Christian Haugan Toldnes

LIST-oppgavers karakteristiske egenskaper

En studie vedrørende egenskaper karakteristiske for oppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde

Bacheloroppgave i Pedagogikk og elevkunnskap (LGU-53002)
Veileder: Øyvind Haugan Lien
Mai 2019

Bacheloroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Christian Haugan Toldnes

LIST-oppgavers karakteristiske egenskaper

En studie vedrørende egenskaper karakteristiske for oppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde

Bacheloroppgave i Pedagogikk og elevkunnskap (LGU-53002)
Veileder: Øyvind Haugan Lien
Mai 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

1 Sammendrag

Målet med denne studien har vært å kartlegge hvilke egenskaper som er avgjørende for at en matematikkoppgave kan klassifiseres som en LIST-oppgave. LIST-oppgaver har lav inngangsterskel og stor takhøyde og anbefales som læremiddel for utvikling av kreativ matematisk kompetanse. Kunnskap om hva som karakteriserer slike oppgaver vil være nyttig for lærere i utvelgelse av læremiddel til sine elevgrupper.

Studien benytter kvalitativ forskningsmetodikk ved å analysere 4 matematikkoppgaver for 4. til 7. trinn, hentet fra nettressursen www.mattelist.no. Oppgavene er analysert etter kategorier basert på kodingsarbeid løst basert på prinsippene i forankret teori og deretter drøftet mot relevant teori.

Studiens resultat viser at LIST-oppgaver kjennetegnes av tre viktige egenskaper:

1. De har få og lave krav til forkunnskap
2. De er koblet til en eller flere grunnleggende matematiske ideer eller prinsipper
3. De er åpne oppgaver

2 Abstract

The aim of this study has been to map out which properties are crucial for a mathematical task to be classified as a LTHC task. LTHC tasks have low threshold and high ceiling and are recommended as a learning tool for developing creative mathematical thinking. Knowledge of what characterizes such tasks will be useful for teachers selecting teaching materials for their learners.

The study uses qualitative research methodology by analyzing 4 mathematical tasks for 4th through 7th grade, from the online resource www.mattelist.no. The tasks are analyzed according to categories loosely based on the principles of Grounded Theory followed by a discussion comparing it with relevant theory.

The study's results show that LTHC tasks are characterized by three important characteristics:

1. They have few and low requirements for prior knowledge
2. They are connected to one or more matemathical «Big Ideas»
3. They are open tasks

Innhold

Figurer og tabeller

3 Innledning

Høsten 2018 tok jeg kontakt med Matematikksenteret for å få svar på et spørsmål mange foreldre stilte på medlemsforumet til organisasjonen Lykkelige Barn. Felles for disse foreldrene, foruten at de har minst ett barn i gruppen "barn med høyt læringspotensial", var at de lurte på hvorfor Matematikksenteret i liten grad anbefalte forsering som tiltak for større utfordring og utvikling i matematikkfaget til tross for at foreldrene i stor grad oppfattet forsering som det mest intuitive og dekkende tiltaket for å ivareta deres barns behov.

I samtaler med kontaktpersonen ved Matematikksenteret kom det frem at de, heller enn forsering, anbefalte tilpasset opplæring i samspill med klassekameratene, gjerne i form av arbeid med LIST-oppgaver. LIST-oppgaver var frem til da en ukjent kategori oppgaver for min del, noe som pirret nysgjerrigheten og ønsket om å lære mer om temaet.

LIST-oppgaver er oppgaver som skal ha lav inngangsterskel og høy takhøyde. Med det menes at det i oppgaven er rom for å jobbe på et høyt matematisk nivå til tross for at den er enkel å komme i gang med for de fleste. Oppgavene legger gjerne opp til utforsking av matematiske ideer og kreativ bruk av kjernekunnskap i faget for å finne flere ulike løsninger. Mange av oppgavene legger opp til at elever skal gi uttrykk for tenkemåte og strategivalg underveis, som ledd i oppgaveløsninga.

I november 2018 åpnet nettstedet www.mattelist.no, en nettressurs for LIST-oppgaver utviklet av Matematikksenteret, i samarbeid med NRICH ved University of Cambridge i England. Nettstedet ble utviklet på oppdrag fra Utdanningsdirektoratet i 2017, hvor ønsket var nettressurser for barn med høyt læringspotensial og/eller ekstra interesse for matematikk.

Opplæringslova § 1-3 *Tilpassa opplæring* sier «Opplæringa skal tilpassast evnene og føresetnadene hjå den enkelte eleven, lærlingen, praksisbrevkandidaten og lærekandidaten» (Opplæringslova, 2018). Konseptet med lav inngangsterskel og stor takhøyde passer tilsynelatende som hånd i hanske med denne delen av formålsparagrafen.

Ved skolestart 2020 trer ny læreplan i kraft i form av fagfornyelsen. Fagfornyelsen i matematikk vektlegger større forståelse med kjerneelementer som "utforsking og problemløsing" og "resonnering og argumentasjon". Ny overordna del vektlegger fortsatt tilpassa opplæring og nevner bruk av læremidler som et av flere virkemidler. LIST-oppgaver, slik de presenteres av Matematikksenteret, er dermed høyaktuelle i Norge i dag.

3.1 Problemstilling

Problemstillingen for denne studien er "Hvilke egenskaper av avgjørende for at en oppgave har lav inngangsterskel og stor takhøyde (LIST)?». Jeg ønsker altså med denne studien å identifisere eventuelle egenskaper som er tydelige fellestrekk for LIST-oppgaver og som i kombinasjon skiller LIST- oppgaver fra andre typer oppgaver. Motivasjonen er todelt. Hvis jeg som matematikklærer kan identifisere LIST-oppgaver blant andre typer oppgaver er det enklere å bevisst velge disse i situasjoner hvor oppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde er ønskelig. Samtidig kan denne kunnskapen hjelpe meg å lage egne LIST-oppgaver som er skreddersydd elevgruppen jeg skal undervise.

3.2 Avgrensninger

Jeg har ikke inkludert analyse av lærerveiledningene som er knyttet til oppgavene. Disse gir ytterligere innblikk i hva som er tenkt med oppgaven, og inkluderer gjerne forslag til veiledningsspørsmål og utvidelser. De kunne på det grunnlaget vært interessante å ta med for å få et mer nyansert perspektiv. Likevel vil bruken av dem variere fra lærer til lærer og mellom ulike klasser og elevgrupper. Problemstillingen tatt i betraktning mener jeg det er mest hensiktsmessig å vurdere hver enkelt oppgave slik den fremstår for elevene.

Empirien begrenser seg av praktiske hensyn til et mindre antall oppgaver. Funnene ville stått sterkere dersom empirien hadde vært mer omfattende, men formatet gir ikke rom for en slik utvidelse.

4 Teori

4.1 LIST-oppgaver er rike oppgaver

Konseptet LIST-oppgaver handler på overflaten om at det skal være enkelt å komme i gang med problemløsning, men at det samtidig skal stimulere til utvikling av dypere matematisk forståelse eller matematisk forståelse på et høyere nivå. I litteraturen er det vanskelig å se noe klart skille mellom begrepet LIST-oppgaver og såkalte rike oppgaver, begrepene brukes om hverandre og beskrives på samme måte. Flere kilder setter også likhetstegn mellom rike oppgaver og LIST-oppgaver (Piggott, 2011. Utdanningsdirektoratet, 2015). I denne studien benytter jeg også begrepene om hverandre, om ikke av annen grunn enn den rent språklige.

4.2 LIST-oppgaver i litteraturen

Ulike kilder er veldig samstemte om hvilke egenskaper LIST-oppgaver har, på tvers av språk og landegrenser. Konsensus er at slike oppgaver er: Tilgjengelige for en bred gruppe elever; åpner for ulike metoder og svar, inkludert ulike utgangspunkt, prosesser og resultater; tilbyr reell utfordring og krever innsats over tid, uavhengig av elevens utgangspunkt; gir rom for, og stimulerer til, diskusjon og samarbeid (Piggott, 2011. Utdanningsdirektoratet 2015. Wolf, 2015). Både Piggott og Utdanningsdirektoratet nevner at rike oppgaver åpner for at elever kan lage egne problemstillinger og at de innbyr til utvikling av dypere forståelse av matematiske begreper og konsepter (Piggott,

2011. Utdanningsdirektoratet, 2015), mens Wolf og Piggott påpeker at rike oppgaver gjerne har en engasjerende kontekst (Piggott, 2011. Wolf, 2015).

