor elevene hadde tegnet slik de gjorde. Til dette brukte jeg små post-it-lapper for å markere elementer i tegningene som kunne ha en funksjon, om elevene tegnet for eksempel piler, skrev jeg en post-it-lapp med «manipulasjoner». Videre så jeg på transkripsjonen hvor eleven snakket om tegningen sin, for å analysere om det var planlagte eller uplanlagte manipulasjoner. Slik jobbet jeg med alle tegningene, så på tegningen sammen med transkripsjonen for å analysere hvorfor elevene tegnet, for å kategorisere tegningens funksjon i kategoriene fra teorikapittelet.

3.5 Studiens troverdighet

Kvaliteten på kvalitativ forskning kan vurderes ut fra prosjektets troverdighet (Tjora, 2017; Thagaard, 2018). Relabilitet dreier seg om et skråblikk på prosjektet med tanke på om det virker å være utført på en pålitelig måte, mens validitet knyttes til forskningsresultatene og tolkningen av datamaterialet (Thagaard, 2018). I kvalitativ forskning dreier det seg om hvor troverdig prosjektet er. For å sikre troverdighet i undersøkelser er det viktig å ha en plan for gjennomførelsen, som er gjennomtenkt og systematisk (Grenness, 2012). I dette prosjektet har jeg benyttet meg av transkripsjoner av lydopptak, elevtegninger og egne observasjonsnotater. Gjennom å samle inn data på ulike måter, kan jeg kvalitetssikre at de tolkningene jeg gjør av datamateriale støttes opp av flere typer empiri. De sitatene og tegningene jeg har valgt å vise frem, er presentert fordi det er data som kan gi innblikk i problemstillingen.

Innen samfunnsforskning vil forskeren ifølge Tjora (2017) være engasjert i tematikken som er fokus for prosjektet. Det er derfor viktig at jeg tar i betraktning min rolle i undersøkelse. Mine beslutninger i prosessen har vært farget av erfaringer, hypoteser og teori jeg har opparbeidet meg, noen bevisst, andre ubevisst. Intensjonen med studien og forskningsspørsmålet jeg har stilt påvirket funnene mine. Et eksempel er at jeg har valgt oppgaver hvor det er hensiktsmessig for elever å tegne, da det er en del av forskningsspørsmålet mitt. Ifølge Tjora (2017) er det en styrke om forskeren har mye kunnskap om temaet, da det da er lettere å stille presise spørsmål. Ulempen er at man da kan ha med seg mange forutinntattheter. Derfor er det viktig å være åpne for nyanser, slik at forskeren ikke overser situasjoner som er ulike fra egne erfaringer (Thagaard, 2018).

Kampmann (2000) reiser spørsmål om troverdigheten rundt barns utsagn. Ikke om det barn forteller er riktig, men om den voksne forskeren klarer å sette seg inn i og forstå det barnet ønsker å formidle. Som nevnt tidligere er det ifølge Tjora (2012) verd å være bevisst på at ikke alt som blir sagt representerer sannheten. Valget jeg har gjort om at elevene skal få representere sine løsninger på papir, gjennom skrift eller tegning, tror jeg gjør dette til en mindre utfordring. Gjennom å både observere elevene og stille spørsmål styrkes validiteten av datamaterialet og tolkninger. Når elevene har noe konkret å samtale om, altså deres tegninger, tror jeg det er lettere for meg som forsker å forstå det de prøver å formidle.

Dette forskningsprosjektet er ikke generaliserbart, da antallet informanter er for lite til å kunne si noe generelt om verken andretrinnselevers strategibruk i kombinatorikk eller hvordan funksjon tegning har i problemløsning. Men dette prosjektet kan likevel bidra til nye tolkninger og refleksjoner, så prosjektets resultater har en viss overførbarhet.

3.6 Etiske betraktninger

I forkant av datainnsamlingen fikk prosjektet godkjenning av Norsk Senter for Forskningsdata. I tråd med deres retningslinjer utarbeidet jeg et informasjonsskriv som ble sendt hjem til elevenes foresatte (se vedlegg 1). Informasjonsskrivet inneholdt informasjon om prosjektet, og kontaktinformasjon dersom de skulle ha noen spørsmål. Kontaktlærer informerte om prosjektet da samtykkeskjema ble delt ut, og elevene som deltok ble plukket ut fra de av elevene som hadde levert underskrevet samtykkeskjema tilbake til kontaktlæreren. For å ta hensyn til eleven, er det ulike etiske betraktninger forskeren må ta. Før selve datainnsamlingen informerte jeg de aktuelle elevene igjen om hva prosjektet gikk ut på, og stilte spørsmål om de fremdeles ønsket å delta. Videre informerte jeg om at de når som helst kunne trekke seg fra deltakelse, og at jeg for å sikre konfidensialitet kom til å endre elevenes navn i oppgaven. Lydfilen fra datainnsamlingen slettet jeg i det jeg hadde transkribert, og listen over elevenes pseudonym er oppbevart et sikkert sted, for å kunne ta ut riktig elev om de skulle ønske å trekke seg.

4. Analyse av strategier og tegninger

I denne oppgaven ønsker jeg å svare på spørsmålet «Hvilke strategier bruker fire andretrinnselever i møte med kombinatorikkproblem og hvilken funksjon har tegning for elevenes arbeid?» Gjennom dette analysekapittelet vil jeg gi grunnlaget for å kunne svare på disse spørsmålene. Målet er å kunne gi innsikt i hvordan elevene løser oppgavene tilknyttet kombinatorikk som de har fått, og hvordan de bruker tegning i problemløsningsprosessen. Kapittelet er delt i to deler, hvor jeg først ser på hvilke strategier elevene bruker, analysert ut fra English (1996) tre faser – den uplanlagte fasen, overgangsfasen og odometerfasen. Videre vil jeg se på hvordan elevene bruker tegning. Rammeverket brukt i denne delen av analysen, er en kombinasjon av resultater fra Teledahl (2017) og Stylianou (2011) forskning på hvordan elever bruker tegning problemløsning. I begge delene vil elevenes tegninger og deres utsagn i problemløsningsprosessen være utgangspunkt.

4.1 Kombinatorikkstrategier

Når vi møter et problem i matematikk er det mange måter å gripe det an på. Likevel er det noen likheter mellom ulike strategier i de ulike fasene definert av English (1996). Elever som benytter seg av strategier i den uplanlagte fasen har ikke en klar plan for problemløsningsprosessen, og veien blir til mens de arbeider. Mine analyser viser at Bendik og Daniel bruker strategier i den uplanlagte fasen på begge problemene. I overgangsfasen begynner et alternerende mønster å tre frem, ofte knyttet til det første steget i problemløsningsprosessen. Dette mønsteret kan være ufullstendig og kombinasjoner kan bli glemt. Jeg fant at Caroline og Andreas bruker strategier i overgangsfasen på marsvinproblemet. I odometerfasen benytter elevene seg av et mønster i utvelgelsen av element som er mer sofistikert, da de systematisk slår sammen elementene i de ulike mengdene. Analysen viser at Caroline og Andreas bruker strategier i odometerfasen på antrekkproblemet. Tabell 3 under viser hvilke faser elevene brukte strategier i.

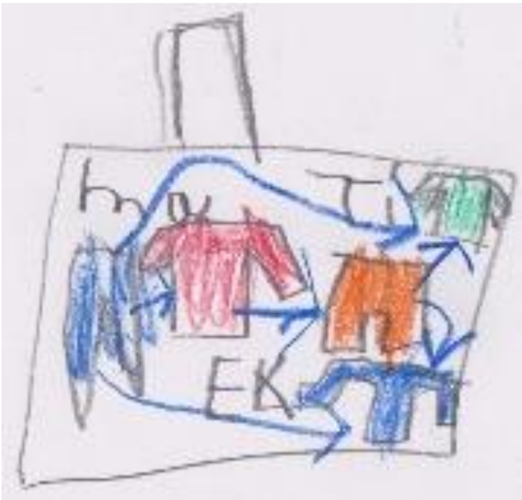
	Den uplanlagte fasen	*Overgangsfasen*	*Odometerfasen*
Antrekkproblemet	Bendik		Caroline
	Daniel		Andreas
Marsvinproblemet	Bendik	Caroline	
	Daniel	Andreas	

Tabell 3: Elevenes strategier

4.1.1 Den uplanlagte fasen

Problemløsning i matematikk handler om å finne en strategi for å løse et problemet. I møte med ukjente problem, slik som kombinatorikkoppgaver for disse elevene er, er det naturlig at flere av elevene bruker en prøv-og-feil-tilnærming til oppgaven, altså strategier innenfor den uplanlagte fasen. I arbeid med både antrekkproblemet og marsvinproblemet brukte Daniel og Bendik strategier innenfor den uplanlagte fasen. I dette delkapittelet vil jeg se nærmere på deres løsninger, ved å ta utgangspunkt i tegningene de produserte og utsagn fra elevene i problemløsningsprosessen.

I arbeidet med antrekkproblemet bruker Daniel en prøv-og-feil-strategi, som er karakteristisk for den uplanlagte fasen. Utdraget nedenfor utspiller seg i problemløsningsprosessen når Daniel har tegnet og fargelagt alle plaggene, se figur 8. Underveis i samtalen skriver han «ma» «ti» og «ek». Altså er ikke pilene tegnet.



Figur 8: Daniel tegner antrekkproblemet

Daniel:	Hvis du kommer på en mandag, så kan du ha på deg den røde og den oransje.
Forsker:	Ja, okei.
Daniel:	Jeg skriver bare ma for mandag. (skriver «ma»)
Forsker:	På mandag tar jeg på?
Daniel:	Den blå bukse og den røde genseren.
Forsker:	Okei.
Daniel:	Og på tirsdag kan du ha på grønn og oransje. Og så skriver jeg bare ekstra (skriver «ti» og «ek»).

Daniel er i arbeid med det English (1996) kaller det uplanlagte steget. Dette fordi han ikke bruker et mønster for utvelgelsen av element. Han sier først at rød genser og oransje bukse er første kombinasjon, men når jeg ber han om å gjenta, endrer han til blå bukse og rød genser, som er en indikasjon på at utvelgelsen av elementer er tilfeldig. Utdraget alene han tyde på at han mener at elementene fra den første mengden brukes opp, og derfor ikke kan danne nye kombinasjoner med andre element, altså at blå bukse og grønn genser ikke kan kombineres om blå bukse og rød genser allerede er en kombinasjon. Ifølge English (1996) kan repeterte utvalg at et element for unge elever oppfattes som motstridene til målet å danne ulike kombinasjoner. Videre i problemløsningsprosessen påpeker Daniel denne problematikken, og etter klargjøring får han dannet flere kombinasjoner:

Daniel: Du kan jo kanskje vaske klærne der?

Forsker: Ja det kan jeg. Men jeg vil ikke bruke akkurat det samme sammen flere dager.

Daniel: Men da kan du jo bruke de to sammen (peker på blå bukse og grønn genser) og de to sammen (peker på rød genser og oransje bukse), og fortsatt den som ekstra. Da kan du jo være fire dager på ferie!

B_1 —— G_1
B_2 —— G_2
B_1 —— G_2
B_2 —— G_1

Figur 9: Daniels strategi

Dette utdraget viser at han ikke lenger tolker oppgaven som at elementer kan «brukes opp». Da han her får han dannet ytterligere to kombinasjoner ved en krysskombinasjon. Kombinasjonene han til nå har dannet vises i figur 9 til høyre, og det kan se ut som han nærmer seg overgangsfasen, da mønsteret i utvelgelsen av bukser ligner mønster English (1996) beskriver. Problemet han møter er at han ikke har med alle elementene i begge mengdene, han danner ingen kombinasjoner med den lilla genseren. Ser vi nærmere på rekkefølgen av utvelgelsen til Daniel og pilene han tegner, viser det at han bytter på hvilken mengde han velger fra først, se figur 10. At det er tilfeldig hvilken mengde han velger fra først, viser han idet han i dialogen nevner først buksen som første element og i neste kombinasjon genseren som første element. English (1997) sier ikke noe eksplisitt om dette, men det kan tyde på at utvelgelsen av element er tilfeldig, eller så kan det vært fordi han ser på plaggene sammen som et antrekk og derfor ikke synes rekkefølgen er viktig. Likevel vil rekkefølge for utvelgelse av element ha betydning for å kunne videreutvikle strategien han bruker til en mer sofistikert strategi. Til nå i problemløsningsprosessen har Daniel dannet fire kombinasjoner, han har enda ikke tegnet pilene i tegningen sin, men bruker den aktivt i sine argumentasjoner for hvilke kombinasjoner som kan dannes. I dialogen videre tegner han pilene mellom plaggene.

B_1 —— G_1
G_2 —— B_2
B_1 —— G_2
G_1 —— B_2

Figur 10: Daniels strategi med rekkefølge

Daniel: Og så kan du jo etterpå gjøre sånn, sånn, sånn og sånn, sånn, sånn. (tegner pilene mellom alle plaggene utenom den lilla genseren)

Daniel har når tegnet pilene i tegningen sin, hvor retningen til pilene ikke er konsekvent. Fra den blå buksen går pilene til grønn og rød genser, mens fra den oransje buksen går pilene til den grønne, men fra den røde genseren. Her viser Daniel igjen at han ikke har tatt utgangspunkt i en elementtype for å løse problemet. At pilen går fra den røde genseren til den oransje buksen viser at han fremdeles bruker en prøv-og-feil-strategi, hvor han finner ulike kombinasjoner med å prøve seg frem. Videre oppdager Daniel at han kan danne flere kombinasjoner ved å bruke den siste genseren, som han til nå bare har betraktet som en «ekstragenser». Den prøvende strategien han bruker fører til at Daniel ikke har kontroll på hvor mange kombinasjoner han har dannet:

Forsker: Oj, ble det enda flere dager nå?

Daniel: Ja! Det ble åtte dager nå, tror jeg. Eller, en, to tre, fire. En, to tre. En, to, tre. Tre dager nå, nei, det var jo fire. Og så kan du gjøre sånn, nei, nå har du jo brukt alle. Nei, du kan gjøre sånn (tegner pilene fra blå og oransje bukse til lilla genser), da blir det fem dager på ferie.

I tegningen Daniel har tegnet er alle mulige kombinasjoner representert, men han har problemer med å telle disse kombinasjonene som han har representert med piler. Tidligere i samtalen har Daniel kommet frem til at det var fire dager, altså fire ulike kombinasjoner. Dette var før han tegnet de siste to pilene i tegningen sin, kombinasjonene med den lilla genseren. Likevel starter Daniel å telle for å finne frem til svaret. I tellingen, som han avbryter flere ganger og begynner på nytt sier han «nei, det var jo fire», i det han kommer på at han allerede vet at det er fire kombinasjoner med de fire plaggene han har tegnet piler mellom. Videre finner han de to siste kombinasjonene, og tegner pilene fra buksene til den lilla genseren. Daniel avslutter med å si at det er det er mulig å være «fem dager på ferie», som igjen viser problemene han har med tellingen, da han egentlig har representert alle de seks kombinasjonene i tegningen sin.

