Sammendrag

Matematikk er ikke bare tall. En kvalitativ studie om elevers arbeid med representasjonsformer.

Hva kjennetegner arbeid med tekstoppgaver hos elever på småtrinnet og hvilke utfordringer kan oppstå når de transformerer fra hverdagskontekst til tall, tallinje og konkreter?

De som har forfattet den nye læreplanen som skal være klar fra høsten 2020 vektlegger representasjonsbruk i matematikkopplæringen. Nasjonale prøver krever at elevene er i stand til å tolke ulike typer av representasjoner, for å svare på spørsmålene.

Denne studien baserer seg i hovedsak på Raymond Duval sine funn om elevers bruk av representasjoner i matematikken. Dette er en kvalitativ studie basert på en elevgruppe på småtrinnet sitt arbeid med tekstoppgaver og representasjoner.

Studien bygger på elevobservasjoner, lydopptak, notater fra observasjonene og oppfølingsspørsmål fra deltagende observatør. De viktigste funnene i denne studien var at elevene hadde store utforinger med å transformere mellom enkelte representasjoner, mens andre transformasjoner gikk greit.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på en treårig masterstudie ved NTNU i Trondheim. Det er med dette på tide å si farvel til studenttilværelsen for denne gang. Å skrive masteroppgave har vært en slitsom prosess, men mest av alt har det vært en lærerik prosess. Det har vært oppturer og nedturer. Når jeg ser tilbake på disse tre årene, har det gått fort. Jeg har opparbeidet meg en faglig kompetanse omkring mitt valgte tema, og jeg sitter igjen med kunnskap om hvordan et forskningsarbeid kan utføres. Dette er verdifull kompetanse som jeg ønsker å ta med meg videre når jeg skal fortsette min yrkeskarriere som lærer. Dette har riktignok vært en individuell oppgave, men det betyr slettes ikke at jeg har vært 100 % alene i arbeidet. Derimot er det flere som har bidratt og jeg vil benytte anledningen til å si takk til disse personene.

Den første jeg vil takke er min datter Kristina, som har vært min gode støttespiller gjennom hele denne prosessen. Hadde det ikke vært for denne støtten, troen på at dette kan gå, og ikke minst all oversettingen av engelske tekster, hadde jeg ikke klart å fullføre.

Videre vil jeg gjerne få takke min veileder Anita Valenta som har stilt opp for meg og bidratt med mange gode råd underveis. Jeg er svært takknemlig for alle tilbakemeldingene jeg har fått gjennom hele prosessen fra vi startet og frem til innlevering.

Jeg vil også gi en takk til elevene og foreldrene som deltok og gjorde det mulig for meg å utføre denne studien. En annen takk går til min mann Ole Even, som har stått der i medvind og motvind. Det har vært mye frustrasjon og fortvilelse, men nå er jeg endelig i mål. Takk!

Anita Normann

Kyrksæterøra, mai 2019

Innhold

Figurer

1 Innledning

Høsten 2020 vil norske skoler måtte forholde seg til ny læreplan i matematikk og det som står der. I denne planen vektlegges matematiske representasjonsformer. Eksempler på representasjonsformer kan være symboler, tekstoppgaver, tegninger, figurer, tabeller og/eller funksjoner. I den nye lærerplanen har representasjon og kommunikasjon fått et eget kapittel under det som blir kalt kjerneelementer. Lærerne vil måtte forholde seg til det som blir kalt kjerneelement i de forskjellige fagene. Litt seinere i denne innledningen vil jeg vise hva Utdanningsdirektoratet nå vektlegger under kapitlet representasjoner og kommunikasjon. Representasjoner og bruken av representasjonsformene er hovedtemaet i denne oppgaven.

1.1 Bakgrunn for emnet og presentasjon av emnet

Flere av de nye læreverkene som brukes i skolen, bruker ulike semiotiske representasjoner i arbeid med tall. Bøkene er lagt opp til elevsamtaler rundt for eksempel tallenes representasjoner. Oppgavene kan være av typen «skriv denne mengden (eksempel bilde av epler) med tall, tegn riktig mengde eller at elevene skal finne riktig mengde til riktig tall (for eksempel bilde av 3 ballonger og symbolet 3».

Elevene kan finne det vanskelig å bevege seg fra en representasjon til en annen. Med det menes det at det kan være vanskelig for elevene å forstå at mengden tre og symbolet tre symboliserer det samme, men er to forskjellige representasjoner av det samme matematiske objektet, altså i dette eksemplet tallet tre. Elevene syns for eksempel at det kan være utfordrende å finne «tallvenner». Med det mener jeg at det ikke er innlysende for elevene at eksempelvis tallet ti kan skrives som 8+2, 3+7, 5 + 5 osv. «Tallvenner» er eksempler på forskjellige representasjoner av ett og samme tall, men representasjoner i samme semiotiske system. En kan si at alle representasjonene er inndelt i systemer ut fra sin karakter. Bruk av forskjellige representasjoner og representasjonssystemer, bidrar til at eleven lettere skal kunne gjennomføre et matematisk oppdrag. Som nevnt tidligere kan «tallvenner» oppleves utfordrende for elevene. Denne utfordringen reduseres om en benytter andre representasjoner fra andre representasjonssystemer. Eksempler på dette er bruk av konkreter. En kan bruke fingrene til å lære tallvennene til tallet ti. I dette tilfellet bruker man symbolene «10 =» og fingrene for å finne for eksempel at «10 = 5 + 5 = 1 + 9 osv.». Dette er eksempler på bruk av forskjellige representasjoner, som er i ulike semiotiske systemer. Symboler som tall eller plusstegnet er en type semiotisk system, mens konkreter som fingre er et annet semiotisk system. En kontekst som for eksempel regnefortelling eller tegninger som støtte for eleven, er eksempler på to andre semiotiske systemer som benyttes i matematikken. Dette vil jeg utdype ytterlige i teorikapitlet.

Under beskrivelsen av de grunnleggende ferdigheter i matematikken, i LK06 for 2. trinn står det at å kunne utrykke seg muntlig og skriftlig, lese, og rekne i matematikken, innebærer blant annet å lage tegninger, figurer, tabeller og diagrammer, og at en bruker det matematiske symbolspråket (Utdanningsdirektoratet, 2016). Dette er eksempler på ulike representasjonssystemer. Mange har uttalt seg om matematiske representasjoner, hva det betyr, hvor viktig det er og hvor sårbart det er om en ikke mestrer eller evner å se og bruke de forskjellige representasjonssystemene. Det er dette denne oppgaven vil handle om: Elevers bruk av representasjoner.

Regning som grunnleggende ferdighet innebærer ifølge Rammeverket for grunnleggende ferdigheter, å bruke matematikk på en rekke livsområder. "Å kunne regne innebærer å resonnere og bruke matematiske begreper, fremgangsmåter, fakta og verktøy for å løse problemer og for å skrive, forklare og forutse hva som skjer. Det innebærer å gjenkjenne regning i ulike kontekster, stille spørsmål av matematisk karakter, velge holdbare metoder når problemene skal løses, være i stand til å gjennomføre dem og tolke gyldigheten og rekkevidden av resultatene" (Kunnskapsdepartementet, 2016)

Hva betyr «å gjenkjenne regning i ulike kontekster» eller å «velge holdbare metoder når problemet skal løses»?

I den nye læreplanen har dette med representasjonsbruk fått sin egen plass, som et eget kjerneelement. Dette kjerneelementet heter «representasjon og kommunikasjon». Vi skal her se et utklipp fra kjerneelementet «representasjon og kommunikasjon» i den nye lærerplanen og hva som vektlegges i dette.

MATEMATIKK FELLESFAG:

Kjerneelementet *representasjon og kommunikasjon* innebærer at matematikk har sitt eget språk som skiller seg klart fra dagligspråket. Elevene må få mulighet til å bruke matematiske begreper i ulike sammenhenger gjennom egne erfaringer og matematiske samtaler. Elevene må kunne forklare valgt fremgangsmåte og kunne begrunne svarene sine. Det innebærer også å kunne oversette mellom det matematiske symbolspråket og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjonsformer.

Sentrale begreper, metoder, tenkemåter, kunnskapsområder og uttrykksformer i kjerneelementet

1.-4. trinn | 5.-7. trinn | 8.-10. trinn | Vg1

- utvikle et matematisk språk gjennom samtaler, argumentasjon og refleksjon
- veksle mellom hensiktsmessige representasjonsformer som symboler, figurer, tegninger, grafiske framstillinger, tabeller, diagrammer, verbale uttrykk, konkreter
- forstå sammenhenger mellom forskjellige representasjonsformer

Figur 1: Utdrag fra kjerneelementet «representasjon og kommunikasjon» i den nye lærerplanen

Å skape en dyp forståelse for hvordan matematiske utfordringer kan representeres eller benyttes, er helt essensielt for å utvide og utvikle matematisk forståelse og kompetanse. Å forstå hva tallsymbolene betyr, hva de representerer og hvordan tall skrives anses som nødvendig i dagens informasjonssamfunn.

Som førsteårsstudent på masterutdanningen leste vi artikler som omhandlet akkurat dette med elevers utfordringer med endring av representasjonsformer i matematikken.

Raymond Duval har skrevet mange artikler om elever og representasjonsbruk. Han har i sine studier studert hvordan vi som lærere kan forstå vanskelighetene, ofte uoverstigelige, som mange elever har med forståelse av matematikk. Hva er arten av disse vanskelighetene? Hvor er de plassert? De er både en pedagogisk utfordring i klasserommet og en teoretisk utfordring for å undersøke utvikling og læring av matematisk kunnskap. Prosessene for matematisk kunnskapsoppkjøp er så komplekse at de ser ut som helt forskjellige tilnærminger (Duval, 2006 s. 103). Fellesnevneren i alle artiklene er bruken av begrepet representasjon, for å karakterisere hva slags fenomener som oppstår i en kunnskapsprosess eller som utgjør den. Denne grunnleggende forestillingen om representasjoner er veldig gammel og nøyaktig. En representasjon er del i et semiotisk system, og er noe som står for noe annet (Duval, 2006).

Som matematikklærer er man en av de viktigste personene når det kommer til elevers matematiske utvikling. Jeg som matematikklærer er med på å forme elevenes grunnpilar for videre matematisk utvikling og forståelse. Jeg har derfor valgt å se på matematikkfaget og hvilken kompetanse elevene innehar i løpet av småtrinnet. I løpet av studietiden ble jeg veldig fasinert av funnene Ronald Duval gjorde. Hans studier av elevers arbeid med representasjoner, og overgangene mellom disse representasjonene, fasinerte meg så mye at jeg ønsker å utforske dette nærmere. Jeg anser det som viktig, at jeg som lærer i matematikk, får økt innsikt i elevenes arbeid med representasjoner i matematikken. Jeg vil prøve å finne ut hvilken kompetanse elevene har når de arbeider med et matematisk problem og skal løse det ved hjelp av forskjellige representasjoner. Ut fra innholdet i den nye læreplanen kan man se at de som har forfattet den også anser dette som viktige punkter. Jeg velger å utforske dette temaet ved å se på kjennetegn og utfordringer hos elevene, når de beveger seg mellom de forskjellige representasjonsformene.

1.2 Forskningsspørsmål

For å kunne besvare forskningsspørsmålet på en helhetlig måte, vil jeg i teoridelen beskrive ulike aspekter ved matematiske representasjoner og overgangen mellom dem. Jeg vil først og fremst trekke inn Raymond Duval sine funn om matematiske representasjoner, og overgangen mellom disse. Duval sine artikler og hans funn vil være rammeverket for denne oppgaven (Duva,l 1999, 2002 og 2006). Jeg vil også støtte meg til Kilpatrick et al. sine uttalelser om at det også kan være vanlig å vise til flere ulike representasjoner for matematiske objekter og betydningen av egenskapene ved representasjonene (Kilpatrick et al., 2001, s.19).

Forskningsspørsmålet for denne oppgaven blir derfor: Hva kjennetegner arbeid med tekstoppgaver hos elever på småtrinnet og hvilke utfordringer kan oppstå når de transformerer fra hverdagskontekst til tall, tallinje og konkreter?

For å finne svar på dette spørsmålet, om det i hele tatt finnes et enkelt svar på det, vil jeg jobbe tett på elevene i ulike settinger. Jeg vil aktivt observere elevene og stille oppfølgingsspørsmål når de jobber med ulike matematiske oppgave jeg har utformet for dette formålet. Jeg har valgt å forske på mine egne elever, med et kvalitativt utgangspunkt, der jeg deltar og observerer når elevene jobber med oppgaver jeg har utformet. Jeg velger kvalitativ forskningsstudie fordi jeg ønsker å oppnå økt kunnskap innenfor et begrenset fagområde, der små grupper av elever er i fokus (Moen &Karlsdottir, 2011, s. 9). Resultatet av dette arbeidet blir analysert opp imot rammeverkene og/ eller teorigrunnlaget jeg baserer studien min på, med den hensikt å angi hva som kjennetegner elevenes bruk av representasjoner og eventuelle utfordringer endring av representasjonsbruk kan bety. Utdrag fra gruppedialoger i form av transkripsjoner og elevarbeid vil bli presentert. I undersøkelsen har elevene fått arbeidsoppgaver som har til hensikt å gi meg svar på elevenes kjennetegn og utfordringer i arbeid med representasjonsformer.

1.3 Oppbygning av studien

I det følgende kapitlet vil jeg gi en beskrivelse av forskningen min, og hvordan den trådde frem. Kapitlene vil beskrive hvordan jeg tilnærmet meg forskningsspørsmålet og tilhørende funn. Denne masteroppgaven er delt inn i kapitlene: innledning, teori, metode, analyse, drøfting og avsluttende refleksjoner. Etter dette innledningskapittelet vil jeg gå nærmere inn på teorigrunnlaget studien bygger på. Med utgangspunkt i hva jeg ønsker å finne svar på i denne undersøkelsen, vil jeg i teorikapittelet først presentere hva som tidligere er skrevet om matematiske representasjoner og da spesielt hva kjennetegner elevenes arbeid i overgangene mellom representasjonene. Jeg vil videre i teorikapittelet presentere rammeverkene jeg har valgt å støtte meg til. Innledningsvis presenteres Duval sine funn om matematiske representasjoner, og Kilpatrick et al. sine studier om betydningen av representasjonens egenskaper (Duval, 2006) (Kilpatrick et al., 2001).

Før jeg velger å skrive om resultatet av analysen og den empiriske undersøkelsen, vil jeg utdype hvordan dette arbeidet ble gjennomført og hvilken metode jeg benyttet meg av. Under kapitlet metode begrunner jeg forskningsmetodene som er brukt. Jeg har gjort rede for den teoretiske og metodiske tilnærmingen til studien, samt beskrevet konteksten elevene befant seg i. I tillegg har jeg beskrevet gjennomføringen av datainnsamlingen og hvordan jeg har analysert datamaterialet. Til slutt har jeg drøftet prosjektets pålitelighet og troverdighet, samt etiske og metodiske utfordringer.

Etter kapitlet med metodebruken, velger jeg å skrive analysen eller empirisk undersøkelse som den også ofte blir kalt. I kapitlet analyse har jeg analysert elevenes arbeid. Det være seg lydopptak fra deres arbeid med oppgaver gitt muntlig og skriftlig av meg eller skriftlig elevarbeid og deres utsagn. Videre har jeg presentert mine analyser av deltakernes sitt arbeid med representasjonsbruk i situasjoner med flersifrede tall. Dette gjennom samtalene vi hadde, hvilke overganger som kommer til uttrykk og hvilke begreper som blir konkretisert. Samtidig løfter jeg frem mine funn og drøfter disse med utgangspunkt i forskningsspørsmålet i denne oppgaven. Avslutningsvis vil jeg drøfte og trekke ut essensen av resultatene jeg fant i analysen og helt til slutt konkludere i en avslutning.

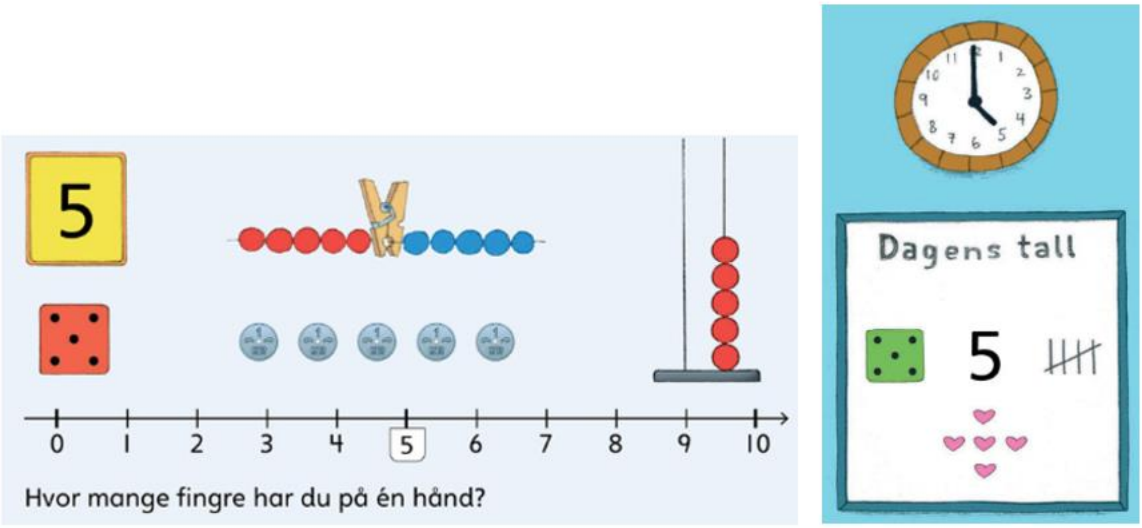
2 Teoretisk rammeverk

Fokuset i denne studien vil være hva som *kjennetegner* prosessen elevene bruker når de oversetter en tekstoppgave som hverdagskontekst om til matematikk, og *utfordringer* elevene utsettes for under denne prosessen. Hovedfokuset med dette kapitel vil være å forklare hva representasjoner i matematikken er og hva Duval mener med semiotiske representasjoner og semiotiske systemer. Jeg vil også forklare prosessen som foregår ved transformasjon av semiotiske representasjoner. Avslutningsvis i dette kapitlet vil jeg si noe om tidligere studier og funn av transformering mellom semiotiske representasjoner.

Duval sine funn går på kognitive krav og hvilken forståelse som kreves når det jobbes med overganger mellom ulike representasjoner i matematikken (Duval, 2006). Her tenkes overgangen mellom representasjoner som for eksempel tekstoppgaver, symbolske tall, tallinje eller centikuber. Begrepet representasjoner i matematikken vil jeg forklare mer utfyllende seinere i dette kapitlet. Kognitive krav sier noe om intellektuelle krav (Imsen, 2005, s. 35). I følge Imsen omfatter kognitiv psykologi hvordan en skaper sammenhenger, hvordan vi lærer, hvordan vi forstår og lignende. Duval bruker de semiotiske systemene til å kunne analysere både den matematiske aktiviteten og å se indirekte på elevenes forståelse (Duval, 2006). Jeg vil bruke neste delkapittel til å forklare representasjoner i matematikken, semiotiske representasjoner og overganger. Den prosessen som skjer i overgangen mellom de ulike semiotiske representasjonene kalles av Duval for transformering (Duval, 2006). Noen omtaler det som omdannelse, konvertering, omkoding ol. I dette forskningsprosjektet vil jeg konsekvent bruke Duval sitt uttrykk og hans betydning av transformering mellom ulike semiotiske representasjoner.

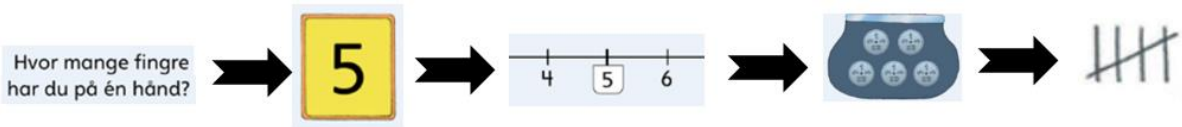
2.1 Representasjoner i matematikken

Før jeg går videre i oppgaven, vil jeg forklare og vise eksempler på hva matematiske representasjoner kan være og hva det vil si å transformere. Forklaringene som kommer står til figuren under, se figur 2. Dette er helt vanlige eksempler på ulike representasjonsformer hentet fra et ordinært matematikkverk i skolen i dag. Her ser vi tallet fem representert på flere måter. Det matematiske objektet vil være tallet fem. Et matematisk objekt er abstrakt og kun tilgjengelig via representasjoner (Duval, 2006). Eksempler på matematiske objekter er addisjon, forskjellige symboler, primtall, stigningstall ol. I neste figur ser vi eksempler på ti forskjellige matematiske representasjoner av tallet fem. Tallet fem er her representert som symbolet fem, fem på tallinjen, fem kuler, fem mynter, fem prikker, fem streker, fem hjerter, klokken fem og nederst til høyre som en kontekst. Det som i figur 2 er mynter og kuler, kan sies å være forskjellige representasjoner som vi senere skal få dypere kjennskap til. Vi skal senere få forklaring på hvordan representasjonene settes i system. Tallinje og symbolet «5» er eksempler på to andre typer av matematiske representasjoner, i andre systemer. Dette er eksempler på det Duval omtaler som semiotiske representasjoner i matematikk, der de semiotiske representasjonene er satt i systemer, kalt semiotiske systemer (Duval, 2006).



Figur 2: Eksempler på ulike representasjoner av objektet fem. Kilde: Matematikkverket Radius 1A.

Figur 3 under viser eksempler på fem forskjellige semiotiske systemer av samme matematiske objekt, og det er tallet fem. Det være seg tekstoppgave, symbol, tallinje, konkreter og ikonisk tegning.



Figur 3: Eksempler på forskjellige semiotiske systemer av samme matematiske objekt. Kilde: Matematikkverket Radius 1A

Overgangen mellom disse representasjonene, som ligger i forskjellige semiotiske systemer, er den prosessen Duval omtaler som transformerig (Duval, 2006).

De svarte pilene skal indikere det kognetive aspektet, altså hva som skjer i hodet hos eleven, hva eleven sanser, hvilke sammenhenger han ser når han beveger seg fra en representasjon til en annen eller fra et system til et annet. Hva skjer med tankeprosessene hos eleven når eleven foretar en transformasjon? Dette vil jeg gå nærmere inn på seinere i dette kapitlet. Knyttet til forskningsspørsmålet og denne studien, handler dette rett og slett om å lete i den gitte tekstoppgaven som hverdagskonteksten etter vesentlige holdepunkt slik at man til slutt kan utføre matematisk operasjoner. Det er ikke svaret i seg selv som er det interessante, men det som skjer hos eleven under endringen av representasjonsform. Helt til venstre i figur 3 ser vi et eksempel på en tekstoppgave med hverdagslig kontekst. Svaret på denne konteksten er i figur 3 representert som svar gitt med forskjellige representasjoner. Det er dette min studie omhandler, når jeg innledningsvis spør: *Hva kjennetegner arbeid med tekstoppgaver hos elever på småtrinnet og hvilke utfordringer kan oppstå når de transformerer fra hverdagskontekst til tall, tallinje og konkreter?*

Jeg vil benytte meg av noen teoretiske verktøy for å oppnå forståelse og innsikt i hvordan elever arbeider med transformasjoner fra en tekstoppgave som hverdagskontekst til andre matematiske representasjonsformer. Som tidligere nevnt vil jeg kunne identifisere kjennetegn og utfordringer ved transformering mellom representasjoner og mellom semiotiske systemer. Jeg vil nå gå nærmere inn på Duval sitt rammeverk og hva han sier om semiotiske representasjoner i matematikken (Duval, 2006). Disse funnene vil jeg kombinere med det Kilpatrick et al. sier om konkreter som et eget semiotisk system (Kilpatrick et al., 2011).