4.3 Kognitivt krevende oppgaver

Mary K. Stein og Margaret S. Smiths oppgaveanalyseguide gir et rammeverk for å beskrive hvor kognitivt krevende en oppgave er. Rammeverket sorterer oppgaver inn i 4 nivåer, fra memorering til matematisk tenkning, basert på hvilke egenskaper de har. For å vurdere en oppgaves kognitive krav må man se forbi overflatiske egenskaper og vurdere hvordan elever vil måtte jobbe med oppgavene (Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2009).

4.4 LIST-oppgaver i klasserommet

En LIST-oppgave blir aldri rikere enn det læringsmiljøet den brukes i. Hver enkelt oppgave har et potensial for som må realiseres i klasserommet ved at elevene støttes i sin rolle som selvstendige utviklere av sin matematiske forståelse og kunnskap (Piggott, 2011). Selv om rike oppgaver er egnet til å fremme diskusjon og selvstendig kritisk tenkning, realiseres dette kun i et læringsmiljø som fremmer samarbeid, med en kultur som legger til rette for at enkeltelever skal få komme til orde (Fosnot & Dolk, 2001).

En oppgave som i utgangspunktet stiller høye kognitive krav til elevene, trenger ikke føre til oppgaveløsning på høyt kognitivt nivå. Elevaktiviteter gjennomgår en prosess fra det utgangspunkt de har i læremiddelet, til hvordan de legges frem av læreren, og videre til hvordan de tolkes av elevene (Stein & Smith, 1998).

En fordel med LIST-oppgaver er at de gir mulighet for at hele klassen jobber med samme oppgave, noe som fremmer et positivt klassemiljø og stimulerer til en følelse av fellesskap. Elever som er trygge på matematikken i oppgaven får mulighet til å utfolde seg, mens elever som har behov for det får mulighet til å trygge sin forståelse av grunnprinsippene (McClure, Woodham & Brotwick, 2011).

4.5 Grunnleggende matematiske ideer og læringslandskapet

Elevers utvikling av strategier for å løse matematiske problemer bygger på noen helt grunnleggende matematiske ideer. De grunnleggende ideene er prinsipper som danner selve grunnpilarene i matematikken. Samtidig representerer de et skifte i elevens læring hvor de får et nytt perspektiv, ser nye logiske sammenhenger og danner nye matematiske relasjoner. Når elever oppdager en ny grunnleggende ide kan de utvikle strategier som utnytter den nye kunnskapen. Et eksempel på slike grunnleggende ideer kan være gruppering, ideen om at et antall kan ses på som en gruppe, og at slike grupper kan telles og regnes med (Fosnot & Dolk, 2001). Et annet kan være forståelsen av at jo større nevner det er i en brøk, jo mindre størrelse representerer brøken (Fosnot & Dolk, 2002), eller ideen om at variabler kan representere ukjente (Fosnot & Jacob, 2010). På samme måte som oppdagelsen av disse ideene har representert historiske paradigmeskifter, vil elever som oppdager dem oppleve sprang i sin matematiske utvikling (Fosnot & Dolk, 2001).

4.6 Åpne og lukkede problemer

4.6.1 Spørsmål

Lukkede oppgaver i matematikken fokuserer gjerne på svaret som det skal settes to streker under. Spørsmål som: «Hvor mye?», «Hvor lang?», «Hva er?», «Finn x» er eksempler på spørsmål man gjerne finner i lukkede oppgaver. Åpne oppgaver har et annet fokus. Her ønsker man å styre eleven inn på en aktivitet hvor eleven selv stiller spørsmål, utvikler metoder og diskuterer disse med sine medelever. Aktuelle spørsmål i typisk åpne oppgaver er: «Hva om?», «Enn hvis?», «Hvordan?», «Finnes det flere svar?», «Kan du finne alle svarene?» (Skott, 2008).

4.6.2 Muligheter

Tradisjonelle tekstoppgaver kan gjerne oppfattes som mer åpne enn rene regneoppgaver. Det viser seg derimot at de fleste tekstoppgaver legger opp til bruk av en spesifikk strategi og at eleven med det skal ende opp med det ene riktige svaret. Virkelig åpne oppgaver stimulerer til bruk av mange ulike strategier, og ofte vil flere strategier føre frem. De kan også gjerne ha flere riktige løsninger på ett og samme problem. Ofte vil en åpen oppgave gi mulighet til å oppdage mønstre og fra disse konstruere nye ideer som gir grobunn for mer utforskning (Fosnot & Dolk 2001).

4.6.3 Representasjoner

Bruk av representasjoner hjelper oss å utvikle en dypere faglig forståelse. Dette gjelder spesielt innen matematikken hvor alt er så abstrakt. Uten representasjoner blir det vanskelig å forstå hvordan addisjon, subtraksjon, divisjon og multiplikasjon fungerer. Praktiske eksempler er nødvendig, og matematikken er derfor rik på ulike typer representasjoner (Svingen, 2018). Representasjoner er identifisert som et av flere kjerneelementer i faget, som ledd i fagfornyelsen LK20. Elever skal kunne kommunisere om matematiske problemstillinger og bytte mellom ulike representasjoner. (Regjeringen, 2018). Ved å åpne for ulike representasjoner stimulerer rike oppgaver til matematisk diskusjon (Utdanningsdirektoratet, 2015).

4.7 Forkunnskap

Læreplanen fastsetter hvilke mål som gjelder for opplæringa. Den er oppdelt i årstrinn og fag, slik at den på et overordnet nivå kan brukes for å fastslå hva det er forventet at elevene skal kunne, for eksempel etter 4. årstrinn i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det er viktig for læringsutbyttet at nivået på lærestoffet er tilpasset enkelteleven. Læreplanen gir en pekepinn på hva elevene skal kunne, men det er kjennskap til egne elevers læringsforutsetninger som er avgjørende for lærerens mulighet til å velge riktig lærestoff (Lyngsnes & Rismark 2014). Vi vet også at kreativ bruk av eksisterende kunnskap fremmer relasjonell matematisk forståelse (Nosrati & Wæge, 2014).

5 Metode

5.1 Forskningsmetodikk

I denne studien benyttes tekstanalyse som kvalitativ forskningsmetode. Den kvalitative forsker filtrerer observasjonene gjennom egne oppfatninger, erfaringer, livssyn og kunnskap. De harde fakta man kan finne i kvantitative analyser eksisterer ikke i samme grad i et kvalitativt forskningsarbeid. Vurderinger som gjøres kontinuerlig i arbeidet vil hele tiden påvirke kursen, og til syvende og sist også resultatet. En objektiv sannhet og et svar med to streker under er derfor ikke alltid målet med den kvalitative forskningsprosessen. Den kvalitative forsker må være sitt ståsted bevisst, og hvordan teoretisk perspektiv og egne erfaringer påvirker i studiens ulike faser (Nilssen, 2012). Samtidig gir slike ulike ståsted og perspektiver en berikelse til fagfeltet. Ulike forskere studerer samme fenomen, men ulikt ståsted kan føre til at de belyser ulike sider av fenomenet og bygger modeller som til sammen gir et bedre, mer komplett bilde (Karlsdottir & Hybertsen, 2013).

I dette prosjektet har jeg i ulike faser jobbet på ulike måter. Innledningsvis bestod arbeidet i å lese teori for å få et best mulig grunnlag å gå videre på. I kodearbeidet og under analysen jobbet jeg mer induktivt: Empirien førte prosessen videre, mens teorien ble foreløpig lagt litt på hylla. I diskusjonsdelen støttet jeg meg på teorien igjen, og søkte flere og andre kilder for å forstå og sette funnene i sammenheng. Denne pendlingen mellom strukturert, etterrettelig arbeid og intuitivt, kreativt virke er et typisk trekk ved kvalitative studier (Nilssen, 2012).

