Monica Rehaug

"En tolvdel er større enn en seksdel, fordi tolv er større enn seks"

En kvantitativ studie av elevers misoppfatninger knyttet til brøk på ungdomstrinnet

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 5.-10.trinn
Veileder: Eivind Kaspersen
Mai 2019

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Monica Rehaug

"En tolvdel er større enn en seksdel, fordi tolv er større enn seks"

En kvantitativ studie av elevers misoppfatninger knyttet til brøk på ungdomstrinnet

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 5.-10.trinn
Veileder: Eivind Kaspersen
Mai 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Studien fokuserer på utbredelsen av misoppfatninger knyttet til del-av-hel-aspektet til brøk blant elever på 8. og 10.trinn. Studiens forskningsspørsmål er: (1) Hvor stor er utbredelsen av misoppfatninger knyttet til brøk på ungdomstrinnet og er det en endring i utbredelsen fra 8. til 10.trinn? (2) Er det en hierarkisk sammenheng mellom misoppfatninger i brøk?

Et oppgavehefte med 24 diagnostiske brøkoppgaver ble utviklet og studien bygger på elevsvar fra 598 elever fra 8. og 10.trinn. Misoppfatningene som blir undersøkt er: (1) Nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse, (2) Jo større nevner eller teller, dess større brøk og motsatt, (3) Brøkstrek er lik komma, (4) Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken, og (5) Teller eller nevner er et isolert tall. Datamaterialet er analysert ved hjelp av klassisk testteori og item response theory.

Resultatene fra studien indikerer at misoppfatninger er mest utbredt blant elever med lav dyktighet, men at flere elever med middels dyktighet også har misoppfatninger. Andel elever med misoppfatninger går noe ned fra 8.trinn til 10.trinn. Videre identifiseres et mulig hierarki innenfor misoppfatningene.

Forord

Masteroppgaven er et synlig resultat på at min videreutdanning har kommet til veis ende for denne gang. Det har vært noen lærerike og interessante år. Arbeidet med denne masteroppgaven har vært intenst, spennende, lærerikt og arbeidskrevende.

Jeg vil takke min veileder, Eivind Kaspersen, for konstruktive tilbakemeldinger, interessante samtaler og ikke minst for tørrvittige kommentarer.

Uten hjelp fra velvillige lærere og elever hadde det ikke blitt noe av denne oppgaven, derfor vil jeg takke alle som har stilt opp for at jeg skal få et godt datagrunnlag.

En stor takk rettes også til Ole Harald Johansen for uvurderlig opplæring, hjelp og støtte i analysearbeidet.

Det er en stor fordel med medstudenter som interesserer seg for det faglige innholdet i oppgaven. En stor takk rettes derfor til Bård Vinje for faglige samtaler som har drevet skrivinga framover. I tillegg vil jeg takke Siv Hilmo Nestande, Johanne Sofie Strand og Katrine Thorsen Aarre for støtte og motivasjon gjennom hele studietiden og i arbeidet med masteroppgaven.

Det viser seg alltid vanskelig å gå på jakt etter egne skrivefeil og dårlige formuleringer. Derfor vil jeg også rette en stor takk til Camilla Normann Justnes, Jens Arne Meistad, Anne-Gunn Svorkmo og Ingunn Valbekmo som har bidratt med innspill for å gjøre teksten bedre.

Uten hjelp og støtte fra familien hadde arbeidet blitt tyngre og mer krevende. Takk til mamma og «svigers» for pass av *canis lupus familiaris*. Og sist, men ikke minst, vil jeg takke «kjærringa» for støtte og oppmuntrende ord: «D bli likar i mårra».

Trondheim, mai 2019

Monica Rehaug

Innholdsfortegnelse

Figuroversikt

Tabelloversikt

1. Innledning

1.1. Bakgrunn

«For å være helt tydelig på det. Det tallene viser er at én av fire, nesten faktisk én av fem elever, ligger under kritisk nivå i matematikk.»
- Torbjørn Røe Isaksen, 2013 -

Alle lærere har nok hørt noen av sine elever klage over at brøk er vanskelig. Elevene er tydeligvis ikke alene, noe tidligere kunnskapsminister Torbjørn Røe Isaksen demonstrerte, da han brukte brøk for å illustrere hvor dårlig det sto til med matematikkunnskapen i norsk skole.

Elever som mener brøk er vanskelig får støtte fra forskning; brøk er ansett å være et utfordrende emne for elever (Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015; Siegler, Fazio, Bailey & Zhou, 2013). Noe av det som gjør brøk utfordrende er overgangen fra heltall til brøk. Reglene som før var gjeldende for heltall er ikke lenger gyldige i arbeid med brøk (Lamon, 2012; Siegler et al., 2013). Når positive heltall multipliseres med positive heltall blir svaret alltid større, men det samme er ikke alltid tilfellet for multiplikasjon med brøk. Heltall kan representeres med ett symbol, men når det kommer til brøk vil mange ulike brøker, for eksempel $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, og $\frac{20}{40}$ representere samme verdi. Dette forvirrer mange elever og stiller krav til undervisning i brøk.

Resultater fra TIMSS 2015 viser at norske elever på 5.trinn presterer bra i matematikk, men prestasjonene er svakest i emneområdet tall, som blant annet inneholder oppgaver innenfor brøk. Elever på 9.trinn presterer omtrent gjennomsnittlig i matematikk, sett fra et europeisk perspektiv, men samtidig er prestasjonene i algebra svake (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016). Videre viser resultater fra TIMSS ADVANCED 2015 at elever på 13.trinn presterer svakest i algebra (Grønmo, Hole & Onstad, 2016). Disse resultatene kan studeres i lys av Siegler et al. (2012) sine funn om elever på barnetrinnet sine kunnskaper om brøk.