I arbeid med marsvinoppgaven bruker også Daniel en prøv-og-feil-strategi. Han har tegnet marsvinene i sofaen i rekkefølgen blå-turkis-rosa, se figur 11. Måten han arbeider på for å finne flere løsninger er å tegne piler for å representere omplassering på marsvinene. Prøv-og-feil-strategien Daniel bruker i denne problemløsningen er preget av manipulasjoner i tegningen ved å bytte plass på to av marsvinene. Fra den originale tegningen $M_1M_2M_3$, bytter Daniel først plassen på M_1 og M_2, slik at marsvinene sitter i kombinasjonen $M_2M_1M_3$.

Figur 11: Daniel tegner marsvinproblemet

Forsker: Hva har du tegnet nå?

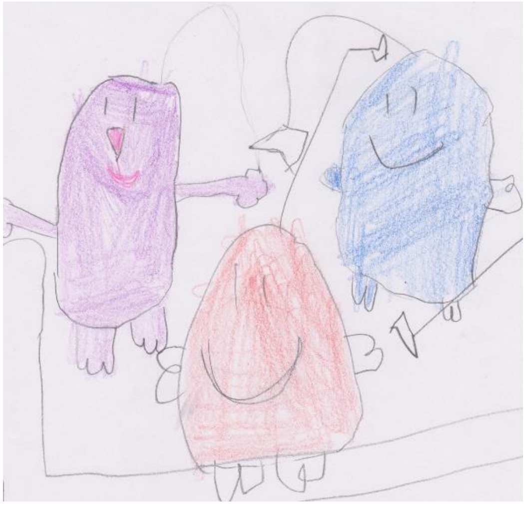
Daniel: At den kan være der og den kan være der. (Peker på de to pilene han har tegnet)

Daniel har til nå i prosessen bare tegnet pilene fra M_1 til M_2 og fra M_2 til M_1, og videre tegner han på de resterende pilene. Han viser ingen tegn til å ha en plan for manipulasjonene han gjør, men prøver seg fram ved hjelp av tegningen. På spørsmål om hvor mange kombinasjoner han har funnet sier han:

Daniel: Hm, en, to, tre, fire. Nei. En to. To!

Her har Daniel egentlig representert fire ulike kombinasjoner i tegningen sin, men uttrykker at det bare er to. Kombinasjonene han har representert i tegningen sin er $M_1M_2M_3$, $M_2M_1M_3$, $M_2M_3M_1$, $M_1M_3M_2$, hvor ingen av kombinasjonene er gjentatt, og alle er gyldige løsninger på problemet. Måten Daniel har løst problemet er gjennom en strategi i den uplanlagte fasen. Det er ifølge English (1996) tilnærminger til problemløsningsprosessen som er preget av tilfeldighet. Daniel bytter om på marsvinene ved hjelp av piler og har følgelig ikke kontroll på hvor mange piler han har tegnet, og derfor ikke kontroll på hvilke kombinasjoner han har funnet og om det eventuelt er flere. En viss systematikk er det i pilene han har valgt å tegne, da han har representert omplassering på marsvinet til venstre med marsvinet i midten, marsvinet i midten med marsvinet til høyre og marsvinet til venstre med marsvinet til høyre. Likevel gir ikke denne systematikken Daniel sikkerhet i sin strategi, da han til tross for dette ikke vet hvor mange kombinasjoner han har representert.

Bendik bruker strategier i den uplanlagte fasen i begge oppgavene han arbeider med. I arbeid med oppgaven med de tre marsvinene ønsker Bendik etter å ha tegnet tegningen i figur 12 å representere bytte av plasser på marsvinene ved å tegne piler. Tegningen hans representerer marsvinene i rekkefølgen rosa M_1, turkis M_2, blå M_3. Tegningen viser at Bendik har tegnet en pil fra M_2 til M_3, og en pil fra M_3 til M_2. Dette representerer at disse to marsvinene skal bytte plass.



Figur 12: Bendik tegning marsvinproblemet

I det Bendik begynner å tegne en pil fra M_1 til M_2 (som senere viskes ut), utspiller følgende dialog seg:

Forsker: Hva tegner du nå?

Bendik: Hvor skal den sitte da? Den må jo sitte der den satt?

Bendik svarer ikke på spørsmålet som stilles, men viser heller usikkerhet i hva han skal gjøre, i det han stiller spørsmål til sin egen problemløsningsprosess. At Bendik stiller spørsmålet «hvor skal den sitte da?» tyder på at han ikke har en plan for problemløsningsprosessen. Om disse manipulasjonene Bendik gjør hadde vært en del av en plan, ville han ikke blitt overrasket over at M_1 ikke kan bytte plass om M_2 og M_3 bytter. Problemløsningsprosessen bærer preg av en prøv-og-feil-tilnærming. Arbeidet han gjør er uplanlagt og han prøver seg frem, noe som er vanlig i den uplanlagte fasen. Videre i problemløsningsprosessen finner Bendik svar på spørsmålene han stiller om hvor det siste marsvinet kan sitte:

Forsker: Du stoppa opp da du begynte å tegne en pil herfra?

Bendik: Ja, fordi den må sitte der den satt.

Forsker: Hvorfor det?

Bendik: Fordi jeg byttet bare på den blå og den turkise. Det er en som må sitte igjen.

I det Bendik oppdager at om to marsvin skal bytte plass kan ikke det siste marsvinet flyttes, visker han ut den siste pilen han tegnet. Kombinasjonene $M_1M_2M_3$ og $M_1M_3M_2$ er de eneste kombinasjonene Bendik finner, og etter denne dialogen tegner ikke Bendik mer.

I den andre oppgaven elevene fikk, bruker Bendik også en strategi innenfor den uplanlagte fasen. Når han blir bedt om å finne alle kombinasjonene de tre genserne og de to buksene kan danne starter han på tilsvarende måte som ved forrige oppgave, Bendik tegner alle elementene i kofferten, se figur 13.

Figur 13: Bendik tegner antrekkproblemet

I utdraget fra transkribsjonen forteller Bendik at han vil kombinere den lilla genseren med den oransje buksa, og den grønne genseren med den blå buksa. Ut fra disse to kombinasjonene er det usikkert hvilke strategi Bendik bruker, fordi kombinasjonene kan være starten på en strategi i overgangsfasen eller en prøv-og-feil-strategi i den uplanlagte fasen.

Forsker:	Hva har du funnet ut, Bendik?
Bendik:	Hvis du bruker først dem her to.
Forsker:	Okei, den lilla genseren og den oransje buksa.
Bendik:	Ja. Og så bruker du neste dag slenger de her til vask, og så kan du bruke den t-skjorta (peker på den grønne) og den blå buksa. Og så kan du bruke en til sånn.
Forsker:	Hva er det?
Bendik:	Det er en t-skjorte, den røde t-skjorta.

Om strategien Bendik bruker er i overgansfasen må det være et alternerende mønster i utvelgelsen av et element, slik Bendiks to kombinasjoner B_1G_1 og B_2G_2 kan være starten på. De videre kombinasjonene kan for eksempel være B_1G_2 og B_2G_3, som er et mønster hvor B_1 og B_2 annenhver gang velges. Likevel er et viktig element i Bendiks forklaring den røde genseren, G_3. For at strategien han bruker kan sies å være i overgangsfasen, må det være et mønster i utvelgelsen av elementene. At Bendik sier «så kan du bruke en til sånn» og henviser til den røde genseren, viser at han ikke har en plan om å kombinere denne med buksene. Bendik lager ingen flere kombinasjoner med klærne i tegningen sin. Selv om han nevner den røde genseren, skaper han ingen kombinasjoner med den, og de to kombinasjonene B_1G_1 og B_2G_2 er de eneste han danner. Dette tyder på at han arbeider i den uplanlagte fasen, og at hans to kombinasjoner er et resultat av en prøv-og-feil-tilnærming til problemløsning hvor han tilfeldig slår sammen plagg for å skape kombinasjoner.

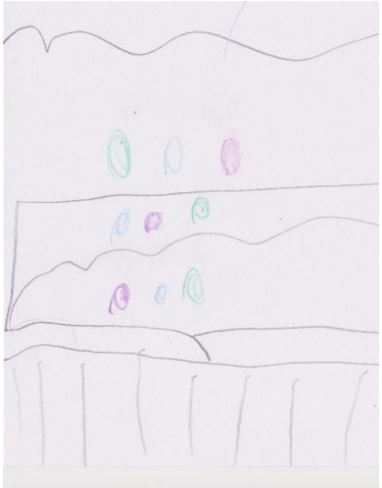
4.1.2 Overgangsfasen

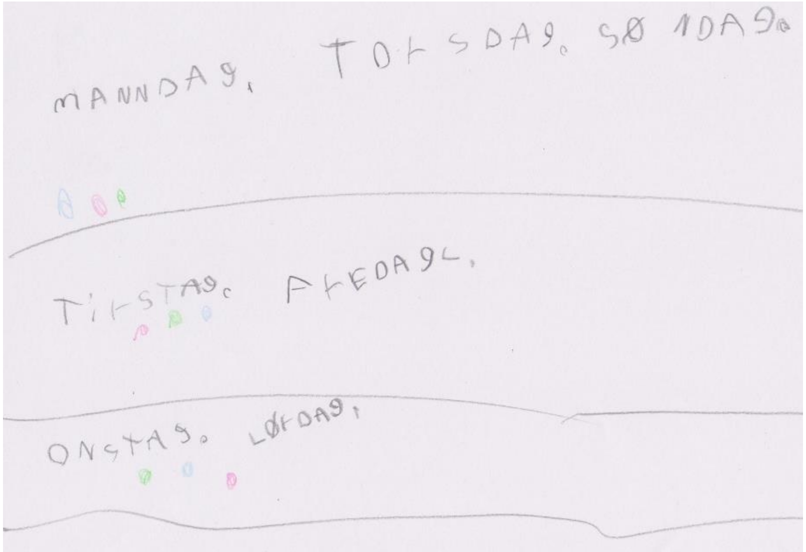
Strategier i overgangsfasen bærer preg at av det er strategier i overgangen mellom en prøv-og-feil-tilnærming i den uplanlagte fasen og et syklisk mønster i odometerfasen. I overgangsfasen starter elevene å sette sammen et mønster, som ofte er alternerende, hvor et element fra en mengde ikke «brukes opp» før et nytt element velges. Andreas og Caroline bruker strategier i overgangsfasen når de arbeider med marsvinoppgaven. Videre vil deres utsagn og tegninger analyseres.

Når Andreas blir presentert oppgaven med marsvinene forklarer han før han begynner å tegne hvordan han mener marsvinene kan lage en plan på hvordan de skal sitte. Han sier:

> Andreas: De kan bytte på det, først den blå, så den grønne, så den lilla, blå, grønn, lilla, blå, grønn, lilla.

Marsvinbamsene står nå på bordet foran Andreas, og mens han forklarer peker han på bamsen til venstre. Utsagnet er da knyttet til hvilket marsvin som i hver kombinasjon skal sitte på denne plassen, og tyder på at Andreas bruker en strategi i overgangsfasen. Han har enda ikke tegnet eller gitt uttrykk for hvordan disse kombinasjonene i helhet skal se ut, men har en plan på hvilke marsvin som skal ha den første plassen. Dette er et typisk tegn for strategier i overgangsfasen, som er karakteristisk av et alternerende mønster i utvelgelsen av det første steget (English, 1996). Når Andreas senere tegner kombinasjoner, se venstre bilde i figur 14, er det alternerende mønsteret synlig.





Figur 14: Andreas tegner marsvinproblemet

Andreas varierer syklisk på hvilket marsvin som skal sitte på det første setet, altså er utvelgelsen av det første steget planlagt. Selv om Andreas tegner på tilsvarende måte som han tidligere har forklart, er ikke tegningen lik hans tidligere utsagn. Hvor han i første utsagn forteller at den blå først skal være første marsvin i første kombinasjon, er det i hans tegning det grønne marsvinet som er tegnet først.

> Andreas: Jeg tenker sånn, først grønn der, blå i midten og så lilla der. Så blå der, lilla der grønn der. Så lilla der, blå der, grønn der.

Selv om marsvinene har endret plassering i forhold til forklaringen Andreas først gir, er mønsteret det samme, et alternerende mønster i valg av det første steget. En annen endring som har skjedd fra første forklaring til tegningen Andreas tegner er at antallet kombinasjoner er redusert. I forklaringen Andreas gir i begynnelsen av problemløsningsprosessen er ni kombinasjoner skissert opp, altså har han navngitt hvilket marsvin som skal sitte på det første setet i ni ulike kombinasjoner. I tegningen har han bare tegnet tre kombinasjoner. Dette kan tyde på at Andreas ikke har en formening om hvor mange kombinasjoner som er mulig å danne, men har en plan for hvordan han skal løse problemet. Uten hans første forklaring, kan tegningen og forklaringen på tegningen minne om en strategi i den uplanlagte fasen, fordi det alternerende mønsteret ikke kommer tydelig frem når det bare er tre kombinasjoner som er tegnet. Forklaringen Andreas gir i begynnelsen av problemløsningsprosessen er derfor viktig for å forstå at han har en plan for problemet, og ikke bare prøver og feiler i tegningsprosessen. Grunnen til at Andreas ikke tegner flere kombinasjoner i denne tegningen er at han ikke er fornøyd med løsningene sine. Etter at han har tegnet disse, tar han et nytt ark og begynner å tegne en ny tegning. Etter at han har tegnet tegningen til høyre i figur 14, sier han:

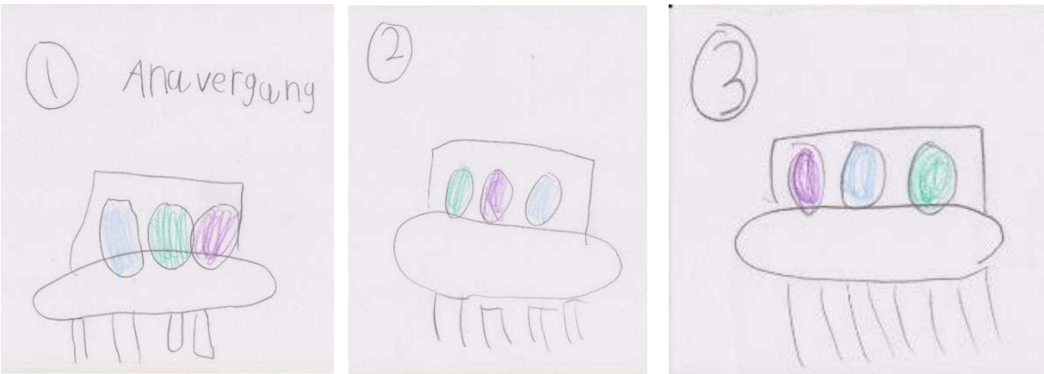
Andreas: Det her synes jeg var bedre, for nå får de forskjellige plasser hver gang. Fordi da blir det ikke urettferdig for dem.