5.2 Datainnsamling

Til tross for at mattelist.no er et nytt nettsted og under stadig utvikling er det en stor mengde oppgaver tilgjengelig. Å jobbe strukturert med analyse av alle oppgavene er allerede for ambisiøst for en studie av denne størrelsen. Av hensyn til prosessen har jeg valgt å redusere empirien til et mindre antall oppgaver, og heller se mer i dybden på disse. For å begrense omfanget av utvalget benyttet jeg utvalgskriterier. Kriteriene er basert på interesse og målgruppe og spisset med søkeord for å begrense antall oppgaver. Følgende kriterier ble benyttet:

- Oppgavene skal ligge på nettstedet http://mattelist.no pr. 24.03.2019
- Oppgavene skal tilhøre 4.-7. årstrinn
- Oppgavene må ha nedlastbar kopiering-original.
- Oppgavene må finnes på søkeord “multiplikasjon”
- Oppgavene må kunne utføres alene og ikke være av type spill eller lignende.

Dette gav på søketidspunktet 4 oppgaver. De valgte oppgavene skiller seg tydelig fra hverandre til tross for at de ble valgt ut basert på samme kriterier og vurderes derfor til å være et godt utgangspunkt for videre analyse.

5.3 Koding og kategorisering

I kodingsarbeidet har jeg støttet meg på Vivi Nilssens *Analyse i kvalitative studier* (Nilssen, 2012). Hennes beskrivelse av åpen, aksial og selektiv koding passer veldig godt med min opplevelse av arbeidet med analyse og strukturering av datamaterialet.

5.3.1 Åpen koding

Åpen koding handler om å bestemme og navngi egenskaper ved datamaterialet. I prosessen utvikles dypere kjennskap til empiriens komponenter og deres sammensetning. Resultatet av den åpne kodeprosessen er koder uten struktur. Selv om forskeren i løpet av den åpne kodingen begynner å få en formening om hvordan kodene henger sammen og hvilke kategorier som vil måtte ligge til grunn, er fokuset i denne delen av analysen å få et mest mulig fullstendig innblikk i datamaterialet (Nilssen, 2012).

I arbeidet med den åpne kodingen hadde jeg ingen fast struktur jeg jobbet etter. Det førte til at jeg gikk mye frem og tilbake mellom oppgavene etter hvert som jeg oppdaget nye koder for å avklare om tilsvarende koder kunne finnes i de andre oppgavene. Jeg begynte med å se på selve teksten i oppgaven for å få grep om hva oppgaven handlet om. Jeg så på kontekst, ordbruk, tekstlengde, representasjoner og bildebruk for å se om oppgavene hadde fellestrekk innenfor disse områdene. Det viste seg her at mange av koden ikke var felles for oppgavene og når jeg fant slike tilfeller la jeg kodene til side. Dette fordi jeg primært var ute etter fellestrekk ved oppgavene.

Videre jobbet jeg frem flere ulike løsninger for hver oppgave, i den grad det var mulig. Antall løsninger og stikkord knyttet til de ulike løsningene ble her notert. I dette arbeidet ble det klart at de ulike oppgavene baserte seg på ulik forkunnskap, åpnet for bruk av ulike strategier og var koblet til ulike grunnleggende matematiske strukturer. Dette ble også til koder.

For å avdekke hvilke grunnleggende matematiske ideer oppgavene var koblet til, gikk jeg tilbake til løsningene og vurderte om strategiene og metodikken var ulik fra forkunnskapen. Hypotesen var at dersom oppgaven raskere eller enklere kunne løses ved hjelp av strategier og grunnleggende matematiske ideer som ikke var nødvendig som forkunnskap, så fungerte oppgaven som en bro mellom eksisterende og ny kunnskap. Der jeg avdekket at oppgaven var koblet til underliggende matematiske ideer noterte jeg denne koblingen.

Jeg gikk stadig frem og tilbake mellom oppgavene etter hvert som jeg oppdaget ulike elementer med dem, for å finne ut om dette var fellestrekk, og for å kunne finne andre egenskaper ved hjelp av samme metodikk. Slik kan man si at analysen av den første oppgaven ikke var over før analysen av den siste var ferdigstilt.

5.4 Koder og kategorier

Tabell 1 viser en oversikt over de viktigste kodene og hvordan jeg delte de inn i underkategorier og hovedkategorier inspirert av Grounded Theory, med aksial og selektiv koding slik det beskrives av Vivi Nilssen (Nilssen, 2012).

5.5 Analyse basert på koder

5.5.1 Forkunnskap

I dette prosjektets empiri har vi ingen bestemt elevgruppe å forholde oss til. For å evaluere krav til forkunnskap valgte jeg derfor å sammenligne den identifiserte nødvendige forkunnskap med kompetansemålene for matematikk i LK06 for 4. trinn. Målet var å avdekke om kravene til forkunnskap kan forventes å være ivaretatt for aktuell målgruppe. Forkunnskap dekt av kompetansemålene ble ikke vurdert å være til hinder for oppgaveløsingen.

5.5.2 Grunnleggende matematiske ideer

For å avdekke de grunnleggende matematiske ideene oppgavene er koblet til så jeg på de ulike strategiene som kunne benyttes for å finne en løsning, og vurderte hvilke matematiske strukturer strategiene støttet seg på. Disse strukturene fant jeg igjen som «Big Ideas» i læringslandskapet (Fosnot & Dolk, 2001 og 2002).

Tabell 1: Koder og kategorier – utdrag fra kodeprosessen

Kode	***Underkategori***	***Hovedkategori***
Brøk	Konseptuell kunnskap	Forkunnskap
Plassverdi		
3-gangen	Faktakunnskap	
Multiplikasjon ensifra tall	Prosedyrekunnskap	
Distributiv lov	Lover	Grunnleggende prinsipp
Kommutativ lov		
Del av samme hele	Konsepter	
Figurer kan symbolisere tall		
Gruppering		
«Hvordan kan man få det til å bli sånn?»	Spørsmål	Åpenhet
«Finnes det bare en løsning?»		
«Hvor mange», «Hvor stor»		
Mange løsninger	Muligheter	
Ulike strategier		
Konkreter	Representasjoner	
Figurer		
Symboler		

5.5.3 Åpenhet

For å avgjøre hvor åpen hver enkelt oppgave var så jeg på hvordan spørsmål var formulert, om det var flere riktige løsninger, om det ble lagt opp til bruk av ulike representasjoner og om det var flere ulike strategier som kunne gi en riktig løsning. Dette gav et totalbilde av hvor åpen oppgaven var. Noen elementer ble vektlagt mer enn andre, basert på hvor førende jeg vurderte dem med tanke på elevenes arbeid. Spørsmålstype, antall riktige svar og mulighet for ulike strategier ble her vurdert av større viktighet enn antall og type representasjoner.

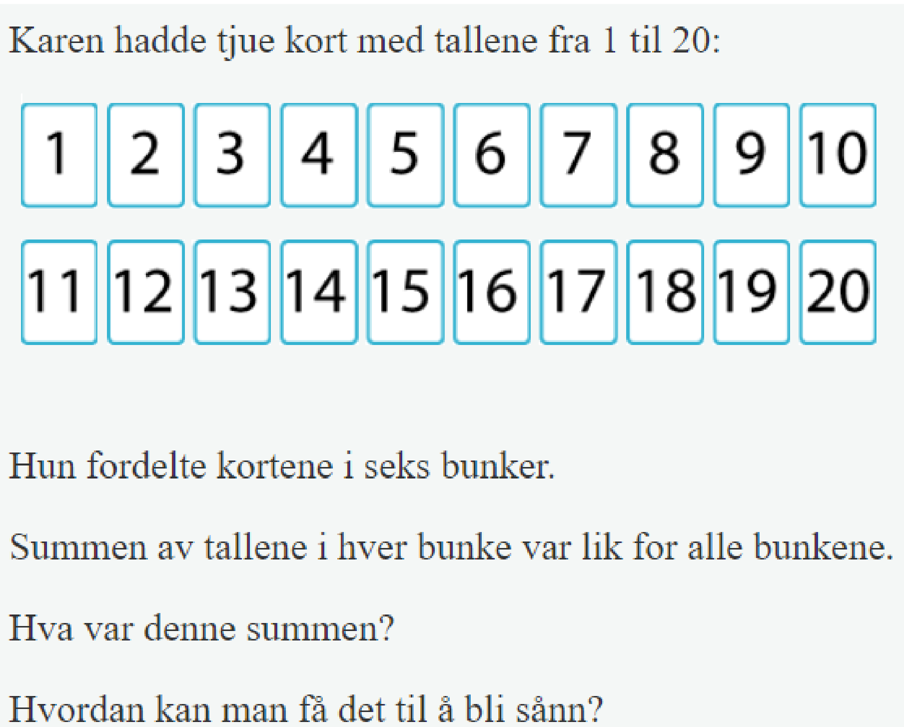
5.6 Forskningsprosessen og etiske betraktninger

Som er tilfellet ved all kvalitativ forskning farges resultatet noe av forskeren selv. Det er nødvendigvis også tilfellet i denne studien, spesielt siden man har tatt utgangspunkt i egne vurderinger av oppgavene og deres egenskaper. Dette kan bety at andre forskere kan konkludere ulikt, gitt samme utgangspunkt.