Siegler et al. (2012) fant at elever på barnetrinnet sin kunnskap om brøk, predikerer senere prestasjoner på videregående skole i matematikk generelt og i algebra spesielt. Videre hevdet de at elevenes kunnskap om brøk er en viktigere predikerende faktor enn kunnskap innen andre områder i matematikkfaget, intellektuelt nivå og familiens sosiale status. Med utgangspunkt i funnene til Siegler et al. (2012) blir det mer interessant å se på resultatene fra TIMSS. Elevenes svake resultater i algebra på 9. og 13.trinn kan ha en sammenheng med de svake resultatene innen emnet tall på 5.trinn, der brøk inngår som en del av emnet.

Å se på elever sine kunnskaper innenfor brøk er komplekst, fordi brøk består av mange aspekter som: «del-av-hel», tallstørrelse, operator, kvotient, og forhold (Kieren, 1981). Det mest grunnleggende aspektet er ifølge Behr, Lesh, Post og Silver (1983) del-av-hel, da det legger grunnlaget for all senere tolkning innenfor brøk. Derfor vil jeg fokusere min undersøkelse på del-av-hel-aspektet til brøk.

Når et emne er krevende å lære, resulterer det ofte i feil (Li & Li, 2008). For lærere er det, derfor, viktig å kjenne til ulike feil elever gjør og ha fokus på ulike feiltenkninger i sin undervisning (Bray, 2013). Noen feil kommer av uoppmerksomhet, såkalte tilfeldige feil. Andre feil kan være mer systematiske tankefeil—feilene går igjen som et mønster (Brekke, 2002). Slike feilmønstre kan skyldes misoppfatninger (Statped, 2019). Misoppfatninger er ikke tilfeldige og ofte kan en overgeneralisering av tidligere kunnskap ligge bak (Brekke, 2002). Et eksempel på en slik overgeneralisering er når elever tar med seg heltallstenkning inn i arbeidet med brøk. Det blir derfor viktig for lærere å kjenne til mulige feilsvar som kan skyldes en misoppfatning, da misoppfatninger er til hinder for ny læring (Booth & Koedinger, 2008).

1.2. Forskningsspørsmål

Det er gjort mange undersøkelser når det gjelder elevers misoppfatninger knyttet til brøk (Alghazo & Alghazo, 2017; Braithwaite & Siegler, 2018; Ni & Zhou, 2005; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Jeg anser det derfor ikke som nødvendig å undersøke om misoppfatningene er til stede, men heller fokusere på hvor stor del av elever på ungdomstrinnet som kan ha misoppfatninger knyttet til del-av-hel aspektet til brøk. Med bakgrunn i resultatene fra TIMMS kan min undersøkelse avdekke om elever har svak kompetanse innenfor deler av emnet brøk, som kan knyttes til misoppfatninger og som kan være en av årsakene til sviktende kunnskaper innenfor algebra. I tillegg ønsket jeg å se på om det finnes et mønster eller et hierarki i misoppfatningene. Andre forskere har sett på hierarkiske systemer eller strukturer innenfor ulike deler av brøkkonseptet (Charalambous, 2007; Novillis, 1976; Wilkins & Norton, 2018), men ingen av disse har sett på hierarkiske systemer innenfor *misoppfatninger* knyttet til brøk.

Jeg har i min studie tatt utgangspunkt i følgende forskningsspørsmål:

1. Hvor stor er utbredelsen av misoppfatninger knyttet til brøk på ungdomstrinnet og er det en endring i utbredelsen fra 8. til 10.trinn?
2. Er det en hierarkisk sammenheng mellom misoppfatninger i brøk?

Svar på det første forskningsspørsmålet vil kunne bidra med en oversikt over hvordan det står til med brøkkunnskapen hos elever i norsk skole. Ettersom forskning viser til at misoppfatninger er til hinder for ny læring, er det viktig å få kunnskap og oversikt over andel elever som kan ha misoppfatninger, slik at undervisningen kan forebygge og hjelpe elever. I tillegg er det interessant å se om elevene har en utvikling fra 8.trinn til 10.trinn. Har færre elever på 10.trinn misoppfatninger enn hva tilfellet er for elever på 8.trinn?

Svar på det andre forskningsspørsmålet vil kunne bidra til å kaste lys over om misoppfatninger henger sammen, slik at vi kan gi bedre anbefalinger for brøkundervisningen i skolen. Hvis vi kan finne et hierarkisk system i misoppfatningene, ville det bety at vi i større grad kan «gjette» hvilke konkrete misoppfatninger elevene har, basert på bare ett mål.

Ettersom jeg ikke har funnet et ferdig utviklet måleinstrument for å teste misoppfatninger knyttet til del-av-hel-aspektet til brøk, vil også en del av denne studien omhandle validering av et egenutviklet måleinstrument. For å svare på hovedspørsmålene mine har jeg, derfor, sett det nødvendig å først svare på følgende metodiske spørsmål: Hvordan kan man måle elevers misoppfatninger knyttet til brøk?

1.3. Oppgavens oppbygging

For å finne ut hvor stor utbredelsen av misoppfatninger er, måtte jeg først gjennom to steg: (1) finne ut hva misoppfatninger i brøk *er*, og (2) finne en metode som kunne kvantifisere hvor utbredt disse misoppfatningene er. Det første steget diskuterer jeg i kapittel 2, der jeg gir en oversikt over begrepet brøk, før jeg beskriver misoppfatningene som blir undersøkt i denne studien. Det andre steget blir diskutert i kapittel tre, der jeg gir en oversikt over temaet måling, før jeg går mer i detalj på de analysemodellene som er brukt i analysen. Når jeg hadde etablert et rammeverk for misoppfatninger og måling, kunne jeg utvikle et måleinstrument og gjennomføre en undersøkelse blant elever på ungdomstrinnet. Dette beskriver jeg i kapittel 4. Basert på disse metodene har data fra undersøkelsen blitt analysert for å finne svar på forskningsspørsmålene, og resultatene blir presentert i kapittel 5. I det siste kapittelet diskuterer og oppsummerer jeg hovedfunn fra undersøkelsen og antyder hvordan mine funn kan ha betydning for videre forskning.