2.2 Semiotiske representasjoner og semiotiske systemer

Duval kaller de representasjonene som er *typiske i matematikkdiskursen* for *semiotiske representasjoner*. En kan si at matematikkdiskurs er matematikkultur, matematikksamtalen, matematikkdiskusjoner ol. Duval trekker fram tre punkter som skiller matematikk fra andre fag (Duval, 2006). Det første er avhengigheten og viktigheten av semiotiske representasjoner for å utvikle matematisk tankegang. Han hevder at ingen matematisk prosess kan utføres uten å bruke former for semiotiske representasjoner. Videre fremhever han at matematiske objekter ikke er til å ta og føle på og dermed kan matematikk fort bli for abstrakt. Elevene må klare å skille mellom semiotiske representasjoner og matematiske objekter. Han hevder at det finnes kun en inngang til matematisk forståelse og det er via semiotiske representasjoner. Det aller siste han trekker fram er at matematikk er det faget som inneholder den største basen semiotiske representasjoner. Å kunne/vite om en type semiotisk representasjon holder ikke. Duval skriver at ulike semiotiske representasjoner viser forskjellige aspekter av et og samme begrep. Han skriver videre at et og samme objekt kan være ugjenkjennbart i de ulike representasjonsformene det opptrer i. Et eksempel der objektene opptrer helt forskjellig er at 4 kan fremstå som $2x + 5 = 13$. En ser ikke umiddelbart at dette er to representasjoner av samme objekt. Duval skiller videre mellom semiotiske representasjoner og semiotiske systemer (Duval, 2006). Jeg vil til å begynne med i dette kapitlet si noe generelt om semiotiske representasjoner som et slags fellesbegrep, for så å gå i dybden og forklare forskjellen mellom semiotiske representasjoner og semiotiske systemer.

I matematiske aktiviteter må semiotiske representasjoner brukes, og valget går på hvilken type semiotisk representasjon som skal brukes. I denne delen av teorikapitlet skal jeg utdype Duval sitt rammeverk, der jeg prøver å gi en forklaring på hva *semiotiske representasjoner og semiotiske systemer* er. Han skriver at: «A representation is something that stands for something else» (Duval, 2006, s. 103). Han hevder at vi i matematikken er nødt til å bruke semiotiske representasjoner for å uttrykke matematiske objekter. Det er viktig å påpeke at de semiotiske representasjonene ikke må forveksles med det matematiske objektet (Duval, 2006, s. 107). Det at den lærende skal skille mellom semiotiske representasjoner og det matematiske objektet er en utfordring. Dette fordi en ikke får tilgang til det matematiske objektet uten de semiotiske representasjonene. Det vil dermed være viktig å kunne gå fra en semiotisk representasjon til en annen for at matematisk læring skal ha framgang. Enkelte matematiske objekter eller prosesser er enklere å representere enn andre. Vi kan med andre ord si at de matematiske semiotiske representasjonene formidler det matematiske objektet, og det er transformeringen mellom disse semiotiske representasjonene som utgjør hovedtemaet i denne oppgaven. Som sagt vil jeg forklare hva semiotiske representasjoner i matematikken er, før jeg senere i delkapittel forklarer dypere hva transformasjon mellom semiotiske representasjoner i matematikken betyr.

Jeg vil her gi en liten repetisjon på det jeg innledet dette kapitlet med, altså det jeg skrev om representasjoner og matematiske objekter (figurene 2 og 3).

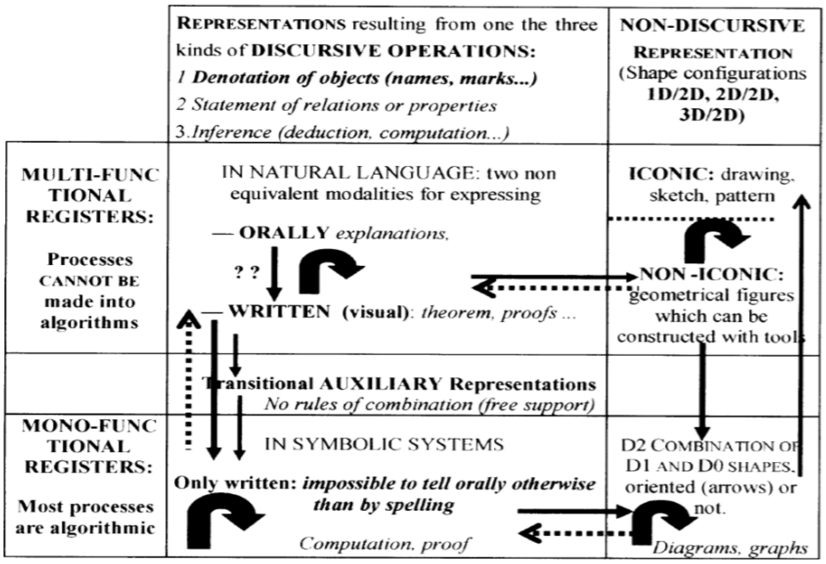
Denne figuren illustrerer hvordan tallet tretten kan fremstå med forskjellige semiotiske representasjoner, og er et godt bilde på semiotiske representasjoner for bruk på barnetrinnet. Sammenligner vi denne figuren med tabellen (se figur 5) i artikkelen til Duval, ser vi her eksempler på naturlig språk (tretten), notasjonssystem (13), geometriske figurer, ikonisk tegning (tellestreker) og konkreter (mynter) (Duval 2006, s. 110).

Figur 4: Tallet tretten vist med forskjellige representasjoner. Kilde: https://www.teacherspayteachers.com/Product/Tallplakater

Her tangerer jeg begynnelsen av en forklaring på semiotiske systemer. Denne forklaringen vil jeg utdype ytterligere i neste delkapittel.

Matematiske objekter kan beskrives som noe som er abstrakte, uobserverbare og ikke-fysiske. Naturens objekter gjør oss avhengige av representasjoner for at vi skal kunne få tilgang til dem og kunne lære om dem. Objekter i matematikk vil i motsetning til objekter i andre fag som fysikk, kjemi og biologi aldri være tilgjengelige via opplevelser, observasjoner eller ved hjelp av instrumenter som for eksempel mikroskop, teleskop og måleapparater. For å få tilgang til matematiske objekter er vi nødt til å benytte oss av det Duval omtaler som semiotiske representasjoner (Duval, 2006). De matematiske representasjonene representerer eller formidler det matematiske objektet. Et matematisk objekt kan for eksempel være et tall, en mengde, en funksjon, en tallfølge eller et symbolsk utrykk som pluss, minus, multiplikasjon, brøk eller som figuren over viser, tallet 13. Siden de matematiske objektene ikke kan studeres ved hjelp av sanser eller instrumenter, er bruk av representasjoner den eneste måten vi kan få tilgang til dem på. Gjennom bruk av språk og andre representasjoner, kan vi altså uttrykke og gi betydning til de matematiske objektene. Vi benytter oss av en rekke ulike representasjoner for å uttrykke og kommunisere matematiske ideer. Semiotiske representasjoner i matematikken hjelper oss med å utvikle, dele og bevare matematiske tanker og ideer. Noen av representasjonene som for eksempel representasjoner i form av naturlig språk, er vanlige i all slags tenking, mens andre typer som algebraisk notasjon (regneuttrykk bestående av tall og symboler), er mer spesifikke for matematikk. Semiotiske representasjoner kan altså være naturlig språk (både skriftlig og muntlig), men også ulike tegn, symboler, tabeller og figurer ol. som vi bruker spesielt i matematikk. Som nevnt innledningsvis til dette kapitlet skiller Duval mellom semiotiske representasjoner og semiotiske systemer (Duval, 2006). I beskrivelsen av figur 4, berørte jeg starten på en forklaring av hva semiotiske systemer er. Jeg vil i neste delkapittel gi en forklaring på forskjellen mellom semiotiske representasjoner og semiotiske system. Dette på bakgrunn av Duval sitt rammeverk og det han har uttalt i sine artikler.

For ett og samme objekt finnes det som nevnt tidligere flere forskjellige semiotiske representasjoner og semiotiske systemer. For å illustrere forskjellene mellom semiotiske representasjoner og semiotiske systemer, vil jeg bruke flere figurer. Jeg vil starte med å beskrive figuren fra Duval sin artikkel (Duval, 2006 s. 110). Videre vil jeg vise figurer tilpasset Duval sin figur og figurer hentet fra egen studie. Figurene viser eksempler på hvordan det matematiske objektet gjøres tilgjengelig og mer forståelig ved å bruke flere ulike semiotiske representasjoner fra forskjellige semiotiske systemer.

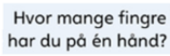
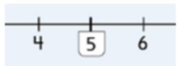


Figur 5: Eksempler på ulike representasjonssystemer, Duval (Duval 2006, s. 110).

På bakgrunn av representasjonenes egenskaper og karakter har Duval laget denne oversikten (Duval, 2006, s. 110). Enkelt sagt deler han forskjellige representasjoner inn i forskjellige systemer. Duval skiller her mellom fire forskjellige typer semiotiske systemer, hvor de semiotiske representasjonene grupperes i de ulike systemene etter hvilke egenskaper representasjonene har (Duval, 2006, s. 110). De fire systemene som han viser til er:

- Naturlig språk
- Illustrasjoner
- Symbolspråk
- Tabeller/diagrammer/grafer

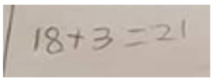
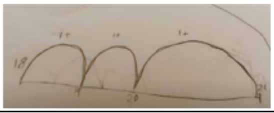
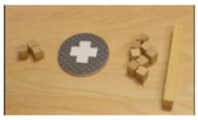
De matematiske prosessene kan foregå som mono - eller multi - funksjonelle semiotisk representasjoner. I en monofunksjonelt representasjon tar prosessene form som algoritmer, som for eksempel regnestykker med tall og symboler, mens i en multifunksjonel representasjon er det ikke mulig å transformere prosessene til lignende algoritmer (Duval, 2006). De monofunksjonelle systemene er spesielle for matematikken og brukes ikke andre steder. Mens de multifunksjonelle representasjonene brukes i flere andre sammenhenger, som for eksempel i kommunikasjon eller informasjonsbehandling, i tillegg til matematikken. Jeg vil her gi min egen oversettelse av Duval sin figur (figur 5) og de forskjellige systemene. Øverst i figuren finner vi de multifunksjonelle representasjonene. Prosesser i disse systemene kan ikke gjøres om til algoritmer. Øverst til venstre i figuren finner vi språk som enten uttrykkes muntlig eller skriftlig. Dette er muntlige forklaringer og skriftlige begrunnelser og/eller bevis. Tekstoppgaver vil for eksempel være en semiotisk representasjon som vil falle inn under dette systemet. Øverst til høyre i figuren finner vi visuelle figurer som for eksempel tegninger eller geometriske figurer. Nederst i figuren finner vi de monofunksjonelle representasjonene der de fleste prosessene er algoritmer. Til venstre i figuren har vi symbolsystemet, der matematiske notasjoner brukes. Dette kan for eksempel være beregninger eller bevis der matematiske notasjoner som for eksempel symboler er brukt. Nederst til høyre i figuren finner vi diagrammer eller grafer ofte representert i et koordinatsystem (Duval, 2006). Gjennom denne inndelingen viser Duval til det mangfoldet og hvilke muligheter som finnes innad i et semiotisk system. Jeg vil her vise til en selvkomponert figur eller en kan kanskje si at den er tilpasset Duval sin figur, slik jeg forstår figuren hans.

«Multifunktionell diskursiv representasjon» Prosessen kan ikke lages til en algoritme, for eksempel utregninger med tall og symboler.	**Naturlig språk både** skriftlig og muntlig. Dette kan være tekstoppgaver muntlige forklaringer, skriftlige begrunnelser og bevis. 	**Geometriske figurer** **ikonisk** tegning og mønster  **Ikke ikoniske** konstruksjoner med passer og linjal
«Monofuntionell diskursiv representasjon» De fleste prosesser er algoritmer, for eksempel utregninger med tall og symboler.	**Skriftlige symbolsk system (notasjonssystemet)** som utregning med tallsymboler og bevis. 	**Kartesiske grafer.** Diagrammer og grafer. 

Figur 6: Egen figur som er oversatt og tilpasset fra Duval sin artikkel (Duval, 2006).

Ulikt system gir ulike muligheter. Det er dette vi benytter for å få tilgang til de matematiske objektene. De ulike systemene kan betegne samme matematiske objekt, men på ulike måter, derav navnet semiotiske system. Duval påpeker viktigheten av at en ikke forveksler den semiotiske representasjonen med det matematiske objektet (Duval, 1999, 2006). Dette omtaler han som det kognitive paradokset (Duval, 2006, s. 107). Jeg har laget noen figurer som passer til det jeg har beskrevet i dette kapitlet, samt at noen av figurene er tilpasset og hentet fra studien min. Figuren under (figur 7) viser forskjellige semiotiske representasjoner og semiotiske systemer. De forskjellige semiotiske representasjonene og semiotiske systemene er forsøkt tilpasset Duval sin figur (Duval, 2006 s. 110).

Figuren vi nå skal få se er fra egen studie, men den har også sitt utspring fra Duval sin figur (Duval, 2006 s. 110). Den viser semiotiske representasjoner hentet fra egen studie, og satt i semiotiske systemer. Denne figuren viser fire forskjellige semiotiske representasjoner av 18 + 3. Disse representasjonen er inndelt i fire semiotiske systemer.

Naturlig tale/ Språk/hverdagslig kontekst	Symboler (notasjonssystemet)	Tallinje (grafer, diagram)	Konkreter
Multifunktionell representasjon	*Monofunktionell representasjon*	*Monofunktionell representasjon*	*Multifunktionell representasjon*
En dag så Per 18 gule blomster og 3 røde, utenfor vinduet. Hvor mange blomster så han til sammen?			

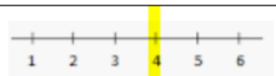
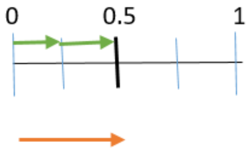
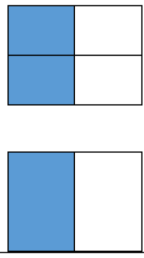
Figur 7: Semiotiske system av 18 + 3, hentet fra denne studien

De semiotiske systemene som brukes i figuren over er kontekst/naturlig muntlig språk, tallsymboler, figuren tallinje og konkreter. Vi kan si at de ulike semiotiske systemene «står for» det matematiske objektet, siden samtlige representerer samme objekt. I dette tilfellet er det matematiske objektet 18 + 3, og ut i fra figuren ser vi at et matematisk objekt kan ha nokså forskjellige typer semiotiske representasjoner

I forbindelse med den matematiske prosesseringen har også de ulike semiotiske systemene ulike funksjoner. Symbolsystemet, grafer og diagrammer fremmer den kognitive funksjonen av prosessering, hvor disse systemene er bygd opp på en måte som gjør at en kan følge matematiske algoritmer for å komme fram til løsningen av ulike problemstillinger. Eksempler på dette er når man manipulerer algebraiske symboluttrykk. På grunn av disse systemenes ensrettede funksjon, omtaler Duval det som monofunksjonelle systemer (Duval, 2006 s. 109-111). Det naturlige språket, de ikoniske og ikke-ikoniske systemene åpner derimot for flere typer kognitive prosesser, hvor en ikke lengre kan følge algoritmer for de matematiske prosesseringene. På denne måten åpner prosesseringene i disse systemene for at elevene blant annet kan ta i bruk kommunikasjon, fantasi og informasjonsprosessering som en del av den matematiske prosesseringen. Eksempler på dette er at regnestykket 3 + 8, kan få flere forskjellige kontekster som passer til seg. Det kan være som i denne studien, der Kari har tre røde og åtte gule drops, hvor mange har hun til sammen? Eller Mari er tre år og Ole er åtte år, hvor mye er de til sammen, eller hva er differansen? Siden disse systemene åpner for et rikere bruk av kognitive prosesser, omtaler Duval dem som multifunksjonelle representasjoner.

2.3 Transformasjon mellom semiotiske representasjoner

Transformasjon i matematisk sammenheng, med Duval sitt rammeverk som utgangspunkt, kan beskrives med ord som oversettelse, overgang, konvertering, «går fra/til» og lignende (Duval, 2006). Det betyr at en går fra en ting til noe annet. Det er her snakk om å transformere mellom semiotiske representasjoner, altså å gå fra en semiotisk representasjon til en annen. Eksempler på dette vises gjennom figuren under. Figuren viser fire forskjellige semiotiske systemer, der hvert av systemene igjen viser eksempler på semiotiske representasjoner som er i samme semiotiske system. Denne figuren er konstruert med utgangspunkt i figuren til Duval (Duval, 2006, s. 110).

«Multifunktionelle representasjoner» **Naturlig språk** (skriftlig og muntlig) **Tekstoppgave**	«Monofuntionelle representasjoner» **Skriftlige symbolsk system** **Tall**	«Monofuntionelle representasjoner» **Grafer** **Diagram** **Tallinje**	«Multifunktionell representasjoner» **Geometriske figurer** **Kakediagram**
Fire	2x + 5 = 13		
Null komma syttifem pluss null komma syttifem.	0.75 + 0.75		
To firedeler er lik en halv	2/4 = 1/2 = 0.5		

Figur 8: Eksempler på forskjellige matematiske objekt, representert med forskjellige semiotisk representasjoner, i forskjellige systemer

Med Duval sitt rammeverk som utgangspunkt, holder det ikke med «kun» denne overgangen, men den kognitive prosessen som skjer gjennom eller under denne overgangen. Når Duval i sine artikler omtaler transformasjon og transformasjonsprosesser, tenkes «hele» prosessen Duval (1999, 2002, 2006). Jeg vil benytte eksemplene fra figuren over for å beskrive denne komplekse prosessen. Det første eksemplet er flere semiotiske representasjoner på det matematiske objektet 4. Jeg vil si at det krever mye av en elev å se at fire og 2x + 5 = 13 er to forskjellige semiotiske representasjoner av samme objekt, altså 4. Andre semiotiske representasjoner på samme objekt, altså fire, er for eksempel tallinjen med punktet fire  eller mengden  fire. Det er denne prosessen, altså den kognitive prosessen som skjer hos eleven, som Duval omtaler som transformasjon mellom semiotisk representasjoner.

Ett og samme objekt kan som jeg har vist ovenfor ha flere semiotiske representasjoner og kan derfor være vanskelige for elevene å kjenne igjen. I følge Duval er evnen til eller de kognitive kravene som kreves for å kunne transformere mellom ulike semiotiske representasjoner, selve kjernen i all matematikk (Duval, 2006). Dette fordi alle matematiske prosesser involverer at man benytter seg av semiotiske representasjoner og erstatter en semiotisk representasjon med en annen. Dette gjør at transformasjoner mellom semiotiske representasjoner er helt avgjørende og en nødvendighet for at vi skal kunne utføre matematiske prosesser (Duval, 2006, s. 107). Å utvikle en dyp forståelse for matematikk innebærer at man klarer å se sammenhenger mellom de ulike semiotiske representasjonene. Duval poengterer at evnen til å transformere mellom de semiotiske representasjonene og da spesielt mellom semiotiske systemer, ofte er den kritiske delen for læring, og dette er nødvendig for å løse problemer i matematikken (Duval, 2006). Det er derfor viktig for elevene å arbeide med transformasjoner mellom semiotiske representasjoner for å støtte læringen (Duval, 2006). Det er flere med Duval som hevder dette. I følge Gersten et al. er en av hovedutfordringene for elever som «sliter» med matematikk, å se sammenhenger mellom de forskjellige semiotiske representasjonsformene i matematikken (Gersten et al., 2009). Duval påpeker viktigheten av å kunne koordinere ulike semiotiske representasjoner i matematikken (Duval, 1999). Han hevder faktisk at det er en stor sammenheng mellom å evne å transformere mellom forskjellige semiotiske representasjoner og god matematisk forståelse. Duval hevder at dersom elevene har dårlige koblinger mellom de ulike semiotiske representasjonene, bidrar dette til at elevene vil ha vansker med å skille ut hva som er matematisk relevant og ikke (Duval, 2006, s. 124-126). Elevene bruker forskjellige semiotiske representasjoner for å uttrykke matematiske ideer. Det å kunne transformere mellom semiotiske representasjoner er viktig for læring i faget, og Duval skiller mellom to ulike typer transformasjoner. Disse semiotiske representasjonene kan enten bearbeides eller transformeres (Duval, 2006). Behandling (oversatt fra treatments,) der transformasjoner gjøres innenfor et og samme semiotiske system, og omdannelse (oversatt fra conversions) der transformasjoner gjøres mellom ulike semiotiske systemer, men bevarer referansen til samme objekt (Duval, 2006, s. 111).

Det er viktig å understreke at transformasjoner alltid foregår mellom ulike representasjoner av samme element (Duval, 2006). Når elevene jobber med samme semiotiske system, for eksempel symboler, kalles det å bearbeide representasjonen. Jobber elevene derimot med for eksempel tellebrikker, tallinje og symboler, transformerer elevene mellom ulike semiotiske systemer, og da skjer transformasjonen i form av omdannelse. I min studie ønsker jeg primært å undersøke nærmere hva som kjennetegner elevenes arbeid i transformasjonen mellom ulike semiotiske systemer, altså transformasjoner av typen omdannelse.

2.3.1 Ulike transformasjoner

Behandlinger – (treatments) er transformasjoner av representasjoner som skjer innenfor samme system (Duval, 2006, s. 111). Følgende er eksempler på transformasjon som behandling innenfor systemet symboler

$2 + 2 = 1 + 3 = 5 - 1 = 4.$

Et annet eksempel med det semiotiske systemet symboler og samme matematiske objektet 4 er

$4 = 1.5 + 2.5 = 3 + 0.5 + 2 + 0.5 = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 1 + 1 + 1$

Et eksempel som er noe mer utfordrende, men fremdeles er en transformasjon som behandling, er eksemplet fra figuren over

$2x + 5 = 13$

$2x = 13 - 5$

$2x = 8$

$x = 4$

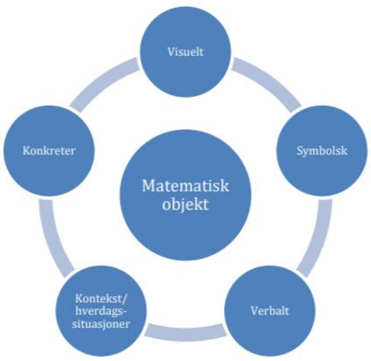
Her ser vi flere eksempler på manipuleringer og forenklinger av et matematisk uttrykk eller matematisk regnestykke, innenfor det semiotiske systemet symboler. Dette er transformasjoner som behandlinger, der man gjennomfører transformasjonene innenfor ett og samme semiotiske system. I prosessen med behandlinger er det matematiske objektet representert på forskjellige måter, men på ganske lignende måter, noe som gjør at elevene lettere er i stand til å kjenne igjen objektet (Duval, 2006). Som eksemplene viser, kan dette likevel være utfordrende nok.

Omdannelser (conversions) korresponderer til en transformasjon mellom ulike semiotiske system. Det er transformasjoner hvor man skifter mellom to ulike semiotiske systemer, uten å endre det matematiske objektet. Eksempel på omdanning kan være å oversette fra symboluttrykk til illustrasjon eller omvendt. Omdannelser er ifølge Duval en transformasjon som er mer kompleks enn behandlinger. Dette skyldes at en transformasjon mellom to forskjellige systemer stiller større kognitive krav til gjenkjennelse av det samme objektet (Duval, 2006, s. 111). Ofte er innholdet i representasjonene forskjellige som for eksempel transformasjon mellom tekstoppgave og uttrykk skrevet med symboler. Duval hevder at for å forstå transformasjon fullt ut i form av omdannelse og utføre transformasjonen mellom ulike semiotiske systemer, må man først distansere seg fra det representerte objektet og hvordan det først ble representert (Duval, 2006). Når man har gjort det, har man muligheten til å velge en annen måte å representere objektet på.

Et eksempel på dette kan være å se at tekstoppgaven «Om jeg og Per får fem kroner, har vi til sammen like mange kroner som Kari. Hvor mange kroner har jeg i utgangspunktet?» er det samme som $2x + 5 = 13$, uttrykt med symboler.

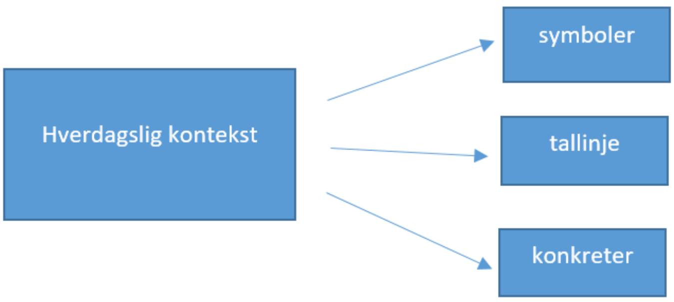
Mange elever har problemer med omdannelsen fra tekstoppgaver til symbolske uttrykk og omvendt. Dette gapet er det flere elever som ikke kommer seg over (Duval, 2006, s. 111). I studien min får vi se eksempler på tekstoppgaver som skal transformeres til tall, tallinje og centikuber. Duval skriver videre at man må koordinere de ulike semiotiske systemene som brukes for et objekt for å utvikle en matematisk forståelse for objektet. Uten en slik samordning, kan ikke elevene mobilisere ulike representasjoner i et samspill og utføre transformasjoner i form av omdannelse (Duval, 2006). Det som blir viktigst i undervisningen er ikke nødvendigvis å velge de beste semiotiske representasjonene, men å gjøre elevene i stand til å koble forskjellige måter å representere det matematiske innholdet på (Duval, 2006).