Muligheten til å generalisere funnene for alle LIST-oppgaver er noe begrenset da det ikke har vært rom for analyse av et større antall oppgaver. Det er godt mulig man kan finne flere og mer fremtredende funn med lik problemstilling dersom man jobber med et større datagrunnlag.

6 Analyse

6.1 Oppgave 155 "Tjue fordelt på 6"



Figur 1: Oppgave 155 – Tjue fordelt på seks. Hentet fra https://www.mattelist.no/155

6.1.1 Beskrivelse

Oppgaven (Figur 1) beskriver en situasjon hvor en person har tjue kort med heltallene fra 1 til 20. Hun fordeler kortene i 6 bunker og oppnår en situasjon hvor summen av tallene på kortene i hver bunke er lik. Spørsmålet i oppgaven er todelt: Hva er summen av kortene i bunkene, og hvordan kan det bli slik? Det ligger ingen klar føring på hvilken rekkefølge spørsmålene skal besvares, foruten at det ene spørsmålet kommer før det andre i teksten. Oppgaven representerer problemstillingen ved hjelp av tekstlig beskrivelse, figurer av 20 kort og legger også opp til bruk av konkreter i form av en kopioriginal med de tjue kortene som elevene kan klippe ut og jobbe med fysisk.

6.1.2 Løsningseksempel

En elegant løsning, som utnytter en ide som kan brukes i mange andre situasjoner, er å organisere om på kortene slik at man får 10 grupper med verdien 21 for deretter å multiplisere og dividere:

$$(1+20),(2+19),(3+18),(4+17),(5+16),(6+15),(7+14),(8+13),(9+12),(10+11)$$

$$10 \cdot 21 = 210$$

$$210 \div 6 = 35$$

Når man vet at hver bunke med kort skal summeres til 35 er det en overkommelig oppgave å finne gyldige eksempler. I arbeidet med oppgaven fant jeg totalt 25035 løsninger ved hjelp av programmeringsverktøy. En slik løsning er gitt i Tabell 2.

6.1.3 Forkunnskap

Det er nødvendig med noe forkunnskap, som addisjon med tosifrede tall og sammenligning av størrelser, men dette er kompetanse som er dekt av kompetansemålene etter 2. årstrinn: «gjere overslag over mengder, telje opp, samanlikne tal og uttrykkje talstorleikar på varierte måtar», «utvikle, bruke og samtale om varierte reknestrategiar for addisjon og subtraksjon av tosifra tal og vurdere kor rimelege svara er» (Utdanningsdirektoratet 2013) og er derfor ikke en begrensende faktor tatt i betraktning målgruppen for oppgaven. Elever kan nyttiggjøre seg annen forkunnskap, som divisjon, dersom de velger en strategi hvor de først finner svar på sum i hver bunke, men det er mulig å finne begge svar ved utelukkende å bruke addisjon og sammenligning.

Tabell 2: Oppgave 155 - En av mange løsninger

20 + 10 + 5 = 35	19 + 12 + 4 = 35	17 + 18 = 35
16 + 15 + 1 + 3 = 35	13 + 14 + 8 = 35	2 + 6 + 7 + 9 + 11 = 35

6.1.4 Grunnleggende prinsipp

Den grunnleggende ideen oppgaven er ment å avdekke er «Gruppering» - at tall kan kombineres i grupper og man kan benytte regneoperasjoner på disse gruppene (Fosnot & Dolk 2001). Dette ser vi fordi til tross for at begge deloppgavene kan løses ved hjelp av jobbing med konkretene, er en mye mer elegant og effektiv løsning av oppgaven å summere tallene fra 1-20, dividere på 6, og da finne at hver bunke / gruppe må ha summen 35. Når man vet hvilken sum hver bunke skal ha, reduseres antall gyldige kombinasjoner vesentlig.

6.1.5 Åpenhet

Oppgaven åpner for flere løsninger og strategier. Den legger opp til bruk av ulike representasjoner, blant annet ved å inkludere kopioriginal for konkreter og ved å benytte illustrerende figurer som supplement til oppgaveteksten. Spørsmålet «Hva var denne summen?» er et lukket spørsmål med kun ett svar, mens spørsmålet «Hvordan kan man få det til å bli sånn?» åpner for mange svar, både dersom svaret tolkes til å skulle forklare fremgangsmåte og dersom det tolkes som at man skal vise et eller flere løsninger på problemet.

6.2 Oppgave 156: Multiplisere med 3

6.2.1 Beskrivelse

Oppgaven (Figur 2) beskriver to problem hvor flere siffer i to tall er erstattet med bokstaver. Problemene er like i struktur, men bruker ulike tall og bokstaver. Tallene som har fått erstattet deler av sifrene er henholdsvis faktor og produkt i et multiplikasjonsstykke med tallet 3 som den andre faktoren. Oppgaven inneholder kun ett spørsmål: «Finnes det bare én løsning i hvert tilfelle?», men resten av teksten impliserer at elevene også skal finne en løsning på problemet.

Ut over ren tekstlig beskrivelse benyttes matematiske symboler for multiplikasjon og likhet. I tillegg er enkeltsifre representert med symboler i form av små bokstaver.

Oppgaven inkluderer to eksempler på hvordan elever har tenkt når de har jobbet med problemet. Disse beskrivelsene er i utgangspunktet skjult, men det legges opp til at alle som jobber med oppgaven skal se dette materialet som en del av prosessen. Det er likevel rom for å løse oppgaven uten å støtte seg på annet enn den informasjonen som vises i Figur 2.

Bokstavene a, b, c, d osv. er siffer i noen tall.

Kan du erstatte bokstavene med tall i de to regnestykkene under?

$$1\,a\,b\,c\,d\,e \cdot 3 = a\,b\,c\,d\,e\,1$$

$$2\,f\,g\,h\,i\,j \cdot 3 = f\,g\,h\,i\,j\,2$$

I det første regenstykket er 1 første siffer i tallet «1 a b c d e» og siste siffer i tallet «a b c d e 1». Samme bokstav er samme siffer i begge tallene.

Finnes det bare én løsning i hvert tilfelle?

Når du har tenkt litt på det, kan du klikke på boksene under for å se hvordan noen andre elever har begynt på oppgaven.

Figur 2: Oppgave 156 – Multiplisere med 3. Hentet fra https://www.mattelist.no/156

6.2.2 Løsningseksempel

Oppgaven kan løses på en systematisk måte ved å dele opp den ukjente faktoren i ledd som representerer de ulike posisjonene i tallsystemet og multiplisere hvert ledd for seg. En måte å organisere arbeidet på kan være å stille det opp i tabellform, som gitt i Figur 3.

6.2.3 Forkunnskap

Løsning av oppgaven krever at man kan multiplisere flersifra tall. Dette er kompetanse som er dekt med kompetansekrav til 4. trinn: «utvikle og bruke varierte metodar for multiplikasjon og divisjon, bruke dei i praktiske situasjonar og bruke den vesle multiplikasjonstabellen i hovudrekning og i oppgåveløysin» (Utdanningsdirektoratet, 2013), og som vi her forutsetter at målgruppen innehar.

