

Trine Lise Stokke Larsen

# "Når jeg regner med den algoritmen så tenker jeg ikke, jeg bare regner!"

En studie av to læreres utprøving av variasjonsteori i undervisningen.

Masteroppgave i Matematikdidaktikk (5-10) LMM55004

Veileder: Svein Arne Sikko

Mai 2019



Trine Lise Stokke Larsen

# "Når jeg regner med den algoritmen så tenker jeg ikke, jeg bare regner!"

En studie av to læreres utprøving av variasjonsteori i undervisningen.

Masteroppgave i Matematikdidaktikk (5-10) LMM55004  
Veileder: Svein Arne Sikko  
Mai 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap  
Institutt for lærerutdanning

 **NTNU**  
Norwegian University of  
Science and Technology





# Forord

Da er det tid for å takke!

Jeg vil starte med å takke for muligheten til å få lære, til å utvide kunnskapshorisonten min og til å få større innsikt i et fag jeg har mye erfaring med, og stor glede av. Takk også for muligheten til forhåpentligvis å bli litt klokere og mer kritisk reflektert. Jeg kunne nok fortsatt med en mye lenger liste over ting jeg mener å ha lært av å ta dette masterstudiet.

Jeg har ikke gått veien alene, og det er mange jeg gjerne vil takke for at jeg i dag sitter inne med mye ny lærdom om et tema som jeg anser som viktig for meg, for mange enkeltindivider og for den norske skolen som kunnskapsformidler.

Først vil jeg takke kommunen min som har latt meg delta i kompetanseutviklingen for sine ansatte, og har lagt til rette med vikarordningen og dekket kostnader til reise, opphold og læremidler for meg. Så vil jeg takke rektor ved min skole som har lagt til rette for at jeg har kunnet ha to studiedager hver uke, i tillegg til fri til eksamener og lesedager i forbindelse med eksamener. Bjørg fortjener helt klart den største takken for at du var åpen og velvillig til å stille opp og åpnet døren til klasserommet ditt og lot meg få samarbeide med deg og observere deg. Uten deg og dine elever kunne ikke denne studien blitt gjennomført. Jeg vil takke veilederen min, Svein Arne Sikko, for all hjelp og støtte. Du har vært konstruktiv og tydelig i dine tilbakemeldinger, noe som har skapt refleksjon hos meg. I tillegg vil jeg takke medstudentene mine for gode diskusjoner, trivelige samtaler og hyggelig samvær.

Til slutt vil jeg takke familien min. Først barna mine Marcus Oliver og Thea Kristine, for at dere har vært tålmodige med meg i disse to årene, likeså mine bonusbarn Oskar og Viktor. Tore Kvernes, mannen min, fortjener en stor takk som har vært med i hverdagen og fungert som en uunnværlig støtte og diskusjonspartner. Du har lyttet tålmodig og kommet med gode innspill.

Skarnes. 16.mai 2019

Trine Lise Stokke Larsen

# Sammendrag

«Når jeg regner med den algoritmen så tenker jeg ikke, jeg bare regner!» En studie av to læreres utprøving av variasjonsteori i undervisningen, er en kvalitativ studie av to læreres forsøk på å ta i bruk prinsipper fra variasjonsteori i planlegging, undervisning, evaluering og endring av undervisning i matematikk.

Jeg har i min over 20-årige lærerkarriere, erfart at matematikkundervisningen elever i stor grad har fått og fortsatt får om blant annet multiplikasjon, kjennetegnes av algoritmetrening. På bakgrunn av dette hadde jeg et ønske om å finne ut hvordan en kan tilrettelegge for god undervisning. Hvordan lærere kan formgi en undervisning hvor elever kan utvikle den matematiske kunnskapen som stimulerer til videre læring.

Den teoretiske rammen for studien har et variasjonsteoretisk perspektiv, med utgangspunkt i Ference Martons variasjonsteori om læring og Gu Ling-yuans bianshi jiaoxue (teori om variasjon). Begge teoriene legger vekt på systematisk bruk av variasjon og uforanderlighet i undervisning og læring (Pang, Bao & Ki, 2017). Disse to teoriene er koblet sammen til et teoretisk rammeverk kalt variasjonsteori, på bakgrunn av blant annet det Pang et al.(2017) sier om at teoriene utfyller hverandre. Getie og Dings (2018) rammeverk har fungert som en guide i mitt arbeid.

I undersøkelsen samtaler jeg med og observerer Bjørg i planleggingssituasjoner, undervisningssituasjoner og evaluerings-/endringssituasjoner. Via et lærerperspektiv blir våre tolkninger og tanker om hva variasjonsteori er og hvordan vi kan ta det i bruk, løftet fram.

Det er følgende seks variasjonsteoretiske prinsipper, tolket og tatt i bruk, som blir belyst i studien:

- Læringsobjekt
- Kritiske faktorer
- Begrepsvariasjon
- Prosedyrevariasjon
- Variasjonsmønster
- Variasjon og uforanderlighet

Studien viser at overgangen mellom nåværende praksis og ønsket praksis, gjennom å tilegne seg ny teori, er stor når det gjelder formgiving av undervisning. Dette er særlig markert i prinsippet om begrepsvariasjon.

Studien aktualiserer ny forskning på matematikkundervisning med fokus på endret undervisningspraksis. Avslutningsvis hevdes det at lærere kan forbedre undervisningen i matematikk ved å ta i bruk prinsippene fra variasjonsteori.

# Abstract

*“When I calculate by that algorithm, I don't think, I just do it!”* A study of two teachers` trying out variation theory in teaching is a qualitative study of two teachers' attempts to apply principles from variation theory in planning, teaching, evaluating and changing teaching in mathematics.

Over the course of my career, I have found that the teaching students have received, and still receive in mathematics, to a large extent are characterized by algorithm training. This is also my experience when the teaching focuses on multiplication. On the basis of this, I had a desire to find out how one can facilitate good teaching. How for example teachers can design teaching, whereby students can develop the mathematical knowledge that stimulates further learning.

Variation theory as a theoretical framework for this study is based on Ference Marton's variation theory of learning and Gu Ling-yuan's *bianshi jiaoxue* (theory of teaching with variation). Both theories emphasize the systematic use of variation and invariance in teaching and learning (Pang et al., 2017). These two theories are connected in a theoretical framework called variation theory, based on, among other things, what Pang et al. (2017) says about the theories complementing each other. Getie and Dings (2018) framework has served as a guide in my work.

In the survey, I converse with and observe Bjørg in planning and teaching situations and also evaluation /change situations. Through a teacher`s perspective, our interpretations and thoughts about what variation theory is and how we can use it, are highlighted.

There are six principles from variation theory interpreted and applied, which are elucidated in the study:

- Object of learning
- Critical aspects
- Conceptual variation
- Procedural variation
- Patterns of variation

- Variation and invariance

The study shows that the transition between current practice and desired practice by acquiring new theory can be a struggle when it comes to the design of teaching, and that this is particularly marked in the principle of conceptual variation.

The study reveals new research on mathematics teaching with a focus on changed teaching practice. Finally, it is claimed that teachers can improve the teaching of mathematics by applying the principles of variation theory.

# Innhold

Innhold .....	6
1. Innledning .....	8
1.1 Problemstilling .....	9
1.2 Begrepsavklaring .....	12
1.3 Kapitteloppbygging .....	14
2. Teori jeg har tatt utgangspunkt i .....	16
2.1 Undervisning sett fra to ulike synsvinkler .....	16
2.2 Lesson study .....	18
2.2.1 Kinesisk lesson study .....	20
2.3 Variasjonsteori .....	21
2.3.1 Variasjon .....	21
2.3.2 Variasjonsteori om læring (VToL) .....	22
2.3.3 Bianshi jiaoxu (BS) .....	25
2.3.4 BS sammenlignet med VToL .....	28
2.3.5 Kombinasjon av BS og VToL .....	29
2.3.6 Rammeverk og modell .....	30
3. Metode brukt i min forskning .....	31
3.1 Valg av metode og forskningsdesign .....	31
3.2 Samtaler og deltakende observasjon .....	31
3.3 Lydopptak og film .....	34
3.4 Transkribering .....	34
3.5 Utvalg .....	35
3.6 Roller i undersøkelsen .....	36
3.7 Prosessen for å svare på mitt forskningsspørsmål .....	37
3.8 Tilnærming til analysen .....	38
3.9 Validitet og generalisering .....	41
3.10 Pålitelighet .....	41
3.11 Etske problemstillinger .....	42
4. Analyse og datapresentasjon .....	44
4.1 Læringsobjekt .....	44
4.2 Kritiske faktorer .....	47
4.3 Begrepsvariasjon .....	54
4.4 Prosedyrevariasjon .....	56

4.5 Variasjon og uforanderlighet.....	60
4.6 Variasjonsmønster.....	63
5. Drøfting.....	70
5.1 Drøfting i lys av teori.....	70
5.1.1 Læringsobjektet.....	70
5.1.2 Kritiske faktorer.....	73
5.1.3 Begrepsvariasjon.....	74
5.1.4 Prosedyrevariasjon.....	75
5.1.5 Variasjon og uforanderlighet.....	76
5.1.6 Variasjonsmønster.....	77
5.1.7 Konsekvenser for læreren.....	78
5.1.8 Hvordan variasjonsteori kan påvirke pedagogiske valg.....	79
5.2 Drøfting av metode.....	83
6. Oppsummering og perspektivering.....	85
Referanser.....	88

## Vedlegg

- 1- Godkjenning-NSD
- 2- Samtykkeerklæring; lærer
- 3- Samtykkeerklæring; elevene
- 4- Samtaleguiden
- 5- Elevoppgave

# 1. Innledning

“The ultimate goal of improving mathematics instruction is to develop students’ self-exploratory learning ability to learn how to learn by themselves without teaching in the future” (Gu, Huang & Gu, 2017, s. 36).

Dette sitatet handler for meg om hva målet med matematikkundervisning er, at elevene skal utvikle kunnskap og evne til å mestre problemer og nye situasjoner selv, med en trygghet om at de har med seg en «verktøykasse» for å løse nye utfordringer. For å få til dette er det behov for å se hvor viktig god kompetanse er for oss som underviser. Det å ha en tyngde i faget sitt er vesentlig for å få god læring hos elevene. Undervisningskvaliteten bestemmes i stor grad av hva læreren kan i matematikk, kan om hvordan elever lærer, og kan om hvordan man legger opp undervisningen. De beste matematikklærerne er de som får til å ha flere nivåer og vinklinger på temaet som undervises (Ding, Jones & Sikko, 2017, s. 242).

Hva som læres i en undervisning kan ikke forutses, men det er likevel et behov for å vite hvordan læreres handlinger påvirker elevenes læring. Lærerne selv trenger å være bevisst på dette, og til det trenger de en teori som kan guide dem til å vurdere og å planlegge en undervisningsøkt som vil føre til bedre læring (Runesson & Kullberg, 2017). Formålet med oppgaven min er å gi innsikt i hvordan en kan tilrettelegge for god undervisning, og få en forståelse for hvordan lærere kan formgi en undervisning hvor elever kan utvikle den matematiske kunnskapen som stimulerer til videre læring. Grunnen til min interesse for dette feltet er at jeg har jobbet som lærer i 20 år, og min erfaring er at den matematikkundervisningen norske elever i stor grad har fått, og fortsatt får, om blant annet multiplikasjon, kjennetegnes av algoritmetrening. Om man ser i lærebøker vi har brukt, som Tusen Millioner 5B eller Multi 7A (Rasch-Halvorsen, Rangnes & Aasen, s. 6; Alseth, Nordberg & Røsseland, 2014, s. 74) eller søker på nettsteder som anbefales, som matematikk.org eller matematikk.net (Marthinsen, Hagen & Baggethun, 2019.; Vedeld & Venheim, 2012), er det stort sett en gitt standardalgoritme man blir presentert for, og som skal læres. Eller også sagt på en annen måte; min erfaring er at lærere tolker bøkene og nettsidene i retning av at det er standardalgoritmer som skal innøves. For hva gjør vi som lærere når noen ikke forstår hva vi mener? Jo, da prøver vi ofte å forklare gjennom å vise



enda et lignende eksempel. I følge Ma (1999) trenger elever å jobbe med et bredere spekter av oppgaver og aktiviteter for å utvikle en mer helhetlig matematikk-kompetanse.

Kompetansebegrepet tolker jeg slik som beskrevet av Niss og Jensen (2002, s. 1). De vender seg bort fra den tradisjonelle, pensumbaserte beskrivelsen av matematikkfaget. I stedet foreslår de at hensikt og utbytte med undervisningen karakteriseres ved hjelp av åtte kompetanser, som er: tankegang, resonnement, kommunikasjon, problembehandling, modellering, representasjon, symbol og formalisme og hjelpemiddel. For å kunne tilrettelegge for god undervisning, trenger læreren god innsikt i den matematiske kompetansen til den enkelte elev, god kompetanse i pedagogikk og i selve det matematikkfaglige.

Siden øst-asiatiske elever overgår vestlige elever når det gjelder prestasjoner i matematikk i flere internasjonale tester (Ma, 1999, s. xxvi-xxviii; Nortvedt & Pettersen, 2016), har jeg ønsket å se på hva lærere i Kina gjør, som har elever som presterer på et gjennomgående høyt nivå over tid. Forskere har identifisert noen av kjennetegnene ved matematikkundervisningen i Kina, nemlig progresjonen til kunnskap og ferdigheter (Peng, Li, Nie & Li, 2017). Denne progresjonen kan representeres med hierarkiske kunnskapsnivåer eller en rekke strategier for å utføre matematiske aktiviteter (Gu et al., 2017). Det å legge vekt på flere metoder og ulike innfallsvinkler til et begrep, blir sett på som et viktig trekk i kinesisk matematikkundervisning (Gu, Huang & Marton, 2004). I flere studier har undervisning med variasjon blitt identifisert som en god måte å fremme effektiv læring i matematikk på. Man lærer matematikk via bruk av konkrete eksempler for at begreper eller kategorier av noe skal gi mening, for så å generalisere på tvers av kategorier og utvikle et hierarkisk system av kategorier (Gu et al., 2017). Elever gis en rekke problemer hvor essensielle trekk ved et matematisk begrep holdes uforandret, mens trekk som ikke er essensielle endres, noe som kalles variasjonsteori om læring eller teori om variasjon (bianshi jiaoxue på kinesisk). En slik undervisning hjelper elevene til å tilegne seg kunnskap steg for steg, og kontinuerlig utvikle erfaring i problemløsning og forme godt strukturert kunnskap (Peng et al., 2017).

## 1.1 Problemstilling

Det er de siste årene satt i gang tiltak for å bidra til bedre undervisning og mer læring i realfag i norsk skole (Bergem, 2016). Det er startet endring av innholdet i læreplanen, satset mer på etter- og videreutdanning, innført krav om faglig fordypning i norsk, matematikk og

engelsk, og kravene for opptak til lærerutdanningen er skjerpet. Likevel er det viktig å fortsette å iverksette tiltak for å øke andelen høytpresterende elever og redusere andelen av elever som presterer på laveste nivå i norsk skole.

Matematikkundervisningen i Kina har lagt stor vekt på problemløsningsoppgaver som er nøye planlagt, organisert og tilpasset. Lærerens organisering av undervisningen gir elevene muligheten til å finne egne metoder og prosedyrer som siden løftes fram i fellesskap og sammenlignes. Kinesiske elevers overlegne ytelse i matematikk i ulike internasjonale sammenligningsstudier har ført til økt interesse i å forske på hva som karakteriserer kinesisk matematikkundervisning. Både Ference Martons gruppe og Gu Ling-yuans gruppe har utviklet en undervisningsteori om variasjon, kalt henholdsvis variasjonsteori om læring og teori om variasjon, og argumenterer med at det er en effektiv måte å fremme meningsfull læring i matematikk på i store klasserom (Sun, 2010; Zhang, Wang, Huang & Kimmins, 2017).

Jeg vil i denne oppgaven ta i bruk variasjonsteori om læring og teori om variasjon, for å formgi, gjennomføre og analysere en undervisning om multiplikasjon med flersifrede tall. Jeg kommer til å bruke begrepet variasjonsteori som samlebetegnelse på begge undervisningsteoriene, men forklare forskjellene og likhetene mellom dem for så bruke dem som en modell. Det å slå sammen begge teoriene gjør jeg basert på arbeidet til Getie og Ding (2018).

Peng et al.(2017) viser til at Huang og Leung fant at undervisning med variasjon hjelper elevene til å tilegne seg kunnskap steg for steg, kontinuerlig utvikle erfaring i problemløsning og forme godt strukturert kunnskap. Peng et al.(2017) baserer seg også på Gu, og sier at undervisning med variasjon er en viktig måte elevene, på en enkel måte, kan forstå relevante matematiske begreper. I tillegg så illustreres essensielle trekk ved å bruke ulike visuelle materiell og noen ganger fremheves essensen ved et begrep ved å endre trekk som ikke er essensielle. Målet med variasjonsteori er å forstå essensen av et objekt og forme vitenskapelige begreper ved å eliminere distraksjon fra ting som ikke er essensielle (Peng et al., 2017). Man kan med andre ord si at gjennom bruk av ulike eksempler kan man la enkelte egenskaper ved et matematisk begrep variere, samtidig som man holder andre egenskaper konstant. Slik kan man identifisere egenskaper som en dimensjon av begrepet, som kan variere. Dette vil jeg beskrive nærmere i teorikapittelet. Blant annet med bakgrunn i det Peng

et al.(2017) sier, har jeg ønsket å finne ut om og på hvilken måte variasjonsteori kan tas i bruk i formgiving og gjennomføring av undervisning

Problemstillingen min er formulert på følgende måte:

***Hvordan kan prinsipper fra variasjonsteori brukes som verktøy i planlegging og gjennomføring av undervisning om multiplikasjon med flersifrede tall?***

Jeg har funnet få studier som tar for seg variasjonsteori om læring eller teori om variasjon, i Norge. Det er gjort mange studier på emnet internasjonalt, og det er faktisk gjort studier med bruk av variasjonsteori om læring kombinert med en type lesson study i Sverige. Det matematiske emnet multiplikasjon undervist på bakgrunn av variasjonsteori, finner jeg ingen studier på i Norge. De studiene jeg har funnet er masteroppgaver som stort sett har tatt for seg geometri og måling, og har en litt annen vinkling enn jeg har valgt.

(Begrepssammenhenger knyttet til areal – en kvalitativ studie av seks elevers arealforståelse. Hauge, 2016; Lavtpresterende elevers dynamiske arealforståelse i en læringsprosess. Orre, 2016; Elevers forståelse av måling av lengde. Aas, 2016; Et kognitivt blikk på eksempelbruk i matematikkundervisning. Storegraven, 2016).

For å kunne svare på problemstillingen valgte jeg å bruke aksjonsmetodikken casestudie og en arbeidsform som er inspirert av kinesisk lesson study. Grunnen til at jeg valgte denne arbeidsformen er fordi variasjonsteori om læring og teori om variasjon har sitt opphav i Kina, og fordi kinesisk lesson study har vist seg å være effektiv når man skal implementere ny læreplan /nytt pensum, forbedre undervisning og utvikle lærernes praksis. Gjennom denne arbeidsformen planla og gjennomførte jeg og en kollega en undervisning basert på variasjonsteori. Kinesisk lesson study inkluderer sykluser av samarbeidsaktiviteter med planlegging av undervisning, observasjoner av undervisning, gjennomgang av undervisning i etterkant og revidering og forbedring (Huang, Fang & Chen, 2017, s. 271). Lesson study er en type aksjonsforskning, og Cohen, Manion og Morrison (2018, s. 442) viser til en teori som sier at å drive aksjonsforskning er å planlegge, utføre, observere og reflektere mer grundig og systematisk enn man vanligvis gjør i hverdagen.

Jeg valgte derfor en rolle som deltakende observatør, også fordi jeg så det som hensiktsmessig å kunne diskutere og ha noen å sparre med under planleggingen og gjennomføringen, hvor fokuset rettes mot selve undervisningen. Observasjonene jeg gjør har til hensikt å se om og hvordan vi får til å formgi men også gjennomføre variasjonsteori i vår

undervisning. Jeg valgte å ta opptak av både planleggingen vi gjorde og av undervisningen. Det at den andre læreren gjennomfører undervisningen, valgte jeg rett og slett fordi jeg anser at det er lettere å observere og få med seg flest mulig detaljer i en undervisning man ikke foretar selv. Forskningstimene med variasjonsteori blir gjennomført i to parallelle klasser på 7.trinn ved en barneskole i Hedmark. Valg av skole falt seg naturlig da jeg jobber ved denne skolen, og kjenner både kommuneledelse, skoleledelse og lærere godt. Elevene som undervisningen skulle prøves ut på, er ikke mine egne elever, men læreren jeg samarbeider med har disse elevene til daglig i faget matematikk. For at omfanget av oppgaven ikke skulle bli for omfattende og vanskelig å gjennomføre valgte jeg å ikke fokusere på elevenes læring i denne prosessen. Jeg valgte å se på hvordan variasjonsteori kan brukes for å stimulere endring i handling hos lærere, og hvordan å reflektere over sin egen undervisning og endringer i perspektivet mot variasjonsteori.

## 1.2 Begrepsavklaring

### Variasjon

Selve begrepet variasjon i variasjonsteori betyr variasjoner i oppfattelsene av et fenomen. Det handler om å skape variasjon i det som skal læres. Det baserer seg på at elever og lærere ser et matematisk emne på ulike måter, og ved hjelp av variasjon er målet at alle skal få mulighet til å skille ut det som er kritisk for deres læring (Pang et al., 2017).

### Læringsobjekt

I følge variasjonsteori om læring har læreren et spesielt læringsmål (objekt) og dette kan utdypes i ulik grad. Et læringsobjekt er det læreren prøver å undervise, og det er ofte abstrakte forhold som kun kan erfares gjennom eksempler. Innholdet, kunnskaper eller ferdigheter som tilegnes gjennom læring kan kalles læringsobjekt. Læringsobjektet kan for eksempel være å utlede en metode å bruke på oppgavene eller å øke elevenes evner til å observere, sammenligne, oppdage og generalisere (Huang & Leung, 2017).

### Kritiske faktorer

Hvert læringsobjekt er satt sammen av flere ulike delementer og de elementene eller aspektene som ikke enda er skjelnet/skilt ut av eleven, men er nødvendige å skjelne, kalles kritiske faktorer. Disse faktorene må identifiseres for hvert læringsobjekt og for hver klasse man underviser. De kritiske faktorene kan ikke utledes fra variasjonsteori eller matematikk alene, men må identifiseres ved å studere og relatere elevenes læring og hvordan

læringsobjektet håndteres i undervisningen (Runesson & Kullberg, 2017). Det er avgjørende for elevenes læring at de klarer å skille ut disse delene eller faktorene. Disse kritiske faktorene kan betegnes som nøkler til læring. Forventede kritiske faktorer kan være hva som er det vesentlige elevene må lære, hvilke problemer elevene kan møte på, hva som kan forhindre læring og hvilke misoppfatninger som kan dukke opp. I alle situasjoner finnes det flere kritiske faktorer, men det er ikke mulig å skille ut alle samtidig. Derfor må man legge til rette for at elevene skiller ut de kritiske faktorene systematisk og dette kan gjøres ved å lage variasjonsmønster (Watson, 2017).

## Variasjonsmønster

Her kan man bruke som eksempel at, når man skal lære seg hva 3 er, må man kunne skille ut «3-heten» når man har for eksempel tre epler. Men å skille ut hva som er epler, hva som er fargen og hva som er 3, vil man ikke kunne klare før man lager variasjonsmønster hvor man beholder noe konstant og endrer en annen faktor. Hvis man her beholder 3 og så viser 3 ting som biler, hester og lys, så vil det mest sannsynlig bli lettere for den som skal lære å skille ut «3-heten» i situasjonen. Det kan jo være lurt å ha ulike farger på de ulike objektene slik at man ikke bruker fargen rød på alt og dermed kan forveksle 3 med rød. For at eleven skal lære å skille de kritiske faktorene er det viktig at eleven oppdager dem selv, og ikke bare blir fortalt hva som er de kritiske faktorene (Gu et al., 2017).

## Forkunnskaper

Gjennom å bruke kjent kunnskap for så å variere kontekst, forventes elevene å utvikle tilpassede og fleksible evner i problemløsning. Når man tar i bruk det elevene kan fra før, henter man inn elevenes forkunnskaper. Det er meget viktig å sette en riktig potensiell avstand mellom læringsobjektet og forkunnskapene til eleven. Den potensielle avstanden er skillet mellom det eleven kan fra før, og det eleven skal lære (Zhang et al., 2017).

## Kunnskapspakke

Når man i variasjonsteori formgir en undervisning vektlegges blant annet undervisningsrekkefølgen hvor forkunnskaper kommer inn, sentrale punkter ved den nye kunnskapen og framtidig læring i følge lærebøker/læringsmateriell. Det å planlegge ut fra en slik rekkefølge kalles gjerne en kunnskapspakke (Ma, 1999). Denne kunnskapspakken gir en veiledning for læreren til å utvikle en forståelse av sammenhengen mellom matematisk kunnskap. Det klargjør kunnskapen og gir en oversikt over metodebruk. En slik ramme setter læreren i stand til å praktisere og reflektere over undervisning med variasjonsteori fra to

sider. Det å vite hvordan man skal undervise, altså sette opp flere nivåer og gi ulike vinklinger inn mot matematisk kunnskap, og hvordan å undervise med vekt på de teoretiske elementene (Ding et al., 2017).

## Begrepsvariasjon

Begrepsvariasjon er knyttet til å se mening i og mellom kunnskap, og vektlegger det å forstå en ide fra ulike perspektiver (Ding et al., 2017). Et læringsobjekt kan bestå av flere faktorer som er kritiske for å få en helhetlig forståelse av objektet. For å oppnå helhetlig forståelse brukes variasjonsmønstre for å fokusere ulike faktorer hver for seg, men samtidig med muligheten for å trekke linjer mellom faktorene (Gu et al., 2004).

## Prosedyrevariasjon

Prosedyrevariasjon tar sikte på å gi en prosess for å forme et begrep, steg for steg, slik at elevenes erfaringer i problemløsning manifesterer seg i en rikdom av problemer og problemløsningsstrategier (Peng et al., 2017). Prosedyrevariasjon skal fremheve det å skape hierarkiske systemer når den som skal lære, erfarer prosesser med å brette ut matematiske aktiviteter (Ding et al., 2017). Dette inkluderer steg og strategier for å overføre eller utforske faget. Prosedyrevariasjon har til hensikt å hjelpe elever til å etablere begrepet stegvis. For eksempel når man skal skrive ligningen for et gitt problem, kan man prøve å representere den ukjente med noe konkret, symbolisere den ukjente og til slutt erstatte den ukjente med for eksempel bokstaven  $x$ . Formålet med den pedagogiske modellen er å formgi en rekke begrepsmessige og prosedyremessige variasjoner for å skape et erfaringsystem og hierarkiske strategier som kan internaliseres inn i de kognitive strukturene (Mok, 2017).

## Lesson study

Lesson study er, forenklet sagt, metoder hvor lærere i fellesskap planlegger undervisning, observerer hverandre og sammen reflekterer over gjennomført undervisning for stadig å kunne gjøre undervisningen bedre, med tanke på elevenes læring. (Huang & Shimizu, 2016).

## 1.3 Kapitteloppbygging

Videre i denne oppgaven vil kapittel to ta for seg det teoretiske rammeverket. I og med at oppgaven min har fokus på undervisning, vil to syn på undervisning hentet henholdsvis fra vestlige teoretikere og en fra vestens motstykke, Asia, bli trukket fram. Så vil teori om lesson study presenteres som inspirasjon for arbeidsformen, før variasjonsteori som ramme knyttes opp mot analysen av planlegging, gjennomføring, refleksjon og endring. Kapittel tre går inn

på metodiske valg jeg har tatt, både i valg av personer å observere og planlegge sammen med, hvordan analysen skal foregå og når det gjelder forskningsdesign. Det tar også opp studiens gyldighet, troverdighet og etiske spørsmål. I kapittel fire blir datamaterialet analysert og det teoretiske rammeverket variasjonsteori vil spille en viktig rolle for både struktur og funn. Kapittel fem er diskusjonskapittelet, og her ønsker jeg å drøfte de funn jeg kommer frem til i analysen og hvilke konsekvenser jeg ser dette kan få for de som ønsker å ta i bruk prinsipper fra variasjonsteori i egen undervisning. Kapittel seks er en oppsummering av studien og tanker om veien videre. Blant annet introduseres nye forskningsspørsmål som kan være med å belyse ytterligere hvordan en på best mulig måte kan få til en god undervisning for elevene i matematikk.

## 2. Teori jeg har tatt utgangspunkt i

I dette kapittelet vil det teoretiske rammeverket for min oppgave bli presentert. Først ønsker jeg å trekke fram undervisning sett fra et vestlig syn satt opp mot vestens motstykke, Asia.

Det gjør jeg for å si noe om utgangspunktet for oppgaven min, for å skape kontekst. Deretter sier jeg noe om arbeidsformen vi var inspirert av under planleggingen og gjennomføringen av undervisningen vår, kinesisk lesson study. Til slutt presenteres variasjonsteori som munner ut i modellen som ble sentral i arbeidet mitt.