Av de to transformasjonstypene behandling og omdannelse (treatments og conversions), vektlegges de sistnevnte i denne studien: elevene skal arbeide med tekstoppgaver, elevene skal kunne finne løsninger ved hjelp av symboler, tallinje og konkreter (Duval, 2006, s. 111). Setter vi dette inn i Duval sin tabell, vil tekstoppgavene tilhøre det semiotiske systemet *naturlig språk,* mens det symbolske uttrykket vil tilhøre systemet *notasjonssystem og* tallinjen tilhører *diagrammer og grafer* (Duval 2006, s. 110). Konkreter har jeg valgt å ta med som et eget semiotisk system, da jeg finner konkreter sentralt for småtrinnet. Kilpatrick et al. beskriver for øvrig også konkreter som et eget semiotisk system (Kilpatrick et al., 2001). De forskjellige semiotiske systemene de viser til er «visuelt, symbolsk, verbalt, kontekst/hverdagssituasjoner og konkreter».



Figur 9: Ulike semiotiske system. Kilde: Representasjoner i matematikk (Svingen, 2018 s. 3)

Det semiotiske systemet konkreter er noe av det første elevene møter i skolen. De lærer matematikk ved å gå fra det konkrete, til det halvkonkret, for så å gå til det abstrakte. Derfor velger jeg å se på konkreter som et eget semiotisk system. Jeg er noe usikker på hva Duval mener om konkreter, men han hevder at det ikke er noen gitte regler for manipulering av dem (Duval, 2006, s 110 – 111). Han hevder i likhet med Kilpatrick et. al., at bruken av konkreter er avhengig av de som skal arbeide og tolke dem, og at de kan ses på som en hjelpende overgangspresentasjon (Kilpatrick et al., 2001, s. 353). Jeg tror ikke at Duval har noen begrensninger i forhold til antall eller typer av semiotiske representasjoner. Med bakgrunn i dette har jeg valgt å støtte meg til det Kilpatrick et al., skriver om konkreter som et eget semiotisk system. Han hevder at bruk av konkreter kan avdekke fremgangsmåter eller vise hvordan elevene tenker matematikk (Kilpatrick et al., 2001, s. 189). Oppsummert vil det hovedsakelig være fire forskjellige systemer i denne studien (se figur 10): naturlig språk som tekstoppgave av hverdagslig karakter, notasjonssystem som tall, diagrammer/grafer som tallinje og konkreter som centikuber. I denne studien vil det symbolske uttrykket være et regnestykke bestående av tall og operasjonssymboler som: ”+” og ”–”.

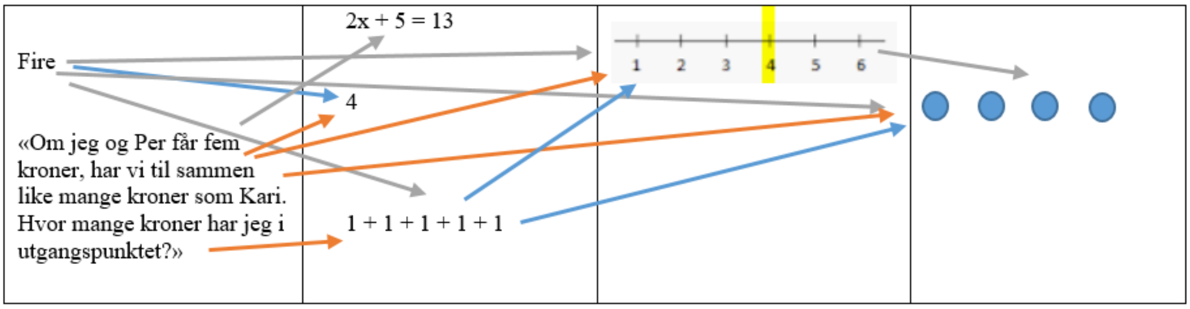


Figur 10: Oversikt over de semiotiske systemene i denne studien

2.3.2 Kongruent eller ikke - kongruent

Duval hevder at det finnes to ulike forhold mellom den opprinnelige semiotiske representasjonen og dens transformasjon til andre semiotiske representasjoner. Enten så er de kongruente eller så er de ikke det (Duval, 2006). Faktorer som beskriver dette kan være om det er mulig å transformere direkte fra den ene semiotiske representasjonen til den andre, eller om det ikke er det. Hvis det er en direkte oversettelse vil det være en til en relasjon mellom for eksempel ord og matematiske symboler. Duval påpeker også at elevenes vanskeligheter i transformasjonsprosesser er avhengige av relasjonen mellom den semiotiske representasjonen som er utgangspunktet for transformasjonsprosessen og den representasjonen elevene skal foreta transformeringen til (Duval, 2006, s. 121-124). Dette utdyper han med at det i enkelte tilfeller er mulig å foreta en mer eller mindre direkte transformasjon av de ulike bestanddelene i den opprinnelige representasjonen til den nye representasjonen. Duval omtaler dette som at det enten er kongruens eller ikke mellom de ulike semiotiske systemene i transformasjonsprosessen. Transformasjon mellom representasjoner som ikke er kongruente krever altså en større matematisk kunnskap hos eleven, siden det ikke er snakk om en direkte transformasjonsprosess mellom de ulike bestanddelene i de to representasjonene (Duval, 2006).

Ifølge Duval er det for mye fokus på kongruente transformasjoner i matematikken. Videre hevder han at det er ikke kongruente transformasjoner som viser seg for mange å være vanskelige (Duval, 2006). En transformasjon som har samme rekkefølge med det som er skrevet på et matematisk språk er kongruent og Duval anser dette som en lettere transformasjon enn en ikke - kongruent transformasjon der samme objekt opptrer på to forskjellige måter (Duval, 2006). I en kongruent transformasjon er det en til en relasjon mellom komponentene i de to semiotiske representasjonene, som tallordet «fem» og tallsymbolet «5». I andre tilfeller er det ingen direkte relasjon mellom komponentene i de to semiotiske systemene og transformasjonen vil da karakteriseres som ikke - kongruent (Duval, 2006). Eksempel på en ikke - kongruent transformasjon vil være tallordet «trettito» og dets tilhørende tallsymbol «32» og en kongruent transformasjon av tallet «5». «Trettito» er et sammensatt ord og en direkte relasjon mellom komponentene ville være 30 og 2, som gir tallet 302, (trehundredeogto), mens fem er en direkte oversettelse av tallet fem, som er 5. For å relatere dette til eksemplene jeg har vist tidligere, vil jeg vise ved hjelp av en figur andre eksempler på kongruente og ikke - kongruente transformasjoner. Pilene i denne figuren går begge veier. Der blåe er kongruente, røde er ikke - kongruente og gråe er delvis kongruente.



Figur 11: Eksempler på kongruente (blåe piler), ikke - kongruente (røde piler) og delvis kongruente (gråe piler) transformasjoner.

I noen av oppgavene kan elevene både gjøre kongruente og ikke - kongruente transformasjoner mellom de ulike semiotiske systemene. Elever ser ofte på to ulike representasjoner av samme matematiske objekt som to ulike matematiske objekt. Dette problemet gjør at elever finner det utfordrende å løse enkelte oppgaver. Da spesielt hvis det er en ikke - kongruent transformasjon mellom semiotiske system. Dette vil da også være med på å bestemme hvilken forståelse av matematikken som kommer til syne (Duval, 2006).

Duval hevder videre at semiotiske representasjoner ikke bare benyttes for å kommunisere mentale representasjoner, men også som et verktøy for å produsere ny kunnskap (Duval, 2006). Kilpatrick et al. i likhet med Duval hevder at det er viktig å ha kjennskap til, og å kunne vurdere hvilke representasjoner som egner seg, ut fra representasjonenes egenskaper og målet for oppgaven (Kilpatrick et.al., 2001) (Duval, 2006).

2.3.3 Elevers utfordringer med transformasjonen mellom semiotiske representasjoner

Transformasjoner fra for eksempel språk til symboler eller fra symboler til tallinje går ikke av seg selv. Duval har grundig tatt for seg elevers vanskeligheter med transformasjoner mellom semiotiske representasjoner (Duval, 2006). Det kan være vanskelig for elever å transformere informasjon mellom de ulike matematiske representasjonsformene, og da spesielt transformasjonen fra et naturlig språk. I tekstoppgaver kan det ofte være mye informasjon som eleven må bearbeide, tolke og strukturere. Oppgavene skal som oftest besvares ved bruk av et annet semiotisk system som for eksempel et symbolsk uttrykk, eller en visuell fremstilling. Det stilles ikke krav til at eleven *kun* må forstå essensen i oppgaven, men også et krav om at eleven må kunne strukturere og transformere informasjonen mellom flere matematiske semiotiske representasjoner. Duval hevder at forskjellige semiotiske representasjoner av et og samme matematisk objekt, kan gjøre det vanskelig for elevene å kjenne igjen det samme representerte objektet (Duval, 2006). Når det gjelder økt matematikkunnskap er det en viktig egenskap for elevene å kunne transformere mellom forskjellige semiotiske representasjoner, og det er dette studien min undersøker.

Duval hevder at det er utfordrende for elevene å gå fra å beskrive en sammenheng med naturlig språk til å representere den ved notasjon med bokstavsymboler (Duval, 2002, 2006). Et matematisk objekt kan ha forskjellige typer semiotiske representasjoner. Disse forskjellige semiotiske representasjonene bidrar på hver sin måte, slik at det matematiske objektet blir tilgjengelig for elevene. I matematikken har vi et mangfold av semiotiske representasjoner og systemer med ulike karakter, potensial og egenskaper. Som Kilpatrick et al. hevdet, hevder også Duval, at det vil være nyttig å bruke ulike representasjoner til de ulike formålene (Kilpatrick et al., 2001) (Duval, 2006). Hvilken representasjon en velger å bruke, kan gjøre arbeidet enklere for elevene og vanskeligere om man velger en lite egnet semiotisk representasjon. De matematiske representasjonene representerer eller formidler, derfor det matematiske objektet. Et matematisk objekt kan for eksempel være en funksjon, en tallfølge eller et symbolsk utrykk. Siden de matematiske objektene ikke kan studeres ved hjelp av sanser eller instrumenter, er bruk av representasjoner den eneste måten vi kan få tilgang til dem på. Gjennom bruk av språk og andre semiotiske representasjoner kan vi altså uttrykke og gi betydning til de matematiske objektene.

2.3.4 Egenskaper ved de ulike semiotiske representasjonene

Kilpatrick et al. hevder at egenskapene ved de ulike representasjonene er betydningsfulle (Kilpatrick et al., 2001 s. 99-100). I min studie, hvor jeg søker elevenes kjennetegn til og utfordringer ved å benytte flere semiotiske representasjoner ved situasjoner med hverdagslig kontekst i form av tekstoppgaver, vil dette være av betydning. Derfor kan jeg forstå at tellebrikker ikke er hensiktsmessig, ved for eksempel addisjon av flersifrede tall. Tallinje eller oppstilling av symboler, vil kanskje være et bedre alternativ for slike oppgaver.

I matematikken kommer transformasjon mellom semiotiske representasjoner først og fremst fram når en representasjon skal velges der det er enklest å gjennomføre transformasjonen av representasjoner innenfor samme semiotiske system. Det kan også komme fram hvis en annen semiotisk representasjon brukes som støtte til det første. For matematisk forståelse er det ifølge Duval viktig å kunne koordinere mellom flere ulike semiotiske representasjoner (Duval, 2006). Matematikkundervisningen legger ofte fokus på hvilken semiotisk representasjon, som best forklarer det matematiske objektet. Dette fører til at elevene kun rører overflaten av det matematiske objektet, og ikke er i stand til å skille ut hva som er matematisk relevant. Eleven ser det samme matematiske objektet i to ulike semiotiske representasjoner, og dermed kun tenker at den semiotiske representasjonen og det matematiske objektet er det samme (Duval, 2006).

For å vurdere synlighet kan man spørre, hvor enkelt kan man kan se det matematiske objektet gjennom representasjonen? Duval skriver at noen representasjoner er mer transparente enn andre (Duval, 1999, 2000, 2006). Med det mener han at ulike representasjoner viser forskjellige aspekter av et og samme objekt, og at et og samme objekt kan være mer eller mindre gjenkjennbart i de ulike representasjonene det opptrer i. Dette ut fra representasjonens gjennomsiktighet (transparent). «Ti - basemateriell» som centikuber er for eksempel mer transparent enn mynter (Svingen, 2018, s. 4). «Ti - basemateriell» er ferdiggruppert og forholdet mellom enere og tiere er synlige da de er proporsjonale, en tier er ti ganger større enn en ener. I min studie fikk elevene benytte «ti-basemateriell», som centikuber. Centikuber, pinner i bunter, kuler i skåler og tellebrikker er eksempler på proporsjonale konkreter. Det er ikke like innlysende at ti en-kronemynter er det samme som en tikronemynt. En tikronemynt er ikke ti ganger større enn en en-kronemynt. Hundrerutenett er mer transparent enn den symbolske notasjonen og det muntlige språket. I hundrerutenettet består en rad av ti ruter, mens både det muntlige språket og symbolsk notasjon krever at man har en felles forståelse av hva ordene betyr og hvordan symbolene skal tolkes (Svingen, 2018, s. 4).

Kilpatrick et al., hevder at de semiotiske representasjonenes egenskaper kan hjelpe oss å vurdere om representasjonens valg er hensiktsmessige eller ikke (Kilpatrick et al., 2001, s. 99 - 102). Hvilke egenskaper er det her snakk om? Kilpatrick et al., deler egenskapene inn i synlighet, effektivitet, generalitet, klarhet og presisjon (Kilpatrick et al., 2001, s. 99 - 102). For å vurdere synligheten kan en spørre: Hvor enkelt ser man den matematiske ideen gjennom representasjonen? Ofte blir vi anbefalt å bruke penger til å forklare posisjonssystemet, men er det egentlig en god semiotisk representasjon? Det er ikke lett å forstå at en tier er ti enkroninger. Jeg tenker at det er lettere for elevene å forstå at det er ti pinner i en tier-bunt. Det kan kanskje være lettere å forstå om man selv har telt og laget tier-bunter, for så igjen å lage hundrebunter. Dette kan elevene forholde seg til, og bruke som konkreter ved for eksempel addisjon og subtraksjon.

De semiotiske representasjonene en velger må nødvendigvis være effektive. Dette gjelder både for bruk og kommunikasjon. Symboler står her sentralt, gitt at en har felles forståelse av hva symbolene står for. Hva representerer de og hva kommuniserer de?

I arbeidet med ulike semiotiske representasjoner er det viktig at en utvikler representasjoner med en viss generalitet. Det betyr at semiotiske representasjoner kan være et hjelpemiddel for å utvikle forståelse når man blir introdusert for nye matematiske objekter.

De semiotiske representasjonene en velger å benytte, må ha en viss klarhet. Klarhet i den forstand at den er entydig og enkel å bruke. Entydigheten til hvordan en semiotisk representasjon kan brukes, etableres som oftest gjennom det Duval kaller konvensjoner (Duval, 2006). Tallinjen er et godt eksempel. Gjennom bruk av tallinjen, må det legges opp til felles forståelse av hvordan tallinjen fungerer. Tallene skrives i stigende rekkefølge, riktig størrelsesforhold og beveger man seg til høyre, vokser tallene.

Ved valg av den semiotiske representasjonen kan man snakke om representasjonens presisjon. Her er kanskje ikke den vanlige tallinjen like god, som om man bruker en åpen tallinje. Når en har utviklet forståelsen av grunnprinsippet ved ei tallinje, kan den brukes som mental støtte. Tallinjen blir dermed som en modell for alle reelle tall.

Alle egenskapene trenger ikke å være til stede for å velge en semiotisk representasjon, men egenskapene kan være en støtte til å vurdere når ulike semiotiske representasjoner er hensiktsmessige (Svingen, 2018).

2.4 Tidligere forskning av transformasjoner mellom representasjoner i matematikken

I følge Hellevik starter gjerne en undersøkelse med å søke i litteratur og resultater fra arbeid som andre har utført (Hellevik, 2002). Derfor tenker jeg at det også er lurt i dette tilfellet. For å utvide egen forforståelse og samtidig kunne få et grunnlag for å sette mitt forskningsspørsmål i et større perspektiv, har det vært nødvendig å sette seg inn i hva andre har skrevet og gjort av funn, enten direkte tilknyttet mitt temavalg, eller med sterk tilknytning til området. Ved å sette egne undersøkelser i sammenheng med funn andre har gjort, skapes forskning med sammenheng, som da blir viktige bidrag i hva som kan betraktes som sikker viten (Hellevik, 2002). I tillegg til å utvide egen kunnskap om temaet, har arbeid med tidligere forskning og litteratur helt klart utvidet min forforståelse og dermed skapt et godt grunnlag for videre arbeid med mitt forskningsspørsmål.

2.4.1 Tidligere studier av transformasjoner mellom semiotiske representasjoner

Utdanningsdirektoratet hevder at det å forstå og bruke ulike representasjoner er en viktig del av matematisk kompetanse (Utdanningsdirektoratet, 2018). Kilpatrick et al., hevder at et viktig tegn på begrepsforståelsen i matematikk, er at en kan representere et matematisk objekt på ulike måter (Kilpatrick et al., 2001). Duval skriver at matematiske objekter er abstrakte og kun tilgjengelige gjennom ulike semiotiske representasjoner (Duval, 2006). Steinbring poengterer viktigheten med å arbeide variert med et matematisk objekt, da ulike representasjoner og konkreter vil belyse objektets egenskaper på ulike måter (Steinbring, 1997). En semiotisk representasjon står for *noe annet* enn seg selv og representerer et matematisk begrep eller en ide. I likhet med Duval hevder Kilpatrick et al. at matematikk krever semiotiske representasjoner (Duval, 2006) (Kilpatrick, et al., 2001, s. 94). Faktisk på grunn av matematikkens abstrakte natur, har folk tilgang til matematiske ideer bare gjennom representasjonene til disse ideene. Selv om skolematematikk på overflaten ofte kan være fakta og prosedyrer, er mye av det virkelige intellektuelle arbeidet i matematikk knyttet til tolkning av matematiske ideer og bruk av semiotiske representasjoner.

Mulligan & Mitchelmore gjorde i 2013 en undersøkelse på barns våkenhet for mønster og strukturer i matematikk. De kaller dette for «Awereness of Mathematical pattern and structure, AMPS". De hadde en hypotese om at desto mer barns interne system for semiotiske representasjoner var utviklet strukturelt, jo mer sammenhengende og velorganisert vil deres ytre representasjon være og jo høyere vil deres matematiske kompetanse være (Mulligan & Mitchelmore, 2013, s. 34).

Matematiske ideer er i hovedsak metaforiske. En metafor er noe som har en overført betydning. Matematiske ideer forbedret gjennom flere semiotiske representasjoner, som ikke bare tjener som illustrasjoner eller pedagogiske triks, utgjør en betydelig del av det matematiske innholdet og tjener som en kilde til matematisk resonnement (Kilpatrick et al., 2001 s. 94). Carpenter et al. gjorde en undersøkelse hvor de testet fem og seksåringers evne til å løse matematikkoppgaver som omhandlet ulike regneoperasjoner. Studien viste at bortsett fra noen få unntak kunne barnas strategier karakteriseres som å representere eller modellere handlingene der de kunne løse oppgaver i addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon og flerstegsoppgaver (Carpenter et al., 1993).

Selv tallet "356" er en semiotisk representasjon som utgjør en betydelig mengde matematisk tenkning og tolkning. Tall kan være representert som fysiske objekter, skjematiske bilder, ord eller abstrakte symboler. Tallet fem har vi tidligere sett kan representeres av samlinger av fysiske gjenstander, som fem blokker eller fem perler, ved hjelp av skjematiske (ikoniske) bilder, eller med abstrakte symboler som 5 eller V. Duval har konsentrert sin forskning omkring akkurat dette, altså semiotiske representasjoner i matematikk (Duval, 2006).

2.4.2 Tekstoppgaver

Det er forsket mye på tekstoppgaver. I denne oppgaven vil jeg benytte meg av definisjonen Verschaffel et al. definerer dem: «Word problems can be defined as verbal descriptions of problem situations.» (Verschaffel et al., 2000). Altså verbale beskrivelser av oppståtte problem, en hverdagskontekst, som kan passe som en del av det semiotiske systemet Duval omtaler som naturlig språk (Duval, 2006). Tekstoppgaver kan blant annet deles inn i aritmetisk- og algebraisk art. Forskjellen på aritmetiske og algebraiske tekstoppgaver er hvordan den ukjente, herunder svaret på oppgaven som elevene skal frem til, er representert. I aritmetiske tekstoppgaver er den ukjente i slutten av "problemet" (Koedinger & Nathan, 2004). Det beskrives noen regneoperasjoner som må gjøres for å komme frem til den ukjente.

Verschaffel, Greer & de Corte poengterer blant annet at det er hensiktsmessig å la elever arbeide med tekstoppgaver, som trening i problemløsning (Verschaffel, Greer & de Corte, 2000). Cummins et al., har undersøkt elevers oppfattelse av oppgaveteksten, og funnet ut at mange elever har vanskelig for å forstå eller tolke teksten i tekstoppgaver (Cummins et al., 1988). Koedinger og Nathan har undersøkt om det har betydning hvordan oppgavene er representert (Koedinger og Nathan, 2004). Har det betydning for elevene om en oppgave er skrevet med tekst eller symboler, påvirker dette elevers resonnementer? Funnene deres sier at en tekst eller et verbalt språk hjelper elevene å forstå oppgaven bedre (Koedinger & Nathan, 2004). Ettersom elevene stort sett har lært seg det verbale språket, mener Koedinger og Nathan at det vil være lettere for elever å løse oppgaver skrevet med tekst i stedet for symboler (Koedinger & Nathan, 2004). Walkington et al. bekrefter det Cummins et al. antyder, at elever strever med å tolke tekst i tekstoppgaver (Walkington, et al., 2012) (Cummins et al., 1988). Bednarz og Janvier undersøkte både hvordan elever resonnerer og hvilke vanskeligheter det var i de ulike typer tekstoppgaver elevene fikk (Bednarz og Janvier, 1996). De mener at elevene har et sett med uformelle strategier med seg, som de bruker for å løse tekstoppgaver.

I denne studien blir elevene presentert for forskjellige tekstoppgaver som skal løses. Studien handler først og fremst om hva som kjennetegner arbeidet når elever transformerer teksten til en matematisk utregning og hvilke utfordringer som oppstår når de skal tolke informasjon som blir gitt.

3 Metodevalg

I dette kapitlet vil jeg begrunne de valgene jeg har tatt underveis i studien min. Dette gjelder arbeidet med innsamlingen, bearbeidingen og analysen av datamaterialet. Innledningsvis vil jeg belyse forskningsdesignet og formålet med denne studien. Videre vil jeg beskrive forskningsmetoden deltagende observasjon, som går inn under kvalitativ forskningsmetode. Deretter vil jeg redegjøre for innsamlingsprosessen av datamaterialet i studien. Jeg vil også vise til refleksjoner rundt studiens troverdighet og etiske forhåndsregler. Til slutt vil jeg beskrive hvordan jeg analyserte datamaterialet i studien, ved å bruke en abduktiv metode. Thagaard skriver at en abduktiv tilnærming innebærer en teori som utvikles på grunnlag av systematiske og dyptpløyende analyser, der forskerens teoretiske bakgrunn også kan gi perspektiver for tolkning av datamaterialets meningsinnhold (Thagaard, 1998, s.175). Dette betyr at en abduktiv tilnærming starter fra empirien (som induksjon), men aksepterer betydningen av teorier og perspektiver i forkant og/eller i løpet av forskningsprosessen (Tjora, 2017, s. 254). Med andre ord betyr dette at teorien er nødvendig for å forstå dataen, og den utvikles ved analyser av dataen. Teorien tolkes og vi danner nye hypoteser, noe som igjen kan gi grobunn for endring og nye teorier. Slik beveger vi oss gjerne fra empiri til teori, og fra teori til empiri, altså en abduktiv tilnærming.

