Bacheloroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Birger Pedersen

Tidlige regnestrategier i multiplikasjon

En undersøkelse av regnesrategier i multiplikasjon bruk på 3 trinn

Bacheloroppgave i LGU13002 Pedagogikk og elevkunnskap 4 (1-7)
Veileder: Øyvind Haugan Lien
Mai 2019

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Birger Pedersen

Tidlige regnestrategier i multiplikasjon

En undersøkelse av regnesrategier i multiplikasjon bruk på 3 trinn

Bacheloroppgave i LGU13002 Pedagogikk og elevkunnskap 4 (1-7)
Veileder: Øyvind Haugan Lien
Mai 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

I denne studien har jeg undersøkt tidlige regnestrategier innenfor multiplikasjon hos er tredjeklasse. Jeg var den første læreren som hadde dette temaet med disse elevene. Måten elevene ble introdusert til multiplikasjon var gjennom en åpen oppgave. Det vil si en oppgave som gir muligheter for å kunne løses på flere måter. Ingen steder i oppgaveteksten som ble presentert til elevene ble ordet multiplikasjon brukt, dette var bevist siden målet er å la dem kunne utforske og oppdage konseptet multiplikasjon på egenhånd. Det handler om å skape forståelse. Som problemstilling har jeg valgt «*Hvordan påvirker bruken av forskjellige tidlige regnestrategier i multiplikasjon elver på 3 trinns muligheter for å løse multiplikasjonsoppgaver av forskjellige nivå?*» Det jeg har kommet fram til er at tiden man bruker på en oppgave og følgefeil gjennom notasjon eller mangelen av notasjon, er de største faktorene når det kommer til muligheter for å løse vanskeligere oppgaver i multiplikasjon.

Summary

In this study, I have investigated early calculation strategies within multiplication in a third grade class. I was the first teacher to have this theme with these students. The way students were introduced to multiplication was through an open task. That is, a task that provides opportunities to be solved in several ways. Nowhere in the task text that was presented to the students was the word multiplication used, this was a conscious decision since the goal is to let them explore and discover the concept of multiplication on their own. It's about creating understanding. As a problem, I have chosen *"How do the use of different early calculation strategies in multiplication affect students in 3 grades possibilities to solve multiplication tasks of different levels?"* What I have figured out is that, the time spent on a task and following errors through notation, or the lack of notation, are the biggest factors when it comes to opportunities to solve more difficult tasks in multiplication.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

Dette er en bachelor oppgave i matematikk som fokuserer på tidlige regnestrategier i multiplikasjon. Jeg har valgt å undersøke de forskjellige regnestrategiene en tredje klasse bruker for å løse en åpen oppgave som er delt inn i to vanskelighetsgrader. Overgangen mellom oppgavene er at tallene og vanskelighetsgraden øker mens selve oppbyggingen av oppgaveteksten er den samme. Noe av det jeg skal se på da er om elevene vil generalisere oppgavene og bruke samme strategi på begge oppgavene, eller bytter de strategi? Vil elever med tunge strategier klare den vanskeligste oppgaven?

I skolen i dag er det en overgang fra pugging til forståelse. Dette vil si at matematikk ikke skal være en mekanisk handling men en utforskende prosess som bygger forståelse i faget. I kompetansemålene etter 4 årssteget står det at elevene skal «utvikle og bruke varierte metoder for multiplikasjon og divisjon(…)» (Utdanningsdirektoratet , 2019). For å nå dette kompetansemålet bruker vi åpne oppgaver som tillater utforskning av varierte strategier i matematikken. Det jeg skal se på er strategier som kommer som et resultat av en slik oppgave.

1.2. Problemstilling

Hvordan påvirker bruken av forskjellige tidlige regnestrategier i multiplikasjon elver på 3 trinns muligheter for å løse multiplikasjonsoppgaver av forskjellige nivå?

1.3. Begrunnelse for oppgavevalg

Grunnen til at jeg ønsker å utforske tidlige regnestrategier i multiplikasjon er fordi jeg ønsker å gå inn i dybden av utforskende matematikk og dens muligheter for å gi flere kreative løsninger på en oppgave. Dette er et tema som jeg ble introdusert til allerede i praksis førsteåret. Det er store muligheter for å konstruere oppgaver som tillater flere løsningsmetoder, jeg blir å se på hvordan disse oppgavene kan brukes som et verktøy for å hjelpe elevene til å bedre forstå matematikk. Det som er spennende er overgangen mellom de to vanskelighetsgradene, hvilke strategier fungerer for begge oppgavene og hvilke hindrer eleven i å kunne gå videre. Hvis så hvordan kan man veilede eleven videre. Dette er det jeg skal besvare med denne problemstillingen.

2. Teori

2.1. Elevstrategier

Det er i boken Elementary and Middle School Mathematics *Teaching Developmentally* forklart tre kategorier for Elevoppfunne strategier for multiplikasjon. Heltallsstrategier, oppdelingsstrategier og kompensasjonsstrategier. Det er hjelpsomt å plassere multiplikasjonsoppgaver i en kontekst som gir mening for elevene (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015). Med dette menes at hvis man gir elevene oppgaven å regne ut en oppgave hvor at det er 15 av en gruppe som alle skal ha 3 av en gjenstand hver, vil elevene fort regne det som 3+3+3… mens hvis vi snur tallene vil elevene regne det som 15+15+15.

2.1.1. Heltallsstrategier

Elever som ikke har blitt komfortable med å dele opp tall inn i seksjoner vil regne oppgaven i singel grupper. Ofte er disse tidlige strategiene basert på gjentatt addisjon, denne strategien er ikke effektiv eller brukbar til videre matematikk. I starten vil elevene sette opp alle tallene i en rekke og addere dem opp. Overgangen fra gjentatt addisjon finner man gjennom å veilede elevene over til dobling. Elevene må bli klar over at hvis de adderer to tall så vil de neste to tallene ha samme sum. Dobling som en distributiv egenskap er hvor elevene ser at det dobbelte av 56 er 50+50 og 6+6. Dette er riktig fordi den distributive loven er at $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, i doblingen fra eksempelet blir det da $2 \cdot (50+6) = (2 \cdot 50) + (2 \cdot 6)$. Elevene kan også bruke den assosiative loven for å forenkle regningen. Denne loven fungerer for addisjon og multiplikasjon av reelle tall. Loven sier at vi får samme svar om vi regner $(a + b) + c$ som om vi regner $a + (b + c)$, det vil si at vi får samme svar uansett rekkefølgen vi velger å regne $a + b + c$. Ved hjelp av denne loven kan elever for eksempel se at å doble 7 tiere som $2 \cdot (7 \cdot 10)$ også kan regnes som $(2 \cdot 7) \cdot 10$ (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015).

2.1.2. Oppdelingsstrategier

I disse strategiene deler elevene opp tall på varierte måter som reflekterer elevenes tallforståelse av plassverdisystemet. Å dele opp i tiere strategien er en strategi som er lik standardalgoritmen utenom det faktum at elevene alltid starter med tallet med høyest verdi. Dette er en veldig sterk mental mattestrategi (se figur 1).

En annen strategi som baseres i oppdeling er å regne mentalt ved hjelp av multiplikasjonen til 25 og 50 for så å subtrahere eller addere en liten justering av svaret. For eksempel $27 \cdot 4$ er det samme som $(25 \cdot 4) + (2 \cdot 4)$. Alle disse strategiene som er kategorisert som oppdelingsstrategier er avhengige av at eleven har en god kunnskap om den distributive egenskapen til tall (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015).

2.1.3. Kompensasjonsstrategier

Studenter og voksne er alltid ute etter metoder for å kunne manipulere tallene slik at utregningene blir så enkle som mulig. En utregning som $27 \cdot 4$ blir gjort om til for eksempel $(30 \cdot 4) - (3 \cdot 4)$. Vi gjør $27 \cdot 4$ om til noe som er enklere å regne for så justere eller kompensere svaret slik at det blir riktig. En annen strategi er å halvere for så å doble strategien som anvendes når tall som 5 og 50 er involvert. Et eksempel på dette er $256 \cdot 5$, vi halverer 256 og får 128 og dobler 5 og får 10. $128 \cdot 10$ er 1280. Siden disse strategiene er avhengige av tallene som er involvert i stykket kan de ikke bli brukt for alle utregninger (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015).

2.2. Modeller for tanken

Det å kunne lage seg et bilde av det man skal regne ut for eksempel av to poser med epler som slås sammen til en i addisjon, eller grupper med samme antall i hver gruppe i multiplikasjon. Gir oss muligheten til å utvikle varierte regnestrategier, gjøre overslag og vurdere svar. «Mange elever tenker ubevist på bilder av regnestykket når de skal komme med et overslag eller regne skriftlig eller i hodet. Disse bildene er grunnlaget for tallforståelse og regning…» (Enge & Valenta, 2012, s. 8). Å se for deg matematikk som bilder kalles av Enge og Valentina *modeller for tanken*. Det er viktig at slike modeller for tanken blir brukt av elevene på en bevist måte slik at de kan bruke dette som et verktøy for matematikklæringen.