100000	2	2	·3 =		6	0	0	0	0	0
10000	f	8	·3 =	+	2	4	0	0	0	0
1000	g	5	·3 =	+		1	5	0	0	0
100	h	7	·3 =	+			2	1	0	0
10	i	1	·3 =	+					3	0
1	j	4	·3 =	+					1	2
	2fghij·3			=	f	g	h	i	j	2
	285714·3			=	8	5	7	1	4	2

Figur 3: Oppgave 156 - Eksempel på løsning

6.2.4 Grunnleggende prinsipp

Oppgaven er tydelig koblet til den grunnleggende ideen om plassverdisystemet. Løsning av oppgaven åpner for dypere forståelse av hvordan plassverdisystemet fungerer med multiplikasjon. Den er også koblet til den distributive loven ved at man kan se på 1abcde · 3 = abcde1 som:

$$3 \cdot \ (100000 + a0000 + b000 + c00 + d0 + e)$$

6.2.5 Åpenhet

Man kan angripe denne problemstillingen på mange ulike måter. I oppgaven brukes vanlige regnesymboler, men enkelte sifre i tallene er erstattet med bokstaver. Det legges ikke opp til bruk av andre representasjoner ut over dette.

Oppgaven angir ikke hvordan man skal komme frem til svaret og det er ikke i oppgaven gitt at det kun er ett riktig svar, selv om dette er tilfellet. Den utfordrer i stedet elevene på om det finnes flere ulike svar på oppgaven. Spørsmålet "Finnes det flere enn en løsning?" er typisk for åpne oppgaver.

6.3 Oppgave 173: Arnes klinkekuler

6.3.1 Beskrivelse av oppgaven

Oppgave 173 (Figur 4) ligner på en tradisjonell tekstoppgave. Den beskriver en situasjon hvor et antall klinkekuler reduseres til en brøkdel igjennom flere steg. Elevene skal finne ut hvor mange klinkekuler det var opprinnelig, samt hvor stor brøkdel som ble borte, gitt hvor mange klinkekuler det var igjen til slutt.

Oppgaven har en lang tekstlig beskrivelse (~120 ord) i tillegg til de to spørsmålene. Spørsmålene er av type «Hvor mange?» og «Hvor stor?».

Det benyttes flere typerrepresentasjoner som tekstlig beskrivelse og illustrasjoner for å gi elevene kontekst. Grupper av klinkekuler representeres som brøker. Den legger ikke opp til bruk av konkreter, men ingenting i oppgaven er til hinder for at konkreter som representerer klinkekulene kan brukes.

Oppgaven kan angripes på ulike måter og angir ingen spesifikk prosedyre eller metode.

6.3.2 Løsningseksempel

I Figur 5 er oppgaven løst figurativt ved å tegne rektangler av samme hele, hvor rektanglenes forholdsmessige størrelse er gitt ved brøk, og ett av rektanglene i tillegg har størrelse oppgitt i antall klinkekuler. Derifra kan størrelsen på de resterende rektanglene utledes. Samme figur viser kladd av beregning av deloppgave 2.

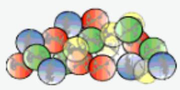
Arne og kameraten hans, Thomas, gikk langs veien sammen. Arne hadde en stor pose med klinkekuler.

Dessverre gikk det hull på posen og alle klinkekulene falt ut. Stakkars Arne!

En tredel $\left(\frac{1}{3}\right)$ av klinkekulene rullet ned bakken så fort at Arne ikke rakk å plukke dem opp.
En seksdel $\left(\frac{1}{6}\right)$ av klinkekulene forsvant i grøfta.

Thomas og Arne plukket opp så mange de kunne, men halvparten $\left(\frac{1}{2}\right)$ av klinkekulene som var igjen ble plukket opp av andre barn som løp av gårde med dem.

Arne telte de klinkekulene som han og Thomas satt igjen med.

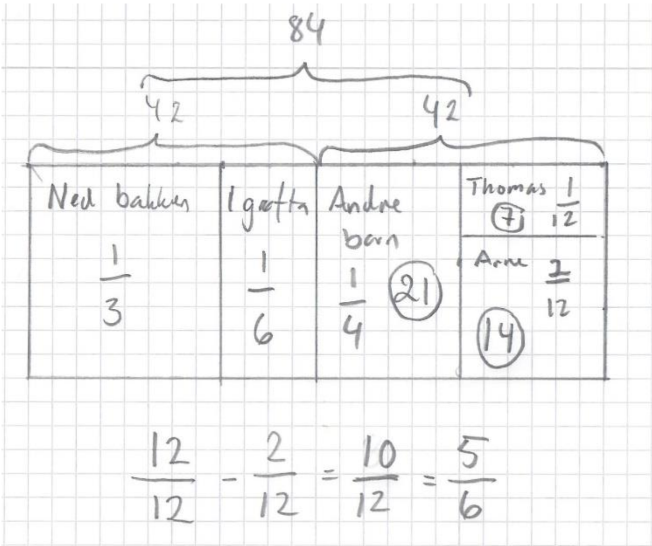


Han ga en tredel $\left(\frac{1}{3}\right)$ til Thomas som takk for hjelpen. Resten puttet Arne i lomma. Det var 14 klinkekuler.

Hvor mange klinkekuler hadde Arne posen før det gikk hull på den?

Hvor stor brøkdel av klinkekulene i posen ble mistet eller gitt bort?

Figur 4: Oppgave 173 - Arnes klinkekuler. Hentet fra https://www.mattelist.no/173



Figur 5: Oppgave 173 - Figurativ løsning

6.3.3 Forkunnskap

For å svare på første spørsmål i oppgaven er det nødvendig med konseptuell kjennskap til brøk. Dette er dekt av kompetansemål for 4. trinn i læreplanen: «beskrive og bruke plassverdisystemet for dei heile tala, bruke positive og negative heile tal, enkle brøkar og desimaltal i praktiske samanhengar og uttrykkje talstorleikar på varierte måtar» (Utdanningsdirektoratet, 2013). For å besvare spørsmål 2 må elevene kunne regne med brøk av ulik nevner. Dette er kompetanse som først er dekt ved kompetansemål for 7. trinn: «finne samnemnar (bm.: fellesnevner) og utføre addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av brøkar» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det betyr at oppgaven som helhet har krav til forkunnskap som ligger ut over rammene vi har satt for analysen. Krav til forkunnskap vurderes derfor som høyt.