3.1 Formål og forskningsdesign

Som forsker ønsker jeg å oppnå økt kompetanse innenfor et bestemt område. Den kvalitative forskeren ønsker å oppnå økt kunnskap innenfor et avgrenset fagområde i matematikk, der små grupper av elever er i fokus (Moen & Karlsdottir, 2011, s 9). Et sentralt kjennetegn ved kvalitativ forsking, er at forskeren øker sin kunnskap om hvorfor og hvordan en prosess oppstår innenfor et begrenset område (Cohen et al., 2011 s. 227). Med kvalitativ forskning er evnen til å skape tillit, etablere og vedlikeholde gode relasjoner hos elevene av stor betydning for forskeren i sin forskning (Nilssen, 2012, s. 29).

I løpet av denne kvalitative forskningsprosessen har jeg erfart at studiens formål og design har endret seg, både med tanke på teoretiske rammeverk og type fokusområde. Jeg har som en del av forskningsprosessen, endret forskningsspørsmål og teoretisk forankring en rekke ganger, på bakgrunn av funn i mitt datamateriale (Thagaard, 2013, s. 31). Ved bruk av kvalitativ forskningsmetode, blir virkeligheten og kunnskapen konstruert i møte mellom forskeren og de som deltar i studien, sett fra et ontologisk og epistemologisk perspektiv (Nilssen, 2014, s. 25). Relasjonene mellom meg som forsker og de elevene jeg observerte vil derfor ha stor betydning for datamaterialet og de resultatene jeg legger frem til slutt (Nilssen, 2012, s. 25). Mine kunnskaper og min forståelse av virkeligheten har jeg også med meg inn i studien som forsker. Teoretiske rammeverk sammen med min erfaringsbakgrunn og kunnskap bidro til at jeg kunne forstå og finne en mening i datamaterialet (Nilssen 2012, s. 26). Jeg har derfor en fortolkende rolle i analyseprosessen min, der jeg skal identifisere kjennetegn som også kan knyttes opp mot tidligere forskning. Resultatet av analysen min vil dermed være en tolkning av sannheten, og ikke den eneste sannheten (Thagaard 2013, s. 41).

3.2 Deltagende observasjon som kvalitativ forskningsmetode

Under arbeidet med datainnsamlingen benyttet jeg deltagende observasjon som metode. Deltagende observasjon er en metode som oftest benyttes i kombinasjon med andre metoder (Fangen 2004, s. 140). Fangen skriver for øvrig at å kombinere flere metoder kalles triangulering. Deltagende observasjon er ifølge Fangen en av de mest sentrale kvalitative metodene i samfunnsforskningen (Fangen 2004, s. 28). Cohen et al. beskriver deltakende observatør som en feltrolle hvor forsker kan delta i aktiviteter sammen med deltakerne gjennom observasjon, samtale og spørsmål (Cohen et al., 2011). Fangen skriver at ordet deltagende observasjon sier mer om forskerens måte å jobbe på enn feltarbeidet (Fangen 2004, s. 29). Videre skriver hun at som deltagende observatør vil du måtte engasjere deg i de menneskene du studerer, og delta i samhandling og samtale med dem. Postholm sier at ulike forskningsmetoder har ulike feltroller som beskriver de forskjellige måtene forskeren kan observere på (Postholm, 2010). Hammersley & Atkinson beskriver tre hovedtyper observasjoner; fullstendig observasjon, deltakende observasjon og fullstendig deltakelse (Hammersley & Atkinson 1996). I fullstendig observasjon deltar ikke forskeren i observasjonssituasjonen i motsetning til fullstendig deltakelse hvor forskeren deltar på lik linje med deltakerne i studien. En mellomting og den vanligste observasjonsrollen er ifølge Hammersley & Atkinson og Cohen et al. deltakende observasjon (Hammersley & Atkinson, 1996) (Cohen et al., 2011). Cohen forklarer en deltagende observatør som en feltrolle hvor forskeren kan delta i aktiviteter sammen med deltagerne. Dette gjennom observasjon, samtale og spørsmål, noe jeg gjorde i min studie.

Gjennom deltakende observasjon hadde jeg mulighet til å stille oppklaringsspørsmål til elevenes utsagn og elevarbeid, spørre etter utdypninger og videreutvikle samtalen og aktiviteten. Jeg gjennomførte det Cohen et al. kaller en semistrukturell observasjon (Cohen et al., 2011). Det betyr at jeg foretok observasjonene med bakgrunn i at jeg skulle forske på elevenes endringer i representasjoner, når utgangspunktet var tekstoppgave i hverdagslig kontekst. Postholm skriver at den kvalitative forskeren er opptatt av å observere aktiviteter i naturlig situasjoner, men har et fokus på observasjoner basert på teori (Postholm, 2010). Fangen hevder at deltagende observatør er fullt engasjert i å erfare feltet, samtidig som han forsøker å forstå det som skjer. Dette gjennom observasjoner og samtaler med deltagerne (Fangen 2004, s. 140). Fangen hevder at dette vil gi et godt grunnlag for å kunne validere tolkningene som forekommer under observasjonen. Jeg var opptatt av å se hva som kjennetegnet elevenes arbeid med endringer i semiotiske representasjoner med utgangspunkt i hverdagslig kontekst. Klarer elevene å bevege seg tilfredsstillende mellom forskjellige semiotisk representasjoner med tekstoppgave av hverdagslig kontekst som utgangspunkt?

I forkant av eventuelle undersøkelser er det ifølge Fangen viktig med informert samtykke (Fangen 2004, s. 155). En forutsetning for informert samtykke er at den som undersøkes deltar på frivillig basis. Dette innebærer også at den som undersøkes vet alt om hvilke farer og gevinster en slik deltakelse kan medføre (Jacobsen, 2000). Samtykkeskjemaet ble sendt hjem og returnert med underskrift av elevenes foresatte. Dette gjaldt foresatte av de elevene som ønsket å delta i undersøkelsen. I skjemaet stod det også at elevene sto fritt til når som helst å trekke seg som deltaker.

3.3 Utvalget

Studien min baserer seg på mine egne elever på småtrinnet. Jeg har ikke disse elevene i matematikk, men jeg er deres kontaktlærer. Elevgruppen jeg benyttet består av seks elever, tre gutter og tre jenter. Jeg gikk noen runder med meg selv, med tanke på hvilke utfordringer det kunne by på å bruke egne elever kontra elever fra en ukjent skole. Det er både fordeler og ulemper med å forske på egen klasse. En av fordelene er at en når som helst kan bestemme seg for å foreta en undersøkelse eller en observasjon av elevarbeid, hvilket jeg gjorde. Jeg fant det praktisk å benytte egne elever da det var lett å kombinere med arbeidssituasjonen min og studiene. Jeg kunne selv bestemme når jeg skulle gjennomføre observasjonene og jeg sto friere med tanke på tidsbruken. En annen fordel ved å bruke egne elever, er at jeg slapp å bruke tid på å bli kjent og situasjonen opplevdes naturlig for elevene. Det som kan tale mot dette valget, er at jeg fort kan bli forutinntatt, med tanke på hva som kan forventes av den enkelte eleven. Jeg gjennomførte oppgavene på alle seks elevene, der kun noen elevbesvarelser ble valgt ut for analyse. Utvalget av besvarelsene som ble valgt begrunner jeg i elevenes muntlig aktivitet ved gjennomføringen og evnen til å samarbeide ved gjennomføringen av oppgavene. Dette for å sikre meg best mulig datamateriale. Det var noen elever som ikke prøvde å besvare oppgavene og da var det vanskelig å analysere, i motsetning til de elevene som prøvde og samtidig forklarte hva de tenkte og hva de gjorde. Grunnen til at akkurat denne aldersgruppen ble valgt, var den optimale tilgangen på elever, samt egen interesse for denne aldersgruppen.

Da jeg planla oppgavene jeg skulle bruke hadde jeg relativt god kjennskap til elevene jeg benyttet meg av. Jeg hadde derfor bedre forutsetninger til å forutse hvor vanskelige de forskjellige oppgaven kunne være, og jeg trodde jeg kunne forutse noe av utfallet på de forskjellige oppgavene. Formålet med disse oppgavene var å finne: *«Hva kjennetegner arbeid med tekstoppgaver hos elever på småtrinnet og hvilke utfordringer kan oppstå når de transformerer fra hverdagskontekst til tall, tallinje og konkreter?»*

Elevene fikk utdelt samtykkeskjema i god tid før jeg gjennomførte observasjonene. Elevene hadde som tidligere nevnt mulighet til å trekke seg fra studien dersom de ønsket det. Gjennomføringen av elevbesvarelsene foregikk inne på eget grupperom. Da jeg startet denne undersøkelsen var eleven og jeg alene under oppgavebesvarelsene.

3.4 Datainnsamlingsprosessen

For å begrense omfanget på datamaterialet slik at det skulle bli mulig å gå i dybden, valgte jeg å observere seks elever på småtrinnet. I kvalitativ forskning er det vanlig å gjøre «non – probebability sampels», en ikke sannsynlighetsprøve av datamaterialet (Cohen et al., 2011 s. 155). Det betyr at innsamling av empirien (datamaterialet) skjer i en liten gruppe elever. Cohen forklarer at slike studier kun er representative for seg selv og ikke for hele befolkningen. Gjennomfører man samme type undersøkelse på andre elever på samme trinn, vil det kunne gi andre svar. På bakgrunn av elevenes utsagn og skriftlig arbeid, ønsker jeg å få kjennskap til elevenes kjennetegn og utfordringer ved endring av semiotiske systemer.

I denne delen av metodekapitlet vil jeg derfor belyse innsamlingsprosessen av mine data. Datamaterialet ble innsamlet for bruk i denne oppgaven. Dette er et arbeid som er gjennomført i forskjellige etapper, i tidsrommet november til februar. Hele prosessen startet med meg som deltagende observatør og enkeltelever på et eget grupperom. Elevene ble en og en presentert for oppgavene. Hver elev var inne i tretti til førtifem minutter hver. Under arbeidet tok jeg lydopptak, fotograferte elevarbeid og noterte flittig. Underveis i arbeidet stilte jeg oppfølgingsspørsmål, samt at jeg kommenterte det som ikke kunne oppfattes på lydopptaket. Det være seg først og fremst kroppsspråk. Disse komponentene utgjør grunnlaget for mitt datamaterialet. Lydopptakene, notatene og bildene ble tatt for bruk ved transkribering og analyse. For at datamaterialet skulle gjenspeile elevenes kunnskap og forståelse, så jeg det som viktig å ikke være for aktiv i observasjonsprosessen. Jeg valgte likevel å stille spørsmål underveis i aktiviteten slik at jeg fikk et større innblikk i elevenes tankemåte og kunne bidra til at analyseprosessen ble lettere og bedre.

Som nevnt ønsker en kvalitativ forsker å få tak i andre menneskers handlinger, meninger og perspektiv. I denne studien ønsker jeg å få tilgang til elevenes kjennetegn og utfordringer når de jobber med endring av representasjoner. Da jeg først startet med analysen av mitt datamateriale, så jeg at mitt datamateriale var noe tynt. Det vil si at det ikke var representativt for det jeg ønsket å undersøke. Av den grunn gjennomførte jeg flere nye observasjonsrunder med elevene. Jeg anser derfor den første runden som en pilotundersøkelse. Robson skriver forøvrig at en pilotstudie er en liten forundersøkelse, der en i praksis prøver ut den forskningen som en har planlagt å gjennomføre på et senere tidspunkt (Robson, 2002, s. 185). Målsetningen ved et pilotprosjekt kan være å teste ut og sjekke om den metoden en har planlagt å bruke fungerer slik som en forventer. I mitt tilfelle var ikke den første observasjonen tiltenkt å være en pilotundersøkelse, men i ettertid kan jeg se på det som en pilotundersøkelse. Jeg korrigerte oppgavene slik at jeg skulle kunne oppnå sikrere besvarelser som ga bedre innsikt i elevenes arbeid med endring av semiotiske representasjoner med hverdagslig kontekst som utgangspunkt. Cohen et al. skriver at en pilotundersøkelse kan utføres på forskjellige måter. Jeg gjennomførte den såkalte pilotundersøkelsen i november (Cohen et al., 2011, s. 492). Jeg laget i utgangspunktet flere oppgaver, i samme kategori, men fant etter hvert ut at jeg måtte spisse oppgavene slik at jeg kunne finne ut mest mulig med få oppgaver. Jeg tok noen av oppgavene med videre etter pilotundersøkelsen, samt at jeg valgte ut noen nye. Tidsklemmen sammen med resultatene var de største årsakene til at jeg reduserte mengden oppgaver. Elevene brukte mye lengre tid enn hva jeg hadde forventet, samt at noen oppgaver viste seg å ikke være egnet til å vise hvordan elevene arbeidet med endringer av representasjoner. De nye oppgavene jeg ga elevene, måtte være av en sånn art at de ikke kun kartla elevenes evner, men også ga meg innblikk i hva som kjennetegner elevenes arbeid med endring av semiotiske representasjoner, med hverdagslig kontekst som utgangspunkt, og hvilke utfordringer dette kunne by på.

Denne studien er gjennomført i flere etapper. Jeg hadde i utgangspunktet tenkt å observere en og en elev, men ble underveis enig med meg selv at jeg muligens kunne få litt bedre innblikk i elevenes arbeid med representasjoner om elevene jobbet i grupper. Jeg valgte derfor å prøve ut dette. Jeg gjennomførte da noen oppgaver som del av et stasjonsarbeid. Elevene ble da delt inn i grupper på tre og tre. Dette fungerte utrolig bra. Det jeg registrerte var at elevene fungerte som stilas for hverandre, noe som bidrog til at jeg som forsker fikk et tydeligere bilde av hva som kjennetegnet elevenes arbeid med endring av semiotiske representasjoner, med hverdagslig kontekst som utgangspunkt, og hvilke utfordringer som oppsto. Jeg registrerte at elevene hadde lettere for å spørre og diskutere med medelever, fremfor det de gjorde alene sammen med meg. Carpenter et al. hevder at matematiske samtaler bidrar til å fremme elevers tenkning (Carpenter et al., 2003, s. 6).

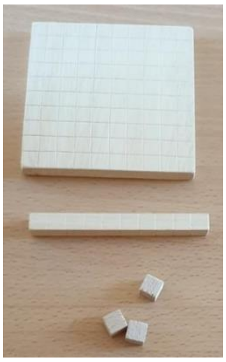
3.4.1 Oppgaver brukt i datainnsamling

I denne studien fikk elevene åtte forskjellige tekstoppgaver av hverdagslig kontekst. Noen av oppgavene hadde også delspørsmål. Her forekom det både addisjon og subtraksjon. Jeg vil her enkelt presentere hvilke oppgaver det var. Noen av oppgavene er oppgaver jeg egenhendig har konstruert, mens noen av oppgaven er inspirert av forskjellige bøker jeg har tilgang til ved skolen jeg jobber. Andre oppgaver er noe tilpasset, men inspirert av studien Multidigit Number Sense: «A Framework for Instruction and Assessment» (Jones, G. A., et. el. 1996). Denne studien hadde fine tekstoppgaver der studien hadde som mål å kartlegge elevers tallforståelse i situasjoner med flersifrede tall. Jeg har valgt å ta utgangspunkt i muntlig og skriftlig semiotisk system. Det betyr at i denne studien ser jeg på transformasjon fra muntlig eller skriftlig *naturlig språk* som Duval omtaler det i sin tabell og som skal transformeres til andre semiotiske systemer (Duval, 2006, s 110). Jeg finner det relevant for elevene og meg som lærer å ta utgangspunkt i disse representasjonene, da instruksjon på småtrinnet ofte kommer muntlig/verbalt eller skriftlig fra læreren. Samtlige av disse tekstoppgaven omhandler hverdagslige kontekster. I denne studien har jeg registrert fire kjennetegn og tre utfordringer. I kapitlet analyse og drøfting vil jeg vise til kjennetegnene, for så å si noe om utfordringene som oppsto hos elevene.

1. En dag så Per 18 gule blomster og 3 røde, utenfor vinduet. Hvor mange blomster så han til sammen? Neste dag hadde noen plukket 5 blomster, hvor mange var det da utenfor vinduet til Per?
2. Per hadde 3 biler og Ole hadde 8 biler, hvor mange hadde de til sammen?
3. En dag var det 13 grader ute, neste dag hadde temperaturen steget med 3 grader. Hvor mange grader var det da ute?
4. I en klasse var de til sammen 21 elever. En dag var fem elever borte, hvor mange elever var igjen?
5. Per hadde ti drops i en poser, da han traff Ole ga han bort to. Dagen etter gav han bort 3 til Kari. Hvor mange drops hadde Per igjen?
6. En dag fikk Per 30 kroner i lommepenger. Han hadde 2 kroner fra før. Hvor mange kroner hadde han nå? Neste dag gikk Per på butikken. Han kjøpte en is til 12 kroner, hvor mye hadde han igjen?
7. Det satt ti fugler i et tre. Fuglene ble skremt, og da fløy to vekk, og etter en stund fløy tre til bort. Hvor mange fugler satt igjen?
8. Truls har fem bamser og Jasmin har tolv bamser, hvor mange har de til sammen?

Alle spørsmålene ble oppfulgt av nye spørsmål.

1. Kan du skrive oppgaven og svaret på papiret?
2. Kan du vise dette ved hjelp av tallinjen?
3. Kan du bruke konkreter til å finne svaret. Du kan bruke disse (centikuber, tellestaver og hundredeplate i tre, som skolen har kjøpt).



Figur 12: Eksempel på konkreter brukt i studien

Tekstoppgavene åpner for at elevene kan bruke ulike semiotiske systemer og semiotiske representasjoner. Oppgavene i seg selv presenteres innenfor det semiotiske systemet naturlig språk, som jeg kaller tekstoppgaver av hverdagslig kontekst. Ulike representasjoner fører til at elevene er nødt til å transformere mellom disse. I oppgavene går man fra naturlig språk (konteksten i tekstoppgaven) til symbolsk system (regnestykker med tall), figurer (tallinje) og konkreter (centikuber).

3.5 Bearbeiding og analyse av datamaterialet

Alle informasjonsskrivene eller samtykkeskjemaene ble returnert med underskrift fra foresatte. Jeg startet etter hvert prosessen som skulle bli min masteroppgave. Som nevnt tidligere, er denne studien gjennomført litt etappevis. Som tidligere beskrevet gjennomførte jeg en såkalt pilotundersøkelse før jeg gjennomførte observasjonene under to forskjellige omstendigheter. Det var en observasjon med enkeltelever en til en, og en observasjon med elever i grupper på tre.

3.5.1 Transkripsjon og etterarbeid

Opptakene jeg gjennomførte ble transkribert og de ble benyttet i analysen. Jeg erfarte i likhet med Postholm at transkribering er en tidkrevende prosess (Postholm, 2009, s. 164). Postholm skriver i sin bok at det i løpet av transkriberingsarbeidet vil foregå kontinuerlige analyser og at det derfor er viktig at det er forskeren selv som bør gjøre transkriberingen (Postholm, 2009, s. 104). Nilssen hevder at når en som forskere skal skrive ned tekster fra for eksempel observasjoner slik som transkripsjoner, vil det aldri bli helt nøyaktig gjenspeiling av situasjonen (Nilssen, 2012, s. 46). En forsker er farget av situasjonen og han velger selv ut hva han anser som viktig. Ofte vil mimikk, tonefall, kroppsspråk, gester og lignende forsvinne når en gjør om menneskelige situasjoner til tekst. Jeg hadde ved en tidligere anledning prøvd å transkribere tekst/situasjon og visste derfor at dette var en krevende jobb, og at det er en del ting en må ta hensyn til. Jeg var derfor nøye med å skrive transkriberingen kort tid etter gjennomføringen. Jeg stilte hyppige oppfølgingsspørsmål underveis i observasjonene, samt at jeg kommenterte det som ikke ble med på lyd. Jeg tok også notater, underveis gjennom observasjonen. Jeg mener selv dette bidro til at situasjonen eller det som skjedde under observasjonene, ble godt gjengitt/referert og dokumentert. I transkriberingen omtaler jeg meg selv som (L) for læreren. Elevene har i transkripsjonen fått hvert sitt pseudonym. I transkripsjonen bruker jeg tegnsetting, samt forklaringer på hva som skjer. Eksempler på dette er «(……)» som betyr tenkepause lengre enn 3 sekunder, «*kursiv*» refererer til ikke-verbal virksomhet/handling og

«---------« hopper i aktiviteten.

3.5.2 Analyseprosessen

Da jeg var ferdig med innsamlingen av datamaterialet, var neste steg analyse av materialet.

Dataanalyse beskrives som en prosess hvor forskeren får mening ut av innsamlede data. Dette er en prosess hvor helheten blir oppdelt for deretter å bli analysert forklarer Postholm (Postholm, 2010). Hensikten med oppdelingen er å gi forskeren en mer komplekst og helhetlig forståelse av datamaterialet. Postholm påpeker, på samme måte som for gjennomførelsen av undersøkelsene, at også analysearbeidet vil være preget av forskerens teoretiske ståsted og perspektiver. Videre er det forskerens oppgave å møte datamaterialet med et åpent sinn og være åpen for funn som strider mot de funn han/hun hadde forventet å finne (Postholm, 2010).

Som Fangen skriver, har også jeg vært opptatt av anonymisering av elevene (Fangen, 2004, s. 160). Denne studien er gjennomført på en liten fådelt skole der jeg jobber som lærer. Det er et lite og gjennomsiktig miljø. I studien har jeg derfor valgt å anonymisere elevene, ved å gi de pseudonymer. Dette av hensyn til den enkelte eleven og for å ivareta en etisk tilnærmelse (Cohen et al., 2011, kap 2).

Etter gjennomføringen av datainnsamlingen skrev jeg transkripsjonene og leste gjennom datamaterialet flere ganger mens jeg noterte stikkord og tanker underveis. Med forskningsspørsmålet i bakhodet studerte jeg datamaterialet mitt og etter hvert begynte jeg å se etter forskjellige kjennetegn og utfordringer i elevarbeidet. Nilssen skriver at koding og kategorisering av datamaterialet er kjerneaktiviteter i den kvalitative analyseprosessen og at forskere starter prosessen med en åpen koding av datamaterialet (Nilssen, 2012, s. 78). Åpen koding betyr å identifisere, kode, klassifisere og sette navn på de viktigste mønstrene i materialet (Nilssen, 2012, s. 82). Ideen om åpen koding kommer fra forskningsmetoden «grounded theory» (forankret teori), og hovedideen bak denne metoden er å utvikle nye teoretiske ideer som har basis i datamaterialet. Jeg valgte å sette fargekoder på de forskjellige løsningsforslagene for å se hva som oftest gikk igjen. For å starte en plass tok jeg utgangspunkt i det tidligere forskning og funn har vist.

Ved å se på mitt datamateriale, så jeg at kjennetegnene og utfordringene elevene sto ovenfor i stor grad kunne tolkes til å være de samme utfordringene som er blitt nevnt i tidligere forskning. Kjennetegnene i denne studien var knyttet til bruk av overgangsrepresentasjonen naturlig muntlig språk. Flere semiotiske representasjoner ble brukt i en og samme oppgave, samt at de prioriterte å bruke symboler for å regne ut tekstoppgavene. Det siste kjennetegnet var knyttet til modeller som visuell støtte, eller bare som en modell. Den første utfordringen jeg vil nevne er at transformasjonen krever at elevene tolker begrepene i tekstoppgavene for å finne ut hvilke operasjoner oppgaven handler om. Videre så jeg at elevene hadde utfordringer knyttet til feil i nedskrivingen av regnestykkene. Den siste utfordringen var knyttet til transformasjon til tallinje. Omfanget av de ulike kjennetegnene og utfordringene jeg fokuserer på i analysen vil variere. Noen vil være mer utbredt enn andre i datamaterialet, men jeg presenterer både de som forekom ofte og de som forekom bare en eller to ganger. Siden dette er en kvalitativ analyse med få deltakere, vil også disse sjeldne utfordringene være relevante og viktige for at jeg skal kunne nærme meg et svar på forskningsspørsmålet mitt.

Ved å transkribere og studere datamaterialet mitt, har jeg identifisert fire hovedkjennetegn og tre utfordringer for elever på småtrinnet sitt arbeid med tekstoppgaver og transformering fra hverdagskontekst til tall, tallinje og konkreter? Kjennetegnene og utfordringene for elevenes arbeid med tekstoppgavene i min studie var følgende:

Kjennetegn:

- ✓ Elevene benyttet naturlig språk som overgangsrepresentasjon
- ✓ Elevene brukte flere semiotiske representasjoner i en og samme oppgave.
- ✓ Elevene prioriterte å benytte symboler for å regne ut tekstoppgaver.
- ✓ Representasjonene ble i enkelte situasjoner brukt som modeller.