2. Teori

Fokuset for denne studien er utbredelsen av misoppfatninger knyttet til brøk, og i tillegg vil jeg undersøke om det eksisterer et hierarki i misoppfatningene. Derfor er det nødvendig å redegjøre for brøkbegrepet, samt hva som menes med misoppfatninger knyttet til brøk.

2.1. Begrepet brøk

Brøk er ansett å være et viktig, men komplekst og utfordrende emne for mange elever (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Siegler et al., 2013). For lærere er det derfor essensielt å vite hvorfor brøk er viktig, hva som gjør begrepet komplekst og hva som gjør brøk utfordrende.

2.1.1. Brøk er viktig

Behr et al. (1983) ser på viktigheten av brøk ut fra tre perspektiv: praktisk, psykologisk, og matematisk. Det *praktiske perspektivet* peker på at evnen til å håndtere brøk effektivt styrker våre evner til å mestre situasjoner og problemer vi møter i dagliglivet. Fra et *psykologisk perspektiv* er brøk viktig fordi brøk gir en rik arena hvor elever kan utvikle og ekspandere mentale strukturer som er nødvendig for videre intellektuell utvikling. Det tredje perspektivet er det *matematiske perspektivet*, der brøkforståelse gir grunnlag for utvikling av regneferdigheter i algebra. Ut fra Behr et al. (1983) sine perspektiver er det ikke bare i skolehverdagen at brøk er viktig; når brøk er noe vi behersker, så utvikler vi oss som mennesker og det letter hverdagen vår.

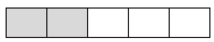
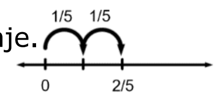
Siegler et al. (2013) presenterer flere momenter om hvorfor brøk, matematisk sett, er viktig. De mener brøk er teoretisk viktig, fordi forståelse for brøk krever en dypere innsikt om tall. Forståelse for brøk krever mer enn erfaringen elever har om tall fra arbeidet med heltall. Arbeid med brøk krever derfor en reorganisering av kunnskap som gjelder for de hele tallene (Siegler et al., 2013). Et eksempel er den multiplikative sammenhengen mellom teller og nevner.

Brøk er også en viktig komponent i mer avansert matematikk (Siegler et al., 2013). Flere andre områder, som for eksempel algebra og funksjoner, krever gode brøkkunnskaper. Siegler et al. (2012) fant, blant annet, at elevers kunnskaper om brøk predikerer senere prestasjoner, i algebra spesielt og i matematikk generelt, på videregående nivå. Videre hevdet Siegler et al. (2012) at kunnskap om brøk er en viktigere faktor for senere prestasjoner i matematikkfaget og i yrkeslivet enn: kunnskap innen andre områder i matematikkfaget, intellektuelt nivå, og familiens sosiale status.

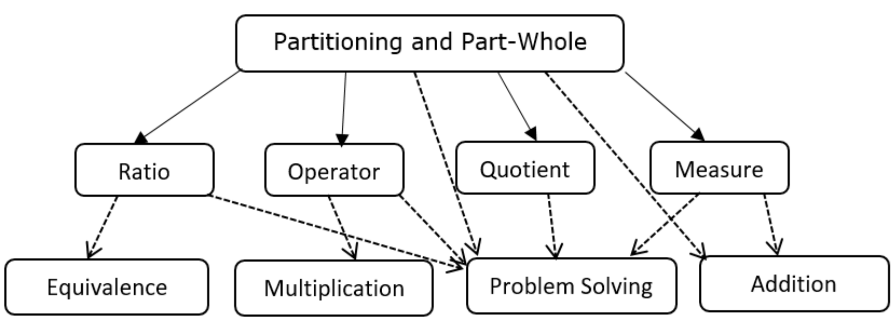
2.1.2. Brøk er komplekst

Ettersom brøk er viktig for oss mennesker på flere arenaer enn i skolen, er det viktig å vite hva brøk som begrep omfatter. Brøk er et komplekst begrep fordi brøk består av mange aspekter, som del-av-hel, tallstørrelse, operator, kvotient og forhold (Kieren, 1981). Disse aspektene handler om ulike måter å tolke en brøk på, som framstilt i *Tabell 1*.

Tabell 1. De fem aspektene til brøk (Kieren, 1981).

Aspekt	**Tolkning av** $\frac{2}{5}$
Del-av-hel	$\frac{2}{5}$ betyr 2 like deler av en enhet som er delt i 5 like store deler. 
Tallstørrelse/ Måleenhet	$\frac{2}{5}$ er et tall mellom 0 og 1 på tallinja. $\frac{2}{5}$ er $2 \cdot \frac{1}{5}$ fra 0 på ei tallinje. 
Operator	$\frac{2}{5}$ av et tall, en størrelse eller en mengde. Eksempel: $\frac{2}{5}$ av 200 m.
Kvotient	$\frac{2}{5}$ kan bety 2 epler delt på 5 personer.
Forhold	En sammenligning mellom to mengder. Eksempel: 2 jenter og 5 gutter i ei gruppe (del-del). Eller 2 jenter av 5 elever i gruppen (del-hel).

Selv om det i tabellen ser ut til at brøk består av fem adskilte aspekter, så henger alle aspektene sammen. Behr et al. (1983) har framstilt dette i en modell (*Figur 1*).



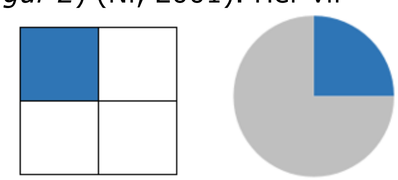
Figur 1. Sammenhengen mellom de fem aspektene, likeverdige brøker, regneoperasjoner på brøk og problemløsning (Behr et al., 1983).