2.3. Hvordan lage en god oppgave?

Tekstoppgaver har lange tradisjoner innenfor matematikk undervisning, dette er for at elevene skal oppdage nytten av faget i hverdagslige kontekster. I forhold til regning er det viktig at elever klarer å gjenkjenne regneoperasjonene som tekstoppgaven spør etter. I forhold til tradisjonelle tekstoppgaver påpeker forsont og dolk betydningen av regnehistorier for å gi elevene muligheten til å kunne organisere informasjon, legge merke til og utforske mønstre og for å kunne utvikle regnestrategier og argumentere for disse (Fosnot & Dolk, 2001).

2.3.1. Rike matematikkoppgaver

MAM (Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning) er et program for lærere som matematikksenteret har gjennomført. Her vil lærere samarbeide om å utvikle sin undervisningskompetanse i matematikk. I MAM er problemløsning blitt definert som «en oppgave der elevene ikke umiddelbart ser hvordan man kan komme videre i løsningsprosessen, og ingen kjent løsningsmetode kan brukes». Målet med en oppgave som dette er å sette søkelyset til strategier for matematisk problemløsning (Matematikksenteret, 2015).

Rike matematikkoppgavers innholds punkter:

- Introdusere viktige ideer eller løsningsstrategier
- Være lett å forstå og alle skal kunne komme i gang og ha muligheter til å jobbe med den (lav inngangsterskel)
- Oppleves som en utfordring, kreve anstrengelse og tillates å ta tid
- Kunne løses på flere ulike måter, med ulike strategier og representasjoner
- Kunne initiere en faglig diskusjon som viser ulike strategier, representasjoner og ideer
- Kunne fungere som brobygger mellom ulike faglige områder
- Kunne lede til at elever og lærere formulerer nye interessante problemer (Hva hvis…? Hvorfor er det sånn…)
  (Matematikksenteret, 2019)

2.4. Representasjoner

Elever kan bruke flere typer av representasjon for å løse en oppgavene. Måtene å representere et problem er noe Bruner (1996) har studert. Hvordan vi representerer/utrykker matematiske konsepter er ifølge han delt inn i tre deler.

Først har vi enactive, som på norsk er handlinger vi utfører i det fysiske som gjennom motoriske egenskaper. I matematikken kan man tenke på å telle på fingrene som en enactive representasjon.

Videre har vi iconic som er en representasjon gjennom figurer eller tegninger. I matematikken kan man tenke at man skal finne et antall med epler. I stedet for å skrive antallet med symboler tegner man antallet.

Til slutt har vi symbolic som er når eleven har gått over til å bruke symboler som en representasjon for et objekt eller en mengde. Så i stedet for å tegne 5 juice kartonger skriver eleven 5 juice.

3. Metode

3.1. Kvalitativ metode

I denne bacheloren har jeg problemstillingen: *Hvordan påvirker bruken av forskjellige tidlige regnestrategier i multiplikasjon elver på 3 trinns muligheter for å løse multiplikasjonsoppgaver av forskjellige nivå?* Jeg har valgt å bruke en kvalitativ metode for å finne datamateriale og analysere det. En kvalitativ metode tar for seg noen får datasett men analyserer hvert datasett nøye (Cohen, Manion, & Morrison, 2007). Jeg ønsker i grunn å se på hvordan elevene arbeider for å finne svar på problemstillingen min, jeg vil altså gjennom en naturlig setting utforske menneskelige prosesser, som ifølge Cohen et al (2007), også er et trekk ved en kvalitativ studie. Jeg kan derfor ikke si noe om elevenes strategier på bred basis men mer om elevene i denne konteksten.

I studien min vil jeg se på hva som kjennetegner elevenes tidlige regnestrategier i multiplikasjon, og hvordan man med kunnskap i dette da kan jobbe videre med å tilpasse opplæringen slik at elevene kommer videre i strategiene de bruker. Når det er snakk om å tilpasse opplæringen er det ikke snakk om tilpasninger for individet men tilpasninger som vil hjelpe gruppen som en helhet (Utdanningsdirektoratet, 2018). For å kunne si noe om tilpasninger ut ifra regnestrategiene de bruker må jeg analysere strategiene til elevene og skille dem fra hverandre i kategorier og koder. Ved hjelp av de tre kategoriene som Van de Walle (2015) beskriver kan jeg da se på hva som vil hjelpe elevene over til en mer avansert strategi som gir dem muligheten til å løse vanskeligere multiplikasjonsstykker.

Jeg har valgt å skrive om denne problemstillingen grunnet en interesse for åpne oppgaver som gir elevene muligheten til å kunne utvikle varierte strategier og en dypere forståelse av hva de egentlig gjør i oppgavene. Å gå i dybden av noen få oppgaver vil gi meg innsikt i hvordan jeg kan gå videre med elever som er på forskjellig nivå og har forskjellige strategier. For å kunne hjelpe elever videre må jeg vite hva som gjør hver strategi funksjonell og hvordan man kan utvikle strangene videre for å få til vanskeligere oppgaver.

3.2.Konteksten

Studiens empiri er basert i to oppgaver gitt til elevene i en 60 minutters matematikk økt som foregår i klasserommet. Arbeidsøkta i matematikk ble gjennomført i uke 7, år 2019 i en periode hvor elvene jobbet med steinalderen som overhengende tema for perioden, og overslag som tema i matematikken.

3.2.1 Elevgruppa og læreren

Undersøkelsen ble gjennomført på 3. trinn på en barneskole som består av ca. 450 elever. Trinnet bestående av 60 elever fordelt på 4 grupper, jeg fulgte min praksislærers gruppe på 17 elever, 10 gutter og 7 jenter.

Faglig i matematikken er elevene gode til å resonere og forklare hva de gjør og hvorfor de gjør det. Matematikkundervisningen har vært fokusert inn på utforskning, diskusjon og spørsmål rundt matematikken. Elevene har derfor erfaringer fra tidligere med utforskende matematikk. Praksislæreren min har lang erfaring innenfor matematikk undervisning og spesialpedagogikk. Hun er faglig ansvarlig for matematikkundervisningen til hele tredje trinn og lager derfor ofte opplegg som hun deler, og gjennomgår med de andre lærerne på trinnet slik at de kan bruke det i sin undervisning.

3.3. Begrunnelse for oppgaveoppbygging

Oppgavene er bygget opp med et mål om å være åpne og fleksible oppgaver i form av problemløsning i forhold til matematiksenterets MAM prosjekt sin definisjon. Målet med oppgavene er at elevene skal bli ført inn på tidlig multiplikasjonsregning uten at de kan standardalgoritmen og uten at oppgaven krever kunnskap om multiplikasjon for å løses. Man kan si at oppgavene er rike matematikkoppgaver som beskrevet i teoridelen. Oppgaven har en lav inngangsvinkel, krever anstrengelse underveis, og er åpen for flere strategier og diskusjon rund disse. Med utgangspunkt i Fosnot og Dolk (2001) sin versjon av en tekstoppgave er oppgaven utformet med hensikt å gi elevene muligheten til å kunne organisere den informasjonen de får. Det som skjer i regnefortellingen skal være mulig å se for seg i virkeligheten slik at elevene skal kunne lage seg et bilde av oppgaven eller som Enge og Valenta (2012) kaller *modeller for tanken.* Oppgavene tillater strategier av forskjellige nivå, de kan løses gjennom for eksempel gjentatt addisjon, tegning, eller ved hjelp av standardalgoritmen. Friheten er gitt bevist med utgangspunkt i å kunne finne et svar på problemstillingen.

3.3.1. Oppgaver

1a

Elevene i klasse 3c på Kråkeskole skal kjøpe inn varer til en klassetur. De er 11 elever. Lærer Pål sier at elevene skal ha 3 juice hver, 2 bagetter og 5 druer. Hvor mange Juice, bagetter og druer trenger han å kjøpe inn for at alle i klassen får 3 juice, 2 bagetter og 5 druer?

1b

Elevene i klasse 3c er blitt slått sammen med elevene fra klasse 3a. Lærer Pål og Grete skal nå kjøpe inn varer til klasseturen sammen. De er nå 26 elever. Lærer Pål sier at elevene skal ha 4 juice hver, 3 bagetter og 6 druer. Hvor mange Juice, bagetter og druer trenger de å kjøpe inn for at alle i klassen får 4 juice, 3 bagetter og 6 druer?

3.4.Gjennomføring av opplegg

Jeg samlet elevene i kroken som er en samlingsplass fremst i klasserommet som brukes for å få med seg alle elevene på beskjeder, og leste oppgaveteksten til dem. Jeg forklarte elevene hva vi ønsket at de skal gjøre. Et av målene mine i kroken er å oppmuntre elevene til å tenke over hva de gjør og hvorfor de gjør det. Det blir informer om at vi kommer rundt og ser på løsningene deres og tar notater, slik at de er forberedt på at vi blir å se på oppgavene deres underveis. Vi ønsker og få høre mest mulig om hvorfor de bruker de strategiene de gjør og deres tanker om strategien, for å oppnå dette ble det i kroken fortalt at de må huske hva de har gjort og hvorfor de gjorde det. Elevene ble oppmuntret til å skrive alt deg gjør selv om at de regner i hodet. Oppgavene var skrevet ut på et A3 ark som ga elevene stor plass til å utfolde seg. Etter all informasjonen ble det spurt om de ville høre oppgaveteksten høyt en gang til, dette sa de ja til og teksten ble lest en gang til.