### 2.1 Undervisning sett fra to ulike synsvinkler

Hvis vi først ser på noen vestlige teoretikere, så har både Harel (2008), Kaput (2008) og Sfard (2006) et «fellesskaps»- perspektiv som bakgrunn for hvordan de ser på matematikkundervisning. De fokuserer på at det er i en diskurs med internalisering og generalisering at læring generelt, og matematikk spesielt, skjer. En diskurs forstås som kommunikasjon som skjer i en gitt kontekst, for eksempel i et matematikklasserom. En diskurs har noen kjennetegn som er spesielt for det felleskapet. En type kommunikasjon der noen tar del, andre ikke, som er definert av noen regler for hvordan kommunikasjonen skal foregå. Freudenthal (1971) sier at elevene skal gjenoppdage matematikken og at det skal være en guidet gjenoppdagelse hvor læreren skal være guiden. Ser man til Doorman og Gravemeijer (2009), så mener de at den lærende skal gjenskape de matematiske strukturene i sitt eget miljø og konstruere matematiske begreper, noe de mener bør være undervisningens oppgave. Læreren skal guide denne gjenskapingen og her er det sentralt at eleven er en medkonstruktør av kunnskap. Læringsprosessen foregår kontinuerlig, i møte med andre mennesker og i kommunikasjon med de rundt. I følge Utdanningsdirektoratet innebærer undervisning i fag:

Å sette elevene i stand til å anvende kunnskaper og ferdigheter på ulike måter, slik at de over tid kan mestre ulike typer faglige utfordringer individuelt og i samspill med andre. Læreren skal støtte og veilede elevene til å kunne sette seg mål, velge egnede framgangsmåter og vurdere sin egen utvikling. (Utdanningsdirektoratet, 2018, s.12 og s.17).

Sammenligner man med en teoretiker fra Asia, så sier Sun (2011) at å bruke matematikk fra virkelige situasjoner, er en kjent trend i vestlig matematikkundervisning. Og oppgaver fra virkelige situasjoner, mener Sun (2011) som regel gir eksempler som gjør at man kan miste muligheten til å se en sammenheng mellom begreper og metoder, mens oppgaver med



matematisk kontekst trekker elevene inn i et område av relasjoner i det matematiske, til motsetning fra å rette oppmerksomheten mot objektet i seg selv. I følge Hershkowitz (1989) er det en ufullstendighet i tilnærmingen til, og undervisningen av nye begreper i skolen i vestlige land. Det er lite bevissthet blant lærere, og også i lærebøker, om at begreper er satt sammen av mange ulike elementer. Det er vanlig at elever har blitt introdusert for et nytt begrep gjennom kun et lite antall eksempler, og at generaliseringen av egenskapene til et begrep, gis av læreren eller av en lærebok.

Elever fra Kina presterer bedre enn vestlige elever på internasjonale tester, og ikke minst innehar kinesiske lærere dyp innsikt i grunnleggende matematikk, til tross for begrenset akademisk utdanning (Ma, 1999, s. xxvi-xxviii). På den ene siden overgår altså de kinesiske elevene sine medelever i vestlige land, både i sammenlignbare matematiske ferdighetsstudier, og i den internasjonale matematiske olympiaden. På den andre siden har vestlige forskere ikke sett på undervisningen i Kina som noe som vil fremme god læring. Gu et al.(2004) viser til at Biggs (1991), Ginsberg (1992) og Kember og Gow (1991) beskrev undervisningsmetoder i Kina, som passiv overføring og oppramsende/gjentagende drilling. I følge Gu et al.(2004) ble denne selvmotsigende situasjonen kalt «Den kinesiske elevs paradoks» av Marton, Dall'Alba og Lai (1993) og logisk sett kan ikke disse to motsatte observasjonene være sanne samtidig.

Det å bruke variasjonsmønstre sammenlignet med det å sette ting inn i en praktisk sammenheng reflekterer ulike syn på hva som karakteriserer matematikk. Er matematikken abstrakt eller konkret? Sun (2011) hevder at vestlig syn fokuserer mer på å sette matematikk i en praktisk sammenheng, mens vestens motstykke fokuserer mye på de abstrakte kjennetegnene. Resultatene til elevene fra de to ulike matematikk-kulturene, kan implisere at det å vektlegge kontekstualitet i matematikk alene, ikke nødvendigvis fører til at man får en god læring, det samme gjelder kanskje også det å fokusere på de abstrakte kjennetegnene alene. Et alternativ kan være å skape en balanse mellom matematikk og kontekstualitet i matematikkundervisningen (Peng et al., 2017).

I Kina er bruken av variasjonsmønstre et fremtredende trekk i kinesiske lærebøker i matematikk (Zhang et al., 2017). Matematikkoppgavene er bygd opp rundt variasjonsproblemer som krever at elevene bruker flere begreper, ulike løsningsstrategier og metoder. En slik bruk av variasjonsmønstre handler om målrettet å skape begrepsutvikling. Det å gi elevene muligheten til å analysere variasjonsmønstre, har til hensikt å gi flere muligheter for å skape abstrakt tenkning. Det sentrale i variasjonsteori, reflekterer direkte det

kinesiske ordtak: ingen sammenligning, ingen avklaring. Fokuset på generelle forhold reflekterer kjernen til variasjonsteori, og dette støttes også av vestlige teoretikere. Blant annet sier man at det å oppdage det generelle er selve kjernen i matematikk (Lannin, 2005).

Det sentrale i kinesisk variasjonsteori blir en kontrast mot det å befestet et emne, en ferdighet før man går videre, slik det har vært tradisjon å gjøre det i vestlig undervisning (Rowland, 2008). Her fokuseres det på en ting om gangen og dette gir færre muligheter til å skape sammenheng.

## 2.2 Lesson study

Utvikling av lærerens profesjonalitet drives av et ønske om og et behov for å utvikle og fornye undervisningen. Ønsket om å forbedre undervisningen bygger egentlig på et behov for å forbedre elevenes utbytte. Forbedringer i undervisningen er som regel et resultat av endringer lærere har gjort i sin egen klasseromspraksis. I følge Doig og Groves (2011) består gode profesjonelle utviklingsprogram gjerne av at de er drevet av klare, veldefinerte ideer om hva effektiv klasseromsundervisning er. De gir lærere muligheten til å utvikle kunnskap og evner, og utvikle sin undervisning slik at de kan bedre læringsmulighetene for elevene. Gode utviklingsprogram handler også om å bygge og å styrke læringsfellesskapet mellom lærere.

Lesson study er en praksis-basert, forskningsorientert samarbeidsmodell for profesjonell utvikling. Samarbeidsmodellen lesson study inkluderer nøkkeltrekkene til effektive profesjonelle utviklingsprogram, slik som aktiv og samarbeidende studie av innhold, tilbakemeldinger, å bygge kunnskap, overbevisning om hva som fungerer og rutiner (Huang & Shimizu, 2016, s. 393). Lesson study refererer til, ikke en enkeltstående praksis, men til flere kontekstuelle varierende pedagogiske sammensetninger. Flere studier har vist at lesson study har bidratt til bedre undervisning, fremmet læreres utvikling, opprettholdt profesjonelle læringsfellesskap og forbedret elevenes læring. Pang og Marton (2017) peker på at det er en fellesnevner at læreren er medspiller i forskningen. At lærere er medspillere i forskningen vil skape en økt sammenheng mellom teori og praksis og dette igjen skaper profesjonskunnskap og akademisk kunnskap, som bidrar inn i arbeidet når man planlegger, underviser og evaluerer de ulike leksjonene i det daglige arbeidet.

Siden undervisning er en kulturell aktivitet, så har ulike typer lesson study blitt utviklet. Ved å introdusere kinesisk lesson study, japansk lesson study og så videre som egne begreper, blir begrepet lesson study et overordnet begrep med ulike varianter slik som kinesisk lesson study,

learning study, UK-modellen og den opprinnelige lesson study blir japansk lesson study (Pang & Marton, 2017, s. 337).

Når vi ser på hva som skiller de ulike lesson study typene fra hverandre, ser det ut til at den japanske, den kinesiske og UK-modellen, har mest fokus på lærerens utvikling mens learning study først og fremst brukes til planlegging og forskning (Huang & Shimizu, 2016). Både den kinesiske og den japanske lesson study har utviklet seg over tid, og er en del av systemet i disse landene for å utvikle læreren. Learning study og UK-modellen har blitt utviklet fra de to andre lesson studies, og er gjerne organisert som forskning eller som prosjekter. Japansk lesson study er den eneste lesson study som ikke nødvendigvis fokuserer på gjentatt undervisning for å teste og reteste effekten av den gitte undervisningen. Den kinesiske lesson study og learning study fokuserer mye på gjentatt undervisning av samme leksjon. I UK-modellen plukker man ut elever bevisst, og gjentar undervisningen med denne gruppen.

Det er i de ulike lesson studies også ulik fokus på hvordan man kartlegger elevenes læring. Den kinesiske lesson study bruker tre-punkts rammeverket når de formgir og har samtaler rundt undervisningen. De tre punktene i dette rammeverket handler om hva som er sett på som viktig kunnskap, hva som kan bli vanskelig å lære og hva som er de kritiske faktorene. I learning study fokuseres det på elevene gjennom intervjuer og tester før og etter undervisningen, og her formgis og bygges samtalene på variasjonsteori om læring. UK-modellen fokuserer på de utvalgte elevene, og filmer dem under gjentatte undervisninger, og intervjuer dem i etterkant for å diskutere atferden rundt læringen. Japansk lesson study fokuserer på forventede løsninger fra elevene, og ser etter bevis på læring i elevarbeidene når de samtaler om leksjonen. I UK-modellen ser det ikke ut til å legges særlig vekt på kunnskapsrike andre, mens de tre andre typene lesson study gjør det (Huang & Shimizu, 2016).

Som definert i innledningen, er lesson study metoder hvor lærere i fellesskap planlegger undervisning, observerer hverandre og sammen reflekterer over gjennomført undervisning, for stadig å kunne gjøre undervisningen bedre med tanke på elevenes læring. Selv om ulike typer lesson studies fokuserer på ulike aspekter ved undervisning, gir alle muligheten til å observere undervisning og læring, til å analysere og diskutere data, og til å samarbeide med andre lærere og bygge profesjonelle læringsfellesskap. Alle fokuserer på at elevene skal lære mer, få bedre måloppnåelse og er klasseromsbaserte. Fordi de ulike lesson study-versjonene har ulikt fokus på flere områder, kan effekten lesson study har på elevene og lærerne også være ulik. I

oppgaven min har jeg vært mest inspirert av kinesisk lesson study. Valget av denne retningen ble gjort fordi variasjonsteori har sitt utspring i Kina.

### 2.2.1 Kinesisk lesson study

Kinesisk lesson study består av gjentatte sykluser av samarbeidsaktiviteter med planlegging av undervisning, observasjoner av undervisning, gjennomgang av undervisning i etterkant, og revidering og forbedring (Huang et al., 2017.)

Huang et al.(2017) sier at kinesisk lesson study er en målrettet praksis av gjentatt øving med umiddelbar tilbakemelding fra medlærere og eksperter. De sier også at kinesisk lesson study er en forskningsmetode som likner på design-baserte studier, og at det er en forbedringsvitenskap. Denne forskningsmetoden bygger en grunnleggende kunnskap innen faget og skaffer til veie verktøy og prosesser for variasjon i et organisert støttesystem.

Kinesisk lesson study har flere ulike mål, som å guide læreres forskning, studere undervisningen i skoler, og å legge til rette for å rådføre seg med utdanningsautoriteter. I tillegg skal kinesisk lesson study bidra til å veilede implementering og endring av nytt pensum, bygge bro mellom moderne undervisningsteorier og undervisningserfaring, og fremme undervisningspraksis som har høy kvalitet.

Kjernekomponentene i kinesisk lesson study er å studere formgiving av undervisning, gjennomføring av undervisning, og evaluering/endring av undervisning (Huang & Shimizu, 2016). Under hele prosessen med lesson study, samarbeider man med medlemmene av lesson study-gruppa. I denne prosessen handler det om å utvikle en best mulig undervisning. Et forskningsspørsmål fremmes, og det relevante området i matematikk velges, slik at man kan utvikle en best mulig undervisningsøkt gjennom diskusjon (Huang & Bao, 2006).

Noen av aktivitetene som for tiden vektlegges i kinesisk lesson study er i følge Yang og Ricks (2013):

1. Hjelp lærere med å gå fra leksjoner basert på ferdighetstrening til en mer kulturell, økologisk pedagogikk.
2. Flytte oppmerksomheten fra lærebøker og tradisjonell undervisning til lærer-elev samhandling og verifisering av elevenes læring i klasserommet
3. Skape en læringsatmosfære i klasserommet, i stedet for å forberede til eksamener og prøver med rutinemessige undervisningsaktiviteter

4. Fremme samarbeid ut over det å dele lærer-erfaring, for å få vektlagt nye forskningsideer og metoder.

Noen spørsmål som gjerne trekkes fram i en lesson study-syklus er: Hva er hovedmålene med undervisningen? Hva er det som forhindrer læring? Hvordan bør undervisningsstegene lages i undervisningsprosessen? Disse tre spørsmålene kalles gjerne undervisningens tre punkter og har som mål å øke læringseffekten for elevene.

En undervisning skal alltid føre til at elevene lærer mer, og i tillegg til å jobbe med undervisningens tre punkter, trekkes effektiviteten til en undervisningsøkt fram.

Effektiviteten til en undervisningsøkt handler om å evaluere effektiviteten til leksjonens tre punkter gjennom å vurdere elevenes innsikt og forståelse. Ved å legge til dette fjerde punktet, gir det en syklisk tilbakemelding som setter en i stand til å forbedre de tre punktene i en leksjonsplan.

I den kinesiske undervisningen handler det om begrepslæring, og undervisningen har noen felles strukturelle komponenter som å bygge begrepsoppfatning, bruke nye begreper, øve på strategier/metoder, og oppsummeringen av timen ved læreren.

## 2.3 Variasjonsteori

To grupper forskere har samtidig kommet til en lignende innsikt i bruken av variasjon og uforanderlighet i kinesisk skole. Den første, utviklet av Ference Martons gruppe, er kjent som variasjonsteori om læring (heretter kalt VTOL). Den andre, utviklet av Gu Ling-yuans gruppe, kalles bianshi jiaoxu (heretter kalt BS) som på kinesisk betyr å undervise med variasjon.

Begge teoriene legger vekt på systematisk bruk av variasjon og uforanderlighet i undervisning og læring. Men det ser ut til at BS legger mest vekt på likhet, mens VTOL legger mer vekt på ulikhet (Pang et al., 2017). Denne forskjellen handler mest sannsynlig om hvor de som har laget rammeverket kommer fra, hvilken matematisk kultur. Til tross for at de to teoriene har lik vekt på viktigheten av variasjon og uforanderlighet, så indikerer ikke de to rammeverkene hva som skal holdes uforandret, og hva som bør varieres når det gjelder ulike læringsobjekter.

### 2.3.1 Variasjon

Det å komme fram til nye metoder fra praktiske eller matematiske problemer, føre dette videre slik at de blir generelle metoder, og så bruke disse metodene når man skal løse ulike liknende problemer som er mer kompliserte, har vært kjernen i gammel kinesisk undervisning helt tilbake til det første århundret etter Kristus (Sun, 2010). Matematikklærere har undervist

med variasjon ubevisst eller bevisst i sitt daglige virke i årtier, men i løpet av det siste tiåret har det gradvis vært en økning i interessen rundt potensialet variasjon har for matematikkundervisning. Matematiske begreper presenteres ofte for elever gjennom eksempler, og variasjonen de erfarer via eksempler, leder dem til å generalisere enten om egenskapene til matematiske objekter, eller om forhold mellom dem. Ordet variasjon kan sies å handle om det å ta i betraktning mulige variabler som kan manipuleres i undervisningen av matematikk, og i formgivingen av oppgaver. Målet er å skape en variasjon mot et bakteppe av uforanderlighet. Den pedagogiske tanken er at eleven vil gjøre antakelser om variasjonene i de matematiske uttrykkene og forskjellene i de grafiske beskrivelsene. Det å styre oppmerksomheten mot variasjon kan gi pedagogiske strategier og veivalg mot å forstå matematiske ideer på et høyere abstraksjonsnivå (Watson, 2017). Målet med matematikkundervisning er ofte å lære om underliggende avhengighetsforhold i matematikken. Dette kan være gjennom flere refleksjonsoppgaver, kontrasterende vinkling i oppgaver, pedagogisk snakk og gester, sammenheng mellom handlinger, visuell layout og begrensninger ved variasjon og så videre. Kontrollert variasjon kan gi høyere nivå av abstraksjon, og de faktorene som holdes konstant, er like viktige som de varierte (Watson, 2017).

### 2.3.2 Variasjonsteori om læring (VToL)

#### Sette kunnskap i sammenheng

Variasjonsmønstrene og uforanderligheten tatt i bruk i undervisningen ved hjelp av problemer, oppgaver, eksempler eller illustrasjoner, i samhandlingen mellom lærere og elever har stor påvirkning på hva elever kan lære av å delta i denne samhandlingen (Pang et al., 2017). Meningsfull læring setter elevene i stand til å etablere sammenhenger mellom ny kunnskap og forkunnskaper. Undervisningen kan utvikles for å hjelpe elever til å etablere en sammenheng ved å erfare visse variasjonsdimensjoner (Huang & Leung, 2017). VToL er en teori, som peker på at det er meningen at læreren skal undervise slik at elevene kan klare å ta i bruk det de har lært i mange ulike sammenhenger. Det at man verdsetter variasjon som en viktig faktor for effektiv læring, er faktisk ikke kulturelt betinget, men med antakelsen om at meningsfull læring bare kan oppnås ved å skille ut de kritiske faktorene, har læringsteorien VToL blitt utviklet (Mok, 2017). VToL er ikke en teori om hvordan læring er organisert, men en teori om hvordan læringsinnholdet er organisert. Hovedtanken er at læring er en slags erfaring hvor eleven utvikler en måte å se eller erfare på.

## Å skjelne/skille ut

VToL skiller seg fra andre læringsteorier fordi den fokuserer på læringsutbyttet ved å studere forskjeller. Det er interessant at VToL også belyser viktighetene av rollen til det som holdes uforandret. Det argumenteres med at kontrasten mellom det som er likt og ulikt hjelper eleven til å erfare læringsobjektet på en spesiell måte. Dette kalles discernment (å skjelne) i teorien. Læring fremmes i et miljø som består av tilstrekkelig og riktige variasjonsmønstre. Det å skjelne er essensielt for at meningsfull læring skal kunne finne sted. Det blir mulig å skjelne når variasjon rundt de kritiske faktorene skapes, enten i formgivingen av innholdet eller undervisningen, eller i samhandlingen mellom de som er i klasserommet.

VToL peker på at vi identifiserer og erverver ny kunnskap, og gjør den til vår egen, ved å skille ut hvordan ting er forskjellige på noen områder, men på andre måter er det samme. Dette betyr for eksempel at multiplikasjon kan forstås bedre, dersom man ser hvordan det skiller seg fra divisjon eller addisjon, heller enn om man bare ser hvordan ulike multiplikasjonsoppgaver likner på hverandre. Det å se etter uforanderlighet og bruke det bestandige for å håndtere variasjon, er grunntanken i utviklingen av matematiske begreper. VToL starter med noe man tar for gitt, at ingen ting kun er EN ting, men at enhver ting har flere trekk. Det å skjelne handler om å gå fra en helhetlig erfaring av et fenomen, til å skille ut ulike trekk ved fenomenet. Det handler om hvordan vi kan trekke meningsfull erfaring via sansene våre, og hvordan mening skapes i forholdet mellom likhet og ulikhet, og at dette kan skjelnes når det gis oppmerksomhet samtidig. Særlig er det skjelningen som strekker seg fra forskjeller til likheter som har stor betydning, og dette handler om at læring og oppmerksomhet begynner med at man legger merke til forskjeller før man legger merke til likheter. En grunnleggende ide som ligger under denne teorien, er at mennesker handler ut fra hvordan de oppfatter en situasjon. Det å kunne handle på en god måte, betinger at man kan se ting fra flere sider. Elever kan forberede seg selv på den ukjente fremtiden ved å øve opp måten de ser på (Pang & Marton, 2017).

Når man skal skjelne, tas det ikke hensyn til alle aspekter ved et objekt, men det aspektet man gir oppmerksomhet er av avgjørende betydning for hvordan vi forstår eller erfarer et objekt (Runesson & Kullberg, 2017). Det å skille mellom, eller skjelne, kan ikke skje uten at man erfarer variasjon. Det er mer sannsynlig at de ulike delene et objekt er sammensatt av, kan skjelnes om ulike forhold kan erfares samtidig. Videre sier VToL at variasjonen må handle om de faktorene vi ønsker å trekke oppmerksomheten mot. Lærere må være oppmerksomme

på hvilke faktorer de ønsker at elevene skal ha fokus på, og gjøre disse mulig å lære ved hjelp av variasjon.

## Læringsobjekt og kritiske faktorer

Mok (2017) trekker fram at Marton sier at læreren kan ha et spesielt læringsobjekt som kan utdypes i ulik grad. Læring støttes av fokuset mot de kritiske faktorene til læringsobjektet hvor oppmerksomheten avhenger av erfaringen av variasjon. På en annen måte kan man si at via erfaring av ulike variasjonsmønstre, lærer eleven å skape mening i hva som er likt og forskjellig, mot et bakteppe av uforanderlighet. Å skille ut de kritiske aspektene eller trekkene handler om å legge merke til hvordan en spesiell situasjon skiller seg fra en annen. I følge kilder Zhang et al.(2017) refererer til, er kjerneideen til Martons VToL, at det å lære er å skjelne/skille ut (kritiske faktorer ved læringsobjektet), og det å skjelne/skille ut, avhenger av sammenligning (forskjeller). Derfor er det viktig å gi elevene muligheten til å utforske passende variasjonsmønstre slik at man kan øke læringsrommet. VToL handler om å sette eleven i stand til å håndtere nye situasjoner på gode måter. Framfor alt trenger elever å utvikle evnen til å skille hvilke aspekter eller trekk som må tas hensyn til når man avgjør hvordan man skal nå mål/løse oppgaver i nye situasjoner. Det som er enda viktigere, er hvordan læreren strukturerer undervisningen slik at det er mulig å få fram læringsobjektet for elevene.

Variasjon kan skapes på ulike måter i undervisningen. Marton og Tsui har, ifølge Mok (2017) identifisert noen mønstre av variasjon: kontrast, generalisering, fusjon og separasjon. Kontrast er beskrevet som kontrast mellom hva læringsobjektet er, og hva det ikke er. For eksempel for å se hva som er et kvadrat må man vite hva som ikke er et kvadrat. Generalisering sier hva som er felles for alle objektene, for eksempel hva som er likt med alt som kalles trekkanter. Generaliseringen handler også om evnen til å ta denne kunnskapen i bruk når man løser lignende problemer (Han, Gong & Huang, 2017). Fusjon betyr at eleven setter sammen de ulike delene til et læringsobjekt. En slik sammensetting skaper helheten i læringsobjektet, som er erfart ved at flere kritiske aspekter ved problemet varierer samtidig. Det hjelper eleven til å skjelne og se på sammenhengen mellom flere kritiske trekk. Separasjon betyr at man skiller trekk fra hverandre ved at man får en erfaring ved hjelp av variasjonsmønstre, hvor noe endres, mens andre ting holdes fast (Mok, 2017).

VToL vektlegger hva som skal læres, før man ser på hvordan. For hvert læringsobjekt er det noen faktorer ved det objektet som må læres, de kritiske faktorene. Disse faktorene må identifiseres for hvert læringsobjekt, og for hver klasse man underviser. De kritiske faktorene



kan ikke utledes fra VToL eller matematikk alene, men må identifiseres ved å studere og relatere elevenes læring, og se hvordan læringsobjektet håndteres i undervisningen. Når de kritiske faktorene er identifisert, brukes VToLs prinsipper for å designe undervisningen i form av hvordan innholdet skal håndteres (Runesson & Kullberg, 2017). I Runesson & Kullberg (2017) hevdes det at det å lage oppgaver som bruker variasjon og endring på en optimal måte, er et designprosjekt i seg selv. Dette designprosjektet handler om at responsen fra elevene fører til justeringer rundt valg av eksempler og rekkefølge. Mønster av variasjon, hvor kun en eller få variabler endres om gangen, og på en systematisk måte, kan trekke elevenes oppmerksomhet til grunnleggende strukturer i matematikken. En slik måte å variere på, kan også gjøre dem oppmerksomme på meningen i det matematiske. Men selv om læreren har evnen til å designe et sett med eksempler basert på variasjonsteoriens prinsipper, kan det hende de ikke har evnen til å bruke dette på en måte som får fram det tiltenkte mønsteret av variasjon. Et hovedpoeng i VToL er å finne ut hvordan man organiserer og tolker det matematiske, og bruker pedagogikken på gode måter, for å få til disse mønstrene. Variasjonsmønstrene utvikles via strategisk observasjon og bruk av variasjons-interaksjon. Her brukes kontrastering og sammenligning, separasjon av kritiske faktorer, bytte av fokus i det man gir oppmerksomhet, og variasjon av faktorer samtidig, for å få til en utvikling av mønster rundt det som ikke forandres. En variasjons-interaksjon er en strategisk bruk av variasjon for å få til en skjelning av matematisk struktur. En interaksjon kan her handle om en direkte eller indirekte manipulasjon av det matematiske objektet. De fire mønstrene av variasjon i Martons VToL brukes samtidig for å oppfatte forskjeller eller likheter. Når man oppfatter disse forskjellene eller likhetene, vil det lede til å avdekke kritiske faktorer ved læringsobjektet.

### 2.3.3 Bianshi jiaoxu (BS)

#### Variasjonspraksis i Kina

Variasjonspraksisen i Kina kalles Bianshi (som kan oversettes til variasjon på norsk) hvor Bian står for endring og shi betyr form. Dette blir i hovedsak brukt på matematikkundervisning. Denne praksisen referer til noe som er helt vanlig og rutinemessig i Kina, hvor man utvider og/eller endrer matematikkoppgaver enten ved varierte løsningsstrategier eller varierte betingelser eller konklusjoner. Denne tradisjonen har man sjelden i vestlige lands skoler (Sun, 2010). Siden 2000 har Gu sammen med andre forsøkt å teoretisere bruken av undervisning ved hjelp av variasjon (Zhang et al., 2017), og denne teorien kalles BS. BS forsøker å teoretisere effektive matematiske undervisningspraksiser i

kinesiske klasserom (Pang et al., 2017). Ideer som reflekterer nøkkelbegreper innenfor teori om BS, er at man lærer matematikk ved å bruke konkrete eksempler for at begreper skal gi mening, ved å generalisere på tvers av kategorier og ved å utvikle et hierarkisk system av kategorier. Man kan si at den kinesiske variasjonspedagogikken er en undervisningsmodell for å formgi en særlig effektiv læringsbane, slik at elever kan forstå et matematisk emne (Qi, Wang, Mok & Huang, 2017).

## Begrepsvariasjon og prosedyrevariasjon

I BS brukes intuitive materiell eller eksempel-caser av ulik form, for å belyse de kritiske(definerende) trekkene, slik at elevene kan skille hvilke trekk som har betydning. Når man har utviklet BS, har man sett på bruken av standardeksempler, eksempler som ikke er typiske, og eksempler som ikke representerer begrepet også kalt moteksempler. Denne delen av BS-rammeverket kalles variasjon av begreper. Pang et al.(2017) viser til Gu og peker på at ved å bruke begrepsvariasjon, så kan elever lære matematiske begreper ut fra mange ulike eksempler. I begrepsvariasjon kan man for eksempel gå fra det konkrete til det abstrakte, fra det spesielle til det generelle. Begrepene kan også læres ved å belyse de essensielle trekkene, og klargjøre meningen til begreper ved å fjerne forstyrrende bakgrunner i oppgaver. Man kan i begrepsvariasjon også se på trekk ved et matematisk objekt som ikke er essensielle, og dermed få vist hvilke trekk som faktisk er essensielle.

Matematiske begreper kan oppfattes på to ulike måter, som statiske og dynamiske (Sfard, 1991). Gu et al.(2004) sier at ved å bruke BS, vil man kunne øke elevens forståelse av de to måtene å oppfatte det matematiske på. Begrepsvariasjon handler om det statiske aspektet ved matematiske objekter, det å forstå ulike meninger som begrepet er bærer av, og sammenhengene mellom dem. Prosedyrevariasjon handler om objektets dynamiske aspekt, som det å forstå på hvilken måte begrepet har utviklet seg historisk for menneskeheten og psykologisk for enkeltmennesket, og måter problemer kan løses på. Prosedyrevariasjon kan hjelpe elever til å forstå hvor kunnskapen kommer fra, og hvor det kan anvendes, og også gi muligheter for at godt strukturert kunnskap kan skapes/konstrueres. Prosedyrevariasjon kan hjelpe elever til å forme begreper, løse problemer, bygge erfaring rundt aktiviteter og forstå hvordan ny og tidligere kunnskap kan kobles sammen.

I følge Gu et al.(2004) kan prosedyrevariasjon i BS brukes som middel for gradvis å brette ut den matematiske aktiviteten. Å brette ut den matematiske aktiviteten handler for det første om å støtte formingen av begreper, fra å håndtere konkrete ting, til å håndtere symboler. For

det andre handler det om en støtte for å løse nye problemer. En slik støtte kan dreie seg om å gjøre de nye problemene om til kjente problemer, og så gradvis utlede nye løsninger basert på kjente løsninger. Til slutt handler det om å bygge et system av matematiske erfaringer ved at man øker antallet framgangsmåter og hierarkiske sammenhenger.

## Pudian

Flere viktige BS begreper som er foreslått av Gu, inkluderer potensiell avstand og pudian. Potensiell avstand er forskjellen mellom det eleven kan fra før, og den nye situasjonen som han/hun kan bruke kunnskapen på. Prosedyrevariasjon kan betraktes som at man introduserer en psykologisk eller begreps-artefakt, som eleven kan bruke for å bygge bro over denne avstanden. Dette kan inkludere læringsmateriell, aktiviteter, oppgaver eller problemer. Denne brobyggingen kalles pudian, og ordet som er mest brukt på engelsk, er scaffolding. Men i Kina brukes ordet mer konkret som pussing/finsliping, som menes å heve noe til et høyere nivå, som er nærmere det nivået man har satt seg mål om å nå. Det handler om hvordan læreren skaper en riktig og dynamisk støtte, for å øke elevenes utvikling, og tilbyr relevante undervisningsstrategier (Gu et al., 2004). Det er definert to typer scaffolding læreren kan bruke, affektiv scaffolding og kognitiv scaffolding (redusere problemer).