Altså er Andreas misfornøyd med sin tegning, fordi noen av marsvinene sitter på samme sted flere ganger. Det blå marsvinet sitter to ganger i midten av sofaen, og det grønne marsvinet sitter to ganger til høyre. At Andreas mener tegningen hvor alle marsvinene har forskjellige plasser hver gang er bedre enn den originale tegningen, forteller noe om hvordan han oppfatter oppgaven. Siden problemet er presentert gjennom tre marsvin som krangler om hvor de skal sitte, virker det som Andreas mener marsvinene må sitte på ulike plasser i hver nye kombinasjon for at løsningen skal være gyldig.

Caroline er ivrig når hun får marsvinproblemet presentert, og begynner å flytte om på bamsene. Mens hun gjør det, forklarer hun hvordan hun vil løse oppgaven:

Caroline: Jeg har en god ide. En skikkelig god ide! Først så sitter den blå der, og så grønne der og så lilla der. Og så grønne der og lilla der og blå der, og så lilla der og blå der og grønn der og så annen hver gang sånn.

Ved å bare se på endringene Caroline gjør med bamsene, kan det virke som det er tilfeldig at kombinasjonene hun danner er unike. Som hun også sier, organiserer hun fra venstre blå-grønn-lilla. Videre flytter hun den grønne bamsen til venstre og bytter plass på blå og lilla, slik at kombinasjonen blir, som hun sier «grønn der, lilla der og blå der». I starten virker dette usystematisk, og det er vanskelig ut fra dette utsaget alene å vite om hun har kontroll på om kombinasjonen som dannes er ulik fra den forrige, eller om hun prøver og feiler. Utvelgelsen av element kan virke tilfeldig, slik som English (1996) forklarer det uplanlagte steget. Likevel har Caroline laget et mønster for utvelgelsen av element, og arbeider i overgangsfasen. Begge ganger Caroline lager en ny kombinasjon, tar hun utgangspunkt i elementet som var i midten. Altså flytter hun det midterste marsvinet til venstre i hver nye kombinasjon. For å finne ut hvordan Caroline tenker, spør jeg om hun kan vise det på arket. I det videre arbeidet med problemet snakker Caroline høyt mens hun starter med tegningen sin, bilde til venstre i figur 15. I dette utdraget tegner Caroline sofaen med marsvinene i ulike farger. Tallet og skriften tegner hun på et senere tidspunkt.



Figur 15: Caroline tegner marsvinproblemet

Caroline:	Jeg klarer det. Jeg tror jeg klarer det da. Liksom her er litt av sofaen. Sånn, og så støtten, sånn, det er sofaen, og så, først den blå her, og så den grønne her og så den lilla her. Og så kommer den grønne der og så den lilla der og så den blå der, og så kommer den lilla der og så den blå der og så den grønne der, sånn. Så går det bare sånn hver dag. Så blir det annenhver gang.

I det Caroline har tegnet tegningen til venstre i figur 15 (senere merket som «1») gir hun en tilnærmet lik forklaring som hun gav med konkretene. Kombinasjonene hun viser gjennom å tegne og peke, er de samme kombinasjonene hun viste med konkretene, $M_1M_2M_3$, $M_2M_3M_1$ og $M_3M_1M_2$, altså en rullering mot venstre. Hver forklaring avslutter med at hun sier at det blir slik «annenhver gang». Dette velger hun også å skrive på tegningen sin, for å vise hvordan rulleringen skal skje. Videre i dialogen oppfordres Caroline til å vise sin forklaring på arket:

Forsker:	Men går det an å vise det bare på papiret? Hvis vi skal kunne se det på tegninga di, hvordan de skal sitte.
Caroline:	Vi kan jo fargelegge, eller skriv sånn annenhver gang øverst.
Forsker:	Ja, men annenhver gang hva da?
Caroline:	At han står de, eller, de skal sitte annenhver gang der der og der - der, der og der - der, der og der.

Ut fra utdraget fra transkripsjonen kan det se ut til at Caroline har en annen forståelse av «annenhver». Gjennom å si «sitte annenhver gang der, der og der – der, der og der – der, der og der», viser hun til de tre kombinasjonene hun har funnet, og hun mener derfor trolig at annenhver gang har tilsvarende betydning som «hver tredje gang», eller at det er et begrep for at noe skjer etter tur. Videre i samtalen tegner Caroline kombinasjonene hun har forklart muntlig med konkretene og gjennom den første tegningen, se tegningene merket som 2 og 3 i figur 15.

Caroline:	Jeg er ferdig! Først er det sånn, så er det sånn og så er det sånn (peker på de ulike tegningene). Sånn, sånn, sånn og sånn osv. Annenhver gang sånn.

Tegningen hennes er tilsvarende forklaringen hun gir både med konkretene og med den første tegningen. Hun fortsetter å tegne de samme kombinasjonene i lik rekkefølge, $M_1M_2M_3$, $M_2M_3M_1$ og $M_3M_1M_2$. De tre kombinasjonene hun har funnet viser et mønster for utvelgelsen av element, slik English (1996) forklarer strategier i overgangsfasen. Hun starter med en tilfeldig kombinasjon, og forskyver den en gang til venstre for hver nye kombinasjon hun danner. Hun forklarer at dette kan skje «annenhver gang» som jeg tolker som at mønsteret skal fortsette. Om denne forskyvningen fortsetter, vil det skape gjentakelser, kombinasjon 4 vil være lik kombinasjon 1. Ifølge English (1996) er det ikke vanlig at elever i overgangsfasen å fortsette mønsteret gjennom hele problemløsningsprosessen, men å bruke en prøv- og feiltilnærming mot slutten. Caroline har ikke gjort dette, og er fornøyd med sine tre kombinasjoner. Grunnen til dette tror jeg er oppgaven hun har fått presentert. Oppgaven eleven har fått er å lage så mange ulike kombinasjoner som mulig, men i konteksten er det fordi disse marsvinene krangler om hvem som skal sitte hvor, og en slik rulleringsplan Caroline har laget er «rettferdig» på sin måte – alle marsvinene får sitte en gang på hver plass i løpet av tre dager.

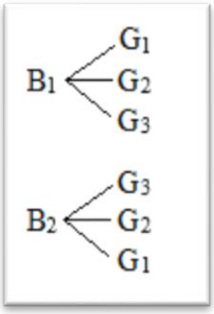
4.1.3 Odometerfasen

Odometerfasen innebærer strategier hvor elevene holder et element fast og syklisk variere elementene fra de andre mengdene. Når alle kombinasjoner med det faste elementet er dannet, byttes det ut med et nytt element fra samme mengde og gjør tilsvarende prosess med å kombinere det nye faste elementet med elementene i de andre mengdene. Odometerfasen innebærer strategiene hvor alle kombinasjonene dannes og systemet er konstant, altså varieres elementene med en fast rekkefølge, men den innebærer også de strategiene uten en fast rekkefølge, og eleven derfor kan komme til å skape gjentakende kombinasjoner. I datamateriale brukte Andreas og Caroline strategier i odometerfasen på antrekkoppgaven. Dette delkapittelet ser nærmere på deres løsningsstrategier med utdrag fra transkripsjonen og deres tegninger.

I arbeid med antrekkproblemet bruker Caroline en strategi i odometerfasen. Hun har nå arbeidet med oppgaven en stund og har tegnet alle plaggene i figur 16, uten piler og farger på genserne. Altså er det bare buksene som har fått farge. Uten oppfordring forteller hun:

Caroline: Jeg tror at det er seks! Siden blåe buksa der, og blå buksa til den og blå buksa til den, og oransje buksa skal dit, og oransje buksa skal dit og oransje buksa skal dit!

Figur 17: Caroline tegner antrekkproblemet



Figur 16: Caroline sin strategi

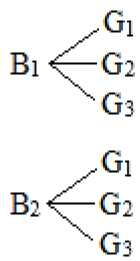
Samtidig som Caroline forklarer, peker hun vekselsvis på plaggene, uten en spesiell rekkefølge på genserne. Ut fra det Caroline gjør og sier, har hun laget et delvis mønster for utvelgelse av de ulike plaggene. Hennes forklaring tyder på at hun holder buksene fast og varierer på genserne, i det hun sier «blåe buksa der, og blå buksa til den og blå buksa til den», når hun peker på genserne. En slik strategi er innenfor det English (1996) kaller odometerfasen, som karakteriseres som et odometermønster i utvelgelsen av element. Ved bruk av strategier på odometersteget holdes et element i den ene mengden konstant og danner kombinasjoner systematisk sammen med element fra den andre mengden (English, 1996). Caroline bruker buksene som konstanter, og danner kombinasjoner med den blå buksen først, og deretter med den oransje buksen. Caroline har imidlertid ikke en spesiell rekkefølge på hvilke gensere hun kombinerer buksene med. Det virker som dette er tilfeldig, da rekkefølgen hennes i pekingen er B_1G_1, B_1G_2, B_1G_3, B_2G_3, B_2G_2, B_2G_1, se figur 17. Ut fra English (1996) beskrivelse av odometersteget er ikke strategien Caroline bruker like sofistikert, da hun ikke viser en systematisk utvelgelse av objekter fra det andre settet, genserne. Likevel er det en viss systematikk i det Caroline gjør. Når hun kombinerer plaggene til antrekk, velger hun ut de som er nærmest den buksen hun skal kombinere med. Carolines løsningsstrategi er ikke på det høyeste nivået i odometerfasen. Typisk for strategier i odometerfasen er et mønster hvor et element holdes fast, og alle kombinasjoner med dette elementet dannes før elementet byttes ut med et element fra samme mengde (English, 1996). Caroline gjør nettopp dette. Hun velger en bukse, B_1, som hun holder fast og kombinerer med alle genserne, slik at kombinasjonene B_1G_1, B_1G_2, B_1G_3 dannes. Etterpå velger hun et nytt element, B_2 fra mengden med bukser, og danner de resterende kombinasjonene.

I arbeidet med problemet med å kombinere plagg til ulike antrekk, bruker også Andreas en strategi i odometerfasen. Han mener at antallet plagg som kan dannes er tolv, og i forklaringen støtter han seg til den ferdige tegningen av plaggene som ble presentert for elevene sammen med problemet. Samtidig som han gir følgende forklaring, peker han på de ulike plaggene i rekkefølgen vist i figur 18.

Andreas:	Det jeg tenker er sånn, fordi du kan ha blå og så rød, og så kan du ha blå og så lilla, blå og grønn, så kan du ha oransje og rød, oransje og lilla og oransje og grønn.
Forsker:	Er du sikker at det ikke kan være flere?
Andreas:	Ja, det er tolv!

Ser vi dette i sammenheng med strategiene English (1996) presenterer, bruker Andreas en odometerstrategi. Dette fordi han i sin løsning holder et element konstant og det andre elementet varierer systematisk. Andreas holder den blå buksa konstant, og varierer genserne. Strategien Andreas bruker er gjengitt med matematisk notasjon i figur 19. Han kombinerer først den blå buksen med rød genser, deretter lilla genser og til slutt grønn genser. Når alle kombinasjoner med den blå buksa er funnet, bytter han den ut med en ny bukse, den oransje, og gjentar prosessen. Altså bytter Andreas ut det konstante elementet fra mengden med bukser, og velger et nytt konstant element.

Figur 18: Andreas bruker de ferdige tegningen



Figur 19: Andreas sin strategi

Selv om Andreas er systematisk i sin løsning, møter han et problem. Det er ikke en av svakhetene English (1996) beskriver, som problemer med å finne alle kombinasjonene, bruke et konstant element for mye eller ikke være klar over at alle kombinasjonene er funnet. Andreas har funnet alle mulige kombinasjoner, men har problemer med å finne ut hvor mange kombinasjoner det er, til tross for at han har brukt en sofistikert strategi. Det kan se ut til at problemet han har er knyttet til telling. I utdrag fra transkripsjonen av samtalen virker det som Andreas teller antall plagg brukt, i stedet for antall antrekk:

Andreas:	At man kan bruke den buksa tre ganger, og de genserne tre ganger, fordi man kan ha blå med rød, blå med lilla, blå med grønn, og oransje med rød, oransje med lilla og oransje med grønn.
Forsker:	Hvordan kom du fram til det?
Andreas:	Fordi jeg må bare telle, telle seks pluss seks. Fordi jeg bruker den buksa tre ganger og de genserne tre ganger, og så tar jeg det sammen med den oransje.

Andreas teller antallet plagg, og ikke antrekk, i det han sier «man kan bruke den buksa tre ganger og de genserne tre ganger». Alene kan dette utsagnet peke på at han kombinerer plagg for å skape antrekk, men når han senere sier «telle seks pluss seks», kan det tolkes som at teller de seks plaggene som kan brukes i den første delen av odometerstrategien – altså hvor han kombinerer et element i den ene mengden med alle elementene i den andre mengden, her den blå buksen med alle mulige gensere. Han sier videre at han «bruker den buksa tre ganger og de genserne tre ganger» - altså teller han hvor mange ganger de ulike plaggene er i bruk, ikke hvor mange ulike kombinasjoner som kan dannes. Andreas blir sittende en stund stille og se ut i luften, noe som kan tyde på at han visualiserer. Dialogen som deretter følger, tyder på at han har oppdaget denne feiltellingen:

Andreas:	I ste så talte jeg med buksa tre ganger og.
Forsker:	Hvordan talte du?
Andreas:	Jeg talte sånn at, fordi det blir jo annerledes for hver gang. Fordi buksa, den blå, med den røde, så buksa med den lilla, så buksa med den grønne, da talte jeg tre ganger buksa og, og det samme gjorde jeg med den oransje. (Peker på de ulike plaggene, blå bukse – rød genser, blå bukse – lilla genser, blå bukse – grønn genser)

I dette utdraget har Andreas oppdaget tellefeilen sin, at han har talt plaggene i stedet for antrekkene, ved at han sier «da talte jeg tre ganger buksa og», og viser med det forståelse for at antallet kombinasjoner i denne oppgaven er antallet antrekk, ikke antallet plagg brukt totalt.