3.4.1 Intervjuguide

Underveis i timen har jeg har notert hvordan elevene takler den nye oppgaven. Bruker de samme strategi? Skaper strategien problemer underveis i oppgaven? Elevene ble spurt underveis i arbeidet om deres tanker og følelser rundt oppgaven. Spørsmålene under er de som ble brukt underveis i timen.

- Hva synes du om oppgaven?

- Er det deler av oppgaven som er spesielt vanskelig?

Å få høre hva elevene synes om oppgaven er en måte for meg å finne ut om det er noe med selve oppgavens oppbygging som skaper utfordringer som ikke er knyttet til problemstillingen min og dermed kan gi meg falske resultater.

Gjennom å spørre eleven om det er deler av oppgaven som eleven synes er spesielt vanskelig, kan jeg få innputt på om overgangen til større tall i oppgave b har gitt noen utfordringer knyttet til strategien elevene bruker. Jeg kan se hvilken strategi eleven bruker, og hvis eleven sier at oppgaven for eksempel er vanskelig eller for tidkrevende kan det ha en sammenheng med hvilken strategi eleven bruker.

3.5.Analysemetode

I analysen av elevoppgavene skal jeg først få en oversikt over materialet, jeg gjør dette med utgangspunkt i Nilssen (2012) sin definisjon av åpen koding. Først skal jeg finne koder i datamaterialet, så skal jeg klassifisere og sette navn på de viktigste mønstrene i datamaterialet altså kategorisere kodene, Denne prosessen kalles åpen koding (Nilssen, 2012). Videre ser jeg på noen elevoppgaver og analysere dem med utgangspunkt i strategiene de bruker og knytter hver av dem til problemstillingen. I denne analyseprosessen tar jeg utgangspunkt i tre ting. Hvor effektiv er strategien i forhold til tid? Tiden eleven bruker på å komme fram til et svar kan være relatert til strategien eleven bruker, en strategi som tar mye tid vil hindre elevene i å kunne gjøre større oppgaver av samme type i løpet av en skoletime. Spørsmål to som jeg stiller meg selv er det mange følgefeil? Følgefeil er feil som skjer underveis i utregningene, hvis strategien ikke tillater eleven å finne feilen i oppgaveløsningen vil det være en hindring for å kunne løse mer komplekse oppgaver. Tilslutt ser jeg på om det er det utvikling underveis i oppgaven? Utviklingen av nye strategier underveis i oppgaveløsingen vil gi meg en innsikt i overgangene fra en strategi til den neste. Og kan knyttes opp mot effektivisering av strategier for å enklere kunne løse større oppgaver.

3.6.Kritikk og refleksjon av metode

Et problem som dukket opp under innhentingen av datamateriale var at enkelte elever hadde misoppfattet poenget med oppgaven. Enkelte elever valgte å finne svaret på alle gjenstandene til sammen og ikke separert i tre deler. Dette ble oppdaget når jeg spurte elever om hva de synes om oppgaven, responsen jeg fikk var «Det var enkelt å finne svaret jeg bare la sammen druer bagetter og juice og fikk 110». Jeg oppdaget her at jeg burde ha tydeliggjort mer i kroken at det skulle være tre svar per oppgave.

4. Analyse og drøfting

Som jeg har snakket om i metodedelen skal jeg kode materialet ved hjelp av kvalitativ metode. I dette kapittelet skal jeg analysere oppgaver som viser de forskjellige strategiene elevene har brukt innenfor hver av kategoriene jeg har laget. I noen av kategoriene blir jeg å analysere mer en bare en oppgave for å få fram forskjeller som skiller en «god» og en «dårlig» struktur. Med det mener jeg at to elever kan bruke samme strategi men at strukturen gjør at en av dem ikke klarer oppgaven. Med sammenheng til problemstillingen, *Hvordan påvirker bruken av forskjellige tidlige regnestrategier i multiplikasjon elver på 3 trinns muligheter for å løse multiplikasjonsoppgaver av forskjellige nivå?*

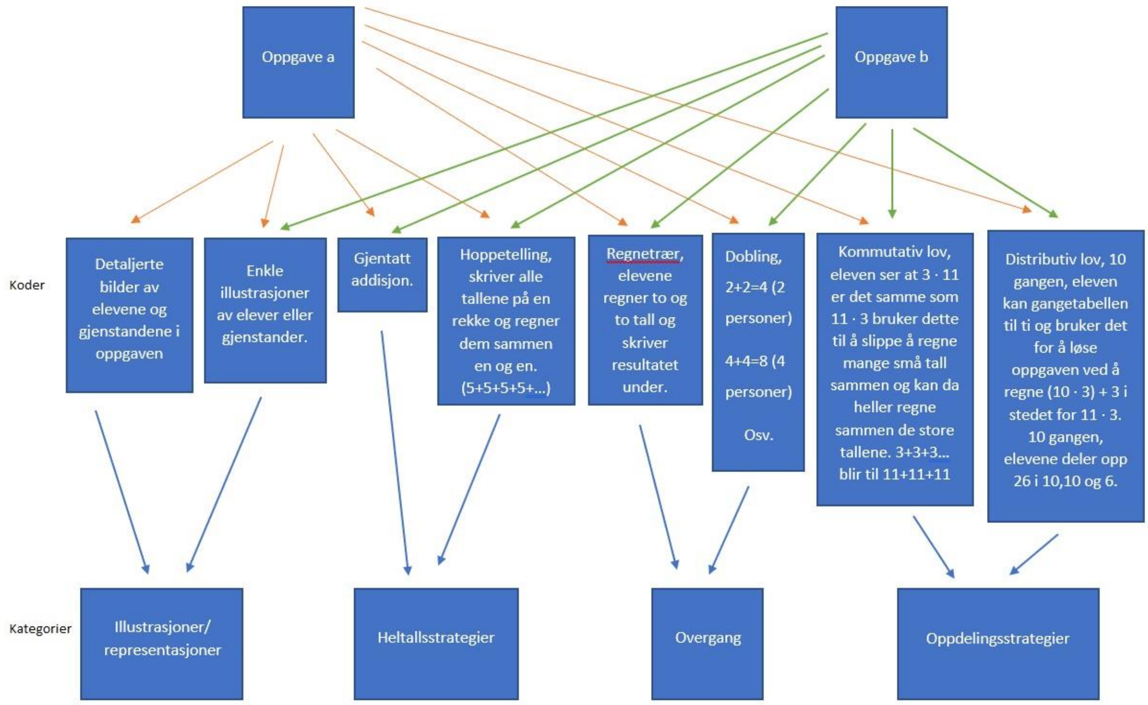
4.1.1. Koding av materialet

Siden jeg har to oppgaver koder jeg dem hver for seg først. Oppgave a har tre trekk ved seg som går igjen, det er lustrasjoner, regnetrær og gjentatt addisjon. Innenfor illustrasjoner er det flere metoder elevene har brukt noen tegner detaljerte bilder av det de skal regne mens ande bare tegner så enkelt som mulig bare for å ha en representasjon av hva som skjer, noe som skiller de to gruppene med illustrasjoner et at de som lager enkle illustrasjoner ikke nødvendig vis tegner både gjenstandene og elevene i oppgaven. Regnetrærne er strukturert rundt dobling, det vil si at elevene skriver 5+5+5+5 for så å skrive 10+10 under og 20 under det, Noen av elevene skriver på arket at de har brukt hoppetelling når de lager trær i disse tilfellene har eleven ikke laget treet helt ned til et tall, men stoppet når den har kommet til et rundt tall som er lett å regne med. Et eksempel på dette er en av elevene som har koblet at 11 femere er det samme som 5 tiere + 5 for så å regne 10+10+10+10+15 for å finne svaret. Dette er en overgang til gjentatt addisjon som går igjen hos flere av elevene, de skriver alle tallene de skal regne sammen på en rekke og regner seg oppover til svaret. Oppdelingsstrategi er noe jeg bare ser en av elevene på oppgave a har brukt. eleven har regnet (10*3)+3, (10*2)+2 og (10*5)+5. Dette er bruk av kommutativ lov.

Over på oppgave b er flere av de samme strategiene i bruk men med noen effektiviseringer, tallene er større og de av elevene som har illustrert oppgaven har brukt enkle illustrasjoner som et smilefjes for å representere elevene. Andre elever har gått over til oppdelingsstrategier som (10*4) + (10*4) for å finne svaret på 4*26. Noen elever vier kunnskaper rundt multiplikasjon ved å bruke 10 gangen for å finne svaret. Regnertær og gjentatt addisjon faller sammen til en strategi for de av elevene som har klart å fullføre oppgave to med disse teknikkene. Flere av elevene som har prøvd på dette har ikke klart å gjøre oppgave b. Struktur kommer fram som en viktig del av å kunne løse oppgaven.

4.1.2. Kategorisere

Under er en oversikt over ting jeg finner i datamaterialet. Jeg har valgt å dele elevenes regnestrategier inn i 4 kategorier.