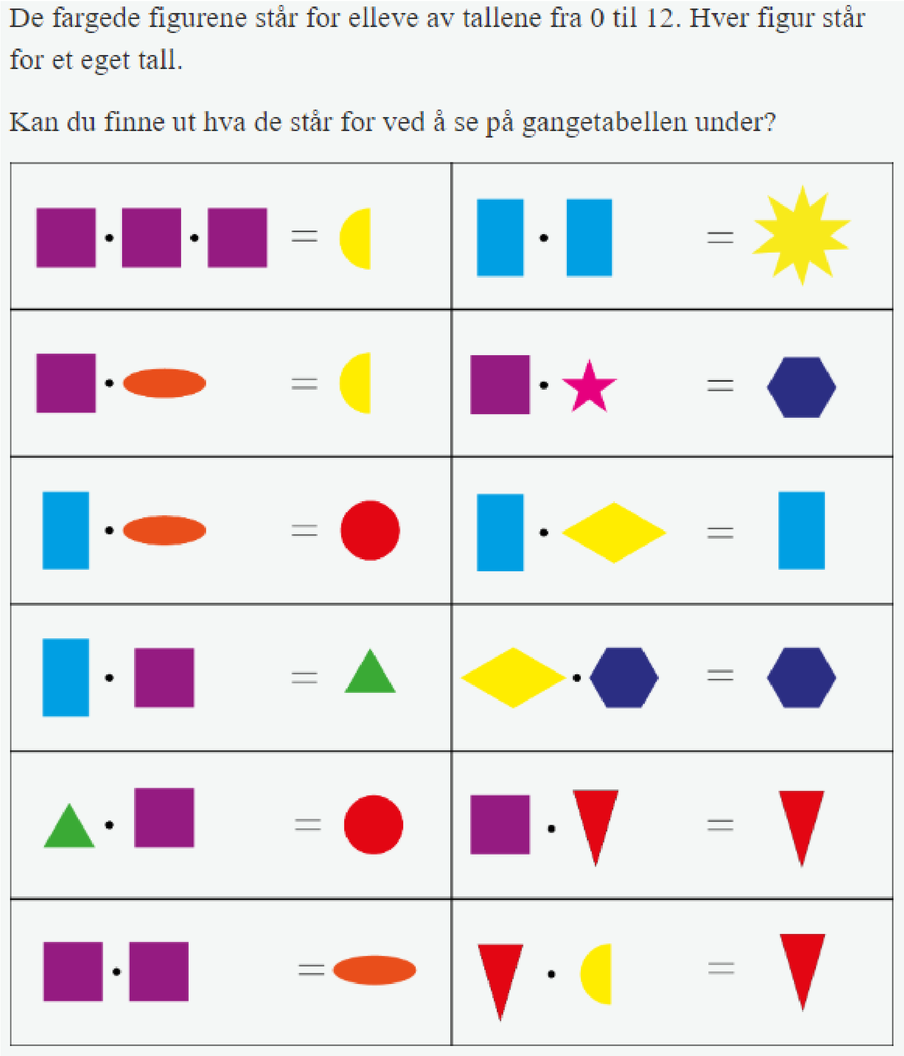
6.3.4 Grunnleggende prinsipp

Oppgaven åpner for konstruksjon av en rekke grunnleggende prinsipper knyttet til brøk: Ved sammenligning av brøker må de være brøker av samme hel; jo større nevner jo mindre stykke; deler trenger ikke være kongruente for å være like store; multiplikasjon er koblet til brøk. De fleste av disse ideene har stor grad av overlapp med kravene til forkunnskap (se avsnitt 6.3.3), og kan dermed ikke regnes som tilkoblet grunnleggende prinsipp, gitt rammene for analysen.

6.3.5 Åpenhet

Oppgaven er åpen for flere løsningsstrategier, benytter ulike representasjoner og har kontekst elevene kan kjenne seg igjen i, men spørsmålene som benyttes er ikke typisk for åpne oppgaver, og den har kun et riktig svar per deloppgave. Det er viktig å se forbi overflatiske trekk når man vurderer en oppgaves egenskaper, og heller vektlegge de egenskaper som påvirker elevenes arbeid med oppgaven (Stein et al, 2009). I sum vurderes oppgaven å være mer lukket enn åpen.

6.4 Oppgave 176: Figur ganger figur



Figur 6: Oppgave 176 - Figur ganger figur. Hentet fra https://www.mattelist.no/176

6.4.1 Beskrivelse av oppgaven

Oppgaven (Figur 6) beskriver en situasjon med tolv multiplikasjonsstykker hvor tallene er byttet ut med figurer. Det er totalt elleve figurer og tallene som disse representerer er heltall fra 0 til 12. Det er altså slik at ikke alle de tretten tallene er representert. Utfordringen er å finne ut hvilke tall som representeres med hver av de ulike figurene.

Noen av oppgavene skiller seg ut og fungerer som nøkkeloppgaver, for eksempel øverst til venstre på Figur 6, hvor vi finner det eneste multiplikasjonsstykket med tre faktorer i stedet for to.

I oppgaven representeres tall ved geometriske figurer med ulik form og farge. Det er ingen logisk sammenheng mellom figurenes egenskaper og tallene de representerer. I tillegg benyttes to matematiske symboler for henholdsvis multiplikasjon og likhet.

Det er mulig å løse oppgaven med prøving og feiling og dersom elevene starter fra tallet 0 og prøver seg frem systematisk tar det ikke lang tid å komme i gang da første deloppgave løses med tallet 2.

6.4.2 Forkunnskap

Løsning av oppgaven krever at man kan multiplisere ensifrede tall. Dette er kompetanse som er dekt med kompetansekrav etter 4. årstrinn: «utvikle og bruke varierte metodar for multiplikasjon og divisjon, bruke dei i praktiske situasjonar og bruke den vesle multiplikasjonstabellen i hovudrekning og i oppgåveløysing» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Krav til forkunnskap vurderes derfor til å være lave.

6.4.3 Grunnleggende prinsipp

Oppgaven har en tydelig kobling til det grunnleggende prinsipp at variabler kan representere ukjente, her i form av figurative symboler som representerer de ulike tallene (Fosnot & Jacob, 2010). Forkunnskap om dette er ikke en forutsetning, da premisset forklares godt i teksten. Den grunnleggende ideen er en generalisering av det elevene opplever i arbeidet med oppgaven.

6.4.4 Åpenhet

Ingen løsningsmetodikk eller strategier er gitt, verken implisitt eller eksplisitt i oppgaven og ingen kjente prosedyrer kan følges for å løse oppgaven.

Oppgaven benytter flere representasjoner, som tekstlig beskrivelse, figurer og matematiske symbol.

Spørsmålet «Kan du finne ut hva [figurene] står for ved å se på gangetabellen nedenfor?» er et av de som faller inn under kategorien åpne spørsmål, men hvis man ser forbi ordlyden, er intensjonen fortsatt at elevene skal jobbe frem det ene riktige svaret.

Oppgaven vurderes å ha moderat til stor grad av åpenhet.

7 Diskusjon

7.1 Forkunnskap

Et av de tydeligste funnene i analysen er at alle oppgavene har få og lave krav til forkunnskap. Stort sett finner man at all nødvendig kompetanse er dekt av kompetansemål for 4. trinn, som er laveste årstrinn i utvalgskriteriet. Mer enn noen annen enkeltfaktor, virker lave krav til forkunnskap å være styrende for om en oppgave har lav inngangsterskel. Et unntak i så måte er oppgave 173, «Arnes klinkekuler», som er den eneste av oppgavene med krav til forkunnskap som bare delvis dekkes av kompetansekrav etter 4. trinn og hvor resten dekkes inn av kompetansekrav etter 7. trinn.

Hvorvidt kravene til forkunnskap er lave eller ikke, er en direkte funksjon av hvilke kompetansemål elevgruppen har mestret. Det betyr at lav inngangsterskel ikke er en statisk egenskap, men varierer avhengig av elevgruppen og enkeltelevers utvikling. Dette støttes av Lyngsnes og Rismark som vektlegger kjennskap til enkeltelevens læringsforutsetninger i arbeidet med å velge ut læringsstoff (Lyngsnes & Rismark, 2014).

Verken Piggott eller Utdanningsdirektoratet nevner lave krav til forkunnskap som en konkret egenskap ved rike oppgaver. Wolf beskriver hvordan læreren har mange ulike elever foran seg, med ulik fundamental kunnskap, matematisk bakgrunn og erfaring og må ta hensyn til dette i valg av oppgaver (Wolf, 2012).

7.2 Grunnleggende prinsipp

Det neste funnet av betydning er at elevenes arbeid med hver av disse ulike oppgavene bidrar til å belyse en grunnleggende matematisk ide. Denne grunnleggende ideen er ikke så direkte koblet at kjennskap til den blir en forutsetning for å kunne løse oppgaven. Et eksempel på hvordan en slik kobling kan fungere er illustrert i Tabell 3. Her ser man at til tross for at oppgavene i eksemplene er svært like, både i tematikk og vanskelighetsgrad, kan man i eksempel 2 se en kobling til den grunnleggende ideen om at addisjon er kummutativ, altså at rekkefølgen på leddene i regneoperasjonen addisjon ikke påvirker summen. Kjennskap til dette grunnleggende prinsippet er derimot ikke en forutsetning for å kunne løse oppgaven.

Det er igjen lite konkret å spore knyttet til grunnleggende ideer i litteraturen om rike oppgaver. Tydeligst er kanskje Piggott som skriver at rike oppgaver har potensiale for å avdekke underliggende prinsipper. Samtidig påpeker hun at ikke alle rike oppgaver innehar alle egenskapene (Piggott 2011). Dette kan vurderes dit hen at et potensial for å avdekke underliggende prinsipper ikke er nødvendig for at en oppgave skal være en LIST-oppgave, men slik jeg ser det tyder alt på at en slik kobling er helt vesentlig for å gi oppgaven stor takhøyde.

Et viktig poeng med grunnleggende ideer er at det må ses i sammenheng med hvilken forkunnskap oppgaven krever. Dersom det er for stor overlapp mellom krav til forkunnskap og oppgavens grunnleggende prinsipp mister man etter mitt syn effekten av den grunnleggende ideen. Altså, dersom poenget med oppgaven er å avdekke det grunnleggende prinsipp om at tall kan representeres med symboler, så må ikke kjennskap til det samme prinsippet være nødvendig for å kunne jobbe med oppgaven.