4.2 Tegningens funksjon

I dette forskningsprosjektet brukte elevene tegning for å løse oppgavene, og et av formålene med prosjektet var å se på hvilken funksjon tegning har for elevene i det arbeidet. Kategoriene jeg har valgt å bruke er: tegne for å forstå problemet, tegne for å utforske, tegne for å redegjøre for problemløsningsprosessen og tegne for å representere svaret. Delkapittelet er strukturert etter disse kategoriene, for å kunne fordype meg i hver enkel funksjon, da det er overordnet det å fordype meg i den enkelte elev. Analysen viser at tegning kan ha flere funksjoner for elevene, og at tegningens funksjon kan endres underveis. Jeg har identifisert hovedfunksjonen tegningen har for elevene, vist i tabell 4. Samtidig vil jeg kommentere andre eventuelle funksjoner tegning har for elevene i arbeidet.

	Antrekkproblemet	*Marsvinproblemet*
Forstå	Andreas	
Utforske	Bendik	Andreas
	Daniel	Bendik
		Daniel
Redegjøre	Caroline	Caroline
Representere svaret		Andreas

Tabell 4: Funksjonene tegning har for elevene

Altså vil jeg presentere analysen av elevenes tegninger i delen av kapittelet som er hovedfunksjonen til at de tegner. Eksempelvis vil jeg i «4.2.3 Tegne for å redegjøre for prosessen» presentere Carolines tegninger, da hovedfunksjonen til at hun tegner er å redegjøre for prosessen. I tabellen er Andreas sin tegning i marsvinproblemet analysert til å både «utforske» og «representere svaret», fordi begge funksjonene er viktig for hans arbeid, i det han tegner to tegninger på ulike grunnlag. Det er tydelig i hans tilfelle at han har tegnet den første tegningen for å utforske, og den andre tegningen for å representere svaret. I de andre elevtegningene er ikke alle funksjonene like fremtredende. Det er altså ikke like tydelig alle funksjoner tegningen har, men en funksjon peker seg ut. Derfor har jeg valgt å se på den som hovedfunksjonen til at elevene tegner, og strukturert delkapittelet deretter.

4.2.1 Tegne for å forstå problemet

Tegning kan i problemløsning brukes til å forstå problemet og betingelsene problemformuleringen gir for oppgaven. Jeg fant i mitt datamateriale en tegning som har som hovedfunksjon å forstå problemet. Dette var tegningen Andreas tegnet i antrekkproblemet.

Tegningen Andreas produserer når han arbeider med oppgaven med de ulike antrekkene brukes ikke i forklaringen han gir for hvor mange kombinasjoner som kan dannes. De ferdige bildene er som nevnt tidligere sentrale for hans løsning av problemet. Likevel tegner han en tegning tidlig i prosessen, se figur 20. Tegningen karakteriseres som en piktografisk tegning, da det er en realistisk avbildning av objektene i problemet. Selv om bukse og genser er de relevante objektene har Andreas tegnet to mennesker med detaljer som ansikt og føtter.


Figur 20: Andreas utforsker antrekkproblemet

Etter å ha tegnet denne oppklaringstegningen sitter han lenge uten å si eller gjøre noe, før han kommer med resonnementet for løsningen sin, som ikke baserer seg på denne tegningen. Mot slutten av problemløsningsprosessen spør jeg Andreas om denne tegningen, men han gir ingen svar på hva det er han har tegnet.

Forsker: Men hva er det du har tegnet her?

Andreas: Nei, jeg bare, det er ingenting.

At Andreas i sin forklaring på problemet ikke bruker tegningen sin tyder på at Andreas ikke tegner for å løse problemet, men heller for å forstå problemet og sette i gang tankeprosessen. Tegningen kan ha en funksjon for Andreas ved at den formulerer betingelser for problemet (Teledahl, 2017). I tegningen har han tegnet to mennesker med bukse og genser, som kan representere kombinatorikk: at oppgaven spør etter kombinasjoner bestående av et element fra mengden med bukser og et element fra mengden med gensere. Det faktum at han har tegnet to mennesker, kan ha en forklarende funksjon for eleven, med tanke på begrepet «ulik», da oppgaven spør om hvor mange ulike plagg som kan dannes. Hvis dette er tilfelle, bruker han sin tegning for å forstå betingelsene i problemet. Tegningen har uansett en funksjon tidlig i prosessen, da den ikke er relevant for løsningen av problemet. Tegningen brukes til å enten forstå betingelsene eller å sette i gang tankeprosessen.

4.2.2 Tegne for å utforske

I møte med problem hvor elevene ikke på forhånd har en fremgangsmåte klar er det naturlig at de bruker en strategi som innebærer å utforske problemet. I dette prosjektet har både Bendik og Daniel brukt tegning for å utforske på begge problemene, mens Andreas har utforsket ved hjelp av tegning på en av oppgavene.

I arbeidet med marsvinoppgaven produserer Andreas to tegninger. Den første han tegner er den til venstre i figur 21. I tegningen kan vi se at han har tegnet tre ulike kombinasjoner, den første er grønn, blå, lilla, den andre er blå, lilla, grønn og den siste lilla, blå, grønn. Tegningen hans er ikonisk, da han har tegnet sirkler for å representere marsvinene, og bare tegner farger for å skille marsvinene fra hverandre. Fra den ferdige tegningen er det ikke enkelt å se at tegningen har en utforskende funksjon for Andreas. Men gjennom observasjon av eleven i arbeid, kunne jeg se rekkefølgen han tegnet de ulike fargene i, som vist til høyre i figur 21.

Figur 21: Andreas utforsker marsvinproblemet

I løsningsprosessen stopper han opp og ser på tegningen sin underveis, noe som tyder på at han ikke har en plan for manipulasjonene han gjør. Når han noen ganger fargelegger videre med samme farge, mens andre ganger bytter, tegner han ikke for å redegjøre for problemløsningsprosessen. Planen blir til underveis, i det han bestemmer seg for hvordan neste kombinasjon skal se ut. I og med at han ikke tegner alle marsvinene i samme farge samtidig, men ikke er avhengig av å tegne ferdig en kombinasjon før han går videre til neste, viser at han planlegger mens han tegner. Dette resulterer i en ferdig tegning med tre kombinasjoner som han ikke er fornøyd med. Andreas velger videre i dialogen å tegne en ny tegning, og begrunner med å si: «Det her synes jeg var bedre, for nå får de forskjellige plasser hver gang». Den tegningen vil jeg komme tilbake til i delkapittelet «4.2.4 Tegne for å representere svaret». Likevel er det viktig for denne tegningen at han velger å tegne en ny. Det indikerer at denne tegningen har som funksjon å forenkle utforskningsprosessen. Ifølge Stylianou (2011) brukes tegningen da for å identifisere videre informasjon og implikasjoner. Andreas vurderer sin tegning, og med et ønske om at alle kombinasjonene skal være unike, velger å lage en ny tegning. Andreas bruker altså tegningen for å identifisere videre informasjon og implikasjoner.

Daniel og Bendik har brukt tegning på tilsvarende måter i begge oppgavene. Ingen av dem har en klar plan når de starter problemløsningsprosessen. I marsvinoppgaven tegner begge elevene en mulig kombinasjon hvor de tre marsvinene sitter i sofaen. Videre manipulerer de tegningene sine med piler. Manipulasjonene de gjør er ikke planlagte på forhånd, noe som kommer tydelig frem i det Bendik starter å tegne piler i sin tegning. Figur 22 under viser at Bendik bruker piler for å representere endring i tegningen sin. Tegningen i seg selv er piktografisk, da den er en realistisk avbildning av marsvinene som ble presentert for elevene.

Figur 22: Bendik utforsker marsvinproblemet

Som også er nevnt i delkapittelet om strategier tegner Bendik piler mellom M_2 og M_3, som representerer at disse marsvinene bytter plass. Videre tegner han en pil fra M_1 til M_2, men i det han har tegnet den sier han:

Bendik: Hvor skal den sitte da? Den må jo sitte der den satt?

Dette utsagnet viser at Bendik ikke har en plan for manipulasjonene han gjør, og dermed bruker tegning for å utforske. Ved å tegne oppdager Bendik at de tre marsvinene ikke alle kan endre plassering om to av marsvinene bytter plass, og tegningen er da et verktøy for å utdype og søke i problemet (Stylianou, 2011). Informasjonen Bendik får gjennom å tegne er at et marsvin må sitte «der den satt» om to av marsvinene bytter plass. I tegningen kan vi se at Bendik har visket ut sin tredje pil, som resultat av utforskningsprosessen. Teledahl (2017) hevder at det kan være vanskelig å skille mellom planlagte og uplanlagte manipulasjoner, fordi elevenes måter å arbeide på kan gjøre tegningen systematiske, selv om årsaken til at de tegner er for å utforske, og at planlagte manipulasjoner kan se ut som utforskende, når årsaken er å tegne for å redegjøre. Manipulasjonene Bendik gjør kunne vært planlagte, men utsagnene hans knyttet til prosessen viser at han selv blir overrasket over resultatet, og spør selv «hvor skal den sitte?». Om Bendiks manipulasjoner var planlagte ville han ikke på denne måten blitt overrasket over resultatet manipulasjonene gav.

I marsvinoppgaven har også Daniel brukt tegning for å utforske. Figur 23 er et utklipp fra hans tegning som viser pilene han har tegnet for å endre plassene på marsvinene. I tegningen har han tegnet detaljerte marsvin, med øyne og ører, og karakteriseres derfor som en piktografisk tegning.

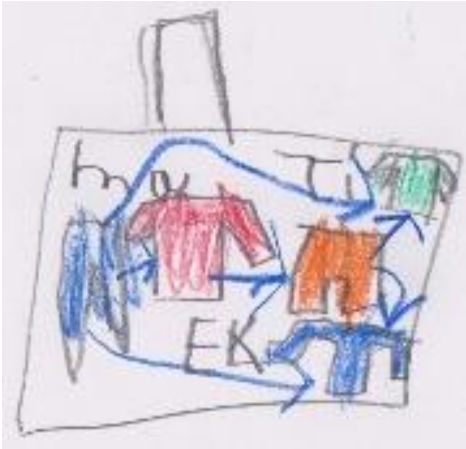
Figur 23: Daniel utforsker marsvinproblemet

At tegningen ser rotete ut trenger ikke nødvendigvis å bety at Daniel har brukt tegning for å utforske. Teledahl (2017) fant i sin forskning at elever også kan tegne usystematiske tegninger når målet med tegneprosessen er å redegjøre for problemløsningsprosessen. I dette tilfelle finner vi svaret i dialogen med eleven:

Daniel:	Hmm, hva om de to bytter plass nå?
Forsker:	Hvem da?
Daniel:	Det blå marsvinet som er midt i og det rosa.

Denne dialogen finner sted etter at eleven har tegnet den første pilen, pilen mellom M_1 og M_2, mellom det blå marsvinet og det turkise. Ved å si «Hmm, hva om de to bytter plass nå?» viser Daniel at han ikke har en klar plan for problemløsningsprosessen, og at manipulasjonene han gjør ikke er planlagte. Han bruker derfor tegningen til å identifisere informasjon i problemet og for å finne flere kombinasjoner gjennom å bytte plass på marsvinene. Daniel viser også i dette utdraget at han vet at det i hans andre kombinasjon (etter at han har tegnet en pil) er det blå marsvinet som sitter i midten.

Daniel tegner i arbeid med antrekkoppgaven en tegning som ser ut som den har en kommunikasjonsfunksjon: at han tegner for å vise prosessen, enten for seg selv eller for andre. Tegningen (se figur 24) er en realistisk avbildning av klesplaggene i problemet, og er derfor piktografisk.



Figur 24: Daniel utforsker antrekkproblemet

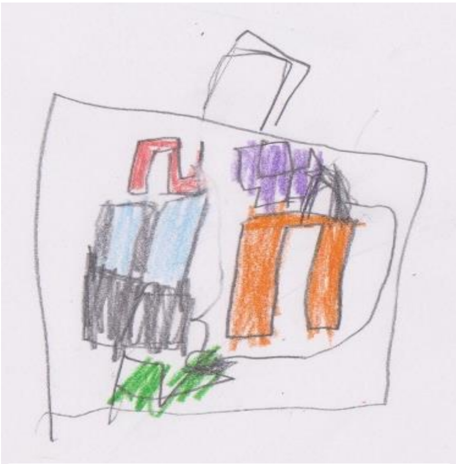
Den har ingen gjentakende piler, og viser bare kombinasjoner som er gyldige. Tegningen alene ser ut som et produkt av tegning for redegjørelse av problemløsningsprosessen. Men noen elementer i tegningen, sammen med dialogen, viser at hovedformålet til at Daniel har tegnet er å utforske situasjonen og løsningsmuligheter. Ordene «ma», «ti» og «ek», viser til hans arbeid tidlig i prosessen, hvor han mente at blå bukse og rød genser kunne brukes på mandag, oransje bukse og grønn genser kunne brukes på tirsdag, og den lilla genseren var en ekstragenser. Dette viser at eleven har brukt tegningen aktivt i prosessen å løse problemet, ved at det er spor fra hans tidligere antakelser (at det er to mulige kombinasjoner). Videre har han tegnet pilene som representerer alle kombinasjoner. Pilene er som diskutert i delkapittelet om kombinatorikkstrategier, tegnet i ulike retninger. At Daniel noen ganger tegner pilen fra buksen til genseren mens andre ganger fra genseren til buksen, viser i tillegg til at han bruker en prøv-og-feil-tilnærming til problemløsning at han ikke har en plan for hvordan han vil representere de ulike kombinasjonene i tegningen. Samtidig har også tegningen en funksjon for Daniel i at han bruker den til å forstå problemet. I utgangspunktet har han bare funnet to kombinasjoner, da han tror et klesplagg bare kan brukes en gang, når det egentlig er et antrekk som bare kan brukes en gang. Utdraget nedenfor er fra samtalen med Daniel i det han forstår at det finnes flere kombinasjoner:

Daniel:	Egentlig så kan du være to, men ekstra, hvis den ene blir våt eller noe sånn. Så du kan være på ferie i to dager.
Daniel:	Du kan jo kanskje vaske klærne der?

I det Daniel forstår at klærne kan vaskes – altså brukes flere ganger, har han forstått betingelsene i problemet. Betingelsene er at kombinasjoner ikke kan gjenta seg, men for å finne alle løsningene må elementer kunne gjentas, som også er en viktig betingelse for å kunne løse problemet. At Daniel har tegnet tegningen hjelper han å se de mulige løsningene, og uten tegningen er det ikke sikkert Daniel hadde stilt spørsmålet om klærne kan vaskes, og dermed ikke funnet flere løsninger. At Daniel får en ny forståelse for problemet, kommer av at han bruker tegning til å utforske. Hovedfunksjonen tegning har for han er å utforske problemet, og prosessen ved å tegne resulterer i at han forstår betingelsene i problemet.