Både pudian og potensiell avstand har litt «smaken av» Vygotsij og Davydov (Pang et al., 2017). Vygotskij (1978) vektlegger rollen støtte fra en voksen har, og oppmerksomheten som ble gitt til hvordan lærere hjelper elever, resulterte i teorien som ble skapt rundt scaffolding. I følge Gu et al.(2004) bruker Wood et al. ordet scaffolding, for å beskrive hvordan barn lærer under veiledning av en voksen. Gu et al.(2004) peker på at også Bruner bruker ordet scaffolding og at her brukes ordet i en undervisningssituasjon om en prosess, om en person som hjelper et barn fra sitt nåværende nivå og over til sitt potensielle nivå. I læringsprosessen, når eleven har oppnådd et nytt nivå, trengs ikke lenger scaffoldingen, og det må da fjernes. Når så ny kunnskap skal læres, må det ny scaffolding på plass (Gu et al., 2004). Man må altså først forstå de matematiske objektene fra flere perspektiver, for så å pakke ut matematiske aktiviteter.

Det er særlig tre typer variasjon som Gu et al.(2004) har identifisert i den forbindelse:

1. Variere betingelsene i matematikkoppgaven/problemet (utvide det eksisterende problemet, endre resultatene og generalisere)
2. Variere prosessen med å løse en matematikkoppgave/et problem, (bruke ulike metoder)

3. Variere bruken av metoder når man løser matematikkoppgaver/problemer (bruke metoden på lignende problemer)

Hovedmålet til BS er å fremme elevers læring i matematikk. Å undervise gjennom variasjon på en effektiv måte krever at man ser at elever lærer ulikt. Det å bruke formativ vurdering kan hjelpe lærere til å forstå elevers læring, og tilpasse gode strategier for undervisning med variasjon. Som sitert i innledningen er det optimale målet med å forbedre matematikkundervisningen i følge Gu et al.(2017, s. 36), at elevene skal utvikle selv-utforskende læringsevne, og evne til å lære hvordan de lærer best, uten å ha en lærer med seg i framtiden. Læreren er en tilrettelegger. Undervisning med variasjon hjelper elevene til å tilegne seg kunnskap steg for steg, kontinuerlig utvikle erfaring i problemløsning, og forme godt strukturert kunnskap. Oppsummert så gir variasjon en strukturert tilnærming som eksponerer det underliggende i det matematiske, som igjen kan øke elevenes begrepsforståelse av en rekke relaterte begreper.

### 2.3.4 BS sammenlignet med VToL

Det er noen forskjeller mellom BS og VToL. For eksempel ser man at forskjellen man i BS gjør mellom prosedyrevariasjon og begrepsvariasjon, ikke gjøres i VToL. Det er ikke noe som er enten statisk eller dynamisk, det er heller en dualitet. En annen forskjell mellom de to rammeverkene, er at VToL ofte bruker sammenligning mellom eksempler på hva begrepet innebærer, og eksempler på hva begrepet ikke er/moteksempler, tidlig i undervisningen og læringen. Dette brukes for å gjøre begrepets betydning lettere å oppfatte. BS begynner ofte med standardeksempler, for så å introdusere eksempler som ikke er typiske, og så til slutt eksempler på hva begrepet ikke er/moteksempler. VToL er et rammeverk for læring generelt sett, og kan hjelpe til å forklare hvordan undervisning kan designes for å skape læring. Undervisningen formgis med særlig fokus på mønster av variasjon og uforanderlighet, som en måte å styre eller lede elevers oppmerksomhet og måte å se på. Det gjøres for å peke på hvordan man kan legge til ny mening i et begrep og hvordan begreper kan formes. Prosedyrevariasjonen til BS virker å legge vekt på pudian fra en oppgave eller situasjon og over i en annen, og for å skape sammenheng mellom dem. Det gjøres slik at den potensielle avstanden er håndterbar for elever når de skal skape sitt eget rom for læring og tenkning. På den andre siden vektlegger kontrasten og separasjonen i VToL forskjellene og ikke likhetene, slik at de kritiske faktorene og ulike meninger som man kan legge i situasjonen, gjøres mulig å skjelne. VToL og BS er forenlige, likheter og forskjeller kan analyseres hver for seg, men i

virkeligheten eksisterer de og er gjensidig avhengige av hverandre. Det ser ut til å være et utfyllende forhold mellom de to rammeverkene (Pang et al., 2017).

### 2.3.5 Kombinasjon av BS og VToL

I og med at begge teoriene tar utgangspunkt i variasjon og uforanderlighet i kinesisk undervisning, og at de begge gir en strukturert tilnærming til det matematiske, ønsket jeg å kombinere begge teoriene i mitt prosjekt. I begge teoriene har undervisningen til hensikt å hjelpe elevene til å tilegne seg kunnskap steg for steg, for å skape godt strukturert kunnskap. Wong (2017) peker på at det har blitt diskutert om VToL og BS handler om det samme, eller ikke. Det jeg vil påpeke er at systematisk introduksjon av variasjon, gjør at jeg oppfatter likhetene mellom BS og VToL som større enn forskjellene. Derfor mener jeg med støtte i Wong (2017), at de to rammeverkene kan sies å tilhøre «samme familie». På bakgrunn av dette, og det Pang et al.(2017) sier om at teoriene utfyller hverandre, har jeg valgt å ta i bruk begge teoriene i min planlegging og formgiving av undervisningen. Getie og Dings (2018) rammeverk har fungert som en guide i mitt arbeid. Jeg har endret rammeverket noe for å tilpasse til min situasjon, og tatt i bruk følgende teoretiske begreper under planleggingen, gjennomføringen, evalueringen og analysen av undervisningen vi gjennomførte:

### 2.3.6 Rammeverk og modell

Teorier	Teoretiske begreper	Bruken av de teoretiske begrepene i både planleggingen, undervisningen, evalueringen og analysen
Gus Bianshi jiaoxu (BS)	Begrepsvariasjon Prosedyrevariasjon	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Begrepsvariasjon (fastslå hva begrepet er i kontrast til hva det ikke er, sett i sammenheng med forkunnskapene elevene har og hva som forventes at skal læres framover)</li> <li>✓ Prosedyrevariasjon (varierte metoder, omforming av problemet, sammenhenger innenfor og mellom problemer)</li> </ul>
Martons variasjonsteori om læring(VToL)	Læringsobjekt Kritiske faktorer Variasjon og uforanderlighet Variasjonsmønster	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Valg av læringsobjekt</li> <li>✓ Finne hva de kritiske faktorene kan være for temaet og for elevene</li> <li>✓ Få fram de kritiske faktorene ved hjelp av variasjon og uforanderlighet</li> <li>✓ Variasjon i metode,               <ul style="list-style-type: none"> <li>• utvide det opprinnelige problemet (endre betingelsene),</li> <li>• varierte løsningsstrategier (på det opprinnelige problemet),</li> <li>• variere bruken av metoder (samme metode på andre typer problemer)</li> </ul> </li> </ul>

I kapittel tre vil det bli forklart hvordan tabellen som teoretisk rammeverk fungerte i analysen av datamaterialet, og hvordan modellen ses i sammenheng med variasjonsteori. Før dette blir analysert og diskutert, vil metodiske betraktninger når det gjelder formgiving, problemstilling, utvalg og datamateriale bli lagt fram.

### 3. Metode brukt i min forskning

I det følgende kapittelet vil min metode bli presentert. Metode innebærer valg jeg har tatt når det gjelder forskningsdesign, datainnsamling og analyse. I denne delen vil jeg også begrunne valg jeg har tatt rundt utvalg av personer i forskningen min, innsamling av datamateriale og min analyse av dette. Jeg vil i tillegg diskutere metodens gyldighet og troverdighet, og ta opp forskningsetiske spørsmål.

#### 3.1 Valg av metode og forskningsdesign

Formålet med min studie er å ta i bruk variasjonsteori (kalt VT videre i metodedelen) i undervisning av matematikk. Problemstillingen gir meg muligheten til å prøve ut en undervisningsform som er helt vanlig i Kina, hvor man jobber med matematikk ved å utvide oppgavene på en helt annen måte enn jeg er vant til i norsk skole. Det at jeg har et slikt fokus gjør at det vil være hensiktsmessig å bruke en metode som kan gi en detaljert innsikt i en konkret situasjon, heller enn å basere seg på skjemaer og store tallmaterialer. Kvalitativ metode vil derfor være egnet. I følge Alvesson og Sköldberg (2017), er definisjonen av kvalitativ metode ikke entydig, men å fokusere på en åpen og flertydig empiri er et sentralt kriterium. Et annet viktig særpreg for kvalitativ metode, er at det tar utgangspunkt i det studerte subjektets perspektiv, med vekt på en tilstedeværende forsker som gjør et tolkningsarbeid. Alvesson og Sköldberg (2017) baserer sine uttalelser på teori, som sier at kvalitativ forskning er kontekstbundet og plasserer betrakteren i verden. Kvalitative forskere studerer gjerne saker i deres naturlige omgivelser, og forsøker å forstå eller tolke fenomen ut fra den betydning som mennesker legger i dem. Med problemstillingen jeg har lagt til grunn, kan man si at målsettingen er å oppnå en forståelse for hvordan man kan implementere ny teori i egen undervisning. En kvantitativ studie vil ikke kunne gi innsikt i forståelsen av sosiale fenomener og studien er derfor kvalitativ på bakgrunn av den detaljerte innsikten metoden kan gi.

#### 3.2 Samtaler og deltakende observasjon

Samtaler har i denne forskningsprosessen fått fram en kollega, Bjørg, sin stemme, og gitt meg verdifull innsikt i hennes tanker rundt det å skulle undervise ved hjelp av VT. Bjørg kunne beskrive, forklare, og både jeg og Bjørg kunne stille oppfølgingsspørsmål for å få en dypere innsikt i hvordan vi tenkte rundt det å få til en god undervisning hjelp av VT. Det at jeg brukte samtale med utgangspunkt i en samtaleguide, gjør at jeg vil karakterisere samtalene som en type semistrukturert intervju. Ifølge Cohen et al.(2018) er et intervju et sosialt og

følelsesmessig møte, ikke bare en datainnsamlingsøvelse. Data gis som en gave og er ikke en rettighet forskeren har og kan ta. Når man intervjuer er både verbale og ikke-verbale detaljer viktige å få med seg. Konteksten og dynamikken som utøves har betydning for intervjuet. Et slikt møte vil kunne gi innsikt i opplevelser og refleksjoner, noe som er viktig å få fram. Samtalene gav rom for å forklare VT, og å stille spørsmål slik at fokuset var på det jeg ønsket, og dermed var denne metoden informasjonsgivende for meg. I og med at jeg tok for meg en virkelig situasjon, og data som oppstod der og da, falt det seg naturlig å bruke observasjon som verktøy. Jeg valgte en observasjonstype hvor jeg selv var deltakende. Situasjonene jeg observerte var planleggingen av undervisningen, selve undervisningen, evalueringen og endringene Bjørg og jeg gjorde i etterkant. Deltakende observasjon har kunnet gi meg informasjon om hva som hendte i øyeblikket. Det å kunne innhente en slik type informasjon styrket gyldigheten, fordi jeg gjennom observasjonene kunne se og legge merke til hendelser, atferd, situasjoner, artefakter og rutiner (Cohen et al., 2018). Observasjonstypen jeg valgte ble tatt i bruk i en aksjonsforskning. Cohen et al.(2018) definerer aksjonsforskning som en liten innblanding i den virkelige verden for å peke på utøvernes egne utfordringer og undersøke grundig effekten av en slik innblanding. Aksjonsforskning kombinerer diagnose, utførelse og refleksjon, og er en kritisk og selvkritisk form for forskning hvor man samarbeider og reflekterer, og de som deltar er ansvarlige for å skaffe resultater og offentliggjøre disse resultatene. Aksjonsforskningen jeg var inspirert av, var kinesisk lesson study. Vi fikk altså muligheten til å evaluere egen praksis og delta i et profesjonelt læringsfellesskap for å utvikle oss sammen. Bjørg og jeg formgav en undervisningsøkt som Bjørg underviste, mens jeg observerte. Så reflekterte vi over undervisningen i etterkant. Observasjonene var teoridrevet med klart fokus på VT. Situasjonene som skulle observeres var nøye utvalgt og begrenset til undervisningsplanlegging, undervisning og evaluering av undervisningen. Fokuset var på hvordan VT kan brukes for å stimulere endring i handling hos læreren, og ikke på elevenes læring. Et valg jeg gjorde for at omfanget av oppgaven ikke skulle bli for omfattende.

I forkant av prosjektperioden gjennomførte jeg noen innledende samtaler med Bjørg, blant annet for å trygge henne på at dette var noe hun ville kunne klare å delta i. Dette var det behov for da hun ikke hadde hørt om VT tidligere. I tillegg snakket vi mye om matematikkundervisning generelt, og om hennes utrygghet fordi hun ikke har undervist i faget på flere år, og i år hadde blitt satt til å undervise på 7. trinn. Vi gjennomførte så planlegging, undervisning og evaluering/endring av første undervisningsøkt, før vi underviste og evaluerte



andre økt. Grunnen til at vi valgte å gjennomføre dette i to sykluser var på bakgrunn av at vi valgte å la oss inspirere av at man i Kina, hvor VT har sitt utspring, bruker kinesisk lesson study med undervisning og re-undervisning i flere omganger. I tillegg begrunnes det av at vi skulle prøve ut noe nytt, og det er alltid greit å kunne «rette opp feila fra i går», og å være i en kontinuerlig forbedringsprosess. Elevene har hatt mye undervisning om temaet multiplikasjon med flersifrede tall, men ut fra Bjørgs erfaring, og ut fra tester som for eksempel M6 (Tornes, 2018), så vi at elevene ikke mestret emnet godt. Dermed kunne vi ha fokus på å prøve å få til en undervisning som vi håpet ville gi en bedre oppfatning av temaet hos elevene, og også inspirere og motivere elevene.

Undervisning ut fra VT var utgangspunkt for samtale, fordi jeg har oppfattet at undervisning om multiplikasjon med flersifrede tall ofte har vært preget av algoritmetrening, noe jeg mener også gjenspeilet seg hos elevene denne læreren har i matematikk.

Undervisning ut fra VT skal kunne hjelpe elevene til å tilegne seg kunnskap steg for steg, kontinuerlig utvikle erfaring i problemløsning og forme godt strukturert kunnskap (Peng et al., 2017). Samtalene og observasjonene av læreren hadde hovedfokus, men elevreaksjoner og samspillet som utviklet seg i undervisningen, mener jeg har vært med på å belyse min oppfatning av hvordan VT fungerer i undervisningen. Måten jeg har samlet inn data på har økt bevisstheten rundt elementer som undervisning har, som for eksempel planleggingsfasen, målet med undervisningen og variasjon. Forskningsmetoden er god for å utvikle en enda bedre undervisning i matematikk, noe som underbygges i teoridelen hvor lesson study beskrives.

Jeg la opp til mest mulig fleksible samtaler med Bjørg for å få henne til å forklare og beskrive hva hun tenkte rundt VT sammenlignet med undervisning vi tidligere har bedrevet. Å lage en komplett intervjuguide, mener jeg ville hindret denne fleksibiliteten, og det kunne potensielt sett også hindret en dypere innsikt i hvordan å ta i bruk VT. Fokuset i samtale ble derfor på de valgte elementene fra VT. Et slikt lærings samarbeid rundt implementering av ny teori i egen undervisning, har potensialet i seg til at vi som lærere bygger begrepsoppfatninger og endrer/forbedrer egen praksis. Forbedringer er som regel et resultat av endringer lærere gjør i sin egen klasseromspraksis. De gir oss muligheten til å utvikle kunnskap og evner, og utvikle vår undervisning slik at vi kan bedre læringsmulighetene for elevene, og de bygger og styrker læringsfellesskapet mellom oss lærere (Doig & Groves, 2011). I samtale ønsket jeg å få fram hva VT er, og også Bjørgs tanker om undervisning slik at samtale kunne flyte best

mulig, og slik at det var mulig å få VT til «å smelte sammen med» og påvirke til endring av undervisningspraksis.

Samtalene var lagt opp som semistrukturert intervju (vedlegg 4), i den forstand at tema og forslag til fokus var satt på forhånd, men rekkefølgen i samtalene var uvesentlig. I samtalene var det ofte behov for å stille oppfølgingsspørsmål da Bjørg ikke tidligere var kjent med VT, noe som bidro til at jeg måtte sette ord på hva jeg hadde oppfattet som kjernen i VT. Begrepene fra VT fikk ulikt fokus på grunn av ulik mengde oppfølgingsspørsmål fra Bjørg. Ut fra formålet med samtalene ville strukturerte intervju med fast rekkefølge og faste spørsmål satt begrensninger for å oppnå ønsket innsikt. Jeg kunne altså ikke forutsi hvilken dreining samtalene ville ta, men dermed åpnet det semistrukturerte for den fleksibiliteten jeg ønsket. Særlig behovet for å kunne be om forklaringer og utdypinger erfarte jeg at gjorde valget av den litt løsere stilen riktig. Fleksibiliteten åpnet også for å se hvilke begreper det var nødvendig å snakke mer om, eller diskutere betydningen av.

### 3.3 Lydopptak og film

For å sikre meg god dokumentasjon av samtalene og undervisningssituasjonene, brukte jeg i-Pad til å ta opptak. Jeg har forsøkt å ta opptak i undervisningssituasjoner med i-Pad tidligere, noe som har vært vellykket. Jeg ville sikre meg solid dokumentasjon av både hvordan det ble undervist, og samtalene rundt planlegging og evaluering. I tillegg kunne jeg med dette verktøyet få med meg noen av elevenes reaksjoner, selv om dette ikke var fokus så er det likevel interessant å ta med når man evaluerer egen undervisning. Et opptak er mulig å spille av flere ganger for å få med seg detaljer i det som skjer i situasjonen. Kladdebok og penn var også med i all planlegging og undervisning, og det var en god hjelp til å holde oversikt over elementene i planleggingen og undervisningen. Vår skole har vært del av et Marte Meo-prosjekt, og er også med i et forskningsprosjekt fra SePU som heter kultur for læring (SePU, 2016). Marte Meo er en veiledningsmetode utviklet av Maria Aarts i Nederland for ca. 25 år siden (Marte Meo foreningen, 2018). En del av begge prosjekter går ut på å filme undervisningssituasjoner, så både lærere og elever er vant til at det filmes i undervisningen.

### 3.4 Transkribering

Transkripsjon er en konkret omdanning av en muntlig samtale til en skriftlig tekst (Kvale & Brinkmann, 2017). Forskjellen mellom disse to representasjonene vil være at talen innebærer kroppsspråk, naturlige lyder og stemmeleie. Når man så skal lese utskriften av det talte vil man ikke kunne legge merke til disse faktorene, uten at de er skrevet ned på en eller annen

måte. Eksempler kan være at noen rister på hodet, rynker på nesen, peker på noe og så videre. Flere av disse beskrivelsene kan være vesentlige i situasjonen for å forstå hva som egentlig skjedde, fordi det gir informasjon om den som er med i samtalen og hva den faktisk snakker om og mener. I transkripsjonen er eventuelle nødvendige gester tatt med i klammeparentes slik at det skilles ut fra det som sies. Hva som er korrekt transkripsjon er umulig å svare på, det vil være mer relevant å spørre om hva som er en nyttig transkripsjon for min forskning (Kvale & Brinkmann, 2017). Ved å overføre samtalen til en litterær stil, blir det mulig å formidle meningen med intervjupersonens historie til leseren. Det har derfor vært viktig for meg å være bevisst på hvilke valg jeg har tatt før transkriberingen, særlig det som handler om å sile bort det jeg mener virket unyttig til mitt formål. Det har også vært nyttig å spille gjennom opptakene i etterkant av nedskrivningen for å sjekke at jeg mener å ha gjengitt det jeg har oppfattet, korrekt.

### 3.5 Utvalg

Fokuset for min studie er å prøve ut en ny teori, og det ble redegjort for valg av samtale og deltakende observasjon ovenfor, hvor selve undervisningen ble sett på som det interessante, nettopp fordi det er en ny måte å undervise på jeg ønsker innsikt i. Problemstillingen min gjør at utvalget mitt av personer som skal være med, begrenser seg til meg og eventuelle lærere som samarbeidspartnere i denne studien. Hvem jeg skulle samarbeide med hadde jeg ikke helt klart for meg ved starten av prosjektet mitt, men det utkrystalliserte seg egentlig naturlig ved at Bjørg trengte hjelp og støtte med utformingen av sin årsplan, og ønsket å ha noen å rådføre seg med om matematikkundervisningen sin. Dermed ble det en vinn-vinn-situasjon hvor jeg stilte opp for henne, og hun var min samarbeidspartner i utformingen, utprøvingen og evalueringen av undervisningen bygget på VT. Skolen jeg jobber ved er liten og det var ikke praktisk mulig å få til et samarbeid med flere lærere til denne studien.

Utvalget av elever falt seg naturlig i og med at Bjørg har to paralleller av 7. trinn som hun underviser i matematikk, og vi kunne prøve ut undervisningen i to sykluser på disse elevene. Kjønn har ikke vært en bestemmende faktor for valg av samarbeidspartner, da det ikke er relevant å vite noe om dette ut fra min problemstilling. Siden skolen er en liten skole og jeg beskriver klassetrinn når jeg snakker om mitt prosjekt, er det vesentlig for meg og likevel prøve å anonymisere min samarbeidspartner så godt som mulig, jeg har derfor gitt min samarbeidspartner et pseudonym. Elevene som deltar i undervisningen nevnes ikke ved navn, men om jeg nevner elever, benevnes de med elev1, elev2 og så videre. Dette er en inndeling

jeg mener bevarer elevenes anonymitet, og gir rom for en organisering som for meg virker som en grei måte å forholde seg til når man skal lese oppgaven. Jeg velger også å bruke h\*n når jeg henviser til elever ved å bruke pronomen, noe som også bidrar til bevare anonymiteten og unngå at kjønn blandes inn.

Selv om det var litt tilfeldig hvem jeg fikk som samarbeidslærer i prosjektet, ser jeg i etterkant at det ville vært strategisk riktig å velge Bjørg til dette prosjektet ut fra egenskaper og kvalifikasjoner hun innehar, som endringsvilje, vilje til samarbeid, sunn skepsis, god til å stille spørsmål, lang fartstid som lærer og allmennlærerutdanning. Grunnen til at jeg ser det som en fordel at Bjørg har vanlig allmennlærerutdanning, er at det i alle fall foreløpig, er den typen lærere det er flest av i skolen, og det er de man eventuelt møter når man ønsker å påvirke til endring av undervisningspraksis. Selv om elevene i de to klassene ble direkte valgt fordi de har Bjørg som lærer, har de stått helt fritt til å delta eller ikke i mitt prosjekt.

### 3.6 Roller i undersøkelsen

Vi gjorde en avklaring av rollene i forkant av samtalene og undervisningen. Siden jeg er en masterstudent som har satt meg inn i emnet VT, og også har rolle som lærerspesialist ved min skole, kunne det virke litt overveldende for Bjørg og hindre henne i å fortelle hva hun tenker og mener om undervisning. Det at jeg var deltakende observatør, var verdifullt fordi jeg da kunne tilføre min kunnskap inn i situasjonen om planleggingen og utførelsen av undervisningen. Ulempen med at jeg var deltaker selv, var at Bjørg kunne få inntrykk av at jeg kunne og visste alt fra før, noe jeg ikke gjorde. Jeg har teoretisk sett satt meg inn i VT, men aldri sett det i praksis. For å få en best mulig samhandling med Bjørg, var det viktig å poengtere at jeg på ingen måte hadde til hensikt å sette henne fast i noe, eller teste hva hun kunne eller ikke kunne, men at jeg hadde stor bruk for en å sparre med for å få prøvd ut en undervisningsform som jeg heller ikke var kjent med i praksis. Jeg ble likevel den styrende i samtalsituasjonene når det gjaldt å finne og få elementer fra VT inn i undervisningen, som for eksempel kritiske faktorer og variasjonsmønster. Til tross for at jeg var den som styrte det hele, la jeg vekt på å være åpen slik at innspill fra Bjørg ble tatt på alvor, og diskutert og vurdert grundig inn mot VT, slik at hun skulle oppleve at hun var en likeverdig partner i formgivingen av undervisningen. Kvale og Brinkmann (2017) sier noe om viktige kvalifikasjonskriterier for en som intervjuer: Å være strukturert, klar, vennlig, lytte aktivt, åpen, erindrende og tolkende. Det handlet for meg om at jeg fulgte opp Bjørgs innspill med støttende kommentarer og oppfølgingsspørsmål. Samtidig som jeg la vekt på hva som er

tankene bak VT. Med den fordelingen av roller som jeg har beskrevet kunne jeg sørge for at vi fikk fokus på å snakke om elementene i VT, samtidig som Bjørg fikk muligheten til å komme med innspill. På denne måten fikk vi en fleksibilitet i samtalsituasjonen. Klargjøringen av roller virket positivt for både Bjørg og meg, og vi kunne på denne måten tilpasse oss hverandre på en god måte.

### 3.7 Prosessen for å svare på mitt forskningsspørsmål

Datainnsamlingen til prosjektet varte i tre uker. Under datainnsamlingen var jeg ledende i planmøtene og observasjonene av undervisningen. Jeg observerte to undervisningsøkter på 7.trinn. Planleggingen av undervisningen og evalueringen gjorde jeg sammen med Bjørg. Før arbeidet med min oppgave startet, fikk foresatte informasjon om prosjektet og godkjente deres barns deltakelse (vedlegg 3). All datainnsamling gjorde jeg selv, og i etterkant av datainnsamlingen er alt datamaterialet tilgjengelig for alle foresatte og Bjørg om de ønsker å se noe av det.

Forskningsprosjektet besto av utprøving av implementering av VT ved hjelp av en arbeidsmåte som er inspirert av kinesisk lesson study. Bjørg og jeg gikk sammen om systematisk å planlegge, prøve ut, reflektere over og vurdere undervisningen i to sykluser, for å få en undervisning som var best mulig, med tanke på elevenes læring. Vårt fokus, lærings og kunnskapssyn var bygget på VT. Med VT som rammeverk for planleggingen og gjennomføringen av undervisningen, dannet den en ramme for undersøkelsen, men vi fulgte ikke nødvendigvis den rekkefølgen som jeg har satt begrepene i. Noen av elementene oppstår også samtidig, og går litt i hverandre uten at det oppleves som unaturlig.

En viktig del av planleggingen og undervisningen som ble gjort, er utviklingen av oppgaven elevene skulle jobbe med. Vi valgte en oppgave fra matematikkverket vi har ved vår skole (Alseth et al., 2007), som vi tenkte ville hjelpe elevene til å se i hvilke sammenhenger multiplikasjon kan tas i bruk. I følge Runesson og Kullberg (2017) er det å skulle lage oppgaver som får fram variasjon og endring på en god måte, et designprosjekt i seg selv. Dermed var det av praktiske hensyn greit å velge en oppgave som allerede var designet, og heller diskutere den, og eventuelt tilpasse den til ulike elever og ulike variasjonsmønster underveis. Bjørg hadde også et ønske om at vi skulle bruke læreverket vårt som utgangspunkt, da hun mente hun trengte noe å støtte seg til når hun skal velge oppgaver elevene skal jobbe med. Etter min erfaring opplever mange lærere dette behovet for å ha en lærebok å støtte seg til, og hente oppgaver fra. Mange lærere bruker boka som eneste guide i sin undervisning.

Oppgaven vi valgte (vedlegg 5), er en tekstopp-gave hvor et fotballstadion eller idrettsstadion blir beskrevet. På dette stadionet er det åtte seksjoner, med førti rader i hver seksjon, og hver rad har tjudefem seter. Elevene skal finne ut hvor mange seter det er totalt på dette stadionet. Etter en rask introduksjon av læreren, fikk elevene utdelt oppgaven en og en. De ble etter en liten stund satt sammen i par for å diskutere hvordan de hadde tenkt for å komme fram til løsningen. Etter at de hadde diskutert og sammenlignet strategier, samlet læreren igjen klassens oppmerksomhet mot tavla.

For å svare på mitt forskningsspørsmål har jeg valgt ut tematiske sekvenser fra planleggingen, utprøvingen og evalueringen av undervisningen som illustrerer vår bruk av begrepsvariasjon, prosedyrevariasjon, læringsobjekt, kritiske faktorer, variasjonsmønster og variasjon og uforanderlighet i formgivingen og implementeringen av VT. Samtidig vil jeg søke sekvenser som viser om vi ikke er i stand til å ta i bruk de samme begrepene fra VT. Jeg har valgt å bruke disse kategoriene som utgangspunkt for min analyse, til tross for at de er hentet fra to ulike teorier, på bakgrunn av arbeidet til Getie og Ding (2018).

Prosessen for min tilnærming til materialet besto i følgende:

1. Lese gjennom transkripsjonene av de ulike situasjonene, i kronologisk rekkefølge.
2. Bruke en kombinasjon av Gus og Martons rammeverk (Getie & Ding, 2018), for å finne sekvenser som gir mulighet for å fokusere på undervisning om multiplikasjon med flersifrede tall ut fra VT.
3. Organisere sekvensene som er representative for rammeverket jeg har brukt.

Alle uthevninger eller markeringer i transkripsjonene som jeg tar i bruk i min analyse, er mine egne og er relatert til analysen. Sekvensene jeg har valgt ut oppfatter jeg som eksempler på de ulike begrepene i rammeverket jeg forholder meg til.

### 3.8 Tilnærming til analysen

I analysen av mitt empiriske materiale fulgte jeg temaet VT som en rød tråd gjennom planleggingen og undervisningen. Poenget med å bruke VT var å forme en undervisning med fokus på at elevene skulle lære emnet, slik at de kan anvende kunnskapen på flere ulike måter og i møte med nye utfordringer. Jeg ville se på hvordan Bjørg og jeg forberedte oss til den første økten, gjennomførte undervisningen, vurderte den gjennomførte økten, hva vi ville endre til neste gjennomføring og hva vi tenkte i etterkant av de gjennomførte øktene. Poenget var å se hvor godt vi klarte å ta i bruk VT i vår undervisning og evaluering/endring i prosess.