Utfordringer:

- ✓ Utfordringer knyttet til tolkning av begreper i tekstoppgave
- ✓ Utfordringer knyttet til feil nedskriving av regnestykkene
- ✓ Utfordringer knyttet til transformasjon til tallinje

Jeg vil bygge opp analysen og drøftingen slik at jeg tar for meg de fire kjennetegnene og de tre utfordringene hver for seg. Disse sju kategoriene vil utgjøre hvert sitt delkapittel. For å belyse de ulike kategoriene vil jeg presentere utdrag fra elevbesvarelsene. Når jeg presenterer disse vil jeg som tidligere nevnt referere elevene med tilfeldige pseudonymer. I analysen vil jeg støtte meg til Duvals sine uttalelser om transformering av semiotiske representasjoner som analyseverktøy (Duval, 2002, 2004, 2006). Det vil være viktig å se på transformasjoner mellom semiotiske representasjoner og ulike semiotiske systemer, siden alle matematiske objekter må jobbes med innen flere systemer (Duval, 2006). Elevene vil bli presentert for oppgavene i det semiotiske systemet naturlig språk, som jeg kaller tekstoppgaver med utgangspunkt i hverdagslig kontekst. Jeg vil spørre elevene om å representere oppgavens innhold med symboler i form av et regnestykke, med tallinje og dens funksjoner og konkreter og dets muligheter. Dette vil innebære at de også skal jobbe innenfor flere semiotiske systemer og i analysen vil jeg være interessert i transformasjonen mellom disse systemene. I analysen vil jeg se på kjennetegn og utfordringer som elevene møter i dette arbeidet og da vil jeg være spesielt interessert i å se etter hva som kjennetegner selve transformasjonsprosessen mellom semiotiske representasjoner og hvilke utfordringer denne transformasjonsprosessen byr på.

Hovedfokuset i denne studien er å undersøke om elevene klarer å se sammenhengen mellom det matematiske objektet og de semiotiske representasjonene, og om de klarer å bevege seg mellom de semiotiske representasjonene. Ved å transkribere og studere datamaterialet mitt har jeg identifisert hovedkjennetegn og utfordringer i elevenes arbeid med tekstoppgaver knyttet til hverdagslig kontekst. Med tanke på størrelsen av datamaterialet og at dette er en kvalitativ analyse, anser jeg det som viktig å belyse både de sporadiske og de hyppige funnene.

3.6 Studiens troverdighet og etiske retningslinjer

Sentralt i forskning er kravene til troverdighet, altså validitet og reliabilitet. Reliabilitet er knyttet til forskningens troverdighet og er en forutsetning for validiteten i forskningen (Cohen et al., 2011 s. 179 og 199). Kvalitativ forskning vil alltid være påvirket av ulike momenter, som forskerens virkelighetsforståelse, erfaringsbasert kunnskap og sosiale bakgrunn (Nilssen, 2012, s. 137). I dette avsnittet vil jeg drøfte studiens troverdighet, med andre ord det som omhandler validitet, reliabilitet og generalisering. Mitt mål som kvalitativ forsker er å sikre at forskningen min angir et riktig bilde av studiens design og innhold. Å jobbe tett på som en gjør under en kvalitativ forskning, bidrar til å minimalisere muligheten for mistolkninger. Det er viktig for meg som forsker at datafunnene som presenteres for leseren er troverdige. De skal kun være relatert til det datamaterialet som jeg samlet inn i forbindelse med den aktuelle forskningskonteksten (Nilssen, 2012, s. 141).

Kvalitativ forskning kjennetegnes av pålitelighet, validitet og innsikt (Tjora, 2010, s. 19). Tjora skriver at en måte å gi studien validitet er å sammenligne egne funn med tidligere forskning og aktuelle teorier (Tjora, 2010, s. 179). I den forbindelse er det et spørsmål som dukker opp, og det er hvorvidt et resultat kan reproduseres av andre forskere på andre tidspunkt. Det er her snakk om hva intervjupersonene i min studie ville ha svart i et intervju med en annen forsker (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 250). De valgene jeg har tatt underveis i denne forskningsprosessen har vært styrt av forskningsspørsmålet mitt. Andre forskere har kanskje hatt andre relasjoner til elevene, stilt andre oppfølgingsspørsmål eller benyttet andre forskningsmetoder. Mine forskningsresultater sammenlignet med forskningsresultatene til eventuelt en annen forsker ville antageligvis ikke vært entydige.

Kvale og Brinkman hevder at validitet innenfor samfunnsvitenskapelig forskning handler om at forskningsprosedyrer skal være gjennomsiktige, resultatene skal være åpenbare og studiens bevis skal være overbevisende (Kvale og Brinkman, 2009, s. 264). Fangen skriver at deltagende observasjon er en metode som sikrer høy grad av validitet

(Fangen, 2004, s.196). Tjora skriver for øvrig at forskning anses som konservativ, da det legges vekt på høy kvalitet (Tjora, 2010, s. 179). Kunnskap utvikles i små skritt. I følge han kan jeg styrke gyldigheten på studien ved å være åpen på hvordan praksisen ved forskningen har foregått. Det være seg å redegjøre for hvilke valg jeg har tatt, og være sensitiv for faktorer som er vesentlige innenfor tematikken min. Han hevder at den viktigste kilden til høy troverdighet er at forskningen pågår innenfor rammene av faglighet og er forankret i relevant annen forskning (Tjora 2010, s. 179).

For denne studien blir det her viktig å reflektere over betydningen av at jeg er kontaktlærer til disse elevene. Fangen skriver, for å sikre prosjektets pålitelighet er det viktig å reflektere over bekjentskapene til informantene, altså relasjonen mellom forsker og informanter (Fangen, 2004, s. 176). Hvilken betydning eller hvordan har dette påvirket tilgangen til feltet, utvalget, datagenerering, analyse og resultater?

Etiske dilemmaer er til stede i all forskning, men i observasjonsstudier kan de oppleves mer presserende (Fangen, 2004, s. 153). Dette fordi en kommer tett inn på forskningssubjektet. Kvale og Birnkmann skriver at i løpet av en forskningsprosess kan det oppstå flere etiske problemstillinger som en kvalitativ forsker må ta hensyn til (Kvale og Birnkmann, 2009, s. 80). Etiske problemstiller kan oppstå før, underveis og etter en trer inn som forsker i et klasserom. Kvaliteten i kvalitativ forskning kjennetegnes av pålitelighet og validitet (Tjora 2010, s. 175).

Gjennom redegjørelse av hvordan dataene er samlet inn, blitt brukt og bearbeidet skapes en pålitelighet til undersøkelsen. At en studie har validitet handler om at svarene en har funnet faktisk er svar på det en forsker på. Som nevnt i forrige delkapittel skriver Tjora at en måte å gi validitet til studien er ved å sammenstille egne funn med tidligere forskning og aktuelle teorier (Tjora, 2010, s. 19 og s. 179). Dette er hva jeg gjør i drøftingen av analysen i denne oppgaven. Teorigrunnlaget mitt består av forskningsartikler som har gjort lignende undersøkelser som meg. Det er viktig at jeg viser tilstrekkelig med datamateriale for å underbygge de tolkninger jeg har gjort og de resultater jeg har fått (Nilssen, 2012).

For å gjøre studien så troverdig og valid som mulig, vil det være lurt å benytte flere metoder for å samle inn datamateriale, noe som Postholm i likhet med Fangen kaller triangulering (Postholm, 2010, s. 132) (Fangen,2004 s. 140). Jeg benyttet transkripsjoner av lydopptak, elevbesvarelser (skriftlig og muntlig), og egne feltnotater fra observasjonssituasjonen. Prosjektet mitt ble derfor meldt inn til prosjektvernforbundet for norsk forskning ved Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD). En forsker som skal behandle personopplysninger i sin forskning er pålagt kravet om å melde inn sitt prosjekt til NSD. Mitt prosjekt ble godkjent av NSD (vedlegg 1) etter noen ukers behandlingstid. Deltagerne i denne studien er elever ved småtrinnet, og de er mindreårige. Mindreårige deltagere må ha foresattes samtykke for å delta i studien. Et informasjonsbrev ble sendt hjem til alle foresatte, der jeg forklarte formålet med forskningsstudien min (vedlegg 2).

4 Analyse

I dette kapitlet vil jeg med bakgrunn i studiens teori og metode beskrive min analyse av hva som kjennetegner arbeid med tekstoppgaver hos elever på småtrinnet og hvilke utfordringer kan oppstå når de transformerer fra hverdagskontekst til tall, tallinje og konkreter?

Analysen vil bidra til å svare på forskningsspørsmålet mitt. Tekstoppgaver åpner for at elevene må transformere mellom ulike semiotiske representasjoner og semiotiske systemer. Elevene blir i løpet av oppgavene bedt om å gjøre transformasjoner mellom ulike semiotiske systemer. Ifølge Duval har *hvordan* de gjør disse transformasjonene innvirkning på hvilken forståelse av det matematiske objektet som kommer til syne (Duval, 2006).

Dette kapitelet er bygget opp rundt observerte kjennetegn og utfordringer. Disse vil utgjøre hvert sitt delkapittel. For å belyse de ulike kjennetegnene og utfordringene vil jeg presentere utdrag fra elevbesvarelsene. Når jeg presenterer disse vil jeg kalle elevene med tilfeldige pseudonymer. I denne studien har oppgavene i seg selv blitt presentert for elevene innenfor det semiotiske systemet tekstoppgave som hverdagslig kontekst. Det tilsvarende systemet i Duval sin artikkel er naturlig språk (Duval, 2006). I denne studien har elevene fått i oppgave å løse tekstoppgaver, for så å eventuelt benytte det Duval omtaler som symbolsystem (regnestykker med tall), figursystem (tallinje) og konkreter (centicuber og tellestaver). Elevene blir videre nødt til å utføre transformasjon mellom ulike semiotiske representasjoner og systemer. Formålet med denne studien er å observere hvordan elevene jobber med transformasjoner mellom semiotiske representasjoner.

4.1 Kjennetegn ved elevenes arbeid

Som beskrevet i kapitlet om metode har jeg observert fire forskjellige kjennetegn i elevenes arbeid med tekstoppgaver knyttet til endring av representasjoner. I dette delkapitlet vil jeg beskrive hva som kjennetegner arbeid med tekstoppgaver hos elever på småtrinnet og hvilke utfordringer kan oppstå når de transformerer fra hverdagskontekst til tall, tallinje og konkreter. De fire kjennetegnene jeg observerte i denne studien var at elevene for det første benyttet naturlig språk som overgangsrepresentasjon. Videre observerte jeg at elevene benyttet flere semiotiske representasjoner i en og samme oppgave. Elevene fant først svarene i hode ved muntlig språk/dialog med seg selv, for så å tilpasse regneoperasjonen til enten symbolsk uttrykk, tallinje eller konkreter. Et tredje kjennetegn var at elevene unisont brukte symboler for å regne ut tekstoppgavene og som det fjerde kjennetegnet brukte elevene tallinjen og konkretene som en type «modell» for regneoperasjonen. Jeg vil videre i oppgaven kommentere hvert enkelt kjennetegn mer inngående.

4.1.1 Elevene benyttet naturlig språk som overgangsrepresentasjon

Elevene benyttet ofte muntlig tale som en slags «overgangstransformasjon» før de transformerte til den representasjonen de ble bedt om å bruke. Dette var unisont for hele elevgruppen, bortsett fra en elev. Muntlig tale eller dialog ligger i det semiotiske systemet som Duval kaller for naturlig språk. Duval omtaler denne overgangsrepresentasjonen som «transition representation» (Duval, 2006 s. 120 – 121). Etter hva jeg har forstått betyr det at elever kan bruke en mellomliggende representasjon. Denne brukes som et stillas eller støtte i transformasjonen fra startrepresentasjonen til målrepresentasjonen. Overgangsrepresentasjon ble ofte benyttet for å komme fram til løsningen.

Elevene snakket ofte mens de skrev ned regnestykket når de skulle finn riktig mengde konkreter eller når de skulle gjennomføre regneoperasjoner ved hjelp av tallinjen. Overgangsrepresentasjon er ikke det beste begrepet, men det foregår to transformasjoner, en «transition representation» som Duval beskriver i artikkelen sin (Duval, 2006). Elevene benytter to transformasjoner for å komme til den representasjonen som det er spurt etter. Elevene fikk oppgaven opplest, og under tolkingen av oppgaven begynte eleven å snakke med seg selv. Eleven foretok en muntlig «dialog» med seg selv, for å løse oppgaven. De snakket med seg selv, samtidig med at de skrev regnestykket med symboler. Eksemplet under viser en elev som skulle svare på tekstoppgaven. Oppgaven var som følger:

«En dag så Per 18 gule blomster og 3 røde, utenfor vinduet. Hvor mange blomster så han til sammen? Neste dag hadde noen plukket 5 blomster, hvor mange var det da utenfor vinduet til Per?»

Her er utdrag fra dialogen.

1. Nils: da må det bli… «*tenker*»
2. - sa du at fem var plukket?
3. L: ja.
4. Nils: sier - atten gule «*skriver 18 på arket*» og
5. «han skriver + 3» mens han sier «og tre røde»
6. «Han er stille….»
7. Nils: det var fem som ble tatt ja?
8. L: ja.
9. Nils: «*skriver – 5*», mens han sier – minus fem.
10. – atten pluss tre minus fem, må bli … «*tenker*» - det blir seksten.
11. – det blir 16 Anita, svaret er 16.

I linje fire, fem og ni ser vi at Nils har et naturlig språk mens han skriver. Det er mulig han «guider» seg selv. I linje fem sier han bare tre, ikke pluss tre, men skriver pluss tre, mens i linje ni ser vi at han sier *minus* fem, når han skriver minus fem.

Det samme skjedde når elevene jobbet med tallinjen og konkretene. De hadde naturlig språk mens de gjennomførte regneoperasjonen. Elevene snakket ofte med seg selv når de skulle manøvrere seg frem eller tilbake på tallinjen. Tilsvarende skjedde da elevene plukket ut de konkretene de skulle bruke for å løse oppgaven. Her er et eksempel på en elev som ønsket å benytte konkreter for å finne svaret på oppgaven.

Utdrag fra dialogen:

1. - Ti, «sier hun samtidig som hun tar en tierstav»

2. - En, to tre, fire, fem, seks, sju, og åtte «*plukker en og en ener*».

3. – da har jeg ti «*flytter på tierstaven*», elleve, tolv, tretten, fjorten, femten, seksten, søtten og atten «*drar litt til siden en og en ener*»

4. - atten, også var det tre til «plukker tre» mens hun sier – en, to, tre.

I alle linjene ser vi eksempler der Vera snakker mens hun plukker det hun trenger for å kunne svare på oppgaven. Her har eleven et naturlig språk samtidig som eleven fysisk flytter på centikubene og tierstavene. I denne situasjonen kan man si at det skjer en transformasjon i form av omdannelse fra tekstoppgave som hverdagslig kontekst til arbeidet med tall, tallinje eller centicuber. Jeg tolker omdannelsene som ekvivalente transformasjoner. Det vil si at elevene jobber med det samme objektet i ulike semiotiske systemer og at objektet opprettholder samme form, og derav skjer det en vellykket transformasjon.

4.1.2 Elevene benyttet flere semiotiske systemer i en og samme oppgave

Under denne studien så jeg elever som benyttet andre representasjoner sammen med det naturlige språket for å komme frem til riktige svar. Dette kjennetegnet gikk ut på at elevene fant svarene først enten ved å bruke fingrene eller ved å visualisere det. Det å visualisere kan betraktes som en egen semiotisk representasjon. Etter at eleven hadde regnet ut svaret, for eksempel i hodet, tilpasset de regneoperasjonen til det det var spurt etter.

Her skal vi se et eksempel der eleven benyttet både naturlig språk og forskjellige konkreter for å finne svaret på tekstoppgaven. Tekstoppgaven skulle løses med symboler. Som nevnte, regnet elevene dette ofte i hodet for så å skrive det med symboler på papiret. Oppgaven var som følger:

«Truls har fem bamser og Jasmin har tolv bamser, hvor mange har de til sammen?»

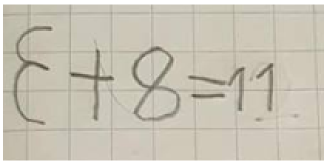
1. Vera: …fem bamser og tolv bamser….
2. - fem og tolv…. *Skriver dette ned på papiret som (5+12 =)*
3. «*begynner med fingrene en, to, tre…*»
4. «*holder opp hele hånden og kikker på den….*»
5. «*begynner å telle på den andre handen, men finner fort ut at dette ikke var så lett….*»
6. «*henvender seg til læreren og sier*»
7. - kan jeg bruke de der *(peker på centikubene)*?
8. L. ja, ja
9. Vera: - skal vi sjå, jeg må ha fem sånne (tar tak i enerne)….. en, to tre og fem.
10. Jeg må ha en sånnen *(en tierstav)* og to sånne til ….
11. ti *(tar tak i tieren*), elleve (*tar en ener*), tolv, tretten osv.

I linje en virker det som eleven oppsummer muntlig for seg selv hva konteksten er. Eleven går i linje to fra konteksten og rett over til å skrive symboler, som var oppgaven. Vi ser også et eksempel på naturlig språk, sammen med skriftlige symboler. Eleven foretar en transformasjon i form av omdannelse. Det er transformasjon mellom to ulike semiotiske systemer, fra tekstoppgave til tall. For meg virker det som om eleven ikke finner svaret og velger derfor å benytte seg av konkreter. I linje tre ser vi at eleven helt uoppfordret eller ubevist går over til å benytte fingrene, som er i det semiotisk systemet konkreter. Da eleven ikke kunne finne svaret med fingrene, henvendte eleven seg til læreren og spør etter centikuber, se linje seks og sju. Jeg vurderer det dithen at hun vurderer centikubene som mer hensiktsmessig for denne oppgaven sammenlignet med fingrene. Både fingrene og centikubene er i samme semiotiske system, konkreter. Her kan en derfor si at transformasjonen mellom fingrene og centikubene er en behandling, altså transformasjon mellom representasjoner innen samme semiotiske system. Eleven har i denne transkriberingen (linje en til elleve) foretatt transformasjoner av både det Duval kaller behandling (for eksempel linje fire til sju) og omdannelse (for eksempel linje en til tre) (Duval, 2006 s. 111). I linje elleve ser vi nok et eksempel på at eleven veksler mellom naturlig muntlig språk og konkreter. Eleven finner ved hjelp av konkreter svaret på oppgaven. Samtidig som eleven finner frem konkretene og riktig mengde snakker hun med seg selv. Når hun blir enig med seg selv, går hun tilbake til den symbolske utregningen og skriver svaret.

Et annet eksempel er en elev som fant svaret relativt fort, ved å telle tre videre fra det største tallet, for så å utføre de oppgavene som kom. Konteksten var som følgende:

«Kari hadde tre røde drops og 8 gule drops, hvor mange hadde hun til sammen?»

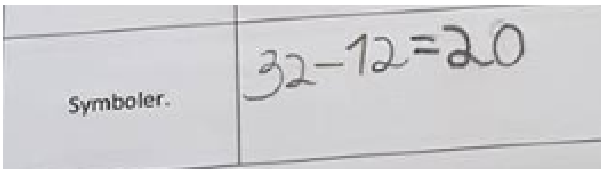
1. Eli: tre og åtte….. åtte… ni, ti, elleve.
2. «*eleven benytter fingrene*»
3. svaret er elleve, Anita.
4. L: ja, det er riktig, kan du skriv regnestykket?



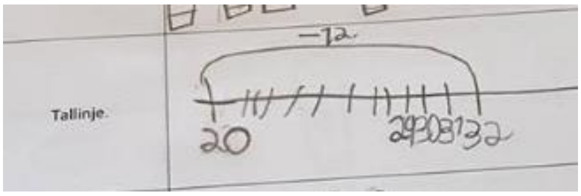
Figur 13: Utdrag fra elevbesvarelse av tekstoppgave

Her kan man si at transformasjonen mellom de semiotiske systemene kommer fram i form av at eleven går til det stadiet der det er lettest å gjennomføre behandlingen av regneoperasjonen. I dette tilfellet er det via det semiotiske systemet konkreter. Eleven går fra tekstoppgave til tallsymbol via bruk av fingrene som er i det semiotiske systemet konkreter. En kan anta at også denne eleven benyttet tre forskjellige semiotiske systemer for å løse tekstoppgaven. Denne type transformasjonen kaller Duval for omdannelse (Duval, 2006). Det betyr at eleven har gjennomført transformasjoner mellom forskjellige semiotiske systemer.

Det neste eksemplet viser en eksemplarisk transformasjon. Eleven har skrevet ned oppgaven med tall (figur 4), og videre benyttet tallinjen (figur 5). Dette er et tydelig eksempel på at eleven har bevart det matematiske objektet gjennom flere transformasjoner.



Figur 14: Utdrag fra elevbesvarelse



Figur 15: Utdrag fra elevbesvarelse

Prosessen kan betraktes som transformasjon av typen omdannelse og går fra hverdagslig kontekst til tall, noe som inngår det semiotiske systemet «notasjon». Videre går prosessen til tallinje, som inngår semiotiske systemet "kartesiske grafer»**.** Ifølge Duval vil elever som behersker et slikt skifte av register også kunne overføre den matematiske kunnskapen til andre sammenhenger (Duval, 2006).

4.1.3 Elevene prioriterte å benytte symboler for å regne ut tekstoppgaver

Dette var et kjennetegnene som var unisont for hele elevgruppen. Som vi vet fra tidligere kjennetegn, var det ikke alle elevene som fant svarene uten å gå veien om andre representasjoner. Elevene prioriterte å skrive de symbolske tallene først ved utregning av tekstoppgaver, for så å gå videre til tallinje eller eventuelt konkreter. Her ser vi en situasjon som oppsto da en elev skulle regne ut en oppgave ved hjelp av tallinjen. Vi ser i linje fem og linje ti til tolv at Iren foretrekker å gå via symboler før hun gjennomfører en transformasjon til tallinjen.

Utdrag fra dialog:

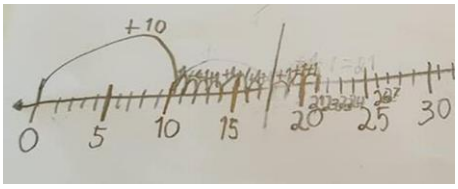
1. Iren: hvor mange var det igjen?
2. L: skal jeg lese oppgaven en gang til?
3. Iren: ja.., var det ti fugler?
4. L: det var ti fugler som ……osv
5. «eleven skriver 10 på arket.»
6. L: hva gjør du?
7. Iren: prøve å finne svaret «og ser spørrende på meg, som om jeg ikke forstår noen ting».
8. ----------
9. «elevene skriver – 2»
10. L: men …. skal ikke du bruke tallinjen?
11. Iren: jo, men jeg må jo finne svaret først.
12. det er litt lettere da……

Jeg vil påstå at eleven vurderer representasjonene og velger den representasjonen som er mest hensiktsmessig i dette tilfellet. For eleven kan det oppleves som tryggest å transformere via symboler. Her kan man kanskje si at transformasjon mellom semiotiske system kommer fram i form av at eleven går til det stadiet der det er lettest å gjennomføre behandlingen av regneoperasjonen. Som Duval (2006) skriver er forståelse avgjørende for elevenes evne til å gjennomføre transformasjoner. Transkripsjonen viser transformasjon mellom ulike semiotiske systemer, altså det Duval (2006) kaller omdannelser. Først skjer det en omdannelse fra muntlig språk til symboler, så transformerer eleven regnestykket til tallinje. I transformasjonen klarer eleven å beholde det matematiske objektet og vi observerer en vellykket transformasjon.

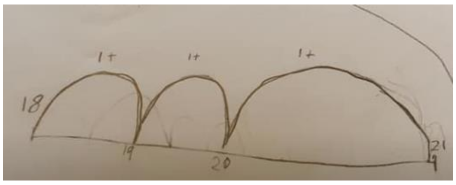
4.1.4 Representasjonene ble i enkelte situasjoner brukt som modeller.