Illustrasjoner er et verktøy elevene bruker for å lage seg et bilde av det de skal regne ut (Enge & Valenta, 2012). Dette velger jeg å kategorisere siden det er en sammenheng mellom illustrasjonen som er brukt og hvor langt elevene har kommet i oppgavene. Å bruke illustrasjoner er den tidligste fasen av strategiene og er velig tidkrevende.

Heltallsstrategier er strategier som elevene bruker fordi de ikke har blitt komfortable med å dele opp tall inn i seksjoner her finner vi mye gjentattaddisjon og metoder for å regne gjentatt addisjon (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015).

Overgangen mellom heltallstrategier og oppdelingsstrategier inneholder dobling som nøkkelkomponent elevene er her på vei imot en oppdelingsstrategi. Men flere av dem er ende usikre på om de gjør det riktig og faller tilbake til gjentatt addisjon (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015).

Oppdelingsstrategier er når elevene starter å bruke den distributive egenskapen til tall. Disse strategiene varierer på elevens tallforståelse av plassverdisystemet (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015). Dette er den minste kategorien men like viktig som de andre i det store bildet siden disse strategiene blir viktige senere i matematikken.

4.2. Analyse av elev besvarelser

Her vil jeg analysere og drøfte med utgangspunkt i elevbesvarelsene. I denne delen vil jeg referere til vedlegg underveis i teksten. Det kan være til hjelp å finne fram vedleggene bakerst i heftet for å få et klarere bilde av hva som blir snakket om i denne delen. Jeg velger å drøfte deler av funnene underveis i analysen med utgangspunkt i problemstilling.

4.2.1. Illustrasjoner

Flere av elevene har valgt å bruke illustrasjoner for å kunne hjelpe dem med å skape seg et bilde av hva som skal skje i oppgaven. Ifølge Enge & Valenta (2012) er det å kunne skape seg et bilde av hva man skal gjøre er noe elevene gjør ubevist, om man illustrerer eller bare gjør det i hodet så er det uansett til hjelp for utregningen. Utrykket *modeller for tanken* er noe jeg vil bruke i denne sammenhengen. I oppgaven er det gitt et antall elever og tre gjenstander som elevene skal ha med seg på en tur. Som en modell for tanken har da noen av mine elever valgt å tegne. Jeg skal se på en elevbesvarelse innenfor illustrasjoner. Jeg velger å gi eleven som har besvart oppgaven navnet Nils.

Nils har brukt lang tid på oppgaven sin, han brukte ¾ av timen på oppgave a. Han har kommet fram til det riktige svaret og har tegn til en effektivisering fra å finne antall juice til å finne antall bagetter og så enda en effektivisering når han går over til antall druer (se vedlegg 2). representasjonen endrer seg også fra iconic til symbolic. For å finne antall juice bruker han illustrasjoner som en modell for tanken gjennom å tegne 11 personer på høyre side av arket. Han har så videre tegnet tre og tre kartonger sammen i grupper og markert hvilken person som skal ha de tre juice kartongene. Dette er en illustrasjon med konkreter som eleven bruker bevist som et verktøy for å finne svaret. Nils teller antall kartonger for å finne svaret og skriver tall i kartongene underveis slik at han ikke teller en kartong to ganger. Når han skal finne antall juice kan man legge merke til at han ikke teller gruppene sammen. Se på gruppen som er i midten som inneholder tallene 16, 20 og 24. Her viser han at grupperingen skjedde før tellingen. Nils finner antall bagetter gjennom å lage seg en tallstreng, her bruker han hopptelling noe som er en overgang til heltalsstrategier. Han starter med 2 for så å legge på 2 for å få 4, slik fortsetter han til han har kommet til 22. Under hvert tall (antall bagetter) skriver han hvor mange personer han har dekket med det antallet bagetter (se bunnen av vedlegg 2 venstre side). Tilslutt skal han finne ut hvor mange druer han trenger. I vedlegg 2 nede i høyre hjørne kan vi se denne prosessen. Her viser han at han er trygg nokk til å kunne dele opp tallene. Han bruker kunnskaper rundt tallet 5 for å finne svaret. Han deler personene opp i 4 grupper, 3 grupper med 3 personer og en gruppe med 2 personer. Han vet at 3*5 er 15 og at 2*5 er 10 og bruker dette til å komme fram til antallet druer de trenger å ha med seg. Dette er en effektivisering av hva han gjør når han skal finne juice fra det Bruner (1996) kaller iconic til symbolic. Han grupperer både personene og gjenstandene i tall som er enkle og regne med. Senere vil jeg komme tilbake til Nils sin oppgave b også.

4.2.2. Heltallsstrategier

I heltallsstrategiene er gjentatt addisjon den strategien som flest elever har brukt på oppgave a. Gjentatt addisjon har noen ulemper som kommer fram tydeligst når vi går over til oppgave b. Jeg skal derfor på heltallsstrategier se på en elevbesvarelse av oppgave b som er ren gjentatt addisjon. Eleven som har gjort denne oppgaven gir jeg navnet Kari. I følge Van de Walle (2015) er disse strategiene lite effektive og ikke brukbare videre i matematikken. Gjennom oppgaven til Kari kan vi se på noen av grunnene til dette.

Kari sin oppgave finner du i vedlegg 3 (hun speiler 6 tallene sine), her kan vi se at Kari skriver alle tallene i single grupper. Det er strukturert slik at alle tallene står på en rekke og hun adderer dem opp. En problemstilling ved Karis metode er at det er vanskelig å holde oversikten over så mange tall på en gang. Følgefeil kan lett oppstå under utregningen og det er vanskelig for en lærer å kunne si hvor det er blitt regnet feil siden hun ikke har notert noen svar underveis i utregningen. Svaret på oppgavene er markert med grønt (se vedlegg 3), vi kan se at hun nesten har klart det men at det på et tidspunkt har blitt en regnefeil på både Juice og Bagetter. Denne strategien krever mye konsentrasjon og en feil underveis er vanskelig å rette opp uten å starte på nytt med gjentatt addisjon.

4.2.3. Overgang mellom heltallsstrategier og oppdelingsstrategier

I overgangen mellom heltallsstrategier og oppdelingsstrategier finner vi dobling. I følge Van de Walle (2015) skal man som lærer lede elevene inn på dobling hvis de siter fast på heltallsstrategier for å gi dem en overgang til oppdelings strategier. Jeg skal nå se videre på Nils sin oppgave b og hvordan han har fått til overgangen til dobling som strategi. I vedlegg 4 kan vi se Nils sin oppgave b, siden Nils bukte så langt tid på oppgave a har han bare hatt tiden til å finne svaret på antall Juice på b.

Med første øyekast kan strategien til Nils se kaotisk ut. Det han har gjort er å skrive tjueseks firere som han dobler til tretten åttere. Videre dobler han åtterne til 16, legg merke til at tretten er et oddetall med åttere derfor velger Nils å dobbel 12 av dem og lar en åtter bli stående. Videre dobler han 16 til 32, nå sitter han igjen med 3*32, tre er et oddetall og han velger å først doble 32 og får 64 for så å legge til 32. Nå står han igjen med 96 og 8 som han legger sammen og får svaret som er 104. I denne dobblingsstrategien tegner Nils det jeg har i kodingen kalt for et regnetre denne modellen er et hjelpe middel for elevene som tydeliggjør stegene i utregningen.

4.2.4. Oppdelingsstrategier

Her skal jeg se på Heidi og Kristian som har brukt sine kunnskaper rundt tallenes egenskaper for å løse oppgavene. Først skal vi se på Heidi sin oppgaveløsning og hennes metode for å komme fram til svarene på oppgave b. Heidi sin oppgaveløsning er vedlegg nummer 5.

Heidi har brukt kunnskaper om hele tiere og den lille gangetabellen for å løse oppgavene. dette er en helt annen tanke måte en de av elevene som har brukt gjentatt addisjon og dobling. la oss først studere metoden brukt for å finne svaret på antall juice. Her har hun i realiteten regnestykket $4 \cdot 26$, hun takler dette med å regne $(4 \cdot 10) + (4 \cdot 10) + (4 \cdot 6)$. Dette overasket meg når jeg gikk rundt i klasserommet. Jeg spurte Heidi hvordan hun viste at hun kunne gjøre det slikt. I respons fikk jeg høre at Heidi hadde den lille gangetabellen hjemme og kunne gange alt opp til 10. Hun hadde også forkunnskaper kunnskaper om at rekkefølgen ikke hadde noe å si og at hun derfor kunne gange det hun kalte «de hele tallene» først. Heidi bruker den distributive lov som sitt verktøy, og ved hjelp av oppdelingen kan hun bruke kjent kunnskap om multiplikasjon for å løse oppgavene. Samme strategien blir brukt en gang til når hun skal regne ut bagetter, men med en tydeliggjøring som jeg spurte henne om når hun fant antall juice. Denne gangen har hun husket å få med de 18 «ikke hele» i utregningen. Hun har igjen brukt ti gangen som utgangspunkt for løsningen.