Modellen viser at det å kunne dele opp en figur i like store deler og del-av-hel (Partitioning and Part-Whole) blir sett på som det mest fundamentale, fordi det bygger opp under de andre aspektene. De heltrukne pilene er forslag til etablerte sammenhenger og de stiplede pilene er forslag til mulige sammenhenger. Videre kan vi se at brøk som forhold (Ratio) kan være et naturlig utgangspunkt for arbeid med likeverdige brøker (Equivalence). Modellen viser videre at aspektet operator (Operator) kan være nyttig for å utvikle en forståelse for multiplikasjon, mens alle fem aspekter er med og danner et grunnlag for arbeid med problemløsning (Behr et al., 1983).

Denne studien vil ha fokus på misoppfatninger knyttet til del-av-hel-aspektet til brøk, fordi det er det mest grunnleggende og vil kunne ha innvirkning på alle de andre aspektene. Derfor vil kun del-av-hel-aspektet bli presentert nærmere.

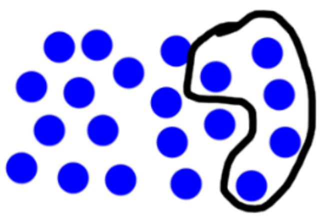
Brøk som del-av-hel

Brøken $\frac{a}{b}$ refererer under dette aspektet til *a* deler av *b* like store deler av en helhet, der helheten kan være kontinuerlig eller diskret (Behr et al., 1983). Et rektangel eller ei tallinje er eksempler på kontinuerlige objekter. Et rektangel eller andre geometriske former som brukes for å illustrere brøk, kalles ofte for arealmodeller (se *Figur 2*) (Ni, 2001). Her vil brøkdelen angi en størrelse av objektet. $\frac{1}{4}$ av ei kake viser både til antallet deler og til størrelsen av delene. Mengden kake i én del avhenger av hvor mange like deler helheten er delt opp i. Jo flere deler, dess mindre kake per del. Det betyr at $\frac{1}{4}$ (færre deler) representerer en større mengde kake enn $\frac{1}{8}$ (flere deler) av samme kake.



Figur 2. Eksempler på arealmodeller.

I diskret objekter trenger ikke nødvendigvis en del å representere antallet én (Lamon, 2012). For eksempel kan det hele være 20 kuler. Da betyr $\frac{1}{4}$, én del ut av fire like store deler, der en del består av 5 kuler (*Figur 3*).



Figur 3. Brøkdel av en diskret mengde.

For å kunne beherske aspektet del-av-hel er det viktig å kunne identifisere det hele og vite at delene må være like store (Lamon, 2012). Det er også viktig å kunne avgjøre om det hele er delt opp i like store deler (Behr et al., 1983). Behr et al. (1983) peker på flere sammenhenger mellom delene og helheten som er nødvendige for elever å beherske: (1) Alle delene til sammen utgjør helheten, (2) jo flere deler helheten er delt opp i, dess mindre blir delene, og (3) sammenhengen mellom delene og det hele blir bevart uavhengig av størrelse, form, eller plassering av de like delene.

I modellen (*Figur 1*) til Behr et al. (1983) er brøk som forhold et naturlig utgangspunkt for arbeid med likeverdige brøker. Lamon (2012) peker på at en viktig idé under del-av-hel er å vite at flere brøker representerer samme verdi. For eksempel skriver vi $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, og det betyr at de to brøkene representerer samme verdi. Vi sier at de to brøkene er likeverdige.

2.1.3. Brøk er utfordrende

Brøk som undervisningsemne i skolen i dag kommer vanligvis etter at elever har lært om hele tall. Det kan føre til en utfordring, både for elever og lærere, fordi elever tror at egenskaper til hele tall gjelder for alle tall (Behr et al., 1983; Siegler et al., 2013). Siegler, Thompson og Schneider (2011) peker på noen momenter der heltall skiller seg fra brøk: et hvert heltall har et unikt påfølgende tall, heltall kan telles, mellom to ulike heltall er det et bestemt antall hele tall, og et heltall kan uttrykkes med et enkelt symbol. Ingen av disse momentene er gjeldene for brøk. Det eneste hele tall og brøk har til felles er at de representerer en størrelse som kan plasseres på en tallinje (Bailey, Siegler & Geary, 2014).

Lortie-Forgues et al. (2015) peker i sin forskning på 7 vanskeligheter elever støter på i sitt arbeid med brøk, der de fleste kommer av ulikheter mellom hele tall og brøk, som beskrevet ovenfor.

1. En brøk består av tre deler: teller, nevner, og brøkstrek. Et helt tall blir skrevet som ett symbol.
2. Det er mye vanskeligere å anslå størrelsen til en brøk enn til et heltall, siden størrelsen til en brøk følger av forholdet mellom to verdier, nemlig teller og nevner.
3. Regneoperasjoner med brøk er ikke opplagte. Hvorfor trenger vi fellesnevner i addisjon og subtraksjon, men ikke i multiplikasjon og divisjon?
4. Relasjonen mellom regneoperasjoner med brøk er mer komplekst enn hva tilfellet er med hele tall. Addisjon av to brøker med lik nevner krever at nevneren blir stående urørt, mens tellerne blir addert sammen som i addisjon av hele tall. Ved multiplikasjon av to brøker vil tellerne og nevnerne hver for seg bli behandlet på samme måte som ved multiplikasjon av hele tall.
5. Det er komplekse relasjoner mellom de ulike regneoperasjonene med brøk. Ved addisjon av to brøker med lik nevner, vil nevner bli stående urørt i svaret. Ved multiplikasjon av to brøker med lik nevner, så må nevnerne multipliseres med hverandre.
6. Det er komplekse relasjoner mellom regneoperasjoner med brøk og regneoperasjoner med hele tall. Et helt tall multiplisert med et helt tall gir et større

tall som produkt. Et helt tall dividert med et helt tall gir et mindre tall til svar. Det motsatte er tilfellet med brøk.

7. Å regne med brøk krever oversikt over et stort antall prosedyrer: å regne med de fire regneartene, å kunne utvide og forkorte brøker, finne likeverdige brøker, og konvertere brøker til desimaltall og omvendt.