I enkelte tilfeller brukte elevene tallinjen eller konkretene som «modeller» for regneoperasjonen. Elevene bruker modellene på to forskjellige måter i mitt datamateriale. Den ene måten innebærer at elevene brukte tallinjen eller konkretene som visuell støtte for å finne svaret. Den andre måten var at elevene brukte tallinjen som modell og refererte til den via det muntlige språket. Det semiotiske systemet tallinje, både mental og illustrert, vil inngå i det Duval (2006) omtaler som det semiotiske systemet *geometriske figurer* i et monofunksjonelt system. Konkreter inngår imidlertid inn under multifunksjonelle representasjoner.

Jeg vil begynne med å presentere to tallinjer som viser elever som har brukt tallinjen visuell støtte og deretter vil jeg gi eksempler der elevene i større eller mindre grad brukte tallinjen som modell.



Figur 16: Utdrag fra elevbesvarelse



Figur 17: Utdrag fra elevbesvarelse

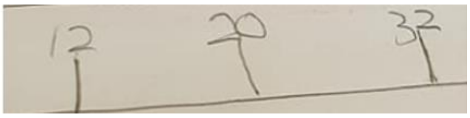
Vi ser her to forskjellige eksempler der elevene har benyttet tallinjene som visuell støtte. Tallinjen kan brukes som en visuell støtte for elevene ved løsning av for eksempel tekstoppgaver. Dette for å finne svar på oppgavene. Analysefunnene indikerer at løsningsprosedyrene tar form som kjente algoritmer ved hjelp av tallinjen. Transformasjonene har gått fra kontekst som er multifunksjonelle representasjoner og over til tallinje som er monofunksjonelt representasjoner (Duval, 2006). Tekstoppgave, konkreter og tallinje er alle forskjellige semiotiske systemer. Det foregår her transformasjon i form av omdannelse hvor en kontekst blir byttet ut med tallinje (Duval, 2006), Jeg antar at Duval ville ha sagt at det her foregår en ikke - kongruent transformasjon Duval (2006 s. 122 – 124).

I de tre neste figurene skal vi se er tre tallinjer som jeg mener kan omtales som «modeller» for oppgaven og ikke som visuell støtte. Oppgaven var som følger:

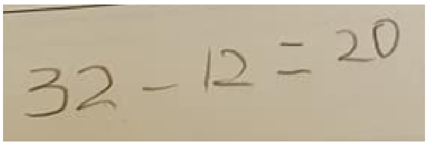
«En dag fikk Per 30 kroner i lommepenger. Han hadde 2 kroner fra før. Hvor mange kroner hadde han nå? Neste dag gikk Per på butikken. Han kjøpte en is til 12 kroner, hvor mye hadde han igjen?»

Det er her delspørsmål to som har blitt besvart av elevene.

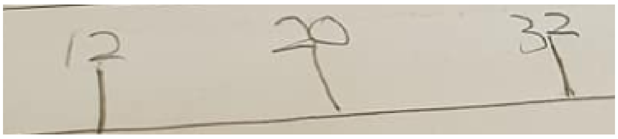
I motsetning til figurene (figur 16 og 17) over klarer ikke elevene å gjøre nytte av tallinjen, og det matematiske objektet beholder ikke sin opprinnelse. Disse transformasjonene er i likhet med de transformasjonene i figurene over av typen omdannelse. Slik jeg ser det er det ingen aktivitet i denne tallinjen. Jeg klarer ikke å se hvilken regneoperasjon som foregår. For meg virker det som eleven bare har satt inn de tallene han har fra tekstoppgaven og ikke noe mer. Det matematisk objektet eller den matematisk operasjonen er borte. I disse tilfellene vil jeg anta at Duval ville ha hevdet at det her foregår forsøk på kongruente omdannelser og at det kan være årsaken til at eleven ikke klarer å gjennomføre en vellykket transformasjon, og dermed bidrar til at regneoperasjon blir feil. Jeg ønsker å se nærmere på hva som skjedde under denne aktiviteten. Jeg velger derfor å legge ved transkripsjonen av situasjonen.



Figur 18: Utdrag fra elevbesvarelse



Figur 19: Utdrag fra elevbesvarelse



Figur 20: Utdrag fra elevbesvarelse

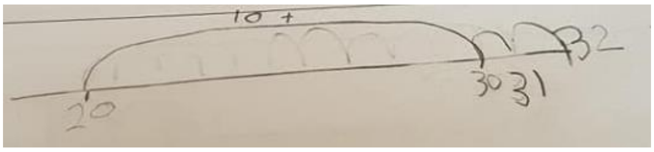
Regnestykket med symboler er nedskrevet helt riktig. Eleven klarer en vellykket transformasjon av type omdannelse fra konteksten til symbolene. Utfordringen kommer da han skal sette det inn på en tom tallinje. Eleven velger å sette tallene i stigende rekkefølge med utgangspunkt i de tallene han har fra regnestykket og klarer derfor ikke å vise regneoperasjonen. Her er transkribering av denne situasjonen etter at han har skrevet symbolene:

1. L: kan du vise meg det med tallinje?
2. Nils: ja, det kan jeg. Ehhhh…..
3. L: Ja, der lager du tallinjen ja *«eleven tegner».* Hva velger du å starte med?
4. Nils: ehhh, det er jo egentlig ikke så viktig hvor jeg begynner, men jeg må begynne en plass…. Da kan jeg begynne med 12`a først.
5. L: ok
6. Nils: nei
7. L: vil du ikke det?
8. Nils: jo, for da kan…..ehhhh….. for da kan jeg sette….ehhh 20`a her
9. L: ok
10. Nils: det som også går an er å sett 32 her, da har jeg gjort det.
11. L: har du vist meg at 32 – 12 er 20?
12. Nils: ja, men…. hvorfor kan ikke du vise meg svaret?
13. L: du har jo funne svaret, da du regnet med tall i sted, og det er riktig det, svaret er 20. Men hvordan kan vi se det på tallinja di?

14. Nils: ehhh, det kan jeg ikke………eller ehhh, det er jo i midten….. ehh tallinja må jo bli sånn…..

I linje fire til elleve ser vi et eksempel på en elev som prøver å transformere subtraksjonsoppgaven ved hjelp av kongruent transformasjon mellom forskjellige semiotiske system. Kongruente transformasjoner er ifølge Duval noe de fleste elever vil klare (Duval, 2006). I dette eksempelet ser en at eleven ikke klarer å gjennomføre transformasjonen og det skyldes muligens at en må foreta en ikke - kongruent transformasjon. Det er som nevnt vanskeligere å se det samme matematiske objektet i de to ulike representasjonene, og elevene får derfor problemer med å løse oppgaven.

I dette bildet ser vi et eksempel på en tallinje der oppgaven har blitt modellert via tallinjen. En kan ikke kjenne igjen det matematisk objektets opprinnelse, i denne tallinjen. Opprinnelsen på oppgaven var i likhet med oppgaven over 32 -12 = 20. For meg kan det se ut som om regneoperasjonen skulle ha vært noe sånt som 20 + 10 + 1 + 1 = 32.

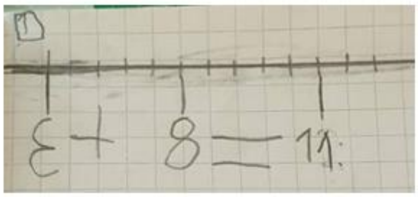


Figur 21: Utdrag fra elevbesvarelse

Den tredje tallinjen vi skal se eksempel på er fra oppgaven:

> «En dag så Per 18 gule blomster og 3 røde, utenfor vinduet. Hvor mange blomster så han til sammen?»

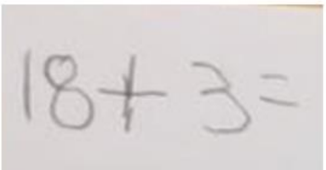
Her kan en tydelig se at eleven har benyttet tallinjen som en modell, fremfor en visuell støtte. Om en ser nøye etter, stemmer ikke strekene/punktene på tallinjen med sifrene som står til strekene/punktene på tallinjen. Tallet elleve står på det trettende punktet, om tre og åtte står rett. Om elleve er på riktig plass, står eventuelt tre og åtte feil. Det fremgår derfor ikke av tegningen at det er 3 + 8 = 11. Vi ser at regnestykker med symboler står under tallinjen med noen lengre streker/punkter på tallinjen. Tanken til eleven er kanskje at tallene skal stemme med punktene på tallinjen og da vise regneoperasjonen forkonteksten. Eleven har muligens prøvd seg på en kongruent transformasjon av typen omdannelse.



Figur 22: Utdrag fra elevbesvarelse

Jeg vil nå vise et eksempel som også fremstår som en modell, som fungerer som visuell støtte av et regnestykke. Oppgaven er som følgende:

«En dag så Per 18 gule blomster og 3 røde, utenfor vinduet. Hvor mange blomster så han til sammen?»



Figur 23: Utdrag fra elevbesvarelse

Figur 24: Utdrag fra elevbesvarelse

Eleven startet med å skrive regnestykket (figur 23), men fant ikke svaret. Eleven ønsket å benytte centikubene. På figuren ved siden av (figur 24) ser vi at eleven har modellert 18 + 3 (bildet er tatt opp/ned, motsatt av eleven). Eleven teller her opp begge mengdene hver for seg, setter et plusstegn imellom, for så å telle alt en gang til. Svaret kommer ikke til syne her. Vi ser kun en modell av oppgavens utgangspunkt. Eleven fant svaret ved hjelp av denne modellen.

Ut fra det Duval hevder i sin artikkel, kan en si at eleven har gjennomført en kongruent transformasjon av oppgaven. Eleven har gjort en omdannelse der han har gjennomført en transformasjon mellom flere semiotiske systemer. Eleven gikk fra tekstoppgave til tall for så å gå direkte til konkretene. To av disse systemene vil bestå av forskjellige funksjonelle representasjoner. Konkreter består av det Duval (2006 s. 110) omtaler som multifunksjonelle representasjoner, der det ikke forekommer noen algoritmer. Symbolene er her en algoritme og ligger i det monofunksjonelle systemet.

4.2 Utfordringer i transformasjon fra en tekstoppgave til tall, tallinje og konkreter

I elevenes arbeid med transformasjon fra tekstoppgave til tall, tallinje og/eller konkreter fant jeg tre typer hovedutfordringer. Den første utfordringen er knyttet til tolkning av begreper i tekstoppgavene. Elevene klarte ikke å se eller forstå hva de skulle gjøre ved løsninger av tekstoppgaver. Skal vi «plusse eller minusere»? Den andre utfordringen var at regnestykket ble feil nedskrevet og da ble svarene feil. Den siste utfordringen jeg observerte var at elevene hadde problemer med å utføre regneoperasjoner på tallinjen og da spesielt ved subtraksjon.

4.2.1 Utfordringen knyttet til tolkning av begreper i tekstoppgavene

Her skal vi se eksempler der elevene finner det utfordrende å gjennomføre vellykkede transformasjoner fra tekstoppgaver til tall, tallinje og konkreter. Elevene har vanskelig for å tolke begrepene i tekstoppgavene og derfor kan det ofte oppstå tolkningsfeil i denne fasen.

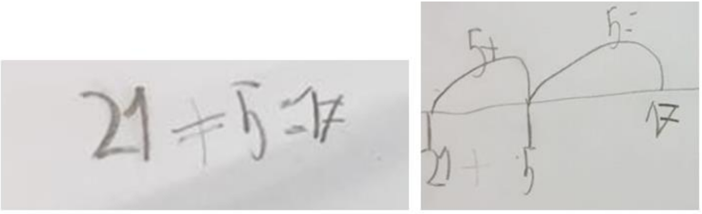
Vi skal få se et eksempel på en elev som finner det utfordrende å tolke begrepene i tekstoppgaven. Når begrepene er vanskelige å tolke kan det matematiske objektet bli feil. I linje fire og av figurene ser vi at eleven har regnet feil og årsaken til det kan være at eleven ikke har klart å hente ut det riktige matematiske objektet fra konteksten.

Eleven har alt regnet ut svaret på oppgaven ved hoderegning. Utfordringene starter da eleven skal skrive oppgaven med tall på papiret. Transkriberingen er fra da eleven begynte skrivingen. Oppgaven var som følger:

«I en klasse var de til sammen 21 elever. En dag var fem elever borte, hvor mange elever var igjen?»

1. L: Hva har du gjort her?
2. Ivar: Regnet ut oppgaven?

3. L: ok? Hva ble regnestykket da?
4. Ivar: 21 + 5 = 17
5. L: Hvor mange elever fikk du da?
6. Ivar: Svarer spørrende 17?



Figur 25: Utdrag fra elevbesvarelse

Til venstre i figuren (figur 25) ser vi at eleven har skrevet pluss, men korrigert seg selv og skrevet minus. Han har ikke tolket tekstoppgaven riktig. Vi ser av figuren til høyre at eleven ikke klarer å utføre regneoperasjonen ved hjelp av tallinjen. Dette indikerer at eleven ikke klarer å tolke begrepene fra tekstoppgaven. Når eleven ikke klarer å tolke begrepene, vil ikke det matematiske objektet bevare sin opprinnelse. I transformasjonen fra disse tekstoppgavene er det viktig å tolke begreper som «er igjen», «til sammen» og «steget». Klarer ikke eleven å tolke riktig, kan transformasjonen være utfordrende for eleven. Eleven klarer ikke å transformere fra tekstoppgaver som ligger innenfor det Duval kaller naturlig språk til tall/symboler som ligger innenfor det Duval kaller notasjon eller til tallinje som kommer inn under systemet figur. Naturlig språk består av det Duval omtaler som multifunksjonelt representasjoner, mens tall og tallinje er monofunksjonelle representasjoner (Duval, 2006, s. 110).

Neste eksempel er av en annen elev som viser forvirring når det gjelder å tolke begrepene i oppgaven.

I oppgaven står det:

> «En dag fikk Per 30 kroner i lommepenger. Han hadde 2 kroner fra før. Hvor mange kroner hadde han nå? Neste dag gikk Per på butikken. Han kjøpte en is til 12 kroner, hvor mye hadde han igjen?»

En ser i linje seks og sju at eleven ikke klarte å hente ut eller se den matematiske operasjonen som denne oppgaven krevde. Hva skal jeg gjøre, skal jeg «plusse eller minusere»? Transformasjon av representasjoner krever at en må frigjøre det matematiske objektet fra hele det opprinnelige semiotiske systemet, for så å transformere det til en representasjon i et annet semiotisk system.

1. L: Hva står det så at du skal gjøre i oppgaven?
2. Vera: «litt motløs leser eleven videre…..» Han kjøper seg is?
3. L: ja….pause…. hva kostet isen?
4. Vera: 12?
5. L: ja, Hvor mange penger har han da?
6. Vera: «*ehhh, tenker...*» hva skal jeg gjøre……
7. skal jeg plusse eller minusere?

Neste oppgave handler om grader og kan av den grunn være noe vanskelig. Jeg velger likevel å ta den med da observasjonen er ganske beskrivende for elever som møter matematiske utfordringer. Her skal vi se på to elever som jobber med samme oppgave der den ene eleven viste sterk frustrasjon og ble noe irritert under oppgaveløsningen.

Elevene i denne studien var godt vant med å registrere temperatur da de hadde jobbet med dette som en del av dagenes oppstart. Tekstoppgaver med temperatur var de for øvrig ikke vant med. Oppgaven var som følger:

«En dag var det 13 grader ute, neste dag hadde temperaturen steget med 3 grader. Hvor mange grader var det da ute?»

1. L: kan du løs den oppgaven?
2. Chris: hva skal jeg gjøre?
3. L: du skal finne ut hvor mange grader det ble.
4. Du skal lage regnestykket og finne ut hvor mange grader det er.
5. Chris: jaaa men, HVA skal jeg gjøre?
6. L: hva mener du?
7. Chris: hva skal jeg?
8. skal jeg plusse eller minuse?
9. L: Å ja, da må du se i teksten, hva står det?
10. Chris: jeg vet ikke jeg….. «*ser undrende på meg, og sier*»
11. det står ikke noe om det.
12. Bare si HVA jeg skal gjøre.
13. L: du lurte på om det var pluss eller minus?
14. Chris: mmm og nikker.
15. L: når noe stig, så blir det større…
16. Chris: da er det pluss! «*Sies litt sånn bestemt*».
17. L: ja, da må vi plusse. «Lærer kikker på arbeidet til den andre eleven og sier»
18. – du har skrevet helt riktig, og du har skrevet 13 + 3.
19. Det vil jeg også skrive. «Læreren skriver det på tavla, mens han sier:»
20. det var 13 gradet også steig det med 3.
21. «*Dette gjør han samtidig* som han skriver regnestykket.»
22. «*Læreren spør da*» – hvor mange grader var det da?
23. Nils: jeg har alt funne ut svaret.
24. L: ja, helt riktig «ser at Nils har skrevet 13 + 3 = 16»

Disse to elevene opplevde denne oppgaven helt forskjellig der Chris i motsetning til Nils ikke klarte å tolke begrepet «steget». Chris klarte derfor ikke å gjennomføre en vellykket transformasjonsprosess. Om vi ser i linje to, fem og tolv ser vi at eleven uttrykker kraftig frustrasjon at han ikke vet hva han skal gjøre. Nils derimot, hadde de kognitive kravene som krevdes for å gjennomføre en vellykket transformasjon fra tekstoppgave til regnestykker med tall.

I det følgende presenteres en dialog der eleven ikke klarer å tolke hva han skal gjøre. Oppgaven var som følger:

En dag fikk Per 30 kroner i lommepenger. Han hadde 7 kroner fra før. Hvor mange kroner hadde han nå? Neste dag gikk Per på butikken. Han kjøpte en is til 17 kroner, hvor mye hadde han igjen?

1. L: kan du les oppgaven for meg?
2. Vera: en dag………? «eleven leser oppgaveteksten»
3. L: ja…. Klarer du å skrive regnestykket her?
4. «Lærer peker på arket. Det er stille, eleven tenker.»
5. Læreren spør igjen. Hva skal du gjøre nå?
6. «Fremdeles stille………»

7. Er du usikker, spør læreren?

En kan si at denne oppgaven krever at eleven klarer å tolke «fra før» og «igjen» Her ser vi at eleven ikke klarer å kjenne igjen det matematiske objektet. Eleven vet ikke hva som forventes nå. Han klarer ikke å skifte mellom to forskjellige semiotiske representasjoner. Eleven klarer ikke å gå fra det semiotiske systemet tekstoppgave til det semiotiske systemet symboler.

4.2.2 Utfordringer knyttet til feil i nedskrivingen av regnestykkene

I dette eksemplet skal vi se en samtale som viser et vanlig problem i forbindelse med transformasjon fra muntlig språk til skriftlige symboler, nemlig feil i nedskrivingen. Oppgaven var som følger:

«En dag fikk Per 30 kroner i lommepenger. Han hadde 2 kroner fra før. Hvor mange kroner hadde han nå? Neste dag gikk Per på butikken. Han kjøpte en is til 12 kroner, hvor mye hadde han igjen?»

Her utdrag fra dialogen.

1. Vera: ja..
2. L: hvor mange kroner hadde Per?
3. Vera: ehhh 30?
4. L: ja, men er det alt? Stille….
5. «eleven ser på oppgaven og tenker igjen…..»
6. Vera: ehh…. nei?
7. L: nei, «svarer læreren litt sånn oppmuntrende.»
8. Hvor mange kroner har Per?
9. Vera: sju?
10. L: har Per sju kroner?
11. Vera: nei, han har sju til?
12. L: ok, hvor mange kroner har han da?
13. Vera: «svarer litt spørrende» - 37?
14. «Eleven er ikke sikker på om dette er rett.»
15. «Eleven prøver seg litt sånn spørrende.»
16. L: ja, det er helt riktig, hvordan fant du ut det?
17. Vera:… ehh 30 og 7 til?
18. L: ja, kan du skrive oppgaven her?,…. «*og peker på arket*»
19. Vera: 30 + 7 = 307
20. L: ok, er dette riktig? Kan du lese det du har skrevet?
21. «Eleven leser og korrigerer seg selv når han starter å lese oppgaven.»
22. Vera: tretti pluss sju er lik tre….nei nei nei, det er bare 37.
23. Eleven visker bort og skriver 37.

I linje 19 ser vi at eleven foretar en transformasjon fra det semiotiske systemet tekstoppgave, til det semiotiske systemet symbolske tall. Dette er en transformasjon av typen omdannelse. Med tall og symboler skriver eleven 30 + 7 = «307». Eleven foretok en kongruent transformasjon av tallet 37. Dette med feil nedskriving av regnestykket viste seg å være en gjennomgående utfordring for elevene.

Eksemplet jeg nå skal presentere kunne vært brukt både under denne type utfordringer, og den kunne vært et godt eksempel på utfordringer knyttet til tolking av tekstoppgaver. Jeg velger å se på utfordringer knyttet til feil i nedskrivingen av et regnestykke.

Eksempelet syns jeg er et godt eksempel på en elev som finner transformasjon fra tekstoppgave krevende. I denne tekstoppgaven er det mye informasjon, som eleven må transformere og sette i system. Oppgaven var som følger:

«Per hadde ti drops i en poser, da han traff Ole ga han bort to. Dagen etter gav han bort 3 til Kari. Hvor mange drops hadde Per igjen?»

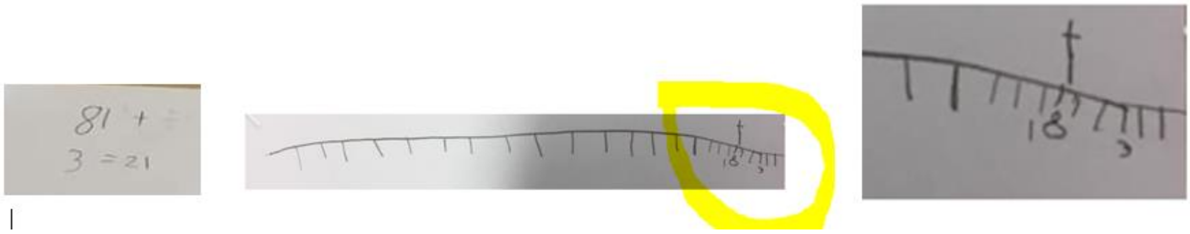
Her utdrag fra dialogen:

1. L: hvordan blir regnestykket?
2. Vera: ehh jeg vet ikke… «eleven ser ned på oppgave/teksten»
3. L: hva har han?
4. Vera: ti
5. L: mm, åsså…
6. Vera: to?
7. L: ja, hva gjør du da? han har ti også gir han bort to….?
8. Hvordan kan du skrive det regnestykket?
9. «Ser på det eleven skriver»
10. «og registrerer at eleven skriver pluss og ikke minus»
11. «men velger å fortsette»
12. L: okey. Han gir bort to, også gir han bort tre til…
13. Vera: men da sitt det igjen fem?
14. L: ja, bra Vera, men hvordan kan vi skrive dette som
15. et regnestykke?
16. «Læreren ser på det eleven skriver»
17. «mens han sier det eleven har skrevet» - ti pluss to,
18. også gir han bort tre?
19. L: Hva blir svare her nå da?
20. Vera: 12
21. L: okey, åsså da? pluss tre «*lest fra oppgaven til eleven*»?
22. Vera: femten?
23. L: ja, men du fikk jo fem i ste…. stille….
24. Vera: det skal være minus?
25. L: ja, det er klart det må være minus.

Ut fra denne dialogen kan man se at eleven sier en ting, men tolker og skriver noe annet. Dialogen viser at eleven er fortrolig med «gir bort» som subtraksjon i muntlig tale, men skriver pluss i nedskrivingen av regnestykket. Dialogen viser at eleven finner riktig svar under den muntlige samtalen med læreren, men skriver feil i nedskrivingen av regnestykket. Vera finner i linje 13 riktig svar ved muntlig gjennomgang, men klarer ikke å skrive riktig regnestykke (se linje tjue og tjueto). Helt til slutt i dialogen, forstår hun hva som er feil og sier i linje tjuefire: «- det skal være minus»

4.2.3 Utfordringer knyttet til transformasjon til tallinje

Dette eksempel viser to elever som ikke klarer å transformere tilfredsstillende fra symbolsk uttrykk til tallinjen. I disse to eksemplene ser en tydelig at elevene prøver å gjennomføre transformasjoner ved hjelp av kongruent omdannelse.