Ifølge Braun og Clarke (2006) er et mål før man går i gang med selve analysen å bli kjent med egne data. Det var derfor fornuftig å se gjennom dataene mine flere ganger og så transkribere dataene for deretter å kode dataene opp mot VT. Kodingen er en del av selve analysen, og hjelper til å systematisere materialet jeg har inn mot teorien jeg har valgt å analysere ved hjelp av. Cohen et al.(2018) sier at det ikke er noen entydig måte å analysere og presentere kvalitative data på, men at måten må tilpasses slik at det passer til hensikten med det man vil presentere. I kvalitative studier vil ofte analysen og tolkningen være sammenslått, og analysen begynner tidlig hvor resultatene kan gi data for mulig videre analyse. I denne prosessen hadde jeg en tilnærming som Cohen et al.(2018) kaller en induktiv prosess, hvor jeg forberedte og organiserte dataene mine ved å redusere mengden, og finne det jeg mente hadde betydning for min studie.

Transkripsjonen er kodet ved bruk av fargekoding ut fra prinsippene prosedyrevariasjon, begrepsvariasjon, læringsobjekt, kritiske faktorer, variasjonsmønster og variasjon og uforanderlighet. Under kodingen av transkripsjonen registrerte jeg hvilke samtalesekvenser eller undervisningssekvenser som handlet om det enkelte prinsipp fra VT i mitt rammeverk. Under analysen ble utdragene jeg fant interessante, valgt ut og organisert gjennom hvilke prinsipper fra VT jeg mente de representerte. Dette utvalget ble gjort ved at jeg ga dem fargekoder som at begrepsvariasjon fikk fargen blå, prosedyrevariasjon rød og så videre. Disse fargekodede sekvensene ble videre vektlagt under analysen der analysearbeidet foregikk ved at jeg beveget meg mellom transkripsjon, teori, modell og drøfting. Prosessen var preget av en fortolkende tilnærming med en søken etter vår bruk av prinsippene i det «nye» rammeverket jeg har tatt i bruk.

I min analyse har jeg, som Cohen et al.(2018) foreslår, hatt fokus på tematiske sekvenser som innledes med en beskrivelse av det jeg har funnet, før jeg skildrer funnene ved hjelp av eksempler fra datamaterialet tolket opp mot VT. Utgangspunktet for analysene er transkripsjonsmaterialet fra sekvensene med planlegging og undervisning. Presentasjonen av analysen har følgende struktur:

1. Hvilket variasjonsteoretisk prinsipp det er
2. Beskrivelse av prinsippet
3. Identifisering og drøfting av prinsippet

1. I analysen starter jeg med å identifisere prinsippet det er snakk om. Prinsippet er hentet fra rammeverket jeg bruker, og det er altså snakk om prinsippene prosedyrevariasjon, begrepsvariasjon, læringsobjekt, kritiske faktorer, variasjonsmønster, og variasjon og uforanderlighet. Prinsippene er satt i en rekkefølge med den hensikt å gjøre det enkelt for leseren å følge med i teksten.

2. Prinsippet blir beskrevet ut fra hva som ligger i det, bygget på det teoretiske rammeverket jeg bruker. Det kommer fram hva som er sentralt i prinsippet, og hva som har vært viktig når jeg har identifisert det prinsippet dreier seg om.

3. Hoveddelen av analysen består av å identifisere og drøfte prinsippene fra VT som er tatt i bruk som verktøy i planlegging og undervisning. I planleggingen og undervisningen er det forekomster av flere av prinsippene samtidig, det er likevel forskjell på hvilket prinsipp som ser ut til å ha hovedfokus. Så til tross for at eksemplifiseringen av begrepsvariasjon kan ha elementer av prosedyrevariasjon i seg, har jeg valgt å klassifisere det som eksemplifisering av begrepsvariasjon. På samme måte vil eksemplifiseringen av variasjonsmønster kunne ha elementer av variasjon og uforanderlighet i seg, men er likevel klassifisert som variasjonsmønster fordi det er her hovedfokuset ligger. I noen sekvenser kommer prinsippet godt fram via Bjørgs eller mine uttalelser, andre ganger gjennom noe elevene uttaler eller gjør. Når eksemplifiseringen i en sekvens klassifiseres under prinsippet jeg har satt det under, har jeg forsøkt å kommentere på hvilken måte prinsippet blir synliggjort eller hvordan eksempelet reflekterer det prinsippet omhandler, ut fra teorien. Jeg har også forsøkt å belyse hva som har vært vanskelig i møte med de ulike prinsippene. I noen tilfeller har det også vært aktuelt å diskutere om eksempelet er et reelt eksempel på prinsippet ut fra VT, eller om det framstår som noe jeg har oppfattet som del av et prinsipp, og dermed framstår noe «kunstig».

Jeg har altså leita etter mønster for å forstå, og tolke individuelle og spesielle funn inn mot VT. For på den måten å kunne løfte fram problemer, vise eller demonstrere, forklare og lete etter sammenhenger, forklare og sjekke ut, slik at jeg kunne undersøke om, og hvordan vi klarer å ta i bruk prinsipper fra VT i vår undervisning. Jeg beveger meg fra beskrivelse til forklaring via en teoridrevet prosess. I denne prosessen er jeg en del av den verden som blir tolket, og det er derfor behov for en utstrakt refleksivitet, selv om det er uunngåelig med en subjektivitet i en slik prosess. Fordi jeg bruker data fra situasjoner hvor det er en annen lærer med som uttrykker sine meninger, mener jeg at jeg sikrer meg at dataene jeg har, inkluderer minst en annen deltakers syn på situasjonen.



### 3.9 Validitet og generalisering

Et sentralt begrep i all forskning er validitet. Cohen et al.(2018) beskriver validitet som det å vise at et verktøy måler det det har til hensikt å måle. At metoden redegjør for de trekkene som den skal beskrive, representere, eksemplifisere eller teoretisere og i hvilken grad tolkningen av data er berettiget ut fra teorier som brukes.

I og med at jeg har forsket på et lite utvalg, og resultatene av forskningen har en begrenset mengde data, er det vanskelig å skulle trekke slutninger som kan være allmenngyldige og generelle. Validiteten og generaliseringen i denne studien handler derfor om at studien henger sammen med teorien, og at tolkningen er forsøkt å holde nøytral. Den har en deskriptiv validitet (Cohen et al., 2018) fordi det er en faktisk nøyaktighet i redegjørelsen, at den ikke er satt sammen, selektiv eller forvrent, men at den har en objektiv troverdighet. Jeg har lagt vekt på å fange betydningen, vilkårene, fortolkningene og hensikten som situasjoner og hendelser har hatt for deltakerne, og har dermed også en fortolkende validitet (Cohen et al., 2018). Den teoretiske validiteten i oppgaven bygger på forklaringer av elementene fra teorien som dukker opp i analysen.

Synspunktene som teorien genererer, kan brukes for å forstå andre lignende situasjoner, og på bakgrunn av dette kan man bruke begrepet generaliserbar eller overførbar (Cohen et al., 2018). Anvendelsen av en evaluerende og vurderende holdning til det som forskes på, gjør at jeg kan si at analysen har en evaluerende validitet. Målet med overførbarheten i denne kvalitative studien er å oppnå en bedre forståelse av fenomenet VT, og det å skulle undervise ut fra teorien.

### 3.10 Pålitelighet

Pålitelighet er et begrep som handler om bruk og behandling av data, og Cohen et al.(2018) sier at forskeren må være i stand til å antyde hensikten med forskningen. I min studie, som er kvalitativ, er påliteligheten gjort rede for i beskrivelsen av konteksten til datainnsamlingen, og hvordan jeg har analysert og kommet fram til mine vurderinger og konklusjoner.

Dokumentasjonen min er begrenset til en liten undersøkelse gjort ved en liten skole. Dataene jeg tar med er ikke nøytrale, da jeg subjektivt tolker, selv om jeg baserer meg på en teori. All dokumentasjon er innhentet i den hensikt å belyse mitt forskningsspørsmål. Jeg underbygger min analyse og antakelser med teoretisk begrunnelse i forskning, og har klassifisert datamaterialet ut fra den valgte teorien, VT. I mine beskrivelser har jeg bestrebet meg på å unngå tvetydighet, men samtidig være nyansert i kategoriseringen.

Begrepene jeg bruker i min analyse kan ha en bredere betydning på opprinnelsesspråket enn jeg har klart å oppfatte, og dermed være mindre nyansert enn ønskelig. Kategoriene reflekterer min tolkning av hva som ligger i dem, og de utsagnene jeg har kategorisert og tatt med i analysen min kan utelukke ting som har vært verdt å nevne, men som jeg har oversett. Jeg mener likevel at jeg i min studie har ivare tatt objektivitet og bekreftbarhet gjennom å sette til side egen oppfatning, tilstrebe støtte gjennom bruk av teori og annen litteratur, og ha en faglig distanse til datamaterialet.

### 3.11 Etske problemstillinger

I tråd med forskningsetiske retningslinjer for personvern og samtykke gitt av NSD (Nasjonalt senter for forskningsdata, 2019), har alle deltakerne i denne studien gitt fritt informert samtykke (se vedlegg 2 og 3). Elevene som var med i undervisningssituasjonen er under 16 år, og foreldrene har derfor gitt sitt samtykke for dem. I studien min er det selve undervisningen og læreren oppgaven dreier seg om. Selve casen er derfor av primær interesse og jeg kommenterer direkte på ting læreren sier og gjør. Til tross for at datamaterialet i oppgaven er anonymisert slik at man ikke skal kunne identifisere personer, er det uunngåelig at læreren kjenner seg igjen. Det er derfor viktig å presisere at tolkningene som gjøres er mine. Når det er sagt, har jeg diskutert tolkningene mine med Bjørg, noe som øker påliteligheten. Ifølge Cohen et al.(2018) er det flere mulige tolkninger av virkeligheten, og en annen tolkning vil være like gyldig som min. Tolkningen jeg gjør er preget av min personlige bakgrunn og mine erfaringer. I mine tolkninger har jeg, etter beste evne, forsøkt å la teori ligge til grunn, og derigjennom gi en objektiv analyse av datamaterialet. Poengene jeg trekker fram handler derfor ikke om mine personlige preferanser, men om sentrale trekk i teorien.

Det er viktig, forskningsetisk, å ivareta integriteten til personer som er involvert (Cohen et al., 2018). Dette gjøres blant annet gjennom anonymisering av data, og i framstillingen av personene som er involvert. De som har samtykket til å bli forsket på, har ikke samtykket til tolkningen jeg gjør. Dette hensynet skal likevel ikke hemme tolkningsarbeidet. Et slikt etisk dilemma har jeg vært bevisst på, og har forsøkt å bruke situasjoner fra datamaterialet som utgangspunkt for diskusjon, heller enn å vurdere læreren. Denne masteroppgaven har som mål å prøve ut en ny teori, VT, i formgiving og utførelse av undervisning, gjennom en lesson study-inspirert arbeidsform. I og med at vi bare har vært to lærere i denne studien, har det gått greit å oppfatte hva som har blitt snakket om, og lite informasjon har falt bort. I undervisningssituasjonene har det vært såpass god arbeidsro at det også her har gått greit å

oppfatte hva som har blitt sagt. På tross av at man tolker ut fra egne kunnskaper og erfaringer, har jeg forsøkt å være objektiv i mine analyser. Jeg har lagt vekt på at de som har deltatt, både læreren og de involverte elevene, skal utsettes for minst mulig belastning. De har hatt muligheten til å trekke seg fra forskningen når som helst, uten å måtte gi noen begrunnelse. Deltakerne i min forskning skal ikke bli negativt påvirket av å være med. I etterkant har deltakerne uttrykt at de sitter igjen med positive erfaringer fra studien. Bjørg uttrykte at hun ikke var helt klar for å delta i prosjektet, at hun ikke kunne noe om VT og at hun var utrygg i selve rollen som matematikklærer. Likevel sier hun i etterkant at det har vært en lærerik prosess. Temaet for forskningen har ikke vært av særlig sensitiv art, og dermed sannsynligvis ikke vært en belastning for deltakerne.

For å sikre personvernet er et personvernombud ved NTNU opprettet. For mine data er en NSD-godkjenning innhentet av meg direkte (vedlegg 1).

## 4. Analyse og datapresentasjon

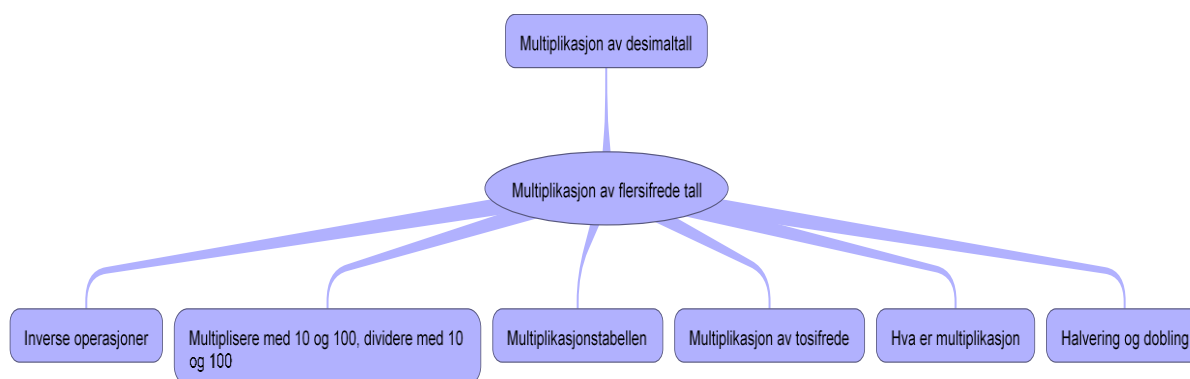
Møtet med Bjørg og observasjoner av undervisningen har gitt mye informasjon om hvordan variasjonsteori, som verktøy i planlegging og gjennomføring av undervisning, kan tolkes og tas i bruk. Bjørgs undervisning og utsagnene som kommer fram, er basert på vår oppfatning av hva variasjonsteori er, og gir muligheten til å få et innblikk i variasjonsteori slik vi har erfart den.

Analysedelen er strukturert etter prinsippene i variasjonsteori, ut fra mitt rammeverk, og ikke etter planleggingsøktene eller undervisningsøktene. Analysen bygger på det Bjørg og jeg har snakket om og det jeg har observert, sett i lys av det teoretiske rammeverket. Strukturen på analysen er laget ut fra rammeverket, som er presentert i teorikapittelet, med analyse bygget rundt prinsippene presentert i teoridelen. Analysedelen blir delt i seks underkapitler, som starter med fokus på læringsobjektet, deretter følger kritiske faktorer, begrepsvariasjon, prosedyrevariasjon, variasjon og uforanderlighet og til slutt variasjonsmønster.

### 4.1 Læringsobjekt

Dette begrepet handler om innholdet, kunnskaper eller ferdigheter som tilegnes gjennom læring. I og med at Gu et al.(2017) sier at det å bruke formativ vurdering kan hjelpe lærere til å forstå elevers læring, og tilpasse gode strategier for undervisning med variasjon, tok vi blant annet utgangspunkt i standardiserte tester vi bruker ved vår skole, for å komme fram til vårt læringsobjekt. M6 (Tornes, 2018) viser at elevene presterer under ønsket nivå på oppgaver om multiplikasjon med flersifrede tall, Bjørgs erfaring som lærer støtter det som kommer fram på denne testen. Gu et al.(2017) sier at læreren skal være en tilrettelegger, og vårt ønske var da å tilrettelegge for en bedre oppfatning om multiplikasjon av flersifrede tall. I vårt tilfelle var fokuset mest på det å befeste kunnskapen om multiplikasjon med flersifrede tall, og å utlede metoder å bruke på oppgavene. I tillegg håpet vi på at det ville øke elevenes evner til å observere, sammenligne, oppdage og generalisere. Under vårt arbeid med læringsobjektet, valgte Bjørg og jeg å lage en kunnskapspakke i planleggingen vår. Dette baserte vi på Ma (1999), som sier at kunnskapspakken gir en veiledning for læreren til å utvikle en forståelse av sammenhengen mellom matematisk kunnskap, det klargjør kunnskapen og gir en oversikt over metodebruk.

Kunnskapspakken vi laget så slik ut:



Figur 1. Kunnskapspakke for multiplikasjon med flersifrede tall.

Kunnskapspakken (figur 1) besto av tre lag. Første lag hadde i seg det vi mente elevene hadde av forkunnskaper, eller som flesteparten av elevene hadde med seg som forkunnskaper. Det neste laget handlet om hva elevene skulle lære, gjennom å delta i undervisningen, altså læringsobjektet. Det siste laget pekte videre på det vi mente lå inne i framtidig læring om multiplikasjon, sett ut fra læreplanen og læreboka som klassen bruker.

37 Trine: Ja vi må se da [famlende] om vi kan lage en kunnskapspakke, at vi ser hva elevene kan fra før, hva det ligger i den pakka som gjør at vi får dem dit, at de kan multiplisere flersifrede faktorer med hverandre. Så jeg tenkte vi kunne lage en slik pakke og se hvor vi starter.

41 Bjørg: Det hjelper veldig om de kan gangetabellen da.

Her kommer det fram at vi starter omtrent der vi har hatt fokus når det gjelder undervisning om multiplikasjon, slik jeg har erfart det. Vi starter med puggingen. Vi mener likevel at det er en del av kunnskapspakken, i form av en ferdighet, at elevene skal kunne gangetabellen. Til tross for at elevene har øvd på gangetabellen siden 3. trinn (ifølge Bjørg), så er det noen elever som ikke kan den. Vi valgte likevel å legge det inn som en del av forkunnskapene, i og med at de aller fleste elevene i klassen kan gangetabellen. De som ikke kan den, vil få bruke et 100-nett eller annet hjelpemiddel, slik at det å ikke ha klart å pugge, ikke skal hindre dem i videre læring om multiplikasjon. I løpet av planleggingsprosessen beveger vi oss over i å se på faktorer ved multiplikasjon som handler mindre om pugging og drill og heller om begrepsoppfatning og det å bruke kunnskaper.

239 Trine: Da kan vi altså gå via titallsystemet og den distributive lov. Vi har tre tilnærminger som vi håper skal pakke ut det matematiske for dem og gjøre det lettere å utforske matematikken. Vi distribuerer tallene, kobler det mot standardalgoritmen, med det de kan fra før altså, og setter det i en dagligdags situasjon, pluss at vi bruker arealtilnærmingen. Vi kan også få fram dette med gjentatt addisjon.

Fram mot denne sekvensen med utsagn 239, har vi diskutert mye rundt hva vi skal velge at elevene skal jobbe med og møte av ulike tilnærminger. Vi har et ønske om å bruke et matematisk problem, i form av en tekstoppgave, som kan vise fram variasjon i prosessen. Tanken er at det produseres flere metoder i det å skulle løse problemet, noe som peker tilbake på variasjonsmønsteret varierte metoder i mitt rammeverk. Meningen er at vi skal prøve å åpne eller pakke ut det matematiske, ved først å fokusere på å trekke inn det elevene kan fra før, eller trekke det fram for elevene ved en repetisjon, en slags støtte ved hjelp av prosedyrevariasjon, som beskrevet i mitt rammeverk. Videre er tanken å introdusere det å skulle multiplisere med flersifrede faktorer, eller stadfeste kunnskapen om det å multiplisere med flersifrede faktorer. Det handler ikke om å kunne en gitt algoritme, men å trekke fram flere løsningsstrategier ut fra hvordan elevene velger å jobbe med oppgaven. Hensikten med oppgaven vi valgte, var å introdusere multiplikasjon via en praktisk situasjon, noe vi er kjent med å bruke. Det ser ut til å bekrefte det Sun (2011) sier, at å bruke matematikk fra virkelige situasjoner er en kjent trend i vestlig matematikkundervisning. Deretter var også hensikten at elevene skulle trekke ut det matematiske, altså klare å trekke ut at det handlet om multiplikasjon, fra en mer kompleks bakgrunn. Å trekke ut det matematiske fra en mer kompleks bakgrunn, tolker jeg til å handle om variasjon og uforanderlighet. Videre ønsket vi at oppgaven skulle innby til å ta i bruk ulike strategier og metoder for å finne en løsning, altså bruk av variasjonsmønster. Tanken vår var også at det skulle være mulig for oss som lærere å gå inn og endre på noen faktorer i oppgaven mens vi holdt andre faktorer konstant, som i mitt rammeverk beskrives som variasjon og uforanderlighet.

2 Bjørg: Nå snakker vi om multiplikasjon vel? Det er det jeg har ønske om at vi skal jobbe med, for de sliter litt med det.

106 Trine: Så da tenker vi at hovedpoenget ikke er at de skal lære seg gangetabellen eller en standardalgoritme, men forstå multiplikasjon, hva som ligger bak og hva man gjør? Så vi tenker at de kan ha med hjelpemidler som for eksempel hundrenett slik at det ikke er puggingen det står på.

Her er to utdrag fra vår diskusjon rundt læringsobjektet. Vi diskuterte mye fram og tilbake, og da vi satt og laget kunnskapspakken kom det mer tydelig fram hva vi ville legge inn som forkunnskaper, eller forventede forkunnskaper, og hva vi skulle fokusere på i vår undervisning. Vi vurderte først å gå rett på å undervise om flersifrede tall. Men etter mye diskusjon kom vi fram til, ved hjelp av kunnskapspakken (Figur 1) og Ma (1999), at vi skulle holde mer fokus på multiplikasjon med tosifrede tall, satt inn i en praktisk sammenheng. Vi kom fram til at vårt læringsobjekt var at elevene skulle kunne multiplisere flersifrede faktorer, og også kunne benytte ulike metoder eller strategier i dette arbeidet. Vi ser ut fra utsagn 106 at fokuset ikke bare er på å se på spesielle metoder eller strategier, men mer se de generelle prinsippene som ligger i multiplikasjon. Denne generaliseringen, kan trekkes med videre i nye situasjoner som elevene møter. Det handler altså for oss ikke bare om det å kunne utøve en algoritme på en korrekt måte, men bruke ulike typer tilnærminger og metoder, som jeg tolker til å handle om variasjonsmønstre i rammeverket jeg bruker.

Ved å velge det læringsobjektet vi gjorde, ser det ut til at vi valgte et læringsobjekt som passer til det som karakteriserer det elevene slet med på M6 prøven (Tornes, 2018), nemlig å løse oppgaver om multiplikasjon med flersifrede tall. Vi tolket elevenes oppfatning av hva multiplikasjon er, stort sett som god, noe som gjorde at vi valgte å la dem prøve å utlede læringsobjektet fra en tekstoppgave. Vi tenker at det å skille ut at det er multiplikasjon det handler om i oppgaven, skal være med på å utvide området for bruk av multiplikasjon for elevene, noe jeg tolker til å handle om variasjonsmønstre. Elevene sier selv at de er vant til en mengde med oppstilte oppgaver, hvor de skal øve på en gitt metode. I og med at vi valgte en oppgavetype som elevene ikke er så vant med, og også valgte å la dem prøve seg fram selv, ønsket vi at de også skulle oppleve at matematikk kan være kreativt og spennende. I motsetning til kjedsommelig, noe de har uttrykt tidligere at de opplever matematikken som. Elevene måtte sammenligne med hverandre, og observere hvordan andre hadde tenkt, ved å se på at andre forklarte sine strategier. I tillegg skulle de i samtale snakke om hvilke metoder som var gode, eller mindre gode, hvorfor og hvorfor ikke. Altså fokus på generalisering, som av Lannin (2005) beskrives som selve kjernen i matematikk, og som Mok (2017) trekker fram som en av Marton og Tsuis mønstre av variasjon.

## 4.2 Kritiske faktorer

I denne delen handler det om å finne hva de kritiske faktorene kunne være for temaet, og for elevene. Altså ikke bare hva som kan være snublesteinene i selve det matematiske, men også

hva som kan være med på å hindre at elevene lærer (Runesson & Kullberg, 2017).

Forventede kritiske faktorer kan være hva som er det vesentlige elevene må lære, hvilke problemer elevene kan møte på, hva som kan forhindre læring og hvilke misoppfatninger som kan dukke opp. I arbeidet med å prøve å forutse de kritiske faktorene, hadde vi i bakhodet tanken om hva som kan være nøkler til læring.

En av de kritiske faktorene vi mente kunne hindre læring, var tid. Temaet vi har valgt å undervise om og å trekke ut et læringsobjekt fra, har vært undervist om i flere omganger og over flere år.

138 Bjørg: Nei men jeg tenker at disse som forstår da, de vil jo synes dette er dritkjedelig. For hvor lenge skal vi holde på med denne gangetabellen og dette da? Hvor mye repetisjon skal vi ha liksom.

451 Bjørg: Noen ville liksom løse det veldig fort da, for de har en metode. De er ferdige på en måte, de trenger ikke lære noe annet eller mer for de kan nok til å klare seg.

Noe av det som kan være vanskelig, er å tilpasse slik at de elevene som har en god oversikt over temaet ikke skal sitte og kjede seg, og at vi likevel får med oss de som sliter med oppfattelsen av multiplikasjon med flersifrede tall. Det at elever kjeder seg kan gjøre at de ikke følger med, eller at de aktiviserer seg selv med andre ting. De som ikke forstår kan lett falle ut, og ikke få med seg det som skjer. Så hvor lang tid vi skal holde på med hvilke deler av oppgaven, kan bli en kritisk faktor. Vi ser også etter første undervisningsøkt, at de som har lært seg en metode, bruker denne raskt og blir «ferdige» med oppgaven. Om de da skulle måtte sitte og vente på de som ikke har funnet en løsning, eller hadde en strategi de holdt på å prøve ut, ville det ført til kjedsommelighet, og vi ville mest sannsynlig mistet oppmerksomheten til disse elevene, og det ville kunne forhindre læring.

139 Trine: Da er vår jobb å finne en type oppgave som kan utfordre elevene litt, og samtidig få med de som ikke har kunnskapen på plass. Det skal jo være mulig å differensiere litt. Vi må nå se på hvordan vi kan undervise slik at de som ikke forstår det kan hjelpes framover og de som har forstått det kan få utfordringer. Det blir på en måte vår utfordring.

Her setter vi ord på en annen antatt kritisk faktor, nemlig det å undervise slik at vi unngår drilling og pugg, men får fram det vi vil elevene skal lære. I og med at vi har så mange elever



med ulik bakgrunn og ulike forutsetninger, gir dette utfordringer som vi må løse underveis. Her setter jeg utsagnet også i sammenheng med viktighetene av variasjonsmønstre, som kan hierarkisk pakke ut det matematiske for den enkelte elev, uavhengig av nivå den enkelte er på i dette temaet. Utfordringen her er å undervise med tanke på forkunnskapene elevene har. Noen av elevene vil ha gjentatt addisjon som den eneste strategien rundt multiplikasjon, og da må vi gi rom for at denne strategien kan tas i bruk, for så å trekke den videre til å ta i bruk flere strategier.

En annen kritisk faktor kan være språket. Watson (2017) mener at lærere må bruke språk som er klart og tydelig, og som trekker oppmerksomheten inn mot læringsobjektet. Det at vi som voksne bruker ord og uttrykk som elevene ikke forstår, kan oppleves som et hinder for elevene. Det kom også tydelig fram i undervisningen, hvor elevene i oppgaven møtte på et ord de ikke var kjent med, og som vi ikke hadde forutsett skulle være et problem. Nemlig ordet seksjoner.

297 Bjørg: Nå er dere i gang med å regne, men det var veldig mange som lurte på hva en seksjon er, så da har jeg lyst til at vi prøver å få en forklaring på hva det er.

Det kom raskt hender i været under første undervisningsøkt, hvor dette ordet ble tatt opp og spurt om betydningen av. Noen av elevene henger seg opp i ordet, og klarer ikke å gå videre og løse problemet fordi et sånt ord dukker opp. En slik faktor måtte da ryddes av veien for å få elevene videre i det å skulle tenke matematisk, og ikke bare å fokusere på det ordet de ikke skjønnte. Noe som vi også diskuterte rundt dette med språket, var hvordan vi skulle ordlegge oss slik at elevene ville tørre å prøve seg fram, en bruk av språket for å oppmuntre elevene. I følge Peng et al.(2017) kan elevers evne til problemløsning øke, om læreren oppmuntrer elevene til å finne flere ulike måter å løse ting på.

218 Trine: Når vi snakker får vi tenke gjennom hvordan vi ordlegger oss slik at vi ikke hindrer elevene i å prøve og å feile, men at de fortsetter å utforske. At vi ikke sier; «nei det var feil», men heller spør hvordan de har tenkt og hvor det stopper opp for dem. Hva som er logisk i tankegangen de har hatt. At vi hjelper dem og ikke skaper hindringer med hvordan vi snakker.

I utsagn 218 pekes det i retning av en kritisk faktor, som kan gjøre at elevene vegrer seg for å prøve å løse en oppgave som de synes ser for vanskelig ut. Det handler fortsatt om vår språkbruk. Om de blir for fokusert på at det de gjør er feil, vil det mest sannsynlig hindre

motivasjon for å prøve å fortsette med oppgaveløsingen, og læringen vil bli hindret. En mer åpen holdning med fokus på å høre hvordan elevene har tenkt, vil mest sannsynlig gi rom for en holdning om at det ikke gjør noe om vi gjør feil, vi kan bare prøve på nytt. Dermed vil en slik holdning kunne føre til at elevene våger å ta fatt på en oppgave som kan se vanskelig ut, og også kanskje prøve å løse oppgaven flere ganger. Når vi bruker en slik åpen dialog, kan det også gjøre det lettere å skulle diskutere hva man har tenkt selv, i samtale med andre elever, og også når man skal dele strategiene sine med hele klassen.

244 Trine: ... Det kan hende de, når de bruker standardalgoritmen, ikke tenker over hva de gjør men bare instrumentelt bruker en metode.