Tabell 3: Eksempeloppgaver grunnleggende prinsipp

Eksempel 1	***Eksempel 2***
a) 3 + 5 = ?	a) 3 + 5 = ?
b) 2 + 4 = ?	b) 5 + 3 = ?

Dette ser vi eksempel på i oppgave 173, hvor det er stor grad av overlapp mellom krav til forkunnskap og de grunnleggende ideene oppgaven kobler til, noe som etter min vurdering svekker potensialet i oppgaven.

7.3 Åpenhet

Kodeprosessen viser at åpenhet er en hovedkategori for mange ulike koder, fra spørreord, via representasjoner, til muligheter for bruk av ulike strategier og hvorvidt det finnes flere riktige svar. Det betyr at kategorien er vidtrekkende og at den derfor må vurderes på det grunnlaget. Empirien må, etter min mening, ha større grad av treff i en vid kategori enn i en smal, for at det skal kvalifisere som gyldig resultat. I kombinasjon med at oppgavene i liten grad impliserer spesifikke prosedyrer og strategier, åpner dette for at kunnskapen kan benyttes på kreative måter, eller i en form elevene ikke har brukt den tidligere. Kreativ bruk av eksisterende kunnskap fremmer relasjonell forståelse (Nosrati & Wæge, 2014).

Felles for oppgavene er at de har middels til stor grad av åpenhet, selv om graden varierer noe oppgavene imellom.

7.4 Funn vurdert opp imot teorien

Listen over egenskaper i Tabell 4 er sammensatt av til dels overlappende egenskaper hentet fra teorien (Piggott, 2011. Utdanningsdirektoratet, 2015. Wolf, 2015.). Tabellen viser på hvilke områder analysen av empirien stemmer med det teorietiske grunnlaget og graden av samsvar er markert med fargeskala fra grønt til oransje, hvor grønt tilsier tydelig samsvar og oransje tilsier lite samsvar. Noen felter er markert med grått. Dette fordi empirien ikke gir grunnlag for å si noe om den aktuelle egenskapen. Vurderingene av hver av oppgavene er subjektiv basert på analysen i kapittel 6.

Man finner stor variasjon mellom oppgavene innen de ulike egenskapene, men når de er gruppert etter tema ser vi at oppgavene er mer samstemte innen tema som åpenhet og viktige ideer. Dette stemmer med resultatene fra kodingen, hvor åpenhet og grunnleggende ideer er to av hovedkategoriene. Den tredje hovedkategorien, forkunnskap, er ikke konkret representert i egenskapene fra litteraturen.

Vi legger også merke til at mange av egenskapene fra teorien ikke er representert i empirien. Her vil jeg trekke fram «Inkluderer ekstra utvidelser og utfordringer». Ingen av oppgavene er tydelige på dette punkt. Med det mener jeg at de eksplisitt stimulerer til utvidelse eller tolkning som gir større utfordring. Det er mulig at denne egenskapen er ment tolket bredt, og at den er ivaretatt dersom en oppgave *kan* utvides. Det er i så fall en annen sak.

Tabell 4: Egenskaper fra teorien og i hvilken grad de beskriver datautvalget

Egenskaper fra litteraturen Denne tabellen viser hvordan egenskapene sammensatt fra Piggott, Utdanningsdirektoratet og Wolf samsvarer med de analyserte oppgavene. Grønn farge signaliserer stor grad av samsvar, gult signaliserer noe samsvar og oransje signaliserer liten grad av samsvar.	**Tjue fordelt på seks**	**Multiplisere med 3**	**Arnes klinkekuler**	**Figur ganger figur**
Tilgjengelighet				
Er lett å forstå				
Er utformet slik at en stor gruppe elever har mulighet til å jobbe med den				
Gir mulighet for opplevd tidlig suksess				
Åpenhet				
Kan angripes fra ulike utgangspunkt				
Åpner for å benytte ulike strategier				
Åpner for at flere ulike svar er riktige				
Åpner for bruk av ulike representasjoner				
Begrenser ikke elevenes mulighet til å søke alternative veier				
Engasjement og motivasjon				
Introduserer matematikk som er spennende og inspirerende				
Har kontekst elevene kjenner seg igjen i, eller kan leve seg inn i og forstå				
Er underholdende eller til å glede seg over				
Gir mulighet til overraskelse				
Kreativitet				
Oppfordrer til kreativ og fantasifull bruk av eksisterende kunnskap				
Oppfordrer til originalitet/nyvinninger				
Samarbeid og diskusjon				
Stimulerer til samarbeid, diskusjon og kommunikasjon				
Skaper en faglig diskusjon om strategier, representasjoner og ideer				
Leder til at elever og lærere formulerer nye interessante problemer				
Stimulerer til spørsmål som «Hva om?» og «Hva hvis ikke?»				
Utforskende aktiviteter				
Oppfordrer til utforskende matematisk arbeid				
Stimulerer til utvikling av elevers selvtillit, selvstendighet og evne til kritisk tenkning				
Utvidelser og utfordringer				
Inkluderer ekstra utfordringer og utvidelser				
Oppleves som en utfordring, krever anstrengelse og må tillates å ta tid				
Grunnleggende ideer				
Introduserer viktige ideer eller løsningsstrategier				
Fungerer som brobygger mellom ulike faglige områder				
Gir mulighet til å finne elegante eller effektive løsninger				
Har potensiale til å utvide elevers matematiske forståelse og/eller kunnskap				
Har potensiale for å avdekke mønstre eller lede til generaliseringer eller uventede resultater				

Et annet slikt punkt er «Oppfordrer til originalitet/nyvinninger». Sett i lys av det foregående punktet, «Oppfordrer til fantasifull bruk av eksisterende kunnskap» er det naturlig å tolke utsagnet smalt og konkludere med at oppgavene ikke viser slike tegn. Piggott vektlegger at ikke alle rike oppgaver har alle egenskapene og det er nok noe av det vi ser tegn til her (Piggott, 2011). Samtidig kan dette også tyde på at disse egenskapene ikke er like representative for LIST-oppgaver.

7.5 LIST-oppgaver og kognitive krav

Sammenligner man litteraturens beskrivelser av LIST-oppgaver med Stein & Smiths oppgaveanalyse-guide er det gjennomgående slik at LIST-oppgaver burde ligge på nivå 3 og 4 (Stein et al, 2009). Av den grunn ønsker jeg å sammenligne empirien med egenskapene i disse to nivåene av guiden.

Tabell 5: Utdrag av Stein & Smiths oppgaveanalyseguide, egen oversettelse

Egenskaper for fastsetting av kognitive krav Denne tabellen viser hvordan egenskapene hos de analyserte oppgavene samsvarer med egenskaper i Stein & Smiths rammeverk for fastsetting av kognitive krav. Grønn farge signaliserer stor grad av samsvar, gult signaliserer noe samsvar og oransje signaliserer liten grad av samsvar.	**Tjue fordelt på seks**	**Multiplisere med 3**	**Arnes klinkekuler**	**Figur ganger figur**
Nivå 3 – Prosedyrer med kobling				
Innbyr til bruk av prosedyrer for å utvikle dypere matematisk forståelse				
Foreslår eksplisitt eller implisitt generelle fremgangsmåter / prosedyrer som har nær kobling til underliggende konseptuelle ideer, heller enn smale algoritmer som ikke bidrar til å avdekke dypere forståelse				
Benytter vanligvis flere representasjoner, som diagrammer, konkreter, symboler og beskrevne situasjoner				
Krever en viss grad av kognitiv innsats. Om generelle prosedyrer kan benyttes, kan de ikke følges blindt				
Elevene må jobbe med konseptuelle ideer som danner grunnlag for prosedyrene for å fullføre oppgaven				
Gir mulighet for opplevd tidlig suksess				
Nivå 4 – Matematisk tenkning				
Krever kompleks og ikke-algoritmisk tenkning - en forutsigbar, innøvd metode er ikke eksplisitt foreslått i oppgaven, oppgaveinstruksjonene eller ved hjelp av eksempler.				
Krever at elevene utforsker og skaffer seg forståelse av matematiske konsepter, prosesser og sammenhenger				
Krever selvregulering av elevens egne tankeprosesser.				
Krever at eleven drar nytte av relevant kunnskap og erfaringer og benytter disse på en hensiktsmessig måte i arbeidet med oppgaven.				
Krever at eleven analyserer oppgaven og aktivt undersøker rammer som kan begrense løsningsstrategier og løsninger.				
Krever vesentlig kognitiv innsats og kan innebære noen grad av angst/stress for elevene på grunn av løsningsprosessens uforutsigbare natur.				