Punktene over viser at tankegangen som er brukt i arbeid med hele tall ikke direkte kan overføres i arbeid med brøk. Lamon (2012) mener overgangen fra heltall til brøk er et kvalitativt hopp der meninger, modeller, og symboler som virket i arbeid med de fire regneartene med heltall ikke lenger er brukbare i arbeid med brøk. Dette støtter opp under de sju vanskelighetene som Lortie-Forgues et al. (2015) fant i sine undersøkelser.

Det blir derfor viktig for elever å lære at egenskaper som gjelder for hele tall ikke automatisk er gyldige for alle tall. Lærere bør eksplisitt fokusere på overgangen mellom heltall og brøk i sin undervisning for å unngå at elever overfører det de har lært om heltall til brøk. Siegler et al. (2011) peker på at dette viser seg vanskelig å lære, og at disse vanskelighetene er reelle, dramatiske, og viktige.

2.2. Misoppfatninger

Overgangen fra arbeid med heltall til arbeid med brøk er utfordrende for elever og kan føre til at elever gjør feil basert på ukorrekte antakelser. Elever vil alltid gjøre feil i sitt arbeid med matematikk, men det er viktig å kjenne til forskjellen mellom de ulike feilene elever gjør. Noen feil er tilfeldige og oppstår grunnet unøyaktighet i lesing av oppgaven eller unøyaktighet i selve utregningen. Andre feil er ikke tilfeldige og kalles misoppfatninger. Bak misoppfatninger ligger det en bestemt tankegang som brukes nokså konsekvent (Brekke, 2002). Når elever beveger seg fra hele tall over til brøk, så kan elever overgeneralisere kunnskapen de har om hele tall til også å gjelde for brøk (Ni & Zhou, 2005). Som nevnt tidligere har hele tall og brøk bare én egenskap til felles og det er at alle hele tall og alle brøker kan plasseres på ei tallinje. Overgangen fra hele tall til brøk er krevende (Lamon, 2012) og elever prøver derfor å skape mening i det nye ut fra erfaringer de allerede har (Durkin & Rittle-Johnson, 2015). Det kan føre til misoppfatninger når elever tillegger brøk egenskaper fra hele tall. I litteraturen blir dette ofte omtalt som «*whole number bias*» (Braithwaite & Siegler, 2018; Dewolf & Vosniadou, 2015; Ni & Zhou, 2005). Et eksempel på dette er når elever tror at multiplikasjon alltid vil gi et større svar.

2.2.1. Konstruktivisme

Bak tankegangen skissert over ligger en bestemt tanke om læring. Konstruktivisme er et syn på læring der den enkelte sine handlinger og erfaringer danner grunnlaget for læring

(Brekke, 2002). Det vil si at elever konstruerer sin egen kunnskap basert på tidligere erfaringer. Jean Piaget (Lyngsnes & Rismark, 2014) frontet et konstruktivistisk syn på læring; når ny kunnskap enkelt kan tilpasses til eksisterende kunnskap, kalte Piaget det for assimilasjon. Når ny kunnskap, derimot, ikke helt passer inn med allerede eksisterende kunnskap, må kunnskapen reorganiseres. Dette kalte Piaget for akkomodasjon. Det er i denne reorganiseringsfasen at misoppfatninger kan oppstå (Durkin & Rittle-Johnson, 2015).

2.2.2. Diagnostiske oppgaver

En måte å få kjennskap til hvilke misoppfatninger elever kan ha, er å la dem arbeide med diagnostiske oppgaver. Formålet med diagnostiske oppgaver er ikke å finne ut hvor godt elever har fått tak i fakta, ferdigheter, eller begreper, men heller prøve å identifisere og framheve misoppfatninger hos elever (Brekke, 2002). Det er viktig at slike oppgaver ikke gir mulighet for rett svar hvis elever har en misoppfatning knyttet til det oppgaven er ment å teste. Elever som ser på desimaltall som par av hele tall, for eksempel, vil ofte utføre adskilte regneoperasjoner på tallene før og etter komma. Disse elevene vil kunne få rett på oppgaven 12,30 : 2, da de regner 12 : 2 og 30 : 2 og får 6,15 som svar. Oppgaven gir dermed ingen diagnostisk informasjon om denne misoppfatningen, ettersom 6,15 er riktig svar. Endrer vi derimot oppgaven til 12,14 : 2, så vil oppgaven være en god diagnostisk oppgave, fordi elever som ser på desimaltall som par av hele tall trolig vil svare 6,7.

2.2.3. Ulike misoppfatninger knyttet til brøk

Det er viktig å presisere at elever sine misoppfatninger ikke er statiske. Når elever beveger seg, for eksempel, fra hele tall over til brøk, så vil ikke all ny kunnskap om brøk passe helt inn med allerede ervervet kunnskap om hele tall. Misoppfatninger vil da oppstå som en slags mellomstasjon mellom tidligere kunnskap om hele tall og den matematiske måten å se brøk på (Durkin & Rittle-Johnson, 2015). Misoppfatninger kan vedvare og det blir da essensielt for læreren å få en oversikt over misoppfatninger elever kan ha, da det er en tidkrevende prosess å endre elevers oppfatninger (Durkin & Rittle-Johnson, 2015).

Nedenfor beskrives noen misoppfatninger knyttet til brøk (Matematikksenteret, u.å.-b). Det er disse misoppfatningene jeg vil fokusere på i resten av oppgaven.

Nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse

Et viktig prinsipp i aspektet del-av-hel er at delene må være eksakt like store. Flere elever ser kun på antall deler og tar ikke hensyn til at delene må være like store. Sophian (2007) hevder at det ikke ligger implisitt i oppdelingen av en figur at delene må være like store. Derfor får mange elever problemer med å forstå at delene må være like store for at brøken skal gi mening. Elever som har denne misoppfatningen vil i møte med *Figur 4* kunne svare at $\frac{1}{3}$ er fargelagt, da de ser tre deler, selv om de ser at delene ikke er like store.