Her trekkes det fram noe vi mener kan være en kritisk faktor til, hvor elevene har en metode og bruker den i alle sammenhenger hvor multiplikasjon dukker opp. Elever som er låst i en metode de har lært, og bare bruker den fordi de har lært den på skolen. De ser ikke hva som ligger bak og hvorfor vi gjør som vi gjør, men bare gjør det fordi de har lært at slik skal det gjøres. En slik snublestein kan henge sammen med at de muligens har fått en undervisning om temaet med en instrumentell tilnærming tidligere. Ma (1999) hevder at kinesiske lærere har dypere forståelse for begrunnelsene bak algoritmene og dermed en mer solid kunnskap om rike sammenhenger og mer fleksible løsningsstrategier enn amerikanske kolleger. Når lærere har mer solid kunnskap, vil jeg anta at det også preger undervisningen og dermed gjøre at elevene får en mer solid kunnskap. Når vi ser at elever kun bruker én løsningsstrategi for å løse ulike typer oppgaver om multiplikasjon, tolker jeg det til å handle om nettopp det at de har møtt en instrumentell tilnærming med få eller kun en løsningsstrategi i undervisningen.

22 Bjørg: Hvis de bare lærer seg en metode så kan de liksom få blackout når de møter oppgavetyper de ikke har sett før. De tenker kanskje at her har jeg ikke noen metode jeg kan bruke og dermed så får jeg det ikke til. Selv om de faktisk kunne gjort det veldig enkelt.

En snublestein som pekes ut i utsagn 22, er selve oppgaven vi gir dem. De er ikke vant til denne typen oppgave. Noe som kan føre til at de vil slite med hvordan de skal gripe an situasjonen.

130 Bjørg: Ja altså du kan jo merke da, noen ganger, at om de får en tekstopp-gave så lurar de på hvilken regneart de skal bruke. De spør: «Hva skal jeg gjøre, skal jeg gange eller dele, eller hva skal jeg gjøre her?».

De får en tekstoppgave, med en bakgrunn for det de skal regne ut. Her må de gjøre jobben med å skille ut opplysningene de trenger, fra en litt mer kompleks bakgrunn. De får ikke oppgaven ferdig oppstilt. Å skille ut det matematiske fra en mer kompleks bakgrunn, peker på variasjon og uforanderlighet i mitt rammeverk. Jeg oppfatter det Bjørg sier, dithen at elevene er vant til å få en gitt metode for å løse en oppgave. Måten å jobbe på, som vi har lagt opp til her, kan gjøre at noen elever vil ønske å gi opp, og dermed ikke henge med i undervisningen. Altså en mulig snublestein.

65 Trine: Kan elevene multiplisere med hele tiere da?

68 Bjørg: [mumler litt og bruker tid] Det som kan bli et usikkerhetsmoment er når det blir desimaltall da, det blir vanskeligere med desimaltall.

I forbindelse med undervisning om multiplikasjon med hele tiere, kommer det fram at Bjørg har latt elevene møte heltall. Det hun nå virker å reflektere over, er regelen elevene har laget seg på bakgrunn av det å bruke bare heltall i en slik undervisning. Regelen de har laget seg, er at de bare legger på en null for hver hele tier de multipliserer med, bak tallet de multipliserer.

129 Bjørg: Ja det er jo sånn at når man lærer en regel så fungerer den i noen sammenhenger eller i akkurat DEN sammenhengen, men så bruker de den på andre situasjoner.

Når elevene har laget seg en slik regel som de bruker generelt, vil det kunne være en av de kritiske faktorene. I en av variasjonene vi har planlagt, vil de møte desimaltall. Om de da multipliserer med hele tiere og bare legger til nuller, vil dette skape problemer for dem. Vi fikk i samtalen trukket inn, at når vi underviser om multiplikasjon med hele tiere, bør vi trekke inn flere ulike eksempler, som kontrast til hele tall. Gu et al.(2017) argumenterer med at kontrasten mellom det som er likt og ulikt hjelper eleven til å erfare læringsobjektet på en spesiell måte. Ved å presentere heltallene og desimaltallene i samme undervisningsøkt, når man underviser om multiplikasjon med hele tiere, vil man mest sannsynlig få fram, og gjøre det enklere å skille ut det som er kritiske faktorer ved å multiplisere med hele tiere, nemlig mønsteret hvor man legger til nuller. Om elevene, under arbeid med multiplikasjon med hele tiere, får trukket fram multiplikasjon med desimaltall samtidig med heltall, vil de mest sannsynlig se at «trikset» med å legge til en null ikke er en generell regel. Som Hershkowitz (1989)sier, så kan man fremheve essensen til et begrep ved å kontrastere. Det å ha god oppfatning om et begrep, handler om å kunne skille mellom hva som er en del av begrepet og

ikke. For eksempel at det å multiplisere med hele tiere ikke handler om å legge til nuller, men om sifferets plassering i plassverdisystemet.

En del av elevene ser ut til å slite med å ha oversikt over plassverdisystemet. Dette kan også være en hindring for læring om multiplikasjon, særlig om de har hatt fokus på standardalgoritmen. Den algoritmen har i seg at man må vite hvilken verdi sifferet har når det står på den plassen det gjør. Om elevene ikke har denne oversikten, vil de mest sannsynlig ikke kunne reflektere over om svaret de får kan være riktig, da de ikke har forutsetninger for å forstå det de driver med.

440 Elev5: Når jeg regner med den algoritmen så tenker jeg ikke, jeg bare regner.

Elev5 er en elev som ofte reflekterer godt rundt matematiske problemer, men når h\*n tar i bruk algoritmen som h\*n referer til, så sier h\*n at h\*n ikke tenker men bare gjør. Her ser det ut til at det kan bli en av snublesteinene for elevene, de bare gjør noe helt automatisk uten å tenke over det, uten refleksjon.

Det å ikke kunne gangetabellen, så vi på som en mulig kritisk faktor.

41 Bjørg: [virker famlende] Det kan hjelpe veldig om de kan gangetabellen da.

I diskusjonen rundt gangetabellen som mulig kritisk faktor, trakk vi inn hvor lang tid vi skulle legge ned på puggingen av gangetabellen. Som nevnt ovenfor sier Bjørg at de har holdt på med pugging av gangetabellen siden 3.trinn, og noen kan den enda ikke. I og med at vi ikke ønsket å ha fokus på puggingen, valgte vi å gi elevene muligheten til å bruke et hundrenett eller kalkulator, for å komme videre i læringen om multiplikasjon. En slik støtte ved hjelp av et begreps-artefakt, kan brukes for å bygge bro over vansken. Det handler om at vi forsøkte å skape en riktig og dynamisk støtte, for å øke elevenes utvikling, ved å tilby relevante undervisningsstrategier (Gu et al., 2004). Bjørg mener elevene som ikke kan gangetabellen likevel har skjönt hva multiplikasjon er, i alle fall at det kan uttrykkes som gjentatt addisjon. Når vi valgte å la elevene bruke et artefakt til hjelp, ga vi dem en støtte for å forsøke å eliminere denne kritiske faktoren.

I sammenheng med samtalene rundt det å legge inn oppgaven som en tekstopp-gave, trakk vi fram hvordan å undervise slik at eleven kan forstå, og ikke bare gjøre.

131 Trine: Så de vet ikke helt hva det handler om, hvordan underviser vi slik at elevene klarer å forstå multiplikasjon med flersifrede tall etter hvert og unngå at det blir drill og pugg?

Det å undervise så elevene kan oppfatte, og ha en kunnskap om multiplikasjon og ikke bare en ferdighet i å utføre en operasjon, kan være en kritisk faktor. Hvordan undervise slik at vi unngår å havne i pugging og drill? Det at vi har et slikt fokus, ser ut til å handle om en kritisk faktor for selve temaet. Vi har tidligere i egen undervisningspraksis hatt et annet fokus ved undervisning om multiplikasjon, og det å skulle snu fokus var utfordrende. Bjørg uttrykker det veldig godt når hun sier følgende:

463 Bjørg: Men jeg tenker jo litt sånn at en begrensning, med meg selv altså, det er jo at jeg selv bare regner med den algoritmen. Jeg har jo aldri drevet med andre metoder å regne på, jeg har det liksom ikke helt inne.

Her tolker jeg at det er en stor omveltningssprosess for en allmennlærer, som har jobbet i skolen i mange år, og undervist i matematikk slik vi tradisjonelt sett har gjort det, å skulle snu tankegangen inn mot en variasjonsteoretisk tankegang. At man skal kontrastere og variere blir en utfordring, i motsetning til bare å vise og få «satt» en metode, som Rowland (2008) hevder har vært en tradisjon i vestlig matematikkundervisning.

En kritisk faktor vi ikke hadde forutsett, men som dukket opp i løpet av første undervisningsøkt, var bruken av parenteser. I løpet av sin undervisning, satte Bjørg inn parenteser når hun delte opp tjuvfem i tjue og fem.

424 Bjørg: Jeg tar førti ganger tjuvfem og deler opp tjuvfem i tjue og fem. Så setter jeg parentes rundt tjue og fem for å vise at de hører sammen, men kan tas hver for seg.

Her får hun spørsmål om hvorfor hun setter parentes rundt det tallet hun har delt opp. Elevene har lært at det som er inne i parentesen skal løses først. Dermed blir det å sette tjue og fem sammen igjen, og vi er tilbake der vi startet, med tjuvfem. Elevene trekker inn en regel de har lært ved bruk av parentes og addisjon, som Bjørg har undervist tidligere. Elevene har ikke noen forståelse for hvorfor det i det hele tatt brukes parenteser. Det kommer også tydelig fram hvor viktig det er å kunne gå begge veier, altså ikke bare å kunne regne ut noe med parenteser, men også sette inn parenteser for å gjøre det mer oversiktlig. I samtalen med elevene i løpet av undervisningen, reflekterer Bjørg over at hun burde ha vist bruken av parenteser for mer enn bare addisjon og subtraksjon.

427 Bjørg: Jeg tenkte at det kanskje skulle gjøre det lettere å se at da ganger man førti med tjue først og så med fem. Men jeg ser at det er lett å blande, for det er riktig at når vi har parenteser må vi regne det som er inne i parenteser først, det er jo en regel, men det er med pluss og minus. Når vi blander dette med ganging så er det en regel som sier at vi skal gange først.

I refleksjonen i etterkant av undervisningen trekker vi fram igjen situasjonen med parentesene, og snakker om samtidighet i undervisningen. At det å vise en ting om gangen for å befestet et emne, en ferdighet, før man går videre, gir færre muligheter til å skape sammenheng, enn om man har en samtidighet i presentasjonen av ulike tema (Rowland, 2008).

### 4.3 Begrepsvariasjon

Under arbeid med dette prinsippet, søker vi å legge vekt på at man skal se mening i og mellom kunnskap (Ding et al., 2017). Her er det snakk om det statiske aspektet til de matematiske objektene, å hjelpe elevene til å gripe tak i de ulike meningene objektene innehar, og forholdene mellom objektene.

58 Bjørg: Kan kanskje være lurt å få fram for elevene i hvilke sammenhenger man bruker multiplikasjon.

Her snakker Bjørg om at elevene skal se meningen i å bruke multiplikasjon, til å finne løsningen på et praktisk problem. Dette snakket vi om for å få fram sammenhengen mellom det vi holder på med i matematikktimene, og det man ser rundt seg i den virkelige verden. Når vi i vår planlegging snakker om begrepsvariasjon, ser det ut til å komme tydelig fram, av blant annet utsagn 58, at det å se meningen mellom kunnskap, har ulik betydning for oss og for kinesiske lærere, noe Sun (2010) beskriver. Det som ligger i begrepsvariasjon ut fra variasjonsteori er å se mening mellom selve det matematiske, og ikke slik vi har tolket det her, i praktiske situasjoner. Vi starter altså å snakke om begrepsvariasjon ved å snakke om noe helt annet, en sammenheng til det praktiske. Det handler for oss om å sette det inn i en praktisk sammenheng, mens det for kinesiske lærere handler om å sette det inn i en matematisk sammenheng. Vi har her ikke klart å ta i bruk det prinsippet vi faktisk tar for oss fra variasjonsteori, som er begrepsvariasjon. Jeg tolker utsagnet til å vise noe av forskjellen mellom den matematiske kulturen som vi har vokst opp i, og som er forskjellig fra den kulturen vi prøver å trekke med oss noe fra. Videre i planleggingen fortsetter vi å snakke om

meningen mellom kunnskap slik vi ser det, uten å reflektere nok over om det faktisk handler om begrepsvariasjon, slik det kommer fram i variasjonsteori. Når jeg likevel trekker utsagn 58 fram under prinsippet om begrepsvariasjon, tolker jeg prinsippet til å handle om det å forme et begrep i bevisstheten til elevene. En slik begrepsforming kan gjøres gjennom bruk av praktiske sammenhenger, for å klare å abstrahere essensielle trekk ved det matematiske. Ved å sette det matematiske inn i en praktisk sammenheng, for så å lage variasjonsmønster i den matematiske sammenhengen etterpå, tar man kanskje med seg det beste fra begge verdener? Dette mener jeg kan støttes av Peng et al.(2017).

I løpet av samtalene våre kommer det etter hvert fram flere utsagn som peker i retning av at vi mer og mer klarer å sikte oss inn på å snakke om begrepsvariasjon, i den variasjonsteoretiske betydningen.

81 Bjørg: Altså jeg [famlende] Jeg har jo hatt en time på mandag hvor jeg gikk gjennom gangetabellen og så knyttet den opp mot divisjon og hvilke divisjonsstykker de kunne få ut av tall i gangetabellen. Altså det at ganging og deling henger sammen, at de er motsatte regnearter.

I utsagn 81 snakker Bjørg om å få fram sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon, dette handler helt klart om sammenhengen mellom matematiske objekter, og å se meningen som ligger i og mellom dem. Å se at multiplikasjon og divisjon er inverse regnearter, eller som Bjørg uttrykker det, at de er motsatte regnearter. Denne undervisningen gjorde Bjørg i forkant av den filmede økten, og undervisning om dette var en del av vår kunnskapspakke (Figur 1). Vi hadde med dette punktet for at oppfatningen av multiplikasjon hos elevene skulle være så god som mulig, og inneha så mange vinklinger og nivåer som mulig. Dette la vi vekt på for at elevene skulle kunne tilegne seg kunnskapen stegvis, slik prosedyrevariasjon (Peng et al., 2017) peker på, og målet var å fylle i «hull» i kunnskapen om multiplikasjon, som elevene eventuelt hadde, og å skape sammenheng mellom multiplikasjon og divisjon. En slik sammenheng vil gjøre oppfatning av divisjon også bredere, og forhåpentligvis lettere å gripe for elevene i videre læring om matematikk. Denne delen av rammeverket kalles begrepsvariasjon, at elever lærer matematiske begreper ut fra mange ulike eksempler og tilnærminger for å se meningen i og mellom kunnskap.

Det at vi velger å la elevene få se tallene som introduksjonsoppgaven har i seg, dukke opp på ulike steder eller ved hjelp av ulike representasjoner, er med på å bekrefte begrepet om

plassverdi. For eksempel når Bjørg demonstrerer arealmodellen, eller ulike elever får presentere ulike måter å løse oppgaven på.

414 Elev2: Når jeg ser et sånt rutenett så synes jeg det er vanskelig å dele opp tallene, men kan jeg ta tjuefem og dele i tjue og fem og så førti og dele i tjue og tjue?

610 Elev3: Vi halverte og doblet, tjuefem til femti og så tok vi førti til tjue.

311 Elev4: Jeg tok ti ganger tjuefem og så tok jeg det fire ganger

Her ser det ut til at vi har lagt til rette for å bekrefte kunnskapen om plassverdi. Ut fra slik jeg tolker Pang et al.(2017) er det å befeste allerede ervervet kunnskap, om for eksempel plassverdi, en type begrepsvariasjon. Kunnskapen om at tjuefem er satt sammen av tjue og fem, altså at sifferet 2 i tjuefem er to tiere, og at om vi deler opp dette så kan vi multiplisere hver av de delene, med delene som førti er satt sammen av. Det kom også fram at noen elever valgte å ta tjuefem ganger førti, og dele førti opp i fire tiere, for så å ta det fire ganger, altså slik eleven forklarte det, addere to hundre og femti fire ganger. Her kombineres kunnskapen om plassverdi også med kunnskapen om gjentatt addisjon, og knyttes sammen når de jobber med oppgaven. Det viser, slik jeg tolker teorien, en klar oppfatning om meningen i og mellom kunnskap om multiplikasjon, altså begrepsvariasjon. Elevene fikk, i den gitte oppgaven, muligheten til å trekke inn sammenhengen mellom addisjon og multiplikasjon, ved å bruke gjentatt addisjon. Dette tolker jeg til å handle om mening i kunnskap om multiplikasjon, da multiplikasjon også handler om gjentatt addisjon. Elevene kunne i tillegg trekke inn for eksempel det å lage en modell av selve stadionet, eller bruke arealmodellen, og dermed bruke en praktisk sammenheng for å klare å abstrahere det matematiske. Slik jeg tolker Han et al.(2017) er det mulig å si at det er begrepsvariasjon, fordi det er med på å berike visuell representasjon. Det handler om å se læringsobjektet fra ulike vinklinger og i flere nivåer, spille på disse kunnskapene og ferdighetene, for så å se meningen mellom denne kunnskapen, og over i ny kunnskap om multiplikasjon av flersifrede tall.

## 4.4 Prosedyrevariasjon

Det betegnende for dette begrepet, er at man har steg og strategier for å overføre eller utforske faget (Ding et al., 2017). Her søker vi å fremheve det å skape hierarkiske systemer, når elevene skal brette ut de matematiske aktivitetene. Det handler om den dynamiske siden ved de matematiske objektene (Sfard, 1991), som tar sikte på å gi en prosess mot det å danne seg et bilde av begrepet man jobber med.



I prosessen med å planlegge og å evaluere undervisningen vår, trekker vi fram at vi tenker det er en sterk sammenheng mellom strategiene for å kunne multiplisere tosifrede tall med hverandre, og det å kunne multiplisere flersifrede tall etter hevert.

145 Trine: Jeg mener, at om elevene forstår multiplikasjon med tosifrede tall så vil de sannsynligvis forstå multiplikasjon med flersifrede tall også.

Her trekker jeg inn og legger vekt på sammenhengen mellom multiplikasjon av tosifrede tall, og så over i multiplikasjon av flersifrede tall, et forsøk på å skape hierarkisk system, altså prosedyrevariasjon. I Ma (1999), hevdes det at om elevene vet hva de gjør og hvorfor de gjør som de gjør med tosifrede tall, så kan de trekke den kunnskapen over i det å skulle multiplisere med flersifrede tall. De kan gjøre dette uten å måtte lære en eller annen gitt standardalgoritme, men bare resonere seg fram, ut fra de kunnskapene og ferdighetene de har, og dermed skape mulighet for å utvikle nye prosedyrer. Multiplikasjon med tosifrede tall blir på en måte en slags hjørnestein, som gir støtte for at elevene skal kunne lære multiplikasjon med tresifrede tall, for deretter å utvikle det videre til mer kompliserte oppgaver. Det å forstå hva man gjør i denne fasen er avgjørende for utviklingen videre. Fordi det å forstå tanken bak å multiplisere med flere siffer mens man jobber på den enklest mulige formen, vil være et grunnlag for å forstå en mer kompleks og utviklet form, som det å multiplisere enda flere siffer innebærer (Ma, 1999).

Elevene ble forventet å jobbe en og en med problemet på sin egen måte, med de forkunnskapene og ferdighetene de hadde. Før de etter en stund ble satt i grupper for å analysere problemet sammen, og sammenligne hvordan man kan regne ut antallet seter. Her ser det ut til at det er et fokus på prosedyrevariasjon for elevene, fordi det handler om strategier for å utforske faget.

501 Trine: Vi satte jo elevene sammen for å få til en diskusjon rundt egne strategier, om den ene metoden var bedre enn den andre og i så fall hvorfor eller hvorfor ikke. Slik at vi kunne bevege oss mot en slags generalisering.

Vi ønsket å oppmuntre elevene til å ta i bruk ulike strategier for det å multiplisere. De kunne trekke inn sammenhengen mellom addisjon og multiplikasjon ved å bruke gjentatt addisjon, eller de kunne trekke inn for eksempel det å lage en modell av selve stadionet, eller bruke arealmodellen. Vi trakk i leksjonen fram ulike metoder, og så på likheter og forskjeller mellom metodene. Ved å åpne opp for en slik dimensjon gir det rike muligheter for å se at

multiplikasjon er mer enn å fokusere på å lære en spesiell algoritme, men at mange ulike prosedyrer kan tas i bruk. Det handler om å se multiplikasjon fra ulike vinklinger og i flere nivåer, ut fra forkunnskapene elevene har. Videre handler det om å spille på disse kunnskapene og ferdighetene, for så å se meningen mellom denne kunnskapen og over i ny kunnskap om prosedyrer for multiplikasjon av flersifrede tall. Altså, skape et hierarkisk system av kunnskap, som er tanken bak prosedyrevariasjon.

766 Elev1: Jeg har lært at det er lurt å kunne flere regnemetoder, for eksempel å halvere og doble, men det var ikke så lurt med de tallene jeg hadde her da. For jeg hadde hundre og fire ganger tre, og det kunne jeg jo bare tatt i hodet i stedet for å drive og halvere og doble. Det ble jo bare mer komplisert.

Her reflekter elev1 over en av strategiene  $h^*n$  har valgt, i en oppgave som de var satt til å jobbe med, etter startoppgaven. Den oppgaven var ment å sette elevene i stand til å trekke inn strategier de syntes var lure å bruke, på den gitte oppgaven, heller enn bare å bruke en standardalgoritme, slik vi opplevde at de hadde gjort hittil. Meningen var å se sammenhengene mellom oppgaven de fikk, og hvordan å bruke ulike strategier eller prosedyrer for å komme fram til en løsning. Elev1 har helt klart en tanke om at det å doble og halvere er en enkel metode, prøver den, for så å oppdage, at det egentlig var en strategi som gjorde oppgaveløsingen mer komplisert. Hvorpå  $h^*n$  påpeker at her kunne  $h^*n$  bare regnet med de tallene  $h^*n$  hadde, og det var såpass enkelt at  $h^*n$  ville kunne brukt hoderegning. Et godt eksempel på at  $h^*n$  etter hvert ser sammenhengen mellom de strategiene  $h^*n$  har, og bruken av dem på tallene  $h^*n$  får oppgitt i en oppgave. Det at denne eleven reflekterer over sin prosedyrebruk på denne måten, gjør at jeg tolker det dithen at elev1 har flere prosedyrer i sin matematiske «verktøykasse», bruker flere strategier for å utforske faget. Denne episoden, tolker jeg, peker i retning av at vi hadde et fokus på å utlede metoder å bruke på oppgavene, i undervisningen som ble utført, og ikke bare algoritmetrening. Det å utlede eller ta i bruk ulike metoder, viser i mitt rammeverk til prosedyrevariasjon.

69 Trine: Ja, kan vi gå inn og sjekke hva de tenker, hva slags tanker de har rundt det å multiplisere med hele tiere, hva de mener skjer da?

I utsagn 69 kommer det fram at vi har forsøkt å sette multiplikasjon med hele tiere, inn i en sammenheng med temaet multiplikasjon. Vi gjør det for å gi mening til kunnskapen om det å multiplisere med hele tiere, når det dukker opp i tall bestående av flere enn ett siffer. Her blir det snakk om å trekke kunnskap man har fra tidligere undervisning, inn i en sammenheng

hvor det dukker opp tall som er satt sammen av flere enn ett siffer. Jeg tolker det til å være snakk om å bruke dette til hjelp når man pakker ut det matematiske, altså strategier til bruk i en utvikling av en prosedyre. Det handler om prosedyrevariasjon når man tar strategiene i bruk, for å utvikle regneprosedyrer til å få løst oppgaver.

570 Bjørg: At vi plukker ut tre metoder fra elevene og går gjennom dem og så kan vi gå inn og se på hva de ville gjort om tallene ble endret? Hvilke metoder de ville brukt da.

Bjørg setter ord på det å få trukket fram ulike prosedyrer fra elevene, og få vist fram dette til hele klassen. Hun nevner også dette med variasjon her, og jeg tolker at både det å snakke om prosedyrevariasjon og variasjon mot et bakteppe av uforanderlighet viser seg i samme utsagn. I og med at prosedyrer trekkes fram her, velger jeg å bruke utsagnet som et uttrykk for at prosedyrevariasjon blir satt fokus på i undervisningen. Utsagn 570 viser også at det er en tanke om at elevene skal komme med ulike strategier eller prosedyrer, som kan trekkes fram for hele klassen, og også at ulike tall i oppgaven vil generere ulik bruk eller ulik utvikling av prosedyrer hos elevene.

818 Bjørg: Her får de inn at de må tenke at det ikke bare finnes en metode men flere, og man kan velge metode etter hvilke tall man får. Det er det vi må få fram at man kan løse oppgaven på nesten hvilken som helst måte.

Her trekker Bjørg fram noe hun har snakket om i undervisningen, nemlig ulike metoder eller strategier elevene har tatt i bruk, og ulike strategier eller metoder hun har vist på tavla. Hun snakket i undervisningen hun henviser til her, om hvilke metoder som kan være lurt å bruke på de tallene de har fått oppgitt. I og med at elevene fikk ulike tall å jobbe med, sammenlignet hun metoder og strategier, og fikk elevene til å snakke om hva de mente var lurt å gjøre med de ulike tallene og hvorfor. Her tolker jeg også utsagnet til å handle om prosedyrevariasjon og det å utvikle metoder, for å bruke disse til å løse oppgaver. Tanken vår var at man skal utvide prosedyremangfoldet for elevene, og ikke låse dem i en algoritme eller det å løse oppgaver instrumentelt. Her får elevene muligheten til å ta i betraktning trekk ved multiplikasjon av ulike typer tall, og kunne ha muligheten til å begynne å gjøre seg opp en slags mening rundt å tenke generelt rundt metoder, og bruken av dem.

830 Bjørg: Jeg ser jo..., men jeg synes det er vanskelig å få oversikten, jeg er ikke god nok på det, jeg er ikke nok trent på det.

Utsagn 830 er deler av beskrivelsen Bjørg bruker, når hun snakker om det å legge til rette for prosedyrevariasjon for elevene. Jeg ser, ut fra sammenhengen sitatet står i, at det også henger sammen med det å skulle skape en endring mot et bakteppe av å holde noe konstant, altså variasjon og uforanderlighet. Vi hadde snakket om at vi skulle gjøre dette, men tydeligvis ikke gjennomtenkt nok og med en klar og tydelig plan. Her gikk vi inn og endret i planleggingen før andre undervisningsøkt og la til rette for hva vi ville holde konstant og hva som skulle forandres, slik at vi kunne få fram en prosedyrevariasjon. Det å legge til rette for å trigge elevene til å bruke ulike metoder var tanken når vi endret på tallene men holdt selve oppgaven fast. Vi holdt også antallet seter og seksjoner konstant men valgte å endre på antallet rader. Når prosedyrene ble presentert på tavlen ble det også vektlagt hvordan man hadde valgt å løse oppgaven med tanke på ulike metoder, men også sett opp mot hvordan man ville gjøre det med bruk av ulike tall man har foran seg.

## 4.5 Variasjon og uforanderlighet

Det karakteristiske for variasjon og uforanderlighet, er at man skaper variasjon i det som skal læres. Det baserer seg på at elever og lærere ser et matematisk emne på ulike måter, og ved hjelp av variasjon er målet at alle skal få muligheten til å skille ut det som er kritisk for deres læring. Målet er å skape en variasjon mot et bakteppe av uforanderlighet, altså hvor man holder noe konstant mens man varierer andre faktorer (Watson, 2017).

Jeg kan i mitt datamateriale ikke finne noe som indikerer at variasjon og uforanderlighet var klart trukket fram i første undervisningsøkt. Det tolker jeg dithen at dette var utfordrende for oss å skulle ta i bruk i vår planlegging og undervisning. I tillegg er det også det punktet jeg ser er minst til stede i min samtaleguide. Det var ikke slik at vi ignorerte å skulle trekke med oss dette punktet, men vi fikk ikke belyst prinsippet godt nok hverken i planleggingen eller undervisningen av først økt. Når vi snakker om undervisningen i etterkant og ser på filmen av det vi har undervist, ser vi at prinsippet mangler i vår undervisning, og trekker det fram for å endre.

I første økt startet Bjørg med å beskrive en tekstopp-gave, med et problem som skulle gjøre elevene i stand til å forstå oppgaven de skulle gjøre.

291 Bjørg: Nå skal dere få en problemløsningsoppgave, det er et idrettsstadion, gjerne fotball, med åtte seksjoner. I hver av disse seksjonene er det førti rader med tjuefem seter i hver rad. Vet dere hvordan et fotballstadion ser ut? [det nikkes og mumles i

klassen] Bra. [Spørsmålet om hva en seksjon er kommer fram, Bjørg tegner på tavla og trekker elevene med under forklaringen på hva en seksjon er].

Etter å ha hjulpet elevene til å løse problemet med begrepet seksjoner, stiller Bjørg elevene spørsmål for å kjenne igjen strukturen på oppgaven.

299 Bjørg: Hva er informasjonen dere får i oppgaven som dere trenger å regne ut?

[Flere elever kommer med tilbakemeldinger] Ja ikke sant, hvor mange seter det er på hele stadionet totalt.

I denne oppgaven fikk alle elevene samme tall som skulle jobbes med, og samme bakgrunn. Jeg fikk inntrykk av at læringsobjektet kom tydelig fram for elevene, nemlig at det skulle multipliseres og at det var snakk om flersifrede tall. Mok (2017) sier at læring støttes av fokuset mot de kritiske faktorene, og i og med at det ser ut til at de kritiske faktorene ble trukket godt fram, tolker jeg at læringsobjektet fikk oppmerksomhet. Det til tross for at variasjon og uforanderlighet ikke kom tydelig nok fram. Vi oppdaget raskt at de elevene som ofte blir beskrevet som «flinke» brukte standardalgoritmen, satte opp i «trapp» og regnet raskt ut. De som ofte beskrives som svake, hadde glemt algoritmen og fikk ikke til oppgaven. Elevene ble på en måte låst av at multiplikasjon ser ut til å ha blitt jobbet med på en måte, som gjør at man tenker at det handler om at man skulle huske en metode for så å bruke den. Vi hadde i utgangspunktet ikke planlagt hva elevene skulle bli presentert for som varierte og hva som ble holdt fast, men vi valgte å gå rundt og prøve å endre betingelsene for de elevene som enten ble fort ferdig eller ikke fikk til. Bjørg beskriver i evalueringen at hun synes det er vanskelig å skulle gjøre dette, når vi ikke har tenkt på slike strategier i forkant.