Også i antrekksoppgaven tegner Bendik for å utforske problemet. Tegningen hans (figur 25) viser en koffert med klær i. Plaggene er ikke gjenkjennelig som bukser og gensere. Da de ikke er realistiske avbildninger av de tiltenkte objektene, er tegningen av plaggene ikoniske tegninger. Likevel har Bendik tegnet kofferten, et element som ikke er viktig for problemet nokså piktografisk, da den i tillegg til å være en ramme rundt plaggene også har håndtak.

Forsker:	Hva har du funnet ut, Bendik?
Bendik:	Hvis du bruker først dem her to
Forsker:	Okei, den lilla genseren og den oransje buksa.
Bendik:	Ja. Og så bruker du neste dag slenger de her til vask, og så kan du bruke den t-skjorta (peker på den grønne) og den blå buksa. Og så kan du bruke en til sånn.



Figur 25: Bendik utforsker antrekkproblemet

Utdraget fra samtalen viser at Bendik har funnet to løsninger, den lilla genseren og den oransje buksen, og den grønne genseren og den blå buksen. Det første antrekket han lager (lilla genser og oransje bukse) er ikke synlig representert i tegningen. Videre tegnet han linjer for å kombinere plaggene til antrekk, som indikerer at han bruker tegningen for å utforske problemet. I det han kombinerer den blå buksen med den grønne genseren har han tegnet strek mellom plaggene. Bendik finner kombinasjoner underveis i prosessen med å tegne, og bruker derfor tegningen til å utforske problemet, og skape nye kombinasjoner.

4.2.3 Tegne for å redegjøre for prosessen

Elever som tegner planlagte manipulasjoner i problemløsningsprosessen har ikke behovet for å utforske ved hjelp av tegning i like stor grad. Da deres manipulasjoner er tenkt ut på forhånd har tegningen en funksjon ved at den kan være et sted å vise sine tanker, både for å slippe å huske alt og for å lettere kunne kommunisere sin matematiske kunnskap med andre. I dette forskningsprosjektet brukte Caroline tegning for å redegjøre for problemløsningsprosessen i begge problemene hun ble stilt ovenfor.

Når Caroline starter å tegne i arbeidet med marsvinoppgaven, har hun allerede forklart muntlig og med konkreter hvordan hun løser oppgaven. Hun tegner ikke før hun blir oppfordret til å vise på arket hvordan hun har tenkt. Årsaken til at hun tegner er for å kunne kommunisere sin matematiske forståelse. Carolines tegninger (figur 26) er komplementert med ordet «anavergang», og selv om slike nøkler er vanlig i tegninger som representerer svaret er det ikke det som er årsaken til at Caroline tegner. Hun tegner for å redegjøre for problemløsningsprosessen. Utsagnene knyttet til forklaringen hennes viser at hun ønsker å vise hvordan hun har kommet frem til de ulike kombinasjonene, ikke bare hvilke kombinasjoner hun har funnet. Et viktig element når tegning brukes for å redegjøre for problemløsningsprosessen er ifølge Teledahl (2017) å gjøre prosessen eksplisitt. Caroline har gjort sin problemløsningsprosess eksplisitt ved at hun har tegnet gjentakende, en kombinasjon på hvert ark:

Figur 26: Caroline redegjør for prosessen i marsvinproblemet

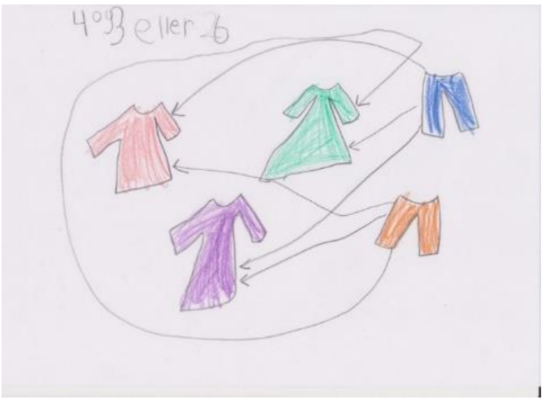
Tegningene Caroline produserer er både piktografiske og ikoniske. Da marsvinene er representert ved enkle sirkler i farger, og ikke bærer preg av at de er avbildninger av reelle objekt, er de ikoniske tegninger. Sofaen Caroline har tegnet er irrelevant for problemet, og har detaljer som rygg og føtter, og er derfor piktografiske. Manipulasjonene hun gjør ved å tegne sofaen og marsvinene i forskjellige kombinasjoner er planlagte manipulasjoner. Hun tegner marsvinene i lik rekkefølge som hun på forhånd har fortalt muntlig og med konkreter. Tallene

Caroline skriver representerer rekkefølgen de ulike kombinasjonene skal sitte i, noen hun også påpeker i det hun sier at «tegningene kan henge over TV-en, så vet de alltid hvor de skal sitte». Dette utsagnet tyder på at tegningen også har en funksjon i å representere svaret. For Caroline skal marsvinene kunne se på tegningene og vite hvor de skal sitte den aktuelle dagen. Likevel er målet med oppgaven å finne ut hvor mange ulike måter det kan gjøres på, ikke hvilke. Derfor er tegningen til Caroline preget av hvordan hun tolker oppgaven, for henne er oppgaven å hjelpe marsvinene til å finne en plan på hvordan de skal sitte, slik at de slipper å krangle om det. Spørsmålet om hvor mange måter de kan sitte på virker derfor å ikke være så viktig for henne. Med de matematiske ferdighetene Caroline viser og forståelsen hun har for oppgaven, er en funksjon tegningen har for henne å representere svaret. Likevel er ikke dette hovedårsaken til at hun tegner:

Forsker:	Men går det an å vise det bare på papiret? Hvis vi skal kunne se det på tegninga di, hvordan de skal sitte.
Caroline:	Vi kan jo fargelegge, eller skriv sånn annenhver gang øverst.

I dialogen kan vi se at hun blir oppfordret til å tegne, også etter at hun har produsert den første tegningen, og bruker den som et bilde av situasjonen for å argumentere i. Uten oppfordring ville nok ikke Caroline tatt til blyanten i det hele tatt, i det hun gjentar sin originale forklaring i de ulike representasjonene.

Caroline benytter seg av tegning som et verktøy for å redegjøre for problemløsningsprosessen også i antrekksoppgaven. Hun har tegnet avbildninger av klesplaggene i problemet, og tegningen vist i figur 27 er derfor en piktografisk tegning.



Figur 27: Caroline redegjøre for prosessen i antrekkproblemet

Når Caroline har forklart hvordan hun har løst oppgaven, har hun enda ikke fargelagt klærne. I dialogen under viser Caroline forståelse for at alle klærne må kombineres med plagg fra den andre mengden klær, men at det ikke har betydning hvilke av buksene eller genserne som er i hvilken farge.

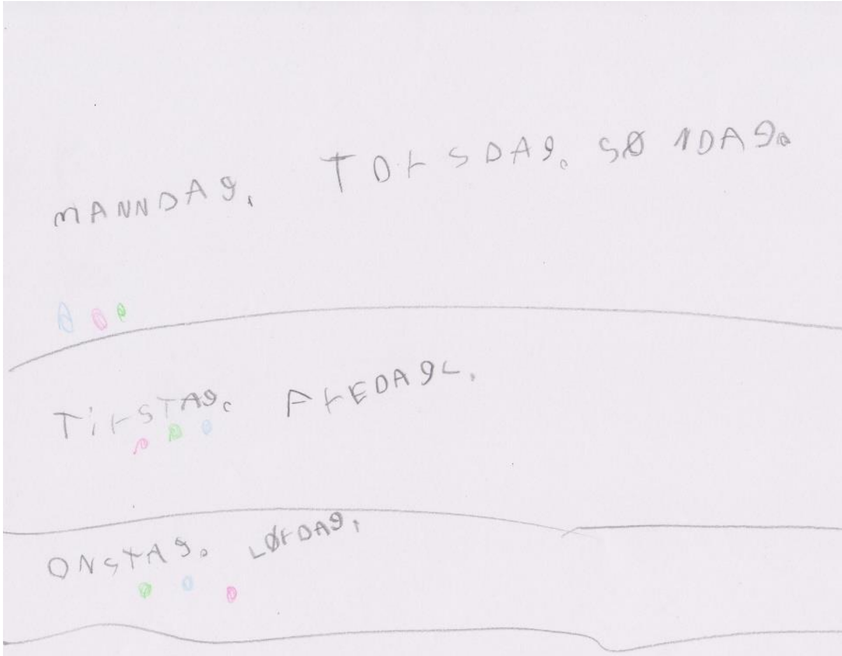
Forsker:	Okei, men du har jo ikke engang fargelagt hvordan farge det er?
Caroline:	Jeg skal det! Nå!
Forsker:	Okei, men trenger du å gjøre det?
Caroline:	Jeg skal det!
Forsker:	Okei, men jeg bare lurer, hvordan kunne du sette piler før du hadde tegnet hvordan farge det var?
Caroline:	Fordi, emh, jeg bare vet hvilken farge det skal være. Den her skal være grønn. Men egentlig er det ikke viktig hvilken farge det er. Det er ikke viktig hvilken side den er på. Det er ikke viktig.

Caroline er opptatt av at hun skal fargelegge klærne, men samtidig sier hun eksplisitt at det ikke er viktig hvilken farge som er hvor. Likevel velger hun å fortsette å tegne, og fargelegger alle klærne. Dette viser at hensikten til at hun tegner store deler av tegningen er å redegjøre for problemløsningsprosessen, for å vise til andre hvordan hun har løst problemet.

4.2.4 Tegne for å representere svaret

En siste måte å tegne på fra rammeverket brukt i denne oppgaven er å tegne for å representere svaret på problemet. Begge problemene elevene ble stilt ovenfor spør om «hvor mange», altså vil svaret kunne representeres med et tall. Men siden oppgavene ble gitt til elevene i en kontekst, kan elevene føle på et behov for å ikke bare gi antallet kombinasjoner, men også vise hvordan de ulike kombinasjonene ser ut. Den andre tegningen Andreas produserer i marsvinoppgave har som hovedfunksjon å representere svaret.

Når elever representerer svaret på problemet med en tegning, får de muligheten til å kontrollere løsningene sine. Som nevnt tidligere bruker Andreas i arbeid med marsvinoppgaven tegning for å utforske problemet, men han har også nytte av den første tegningen sin ved at den lar han kontrollere sine løsninger. De tre løsningene han har tegnet er $M_1M_2M_3$, $M_2M_3M_1$, $M_3M_2M_1$, før han tegner en ny tegning. Den nye tegningen er også en ikonisk tegning, da Andreas har tegnet enkle sirkler i ulike farger for å representere marsvinene (se figur 28).



Figur 28: Andreas representere svaret i marsvinproblemet

På spørsmål om hvorfor han ikke er fornøyd med sin første tegning sier Andreas «Nei. Fordi den grønne to ganger og den blå to ganger». Det grønne marsvinet, M_1 og det blå marsvinet, M_2, sitter i denne tegningen to ganger på samme plass, noe Andreas er misfornøyd med. Dette tyder på at han etter å ha tegnet har brukt tegningen for å vurdere løsningen sin. Stylianou (2011) fant i sin forskning at en slik bruk av tegning kan skje mot slutten av problemløsningsprosessen eller underveis. Når Andreas har representert svaret på tegningen og vurdert den til å ikke svare på oppgaven (slik han har tolket oppgaven), fortsetter han problemløsningsprosessen med å tegne på nytt, og gjøre de justeringene i tegningen som han mener er nødvendig, se figur 28. Siden Andreas velger å endre løsningsforslaget sitt, skjer denne kontrolleringen av representasjonen av svaret underveis i problemløsningsprosessen, og er derfor en aktiv del av prosessen. Når Andreas starter å tegne på det som skal bli den andre tegningen sin, har han en plan for hvordan han skal tegne, som et resultat av den kontrollerende rollen den første tegningen hans har hatt.

4.3 Strategi og tegning

Tabell 5 under viser hvilken fase elevenes strategier er i, og på hvilket grunnlag elevene i hovedsak tegner. Bendik og Daniel har begge brukt strategier i den uplanlagte fasen både på marsvinoppgaven og antrekkoppgaven. Hovedårsaken til at disse to elevene har tegnet er for å utforske. Andreas bruker også tegningen sin i marsvinoppgaven for å utforske, men hans strategi er i overgangsfasen. I tillegg bruker Andreas tegning for å representere svaret. Caroline, som også arbeidet i overgangsfasen på marsvinoppgaven, bruker tegning for å redegjøre for problemløsningsprosessen. Altså bruker både Andreas og Caroline strategier i overgangsfasen på marsvinoppgaven, men bruker tegning på forskjellige måter. Det har de også gjort på antrekksoppgaven, da Andreas bruker sin tegning for å forstå problemet, mens Caroline bruker tegning for å redegjøre for prosessen, men begge bruker strategier i overgangsfasen.

	Den uplanlagte fasen	*Overgangsfasen*	*Odometerfasen*
Forstå			Andreas antrekk
Utforske	Bendik marsvin Bendik antrekk Daniel marsvin Daniel antrekk	Andreas marsvin	
Redegjøre		Caroline marsvin	Caroline antrekk
Representere		Andreas marsvin	

Tabell 5: Strategiene elevene brukte og hovedfunksjonen tegningen deres har

Mine analyser viser at elever som bruker strategier i den uplanlagte fasen, bruker tegning til å utforske problemet. Både tegningene Bendik og Daniel produserer har som hovedfunksjon å utforske problemet, og begge bruker strategier som befinner seg i den uplanlagte fasen. For de andre fasene, overgangsfasen og odometerfasen er tegningens funksjon i større grad å redegjøre for prosessen og representere svaret. Her er det ingen indikasjoner på at elever som bruker strategier i overgangsfasen eller odometerfasen ofte bruker tegning på en bestemt måte. I overgangsfasen er både tegning for å utforske, redegjøre og representere brukt. I odometerfasen er tegning brukt til både å forstå problemet og redegjøre for prosessen. Tegningene elevene produserer kan ha flere funksjoner. Andreas har for eksempel brukt tegning både for å utforske og for å redegjøre for prosessen i marsvinproblemet. Han har tegnet to ulike tegninger, derfor er begge disse funksjonene tegning har tydelig, og anses å være viktige funksjoner begge to. Daniel som i hovedsak har brukt tegning for å utforske i antrekkproblemet har også forstått problemet med gjennom tegneprosessen.