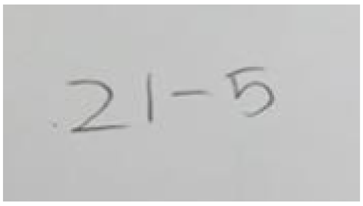


Figur 26: Utdrag fra elevbesvarelser av samme objektet, 18 + 3 = 21

Til venstre i figuren (figur 26) er objektet representert ved tall. De to bildene til høyre er samme bilde. I eksemplet over virker det for meg som om eleven foretar en kongruent transformasjon, en transformasjon av typen omdannelse, fra tall til tallinje. En ser av tallinjen at eleven starter med atten, som i regnestykket, for så å addere tre. Eleven skriver et stort plusstegn og tallet tre på tallinjen. Jeg kan ikke se av tallinjen hvilken regneoperasjon han har gjennomført.

I neste eksempel vil jeg igjen presentere en elev som finner det utfordrende å transformere til tallinje. Oppgaven var som følger:

«I en klasse var de til sammen 21 elever. En dag var fem elever borte, hvor mange elever var igjen?»



Figur 27: Utdrag fra elevbesvarelse

Figur 28: Utdrag fra elevbesvarelse

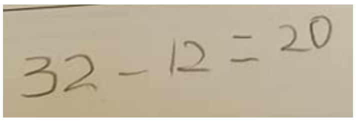
Begge figurene (figur 27 og 28) viser elevbesvarelser av samme objekt, 21 – 5 = 16.

Jeg ser det slik at eleven transformerer riktig fra tekstoppgaven, slik at eleven har et fint utgangspunkt for transformasjon til tallinje. Eleven har ikke funnet svaret, men har skrevet algoritmen for tekstoppgaven. I figur 30 gjennomfører eleven en kongruent transformasjon av type omdannelse. Eleven går fra tekstoppgave til å representere oppgaven med tall (figur 27). Videre ser vi at eleven har laget en tallinje med 21 punkter (figur 28), og han har satt av en bue som illustrerer minus fem, som indikerer subtraksjon. Jeg vil anta at denne transformasjonen kan karakteriseres som en ikke - kongruent transformasjon av type omdannelse, da det ikke fremkommer av tallinjen hva oppgaven er. Jeg vil tro at elevene ikke finner det lett å se at dette er ett og samme matematisk objekt.

Subtraksjon var i utgangspunktet utfordrende for mange, og da spesielt ved transformasjon til tallinjen. Elevene fant det utfordrende å utnytte tallinjens funksjoner, og da som nevnt spesielt ved subtraksjon. Denne eleven klarte å tolke konteksten, skrive matematikkstykket med riktige symboler og eleven fant det riktige svaret. Utfordringen lå i det å vise dette ved hjelp av tallinjen. Oppgaven var som følger:

«En dag fikk Per 30 kroner i lommepenger. Han hadde 2 kroner fra før. Hvor mange kroner hadde han nå? Neste dag gikk Per på butikken. Han kjøpte en is til 12 kroner, hvor mye hadde han igjen?»

Elevens transkribering er fra dialogen ved delspørsmål 2.



Figur 29: Utdrag fra elevbesvarelse

Figur 30: Utdrag fra elevbesvarelse

Figur 29 og 30 viser elevbesvarelser av samme matematiske objekt.

1. L: klarer du å vise dette med tallinje?
2. Eli: ja det kan jeg…
3. skal vi sjå…
4. vi starte med den lang strek sånn…..
5. skal vi sjå…
6. må nå start med det minste tallet først (plotter inn 12)…. Sånn
7. åsså…. hmmm (undrer seg litt)
8. neste tall må nå bli tjue….?
9. «*ser etter bekreftelse...*»
10. jeg vet nå svare… svare er jo 20…..
11. L: ja, det har du funne ut….
12. hva nå da?
13. Eli: nei, det blir vel trettito her da… «*peker på tallinjen*»
14. ja det blir det «*hun setter av 32*».

Av samtalen kan man si at her skjer en kongruent transformasjon mellom ulike semiotiske systemer. Grunnen til det er at informasjonen som er i tekstoppgaven organiseres tilsynelatende likt fra det semiotiske systemet tall til det semiotiske systemet tallinje. Duval påpeker at selv det å gå fra en tekstoppgave til å løse den med tall er utfordrende for mange elever (Duval, 2006). Jeg vil anta at eleven i akkurat denne konteksten tilfredsstiller de kognitive kravene som skal til for å gjøre en kongruent transformasjon fra tekstoppgave til tall, men det svikter da han skal bevege seg fra det semiotiske systemet tall og over til det semiotiske systemet tallinje.

4.3 Oppsummering

Hele studien er utarbeidet for å svare på forskningsspørsmålet: «Hva kjennetegner arbeid med tekstoppgaver hos elever på småtrinnet og hvilke utfordringer kan oppstå når de transformerer fra hverdagskontekst til tall, tallinje og konkreter?»

Ved å analysere datamaterialet fra studien fant jeg fire kjennetegn som kjennetegner elever på småtrinnet sitt arbeid med tekstoppgaver. I tillegg fant jeg tre utfordringer ved transformasjon fra hverdagslig kontekst til tall, tallinje og konkreter. Det som kommer til syne gjennom elevenes elevarbeid og muntlige forklaringer når det gjelder transformasjon mellom semiotiske systemer, er kongruente transformasjoner. Det gjøres klart i teoridelen at det er ikke - kongruente transformasjoner mellom semiotiske system som krever mest kognitive forutsetninger og dermed mest forståelse av matematikken for å oppleve mestring.

De fire kjennetegnene som preget denne studien var for det første at eleven benyttet et naturlig muntlig språk. For det andre benyttet de ofte flere representasjoner i en og samme oppgave. Et annet kjennetegn var at elevene prioriterte å benytte symboler for å regne ut og finne svar på tekstoppgavene. Det vil si at elevene for eksempel regnet ut svaret i hodet først før de skrev det med for eksempel tall eller på tallinjen. Det siste kjennetegnet var at representasjonene ble brukt som en type «modell» for regneoperasjonen. Dette enten ved visuell støtte for å finne svaret eller bare som modell for å referere til via det muntlige språket. De tre første kjennetegnene var unisone for hele elevgruppen. De tre utfordringene elevene møtte i transformasjonen fra hverdagslig kontekst til symbolske regnestykker, tallinje og konkreter var for det første at elevene ikke klarte å hente ut eller se det matematiske objektet i oppgavene. En kan si at de hadde problemer med å tolke begrepene i oppgaveformuleringen av den hverdagslige konteksten. For det andre klarte de ikke å se hvilken regneoperasjon de skulle gjøre og regnestykket ble derfor feil nedskrevet. Den siste utfordringen jeg observerte var at elevene ikke klarte å utnytte tallinjens funksjoner, og dette spesielt i tekstoppgaver knyttet til subtraksjon.

5 Drøfting

Jeg vil påpeke at jeg gjennom denne studien ikke vil kunne gi noen generell konklusjon basert på studien. Derimot kan jeg drøfte funnene mine opp mot andre studier gjort på liknende områder. På denne måten kan jeg modifisere eller bygge opp om eksisterende forskning (Stake, 1995 s. 7-8). I mitt datamateriale ser jeg at de kjennetegnene og utfordringene som jeg registrerte er gjennomgående ved transformasjon fra tekstoppgaver til tall, tallinje og konkreter. Dette kapitlet vil jeg dele i to deler der jeg til å begynne med vil drøfte kjennetegnene for så å si noe om utfordringene. Jeg vil foreta en drøfting i kronologisk rekkefølge etter den rekkefølgen funnene er presentert i analysedelen.

Denne studien viser, i likhet med det andre har skrevet om transformasjon mellom forskjellige semiotiske representasjoner og semiotiske systemer, at elevene opplever dette som komplekst. Studien viser at det er utfordrende for elevene å bevege seg fra ett semiotisk representasjon og over i et annet. Kontekst er multifunksjonelle representasjoner, mens symboler og tallinje er begge monofunksjonelle representasjoner. Resultatene fra studien tyder på at transformasjoner fra tekstoppgave til tall, altså transformasjonen fra en multifunksjonell til en monofunksjonell representasjon, var utfordrende for de fleste av elevene i denne elevgruppen (Duval, 2006),

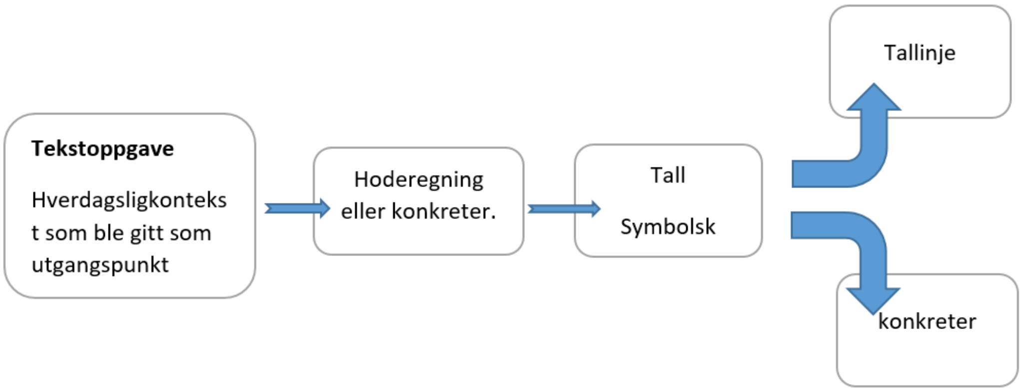
I mitt datamateriale ser vi tydelig at mange elever spesielt har problemer med transformasjon fra en tekstoppgave til symbolske uttrykk Altså tall, og dette gapet er det flere elever som ikke kommer seg over (Duval, 2006, s. 19). Duval skriver videre at man må koordinere de ulike semiotiske representasjonene som brukes for et objekt for å utvikle en matematisk forståelse for objektet. Uten en slik samordning kan ikke elevene mobilisere ulike representasjoner i et samspill og utføre transformasjoner. Det som blir viktigst i undervisningen er ikke nødvendigvis å velge den beste semiotiske representasjonen, men å gjøre elevene i stand til å koble forskjellige måter å representere det matematiske objektet på (Duval, 2006). Videre skiller Duval mellom kongruente og ikke - kongruente omdannelser (Duval, 2006). Også dette ser vi eksempler på i denne studien, det å jobbe med oppgaver som ikke er kongruente er utfordrende for elevene. Det er ifølge Duval for mye fokus på kongruente omdannelser i matematikken. Videre hevder han at det er ikke - kongruente transformasjoner som viser seg for mange å være vanskelige. En transformasjon som har samme rekkefølge med det som er skrevet på et matematisk språk er kongruent og Duval anser dette som en lettere transformasjon enn en ikke - kongruent transformasjon der samme objekt opptrer på to forskjellige måter (Duval, 2006). Som nevnt i teoridelen skiller Duval mellom to typer transformasjoner. Det er behandling som er en transformasjon innad i samme semiotiske system, mens omdannelse er en transformasjon mellom to forskjellige semiotiske systemer. I mitt datamateriale forekommer det flest transformasjoner i form av omdannelser. Årsaken er kanskje så enkel som at elevene ble bedt om å gjøre dette i oppgaveformuleringen. Jeg bad de om å transformere på kryss av semiotiske systemer. Derfor ble det transformasjoner av typen omdannelse. Noen elever foretok transformasjoner i form av behandlinger, men det var heller unntaket enn regelen. Transformasjonen som behandling kom oftest uoppfordret.

Kongruente transformasjoner mellom semiotiske system er ifølge Duval typiske i skolen og krever mindre kognitive prestasjoner enn ikke- kongruente transformasjoner (Duval, 2006). Problemet til mange elever er at de ikke klarer å gå fra ethvert semiotisk system til et annet uten hjelp. Duval hevder faktisk at mange av elevene vil klare å gjøre kongruente transformasjoner mellom semiotiske representasjoner, noe som også stemmer med min studie (Duval, 2006).

5.1 Kjennetegn

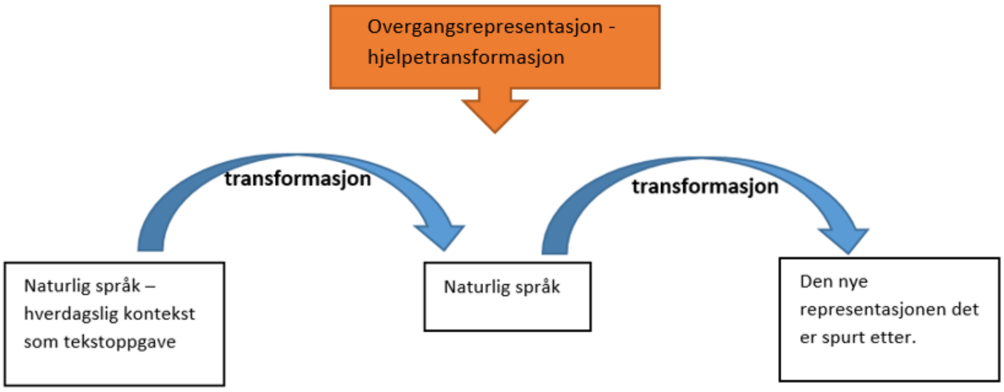
Kjennetegnene som fremgikk av analyseresultatene var som forventet. Som Duval beskriver i sin artikkel, er transformasjoner som omdanning utfordrende for elevene (Duval, 2006). Alle oppgavene elevene fikk var av typen omdanningsoppgaver og krevde transformasjon mellom forskjellige semiotiske systemer. Ingen av oppgavene ga i utgangspunktet rom for transformasjon innad i samme semiotiske system, altså behandlingsoppgaver. I mitt datamateriale kan jeg identifisere fire forskjellige semiotiske systemer, sammen med overgangsrepresentasjon, som elevene brukte i arbeidet med tekstoppgaver knyttet til endring av representasjoner. Alle oppgavene som elevene fikk var tekstoppgaver og dette innebar at elevene ble presentert for oppgavene i systemet tekstoppgaver, av hverdagslig kontekst.

Jeg vil først vise en modell som illustrerer hvilke semiotiske system elevene brukte da de jobbet med tekstoppgavene. Modellen viser hvilken rekkefølge transformasjonene gikk mellom de forskjellige semiotiske systemene.



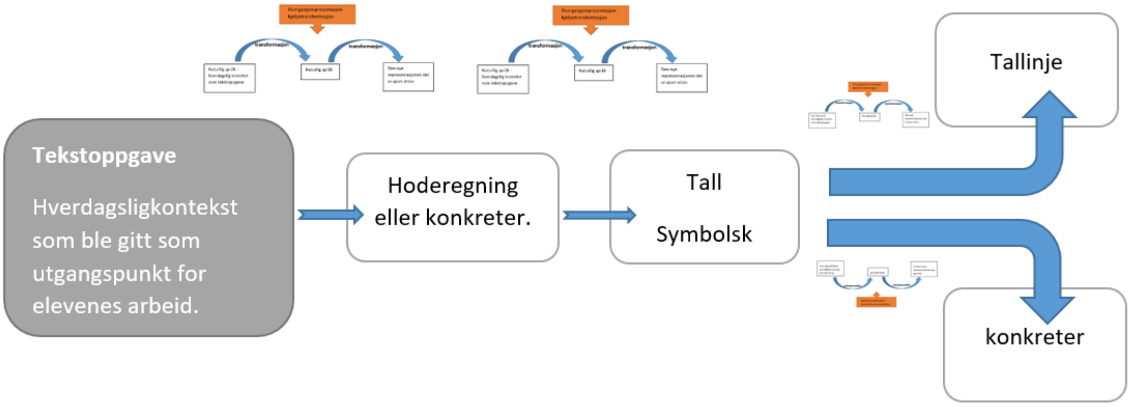
Figur 34: Utdrag fra elevbesvarelse

I de blå pilene, altså mellom de forskjellige semiotiske systemene, foregår det transformasjon via en hjelperepresentasjon elvene brukte. Elevene benyttet denne overgangsrepresentasjonen uoppfordret, og denne bruken var unison for hele elevgruppen bortsett fra en elev. Figur 31 viser hvordan elevene benyttet denne overgangsrepresentasjonen eller hjelperepresentasjonen.



Figur 31: Illustrasjon av hvordan elevene benytter naturlig språk som hjelpetransformasjon

Under presenteres en modell som viser de semiotiske systemene, inkludert overgangsrepresentasjonen. Duval kaller denne overgangsrepresentasjonen «transition representation» (Duval, 2006, s.111 og 120-121).



Figur 32: Modell som viser de semiotiske systemene, inkludert overgangsrepresentasjonen

I datamaterialet mitt kommer det frem at omdannelser mellom disse fire systemene foregikk, og samtlige grupper startet i hverdagslig kontekst siden oppgaven ble gitt innenfor dette systemet*.* I følge Duval er man nødt til å jobbe med et matematisk objekt innen flere systemer og det å kunne skifte det semiotiske systemet er viktig for elevenes matematiske forståelse for det matematiske objektet (Duval, 2006). Å se på omdannelsen fra en tekstoppgave/kontekst til et symbolsk uttrykk blir derfor viktig. I tillegg nevner Duval at nettopp denne omdannelsen er spesielt utfordrende for elevene blant annet fordi de også må oversette begrepene i tekstoppgaven til matematiske operasjoner (Duval, 2006). I min studie fikk elevene jobbe med tekstoppgaver i forskjellige hverdagslige kontekster, som igjen skulle endres til andre systemer. Dette bidro til at jeg som forsker tydelig fikk se hvor utfordringene til elevene var. Utfordringen var som jeg nevnte i forrige delkapittel, å se det matematiske objektet, feiltolking av oppgaven slik at oppgavene ble feil nedskrevet og subtraksjon ved bruk av tallinje.

I følge Duval krever en matematisk forståelse en indre koordinering mellom ulike semiotiske representasjoner, og samspillet mellom ulike representasjoner skal hjelpe elevene å få en bedre forståelse. Dette skjer *ikke* hvis elevene ikke knytter de ulike representasjonene sammen. I min studie blir representasjonene tekstoppgave i hverdagslig kontekst og for eksempel tall, tallinje eller konkreter separate objekter som elevene ikke alltid klarte å koble sammen, som igjen bidro til at elevene ikke klarte å løse oppgavene. Hvis elevene ikke utvikler evnen til å koordinere mellom ulike semiotiske systemer, vil de forskjellige representasjonene anses som forskjellige objekt uten relasjoner mellom dem selv om de er representasjoner av det samme objektet. Man er nødt til å gjøre elevene i stand til å koble sammen de forskjellige måtene ett og samme matematiske objekt kan representeres på. Det fordi, som Duval hevder, at dette er viktig for læring i matematikk. Ifølge Duval vil elever som behersker transformasjoner i form av omdannelse kunne overføre den matematiske kunnskapen til andre sammenhenger (Duval, 2006).

Jeg kunne valgt å se på det første kjennetegnet som om det var til meg de snakket til, altså en forklarende stemme. Eller jeg kunne valgt å se på stemmen som den «indre talen» som Lev Vygotski (1896 – 1934) snakker om (Imsen, 2005 s. 39). Ifølge Lev Vygotsky fungerer språket som psykologisk redskap (Imsen, 2005, s. 255) Dette kan kalles et kjennetegn ved elevenes arbeid med tekstoppgaver knyttet til endring av semiotiske representasjoner. Grunnen til dette valget er at jeg tidligere har sett at elever foretar denne «dialogen» med seg selv. Elevene snakker med seg selv om det de gjør (Imsen, 2005, s. 256). De skaper egne indre bilder av det de samtaler om. Jo mer kompleks situasjon, jo viktigere er det at barnet bruker dette for i det hele tatt å klare oppgaven. Jeg kan også av og til foreta en type «dialog» med meg selv når jeg jobber med matematiske oppgaver. Dette som en type støtte i den matematiske progresjonen. Derfor velger jeg å se på denne «dialogen/samtalen» som en del av et kjennetegn når elevene arbeider med tekstoppgaver knyttet til endring av semiotiske representasjoner.

Kilpatrick et al. hevder i likhet med Duval at egenskapene ved de ulike representasjonene er betydningsfulle, og det er derfor viktig at en tenker gjennom hvor hensiktsmessig en representasjon vil være for å utvikle forståelse (Kilpatrick et al., 2001). Vi så i analysedelen eksempler på elever som benyttet fingrene som en representasjon for tallene med varierende resultat. Jeg kan forstå at fingre ikke er hensiktsmessig ved for eksempel addisjon eller subtraksjon av flersifrede tall. I analysen så vi et eksempel på en elev som vurderte representasjonen og valgte en annen representasjon, men innen samme semiotiske system. I matematikken kommer transformasjon mellom semiotiske systemer først og fremst fram når en representasjon skal velges der denne representasjonen gjør det enklest å gjennomføre transformasjonen. Dette kan også komme fram hvis et annet semiotisk system brukes som støtte til den første. For matematisk forståelse er det ifølge Duval viktig å kunne koordinere mellom flere ulike semiotiske representasjoner (Duval, 2006).

For å vurdere synlighet kan man spørre seg hvor enkelt kan man se det matematiske objektet gjennom representasjonen? Duval skriver om transparent representasjoner i artiklene sine, der han forklarer hva som menes med transparente representasjoner (Duval, 1999, 2000 og 2006). Jeg vil her komme med en forklaring på min forståelse av det Duval skriver om transparent representasjoner. «Ti-basemateriell» er for eksempel mer transparent enn fingrene som eleven først prioriterte. «Ti-basemateriell» er ferdiggruppert og forholdet mellom enere, tiere og hundrede er synlige da de er proporsjonale. En tier er ti ganger større enn en ener, og en hundrer er hundrede ganger større enn en ener og ti ganger større enn en tier. Om en tar mynter som et eksempel, vil det ikke være like opplagt for elevene at det er ti en-kroner i en tikrone, eller hundrede en-kroner i en hundrelapp. Fingrene og myntene er ikke like transparente som ti-basemateriell.

I analysen så vi eksempler på transformasjoner Duval kaller behandling og omdannelse. Omdannelse er ifølge Duval en kompleks transformasjon, da skifte av system krever gjenkjennelse av det samme objektet i to ulike semiotiske systemer (Duval, 2006 s. 111). Eleven finner ved hjelp av konkreter svaret på oppgaven. Mens eleven finner frem konkretene og riktig mengde, snakker hun for seg selv. Når hun blir enig med seg selv, går hun tilbake til den symbolske utregningen og skriver svaret.

Jeg vil her påstå at eleven vurderer representasjonene og velger den representasjonen som er mest hensiktsmessig i dette tilfellet. Gevinsten med å benytte centikuber kan kanskje oppleves som oversiktlig for henne, da hun kan ta ut fem enheter for de første bamsene og tolv enheter for de andre bamsene, for så å addere de eller telle opp hele mengden til slutt. Eleven benyttet her tre forskjellige semiotisk systemer. Eleven gikk fra kontekst til symboler, via konkreter. Denne transformasjonen fra kontekst til tall via konkreter kaller Duval for omdannelse. Det betyr at eleven har gjennomført transformasjoner mellom forskjellige semiotiske systemer.

I denne studien var konkreter en representasjon som elevene kunne benytte. Om jeg skal sette konkreter i sammenheng med Duval sitt system, er det i det registeret som Duval omtaler som ikoniske og ikke - ikoniske. Det skjer en behandling innad i dette systemet siden eleven transformerer mellom to ulike former for konkreter (Duval, 2006). Som Holm skriver, vil konkreter være ting som elevene kan manipulere og ta på (Holm, 2002).

Når det gjelder ulike behandlingsprosesser er det ifølge Duval spesielt transformeringer innenfor multifunksjonelle semiotiske representasjoner som er mest utfordrende (Duval, 2006, s. 116-121). Dette begrunner han med at elevene ikke kan bruke bestemte algoritmer innenfor disse systemene, i motsetning til når en for eksempel foretar skriftlige utregninger eller symbolmanipuleringer av algebraiske symboler. Med for eksempel hverdagslig kontekst må elevene oppfatte hva oppgaven ber om. Det innebærer blant annet god begrepsforståelse, der eleven må tolke eller forstå hva differanse, økning, til sammen, igjen ol står for. I denne prosessen kan ikke elevene følge en bestemt oppskrift, men må selv finne en måte å angripe problemstillingen på. Selv om behandlingsprosesser i de multifunksjonelle representasjoner kan være utfordrende for elevene i den matematiske prosesseringen, er det likevel ifølge Duval omdannelsesprosessene hvor elevene transformerer representasjoner mellom ulike semiotiske systemer elevene oftest har vanskeligheter med å mestre. Duval skriver utfyllende om dette i sine studier (Duval, 1999, 2006). Han sier at elevene kan bli «hemmet» i sin matematiske utvikling om de ikke mestrer disse transformasjonene, og det er akkurat det elevene opplever ved disse utfordringene. Elevene klarer ikke å komme seg videre for å finne svar på sine matematiske oppgaver.