830 Bjørg: Jeg ser jo... men jeg synes det er vanskelig å få oversikten, jeg er ikke god nok på det, jeg er ikke nok trent på det.

Her kommer det fram at vi ikke har snakket om prinsippet på en god nok måte før undervisningen, og det gjør at Bjørg opplever at hun ikke klarer å ta det i bruk når hun går rundt for å veilede elevene. Det å skulle endre på noen faktorer for å holde noen andre faktorer konstant, ser jeg krever at man har gjort et mye mer gjennomtenkt arbeid i forkant.

Etter første undervisning gjorde vi endringer.

564 Trine: Ja det er noe vi må endre for å få læringsobjektet bedre fram. Vi bruker fortsatt samme «setting» for tallene, at det er et stadion. Men vi endrer litt på noen av tallene.

566 Bjørg: Ja vi snakket jo om det, men vi fikk det kanskje ikke til så godt.

Her kommer det fram at Bjørg mener vi har snakket om variasjon og uforanderlighet i løpet av prosessen, men at vi ikke har klart å få det fram for elevene. Når vi ser at vi ikke har fått dette punktet tydelig nok fram, gjør vi en endring i vår planlegging for neste økt. Vi går inn og ser på hvilke faktorer vi vil holde konstant, og hvilke vi kan variere. Vi snakker om at vi må, etter hvert som vi ser hva elevene trenger, gi dem ulike tall å holde på med. Oppgaven skulle fortsatt være den samme, men vi skulle gå rundt og endre noen av tallene for elevene som trengte det underveis. Denne gangen ville vi ha en plan for hva vi skulle variere og hva som skulle holdes konstant. Her valgte vi at de elevene som vi så strevde, skulle få jobbe med fire rader med tjuefem seter i hver rad og så åtte seksjoner. De elevene som hadde nok utfordringer, kunne holde på med det opprinnelige problemet. For de som syntes dette var enkelt, valgte vi å presentere førtitre rader med tjuefem seter i hver, eventuelt førtitre og en halv rad om det var noen som trengte å pushes enda videre. I utgangspunktet snakket vi om å endre på tjuefem til fem seter, og til tjuefem og ett halvt sete, men for elevene å bli presentert for halve seter mente vi ville virke ulogisk. Da var det bedre med halve rader, selv om det også egentlig bare er tull. Det ville kanskje virket mer logisk ved bruk av partall i den opprinnelige oppgaven, men likevel ville det bli noe søkt. Det kommer her tydelig fram, at det å skulle tilpasse oppgaver er en utfordring, noe som bekreftes av Runesson og Kullberg (2017), som sier at det er et designprosjekt i seg selv å skulle lage gode variasjonsoppgaver. Samtidig tolker jeg det at vi ikke helt klarer å velge en god oppgave å jobbe med for å lage variasjonsmønster sier noe om kulturen vi har jobbet innenfor. Vi er ikke vant til å velge så nøye ut hvilke oppgaver som er ment å gi den forventede læringen. Her ser vi at vi har en planlagt bruk av variasjon som skal gi oppmerksomhet til multiplikasjon med flersifrede tall, men at oppgaven ikke var helt velvalgt. Jeg ser også at den ikke gir den ønskede muligheten for god variasjon. I første undervisning kommer ikke variasjon og uforanderlighet klart fram. I endringene for andre økt ser det ut til at vi får fram et mønster av endring, slik at alle elevene kan løse oppgaven, og slik at man i klassesamtalen kan trekke fram hva man har endret og holdt konstant. Det til tross for at vi burde valgt en annen oppgave, eller endret tallene i oppgaven, for å gjøre den bedre å jobbe med inn mot variasjon og uforanderlighet.

710 Bjørg: elev6 har gjort det på samme måte, bare at h\*n har skrevet ut litt mer hva det blir. H\*n har hele tallet. Og her ser vi at elev3 har brukt trappa og gjør egentlig det samme med tallene. Om vi sammenligner med tallene til elev8 så ser vi at det er de samme tallene, vi kan gjøre det samme, bare at det er ti ganger mindre.

Her snakker Bjørg om en bruk av variasjon, hvor man har holdt oppgaven konstant og antallet seter konstant. Det ser ut til at hun her ønsker å bygge forståelse for multiplikasjonsprosessen, og at man gjør en slags generalisering ved å trekke fram at det er det samme man gjør, selv om man tar i bruk ulike tall og faktisk også ulike strategier. Bakgrunnen er den samme og tallene og metodene sammenlignes for å øke evnen til å sammenligne, tolke og generalisere.

## 4.6 Variasjonsmønster

Det som er karakteristisk for dette begrepet er at man forsøker å skape en kontrollert variasjon for å gi et høyere nivå av abstraksjon (Watson, 2017). De faktorene som holdes konstant er like viktige som de varierte, og tanken er at elevene skal se forholdene mellom faktorer. Poenget er å få til en variasjon i metode ved at man utvider det opprinnelige problemet, tar i bruk varierte løsningsstrategier og varierer bruken av metoder.

Ut fra mitt datamateriale, ser jeg at dette punktet har hatt et ganske stort fokus. Sett ut fra den matematiske tradisjonen vi er og har vært en del av, hvor tanken har vært å presentere en metode for så å gi oppgaver som skal befestes dette, er det kanskje ikke så rart. Det ser ut til at vi likevel beveger oss noe bort fra egen tradisjon, og gir rom for å presentere og å ta i bruk ulike metoder. I tillegg åpner vi for å ha en lik oppgave som utgangspunkt for alle elevene og heller legge inn en endring, i stedet for å lage forskjellige oppgaver til elever med ulike behov. Jeg ser at vi også, etter hvert, får inn fokuset på å gi ulike typer oppgaver som man kan bruke metoden/metoder på, og ikke bare presentere oppgaver med samme type problem.

Ved å presentere oppgaven som vi gjorde, ved å sette det i en praktisk kontekst og så be elevene jobbe en og en før de skulle sammenligne strategier og dele, kan det se ut til at vi ga elevene muligheten til å skape variasjon selv. En variasjon i metode i mitt rammeverk. De kunne ta i bruk den metoden eller strategien som de var kjente med og som de var komfortable med å bruke, for å løse et nytt problem. Det at vi satte dem sammen for å diskutere sine strategier med andre, ga åpning for å utvide kunnskapen, ved at de måtte sette ord på hva de hadde gjort og hvorfor de valgte den strategien. Det å måtte forklare for andre,

gjør at man må ha en klar tanke om hva man har gjort selv. I tillegg ville elevene få høre om minst en metode til, i og med at vi valgte å sette elever med ulike strategier sammen som par, for å diskutere.

292 Bjørg: Nå skal jeg sette dere sammen og da har jeg prøvd å sette samme de som har tenkt litt ulikt.

Med dette utsagnet bekrefter Bjørg overfor elevene at hun bevisst har satt sammen de som bruker ulike strategier, fordi hun verdsetter det at man bruker ulike metoder. Dette kom også tydelig fram i undervisningen, at man skulle forklare og snakke om sin metode, og at den ene metoden ikke nødvendigvis var bedre enn den andre, men ulik. Her ser det ut til å handle om varierte løsningsstrategier, som er et av variasjonsmønstrene i mitt rammeverk.

I etterkant av at elevene ble satt sammen for å diskutere metoder, valgte vi å trekke fram metoder som skulle snakkes om i plenum i klassen. Først trekker Bjørg fram elev4s metode.

311 Elev4: Jeg tok ti ganger tjuvfem og så tok jeg det fire ganger. Etter det tok jeg det jeg fikk åtte ganger.

Elev4 multipliserer tjuvfem med en hel tier og sier at  $h \cdot n$  tok det fire ganger. Ut fra forklaringen og det  $h \cdot n$  viste, betyr det at elev4 adderte produktet  $h \cdot n$  fikk fire ganger for så å addere summen åtte ganger. Metoden som blir trukket fram her, viser at elev4 tar i bruk multiplikasjon med hel tier for så å bruke gjentatt addisjon. Dette viser at kunnskapspakken vi satte sammen inneholdt en del elementer som elev4 velger å bruke når  $h \cdot n$  skal regne.  $H \cdot n$  trekker inn sine forkunnskaper og resonerer seg fram ved å bruke dem aktivt. Elev4 har ikke lært seg standardalgoritmen, og sto egentlig litt fast i at  $h \cdot n$  ikke husket den. Med litt oppmuntring til å tenke selv ut fra hva  $h \cdot n$  kunne fra før, gikk  $h \cdot n$  over til å kunne resonere seg fram til en løsning via en strategi jeg tolker til å handle om mening i og mellom kunnskap. Det at vi gir rom for at Elev 4 kan trekke fram sin strategi, handler ut fra slik jeg ser det, i hovedsak om varierte løsningsstrategier, en del av variasjonsmønster i mitt rammeverk.

En annen metode som fikk plass i først undervisningsøkt er metoden til elev5

371 Elev5: Jeg bare tar den rett ut, jeg.

Her snakker elev5 om at  $h \cdot n$  bruker standardalgoritmen. Det  $h \cdot n$  sier om metoden  $h \cdot n$  bruker leder meg til å tenke at de har blitt presentert for en metode som de har øvd mye på. Det er bare «å ta det rett ut» altså uten å tenke, men bare gjøre det. Elev5 får beskrive



metoden sin, og mange andre elever bekrefter at det er denne de bruker, fordi det er den de har lært at de skal bruke. Noen elever nevner at de ikke husker metoden, og derfor ofte ikke klarer å løse store og sammensatte matematikkoppgaver. I og med at vi hadde bestemt at vi skulle presentere tre ulike elevmetoder, for å fremme variasjonsmønsteret om varierte løsningsstrategier, velger Bjørg en siste elev til å fortelle om sin metode, elev7.

325 Elev7: Jeg tok egentlig førti, nei fire ganger fem ganger to og så satte jeg på en null. (H\*n blir bedt om å forklare hva h\*n har tenkt og sier:) Jeg tok bort nullen i førti og tok fire ganger fem. Da fikk jeg tjue.

330 Bjørg: Ok du tok fire tiere ganger fem det blir tjue tiere. Hva er tjue tiere for noe da, hvilket tall blir det?

335 Elev7: Tjue tiere [helt oppgitt nå] det blir tjue det

H\*n fortsetter å forklare, men blander tiere og enere, og blander etter hvert også inn andre tall og roter det til for seg selv. Vi ser her at h\*n har valgt en strategi h\*n ikke mestrer, og h\*n klarer ikke å sette ord på hvorfor h\*n gjør som h\*n gjør. Dette bruker vi mye tid på, og det at denne delen av undervisningen tar så lang tid i først økt, gjør at vi revurderer måten vi trekker fram elevmetoder på til neste økt. Altså, hvilke metoder eller strategier vi velger å trekke fram som en del av variasjonsmønsteret varierte løsningsstrategier.

538 Trine: Vi plukker rett og slett tre ulike strategier som vi vet er generelle og som vi velger å presentere, for det første for å få fram det vi vil og for det andre for at vi ikke skal få en sånn lang utgreiing av en som ikke har skjønt det.

539 Bjørg: Ja for elev7 bare surra, og det tok lang tid og derfor fikk vi ikke brukt metodene noe særlig på andre oppgaver.

Når elev7 har presentert sin metode, velger Bjørg å vise et par metoder til, blant annet arealmetoden og en strategi hvor hun deler opp tallene i tiere og enere. Igjen, fokus på det å trekke fram varierte løsningsstrategier, som er en del av prinsippet for variasjonsmønster. I og med at det tok tid, ser vi at Bjørg reflekterer over at vi kun fikk jobbet med ulike typer strategier, og ikke fikk prøvd å ta i bruk strategier/strategien på varierte typer problemer. Vi fikk heller ikke trukket godt nok fram det å utvide det opprinnelige problemet.

456 Trine: Da kan vi jo utfordre elevene litt og gå rundt og endre betingelsene for dem, slik at de kan ha muligheten til å ta i bruk ulike strategier på samme oppgave.

Vi trekker også her inn det å utvide metodebruken, ved å si til de elevene som bare bruker standardalgoritmen at de må prøve å løse oppgaven på minst to måter. Igjen handler det om varierte løsningsstrategier. I og med at vi ikke hadde snakket godt nok igjennom hvilke variasjonsmønstre vi kunne ta i bruk når vi utvidet det opprinnelige problemet til første økt, la vi nå inn en strategi på dette og holdt antallet seter og seksjoner konstant, mens vi endret antallet rader. Når vi så på opptaket av første undervisning, så vi hva vi tenkte å endre med tanke på variasjonsmønstre.

562 Bjørg: Ja vi snakket jo om det, men jeg tenker at hvis vi skulle fått fram det enda mer så måtte vi gitt dem litt forskjellige regnestykker da altså.

Bjørg viser her til et variasjonsmønster, hvor man bruker samme metode på ulike typer problemer, som er en del av variasjonsmønsteret å variere bruken av metoder. Det som siktes til her, er at vi ikke synes vi fikk dette klart nok fram i første undervisning. Vi mente at vi lot det med varierte løsningsstrategier ta for stor plass og dessuten var vi ikke gode nok på hvilke løsningsstrategier vi skulle velge å presentere. Når vi nå snakker om det å variere bruken av metoder, er det en endring på bakgrunn av det vi observerer i undervisningsøkt en. Her prøver vi å legge til rette for å skape variert bruk av metoder, ved å planlegge det å skulle bruke samme metode på andre typer problemer, slik at elevene får en bredere erfaring med bruken av de ulike metodene de har valgt, et av variasjonsmønstrene i mitt rammeverk. Som det kommer fram av nummeret på utsagnet, snakker vi om dette ganske langt ut i planleggingen vår. Det var et resultat av at vi så at vi ikke fikk dette klart nok fram i første økt og dermed måtte legge inn en endring til andre undervisningsøkt.

570 Bjørg: At vi plukker ut tre metoder fra elevene og går gjennom dem og så kan vi gå inn og se på hva de ville gjort om tallene ble endret. Hvilke metoder de ville brukt da.

Bjørg setter ord på det å skulle endre eller utvide det opprinnelige problemet, ved å endre betingelsene for elevene underveis, en del av variasjonsmønsteret som handler om å utvide det opprinnelige problemet. Det kom også inn, som en refleksjon etter først undervisningsøkt. Vi så et behov for å få fram det med å endre betingelsene for elevene enda sterkere, slik at det skulle bli lettere for dem å oppdage og bekrefte kunnskapen om det å multiplisere med flersifrede tall. Jeg opplevde at kunnskapen om plassverdi for eksempel, kom tydeligere til uttrykk når vi endret betingelsene for elevene.

254 Trine: vi gir dem en oppgave som er satt i kontekst og som vi kan beholde konteksten på og likevel omforme til den enkelte slik at alle i prinsippet kan jobbe med det samme, men likevel få det tilpasset sitt nivå.

I dette utsagnet tolker jeg at vi har klart fokus på å trekke inn det å gjøre en omforming av problemet, variasjonsmønsteret som handler om å utvide det opprinnelige problemet. Vi valgte å prøve å forutse hvilke typer omforminger vi tenkte var behov for å tilby de ulike elevene. De fleste elevene mente vi ville få til den opprinnelige oppgaven. Noen elever ville trenge en forenkling, og noen ville trenge en utfordring. Vi planla at vi skulle legge inn variasjoner ut fra behovene til hver enkelt elev, ut fra vurderinger gjort der og da i klasserommet, og så kunne trekke det derfra og videre over i ny kunnskap for den enkelte. I denne variasjonen ønsket vi å ha et mønster i det vi varierte, og holde noen av tallene konstant men variere andre. På den måten fikk vi konteksten til å være konstant og antallet seter og seksjoner til å være konstant, mens vi varierte antallet rader. I denne sammenhengen ser jeg, at både variasjonsmønster og variasjon og uforanderlighet er med i tankeprosessen. Fordi vi ikke var konkrete nok på hva vi skulle endre og hvordan, ble det utfordrende for oss å ta det i bruk i klassen.

565 Trine: Kanskje vi kan prøve mer på det i morgen, at de får flere ulike oppgaver som de må velge strategi på.

568 Bjørg: Tror du vi får til det da? Du mener at vi plukker ut tre metoder og går gjennom og så kan vi gå inn og endre betingelsene og se hva de velger å gjøre da.

I andre undervisningsøkt ser det ut til at vi hadde en større kontroll på hele prosessen, og en bedre oversikt over hvordan vi skulle få fram læringsobjektet. Vi startet på samme måte som i første økt, med å presentere oppgaven og forklare ordet seksjoner (i og med at vi nå var klar over at dette var en snublestein). Elevene jobbet også her en og en for så å jobbe i par, på samme måte som i første økt. Når vi nå skulle velge ut tre metoder fra elevene, var vi mer bevisste i våre valg. Vi gikk rundt og noterte oss hvordan de ulike elevene hadde jobbet, og Bjørg og jeg ble enige om hvilke metoder vi skulle velge å trekke fram for hele klassen. Vi gjorde dette for å skape muligheten til å se på flere ulike oppgaver å bruke strategiene på, og også kunne fokusere på å endre betingelsene for elevene. Det å velge ut strategiene som skal trekkes fram for klassen har vi også en klar tanke om at vi må ha kontroll på. Noe vi gjør for at vi skal få fram det vi ønsker skal komme fram, nemlig sammenheng mellom metodene, å få befestet allerede ervervet kunnskap og å kunne snakke noe om generalisering.

Elevene får også her komme med sine metoder. Elev8 deler opp tjuefem i tjue og fem og multipliserer hver for seg med førti før  $h \cdot n$  multipliserer med åtte. Elev1 velger å doble og halvere,  $h \cdot n$  dobler tjuefem til femti og halverer førti til tjue, for så å regne ut i hodet. Elev6 bruker standardalgoritmen men skriver den korrekte verdien til tallene på siden, mens elev10 bruker standardalgoritmen.

Når alle disse har fått presentert sin metode, trekker Bjørg fram likheter mellom særlig de to siste metodene, slik at elevene skal se hva som egentlig skjer i standardalgoritmen. Men fokuset er ikke på å befeste en enkelt metode, men å trekke fram fordeler og ulemper ved de ulike metodene. Her er det fokus på varierte løsningsstrategier, noe Bjørg trekker fram i undervisningen og mot slutten av timen i oppsummeringen.

958 Bjørg: Kan dere prøve å si noe om hva det er som gjør en metode bra eller hvorfor man velger en gitt metode? Hva tenker du at du har lært om dette?

I undervisningssekvensen som utsagn 958 er tatt fra, kommer det fram at elevene sier de har lært at de kan dele opp tallene slik de vil, uten å måtte bruke en fast metode og at det gjør det lettere å regne med, fordi man kan få enklere tall å forholde seg til. De sier også at de forstår mer av hva de driver med, og at de har fått flere regnemetoder, som er lettere eller mer forståelige. Det at de har kommet fram til at det finnes flere metoder for å komme fram til et svar i en multiplikasjonsoppgave var noe av ønsket vårt. Ønsket var at de ikke skulle være låst i en metode, men ha en «verktøykasse» med metoder å ta i bruk, slik at de kan bli bedre problemløsere. Om det stemmer det som kommer fram her, så har metodevariasjonen blitt trukket klart fram i undervisningen.

I andre undervisningsøkten går vi også rundt og endrer betingelsene for elevene som trenger dette. De som sliter med det opprinnelige problemet, får enklere tall å jobbe med men i samme kontekst, og de som løser det lett får utfordringer ved at vi endrer på tallene og gjør det mer komplisert å løse. Denne endringen har vi gjort på bakgrunn av observasjoner vi gjorde oss etter første økt, og analysen viser at vi tar i bruk det å endre betingelsene for elevene i et mønster for å få fram læringsobjektet. I og med at vi var så klare på hvilke metoder vi skulle trekke fram og snakke om for hele klassen, fikk vi også lagt inn tid til å jobbe med andre typer problemer å anvende metodene på, som handler om å variere bruken av metoder. I samtalene om denne økten, kommer det fram at Bjørg også opplever at vi får fram flere sider av variasjonsmønster enn i første økt.

961 Bjørg: Du tar utgangspunkt i en oppgave og så bare sjonglerer litt med tallene så kan alle føle at de får noe å jobbe med da. De jobber jo liksom med samme problem. Vi endrer liksom bare litte gran og presenterer det liksom sånn; hva hvis, og hva skjer dersom...

Her peker Bjørg på at vi har tatt i bruk endring av betingelsene underveis, som handler om å utvide det opprinnelige problemet, noe som gir rom for tilpasning selv i stor klasse. Det ser ut til at vi får fram læringsobjektet bedre enn i første økt, ved at vi klarer å ta i bruk alle variasjonsmønstrene fra analyseverktøyet mitt. Nemlig varierte metoder, endre betingelsene, og å la elevene bruke metoden/metodene på andre typer problemer.

## 5. Drøfting

I mitt masterprosjekt er det identifisert prinsipper fra variasjonsteori, som er tatt i bruk i formgivingen og undervisningen om multiplikasjon av flersifrede tall på 7. trinn. Hensikten med dette kapittelet er å drøfte hvilke funn som er gjort for å kunne svare på problemstillingen:

*Hvordan kan prinsipper fra variasjonsteori brukes som verktøy i planlegging og gjennomføring av undervisning om multiplikasjon med flersifrede tall?*

For å få innsikt i faktorer som kan forklare hvordan prinsippene har blitt brukt, har jeg analysert og tolket samtalene mellom Bjørg og meg, og undervisningen som er utført. Det jeg har observert, har jeg sett i lys av mitt teoretiske rammeverk. Nå vil jeg diskutere funnene i sammenheng med tidligere forskning og teori. Jeg ønsker også så se på hva som kan gjøres for at variasjonsteori kan tas i bruk som verktøy for andre lærere i norsk skole.

Jeg velger å bruke rammeverket mitt som utgangspunkt for strukturen på dette kapittelet. Drøftingen i lys av teori starter med seks delkapitler systematisert ut fra prinsippene i mitt rammeverk, for å gå over i drøfting av konsekvenser for læreren og for pedagogiske valg. Til slutt drøfter jeg metoden jeg har tatt i bruk under utprøvingen av variasjonsteori.

### 5.1 Drøfting i lys av teori

#### 5.1.1 Læringsobjektet

Under vårt arbeid med å komme fram til læringsobjektet, hadde vi en tanke om at det skulle handle om multiplikasjon med flersifrede tall. Vi tok utgangspunkt i Bjørgs erfaring og standardiserte tester som for eksempel M6(Tornes, 2018). Dette gjorde vi med bakgrunn i Gu et al.(2017) som sier at det å bruke formativ vurdering kan hjelpe lærere til å forstå elevens læring, og tilpasse gode strategier for undervisning med variasjon. I vårt tilfelle var fokuset mest på det å befeste kunnskapen om multiplikasjon med flersifrede tall, og å utlede metoder å bruke på oppgaven. I samtalene rundt læringsobjektet bestemte vi oss for å lage en kunnskapspakke, for å gå dypere inn i det å finne ut helt konkret hva som skulle være innholdet, kunnskaper eller ferdigheter som vi ønsket elevene skulle tilegne seg. Det å starte med å jobbe med en kunnskapspakke gjorde vi på bakgrunn av det Ma (1999) sier, om at kunnskapspakken gir en veiledning for læreren til å utvikle en forståelse av sammenhengen mellom matematisk kunnskap. Det klargjør kunnskapen og gir en oversikt over metodebruk.

Ut fra det systematiske arbeidet vi gjorde med kunnskapspakken kan det tyde på at kunnskapspakken til dels hadde stor betydning for hvordan vi kom fram til hva vi ville fokusere på ved vårt læringsobjekt. Som Ding et al.(2017) sier, setter en slik ramme læreren i stand til å praktisere og reflektere over undervisning med variasjonsteori fra to sider. Det å vite hvordan man skal undervise og hvordan å undervise med vekt på de teoretiske elementene. Særlig ser det ut til at faktorer som forkunnskaper og hva som kommer vider i læringen om læringsobjektet kan være mulige rammer som gir støtte til å finne fram til et egnet læringsobjekt.

I analyse materialet mitt ser jeg at vi starter med å fokusere på å befeste en instrumentell ferdighet, det å kunne gangetabellen. Dette mener Rowland (2008) har vært tradisjon å gjøre i vestlige lands undervisning. Noe som gir færre muligheter til å skape sammenheng. Til tross for at vi starter i det instrumentelle, la vi til rette for å gi elevene et hjelpemiddel slik at det å ikke ha klart å pugge, ikke skulle hindre dem i videre læring om multiplikasjon. Her ser det ut til at vi har klart å trekke inn det som Gu et al.(2004) kaller pudian. Nemlig å bygge bro over til ny kunnskap for elevene ved hjelp av for eksempel læringsmateriell. Det handler om at det ble skapt en støtte for å øke elevenes utvikling, slik at vi kunne jobbe med relevante undervisningsstrategier.

Videre i arbeidet med læringsobjektet beveget vi oss over i et annet fokus, nemlig å skape en variasjon i prosess med bruk av flere metoder. Dette handler om at vi trekker inn flere metoder i det å skulle løse problemet, ved at elevene får ta i bruk det de kan fra før, eller at vi skulle trekke det fram for elevene ved en repetisjon. Både det å skulle trekke inn forkunnskaper og det å skulle skape variasjon i prosess handler om prosedyrevariasjon, men også om å skape variasjonsmønster for elevene. Gu et al.(2004) peker på at prosedyrevariasjon brukes som middel for gradvis å brette ut den matematiske aktiviteten. Jeg ser også at det belyses å få til en støtte for å løse nye typer matematiske problemer, noe jeg også kobler til prosedyrevariasjon. Det at dette trekkes fram i samtalene, ser ut til å handle om det å bygge et system av matematiske erfaringer, ved at man øker antallet framgangsmåter og hierarkiske sammenhenger innenfor og mellom aktiviteter.

Videre belyses det i samtalene at et mål er at elevene skal se praktiske sammenhenger til det matematiske, men også klare å skille ut det matematiske fra en mer kompleks bakgrunn. Noe som peker på det å skape en variasjon mot et bakteppe av uforanderlighet, som er et av verktøyene i variasjonsbruk (Watson, 2017). Håpet er at elevene vil gjøre antakelser om

forholdet mellom variasjonene vi legger opp til, og dermed vil dette kunne hjelpe elevene til å forstå matematiske ideer som for eksempel multiplikasjon med flersifrede tall.

Noe jeg ser som en svakhet ved kunnskapspakken vi utarbeidet, er at den distributive lov ikke er med, og også fokus på at elevene har en forståelse for plassverdisystemet mangler. Vi snakker om begge elementene i planleggingen vår, men legger dem likevel ikke inn som en del av kunnskapspakken. Det vitner for meg om en ubevissthet i betydningen disse elementene har for det å kunne forstå multiplikasjon med flersifrede tall. Vår matematikktradisjon har ikke støttet godt nok opp rundt det å skulle jobbe med de abstrakte sidene av det matematiske, men heller fokusert på det å sette det matematiske i en kontekst til virkeligheten. Det at plassverdisystemet ikke er med som en del av kunnskapspakken gjør at vi ikke trekker dette elementet nok inn i vårt arbeid med forkunnskaper hos elevene. De elevene som ikke har dette på plass, sliter med å forstå det vi gjør når vi tar utgangspunkt i sifferets verdi ut fra plassering og utfører matematiske operasjoner på sifrene. Når vi så ser at elevene ikke forstår hva parenteser er eller hvorfor det brukes i matematikken, kommer det tydelig fram at den distributive lov er en forkunnskap som er vesentlig å trekke fram, repetere og klargjøre for elevene.

Opplevelsen av å fokusere så sterkt på kjernen i det vi ønsker å undervise om, var tydelig utfordrende og krevende. Resultatene fra studien er med på å belyse at læreren trenger grunnleggende kunnskaper om elevene, om det faglige innholdet, og om det pedagogiske i arbeidet med å finne fram til det læringsobjektet som er fokus. Noe som underbygges av det Runesson og Kullberg (2017) sier om at lærerne selv trenger en teori som kan guide dem til å vurdere og å planlegge en undervisningsøkt, som vil føre til bedre læring. Hvilke kunnskaper læreren trenger belyses også i Ball, Thames, og Phelps (2008) og handler om viktigheten av å ha en bred kompetanse i både fagkunnskaper, pedagogisk kunnskap, kunnskap om hvordan pensum er oppbygd og generell kunnskap om når og hvordan matematikken kan brukes. Det vil ifølge Ding et al.(2017) hjelpe matematikklærere til å få til en god undervisning. Å bygge på en teori som fokusere oppmerksomheten mot variasjon, virker i følge Watson (2017) å være en god guide til pedagogiske strategier og veivalg, mot å forstå matematiske ideer på et høyere abstraksjonsnivå. En god oppfatning av og tettere kobling mellom egen praksis og den nye teorien, ser ut til å være avgjørende for å kunne ta i bruk den nye teorien i arbeidet med å finne læringsobjektet.



## 5.1.2 Kritiske faktorer

Det at vi i samtalen trakk inn de kritiske faktorene, som ifølge Runesson og Kullberg (2017) ikke kan utledes fra variasjonsteori eller matematikk alene, gjorde at de faktorene som kunne hindre læring hos den enkelte elev så ut til å være i fokus. De kritiske faktorene ble forsøkt identifisert ved å studere og relatere elevenes læring, og hvordan læringsobjektet skulle håndteres i undervisningen. I forbindelse med vektleggingen av kritiske faktorer ser vi hvordan tidligere undervisning ble et hinder, ved at elevene for eksempel ikke hadde en god nok oppfatning om plassverdisystemet eller oppfatning om den distributive lov og hvorfor vi i det hele tatt bruker parenteser. Hva er parenteser og hvorfor brukes det i matematikk? Vi ser også at tidligere undervisning, med fokus på å befeste en metode, slik Rowland (2008) beskriver at det har vært tradisjon å gjøre i vestlige land, kan være med på å forhindre læring og skape vansker for elevene. Likevel gir samtalesekvensene, som dreide seg om kritiske faktorer, inntrykk av at dette prinsippet ble trukket inn i planleggingen og undervisningen. Vi ser fra de ulike samtalesekvensene som er trukket fram i analysen, at det snakkes om språk som kritisk faktor, at man ser at det å ha lært seg en metode kan være et hinder, og også fokuset på å forsøke å unngå drilling og pugg blir trukket fram som kritisk faktor. Det snakkes om at undervisningen skal være slik, at det ikke blir arbeidet med å innarbeide enda en ferdighet, men å skape muligheter for prosedyrevariasjon. Samtalene peker i retning av å handle om at det er et ønske om å hjelpe elever til å forme begreper, løse problemer, bygge erfaring rundt aktiviteter, og forstå hvordan ny og tidligere kunnskap kan kobles sammen. Noe som beskrives i Gu et al. (2004) som trekk ved prosedyrevariasjon.