5. Diskusjon

I forrige kapittel presenterte jeg funnene fra datainnsamlingen og drøftet disse opp mot teorien presentert i teorikapittelet. Forskningsspørsmålet for dette forskningsprosjektet er:

Hvilke strategier bruker fire andretrinnselever når de løser kombinatorikkoppgaver, og hvilken funksjon har tegning i problemløsningsprosessen?

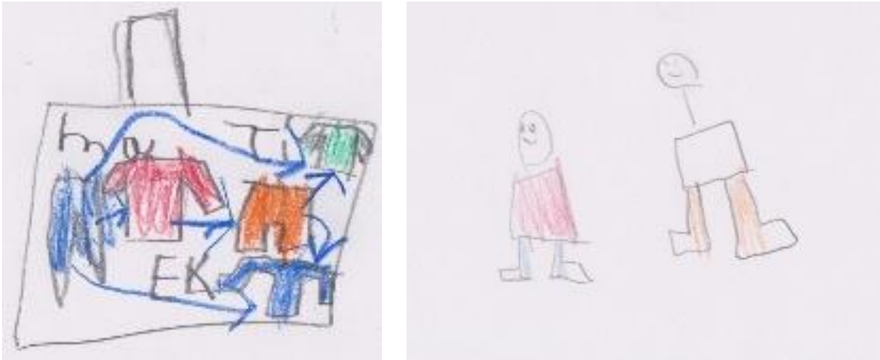
Mitt datamateriale viser at elever på andre trinn kan befinne seg i alle de ulike fasene beskrevet av English, både den uplanlagte fasen, overgangsfasen og odometerfasen. Mine analyser viser også at funksjonen tegning har i problemløsning med kombinatorikk kan være for å forstå problemet, utforske, redegjøre for prosessen og representere svaret. I dette kapittelet vil jeg drøfte ulike fordeler analysen viser at tegning i arbeid med kombinatoriske problemløsningsoppgaver kan ha. Analysen har samtidig vist utfordringer elevene møter, som å finne alle løsningene og å vite antallet kombinasjoner. Utfordringene vil drøftes før jeg ser på konsekvenser av måten oppgavene blir tolket av elevene. Videre vil jeg diskutere funn fra analysen som indikerer at tegning kan være en inngang til formell notasjon, før jeg avslutter kapittelet med en oppsummering.

5.1 Fordeler med tegninger

Elevene brukte i dette forskningsprosjektet et mangfold av strategier, noen brukte strategier i den uplanlagte fasen, andre i overgangsfasen og noen brukte strategier i odometerfasen. De to oppgavene elevene arbeidet med var av ulik vanskelighetsgrad, marsvinoppgaven inneholder kombinasjoner av element fra samme mengde: marsvin som skal kombineres på ulike måter. Antrekksoppgaven skiller seg fra marsvinoppgaven ved at de ulike stegene i forsøket velges fra ulike mengder: en bukse og en genser skal kombineres til et antrekk. To av elevene, Bendik og Daniel brukte strategier i den uplanlagte fasen i problemløsningsprosessen på begge oppgavene. Deres tegninger og utsagn bar preg av en prøv-og-feil-tilnærming til problemløsning, og at de ikke hadde en plan for prosessen. English (1996) fant i sin forskning at elever som benyttet seg av strategier i den uplanlagte fasen ofte skapte gjentakende kombinasjoner i løsningsprosessen. Verken Bendik eller Daniel har dannet samme kombinasjon flere ganger i dette forskningsprosjektet. Årsaken til dette kan være representasjonene brukt. English (1996) benyttet seg av konkreter i form av bamser som skulle kles i sin forskning, mens informantene i dette prosjektet tegnet for å løse problemene de ble stilt ovenfor. Måten elevene har brukt tegning for å løse problemene kan være årsaken til at de ikke har gjentatt kombinasjoner. Ved å benytte seg av piler for å kombinere element eller bytte plass på element, er det enklere å se om kombinasjonen allerede er representert. Dette skiller seg fra arbeid med konkreter, da elever i større grad løsriver seg fra kombinasjonen når de er ferdige med den og skal lage en ny, siden elevene fysisk setter fra seg de ferdige kombinasjonene. Med å manipulere tegningen kan det se ut til at det er enklere å ha kontroll på de ferdige kombinasjonene i det nye kombinasjoner skapes.

I antrekkoppgaven oppdager Daniel gjennom arbeid med tegningen at et plagg kunne kombineres med flere plagg i samme mengde, i dette tilfellet at buksene kan brukes med flere enn bare en genser. I hovedsak bruker Daniel tegningen for å utforske problemet, gjennom uplanlagte manipulasjoner, men tegningen har også en funksjon for eleven ved at den er et hjelpemiddel til å forstå betingelsene i problemet. Uten tegningen ville nok ikke Daniel sett at det var en mulighet å kombinere plaggene på flere måter enn slik han opprinnelig har oppfattet problemet. At han gjennom tegningen forstår den viktige betingelsen at B_1G_1 og B_1G_2 er ulike kombinasjoner fører til at han i større grad klarer å løse problemet.

En annen fordel med å bruke tegning i problemløsning er at tegningen kan snakkes om både underveis i prosessen og etterpå. Det kan være lettere for elevene å både vise og forklare sin strategi om de har en tegning å henvise til. Et eksempel er Carolines forklaring i marsvinoppgaven. Da hun først forklarte sin fremgangsmåte muntlig og med konkreter, var det vanskelig for meg som forsker å forstå hvordan hun hadde tenkt. I det Caroline tegnet kombinasjonene sine på arket, var det ikke bare tydelig for meg hvilken strategi hun hadde brukt, det var også tydelig at det ikke var tilfeldig at ingen av kombinasjonene hennes var gjentakelser. De ferdigproduserte tegningene elevene har tegnet viser ikke strategiene elevene har brukt. Dialogen med elevene og tegningen sammen har vært grunnlaget for analysen. Uten transkripsjonene fra samtalene med elevene kunne resultatene av analysen sett annerledes ut. Dette fordi tegningene alene ikke viser godt nok hvilke strategier elevene har brukt. Whitin og Whitin (2011) hevder at språket elevene knytter til bildene gir læreren innsikt i deres tenking og forståelse. Tegningene Daniel og Andreas tegner i arbeid med antrekksoppgaven er et godt eksempel på at tegningene alene er for lite til å si noe om strategier.



Figur 29: Daniel og Andreas sine tegninger i antrekkproblemet

Ser vi på Daniel sin tegning av kofferten med de ulike plaggene i med piler mellom, kan vi se at alle kombinasjoner er funnet, den blå buksa har piler til alle de tre genserne, og den oransje buksa har piler til to av genserne og fra en genser. Denne tegningen alene kan være tegnet av en elev som bruker en strategi i odometerfasen, som først har tatt utgangspunkt i den blå buksa og kombinert den med alle genserne, og deretter kombinert den oransje buksa med alle genserne. Dette er ikke tilfelle for Daniel, som har brukt en prøv og feil-strategi for å finne disse løsningene, og er ikke i stand til å svare på spørsmål om hvor mange kombinasjoner som er mulig å danne, selv om alle løsningene er representert i tegningen. Andreas derimot, som bare har tegnet to mennesker med ulike plagg, har egentlig brukt en avansert strategi i odometerfasen som er mulig å generalisere. Tegningen hans viser ikke at han bruker den strategien, men ser ut som tegningen til en elev som ikke har fått til å løse problemet, noe som slett ikke er tilfellet.

5.2 Utfordringer elevene møter

Alle elevene i dette forskningsprosjektet har dannet flere kombinasjoner, noen har dannet to, andre fire og noen har funnet alle de mulige løsningene. Nesten uavhengig av antallet kombinasjoner elevene har dannet, har de problemer med å svare på spørsmålet om hvor mange de har funnet.

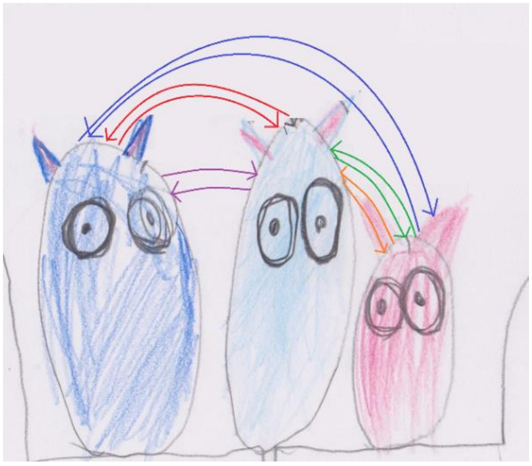
Når oppgaven gis muntlig er det i representasjonssystemet naturlig språk, og elevene må omdanne til geometriske figurer, og tilsvarende når elevene blir bedt om å svare på hvor mange kombinasjoner de har funnet, endre fra geometriske figurer til naturlig språk. Omdanninger fra et representasjonssystem er mer kompleks enn behandlinger innenfor samme system, fordi bytte av system krever at elevene kjenner igjen det samme representerte objektet i to ulike representasjoner (Duval, 2006). Når elevene som bruker piler for å kombinere plagg eller for å bytte om på marsvinene skal gjennom muntlig språk si hvor mange kombinasjoner de har funnet, må de vite at en pil i deres tegninger for eksempel representerer en kombinasjon. Flere av elevene arbeidet med å tegne piler og manipulere i deres tegninger, men da de skulle trekke ut den relevante informasjonen, var de nødt til å telle på nytt, noe som skapte problemer i flere av elevtegningene.

5.2.1 Finne alle kombinasjonene

Alle elevene i dette forskningsprosjektet brukte tegning for i arbeidet med problemene. Årsaken til at elevene tegnet var ulikt, men de fleste elevene gjorde noen manipulasjoner i tegningene, ved å tegne gjentakende eller tegne piler eller streker. Analysen av elevenes strategier og tegnemåter støtter deler av Pessoa og Borba (2012) sine funn. De fant at selv om unge barn kan arbeide konkret med enkle kombinatoriske problem, er det vanskelig for dem å finne alle mulige løsninger. Når elevene i forskningsprosjektet mitt manipulerer tegningene i marsvinoppgaven, for å representere at marsvinene bytter plass, bruker Daniel og Bendik piler. I en slik måte å bruke tegningen på er det bare den første kombinasjonen eleven kan støtte seg på, og må i større grad visualisere de videre kombinasjonene manipulasjonene gir. For å bruke denne strategien er det hensiktsmessig å samtidig bruke tegning for å redegjøre for problemløsningsprosessen. Selv skrev jeg opp de ulike kombinasjonene som ble dannet ved manipulasjonene med pilene med notasjoner som $M_1M_2M_3$, for å holde styr på de ulike kombinasjonene og kontrollere at gjentakende kombinasjoner ikke ble dannet. Muligheten til å representere med slik matematisk notasjon har ikke andretrinnselever, og det er derfor vanskelig for dem å tegne ikoniske representasjoner. Når de ikke har muligheten til å redegjøre for problemløsningsprosessen ved å representere et marsvin som M_1, er en sirkel i marsvinets farge det nærmeste de kommer. For å redegjøre for problemløsningsprosessen, og slippe å «ha alt i hode» kunne en løsning for både Daniel og Bendik være å representere løsningene de allerede hadde funnet ved sirkler i marsvinenes farge, slik som Andreas gjør. Andreas møter imidlertid et annet problem, han godtar ikke både $M_1M_2M_3$ og $M_1M_3M_2$ som gyldige løsninger, fordi M_1 sitter på samme sted i begge løsningene. Andreas tegner ikke eksplisitt de manipulasjonene han gjør, men gjentar heller for å vise endringene i tegningen. Kanskje viser en problemløsningsstrategi med piler for å representere flytting mer eksplisitt at kombinasjonene er ulik, fordi en endring har skjedd. Selv om M_1 sitter på samme sted i både $M_1M_2M_3$ og $M_1M_3M_2$, har M_2 og M_3 byttet plass. I denne oppgaven er begge løsningene gyldige, og det er kanskje enklere å se for elever som eksplisitt viser manipulasjonene i tegningene sine, slik som Daniel og Bendik gjør, kontra implisitte manipulasjoner slik som Andreas gjør i sin tegning.

5.2.2 Vite antallet kombinasjoner

Behandlingene elevene gjør for å finne frem til en løsning i problemene de møter, med tegning som representasjon, kan skape noen utfordringer. Bendik eller Daniel hadde i sine tegninger problemer med å finne alle løsningene, og de hadde vanskeligheter med å vite antallet kombinasjoner de hadde funnet. Dette kan henge sammen med deres måte å tegne på. Ved å tegne alle elementene i kofferten, for så å sette piler mellom de ulike elementene, så tegningene rotete ut, og pilene gikk over hverandre, som naturlig nok gjorde det vanskelig å telle. Problemene var mest synlig i marsvinoppgaven, hvor elevene brukte en strategi som innebar å flytte om på marsvinene. Da tegnet elevene piler mellom for eksempel M_1 og M_2 for å representere at disse to marsvinene skulle bytte plass. Dette resulterte i doble piler mellom elementene i tegningen. For å finne alle løsninger ved hjelp av tegningen Daniel har tegnet med en slik strategi, er det nødvendig å tegne fem doble piler. Et eksempel på hvordan dette kan gjøres er tegningen i figur 30. Her endres først plasseringen til M_1 og M_2 (lilla pil), slik at kombinasjon $M_2M_1M_3$ skapes, videre bytter M_1 og M_3 plass (oransje pil), og $M_2M_3M_1$ dannes. Deretter bytter M_1 og M_2 plass (blå pil) og kombinasjonen endres til $M_1M_3M_2$. Til nå er løsningen lik Daniels, som hadde tegnet tilsvarende piler i sin tegning. For å finne de resterende to mulige kombinasjonene må rød og grønn pil også brukes. Rød pil skaper kombinasjonen $M_3M_1M_2$, og grønn pil skaper den siste kombinasjonen $M_3M_2M_1$.