Når vi kommer til druer begynner ting å bli interessant, Her har Heidi benyttet samme strategi og fått feil svar. Noe har skjedd i overgangen og vi kan se at hun har kommet fram til tallet

64. Jeg vet ikke hvor hun har fått dette tallet fra. Vi kan se nederst i høyre hjørne at hun fortsatt bruket kunnskaper om plassverdisystemet for å regne ut at 64+64 er 120 og 8. Hun har riktig regnet ut at $6 \cdot 6$ er 36 og jeg kan da anta at det er en regnefeil koblet til $6 \cdot 10$ som gir Heidi 64 i stedet for 60.

Videre skal jeg nå kort se på en oppgave av Kristian som i sin oppgaveløsning viser hvor mye det har å si å kunne tolke en oppgave med hensyn til den kommutative loven. Kristians oppgave er i vedlegg 6.

Det jeg ønsker å sette fokus på her er Kristians forståelse av oppgaven. Han er den eneste eleven som har kommet fram til at man kan snu regnestykket. I stedet for å ta gjentatt addisjon med fire 26 ganger ser han at han kan i stedet kan ta 26 fire ganger. Dette er bruk av den kommutative loven som gjør regnestykket betydelig mye enklere å regne. Videre har han regnet hele tiere og enere for seg selv i sin egen variant av et regnetre. Over regnestykke for antall juice kan vi se at Kristian har notert $26 \cdot 4 = 104$. Han har altså noen forkunnskaper rundt multiplikasjon og dens betydning når vi ser det i sammenheng med utregningen unner. Svarene på alle tre regnestykkene er korrekt og gjennom å dele opp stykkene i enere og tiere viser Kristian at plassverdisystemet er noe han har kontroll på.

4.3. Drøfting

I denne drøstingsdelen skal jeg knytte funnene fra analysen opp imot problemstillingen. Målet er å kunne komme fram til noen svar på *Hvordan påvirker bruken av forskjellige tidlige regnestrategier i multiplikasjon elver på 3 trinns muligheter for å løse multiplikasjonsoppgaver av forskjellige nivå?*

Først skal vi se på Nils som er et godt eksempel på utvikling av strategier gjennom en oppgave. Han starter med å bruke illustrasjoner, men gjennom oppgavene finner han metoder som gjør det enklere å regne underveis. Han er innom både heltallsstrategier og oppdelingsstrategier. Denne utviklingen av strategier gir han muligheten til å kunne potensielt løse hele oppgave b. Nils utvikler strategiene underveis og dette gjør at oppgavene blir enklere å regne. Med tanke på oppgavens oppbygning viser Nils hvordan en rik matematikkoppgave skaper muligheter for å «kunne løses på flere måter, med ulike strategier og representasjoner» (Matematikksenteret, 2015). Nils viser at han har klart å gå fra det Bruner (1996) kaller iconic til symbolic representasjon på egenhånd, og gjennom oppgavene har han kommet fram til dobling som en strategi for å løse multiplikasjonsoppgaver av forskjellig nivå. Tiden ble for knapp for Nils grunnet at den første strategien han brukte tok lang tid, men han viser her at begrensningene i den første strategien fikk han til å bytte strategi. Knyttet opp imot problemstillingen viser Nils at for han er valg av strategi viktig når det kommet til tiden han bruker på å løse oppgaven, nivået på oppgave b krever at han må effektivisere strategien for å løse vanskeligere oppgaver. Hadde han brukt illustrasjon hele veien ville han nokk ikke ha kommet seg til oppgave b. Knyttet opp imot problemstillingen har Nils vist at tiden man bruker på en strategi er en faktor når det kommer til å løse oppgaver av forskjellig nivå. Illustrasjoner som en ren strategi tenker jeg at vil bli upraktisk og uoversiktlig jo større tallene blir. Viktig å påpeke her at modeller som posemodellen og arealmodellen ikke er relatert til den type illustrasjoner som er bitt brukt av Nils og de ande elevene i denne undersøkelsen.

Neste er Kari og hennes besvarelse av oppgave b. Denne oppgaven har større tall nettopp for å se om enkelte strategier slutter å fungere. Kari sin besvarelse av oppgave b viser at for hun har det noe å si hvilken strategi hun bruker. Gjentatt addisjon gir feil svar ikke for at strategien ikke fungerer i teorien, men fordi den er tung å bruke og det vanskelig å kontrollere at alt er regnet riktig. Karis strategi fungerer for små tall men blir fort tyngre jo flere tall som må adderes. Hun har ikke notert underveis noen av svarene sine, dette viser at hun har gjort all utregning i hodet. Ren hoderegning fungerer bra i enkelte situasjoner men har sine begrensinger. Hvis man tar og ser på Kari sin regnestrategi så kan man ut ifra svarene hun produserer, og vanskelighetsgraden rundt å kunne finne feilene hun gjør. Trekke en konklusjon om at gjentatt addisjon i denne formen ikke er en regnestrategi som man kan bruke på et høyere nivå av multiplikasjon. Mulighetene for videre arbeid på vanskeligere oppgaver er begrenset med strategien til Kari.

I Kari sitt tilfelle er det ifølge Van de Walle (2015) lurt at du som lærer retter hun inn mot dobling i videre arbeid av slike oppgaver. Jeg kan etter å ha analysert Karis oppgave forstå hvorfor Van de Walle (2015) mener at dobling er det neste steget man kan føre eleven inn på. Men samtidig tenker jeg at bare noe så enkelt som å skrive ned svarerne for hver utregning vil hjelpe Kari i stor grad i stedet for å forsøke å ta alle utregningene i hodet. Måten vi noterer på i matematikk er hovedsakelig ment å være et hjelpemiddel for å kunne holde oversikten over hva vi gjør. I en læringssituasjon skal det ikke mye til for å kunne hjelpe elever videre med notasjon. For meg er det åpenbart å skrive svarene jeg kommer fram til underveis slik at jeg ikke glemmer dem, men det trenger ikke å være like åpenbart hvis jeg aldri har blitt fortalt det eller har sett nytten av å gjøre det.

Heidi og Kristian er på et høyere nivå en gjennomsnittet i denne undersøkelsen. Deres strategier åpner dører for å kunne løse vanskeligere oppgaver. Både Heidi og Kristians strategier er baserte i tallkunnskaper som gir dem muligheten til å kunne manipulere regnestykkene slik at de blir enklere. Begge elevene har gjort hele oppgave a og b med tid til overs. Jeg vil påstå at strategiene deres er effektive med tanke på tiden brukt. Det disse elevene viser aller mest er hvor mye forståelse og forkunnskaper har å si i matematikken. Det de har vist at de kan gjøre er ikke ting som har blitt gjennomgått på skolen. Man kan derfor anta at hjemmet har en betydelig rolle når det kommer til hvordan disse elevene har fått denne kunnskapen.

En av tingene med denne undersøkelsen som jeg finner spesielt spennende er at elevene har lite til ingen forkunnskaper om multiplikasjon noe som gjør at deres metoder for å løse oppgavene varierer mye. Kari viser det som man kan se på som det mest grunnleggende nivået, Nils viser utvikling gjennom oppgavene mens Heidi og Kristian viser nivået som resten av elevene vil komme til over tid. En av grunnene til at jeg undersøker tidlige regnestrategier i multiplikasjon og deres innvirkninger på videre arbeid er for å få et innblikk i hvordan man skal kunne hjelpe elevene videre. For å kunne hjelpe dem videre må forstå hva som er begrensningene og styrkene i strategiene. Karis strategi er en enkel strategi som fungerer bra på oppgaver med små tall, ulempen er at den blir fort tung og uoversiktlig jo større oppgaven blir. Nils sin illustrasjon gir et bra bilde av hva oppgaven egentlig spør om og hva som skjer praktisk sett. Ulempen er at den tar lang tid å gjennomføre. En annen mulig fordel med Nils sin illustrasjon kan være at den hjalp han til å finne de andre strategiene siden han nå hadde laget seg en modell for tanken som han kunne ta utgangspunkt i.

Når jeg ser på problemstillingen min *Hvordan påvirker bruken av forskjellige tidlige regnestrategier i multiplikasjon elver på 3 trinns muligheter for å løse multiplikasjonsoppgaver av forskjellige nivå?* Føler jeg at det er to store faktorer som har kommet fram i denne studien. Tiden elevene bruker på gitt strategi, og måten elevene skriver ned det de gjør. Strategier som krever mye tid hindrer elever i å fullføre oppgavene sine. Samtidig gir strategier som bruker lite tid elevene muligheten tå kunne gjøre større oppgaver. Måten elevene noterer ned det de gjør har mye å si når det kommer til å kunne finne følgefeil underveis i oppgavene. Regnestrategien i seg selv trenger ikke å være avgjørende når det kommer til å få riktig svar som Heidi demonstrerer når hun skal regne druer.

Jeg føler det er mere i denne undersøkelsen som kan bli utforsket og det er muligheter for å kunne gå dypere inn i temaet. Svaret på problemstillingen er ikke et bilde på helheten. Studien er bare et lite inn drypp i det store bildet. Konklusjoner og antagelser tatt i denne studien kan ikke generaliseres for alle tredje klassinger som skal lære seg multiplikasjon for første gang. Grunnen for dette er at studien er for liten og representerer bare en klasse på en skole. Studiens steke side ligger derimot i dybden man kan få på enkelt oppgaver som ikke ville ha vært mulig i en større undersøkelse. Man kan se på denne studien som et lite bidrag til forskning innenfor tidlige regnestrategier i multiplikasjon.