Fokuset på de kritiske faktorene ser ut til å ha fått fram de ulike behovene til de enkelte elevene, og variasjonsteori opplevdes som et godt redskap i tilretteleggingen av tilpasset opplæring. Kanskje er det slik at vi tidligere ikke har hatt gode nok redskap i form av læringsteori, til å få til en god tilpasset opplæring i matematikk? Slik jeg tolker det, er det tettere bånd mellom variasjonsteori og tilpasset opplæring enn tidligere brukte undervisningsmåter. Man kan her gradvis hjelpe elevene til å få en dypere grunnkunnskap, og tilpasse opplæringen individuelt, noe som også handler om å lage variasjonsmønstre (Sun, 2011). Både Ference Martons gruppe og Gu Ling-yuans gruppe argumenterer med at systematisk bruk av variasjon er en effektiv måte å fremme meningsfull læring i matematikk på i store klasserom, altså å kunne drive med tilpasset opplæring (Sun, 2010; Zhang et al., 2017). Dersom en lærer har teoretisk kunnskap om det matematiske, og om kritiske faktorer for elevene, vil dette gjøre det lettere å bruke pedagogiske tiltak for å tilpasse til hvert enkelt

barn. Jeg ser at det er nødvendig for læreren å kjenne til hvilke faktorer som kan oppfattes som kritiske av den enkelte elev, og ha forberedt seg på å håndtere dette på en god måte i sin undervisning. Som Zhang et al.(2017) sier må fokuset være på å få eleven til å legge merke til hvordan en spesiell situasjon skiller seg fra en annen.

### 5.1.3 Begrepsvariasjon

Når jeg så beveger meg over til begrepsvariasjon, som handler om å se mening i og mellom kunnskap (Ding et al., 2017), tyder resultatene fra studien på at vi i mindre grad var oppmerksomme på betydningen som ligger bak dette prinsippet i variasjonsteori. Vi gjorde i starten planlegging, som handlet om vår fortolkning av hva som ligger i mening i og mellom det matematiske, nemlig det å sette det i en praktisk sammenheng. Denne fortolkningen ser ut til å bekrefte det Sun (2011) hevder, at vestlig syn på undervisning fokuserer på å sette det matematiske i en praktisk sammenheng.

Videre i samtalesekvensene trekkes det å befeste kunnskap om plassverdi fram. Det ser ut til å handle om begrepsvariasjon, slik jeg tolker det ut fra Pang et al.(2017), som sier at det å befeste allerede ervervet kunnskap, om for eksempel plassverdi, er en type begrepsvariasjon. I løpet av arbeidet med dette prinsippet ser det for meg ut til at vi beveger oss mer og mer i retning av å ha en klarere oppfatning av hva begrepsvariasjon handler om, i variasjonsteoretisk sammenheng. Det vektlegges at elevene skal kunne trekke inn gjentatt addisjon, og dermed få hjelp til å klare å trekke dette over i multiplikasjonsbegrepet, altså se sammenheng i sin egen kunnskap. I tillegg underviser Bjørg, i forkant av den observerte undervisningen, om sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon, som helt klart ser ut til å handle om å se sammenheng mellom det matematiske. Det at vi også skaper rom for at elevene kan trekke inn for eksempel det å lage en modell av selve stadionet eller bruke arealmodellen, ser for meg ut til å handle om begrepsvariasjon. Det begrunner jeg i det Pang et al.(2017) sier, at man kan for eksempel gå fra det konkrete til det abstrakte i begrepsvariasjon. Jeg begrunner det også ut fra Han et al.(2017) som snakker om å berike visuell representasjon, som en type begrepsvariasjon. Elevene kunne her bruke en praktisk sammenheng for å klare å abstrahere det matematiske. Det ble gjort for å forsøke å gi muligheten til å se læringsobjektet fra ulike vinklinger, og i flere nivåer, ut fra forkunnskapene elevene satt med.

Essensen i det som kommer fram her, kan oppsummeres i at vi etter hvert klarte å ta i bruk begrepsvariasjon, ved å se på meningen mellom det matematiske i objektet, men at dette var

noe av det mest utfordrende å ta i bruk. Resultatene kan tyde på at i arbeidet med å skille mellom begrepsvariasjon og prosedyrevariasjon, så handlet ofte samtalen om nettopp det sistnevnte når vi mente å jobbe med begrepsvariasjon. John Mason (Mason, 2017) beskriver det samme når han snakker om hva som kan oppleves som utfordrende i arbeidet med variasjonsteori. Det at det virker utfordrende å skille mellom begrepsvariasjon og prosedyrevariasjon, tolker jeg bygger på tradisjonen vi er og har vært en del av, matematisk, som har hatt et stort fokus på innlæring av metoder og i mindre grad fokus på begrepsoppfatning. Videre synes det klart at lærere har behov for å gå enda mer i dybden av det matematiske emnet og få tydeliggjort hva begrepsvariasjon handler om, hvilken kunnskap vi mangler og hvordan sette fokus på begrepsvariasjon, i variasjonsteoretisk betydning.

### 5.1.4 Prosedyrevariasjon

Vi synes å oppfatte prosedyrevariasjon som viktig å ha fokus på, for å få fram at multiplikasjon ikke handler om å lære seg en gitt algoritme som skal drilles inn. Men at det som Peng et al.(2017) hevder, handler om å gi en prosess for å forme et begrep og tilfører rikdom av problemer og problemløsningsstrategier. Likevel kan det ikke utelukkes at elevene oppfatter at det er metoder det handler om. En kan heller ikke komme bort fra at mange elever, om fokuset på prosedyrevariasjon ikke opprettholdes, nok vil kunne falle tilbake på å bruke standardalgoritmen for enkelhets skyld. Prosedyrevariasjon ser ut til å ha blitt skapt på flere måter i undervisningen, inkludert når man gjennomgikk hvordan elevens forkunnskaper kunne aktiveres, tilpasse tallene i oppgaven mens man holdt bakgrunnsopplysningene uforandret, og oppmuntre til flere ulike løsningsstrategier. Samtidig organiserte vi undervisningen for å gi støtte til at elever kunne ta initiativ til prosedyrevariasjon. Flere av sekvensene jeg trekker fram i analysen peker på ulike tilnæringer, strategier og metoder som vises, tas i bruk og sammenlignes.

En av sekvensene peker på at prosedyrevariasjon trekkes fram, ved å se på strategier for å regne ut tosifrede tall som den enkleste formen, før vi ønsket å trekke det over i mer komplekse utregninger med flersifrede tall. Denne hierarkiske oppbyggingen handler om prosedyrevariasjon. I rammeverket mitt har jeg trukket fram at prosedyrevariasjon handler om varierte metoder, omforming av problemet, sammenhenger innenfor og mellom problemer. Det at vi da jobbet med at elevene skulle ta i bruk egne metoder og jobbe fram ulike typer prosedyrer henger godt sammen med teorien. Det kommer i analysen også fram, at det i planleggingen og undervisningen trekkes fram at vi ønsker at elevene skal bruke ulike strategier og metoder ut fra hvilke oppgaver eller tall de blir presentert for. I teorien handler

dette om prosedyrevariasjon fordi prosedyrevariasjon tar sikte på å gi en prosess for å forme et begrep, steg for steg. Dette gjøres for at elevenes erfaringer i problemløsning kan komme til uttrykk ved at de har flere ulike problemløsningsstrategier (Peng et al., 2017). I følge Ding et al.(2017) inkluderer prosedyrevariasjon steg og strategier for å overføre eller utforske faget, noe som ser ut til på bli trukket fram i samtalene når det er fokus på å presentere ulike prosedyrer for elevene. Det er et fokus på metodemangfold og variasjon i bruken av strategier.

Slik situasjonen blir beskrevet kan det tyde på at prosedyrevariasjon vil være enklere å ta i bruk i hverdagen, enn flere av de andre prinsippene. Det vil muligens være nyttig å starte med nettopp dette prinsippet ved innføring av variasjonsteori i egen undervisning, da dette kan oppfattes som mer kjent og oppleves som tryggere. Men det er nødvendig å understreke at det trengs mye øvelse og fintfølelse også å skulle finne de gode metodene og strategiene som kan presenteres for elevene. Både Mason (2017) og Leung (2017) bekrefter dette ved å si at det å lage gode opplegg for å utforske det matematiske, er et eget designprosjekt.

### 5.1.5 Variasjon og uforanderlighet

I vårt arbeid med variasjonsteori, ble også variasjon og uforanderlighet trukket fram som prinsipp. Dette prinsippet synes å bidra til å få fram læringsobjektet for elevene, noe som er et av målene med variasjon, ifølge Pang et al.(2017). Variasjon og uforanderlighet handlet om at vi holdt oppgaven og antallet seter fast, men endret antallet rader. Dette skapte, til tross for noe klønete valg av oppgave, variasjon av noen faktorer mens andre ble holdt fast.

Samtalene viser at det i starten ble presentert samme tall med samme bakgrunn for elevene. I Runesson & Kullberg (2017), hevdes det at det å lage oppgaver som bruker variasjon og endring på en optimal måte, er et designprosjekt i seg selv. Det å lage optimale oppgaver, handler om at responsen fra elevene fører til justeringer rundt valg av eksempler. Jeg ser at dersom vi skulle gjennomført en runde til med evaluering og re-undervisning ville valget av selve oppgaven blitt trukket fram og diskutert, og forhåpentligvis endret.

I løpet av prosessen og evalueringen endrer vi undervisningen fordi vi ser at dette prinsippet blir trukket fram for dårlig, og at elevene har ulike behov ut fra sitt matematiske nivå. Da endres betingelsene ved at bakgrunnen blir holdt fast, mens noen av tallene endres. De faktorene vi valgte å holde konstante er som Watson (2017) sier, like viktige som de varierte. I starten av vår planlegging er ikke dette prinsippet i fokus og som analysen viser så tolket jeg det til å være utfordrende å ta i bruk. Når jeg ser på det nå, mener jeg imidlertid at det er viktig å understreke at grunnen til at det opplevdes som vanskelig å ta i bruk mest sannsynlig

var at det fikk for lite fokus. I følge Mason (2017) er vi til stede i det vi gir oppmerksomhet, noe han sier er litt klisjépreget sagt, men som jeg opplever som gjeldende likevel. Ut fra teorien jeg la til grunn ville jeg forvente at dette prinsippet skulle komme klarere fram i datamaterialet mitt, men her ser det ut til at jeg har vært for lite konkret i utformingen av min samtaleguide og at prinsippet har hatt for lite fokus i planleggingen. Når det så dukker opp som et element vi tar tak i for å endre vår undervisning, kan det tyde på at vi likevel er reflekterte rundt prinsippet. Vi har trukket med oss variasjon og uforanderlighet i endringen av vår undervisning, når vi ser at prinsippet ikke er vektlagt nok i formgivingen og undervisningen. Kanskje er det slik at mange av prinsippene i variasjonsteori oppleves som så ulike det vi har jobbet med tidligere, at man trenger mer tid, støtte, og det å gå saktere fram i implementeringen av teorien i egen praksis?

### 5.1.6 Variasjonsmønstre

I min studie ble også variasjonsmønstre trukket fram som et prinsipp fra variasjonsteorien. Dette syntes å være et prinsipp som vi opplevde hang godt sammen med prosedyrevariasjon. Måten variasjonsmønstre synes å henge sammen med prosedyrevariasjon på, handler om at man lager kontrast mellom eksempler og prosedyrer. I denne kontrasteringen ses det på likheter og ulikheter mellom de matematiske objektene og på denne måten gradvis brettes de matematiske aktivitetene ut, og skaper matematisk erfaring (Qi et al., 2017). Samtalene ga inntrykk av at det ble forsøkt å skape mønstre i det man varierte, og at det lå en tanke om hvilke deler av det matematiske som skulle varieres og hvordan. I deler av samtalene dreier variasjonsmønstrene seg om å gi mulighet for at elevene skal skape variasjon selv, ved å velge strategier og metoder de synes de mestrer eller som de synes de får til. I tillegg ble det lagt opp til å utvide metodebruken, ved å bruke samme metode på ulike typer problemer. I rammeverket blir variasjonsmønstre beskrevet som variasjon i metode, og også med fokus på varierte løsningsstrategier, derfor ser det ut til at variasjonsmønstre blir trukket fram her. Noe jeg underbygger ved Han et al.(2017), som sier at det å ta i bruk metoder i ulike sammenhenger er en type generalisering som handler om evnen til å ta den ervervede kunnskapen i bruk når man løser lignende problemer. Likevel var det slik at vårt valg av oppgave nok ikke innbød til bruk av variasjonsmønstret vi hadde lagt opp til. Konteksten tallene var satt i passet ikke godt til å bruke desimaltall. Det å snakke om halve seter er bare tøys, og også halve rader av seter. De valgene vi gjorde i arbeidet med denne oppgaven var ikke velvalgte nok. Vi burde ha sett at det ville skape hindringer for variasjonen vi ønsket å skape, og at det faktisk ble lagt opp til noe som kunne bli en kritisk faktor for elevene. Jeg

tolker det slik at grunnen til denne litt klønete bruken av tall eller kontekst til oppgaven, henger sammen med at vi ikke har jobbet på denne måten tidligere, og dermed ikke tenkte grundig nok gjennom den valgte oppgaven, og konsekvensene valgene ville medføre for å få til variasjon. Det at vi strever rundt valg av oppgave bekrefter det Runesson og Kullberg (2017) sier om, at selv om læreren har evnen til å designe et sett med eksempler basert på variasjonsteoriens prinsipper, kan det hende de ikke har evnen til å bruke dette på en måte som får fram det tiltenkte mønsteret av variasjon. Vi er helt i starten av å ta i bruk variasjonsteori, og med mer trening og enda bedre oversikt vil jeg forvente at det blir lettere å lage eller finne oppgaver, som gir en mer ønsket mulighet for variasjon. Dette er en interessant erfaring å ta med seg i det videre arbeidet med å finne oppgaver, som gir rom for den variasjonen som er ønsket, for å få til den læringen man vil fremme. Jeg vil likevel påstå at både det å utvide det opprinnelige problemet, gi rom for varierte løsningsstrategier, og det å variere bruken av metoder er gjort gjeldende for elevene. Det ble gjort med en tanke om at bruken av variasjonsmønster handler om målrettet å skape begrepsutvikling, slik Zhang et al.(2017) beskriver det. Det å gi elevene muligheten til å analysere variasjonsmønster har til hensikt å gi flere muligheter for å skape abstrakt tenkning. Refleksjonen i etterkant rundt bruken av de ulike tallene er meget verdifull i fortsettelsen av implementeringen av variasjonsteori.

### 5.1.7 Konsekvenser for læreren

En interessant erfaring jeg gjorde meg underveis i mitt prosjekt, var at Bjørg trakk fram at hun ikke har tenkt på undervisning om multiplikasjon på den måten vi har jobbet med her. Jeg har forsøkt å tolke meg fram til hvorfor vi opplever variasjonsteoretisk tilnærming til matematikken som utfordrende å ta i bruk. Vi har erfart i egen skolegang og også som undervisere, at multiplikasjon handler om å lære seg en algoritme og så ta den i bruk, en instrumentell tilnærming. Dette bidrar trolig til å gjøre det ekstra vanskelig for oss å ta i bruk en teori som har fokus på variasjon og begrepsoppfatning. Bjørg uttrykte også til meg at hun tror at de fleste lærere har undervist instrumentelt og mekanisk, og at det kanskje handler om en angst for å mislykkes. Kanskje er det slik at man vil unngå nederlag som lærer, som innebærer at man gjør det man alltid har gjort. Man underviser slik man selv har blitt undervist, og det å skulle endre praksis er en møysommelig prosess, noe som kanskje hindrer flere i å prøve nye metoder, tilnærminger og strategier. Det er tydelig at faget stiller store krav til lærerens kunnskap om det rent matematiske, i tillegg til det pedagogiske. Vi har vel alle opplevd situasjoner i undervisning om matematikk, hvor vi har tenkt at vi har kommet til

kort. Motivet til Bjørg for å være med på min studie var å få hjelp i sin planlegging og undervisning. Når Bjørg så uttrykker til slutt i vår siste evaluering, at hun har opplevd det å delta i prosjektet som nyttig, handler det for meg om at hun ser at det å ta i bruk en ny teori, for å forbedre egen praksis, er nyttig og kan brukes i egen hverdag.

Resultatene i denne studien tyder på at lærere trenger en støtte i form av en slags oppskrift eller guide, og må ha bred kompetanse i faget for å ta i bruk variasjonsteori i sin undervisning. Her kan rammeverket til Getie og Ding (2018) være en god guide gjennom de ulike prinsippene som kan tas i bruk. Læreren har ansvaret for at elevene lærer mest mulig på en så god måte som mulig. På et slikt grunnlag kan lærere oppleve å bli ansvarliggjort i ulike sammenhenger, som for eksempel ved nasjonale prøver. Det å trekke inn variasjonsteori i sitt arbeid med matematikkundervisningen, ser jeg på som en god investering i det å forbedre egen undervisning. Arbeidet med å endre praksis er tidkrevende og skal variasjonsteori tas i bruk som læringsteori må det settes av tid og ressurser ved en skole, slik at man får jobbet grundig sammen i et læringsfellesskap. Det som kommer fram i mine data er viktigheten av å ha noen å spille ball med, slik at man kan utvikle seg sammen og få til en felles forståelse av hva som ligger i de ulike prinsippene for så å ta dem i bruk. Det å skulle ta i bruk prinsippene i praksis, ser ut til å være gunstig å gjøre stegvis.

### 5.1.8 Hvordan variasjonsteori kan påvirke pedagogiske valg

Det at variasjon gir en oversikt over hva som er tilgjengelig eller mulig å lære noe om, henger godt sammen hvordan mennesket fungerer (Mason, 2017). Variasjon som arbeidsredskap er et kraftfullt og godt redskap. Men det å erfare variasjon i seg selv vil ikke nødvendigvis være nok til å lære noe. Pedagogiske tiltak med en hensikt er grunnlaget for å få variasjon til å påvirke elevers læring. Slik jeg ser det er variasjonsteori en kunstform og ikke en rutine eller strategi man kan lære seg, noe som stemmer godt overens med det Mason (2017) beskriver når han trekker tråder mellom ulike elementer i variasjonsteori. Det å skulle tilegne seg en kunstform tar tid, så dette studiet kan kun ses som en liten «kickstart» på en lang endringsprosess.

En av utfordringene ved det å skulle ta i bruk variasjonsteori er at man, på en mer grundig måte, må ta for seg forkunnskapene til elevene og sette det i et system med læringsobjekt og videre læring. Dette ble forsøkt systematisert ved at vi formga en kunnskapspakke. Denne oversikten belyser viktigheten av å være årvåken overfor elevens erfaringsbakgrunn, gi passende utfordringer, og hvordan man legger til rette for læring. Det å skulle bruke så mye

tid på en slik prosess i forkant er uvant, og fordrer at man har en god oversikt over elevene man skal undervise. I og med at jeg ikke har disse elevene til daglig bød dette på utfordringer. Det å ha med Bjørg i en slik prosess var da vesentlig.

I bruken av det teoretiske rammeverket har jeg sett dette gjennom mine «vestlige linser». Disse vestlige linsene har i seg den matematiske kulturen jeg har vokst opp i og undervist i, noe som har påvirket hvordan jeg har tolket de ulike prinsippene og bruken av dem. Det har vært utfordrende, i og med at prinsippene har sitt utspring i en annen kultur som jeg ikke har erfart, og dermed vil bruken av prinsippene preges av at de er teoretisk tilegnet og tolket.

Vi kan kun være til stede i det vi gir oppmerksomhet (Mason, 2017). Noe av det jeg erfarte er at oppmerksomheten mot prinsippene noen ganger kunne være litt diffus, og dermed var jeg ikke virkelig til stede i prinsippet og klarte ikke å gi det nok oppmerksomhet, og dermed ikke ta det godt nok i bruk. Det å ha en årvåkenhet for prinsippene handler om å være i stand til å se og ta i bruk de ulike prinsippene. Det som ligger bak prinsippene er tilgjengelige til enhver tid, men da vi sto midt oppe i prosessen var årvåkenheten ikke alltid helt på plass. Noe som utfordret det å skulle ta i bruk hele rammeverket på samme tid i løpet av et såpass kort tidsrom.

Det at variasjonsteori ikke sier noe om hva som skal varieres (Runesson & Kullberg, 2017), skaper utfordringer. Jeg satt ofte med flere spørsmål enn svar under arbeidet med variasjonsteori: Hva skal variere, hvordan, når og av hvem, skal det gjøres systematisk eller mer tilfeldig? Det var også utfordrende å skulle gjøre de kritiske faktorene ved begrepet så klart å skille ut som mulig. Disse spørsmålene henger sammen med de pedagogiske avgjørelsene vi måtte ta, for å få til en best mulig undervisning. Noe av det som gjorde dette utfordrende er at hele rammeverket oppleves som, og faktisk er, nytt for oss. Man har selvsagt brukt noe av tankegangen tidligere i egen undervisningspraksis, men ikke så systematisk, grundig, og med så god teoretisk basis.

Begrepsvariasjon og prosedyrevariasjon opplevdes oftere som to sider av samme sak heller enn to ulike sider ved saken. Et slikt skille opplevdes derfor noen ganger som kunstig og i alle fall vanskelig tilgjengelig å skulle håndtere. Begrepsvariasjon handler i variasjonsteori om meningen i og mellom matematiske objekter. I vår matematiske kultur har det å skape mening ofte handlet om å se det i en praktisk sammenheng, Det å skulle bevege seg over i en annen tankegang rundt dette med å skape mening, ga store utfordringer for oss. Man må på



en måte ta i bruk helt annet tankegods, og virkelig ha en årvåkenhet overfor prinsippet man jobber med.

Til tross for ulikhetene mellom de to rammeverkene jeg har tatt i bruk, hvor til og med undervisningsmetoder med samme navn kan ha ulikheter i utførelse, så er de to rammeverkene i «samme familie» (Wong, 2017). Om undervisningsformen hører hjemme i vestlig eller østlig måte å undervise på, bør være uvesentlig. Læring i matematikk har en universalitet, til en viss grad. For å bedre matematikkundervisningen er det å være på leit etter gode måter å gjøre det på vesentlig, for så å skulle ta dem i bruk uten å ha fokus på hvilken kultur de tilhører. Noen av prinsippene i variasjonsteori er felles med andre pedagogiske ideer, og variasjonsteori er også i seg selv i endring og kan og bør kanskje derfor også tas i bruk, og tilpasses den matematiske kulturen den enkelte lærer befinner seg i? Dette spørsmålet stiller jeg ut fra at Wong (2017) siterer Gu på, at det finnes mange ulike typer *bianshi*, og at det ikke finnes en spesiell ting som kan kalles *bianshi*. Det er en grunnleggende egenskap som alle lærere burde inneha.

Nøkkelaspektene ved teoriene til Gu og Marton er at de ikke legger opp til papegøymatematikk (læreren forklarer og elevene hermer), men har fokus på variasjon og begrepsoppfatning. Variasjonsteori handler ikke bare om å legge til rette for å lære fagkunnskap og å sikre at man lærer strategier fra et lærer-perspektiv, men det handler like mye om å hjelpe elever til å utvikle en grunnleggende oppfatning av matematiske begreper og fleksible problemløsningsstrategier. Det gjøres ved at man former godt strukturerte kunnskapssystem, ved bruk av hierarkisk oppbygde variasjonsoppgaver som hele tiden forbedres og som omfatter sammenhengen mellom ulike typer av kunnskap (Gu et al., 2017). Ved å bruke teorien som rammeverk, krever det at man søker å skape sammenheng, ved å forsikre seg om at man gir muligheten for å se så mange forekomster av et begrep som mulig. Man må kunne bygge sammenheng mellom ulike begrep. Lærerens rolle blir tilretteleggeren for at elevene skal utvikle selv-utforskende læringsevne, og evne til å lære hvordan de lærer best, uten å ha en lærer med seg i framtiden. Teorien er generell og den kan tilpasses ulike matematiske kulturer.

Ut fra teorien jeg har lest og erfaringer jeg har gjort meg i denne studien, vil variasjon som prinsipp være verdifullt og viktig å fokusere på. Variasjon alene vil ikke automatisk skape læring, men man må bruke variasjon på en sånn måte at den vil påvirke den som skal lære. Det å være bevisst bruken av variasjon, slik at man skaper rom for tiltenkte endringer i det man vil at elevene skal lære, handler om å være årvåken og bevisst sin bruk av pedagogiske

tiltak (Mason, 2017). Det finnes ingen oppskrift på hvordan å ta i bruk variasjonsteori. Men det handler om at man må være bevisst på emnet man jobber med, elevenes forkunnskaper og erfaringer. Her må man ha en tanke om hva man selv ønsker å belyse, og om man setter inn passende tiltak for å få dette til. Variasjon er en kunstform og ikke en arbeidsform som kan læres instrumentelt eller mekanisk. Det å være helt sikker på hva den enkelte elev lærer av vår undervisning, er kanskje umulig. Læreren kan selvsagt skape situasjoner og rom for at elevene skal ha muligheten til å lære, og variasjonsteori er etter min mening et godt redskap til dette, ved at man gir muligheter og tid for eleven til å møte og skape mening i det som gis fokus fra læreren, og som skal læres.

I vårt møte med variasjonsteori opplevde vi at det var vanskelig å skille begrepsvariasjon fra prosedyrevariasjon. Det er ikke så liketil som det kan oppfattes som når man leser i teorien. I tillegg krever variasjonsteoretisk tilnærming at man bruker tid på å skille ut relevante detaljer, slik at man gir oppmerksomhet til ting som kanskje tidligere ble fokusert overfladisk eller mekanisk. Det å skulle gå så grundig inn på et læringsobjekt krever tid, og i skolehverdagen opplever man muligens at alle målene i læreplanen ikke gir rom for å sette av så mye tid. Kanskje kan endringer i læreplanen, fagfornyelsen, gjøre at man lettere kan ta den tiden man ser man trenger for å gå så grundig til verks?

Noe som kom tydelig fram i vårt arbeid med læringsobjektet var hvor viktig elevenes forkunnskaper er. Det å gi den enkelte elev passende utfordringer ut fra sitt nivå. For eksempel i forberedelsen til øktene vi skulle filme, tok vi tid til å forsikre oss om at de fleste kunne multiplikasjon med hele tiere, gangetabellen, og så videre. Det er tidsbesparende å forsikre seg om at elevene kan det man tror de kan, og at de kan det vi mener er viktig, heller enn å suse videre for å lære nye ting (Mason, 2017). Om man ikke tar seg den tiden blir det kanskje vanskelig å tilegne seg den nye kunnskapen for eleven, fordi det ikke ligger et godt nok grunnlag hos den enkelte.

Viktigheten av lærerens kunnskaper om faget og om pedagogikk, i tillegg til variasjonsteori, ble veldig tydelig for meg. Gu et al.(2017) sier at det å designe undervisning med variasjon på en god måte, krever at læreren innehar en grunnleggende oppfatning av selve det matematiske, og mye erfaring i det å undervise. De sier at dette krever et videreutdanningsprogram for lærere. Jeg tenker at et slikt videreutdanningsprogram kan handle om å lære i profesjonelle læringsfellesskap. Min erfaring er at det er mulig å ta i bruk variasjonsteori, og tilpasse det til egne forhold, gjennom en arbeidsform inspirert av lesson study.

## 5.2 Drøfting av metode

Det at jeg har tatt i bruk aksjonsforskning som metode for å finne bruk av prinsipper fra variasjonsteori i planlegging og undervisning, har hatt ulike følger for analyseresultatene.

Fordi aksjonsforskning kombinerer diagnose, utførelse og refleksjon, og er en kritisk og selvkritisk form for forskning, har den fungert som en fruktbar metode til å oppnå kunnskap om et avgrenset område. Gjennom datakildene mine har jeg samlet inn mange detaljerte opplysninger om selve planleggingen av undervisningen, som ellers ikke ville vært tilgjengelig. Ved å ta opptak også av den utførte undervisningen, har jeg fått en god og bred kjennskap til hendelser og sammenhenger, som har gjort det mulig å beskrive hvordan prinsippene fra variasjonsteori har blitt tolket og tatt i bruk. Gjennom de semistrukturerte intervjuene eller samtalene med Bjørg, har jeg også kommet litt nærmere inn på hvordan en allmennlærer tolker og tar i bruk helt nye prinsipper, som bare har blitt presentert kort av en kollega. Tanker og holdninger har kommet tydelig fram, noe som ikke kommer så lett til uttrykk i andre settinger, eller med mindre tid til samhandling.

Den aksjonsmetodiske framgangsmåten, som jeg har basert på egne semistrukturerte intervjuer og observasjoner som primærkilde, har åpnet opp for at jeg kan ha blitt litt henrykt av å ha opplevd suksess ved å bruke variasjonsteori. Selv om jeg har forsøkt, ved å bruke rammeverket tydelig, å tilstrebe et så nyansert bilde som mulig, må jeg si at alle deltakere, både Bjørg og elevene, har vist positive holdninger til å prøve ut variasjonsteori. Kanskje kunne det vært matnyttig med en enda mer kritisk holdning eller forbehold i prosessen med utprøvingen. Bjørg viste noe forbehold i starten og kanskje ville det vært enda lettere å fokusere på prinsippene, ved at jeg hadde en mer kritisk holdning i utgangspunktet?