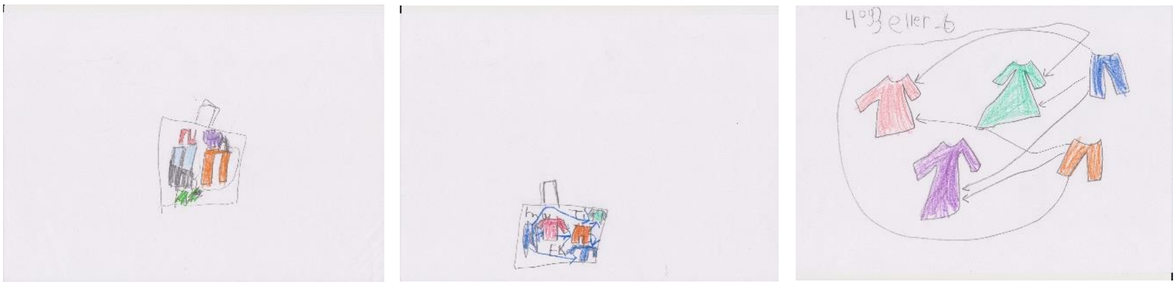
Figur 30: Elevtegning med egne manipulasjoner

I dette løsningsforslaget er det flere piler på samme sted, rød og lilla pil og grønn og oransje pil. Dette kan være forvirrende for elever, da man i tillegg til å måtte ha kontroll på hvordan marsvinene sitter i den aktuelle kombinasjonen etter de tre første manipulasjonene, må kunne stole på at den røde pilen ikke skaper lik kombinasjon som den lilla pilen. Kombinasjonene blir ikke like fordi utgangspunktet er ulikt. Å holde kontroll på dette er krevende, da kombinasjonene ikke eksplisitt vises i tegningen.

5.3 Forståelsen av konteksten

Duval (2004) hevder at det er hensiktsmessig å bruke kontekster fra hverdagen i matematikkundervisningen, fordi det kan gi mening til matematikken. Kombinatorikk er ikke et unntak, da kombinatoriske problem har en sterk tilknytning til dagliglivet. Å kombinere kan knyttes til mange ulike situasjoner. Kombinatorikkproblemene elevene i dette forskningsprosjektet fikk, handlet om ulike kombinasjoner som kunne dannes av klær og plassering i en sofa. Kombinatorikk er så nært knyttet til handlinger at det nesten er unaturlig å snakke om kombinatorikk løsrevet fra en kontekst. Betingelsene i kombinatorikk ligger i konteksten man velger. Slik som marsvinproblemet, da det bare er tre marsvin, kan ikke tilbakelegging godtas, siden et marsvin ikke kan sitte på to plasser samtidig. Elevene viser forståelse for dette. Mine analyser viser at elevene ikke lager kombinasjoner som inneholder gjentakelser av samme objekt. Likevel fører konteksten til noen utfordringer. Elevene blir i marsvinoppgaven presentert for problemet ved at marsvinene krangler om hvor de skal sitte i sofaen. Analysen indikerer at denne problemformuleringen har ført til at elevene forstår oppgaven på en annen måte. Andreas har for eksempel tegnet en ny tegning fordi han ikke var fornøyd med kombinasjonene han fant. Dette var fordi et marsvin satt i flere kombinasjoner på samme sted. Et eksempel er kombinasjonene $M_1M_2M_3$ og $M_1M_3M_2$, som begge er gyldige løsninger. Likevel er det flere av elevene som ikke godtar begge løsningene, fordi M_1 sitter på samme sted i begge. Elevene som tegnet for å redegjøre for prosessen og for å representere svaret tegnet tre løsninger, hvor alle marsvinene hadde ulike plasseringer i hver kombinasjon: $M_1M_2M_3$, $M_2M_3M_1$ og $M_3M_1M_2$. Felles for disse elevene var at de tegnet gjentagende tegninger, for å vise nye kombinasjoner. De elevene som tegnet for å utforske problemet med piler for å bytte om på plassene, møtte ikke dette problemet. Grunnen til det kan være at tegningene med pilene var uoversiktlige, og ikke viste like godt hvordan den nye kombinasjonen så ut, som Daniels tegning i marsvinproblemet.

Et annet interessant funn knyttet til konteksten oppgaven er gitt i er hvordan elevene tegner. Caroline, Bendik og Daniel har i antrekksoppgaven alle tegnet og fargelagt opp plaggene som problemet innebærer, men det er forskjeller i måten de tegner på. Carolines tegning skiller seg fra Bendik og Daniel sin, da hun benytter større deler av arket. Bendik og Daniel har tegnet klærne i kofferten, mens Caroline har bare tegnet de ulike plaggene.



Figur 31: Bendik, Daniel og Carolines tegning av antrekkproblemet

Caroline finner fort frem til antallet kombinasjoner, mens både Daniel og Bendik møter på problemer når de skal telle eller gjengi hvor mange kombinasjoner de har funnet. I tegningene kan vi se at det er tett mellom plaggene i tegningene deres, hvor Caroline har tegnet klesplaggene større og har mer rom mellom plaggene. Dette kan være fordi hun bruker en mer avansert strategi, eller så kan hennes måte å tegne på bidra til høyere måloppnåelse i problemløsningsoppgaven. Årsaken til at Bendik og Daniel benytter så lite del av arket til tegningen er trolig måten problemet er presentert for dem. Konteksten til oppgaven var at kofferten som klærne skulle pakkes i var så liten, og der var derfor plass til et begrenset antall plagg. Dette er nok årsaken til at elevene tegner kofferter med plaggene i. Caroline har løsrevet seg mer fra konteksten, og har ikke valgt å tegne kofferten i det hele tatt. Den er ikke relevant for å løse problemet.

5.4 Mot formell notasjon

Piaget og Inhelder (1975) fant i sin forskning at elever bruker enkle strategier i det første møte med kombinatorikk. Dette er ikke tilfellet for alle elevene i dette forskningsprosjektet. Caroline og Andreas har begge brukt en effektiv strategi i odometerfasen for å løse antrekkproblemet.

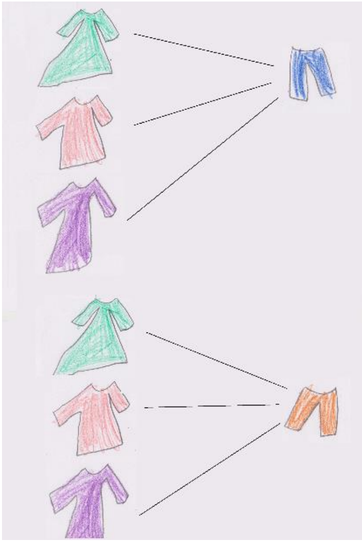
Elevene i dette forskningsprosjektet tegnet nokså piktografiske tegninger, da de fleste tegnet detaljerte marsvin og klesplagg. Palmér og van Bommel (2018) hevder at tegning som problemløsning i kombinatorikk skiller seg fra tegning som problemløsning i andre matematiske tema, fordi kombinatorikk krevet at elevene viser oppmerksomhet til hvert objekt i seg selv, og relasjonen mellom de ulike objektene i problemet. I kombinatorikk er det viktig å skille like elementer fra hverandre, som eksempelvis de tre marsvinene som i utgangspunktet er like, men har ulike farger, eller de ulike klesplaggene. Elevene i dette forskningsprosjektet brukte i hovedsak farger for å skille de ulike elementene i begge problemene fra hverandre. For å kunne løse kombinatorikkoppgaver er det nødvendig å kunne skille mellom like elementene, for å kunne representere ulike kombinasjoner. Ved addisjon av for eksempel bukser og gensere, kan alle buksene og genserne representeres med for eksempel en tellestrek. I kombinatorikkoppgaver med bukser og gensere som element er det viktig å skille mellom elementene i både gruppen gensere og gruppen bukser, fordi enhver ulik bukse vil gi ulike kombinasjoner. Dette er en særegenhet ved kombinatorikk som emne, og elever som ikke kan skille elementene ved algebraisk notasjon, som B_1 for den ene buksen og B_2 for den andre, kan ikke tegne særlig ikonisk. De er i større grad avhengig av farger som hjelpemiddel til å skille elementene. Mine analyser viser at elevene ikke bruker formell notasjon for å skille mellom ulike elementer som er like, som marsvinene med forskjellig farge. Derfor er kanskje tegninger med sirkler for marsvin slik Andreas gjør og gensere og bukser i ulike farger slik de fleste elevene gjør det mest ikoniske elever med det matematiske språket andretrinnselever har mulighet til å tegne.

Det matematiske språket gir muligheter til å kommunisere med andre på. Gjennom representasjoner lærer vi nye måter å tenke på og kan utvikle vår matematiske forståelse. Eksempeloppgaver i læreboka og lærerens eksempler på tavla viser elevene vedtatte måter å representere begrep på for å meddele kunnskap med elevene (Goldin & Shteingold, 2001; Miura, 2001). Odometerstrategiene Caroline og Andreas bruker i antrekksoppgaven er nært knyttet til den matematiske strukturen til kombinatorikk. Caroline bruker tegningen og Andreas bruker de ferdige bildene til å argumentere i. Måten English (1996) forklarer kombinatorikk på, som operasjonen av vektorprodukt, er en tilsvarende måte som disse elevene har løst oppgaven på. Begge tar utgangspunkt i en elementtype og slår systematisk sammen elementer fra den andre mengden. Både Caroline og Andreas danner med det vektorproduktene av de to mengdene. Andreas skriver ikke noe skriftlig, mens Caroline tegner piler mellom de ulike elementene. Gjennom muntlig språk og tegning viser elevene sine interne representasjoner, som er deres individuelle måter å tenke på og representere kombinatoriske oppgaver på (Goldin & Shteingold, 2001). Det er en grunn til at eksterne representasjonene presenteres for elevene, da de vedtatte måtene å representere begrep på ofte er gode representasjoner for det aktuelle temaet, som viser de egenskapene som er viktige. I matematikk ønsker vi at elevene skal kunne dra nytte av disse representasjonene, men de må ikke formidles til elevene som en «oppskrift» eller den eneste sannheten. I virkeligheten er det jo utallige måter å representere matematiske begrep på, noen mer egnet enn andre. Veien fra Andreas og Carolines løsningsmåter til en ekstern representasjon er kort. Organiseres dette litt mer systematisk, ved at for eksempel mengdene i tegningen til Caroline systematiseres i større grad vil representasjonen kunne videreutvikles til et valgtre. Strategiene både Caroline og Andreas har brukt er representert i figur 32, Carolines til venstre og Andreas i midten. De har begge tatt utgangspunkt i en bukse og systematisk slått den sammen med genserne, før de har byttet bukse og slått også den sammen med genserne.

Figur 32: Sammenheng mellom elevstrategier og valgtre

Til høyre i figur 32 over viser et valgtre for forsøket elevene arbeidet med. I det første steget har man valget mellom to ulike bukser, hvor hver av de buksene gir valget mellom tre ulike gensere. I valgtreet vises også de ulike kombinasjonene som dannes. Forskjellen mellom å representere kombinatorikkproblemet med et valgtre og gjennom tegning, slik som Caroline har gjort, er notasjonen brukt. Caroline har tegnet plaggene i de ulike fargene. Likevel viser hun forståelse for at hun ikke trenger å vite hvilket plagg som har hvilken farge, siden hun har løst oppgaven før hun har tegnet på fargene på plaggene. Utfordringen ved å utvikle et valgtre for disse elevene vil nok være å representere elementene i problemet på en mer ikonisk måte. Dette er vanskelig i kombinatorikkoppgaver som disse, da det er viktig å kunne skille mellom de ulike elementene i samme mengde. Notasjoner som B_1, B_2 for buksene og M_1, M_2, M_3 for marsvinene er ikke forventet av elever på andre trinn, og ikke nødvendig. Men det er tidkrevende å tegne alle elementene og i tillegg fargelegge dem. Likevel vil det være mindre piktografiske måter å representere marsvin og klesplagg på enn elevene i dette forskningsprosjektet har gjort. Andreas tegnet i sin tegning på marsvinoppgaver sirkler i ulike farger, og flere av elevene foreslo at man ikke nødvendigvis trengte å tegne piktografisk. Likevel har de fleste elevene gjort nettopp det.

Når elevene ikke har språket til å bruke eksterne representasjoner som valgtre med notasjon som B_1 og G_2, er kanskje Caroline sitt løsningsforslag den mest sofistikerte måten å løse problemet med antrekkene på ved hjelp av tegning på. Om hun skulle tegnet et valgtre med elementene slik som hun har tegnet de, er hun nødt til å tegne noen elementer flere ganger, slik som eksempelet i figur 33. Dette vil være unødvendig å gjøre når Caroline fint klarer å løse oppgaven. I eksemplet må alle genserne tegnes to ganger. En lignende løsning vil være å ta utgangspunkt i genserne som første steg, og buksene som andre steg. Da vil genserne bare måtte tegnes en gang hver, altså tre gensere, mens buksene må tegnes to ganger hver. Likevel vil det senere være nyttig å kunne bruke valgtre som en representasjon, men ikke før elevene kan representere elementer på en mer ikonisk måte. Med piktografiske representasjoner av elementene i disse kombinatorikkproblemene fører et valgtre til ekstra arbeid i tegningen av elementene.



Figur 40: Elevtegning med egne manipulasjoner

Selv om valgtre ikke er en egnet representasjon for disse elevene, med manglende formell notasjonen, vil forståelsen både Andreas og Caroline viser for kombinatorikk kunne være en inngang til å videreutvikle de interne representasjonene, slik at de stemmer overens med eksterne representasjoner. Det kan gjøres ved å samtale med elevene om hva som er nødvendig i de ulike representasjonene. Det innebærer en diskusjon om de viktigste elementene i representasjoner i kombinatorikk, og hva som gjør kombinatorikk til et spesielt emne i matematikk. Ja, vi trenger å skille like elementer fra hverandre, men gensere, bukser og marsvin trenger ikke å tegnes like detaljert som mange av elevene gjør.

6. Avslutning

Formålet med dette forskningsprosjektet var å undersøke hvordan elever løser matematiske problem og representerer i matematikk. For å kunne undersøke det tok jeg utgangspunkt i følgende forskningsspørsmål:

Hvilke strategier bruker fire andretrinnselever i møte med kombinatorikkproblem, og hvilken funksjon har tegning for elevenes arbeid?

Jeg har undersøkt fire elevers strategier i kombinatoriske problem, og hvilken funksjon tegning har hatt i det arbeidet. For å finne et svar forskningsspørsmålet har jeg samlet inn elevenes tegninger, transkribert lydopptak fra samtale med elevene og feltnotater fra observasjonen av elevene i arbeid. Med et todelt forskningsspørsmål analyserte jeg datamaterialet ut fra hvilken fase strategiene tilhørte og hvilken hovedfunksjon tegning har hatt for elevene. Analysen viser at elever på andretrinn kan bruker strategier i den uplanlagte fasen, overgangsfasen og odometerfasen. Funnen i dette forskningsprosjektet viser at funksjonene tegning har for andretrinnselever er å forstå problemet, utforske problemet, redegjøre for problemløsningsprosessen og representere svaret på problemet.

Siden dette er et kvalitativt forskningsprosjekt vil det ikke være mulig å generalisere de funnene som er gjort. Likevel kan prosjektet gi en pekepinn på hvilke strategier elevene kan bruke og hvordan de kan tegne i det arbeidet. Samtidig viser forskningen noe om hvilke utfordringer elevene kan møte og hvilke fordeler tegning kan ha i problemløsningsprosessen.