Figur 4. Diagnostisk figur til elever som ikke tar hensyn til størrelsen på delene.

I en studie blant elever på småtrinnet fant Watson, Campbell og Collis (1999) at å dele en sirkel i like deler bød på problemer for flere elever. Delingen av sirkelen ble utført med to parallelle kutt, slik at sirkelen ble delt i tre deler. Elever argumenterte for at delene var like store fordi delene hadde omtrent samme bredde. Argumentasjonen om at delene må være like brede fungerer med et rektangel, og det kan tyde på at de har overført denne kunnskapen til også å gjelde for en sirkel. Det kan bety at de har kommet et stykke på vei i å få reorganisert sin kunnskap om brøk, men mangler å ta i betraktning at arealet for hver del må være like stor.

Jo større nevner eller teller, dess større brøk

Skrivemåten til brøk skiller seg fra hele tall og gjør det vanskeligere å kunne avgjøre størrelsen til en brøk (Dewolf, Grounds, Bassok, Holyoak & Enns, 2014). Når elever skal avgjøre størrelsen til en brøk er det noen elever som bruker kunnskapen de har om hele tall. Elever kan da argumentere med at $\frac{1}{12}$ er større enn $\frac{1}{6}$ fordi 12 er større enn 6. I andre oppgaver kan elever svare at $\frac{10}{15}$ er større enn $\frac{3}{4}$ fordi både teller og nevner er størst i $\frac{10}{15}$. I en studie utført av Razak, Noordin, Alias og Dollah (2012) rangerte 25 % av 13-åringer stambrøker etter størrelsen på nevner. Pearn og Stephens (2007) fant at selv når elever skulle plassere stambrøker på ei tallinje, så rangerte noen brøkene etter størrelsen på nevner.

En annen variant oppdaget Alghazo og Alghazo (2017) da de undersøkte misoppfatninger knyttet til brøk blant studenter på universitetsnivå. De fant at bare 2 % av studentene greide å rangere et utvalg brøker. Flere som rangerte brøkene feil, forklarte at størrelsen på nevner forklarte hvor mange deler det var, og større nevner ga mindre deler og dermed mindre verdi på brøken. Studentenes forklaring kan konkretiseres med at en kake delt opp i 9 stykker gir mindre biter enn en kake som er delt opp i 5 stykker. Derfor er nideler mindre enn femdeler, uansett hvilket tall som står i telleren. Studentene så ikke at en brøk ikke bare er en representasjon for størrelsen på kakestykkene, men også hvor mange stykker som er tilgjengelige.

Nevner og teller er isolerte tall

Ni og Zhou (2005) peker på faren for at teller og nevner kan sees på som isolerte hele tall. Det fører til at brøken $\frac{a}{b}$ kun blir sett på som *a* deler ut av *b* deler. Ofte gir denne tankegangen riktig svar. Hvis en pizza er delt i 8 deler og mamma spiser $\frac{3}{8}$, da har hun spist 3 stykker av pizzaen. Hvis pizzaen fortsatt er delt i 8 deler og mamma har spist $\frac{1}{4}$, vil disse elevene svare at mamma har spist ett pizzastykke. Problemer oppstår også når elever skal finne $\frac{1}{5}$ av 15 i en diskret mengde. Da kan elever markere 5 deler og 1 av de delene igjen. Eller de kan bare markere 1 del, eller bare 5 deler.

Brøkstrek er lik komma

Denne misoppfatningen er relatert til brøken sin skrivemåte. En brøk består av teller, nevner og brøkstrek. Skrivemåten er helt annerledes enn hvordan vi skriver hele tall. Det er vanskelig for mange elever å forstå at en brøk representerer én verdi, som er forholdet mellom teller og nevner. Elever kan da betrakte teller og nevner som isolerte hele tall og brøkstreken som komma. Brøken $\frac{1}{5}$ blir da det samme som 1,5. Noen elever tenker også at $\frac{1}{5}$ er det samme som 0,5.

Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken

Når elever skal sammenligne to heltall bruker de ofte subtraksjon for å finne ut hvor mye større det ene tallet er sammenlignet med det andre. En brøk er en multiplikativ relasjon mellom teller og nevner. Når elever skal sammenligne brøker og bruker kunnskap fra heltallene ser de på teller og nevner som to uavhengige tall og tar ikke hensyn til forholdet mellom dem. Det medfører at elever kan se på differansen mellom teller og nevner i stedet for forholdet mellom teller og nevner og at jo mindre differanse dess større er brøken. Dette er en additiv sammenheng og kalles ofte «gap thinking» (Mitchell & Horne, 2010; Pearn & Stephens, 2004). Elever kan da mene at $\frac{4}{6}$ er større enn $\frac{9}{12}$, fordi differansen mellom teller og nevner i $\frac{4}{6}$ er to, mens differansen i den andre brøken er tre. Samme tankegang kan brukes når elever skal finne likeverdige brøker. Brøken $\frac{4}{5}$ er like stor som $\frac{12}{13}$ fordi begge brøkene har en differanse på én mellom teller og nevner.

De fem misoppfatningen som er beskrevet over, er de jeg vil se nærmere på i min studie. Det finnes mange flere misoppfatninger knyttet til brøk (Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Pantziara & Philippou, 2012; Trivena, Ningsih & Jupri, 2017). Jeg har kun gjort et utvalg, da det blir for omfattende å se på alle misoppfatninger elever kan ha knyttet til brøk.

3. Måling

I min studie har jeg basert meg på måling, og i dette kapittelet vil jeg først ta for meg noen aspekter rundt måling, før jeg kort presenterer klassisk testteori (CTT) og går mer i dybden på *item response theory (IRT)*, som er mine valg når det gjelder analysemodeller.