Et annet kritisk aspekt ved datamaterialet handler om at skolen jeg utførte forskningen ved, er liten. I tillegg er det lærere og arbeidsmiljø jeg kjenner godt til, noe som også kan ha påvirket forskningen. Det å være en deltakende observatør har selvsagt gjort at jeg har kunnet utøve påtrykk og påvirkninger i måten å tolke variasjonsteori på, og også i utførelsen av planleggingen og gjennomføringen av undervisningen. Det kunne da virke opplagt at jeg har hatt samtaler og observasjoner kun for å få fram egne tolkninger og tanker om hvordan variasjonsteori kan tas i bruk. Motsatt kan jeg også argumentere med at det nettopp har vært avgjørende for hvordan variasjonsteori har blitt tolket og tatt i bruk, og uten en slik kunnskap jeg har tatt med inn i samarbeidet, ville en gjennomføring av innføringen av variasjonsteori blitt umulig å gjennomføre. Det som har vært vesentlig for hvordan variasjonsteori har blitt

forsøkt tatt i bruk, har vært det vi selv har oppfattet og tolket som prinsipper og det som ligger i dem.

Det mest omstridte ved å bruke aksjonsforskningen som metode, er om jeg i tillegg til å ha tatt for meg et unikt fenomen, har tilført noe til forskningsfeltet eller om det har noen verdi for lærere generelt i skolen.

Min analyse har gitt viktig informasjon om hvordan prinsipper fra variasjonsteori er tatt i bruk, ved en bestemt skole, i en bestemt klasse i samarbeid med en enkelt lærer. Studien har satt i gang mange tanker om undervisning generelt, og om matematikkundervisning spesielt. Men studien kan også ses på som noe som leder oppmerksomheten over på allmenngyldige punkter for innføring av nye læringsteorier, i et læringsfellesskap, ved skoler i Norge. Studien trekker derfor oppmerksomheten inn mot mer generelle trekk ved innføringen av nye teorier ved en skole, som man må være oppmerksomme på når formålet er å prøve ut nye teorier. Det er likevel ikke mulig, på bakgrunn av denne studien, å lage generelle regler for hvordan variasjonsteori kan implementeres i skolen. Men i følge John Mason lærer elever av variasjoner som lages, enten man endrer konteksten, formatet, representasjonene eller viktige matematiske parametere (Mason, 2017. s 107).

## 6. Oppsummering og perspektivering

Studien har undersøkt om og hvordan prinsipper fra variasjonsteori er tatt i bruk, i formgivingen og gjennomføringen av undervisning. Målet med studiet var å få en innsikt i hvordan en kan tilrettelegge for god undervisning, og få en forståelse for hvordan lærere kan formgi en undervisning, hvor elever kan utvikle den matematiske kunnskapen som stimulerer til videre læring.

Studien viser at allmennlærere ved en liten bygdeskole i Norge, kan ta i bruk prinsipper fra variasjonsteori, for å utvikle egen undervisningspraksis. Funnene i denne studien viser hvordan prinsippene fra variasjonsteori påvirker formgivingen av undervisningen, og selve undervisningen.

Når lærere opplever at det primære i matematikkundervisning er å skape variasjon i det som skal læres, vil dette føre til endring av egen praksis. For å skape variasjon i det matematiske for elevene, vil det kreve at læreren utvikler sin fagkompetanse i matematikk, samtidig som kunnskapen om variasjonsteori økes. Læreren som veileder og tilrettelegger har en annen rolle enn kunnskapsformidler, og dette legger et stort ansvar på læreren for at elevene opplever at de forkunnskapene de har danner grunnlaget for videre læring. Funn fra studien indikerer at læreren ønsker et slikt fokus, og det får betydning for om læreren våger og er villig til å gå inn i en slik endringsprosess, ved å ta i bruk ny teori. Å engasjere seg for å skape en bedre og mer tilpasset undervisning, betyr også å ha forventninger og stille krav til seg selv om å ha årvåkenhet for de ulike prinsippene.

Studien viser at overgangen mellom nåværende praksis og ønsket praksis, gjennom å tilegne seg ny teori, er stor når det gjelder formgivingen av undervisning, og at dette er særlig markert i prinsippet om begrepsvariasjon. Dette får betydning for implementeringen av variasjonsteori i norske skoler. Her finner jeg to punkter som er viktige å se på.

For det første ser det ut til å være avgjørende at læreren er forberedt på å gå inn i en slik endringsprosess, som det å ta i bruk ny teori vil medføre. Fokuset på de ulike prinsippene fra variasjonsteori i undervisningen, og en systematisk innføring av teorien vil kunne hjelpe lærerne i overgangen. Dessuten er det tydelig at lærere kan få større utfordringer med noen prinsipper enn andre. Men en innføring av variasjonsteori som læringsteori, vil gjøre dem bedre rustet til å undervise i matematikk.

For det andre vil det være vesentlig at det legges til rette for et utstrakt samarbeid i profesjonelle læringsfelleskap, for å utvikle den nye teorien og gjøre den til sin egen. Å ta i bruk teorien stegvis, sammen, ved hjelp av lesson study, utveksle erfaringer, observere og så endre undervisning, vil kunne bidra til at man tar teorien, og gjør den til sin egen og utvikler teorien videre ved egen enhet. Det bør ikke være antallet prinsipper som tas i bruk som styrer, men hvor godt man klarer å ta dem i bruk.

Et stort dilemma i innføringen av teorien kan være hvor mange elementer eller prinsipper fra variasjonsteori en skal arbeide med, sett i forhold til tiden som er tilgjengelig. En kan tenke seg to løsninger på dette, enten redusere antallet prinsipper, eller se på hele rammeverket i små deler av matematikken. Første løsning er problematisk om vi ønsker å ta i bruk variasjonsteori som helhetlig teori, fordi det kan bety at vi må redusere noe på kravene til de ulike prinsippene underveis. Noe som kan danne en vane for den enkelte lærer. Den enkleste løsningen på å ta i bruk hele rammeverket, vil være å se på hele rammeverket i små deler av matematikkundervisningen, til å begynne med. Læreren slipper å føle at det tar for mye tid å introdusere teorien i sin helhet, og de vil se at teorien kan trekkes over i alle de matematiske emnene etter hvert.

Jeg ser at det er behov for mer forskning på dette feltet. For videre forskning vil flere studier om det å integrere de to rammeverkene jeg har bygget min studie på, være nyttige og interessante. Hvordan kan de to rammeverkene sammen bidra til å forbedre undervisningspraksis? I det videre kunne det også vært interessant å se på hvordan en slikt bruk av de to rammeverkene påvirker elevenes læring.

I tillegg til ovennevnte forslag til å løse tidsklemma, kan det å sette av mer tid til fellesarbeid løse problemet. Men dette kan også være problematisk. For hvis mye av fellestiden handler om innføring av ny teori og undervisningspraksis ikke endres, vil ikke tidsbruken føre til bedre undervisning. Det vil snarere føre til mer misnøye i personalet rundt tidsbruken. Men dersom innføringen av teorien legger opp til en bedret undervisning og lærerne ser dette, vil de kanskje være villige til å øke tilstedeværelsestiden ved skolen, i alle fall for en periode.

I denne studien presiserer jeg at vi har lært av å jobbe rundt implementeringen av teorien i fellesskap. Det kan se ut til at vi kan forbedre undervisningen i matematikk ved å ta i bruk prinsippene fra variasjonsteori. Det vil være interessant i fremtidig forskning å kunne gi kunnskap til hvordan vi kan utnytte samarbeidslæring i profesjonelle læringsfelleskap til systematisk å ta i bruk og videreutvikle variasjonsteori.

De funnene som overrasket meg mest var hvor vanskelig det var å ta i bruk prinsippet om begrepsvariasjon. Når det i litteraturen kommer så tydelig fram hvor viktig dette er, vil jeg si at det å gi dette prinsippet mer oppmerksomhet er vesentlig.

Studien aktualiserer ny forskning på matematikkundervisning med fokus på endret undervisningspraksis. Det er nødvendig med bedre innsikt i hvordan prinsipper fra variasjonsteori kan påvirke norske læreres undervisningspraksis. Hver enkelt lærer må få oppleve mestring i bruken av prinsippene slik at det blir en varig endring. Alle lærere kan bli bedre, men det krever motivasjon og tro på at endringen man gjør fører til bedring. Det får de gjennom å erfare hvordan variasjonsteori påvirker tankegangen rundt det matematiske og pedagogiske arbeidet, i formgivingen og i klasserommet.

Undervisningen må gjøre at kunnskap blir synlig, reflektert over og utviklet.

# Referanser

- Alseth, B., Nordberg, G. & Røsseland, M. (2007). *Multi kopiperm*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.
- Alseth, B., Nordberg, G. & Røsseland, M. (2014). *Multi 7a grunnbok*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.
- Alvesson, M. & Sköldböck, K. (2017). *Tolkning och reflektion. Vetenskapsfilosofi och kvalitativ metod*. Latvia: Studentlitteratur AB.
- Ball, D., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of teacher education*, 59, 389-407.  
<https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bergem, O.K. (2016). Vi kan lykkes i realfag-viktige funn fra TIMMS 2015. I O.K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (Red.), *Vi kan lykkes i realfag, viktige funn fra TIMMS 2015* (s. 173-177). Oslo: Universitetsforlaget.
- Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology*, 3(2), 77-101. Hentet fra: <https://www.tandfonline.com.ezproxy.inn.no/doi/abs/10.1191/1478088706qp063oa>
- Cohen, L., Manion, J. & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education*. New York: Routledge
- Ding, L., Jones, K., & Sikko, S. A. (2017). An expert teacher's use of teaching with variation to support a junior mathematics teacher's professional learning. I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories* (s. 241-266). Rotterdam: Sense Publishers.
- Doig, B. & Groves, S. (2011). Japanese Lesson Study: Teachers Professional Development through Communities of Inquiry. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13(1), 77-93. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ960950.pdf>
- Doorman, M. & Gravemeijer, K. (2009). Emergent modeling Discrete graphs to support understanding of change and velocity. *ZDM-The international Journal on Mathematics Education*, 41, 199-211.  
<https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-008-0130-z>
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3(3), 413-435.  
[https://www.researchgate.net/publication/226822361\\_Geometry\\_Between\\_the\\_Devil\\_and\\_the\\_Deep\\_Sea](https://www.researchgate.net/publication/226822361_Geometry_Between_the_Devil_and_the_Deep_Sea)



- Getie, B. & Ding, L. (2018). The use of variation theory in a problem-based task design study. (Personlig kommunikasjon, 6. desember 2018).
- Gu, F., Huang, R. & Gu, L. (2017). Theory and Development of Teaching through Variation in Mathematics in China. I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories* (s. 13-41). Rotterdam: Sense Publishers.
- Gu, L., Huang, R. & Marton, F. (2004). Teaching with Variation: A Chinese Way of Promoting Effective Mathematics Learning. I L. Fan, N-Y, Wong & S. Li (Red.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders*. (s. 309-347). Singapore: World Scientific Publishing Co.
- Han, X., Gong, Z. & Huang, R. (2017). Teaching and Learning Mathematics through Variation in Lesson Study. I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories* (s. 267-293). Rotterdam: Sense Publishers.
- Harel, G. (2008). What is Mathematics? A Pedagogical Answer. Proof and Other Dilemmas. I B. Gold & R.A. Simons (Red.), *Mathematics and Philosophy*, (s. 265-290). San Diego: Mathematical Association of America.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. *Focus on learning problems in mathematics. Winter edition*, 11(1), 61-76.  
[https://www.researchgate.net/publication/287200654\\_Visualization\\_in\\_geometry\\_two\\_sides\\_of\\_of\\_the\\_coin/download](https://www.researchgate.net/publication/287200654_Visualization_in_geometry_two_sides_of_of_the_coin/download)
- Huang, R. & Bao, J. (2006). Towards a model for teacher professional development in China: Introducing Keli. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 279-298.  
<https://doi.org/10.1007/s10857-006-9002-z>
- Huang, R., Fang, Y. & Chen, X. (2017). Chinese lesson study: a deliberate practice, a research methodology, and an improvement science. *International Journal of Lesson and Learning Studies*, 6(4), 270-282. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-08-2017-0037>
- Huang, R. & Leung, F.K.S. (2017). Teaching Geometrical Concepts through Variation: A Case Study of a Shanghai Lesson. I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories* (s. 151-168). Rotterdam: Sense Publishers.
- Huang, R. & Shimizu, Y. (2016). Improving teaching, developing teachers and teacher educators, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: an international perspective. *ZDM Mathematics Education*, 48, 393-409.  
<https://doi.org/10.1007/s11858-016-0795-7>
- Kaput, J.J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? I J.J. Kaput, D.W. Carragher & M.L. Blanton (Red.), *Algebra in the early grades*, (s. 5-18). Dartmouth: Erlbaum.

- Kvale, S. & Brinkmann, S. (2017). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.
- Lannin, J.K. (2005). Generalization and justification; The challenge of introducing algebraic reasoning through pattern activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.
- Leung, A. (2017). Variation in Tool-Based Mathematics Pedagogy: The Case of Dynamic Virtual Tool. I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories* (s. 69-84). Rotterdam: Sense Publishers.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. New York: Routledge.
- Marte Meo foreningen. (2002, 6. november). Marte Meo metoden. Hentet fra: <http://www.martemeo.no/marte-meo-metoden/>.
- Marthinsen, K. Hagen, J.E. & Baggethun, P. (2000, desember). Multiplikasjon og divisjon. Hentet fra: [https://matematikk.net/side/Multiplikasjon\\_og\\_divisjon](https://matematikk.net/side/Multiplikasjon_og_divisjon).
- Mason, J. (2017). Issues in Variation Theory and How It Could Inform Pedagogical Choices. I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories* (s. 407-438). Rotterdam: Sense Publishers.
- Mok, I. (2017). Teaching Algebra through Variations: Contrast, Generalization, Fusion and Separation. I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories* (s. 187-205). Rotterdam: Sense Publishers.
- Nasjonalt senter for forskningsdata. (2019, 18. februar). NSD Personverntjenester. Hentet fra: <https://nsd.no/personvernombud/index.html>.
- Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematikklæring*. (Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie 18/2002). Hentet fra: <https://static.uvm.dk/Publikationer/2002/kom/hel.pdf>.
- Nortvedt, G.A. & Pettersen, A. (2016). 6 Matematikk. I M. Kjærnsli & F. Jensen (Red.), *Stø Kurs, Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015* (s. 107-135). Oslo: Universitetsforlaget.
- Pang, M.F. & Marton, F. (2017). Chinese lesson study, Learning study and keys to learning. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 6(4), 336-347. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-01-2017-0005>.

- Pang, M.F., Bao, J. & Ki, W.W. (2017) “Bianshi” and the Variation Theory of Learning: Illustrating Two Frameworks of Variation and Invariance in the Teaching of Mathematics. I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories* (s. 43-67). Rotterdam: Sense Publishers.
- Peng, A., Li, J. Nie, B. & Li, Y. (2017). Characteristics of Teaching Mathematical Problem Solving in China: Analysis of a Lesson from the Perspective of Variation. I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories* (s. 111-125). Rotterdam: Sense Publishers.
- Qi, C., Wang, R., Mok, I.A.C. & Huang, D. (2017). Teaching the Formula of Perfect Square through Bianshi Teaching. I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories* (s. 127-150). Rotterdam: Sense Publishers.
- Rasch-Halvorsen, A., Rongnes, T.E. & Aasen, O. (2008). *Tusen Millioner 5B*. Otta: Cappelen Damm AS.
- Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educ Stud Math*, 69, 149-163. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9148-y>.
- Runesson, U. & Kullberg, A. (2017). Learning to Teach with Variations: Experiences from Learning Study in Sweden. . I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories* (s. 355-372). Rotterdam: Sense Publishers.
- Senter for praksisrettet utdanningsforskning (SePU). (2016, august). Kultur for læring. Hentet fra: <https://www.inn.no/prosjektsider/sepu/kultur-for-laering>.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sfard, A. (2006). Participationist discourse on mathematics learning. I J. Maasz & W. Schloeglmann (Red.), *New Mathematics Education Research and Practice* (s. 153-170). Leiden: Sense Publishers.
- Sun, X. (2010). “Variation problems” and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook example. *Springer Science + Business Media B.V.*, 76, 65-85. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9263-4>.
- Sun, X. (2011). An insider’s Perspective: “Variation Problems” and Their Cultural Grounds in Chinese Curriculum Practice. *Journal of Mathematics Education*, 4(1), 101-114.
- Tornes, J. (2018). Kartleggingsprøve i matematikk for 6. trinn M6. Jaren: PP-tjenestens materiellservice.

- Utdanningsdirektoratet. (2018, oktober). Overordnet del av læreplanverket. Hentet fra: <https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/overordnet-del/>.
- Vedeld, K. & Venheim, R. (2012, august). Multiplikasjon av flersifrede tall. Hentet fra: [http://www.matematikk.org/trinn5-7/artikkel.html?tid=154313&within\\_tid=154309](http://www.matematikk.org/trinn5-7/artikkel.html?tid=154313&within_tid=154309).
- Vygotskij, L.S., Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S. & Souberman, E. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.
- Watson, A. (2017). Pedagogy of variations. Synthesis of Various Notions of Variation Pedagogy. I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories* (s. 85-103). Rotterdam: Sense Publishers.
- Wong, N-Y. (2017). Teaching through Variations: An Asian Perspective – Is the Variation Theory of Learning Varying? I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories* (s. 375-388). Rotterdam: Sense Publishers.
- Yang, Y. & Ricks, T.E. (2012). Chinese lesson study: Developing classroom instruction through collaborations in school-based teaching research group activities. I Y. Li & R. Huang (Red.), *How Chinese Teach Mathematics and Improve Teaching* (s. 51-65). New York: Routledge.
- Zhang, J., Wang, R., Huang, R. & Kimmins, D. (2017). Strategies for Using Variation Tasks in Selected Mathematics Textbooks in China. I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories* (s. 213-239). Rotterdam: Sense Publishers.

## Vedlegg 1: NSD-godkjenning

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Prøve ut kinesisk variasjonsteori i undervisning av matematikk.

Referansenummer

554550

Registrert

5.9.2018 av Trine Lise Stokke Larsen - trinelst@stud.ntnu.no

Behandlingsansvarlig institusjon

NTNU Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for geografi

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Svein Arne Sikko, svein.a.sikko@ntnu.no, tlf: 73559904

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Trine Lise Stokke Larsen, trine.lise.stokke.larsen@eidskog.kommune.no, tlf: 47040413

Prosjektperiode

29.8.2018 - 21.6.2019

Status

16.10.2018 - Vurdert

Vurdering (1)

16.10.2018 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD, den 16.10.18. Behandlingen kan starte.

### MELD ENDRINGER

Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

### TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 21.06.19.

### LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger.

Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7,

ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

#### PERSONVERNPRINSIPPER

NSD finner at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

#### DE REGISTRERTES RETTIGHETER

De registrerte vil ha følgende rettigheter i prosjektet: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20). Rettighetene etter art. 15-20 gjelder så lenge den registrerte er mulig å identifisere i datamaterialet.

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

#### FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

#### OPPFØLGING AV PROSJEKTET

NSD vil følge opp behandlingen ved planlagt avslutning for å avklare status for behandlingen av opplysningene.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Kjersti Haugstvedt  
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

## Vedlegg 2: Samtykkeerklæring lærer

### ***Samtykkeerklæring***

Vil du delta i forskningsprosjektet om  
undervisning ved hjelp av variasjonsteori?

#### **Til lærer for elever på 7. trinn ved ----- skole**

Jeg er masterstudent ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning, og skal gjennomføre et kort forskningsprosjekt i din klasse. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

#### **Formål**

Formålet med prosjektet er å prøve ut en ny undervisningsform i matematikk. Jeg ønsker å prøve ut en undervisningsform som heter variasjonsteori og vil planlegge undervisningen sammen med deg. Når vi har planlagt undervisningen vil du gjennomføre undervisningen mens jeg observerer og tar opptak av undervisningen. I etterkant av dette vil jeg gå gjennom undervisningen sammen med deg og vi vil vurdere hva som fungerte bra og hva vi bør endre på. Hvilket tema vi skal undervise ved hjelp av variasjonsteori er ikke bestemt enda, det kommer litt an på temaet elevene holder på med når jeg kommer i gang. Omfanget av undervisningen vil bli på ca. 4 timer. Jeg ønsker å se på/analysere hvordan vi kan gi en undervisning som er bedre og mer relevant i faget matematikk.

Resultatene av studien vil bli brukt i en eksamensbesvarelse/masteroppgave ved NTNU.

#### **Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?**

NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

#### **Hvorfor får du spørsmål om å delta?**

Grunnen til at du blir spurt om å delta, er fordi jeg trenger å observere en lærer som underviser ut fra den teorien jeg har valgt, det er ikke så lett å observere seg selv. Det er altså selve undervisningen jeg skal analysere og ikke deg som lærer eller elevene. Det er kun du som får denne henvendelsen. Rektor og alle de andre lærerne ved skolen er selvsagt også informert om at jeg holder på med en masteroppgave.

### **Hva innebærer det for deg å delta?**

Hvis du velger å delta, innebærer det at jeg vil filme i 2-3 undervisningsøkter. Det er i hovedsak du som skal filmes, men det er mulig at elevene kommer med på filmen. Det som filmes vil jeg transkribere (skrive ut på ark) og bruke i min masteroppgave. Du vil ikke bli nevnt ved navn i min oppgave, om du som lærer nevnes vil jeg gi deg et fiktivt navn. Det er selve undervisningen som skal analyseres, ikke du som lærer.

### **Det er frivillig å delta**

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger at å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du velger å ikke delta eller senere velger å trekke samtykket.

### **Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger**

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrevet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Det er bare jeg som vil ha tilgang til datamaterialet. Datamaterialet vil kunne diskuteres med medstudenter.
- Ferdig transkriberte (nedskrevne versjoner) av datamaterialet kan bli diskutert med veileder og medstudenter. I slike tilfeller vil eventuelle navn på elever bli erstattet med fiktive navn. Dataene vil bli lagret i låsbare skuffer og opptakene ligger på arbeids-iPaden min som har innloggingskode.

Du vil ikke kunne gjenkjennes i oppgaven i etterkant da du vil bli gitt et fiktivt navn, og det er i hovedsak opplysninger om selve undervisningsmåten som vil publiseres.

### **Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?**

Prosjektet skal etter planen avsluttes i juni 2019. Når oppgaven er levert vil alle opptak slettes og alle dokumenter som er notert underveis makulert.

### **Dine rettigheter**

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

### **Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?**



Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

### **Hvor kan jeg finne ut mer?**

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved Svein Arne Sikko, [svein.a.sikko@ntnu.no](mailto:svein.a.sikko@ntnu.no)
- NTNUs personvernombud: Thomas Helgesen, Institutt for Lærerutdanning
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost ([personverntjenester@nsd.no](mailto:personverntjenester@nsd.no)) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Svein Arne Sikko

(Forsker/veileder)

Trine Lise Stokke Larsen

---

## Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet Utprøving av undervisning i matematikk ved hjelp av variasjonsteori, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- at jeg kan filmes i forbindelse prosjektet

Jeg samtykker til at opplysninger om meg behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 21. juni 2019.

---

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

## Vedlegg 3: Samtykkeerklæring foresatte

### ***Samtykkeerklæring***

Vil ditt barn delta i forskningsprosjektet om  
undervisning ved hjelp av variasjonsteori?

#### **Til foresatte for elever på 7. trinn ved ----- skole**

Jeg er masterstudent ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning, og skal gjennomføre et kort forskningsprosjekt på skolen til ditt barn. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

#### **Formål**

Formålet med prosjektet er å prøve ut en ny undervisningsform i matematikk. Jeg ønsker å prøve ut en undervisningsform som heter variasjonsteori og vil planlegge undervisningen sammen med Bjørg. Når vi har planlagt undervisningen vil Bjørg undervise mens jeg observerer henne og tar opptak av undervisningen. I etterkant av dette vil jeg gå gjennom undervisningen sammen med Bjørg og vi vil vurdere hva som fungerte bra og hva vi bør endre på. Hvilket tema vi skal undervise ved hjelp av variasjonsteori har vi ikke bestemt enda, det kommer litt an på temaet elevene holder på med når jeg kommer i gang. Omfanget av undervisningen vil bli på ca. 4 timer. Jeg ønsker å se på/analysere hvordan vi kan gi en undervisning som er bedre og mer relevant i faget matematikk.

Resultatene av studien vil bli brukt i en eksamensbesvarelse/masteroppgave ved NTNU.

#### **Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?**

NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

#### **Hvorfor får du spørsmål om å delta?**

Grunnen til at ditt barn blir spurt om å delta, er fordi jeg trenger å observere en lærer som underviser ut fra den teorien jeg har valgt, det er ikke så lett å observere seg selv. Det er altså selve undervisningen jeg skal analysere og ikke elevene, men det er mulig at ditt barn blir med på noen av opptakene jeg tar så derfor får du dette spørsmålet. Alle foresatte til elevene på 7.trinn ved ----- skole vil få denne henvendelsen. Rektor og alle de andre lærerne ved skolen er selvsagt også informert om at jeg holder på med en masteroppgave.

### **Hva innebærer det for deg å delta?**

Hvis du velger at ditt barn kan delta, innebærer det at jeg vil filme i 2-3 undervisningsøkter i klassen til ditt barn. Det er i hovedsak læreren som skal filmes, men det er mulig at elevene kommer med på filmen. Det som filmes vil jeg transkribere (skrive ut på ark) og bruke i min masteroppgave. Det vil ikke bli nevnt noen navn eller elevreaksjoner i min oppgave. Det er kun selve undervisningen som skal analyseres.

### **Det er frivillig å delta**

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger at ditt barn skal delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg eller ditt barn hvis du velger at ditt barn ikke skal delta eller senere velger å trekke samtykket.

### **Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger**

Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrevet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Det er bare jeg som vil ha tilgang til datamaterialet. Datamaterialet vil kunne diskuteres med medstudenter.
- Ferdig transkriberte (nedskrevne versjoner) av datamaterialet kan bli diskutert med veileder og medstudenter. I slike tilfeller vil eventuelle navn på elever bli erstattet med fiktive navn. Dataene vil bli lagret i låsbare skuffer og opptakene ligger på arbeids-iPaden min som har innloggingskode.

Ditt barn vil ikke kunne gjenkjennes i oppgaven i etterkant, det er kun opplysninger om selve undervisningsmåten og eventuelt læreren som vil publiseres.

### **Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?**

Prosjektet skal etter planen avsluttes i juni 2019. Når oppgaven er levert vil alle opptak slettes og alle dokumenter som er notert underveis makulert.

### **Dine rettigheter**

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,

- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

### **Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?**

Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

### **Hvor kan jeg finne ut mer?**

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved Svein Arne Sikko, [svein.a.sikko@ntnu.no](mailto:svein.a.sikko@ntnu.no)
- NTNUs personvernombud: Thomas Helgesen, Institutt for Lærerutdanning
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost ([personverntjenester@nsd.no](mailto:personverntjenester@nsd.no)) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Svein Arne Sikko  
(Forsker/veileder)

Trine Lise Stokke Larsen

---

## Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet Utprøving av undervisning i matematikk ved hjelp av variasjonsteori, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- at mitt barn kan filmes i forbindelse prosjektet

Jeg samtykker til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 21. juni 2019.

---

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

## Vedlegg 4: Samtaleguide

# Utgangspunkt for samtale rundt planlegging av undervisningen.

### Mål, læringsobjektet

- Hva skal elevene lære? (Hvorfor)
- Hva innebærer det å lære seg dette?

Forkunnskaper over i ny kunnskap. (Knowledgepackages, bruke Liping Ma)

- Hva kan elevene fra før?
- Hvilke forkunnskaper kreves?
- Hva kreves innenfor samme tema framover? (For ikke å hindre videre matematisk utvikling)
- Hvordan bør progresjonen være i undervisningen? Hva bygger på hva?

### Kritiske faktorer (likheter og ulikheter)

- Hva er det vesentlige/grunnleggende som elevene må lære? (Hva handler multiplikasjon med flere siffer om?)
- Hva er problemene elevene kan møte på, snublesteinene?
- Hva er det kritiske punktet?(Altså hvordan undervise slik at elevene klarer å forstå multiplikasjon med flere siffer og unngå å havne i drill og pugg.)  
Hva pleier elevene å slite med?
- Hva er det som kan forhindre læring?
- Hvilke misoppfatninger kan dukke opp?

### Arbeidsmåter (separasjon og få fram det som er annerledes enn det de kan fra før)

- Hvilken kontekst settes temaet inn i?
- Hvordan introdusere det matematiske temaet?
- Hvilke mønster av variasjon skal vi bruke?
  1. utvide det opprinnelige problemet (endre betingelsene)
  2. varierte løsningsstrategier (på det opprinnelige problemet)
  3. variere bruken av metoder (samme metode på andre typer problemer)
- Hvordan skal elevene jobbe med temaet? (Alene, to og to, er det en fordel/ulempe at de får jobbe sammen?)

### Fusjon, generalisere

- Hvordan oppsummere arbeidet elevene har gjort?
- Hvordan få fram elevenes refleksjoner rundt det de har lært?  
(Sette fokus på ulike tilnærminger)

- Hvilke fungerer bra, og hvorfor?
- Hvilke fungerer dårlig og hvorfor?
- Metoder som alltid vil fungere, og hvordan vet vi det?



## Vedlegg 5: Elevoppgaven

Kopioriginal 5.184

### Grubliser

1 Det er Halloween. Anna skal kjøpe inn godteri til alle barna som kommer på døren hennes.

Hun venter 26 barn hver time i 4 timer. Hvert barn får tre godteri.

Hvor mange godteri må Anna kjøpe?



2 Et idrettslag skal bygge ny fotballstadion.

Den skal ha åtte seksjoner. I hver seksjon vil det være 40 rader med 25 seter i hver rad.

Hvor mange seter vil det være på det nye stadionet?