5. Avslutning

I denne studien har jeg forsket på *Hvordan påvirker bruken av forskjellige tidlige regnestrategier i multiplikasjon elver på 3 trinns muligheter for å løse multiplikasjonsoppgaver av forskjellige nivå?* Ved hjelp av en åpen oppgave har jeg samlet inn data fra en tredjeklasse med mål om å finne noen svar på dette. Det jeg har funnet er at det er mange faktorer som spiller inn og at problemstillingen dermed ikke kan besvares på et generelt nivå bare utfra funnene i denne studien. Elevene er på forskjellige nivåer som reflekteres i regnestrategiene de bruker. Forkunnskaper er noe av det som virker å skill elevene mest.

I innledningen sa jeg at «Det som er spennende er overgangen mellom de to vanskelighetsgradene, hvilke strategier fungerer for begge oppgavene og hvilke hindrer eleven i å kunne gå videre.» ut ifra kodingen kan det se ut som at alle strategiene kan bli brukt på begge oppgavene. Oppgaven har flyttet seg fra hvilke strategier fungerer til hvilke strategier er mest praktiske i bruk. Overgangen mellom oppgavene fikk fram et poeng som jeg hadde forventet på forhånd. Gjentatt addisjon som en strategi i multiplikasjon fungerer ikke på større tall. Videre er det dobling og regnetrær som dominerer i elevløsningene og begge disse strategiene har fungert bra på begge oppgavene. Som en tanke for videre arbeid ville jeg ha endret tallene i oppgave b til høyere tall og oddetall. Høyere tall kan gjøre at man finner grensen for regnetrær som baserer seg i stor grad på gjentatt addisjon. Oddetall vil kunne gi nye innblikk i hva elever velger å gjøre når tallene ikke går opp i dobling.

I denne studien vil jeg konkludere med at overgangsstrategier og heltalsstrategier utenom ren gjentatt addisjon ikke gir noen hindringer for oppgaver av det nivået som ble testet i denne studien. Tiden de bruker på disse strategiene er ikke ekstrem nokk til at jeg vil kunne si at de ikke fungerer og jeg har ikke observert flere regnefeil på noen av disse strategiene. Det er to strategier som man kan argumentere for at skaper en reell hindring, ren gjentatt addisjon som vist i vedlegg 3 grunnet regnefeil. Og illustrasjoner grunnet tiden det tar.

Referanser

Bruner, J. (1996). *The culture of education.* Cambridge: Harvard University Press.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6. utg.). London: Routledge.

Enge, O., & Valenta, A. (2012). *Tangenten.* Hentet fra Varierte tenkemåter og regnestrategier: http://www.caspar.no/tangenten/2012/t-2012-1.pdf

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young Mathematicians at Work: Constructing Multiplication and Division.* Portsmouth: Heinemann.

Matematikksenteret. (2015). *Hva er MAM*. Hentet fra matematikksenteret: https://www.matematikksenteret.no/node/6457

Matematikksenteret. (2019). *Prinsipper for god regneopplæring*. Hentet fra Udir: https://www.udir.no/contentassets/04cad89a748244808d03b7654ffe83b6/prinsipper_for_god_regneopplaring_2.pdf

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier.* Oslo: Universitetsforlaget .

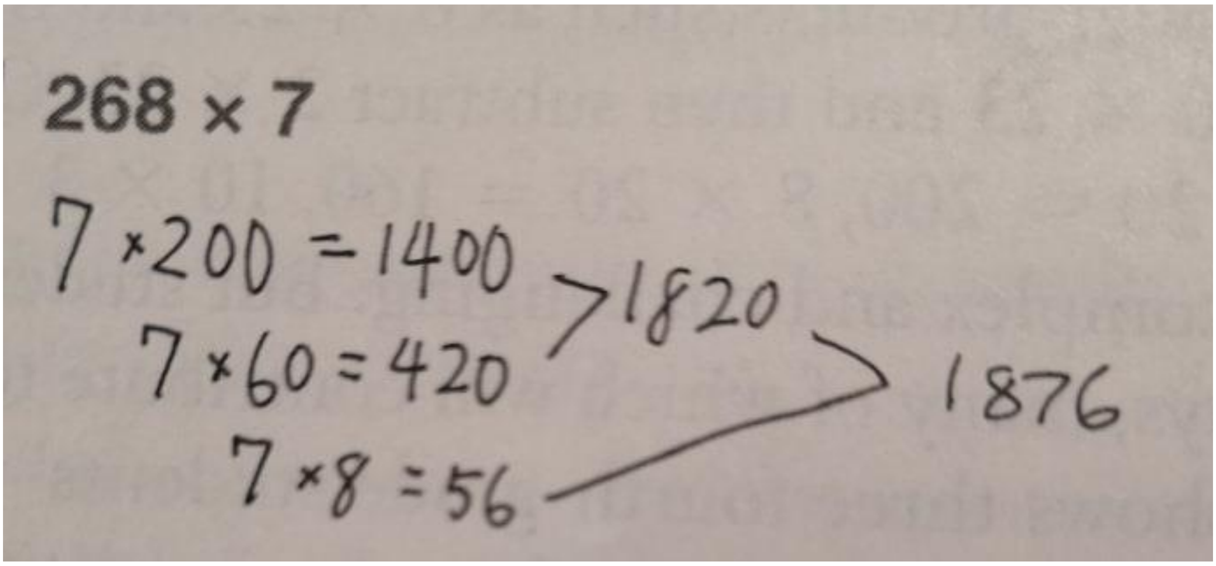
Utdanningsdirektoratet . (2019, 05 13). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04).* Hentet fra udir.no: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-4.-arstrinn-?lplang=http://data.udir.no/kl06/nob

Utdanningsdirektoratet. (2018, 08 01). *Hva er tilpasset opplæring?* Hentet fra utdanningsdirektoratet: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/tilpasset-opplaring/hva-er-tilpasset-opplaring/

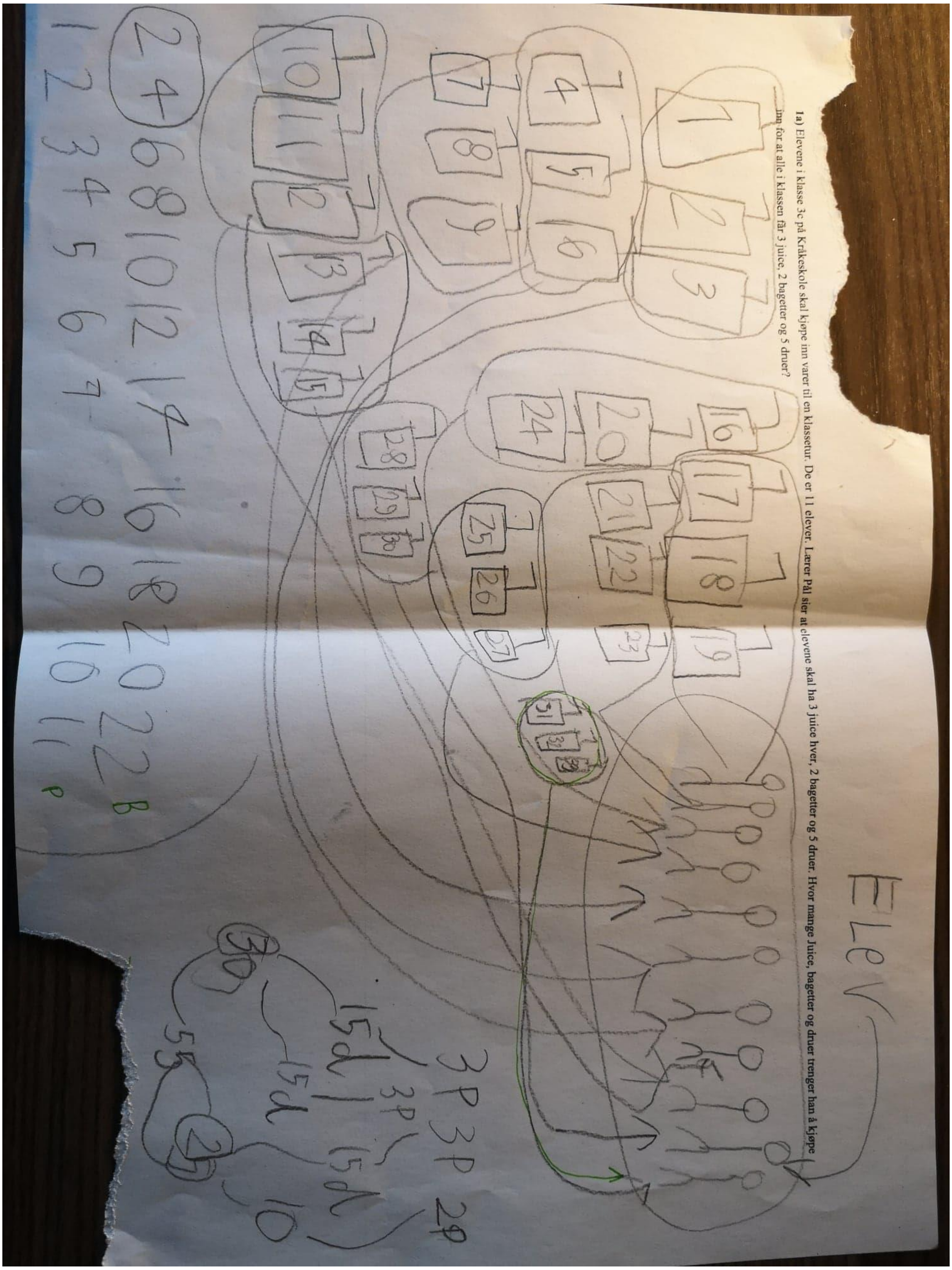
Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2015). *Elementary and Middle School Mathematics.* Essex: Pearson Education Limited .