3.1. Hva er måling?

Mennesket har, historisk sett, vært opptatt av å måle fysiske objekter rundt seg. De første menneskene må ha vært opptatt av å vurdere fiender, eiendeler, og andre objekter med tanke på størrelse (DeVellis, 2017). I dagens samfunn er måling en naturlig del av hverdagen, hvor vi ofte måler og baserer våre vurderinger ut fra måling av blant annet avstand, temperatur, masse, og tid. Hvis du, for eksempel, får vite at det er 20 °C i Madrid i dag, så får du en følelse av hvor varmt det er, uten at du trenger å reise dit.

Måling av psyko-sosiale størrelser som blant annet motivasjon, stress, og dyktighet er ikke like etablert og velkjent som måling av fysiske størrelser. En utfordring med måling av psyko-sosiale størrelser er at evnen eller egenskapen vi er interessert i, ikke er direkte synlig på samme måte som objekter i den fysiske verden. Slike uobserverbare evner eller egenskaper kalles for latente trekk og kan indirekte måles gjennom passende indikatorer (Wu, Tam & Jen, 2016). Vi kan ikke «se» en elev sin dyktighet i brøk, vi kan kun måle eleven sin dyktighet gjennom en variabel som, for eksempel, måler prestasjonen til eleven på utvalgte oppgaver i brøk.

Måling kan da defineres på denne måten: måling er å knytte tall til egenskaper ved analyseenheter etter en regel (Ringdal, 2018). Det vil si at måling innebærer å tallfeste, eller å tillegge variabler en mening.

3.2. Ulike målenivå

Stevens (1946) har klassifisert fire målenivåer for variabler: nominal, ordinal, intervall, og forholdstall.

Nominal er det laveste nivået. Talldata som er klassifisert på dette nivået står for kategorier som utelukker hverandre. Eksempler på dette er kjønn, klassetrinn og skole. Dette blir registrert med tallkoder (1 for skole x, 2 for skole y, og 3 for skole z). Går du på skole x, kan du ikke samtidig gå på skole z. Kategoriene kjønn, klassetrinn, og skole kan heller ikke rangeres, da det ikke gir mening å si at skole x er mer skole enn skole y. Det vi kan gjøre med data på dette nivået er å summere antall fra skole x, skole y, og skole z (Ringdal, 2018).

I det neste nivået, ordinal, så kan verdiene rangeres samtidig som vi kan referere til likhet og ulikhet. Spørsmål av typen «Hvor interessert er du i sport?» hvor svaret skal oppgis på en skala fra 1 (ikke interessert) til 5 (svært interessert) er et eksempel. Her vil det gi mening å rangere svarene, da en som svarer 2 typisk vil være mer interessert enn en som svarer 1. Det vi ikke kan si noe om er hvor stor den innbyrdes forskjellen er mellom en som har svart 1 og en som har svart 2 (Ringdal, 2018). Det er ikke nødvendigvis slik at avstanden mellom 1 og 2 på denne skalaen er like stor som mellom 2 og 3. For å kunne dra en slik slutning må forskjellen mellom de ulike stegene i skalaen være like store.

På det neste nivået, intervall, er nettopp dette kravet om lik avstand mellom stegene i en skala oppfylt, slik at avstanden mellom tallverdiene kan sammenlignes seg imellom (Ringdal, 2018). Et godt eksempel her er temperatur. På Celsiusskalaen vil avstanden mellom 5 grader og 10 grader være like stor som avstanden mellom 15 grader og 20 grader. Men vi kan ikke si at en temperatur på 10 grader celsius er dobbelt så varm som 5 grader celsius, fordi celsiusskalaen ikke har et absolutt nullpunkt, men et vilkårlig nullpunkt.

Et absolutt nullpunkt finner vi på det siste nivået, forholdstall (Ringdal, 2018). Variabler på dette nivået kan for eksempel måle inntekt eller alder i år. Her gir det mening å si at en som tjener 600 000 kr tjener dobbelt så mye, som en som tjener 300 000 kr.

3.3. Endimensjonalitet og lokal uavhengighet

Et av målingens grunnprinsipper er endimensjonalitet og lokal uavhengighet. I IRT blir disse prinsippene sett på som antakelser, og ikke absolutte krav som er tilfellet i Rasch-modellen (Andrich, 1989). En test som er endimensjonal består av oppgaver som tester ett område, altså én dimensjon. En test kan i prinsippet teste flere områder, men da må områdene slås sammen og bli sett på som én dimensjon (DeMars, 2010). Endimensjonalitet betyr videre at modellen har ett enkelt mål for hver person som har tatt testen, og at eventuelle andre faktorer som kan ha påvirket et avgitt svar, blir behandlet som en tilfeldig feil for akkurat den individuelle oppgaven. Endimensjonalitet er en abstrakt idé. Ingenting i naturen er fullstendig endimensjonalt. Det betyr at i praksis så må vi nøye oss med å måle variabler vi konkluderer er endimensjonale nok. Hva som er nok, er kontekstavhengig.

Lokal uavhengighet innebærer at responsen som blir gitt til en oppgave i en test, skal være uavhengig av respons gitt til en annen oppgave i samme test (DeMars, 2010). Det vil alltid være sammenhenger eller korrelasjoner mellom oppgaver i en test, men oppgaver skal korrelere fordi de måler samme dimensjon, og ikke fordi de påvirker hverandre. Det skal ikke være slik at sannsynligheten for å svare riktig på en oppgave har en effekt for sannsynligheten for å svare riktig på en annen oppgave (Bjørnsen, 2018). Et eksempel er hvis en oppgave inneholder et hint som kan hjelpe deg i å løse en annen oppgave. Noen vil oppdage dette hintet, mens andre ikke oppdager det. Da er det ikke lokal uavhengighet.

3.4. Klassisk testteori (CTT)

Talldata som samles inn gjennom en kvantitativ undersøkelse må analyseres for blant annet å kunne adressere problemer med datamaterialet. Når det gjelder utvikling av tester, testskår, og det å kunne identifisere oppgaver/spørsmål/items som ikke fungerer kan CTT eller IRT benyttes (Hambleton & Jones, 1993).