I Tabell 5 har jeg plottet funnene fra analysen, fargemarkert fra grønt til oransje, avhengig av grad av samsvar, mens egenskaper som ikke er analysert er markert i grått. Vurderingene av hver av oppgavene er subjektiv basert på analysen i kapittel 6. Vi ser at oppgavenes egenskaper i stor grad stemmer med egenskapene som kjennetegner de to øverste nivåene, og at det stemmer best på nivå 4. Dette viser stor grad av samsvar mellom empiriske funn og teorien med hensyn til oppgavenes kognitive krav.

Oppgaven om Arnes klinkekuler er den som i minst grad kvalifiserer på dette nivået. Min vurdering er at oppgaven i for liten grad åpner for utforskning og at den i for stor grad legger opp til at elevene skal jobbe med brøk på samme måte som de har gjort tidligere, selv om konteksten er omfattende og lett å kjenne seg igjen i. Det er implisert i oppgaven at elevene skal regne på problemet med kjente algoritmer for brøkregning.

8 Konklusjon

8.1 Oppsummering av forskningsresultater

LIST-oppgaver er kognitivt krevende oppgaver. Med det menes ikke at de er vanskelige, eller at man må være kognitivt sterk for å mestre dem. At en oppgave er kognitivt krevende betyr at eleven må bruke flere og mer sammensatte kognitive prosesser i problemløsingen. Eleven må benytte seg av kreativ, matematisk tenkning.

Mer enn noe annet er LIST-oppgaver koblet til grunnleggende matematiske ideer. En slik kobling betyr at arbeid med oppgaven kan føre til at eleven konstruerer en eller flere av disse grunnleggende ideene, eller knytter slike sammen til nye bærende strukturer i sin matematiske forståelse. Det er disse koblingene som gir LIST-oppgaver den store takhøyden.

LIST-oppgaver har få og lave krav til forkunnskap. Dette gjør at det er lett å komme i gang med oppgavene for alle. I kombinasjon med koblingene til de grunnleggende ideene favner oppgavene dermed en bred og sammensatt elevgruppe.

LIST-oppgaver er åpne og det er i denne åpenheten de får sin rikdom:

- De bruker, og gir rom for bruk av, flere ulike representasjoner
- De kan løses med ulike utgangspunkt, har ofte flere riktige svar, og gir rom for ulike strategier for å nå disse svarene
- De preges i stor grad av åpne spørsmål

Et noe overraskende funn er at oppgave 173 «Arnes klinkekuler» ikke er en typisk LIST-oppgave. Til tross for at den har en engasjerende kontekst og med dette har røtter i virkeligheten, har den høye krav til forkunnskaper og stor overlapp mellom disse kravene og de grunnleggende ideene den kobler til. Med kun ett riktig svar pr deloppgave, og regnearbeid med brøk implisert i oppgaveteksten er den heller ikke en spesielt åpen oppgave. Disse egenskapene gjør at den skiller seg markant fra de andre oppgavene i utvalget.

8.2 Didaktiske refleksjoner

Siden LIST-oppgaver er tilgjengelige for en bred og sammensatt elevgruppe vil det være aktuelt å bruke slike oppgaver som del av den tilpassa opplæringa i skolen. Forutsetningen for å bruke slike oppgaver er en bevisst tanke om hvilke forkunnskaper enkeltelevene har og hvilke grunnleggende ideer man ønsker at elevgruppen skal jobbe med. LIST-oppgaver er derfor ingen enkel løsning på et vanskelig problem, men er heller et spesialverktøy som kan benyttes for å oppnå målretta resultat.

Å være bevisst hvilke egenskaper som gir en oppgave lav inngangsterskel og stor takhøyde er nyttig når man planlegger undervisning. Med denne kunnskapen kan man finne LIST-oppgaver i læreverk hvor de ikke er presentert slik, eller man kan justere en oppgave hentet fra læreverket, slik at den får de nødvendige egenskapene. Ofte vil det være snakk om å justere rammene for oppgaven og samtidig bruke mer åpne spørsmålsstillinger, men det er kombinasjonen av de viktige egenskapene som skaper rikdom i oppgaven. Det er ikke trivielt å skape en god LIST-oppgave, uansett utgangspunkt.

8.3 Videre forskning

Det hadde vært interessant å undersøke om funnene i dette prosjektet kan generaliseres til andre LIST-oppgaver. En større analyse av mange LIST-oppgaver for ulike alderstrinn og innen forskjellige tema kan gi svaret.

Et annet spennende forskningsfelt er hvorvidt læreverk som benyttes i skolen i dag inkluderer LIST-oppgaver og om de i tilfellet bruker disse på en strategisk måte, eller om bruken av LIST-oppgaver i læreverkene er mer tilfeldig.

Denne studien forsøker ikke å gi svar på om LIST-oppgaver er spesielt godt egnet som element i tilpasset opplæring i elevgrupper med ulike læringsforutsetninger. Matematikksenteret mener det er hold i en slik påstand, men jeg kjenner ikke godt nok til eksisterende forskning på området til å konkludere, og mener uansett at videre forskning på området kan være av interesse. Det kan for eksempel være interessant å se hvordan elever med ulikt læringspotensial arbeider med oppgavene på forskjellig måte og hvilke ulike læringseffekter de får ut av slikt arbeid.

9 Referanser

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001) *Young mathematicians at work - Constructing Multiplication and Division.* Portsmouth, NH: Heinemann

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2002) *Young mathematicians at work - Constructing Fractions, Decimals, and Percents*. Portsmouth, NH: Heinemann

Fosnot, C. T. & Jacob, B. (2010). *Young mathematicians at work – Constructing Algebra.* Portsmouth, NH: Heinemann

Karlsdottir, R. & Hybertsen, I. D. (Red.). (2013). *Læring - utvikling – læringsmiljø.* Bergen: Fagbokforlaget

Lyngsnes, K. & Rismark, M. (2014). *Didaktisk arbeid* (3. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag

McClure, L., Woodham, L. & Brotwick, A. (2011). *Using Low Threshold High Ceiling Tasks.* Cambridge: University of Cambridge. Hentet fra: https://nrich.maths.org/7701

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier.* Oslo: Universitetsforlaget

Nosrati, M. & Wæge, K. (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk.* Trondheim: NTNU Matematikksenteret. Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/product/150629korr.%20Sentrale%20kjennetegn%20pa%CC%8A%20god%20l%C3%A6ring%20og%20undervisning%20i%20matematikk.pdf

Opplæringslova. (2018). Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa. (LOV-1998-07-17-61). Hentet fra https://lovdata.no/lov/1998-07-17-61

Piggott, J. (2011). *Rich Tasks and Contexts.* Cambridge: University of Cambridge. Hentet fra https://nrich.maths.org/5662

Regjeringen. (2018). *Kjerneelementer i fag.* Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/3d659278ae55449f9d8373fff5de4f65/kjerneelementer-i-fag-for-utforming-av-lareplaner-for-fag-i-lk20-og-lk20s-fastsatt-av-kd.pdf

Skott, J., Jess, K. & Hansen, C. K. (2008). *Matematik for lærerstuderende - Delta - Fagdidaktik.* Frederiksberg: Forlaget Samfundslitteratur

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Matematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Matematics Teaching in the Middle School 3(4)*, 268-275.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. & Silver, E. A. (2009). *Implementing Standards-Based Matematics Instruction – A Casebook for Professional Development – Second edition.* New York: Teachers College, Columbia University

Svingen, O. E. L. (2018). *Representasjoner i matematikk*. Trondheim: NTNU Matematikksenteret. Hentet fra: https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Elever%20som%20presterer%20lavt/P1_M4.Representasjoner%20i%20matematikk.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk* (MAT1-04). Hentet fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2015). *Vær bevisst i valg av oppgaver.* Hentet fra https://www.udir.no/Udir/PrintPageAsPdfService.ashx?pid=98254&epslanguage=no

Wolf, N. B. (2015). Modeling with mathematics - Authentic problem solving in middle school. Portsmouth, NH: Heinemann

NTNU

Kunnskap for en bedre verden