Vedlegg

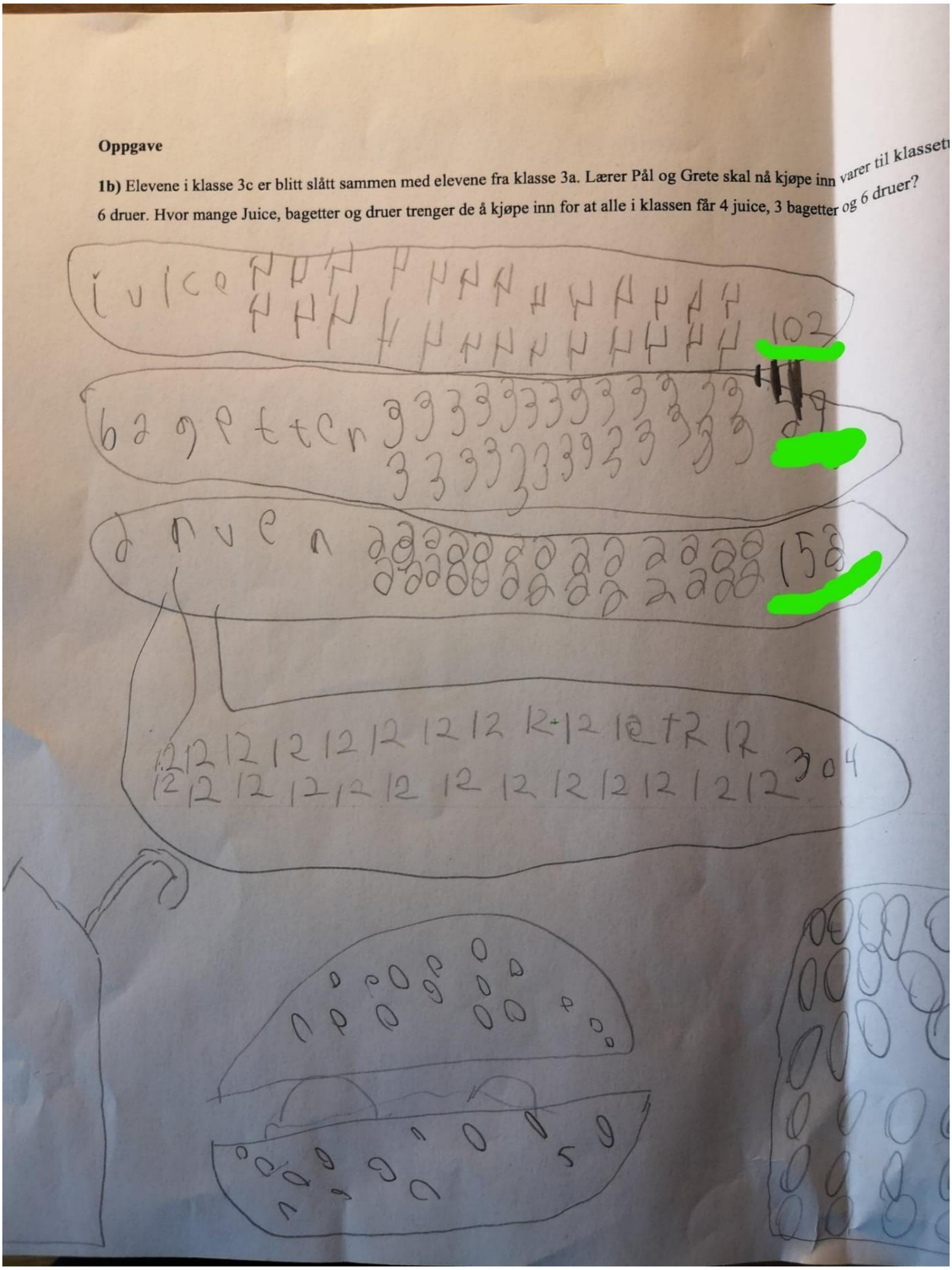
Vedlegg 1



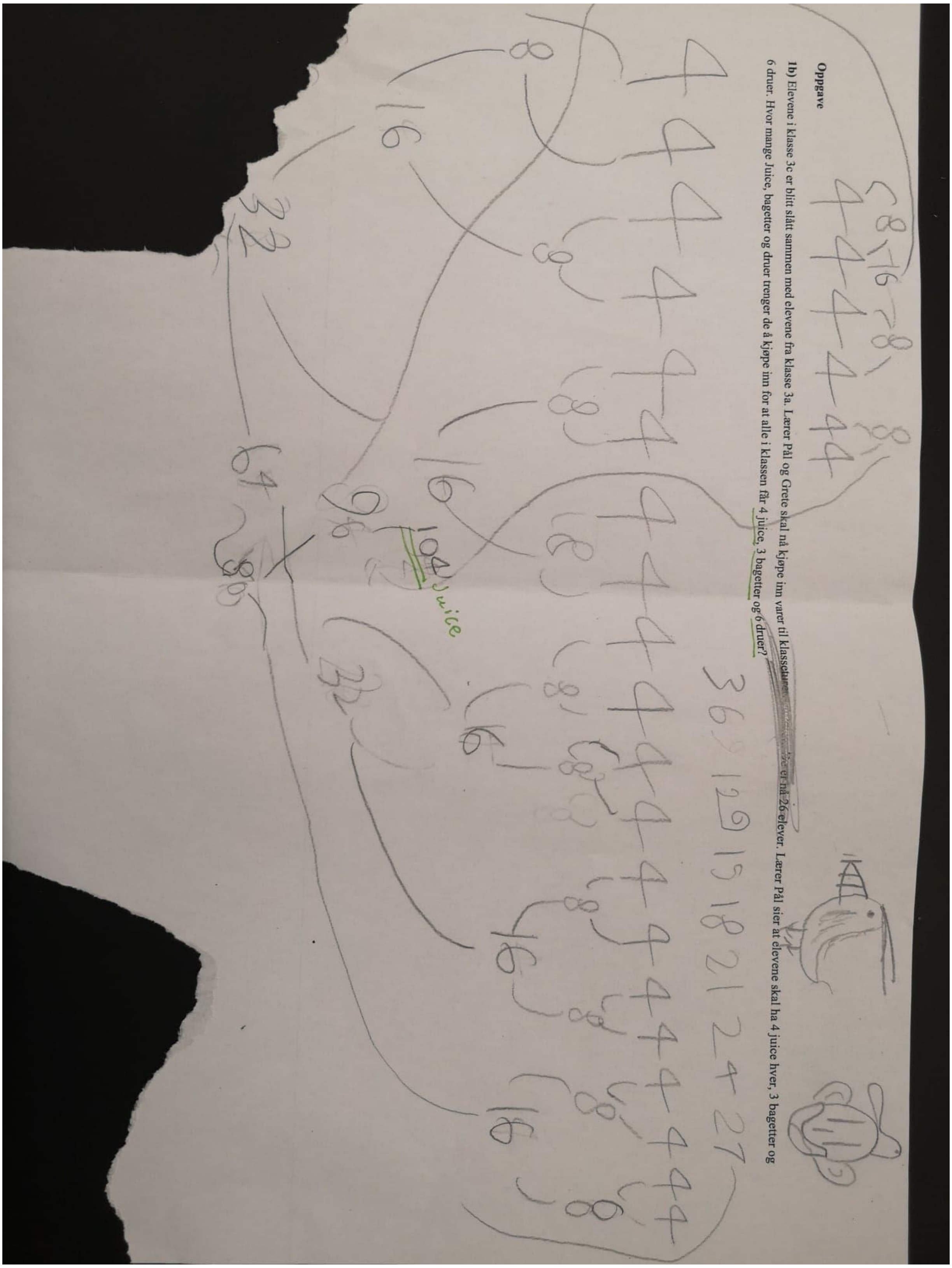
Vedlegg 2


1a) Elevene i klasse 3c på Kråkeskole skal kjøpe inn varer til en klassetur. De er 11 elever. Lærer Pål sier at elevene skal ha 3 juice hver, 2 bagetter og 5 druer. Hvor mange Juice, bagetter og druer trenger han å kjøpe inn for at alle i klassen får 3 juice, 2 bagetter og 5 druer?
ELEV