6.1 Oppsummering og didaktiske implikasjoner

Analysen av datamaterialet har vist at elevene tegner på ulike grunnlag, og at elevenes tegninger kan ha ulike funksjoner i ulike deler av problemløsningsprosessen. Et sentralt funn er tegninger som har til hovedfunksjon å være et sted elevene kan utforske problemet, hvor det ser det ut til at elever bruker strategier som er preget av en prøv-og-feil-tilnærming. Analysen har vist at elever drar nytte av konteksten problemet er presentert for elevene i, ved at det hjelper dem til å forstå noen av betingelsene i problemet. Samtidig er noen av elevene for knyttet til konteksten, som fører til at deres tegninger inneholder element fra problemet som ikke er relevante. Det gjør det vanskelig for dem å manipulere tegningene, da det blir mange elementer og vanskelig å se hva som egentlig er viktig. Analysen viser også at tegning kan være et nyttig verktøy i arbeidet med kombinatoriske problem. Elia et al. (2007) hevder at representasjoner kan ha en positiv effekt i å støtte elevene til å forstå konsept, løse problem og kommunisere matematiske ideer til andre. Analysen min viser at elevene bruker tegning til nettopp dette, til å forstå problemet, utforske, redegjøre for problemløsningsprosessen og representere svaret. Tidligere forskning har vist at elever ofte sliter med å løse kombinatoriske problem uten å skape gjentakende kombinasjoner (English, 1996). Resultatene i denne forskningen viser at elever ikke har den samme utfordringen når de bruker tegning i problemløsningsprosessen. Derimot var det andre utfordringer elevene i dette forskningsprosjektet møtte. Å finne alle kombinasjonene når tegning blir brukt til å utforske og å svare på hvor mange kombinasjoner som er representert var vanskelig for disse andretrinnselevene. Disse utfordringene ser ut til å henge sammen med funksjonen tegning har og strategien brukt for å løse problemene. Å vite antallet kombinasjoner er en utfordring som virker å være spesiell i bruk av tegning som representasjon. Tidligere forskning har ikke indikert at dette er en utfordring for elevene når konkreter benyttes i prosessen å løse kombinatoriske problem. Samtidig har analysen vist at elever som bruker strategier i odometerfasen, representerer kombinatoriske problem ved en ryddig representasjon. Representasjonene de bruker kan være en inngang til eksterne representasjoner som valgtre. En forutsetning for å videreutvikle elevenes tegninger som representasjoner for strategier i odometerfasen er at elevene må kunne bruke formelle notasjoner.

Formålet med dette forskningsprosjektet var å undersøke hvordan elever løser matematiske problem og representerer i matematikk. Oppgavene elevene arbeidet med var ikke for dem kjente oppgaver, da de ikke hadde hatt undervisning i kombinatorikk på skolen, og oppgavene de fikk kan derfor ansees å være problemløsningsoppgaver. Dette forskningsprosjektet kan derfor være nyttig for matematikkundervisning av flere emner enn kombinatorikk. Analysen viser at elever på andretrinn kan bruke et mangfold av strategier, altså bruker noen elever strategier preget av en prøv-og-feil-tilnærming mens andre bruker avanserte strategier hvor de drar nytte av strukturen i kombinatorikk. Slik vil det trolig være i alle matematikklasserom og alle matematiske emner. Det som da er viktig for oss som matematikklærere, er å gi elevene åpne oppgaver hvor de kan benytte seg av ulike strategier.

Dette forskningsprosjektet belyser også viktigheten i å samtale med elevene om tegningene de danner. Uten elevenes forklaringer knyttet til tegningene ville det være vanskelig å kunne fastslå funksjonen tegningen har hatt i deres problemløsningsprosess. Uttrykksformene tegning og muntlig språk utfyller hverandre. Tegningen ser ut til å hjelpe elevene til å kommunisere deres matematiske forståelse ved at de kan forklare sine valg og reflektere over prosessen. Det muntlige språket elevene knytter til tegningene sine har hjulpet meg som forsker til å forstå både hvilken funksjon tegning har hatt i arbeidet og hvilken strategi elevene har brukt. Det muntlige språket har derfor vært avgjørende for at jeg har kunnet svare på forskningsspørsmålet mitt.

6.2 Videre forskning

Underveis i arbeidet med dette forskningsprosjektet har jeg ofte møtt på spørsmål som jeg gjerne også skulle studert nærmere. Fokuset i denne oppgaven har vært årsaken til at elevene tegner i sitt valg av kombinatorikkstrategi, derfor er det mye som har vært interessant i elevenes tegninger som ikke har blitt analysert. Flere av elevene har for eksempel påpekt at de ikke trenger å tegne detaljerte marsvin, at det holder å tegne en sirkel i den bestemte fargen. Likevel har de tegnet mer detaljert enn de viser forståelse for at er nødvendig. Dette skulle jeg gjerne undersøkt ytterligere. Hva er årsaken til at de velger å tegne munn, øyne og ører på marsvinene? Er det av rent estetiske grunner, fordi de liker å tegne eller er det fordi de lettere knytter sin representasjon til konteksten ved å gjøre det? Forskning har undersøkt elevers bruk av detaljer, som for eksempel Saundry og Nicol (2006). Deres forskning satte blant annet søkelys på grad av detaljer i elevers tegninger i problemløsning. Spesielt for kombinatorikk ved bruk av tegning som representasjon er at detaljer til en viss grad er viktig. Like element må representeres på en måte som også skiller dem fra hverandre. Dette kan gjøres med farger, slik elevene gjorde i dette forskningsprosjektet. Jeg har lurt på om disse fargene er tegnet for nettopp å skille elementene, eller om det kommer av elevenes generelle tegnemåte. Det hadde vært interessant å undersøke dette, gjennom å for eksempel gi en elevgruppe både kombinatoriske problem, slik som i dette prosjektet, og andre problemløsningsoppgaver hvor detaljer ikke i like stor grad er nødvendig.

I arbeid med dette forskningsprosjektet har jeg reflektert over elevenes evne til å møte problem med nysgjerrighet og pågangsmot, selv om de ikke hadde en klar plan for prosessen. Det har fått meg til å reflektere over min tidligere oppfatning av matematikk, da jeg på barneskolen brukte prosedyrene lærebøkene viste til å løse oppgaver. Jeg beundrer elevene som stiller spørsmål til seg selv i problemløsningsprosessen, og viser en glede til matematikkfaget som jeg først kjente på da jeg startet på lærerutdanningen. Denne gleden tror jeg hjelper elevene til å bruke kunnskap fra andre emner til å løse nye problem.

Litteratur

Bakar, K. A., Way, J. & Bobis, J. (2016). Young Children's Drawings in Problem Solving. *Mathematics Education Research Group of Australasia*, 86-93. Hentet fra: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED572388.pdf

Carruthers, E. & M. Worthington. (2006). *Children's mathematics: Making marks, making meaning* (2. utg.). London: Paul Chapman Publishing.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Reasearch Methods in Education* (8. utg). London, New York: Routledge.

Doverborg, E. & Pramling, I. (1992). *Att förstå barns tankar: metodik för barnintervjuer.* (2. utg.). Uddevalla: Almqvist & Wiksell Förlag.

Duval, R. (2004). A crucial issue in mathematics education: The ability to change representation register. *Proceerings of the 10th International Conference on Mathematics Education Copenhagen*.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational studies in Mathematics* 61 (1), 103-131. Hentet fra: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s10649-006-0400-z.pdf

Elia, I., Gagatsis, A. & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, 17(6), 658-672. Hentet fra: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959475207001028

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational studies in Mathematics* 22(5), 451-474. Hentet fra: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF00367908.pdf

English, L. D. (1993). Children's strategies for solving two-and three-dimensional combinatorial problems. *Journal for research in Mathematics Education*: 24(3), 255-273. Hentet fra: https://www.jstor.org/stable/pdf/749347.pdf

English, L. D. (1996). Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form. *The Journal of Mathematical Behavior* 15(1), 81-112. Hentet fra: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312396900425

Goldin, G. & N. Shteingold. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. I A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Red.), *The roles of representation in school mathematics* (1-23). Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

Grenness, T. (2012). *Hvordan kan du vite om noe er sant?: veiviser i forsknings- og utredningsarbeid for studenter, ledere, konsulenter og journalister* (2. utg). Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Halani, A. (2012). Students' Ways of Thinking about Enumerative Combinatorics Solution Sets: The Odometer Category. Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. (1) 231-245 Hentet fra: https://repository.asu.edu/attachments/110671/content/Halani_asu_0010E_13085.pdf

Kampmann, J. (2000). Børn som informanter og børneperspektivet. I P. S. Jørgensen & J. Kampmann (Red.), *Børn som informanter*. (23-54). København: Børnerådet.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.) Oslo: Gyldendal Akademisk.

Kristensen, Ø. F. & Wikan, A. (2016). *Sannsynlighetsregning og statistikk for høyere utdanning*. Bergen: Fagbokforlaget.

Lysø, K. O. (2014). *Sannsynlighetsregning og statistisk metodelære* (2. utg.). Bergen: Caspar forlag.

Miura, I. T. (2001). The influence of language on mathematical representations. I A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Red.), *The roles of representation in school mathematics* (53-62). Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren.* Oslo: Universitetsforlaget.

Palmér, H. & van Bommel, J. (2016). Exploring the role of representations when young children solve a combinatorial task. *ICT in mathematics education: the future and the realities*: 47-55. Hentet fra: http://ncm.gu.se/media/smdf/Published/No11_Madif10/madif10_160sidor.pdf#page=55

Palmér, H. & van Bommel, J. (2018). The role of and connetion between systematization and representation when young children work on a combinatorial task. European Early Childhood Education Research Journal. 26(4), 562-573. Hentet fra:

Papandreou, M. (2014). Communicating and thinking through drawing activity in early childhood. *Journal of Research in Childhood Education* 28(1): 85-100. Hentet fra: https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/02568543.2013.851131?needAccess=true

Pessoa, C. & Borba, R. (2012). Do young children notice what combinatorial situations require? *T. Y. Tso, 36th Conference of the International Group for the Psychology of*

Mathematics Education (261). Taipei: PME. Hentet fra: https://www.researchgate.net/profile/Dina_Hassidov/publication/320920035_THE_IMAGE_OF_BY_PRE-SCHOOL_TEACHERS/links/5a026e3da6fdcc55a15ccd68/THE-IMAGE-OF-BY-PRE-SCHOOL-TEACHERS.pdf#page=307

Piaget, J. & Inhelder, B.: 1975, *The Origin of the Idea of Chance in Children*. New York: W.W. Norton & Company

Postholm, M. B. (2010). Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier. Oslo: Universitetsforlaget.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Saundry, C. and C. Nicol (2006). Drawing as problem-solving: Young children's mathematical reasoning through pictures. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Hentet fra: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.937.2624&rep=rep1&type=pdf#page=65

Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics,* 76(3), 265-280. Hentet fra: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs10649-010-9273-2.pdf

Teledahl, A. (2017). How young students communicate their mathematical problem solving in writing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 48(4), 555-572. Hentet fra: https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/0020739X.2016.1256447?needAccess=true

Thagaard, T. (2018). *Systematikk of innlevelse: en innføring i kvalitative metoder* (5. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Tjora, A. H. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (3. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2018). Fornyer innholdet i skolen. Hentet fra: https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/?expand=factbox2606064

van Bommel, J. & Palmér, H. (2018). Paper ~~or~~ and digital: a study on combinatorics in preschool class. *Nordic Research in Mathematics Education.* Hentet fra: http://kau.diva-portal.org/smash/get/diva2:1181427/FULLTEXT01.pdf

Velez, I. & da Ponte J. P. (2013). Representations and reasoning strategies of Grade 3 students in problem solving. *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. 383-391. Ankara: Middle East Technical University. Hentet fra: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG2/WG2_Velez.pdf

Whitin, P. & D. Whitin. (2001). Using literature to invite mathematical representations. I A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Red.), *The roles of representation in school mathematics* (228-237). Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

Zapata-Cardona, L. (2018). Supporting Young Children to Develop Combinatorial Reasoning. I A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris & E. Paparistodemou (red.), Statistics in Early Childhood and Primary Education: Supporting Early Statistical and Probabilistic Thinking (257-272). Singapore: Springer.

Vedlegg: Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Elevers multimodale uttrykk i matematikk»?

Formål

Jeg er masterstudent ved NTNU og skal skrive en masteroppgave i matematikkdidaktikk. I dette prosjektet ønsker jeg å undersøke hvordan elever uttrykker seg innenfor et matematisk tema og bruker sine tegninger i matematikk. Dette vil innebære at problemløsningsoppgaver hvor jeg vil observere og samtale med elever om hvordan de velger å løse oppgavene. Datainnsamlingen vil gjennomføres i løpet av høsten 2018, og jeg vil levere den ferdige masteroppgaven i mai 2019.

Hva innebærer det for deg å delta?

Deltakelse i denne studien innebærer at elevene aktivt deltar i et matematisk opplegg på ca. 45 minutter. Elevene vil få oppgaver, og det tas høyde for at elevene skal få et faglig utbytte av disse øktene. Datainnsamlingen vil være basert på observasjon av elevene i arbeid, intervju, lydopptak og innsamling av elevarbeid.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis dere velger å delta, kan dere når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om eleven vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for dere hvis dere ikke vil delta eller senere velger å trekke dere.

Personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om elevene til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun masterstudent Reidi Kristina Steen Larssen som vil ha tilgang til det innsamlede datamaterialet. Mine veiledere ved NTNU, Heidi Dahl og Benedikte Grimeland vil ha tilgang til det anonymiserte og transkriberte datamaterialet. Deltakerne i prosjektet vil bli anonymisert ved bruk av koding og pseudonym, og vil ikke kunne gjenkjennes i en eventuell publikasjon. Elevenes navn vil altså bli erstattet med en kode som vil lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data.

Hva skjer med opplysningene når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes i mai 2019. Da vil alle personopplysninger og lydopptak være slettet.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om eleven basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU – Norges teknisk-vitenskapelig universitet, Institutt for lærerutdanning har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, ta kontakt med:

- NTNU – Norges teknisk-vitenskapelig universitet, Institutt for lærerutdanning ved Heidi Dahl, på epost (heidi.dahl@ntnu.no) eller telefon: 73559819.
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personvernombudet@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen
Reidi Kristina Steen Larssen

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Elevers multimodale uttrykk i matematikk», og samtykker til at mitt barn ________________________(barnets navn), deltar i prosjektet.

(Foresattes underskrift, sted og dato)

NTNU
Kunnskap for en bedre verden