Datamaterialet viser at transformasjoner som omdannelse er kognitivt krevende for elevene. Duval skriver at ulike representasjoner har ulikt potensial og hver representasjon kan komme med ulike bidrag til forståelsen (Duval, 2006). Jeg vil si at det var det som bidro til at elevene i enkelte tilfeller fant svarene på oppgavene. Elevene valgte forskjellige og hensiktsmessige representasjoner for å finne svar på oppgavene. Ingen representasjon kan alene dekke alle aspekt ved et begrep og det er nettopp derfor vi er nødt til å bruke forskjellige representasjoner for å kunne dekke objektet så godt som mulig. Det er samspillet mellom de ulike semiotiske representasjoner som skal hjelpe elevene til å forstå. Forståelse kommer ikke før elevene knytter de ulike representasjonene sammen. I følge Duval er man nødt til å jobbe med et matematisk objekt innen flere systemer (Duval, 2006). Det er helt avgjørende i arbeid med ulike semiotiske representasjoner å kunne skifte mellom semiotiske systemer og fremdeles beholde det matematiske objektet.

For meg som forsker var det ikke så viktig om eleven fant svaret, men hvordan elevene kom fram til det. Eleven benyttet flere ulike semiotiske representasjoner for å komme frem til riktig svar. Det var frem og tilbake mellom kontekst, muntlig språk, tall, konkreter og tilbake til tall igjen. I denne situasjonen skjer det kongruente transformasjoner mellom de ulike representasjonene. Dette ser vi ved at det er de samme tallene/verdiene som går igjen og organiseres likt i alle de semiotiske systemene. Duval påpeker at selv det å gå fra en tekstoppgave til symboler er utfordrende for mange elever (Duval, 2006). Eleven må inneha de kognitive kravene som skal til for å gjøre en kongruent transformasjon fra kontekst ti,l konkreter og tilbake til symboler.

Duval påpeker at matematiske aktiviteter er avhengige av dette mangfoldet av semiotiske representasjoner siden ulike problemstillinger er enklere å løse med en representasjon fremfor en annen eller må løses innenfor et bestemt semiotisk system (Duval 2006, s. 108). I likhet med det jeg observerte i denne studien, påpeker Duval at en som regel enten implisitt eller eksplisitt tar i bruk flere semiotiske systemer i arbeidet med matematikkoppgaver.

Min analyse viser at elevene prøver seg frem og prioriterer ofte å først regne ut regnestykket, for eksempel i hode, for så å skrive regnestykket ned på papiret. Ofte ble dette gjort før de gikk over til å transformere den semiotiske representasjonen til for eksempel tallinjen. Dette var en unison fremgangsmåte for hele elevgruppen. Jeg erfarte at transformasjonene mellom de forskjellige semiotiske representasjonene gikk enklest ved addisjonsoppgaver, fremfor subtraksjonsoppgaver. Ved subtraksjon ble elevene usikre på hva som var forventet av dem å gjøre.

5.2 Utfordringer

Når det kommer til utfordringene var de relativt unisone. Med det mener jeg at det var stort sett på de samme områdene elevene møtte utfordringer i oppgaveløsningene. I følge Duval vil egenskapen som er knyttet til begrepene i en tekstoppgave være utfordrende for elever å tolke for så å transformere til symbolske uttrykk (Duval, 2006, s. 108). Han skriver at det vil være mange elever som ikke kommer til å mestre denne transformasjonen uansett hvilket matematisk objekt de jobber med. Dette er helt i tråd med det min analyse viser når det gjelder tolkning av begreper i tekstoppgaver. Jeg observerte at formuleringen av tekstoppgavene påvirket elevene på småtrinnet sitt arbeid med tekstoppgaver knyttet til endring av representasjoner og hvilke utfordringer som oppstår i transformeringen mellom de forskjellige semiotiske representasjonene. I samtlige oppgaver der elevene skulle finne noe «*til sammen*», var det tydelig at elevene tenkte addisjon. I motsetning til elevenes trygghet på hva de skulle gjøre i oppgaver som omhandlet spørsmål «*til sammen*», var elevene tilsvarende usikre på hva de skulle gjøre i oppgaver der de skulle finne «*hvor mye er igjen*». Til forskjell fra «*til sammen*», ble elevene her usikre på hva som var forventet av dem. De spurte ofte: «Hva skal jeg gjøre?». I følge Duval vil egenskapene som er knyttet til begrepene i en tekstoppgaver være utfordrende for elevene å oversette til for eksempel symbolske uttrykk (Duval, 2006, s. 108). Han skriver som nevnt at mange elever ikke vil komme til å mestre denne transformasjonen. Videre hevder han at dette vil gjelde uansett hvilket matematisk objekt de jobber med. Disse utfordringene oppsto ved transformasjoner av typen omdannelse. Det være seg da eleven skiftet fra det semiotiske systemet naturlig språk til det semiotiske systemet tall, tallinje el konkreter. Som det fremgår av studiene ser vi eksempler der elevene ikke er i stand til å kjenne igjen objektet «trettisju» i de to forskjellige systemene. Butterworth skriver at tallordene over 20 ikke har noen tydelig kobling mellom skrivemåte og uttale (Butterworth, 1999). I nedskrivingen av «trettisju» får eleven kjenne på denne forskjellen. Duval skiller mellom kongruente og ikke - kongruente omdannelser (Duval, 2006). «Trettisju» er et sammensatt ord av tretti og sju. Eleven har transformert det sammensatte ordet bit for bit i skriftlige symboler. Han har altså laget en direkte relasjon mellom «trettisju» i muntlig form og skriftlig form med tallsymboler. Hun har først skrevet ned «tretti» på arket, 30. Deretter «sju», 7. Setter man disse tallsymbolene i sammenheng får vi «307» som vi leser som trehundrede og sju. En kan si at eleven har foretatt en kongruent transformasjon av type omdannelse, hvor det er direkte relasjon mellom komponentene. Omdannelsen fra «trettisju» til «37» er en ikke - kongruent omdannelse, siden komponentene ikke har noen direkte relasjon (Duval, 2006).

En annen typisk utfordring som jeg registrerte da elevene skulle skrive riktig symbolsk utrykk ut fra en tekstoppgave, var at symbolene ble feil nedskrevet. Det matematisk objektet ble endret og transformasjonen ble ikke riktig. Duval hevder at det er utfordrende for elevenee å gå fra å beskrive en sammenheng med naturlig språk til å representere den ved notasjon med tall eller bokstavsymboler (Duval, 2002). Han hevder at elevene har vansker med å kjenne igjen det matematiske objektet. Jeg registrerte for øvrig at enkelte elever kunne se for seg det matematiske objektet visuelt i hodet, til tross for det klarte de ikke å tolke begrepene slik at transformasjonen ble riktig.

Studien viser at transformasjoner mellom enkelte semiotiske representasjoner oppleves helt uproblematisk for elevene, mens annen transformering, altså mellom andre representasjoner, oppleves for enkelte elevene som svært komplekse og utfordrende. Elevene mestret for eksempel addisjon bedre enn subtraksjon. Grunnen for dette kan kanskje være at elevene enklere fant det matematiske objektet når oppgaven krevde addisjon, eller at det rett og slett er en førsteprioritet for elevene å benytte addisjon. Det kan være som en vane eller uvane. Begrepet «til sammen» er muligens et begrep de er kjent med og derfor velger elevene addisjon. Det er mulig at læreren bruker begrepet «til sammen» synonymt med begrepet «er lik». Ofte ble det en modell av symbolene når regnestykkene skulle representeres ved bruk av tallinje og konkreter. Grunnen for dette kan være at elevene tenker at tallene på tallinjen skal være stigende, som for eksempel i en kongruent transformasjon. Dette muligens som en kompetanse de har lært tidligere. En annen mulighet kan være at elevene ikke har jobbet med tallinje og subtraksjon, eller generelt åpen tallinje tidligere. Jeg tenker at bruk av tallinje ikke gir en kongruent transformasjon. Symbolene i et regnestykke kommer nødvendigvis ikke i stigende rekkefølge, og vil derfor stille større kognitive krav av eleven.

6 Avslutning

Gjennom ulike deler av denne teksten har jeg både presentert et forskningsspørsmål og spesifisert og svart på spørsmålet. Under vil jeg svare kort og konsist på forskningsspørsmålet for å gi leseren en kort oppsummering av hva forskningen har ført til. I dette avsluttende kapittelet vil jeg først besvare forskerspørsmålet mitt. Deretter vil jeg diskutere studiens troverdighet og helt til slutt studiens bidrag til forskningsfeltet og veien videre. Hensikten med denne studien har vært å identifisere hva som kjennetegner arbeid med tekstoppgaver hos elever på småtrinnet og hvilke utfordringer kan oppstå når de transformerer fra hverdagskontekst til tall, tallinje og konkreter? Dette har jeg gjort ved deltagende observasjon av en elevgruppe på småtrinnet i arbeidet med tekstoppgaver.

En viktig del av analysen av elevenes arbeid med tekstoppgaver knyttet til transformasjonen mellom semiotiske representasjoner og semiotiske systemer, var hvordan elevene jobbet og hvilke utfordringer de ble stilt overfor. Her kom det til syne at elevene løste oppgavene ved hjelp av kongruente transformasjoner mellom semiotiske representasjoner. Det som gjorde transformasjonen mellom semiotiske representasjoner kongruent var at informasjonen i tekstoppgavene ble organisert på samme måte i begge representasjonene i de ulike semiotiske systemene. Dette er ifølge Duval noe de fleste elever vil klare (Duval, 2006). Det var en elev som mestret både kongruent og ikke - kongruent transformasjon. Ut over dette kommer det ikke til syne om elevene mestrer å gjøre en ikke- kongruent transformasjon mellom ulike semiotiske systemer og heller ikke om de var i stand til å gå fra enhver semiotisk representasjon til et annen uten hjelp. Det ble vanskeligere å se det samme matematiske objektet i de ulike semiotiske systemene. Elevene vil sannsynligvis, som Duval hevder, få problemer med å løse oppgaver ut over en smal læringskontekst (Duval, 2006).

I følge Duval er man nødt til å jobbe med et matematisk objekt innen flere semiotiske systemer og det å kunne skifte det semiotiske systemet er viktig for elevenes forståelse for det matematiske objektet. Å se på transformasjon fra en tekstoppgave til et symbolsk uttrykk blir derfor viktig. I tillegg nevner Duval at nettopp denne transformasjonen er spesielt utfordrende for elevene blant annet fordi de må oversette begrepene i tekstoppgaven til matematiske operasjoner (Duval, 2006). I min studie fikk elevene jobbe med tekstoppgaver ut fra en hverdagslig kontekst, noe som ga et godt bilde på de utfordringene Duval viser til. Han hevder for øvrig at matematisk forståelse krever en indre koordinering mellom ulike semiotiske representasjonene og samspillet mellom ulike representasjoner skal hjelpe elevene til å få en bedre forståelse. Dette skjer ikke hvis elevene ikke knytter de ulike representasjonene sammen. Hvis elevene ikke utvikler evnen til å koordinere mellom ulike semiotiske representasjoner, vil to forskjellige representasjoner anses som to forskjellige objekter, selv om de er to representasjoner av det samme objektet.

6.1 Kildekritikk

Mine funn kan ikke generaliseres siden dette er en studie med få forskningsobjekter, som ikke er representative for hele befolkningen. Til tross for at det var et begrenset utvalg av elever som ble observert i min studie, kan funnene jeg har presentert gi meg og andre lærere innspill til egen undervisning. Funnene fra studien, kjennetegnene og utfordringene kan overføres til andre klasserom med andre lærere. Funnene fra denne studien kan sammenlignes med resultatene fra andre tilsvarende studier slik at andre som har interesse innenfor samme fagfelt kan dra nytte av mine tolkninger og mine funn.

Jeg har reflektert over hva jeg kunne gjort annerledes dersom jeg skulle ha gjort undersøkelsen på nytt igjen. Jeg føler det er naturlig å starte med å kommentere elevgruppen. Jeg kunne ha brukt ukjente elever, fra en ukjent skole. Elevene var ganske raske til å tilpasse svarene ut fra det de trudde jeg ønsket svar på. Med det mener jeg at de hadde lett for å relatere oppgavene til de temaene de hadde jobbet med. Det var en elev som for eksempel begynte å snakke om oddetall og partall, tallets delelighet og lignende. Jeg tror at jeg kunne fått andre resultater med fremmede elever som ikke kjente meg. Med denne elevgruppen, hadde jeg stort spillerom og fleksibilitet med tanke på tilgangen av individene.

Jeg ville nok ha valgt andre oppgavetyper. Oppgavene i denne studien ble gitt i form av at elevene alltid skulle transformere fra det semiotiske systemet tekstoppgave av hverdagslig kontekst til det semiotiske systemet tall, til semiotiske systemet tallinje, for så å gå til det semiotiske systemet konkreter. Elevene skulle muligens ha fått forskjellige oppgaver til de forskjellige systemene. Det burde ikke vært slik at elevene alltid har fått beskjed om å gå fra hverdagslig kontekst til tall, til tallinje, for så å gå til konkreter. Det er i denne studien vanskelig å bedømme om elevene faktisk gikk fra den hverdagslige konteksten til tallinje, da elevene alltid var igjennom det semiotiske systemet tall først, og gjennom tallinjen før de gikk til konkretene. Det var som beskrevet i analysen, to elever som ytret et ønske om å benytte en bestemt representasjon, og det var eleven som ville benytte fingrene og centikuber, og eleven som syntes det var lettest å skrive det med tall først, ut over det gikk alle elevene den samme «veien».

Elevene opplever det som utfordrende å foreta en transformasjon fra et semiotisk system til et annet. Duval hevder at det er i selve transformasjonen mellom semiotiske representasjoner og da spesielt i mellom semiotiske systemer, som ofte er en svært kritisk terskel for elevene for fremgang i læring og for problemløsninger ved for eksempel tekstoppgaver (Duval, 2006, s. 107). Duval hevder videre at transformasjon av de semiotiske systemene er komplekse prosesser for elevene (Duval 2006, s. 103). Dette er noe jeg kan si meg helt enig i. Som lærer på småtrinnet er det viktig at en tenker på alle de forskjellige individene en til enhver tid har i klasserommet. Ingen av individene er helt like, alle er unike og har behov for tilrettelagt matematikkundervisningen, slik at de kan bli robuste og utforskende elever. Et hvert matematisk objekt bør presenteres med flest mulig ulike representasjoner.

6.2 Studiets bidrag til forskningsfeltet og veien videre

Ut fra mitt ståsted kunne videre forskning inne temaet transformering av semiotiske representasjoner vært interessant. I motsetning til denne studien har det vært interessant å undersøkt elever på mellomtrinnet. Hva kjennetegner arbeidet til elever på mellomtrinnet, når de jobber med tekstoppgaver av hverdagslig kontekst, og hvilke utfordringer møter de i transformasjonsprosessen fra tekstoppgaver til andre semiotiske systemer?

Som avsluttende kommentar, vil jeg påpeke at det har vært veldig lærerikt og interessant å opptre som forsker. Temaet transformasjon mellom semiotiske representasjoner har gjort prosessen ekstra spennende. Det er viktig at jeg som lærer i matematikkfaget legger til rette for at elevene får jobbe med forskjellige semiotiske representasjoner. Målet er å skape en klasseromskultur der semiotiske representasjoner er en del av hverdagen i matematikkundervisningen.

7 Referanser

Bednarz N., Janvier B. (1996) Emergence and Development of Algebra as a Problem-Solving Tool: Continuities and Discontinuities with Arithmetic. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Butterworth, B. (1999). The mathematical brain. London: Macmillan.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E., Weisbech, L. (1993). Models of Problem solving: A study of Kindergarten Children's Problem- Solving Processes. In Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 24, No 5. (s.428 – 441). National Council of Teachers of Mathematics.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). Thinking mathematically. Integrating Arithmetic & Algebra in Elementary School. Portsmouth: Heinemann.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). Research methods in education. London. Routledge.

Cummins, D. D., Kintsch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. Cognitive psychology, 20(4), 405-438.4.

Dahl, H. H og Nohr, M. E. (2013). Radius 1A. Matematikk for barnetrinnet. Oppgavebok. hefte 1. trinn. Oslo: Cappele Damm.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. France.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of Mathematics. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1(2),

1–16.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z.

Fangen, K. (2004). Deltagende observasjon: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Freudenthal, H. (2002). Revisiting Mathematics Education (Vol. 9, Mathematics Education Library). Dordrecht: Springer Netherlands.

Gersten, R., Beckmann, S., Clark, B., Foegen, A., Marsh, L., Star, J. R. & Witzel, B. (2009). Assisting students struggling with mathematics: Response to intervention RtI) for elementary and middle schools. What Works Clearinghouse. Georgia USA.

Hammersley, M. & Atkinson, P. (1996). Feltmetodikk: grunnlaget for feltarbeid og forskning (2. utg). Oslo: Gyldendal.

Hellevik, O. (2002). Forskningsmetode i sosiologi og statsvitenskap. Oslo: Universitetsforlag.

Holm, M. (2002). Opplæring i matematikk. For elever med matematikkvansker og andre elever. Oslo: Cappelen Akademiske Forlag.

I F. Hitt & M. Santos (Red.), Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (s. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico: PMENA.

Imsen, G. (2005). Elevens Verden. En innføring i pedagogisk psykologi. Oslo: Universitetsforlaget. 4. utg. 3. opplag (2008).

Jacobsen, D. I. (2000). Hvordan gjennomføre undersøkelser?: Høyskoleforlaget AS.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it up. Mathematics Learning study Committee, Center for Education, Washington, DC: National Academy Press.

Koedinger, K. R., & Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. The Journal of the Learning Sciences, 13(2), 129-164.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). Det kvalitative forskningsintervju. (2.utg). Gyldendal Norsk Forlag.

Moen, T., &Karlsdottir, R. (2011). sentrale aspekter ved kvalitativ forskning. Tapir akademisk.

Mulligan, J. T., Mitchelmore, M. C. (2013). Early awareness of mathematical pattern and structure. In Reconceptualizing early mathematics learning (pp. 29 - 45). Springer Netherlands.

Nilssen, V. (2012). Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren. Universitetsforlaget.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark (Vol. 18): Undervisningsministeriet.

Postholm, M. B. (2010). Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier. Oslo: Universitetsforlaget.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D.I. (2011). Læreren med forskerblikk. Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Robson, C. (2002). Real world research: A Resource for Social Scientist and Practioner-Researches. (2.utg). USA: Blackwell Publishing.

Stake, R. E. (1995). The art of case study research. Thousand Oaks, Calif.: Sage.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. Educational Studies in Mathematics, 32(1), 49-92.

Svingen, O. (2018). Representasjoner i matematikk, NTNU, Institutt for lærerutdanningen, Matematikksenteret, Trondheim.

Teacherspayteachers. Hentet fra: https://www.teacherspayteachers.com/Product/Tallplakater

Thagaard, T. (1998). Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitativ metode. Fagbokforlaget.

Thagaard, T. (2013). Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode. (4.utg). Fagbokforlaget.

Tjora, A. (2017). Kvalitative forskningsmetoder: i praksis. (3.utg, 1 oppl.). Gyldendal Norsk Forlag.

Utdanningsdirektoratet. (2016). Læreplan i matematikk (MAT1-04). Hentet fra: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-2.-arssteget-

Utdanningsdirektoratet. (2018). Høringsutkast kjerneelementer i Matematikk fellesfag og Programfag. Hentet fra https://hoering.udir.no/Hoering/v2/197?notatId=358

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. Lisse: Swetz & Zeitlinger B.V

Walkington, C., Sherman, M., & Petrosino, A. (2012). "Playing the game" of story problems: Coordinating situation-based reasoning with algebraic representation. The Journal of Mathematical Behavior, 31(2), 174-195.

Vedlegg 1 - Samtykkeskjema

Vedlegg 2 – Meldeskjema for behandling av personopplysninger

Vedlegg 1 – Samtykkeskjema

Vil du at ditt barn deltar i forskningsprosjektet

"Matematisk kompetanse i begynneropplæringen"?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å
finne ut hvilken matematisk kompetanse innehar elevene når de går i første og andre trinn.

I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Jeg skal nå starte å skrive på et prosjekt som omhandler elevers matematikkunnskaper, i begynneropplæringen. Jeg vil spesielt undersøke hvilken tallforståelse og matematiske strategier elevene benytter seg av, ved regning med flersifrede tall. Dette er en del av masterstudiet mitt, og informasjonen jeg henter av dette prosjektet, vil bli min endelige masteroppgave.
Underveis i arbeidet vil undersøke hvilken tallkunnskap, tallforståelse, tellestrategier, telleferdigheter, regnestrategier og regneferdigheter elevene på 1. trinn og 2. trinn innehar. Dette vil jeg undersøke vha av forskjellige oppgaver, av praktisk og teoretisk karakter. Jeg vil benytte tilstedeværelse i form av observasjon og lyd som dokumentasjon. I etterkant og eller underveis i arbeidet vil det trulig bli nødvendig med intervju av elevene.

Problemstillingen for oppgaven min og arbeidet mitt vil være; Hvilken matematisk kompetanse innehar elevene når de går i første og andre trinn?

Veileder for prosjekter er førsteamanuensis ved NTNU, Anita Valenta. Prosjektet et tilrådd av Personvernet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS (NSD).

Grunnen for at akkurat ditt barn er valgt ut, er helt tilfeldig. Jeg har valgt ut fire elever fra første trinn og fire elever fra andre trinn, og det skal helst være 50 % jenter og gutter. Utvalget er helt tilfeldig, da det har vært trekning.

For å kunne gjennomføre denne oppgaven trenger jeg å gjennomføre noen matematikkoppgaver på noen elever. Jeg ønsker å forske på hvilken matematisk kompetanse 1. og 2. klassingene har i begynneropplæringen. Dette er ingen omfattende undersøkelse, men kan ta i alt ca. 30 min per elev. Elevene vil få noen spørsmål og eller arbeidsoppgaver de skal løse, sammen med meg. Jeg og eleven vil gjennomføre disse oppgavene alene i eget rom. Jeg vil ta lydopptak av det elevene svarer. Dette lydopptaket vil jeg benytte meg av, ved transkribering.

Det er frivillig å delta, men det kreves skriftlig samtykke fra foresatte. Elevene kan når som helst trekke seg, uten at de må oppgi noen grunn. Foresatte kan når som helst få se oppgavene elevene skal løse. Foresatte har også når som helst muligheten for å trekke barnet fra prosjektet. Dette kan dere gjøre enten ved mail eller telefon. anita.normann@hemne.kommune.no eller på tlf: 92231849. Dere kan også kontakte NTNU, og da veileder for prosjekter, Anita Valenta (anita.valenta@ntnu.no).

Som nevnt tidligere er det frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger at ditt barn skal delta, kan du når som helst trekke ditt samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om ditt barn vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg eller barnet ditt hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Jeg vil bare bruke opplysningene om deg til formålene jeg har fortalt om i dette skrivet. Jeg behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Navnet på ditt barn vil jeg erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data», lagre datamaterialet på forskningsserver, innelåst/kryptert, etc.
Prosjektet skal etter planen avsluttes våren 2019. Alt av materiale, som for eksempel personopplysninger og eventuelle opptak under prosjektet, som gjelder ditt barn vil bli slettet.

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Jeg behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.
På oppdrag fra *NTNU* har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
NTNU ved veileder for prosjekter er førsteamanuensis ved NTNU, Anita Valenta (anita.valenta@ntnu.no)
Vårt personvernombud: Stig Rune Løfald
NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personvernombudet@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen
Anita Normann

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *matematisk kompetanse*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ *at mitt barn gjennomfører de oppgaver som er nødvendig for å finne svar på problemstillingen.*

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. vår 2019

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 2 -

Meldeskjema for behandling av personopplysninger

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Hvilken matematisk kompetanse innehar elevene når de går i første og andre trinn?

Referansenummer

237778

Registrert

02.09.2018 av Anita Normann - anitagje@stud.ntnu.no

Behandlingsansvarlig institusjon

NTNU Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for psykologi

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Anita Valenta, anita.valenta@ntnu.no, tlf: 73558985

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Anita Normann, anita.normann@hemne.kommune.no, tlf: 92231849

Prosjektperiode

02.09.2018 - 30.12.2018

Status

27.11.2018 - Vurdert

Vurdering (1)

27.11.2018 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 27.11.2018, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD ENDRINGER
Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 30.12.2018.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Lise Aasen Haveraaen
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)