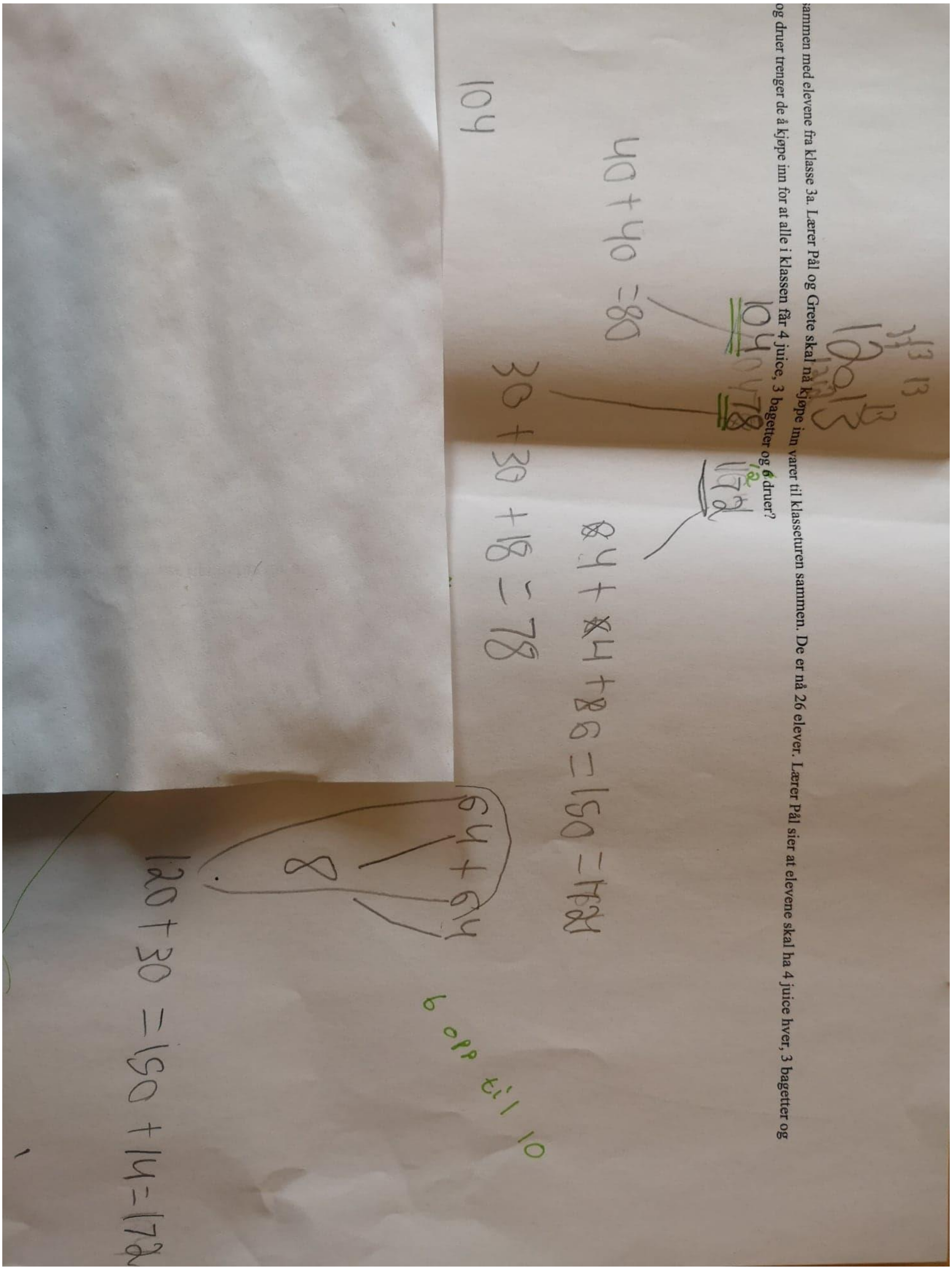
Vedlegg 3


Oppgave
1b) Elevene i klasse 3c er blitt slått sammen med elevene fra klasse 3a. Lærer Pål og Grete skal nå kjøpe inn varer til klasset
6 druer. Hvor mange Juice, bagetter og druer trenger de å kjøpe inn for at alle i klassen får 4 juice, 3 bagetter og 6 druer?
juice
102
bagetter
druer
304

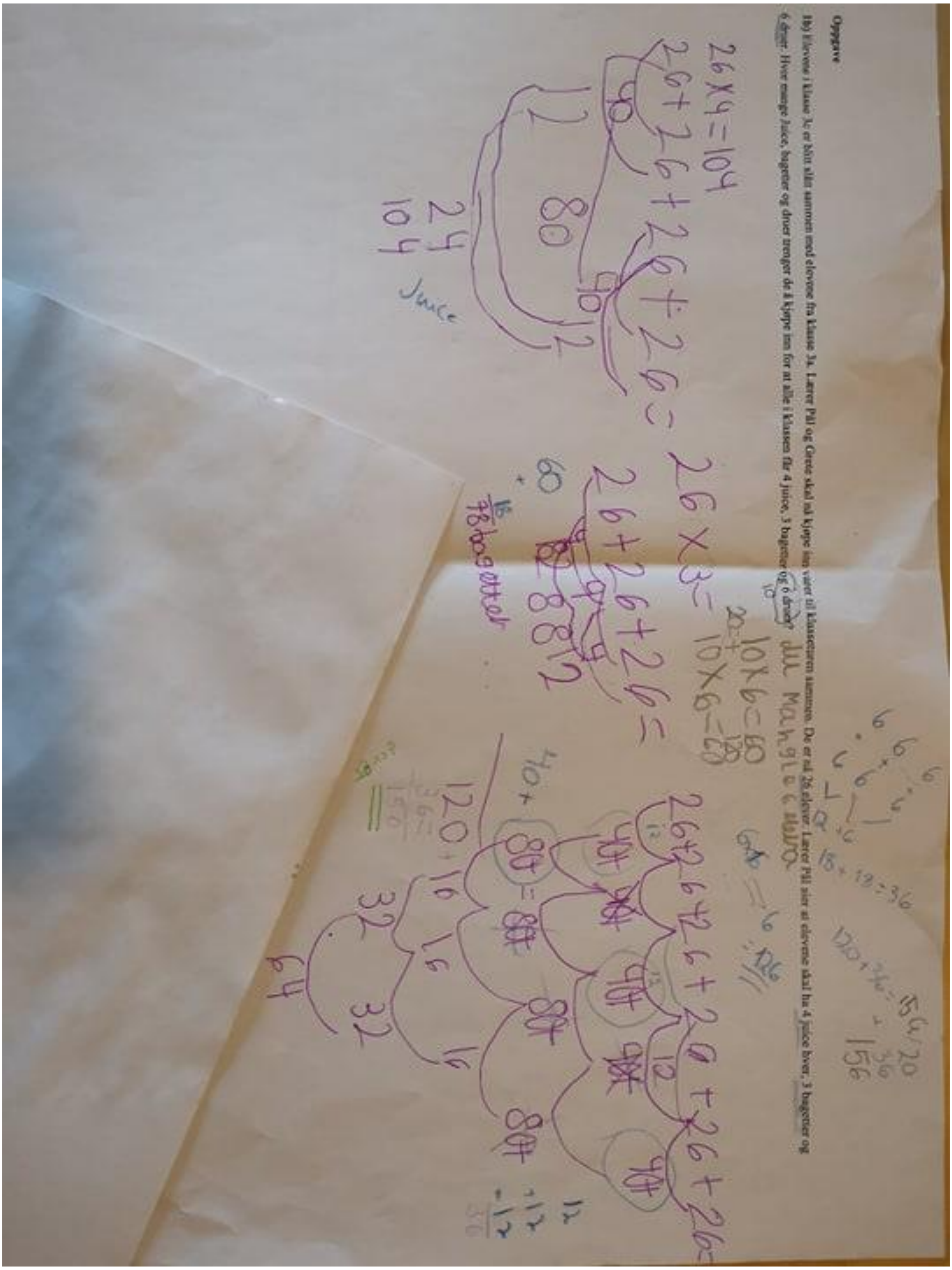
Vedlegg 4


Oppgave
1b) Elevene i klasse 3c er blitt slått sammen med elevene fra klasse 3a. Lærer Pål og Grete skal nå kjøpe inn varer til klassefesten.
er nå 26 elever. Lærer Pål sier at elevene skal ha 4 juice hver, 3 bagetter og
6 druer. Hvor mange Juice, bagetter og druer trenger de å kjøpe inn for at alle i klassen får 4 juice, 3 bagetter og 6 druer?
104 Juice

Vedlegg 5


sammen med elevene fra klasse 3a. Lærer Pål og Grete skal nå kjøpe inn varer til klasseturen sammen. De er nå 26 elever. Lærer Pål sier at elevene skal ha 4 juice hver, 3 bagetter og
og druer trenger de å kjøpe inn for at alle i klassen får 4 juice, 3 bagetter og 6 druer?
104
40 + 40 = 80
30 + 30 + 18 = 78
6 opp til 10
120 + 30 = 150 + 14 = 172

Vedlegg 6



NTNU

Kunnskap for en bedre verden