CTT kjennetegnes av at fokuset er på testen som helhet, og at den råskår som oppnås er testavhengig. Det vil si at testen sin vanskegrad direkte påvirker skåren (Hambleton & Jones, 1993). CTT er fin å bruke underveis i arbeidet med å utvikle en test, spesielt med tanke på gjennomsnittsskår, standardavvik, og reliabilitet. En svakhet er at resultatene er utvalgsavhengig (Bjørnsen, 2018). Det vil for eksempel si at vanskegraden til en prøve er avhengig av hvilke elever som har tatt prøven, og elever sin dyktighet er avhengig av oppgavene som er med i prøven. En fordel med CTT er at antakelser som blir gjort i teorien er svake, slik at et datamateriale enklere tilfredsstiller kriteriene (Hambleton & Jones, 1993).

3.4.1. Analyser og CTT

Ulike analyser kan utføres med CTT for å analysere ulike sider ved datamaterialet. Nedenfor er analyser brukt i denne studien beskrevet.

For å teste reliabiliteten til måleinstrumentet ser man ofte på *Cronbachs alpha*, som måler indre konsistens i måleinstrumentet. Det vil si om oppgavene som utgjør måleinstrumentet henger sammen, om de måler det samme (DeVellis, 2017). DeVellis skriver videre at godkjente verdier for Cronbachs alpha varierer med formålet til testen, og at hans subjektive mening er at $\alpha > 0{,}80$ er en veldig god verdi.

Det er viktig at et måleinstrument måler én dimensjon om gangen. Gjennom en *faktoranalyse* kan vi se om testen inneholder flere dimensjoner eller faktorer, ved å se på samvariasjonen mellom oppgavene (DeVellis, 2017). Faktoranalyse er både et verktøy for å redusere kompleksiteten i et datamaterialet og for å avdekke mulige meningsfulle mønstre. Man ønsker å identifisere klynger av oppgaver, såkalte faktorer eller dimensjoner, som er høyt korrelert med hverandre. Slike klynger kan utgjøre ulike dimensjoner, noe som gjør at en test ikke er endimensjonal.

Det finnes flere ulike faktoranalyser (Pallant, 2013), og jeg har kjørt en Principal Component Analysis (PCA). Ofte benyttes råskår i en faktoranalyse. Men PCA på råskår har en tendens til å konkludere med for mange dimensjoner, da råskår ikke tar hensyn til oppgavenes vanskegrad (Guilford, 1941). Derfor har jeg kjørt en PCA med standardiserte residuale. En standardisert residual er et forholdstall: differansen mellom en observert verdi og forventet verdi og standardavviket, og regnes ut med følgende formel:

$$standardisert\ residual = \frac{(forventet\ respons - faktisk\ respons)^2}{standardavviket}$$

Resultatet av en faktoranalyse kommer ut med egenverdi for hver eventuelle dimensjon. En egenverdi lavere enn 2,0 gir en indikasjon på at måleinstrumentet er endimensjonalt nok.

Med en *independent-samples t-test* (*t*-test) kan man undersøke om det er en signifikant forskjell i gjennomsnittet mellom to uavhengige grupper, for eksempel kjønn eller klassetrinn (Pallant, 2013).

3.5. Item response theory (IRT)

Hensikten med å bruke IRT i denne studien er få tak i elevers dyktighet. For å få til dette må vi vite noe om hvordan elevers dyktighet avgjør hvordan de responderer på en oppgave. IRT har fokus på item (oppgave/spørsmål) i stedet for testen som helhet som i CTT (Hambleton & Jones, 1993).

Det som kjennetegner IRT er sammenhengen mellom dyktigheten (θ), som blir målt gjennom et måleinstrument (f.eks., en matematikktest), og responsen som blir gitt til et item (DeMars, 2010). Et item kan være en matematikkoppgave eller et annet spørsmål som det skal avgis et svar på.

3.5.1. Ulike IRT-modeller

IRT kan brukes både til dikotome og polytome data. Dikotom betyr at responsen gitt til en oppgave blir registrert i to kategorier, 0 (feil) eller 1 (riktig). Polytome data har flere enn to kategorier (DeMars, 2010), for eksempel 1, 2, 3, og 4, der de ulike kategoriene, for eksempel, kan representere ulike avgitte svar.

De typiske modellene som blir brukt ved dikotome data er 1PL, 2 PL, og 3 PL. Det som skiller de ulike modellene fra hverandre er antall parametere som blir brukt når sammenhengen mellom dyktigheten (θ) og responsen (0/1) skal finnes (DeMars, 2010).

I 3PL benyttes tre parametere: diskriminering (*a*), vanskegrad (*b*), og gjetting (*c*). Parameterne *a* og *b* blir forklart senere. Parameteren *c* betyr at elever med lav dyktighet er forventet å bare greie å svare riktig på oppgaven ved å gjette (DeMars, 2010). Den matematiske formelen til 3 PL er:

$$P(\theta) = c_i + (1 - c_i)\frac{e^{1,7a_i\,(\theta - b_i)}}{1 + e^{1,7a_i(\theta - b_i)}}$$

P(θ) indikerer sannsynligheten for riktig svar på en oppgave, gitt θ og de tre parameterne *a*, *b* og *c*.

I 2PL er gjetteparameteren *c*, satt til null. Parameterne *a* og *b* benyttes (DeMars, 2010). Den matematiske formelen for 2 PL er:

$$P(\theta) = \frac{e^{1,7a_i\,(\theta - b_i)}}{1 + e^{1,7a_i(\theta - b_i)}}$$

P(θ) indikerer sannsynligheten for riktig svar på en oppgave, gitt θ og de to parameterne *a* og *b*.

I 1PL er diskrimineringsparameteren, *a,* satt til den samme verdien for alle oppgaver (DeMars, 2010). Den matematisk formelen for 1 PL er:

$$P(\theta) = \frac{e^{1,7a\,(\theta - b_i)}}{1 + e^{1,7a(\theta - b_i)}}$$

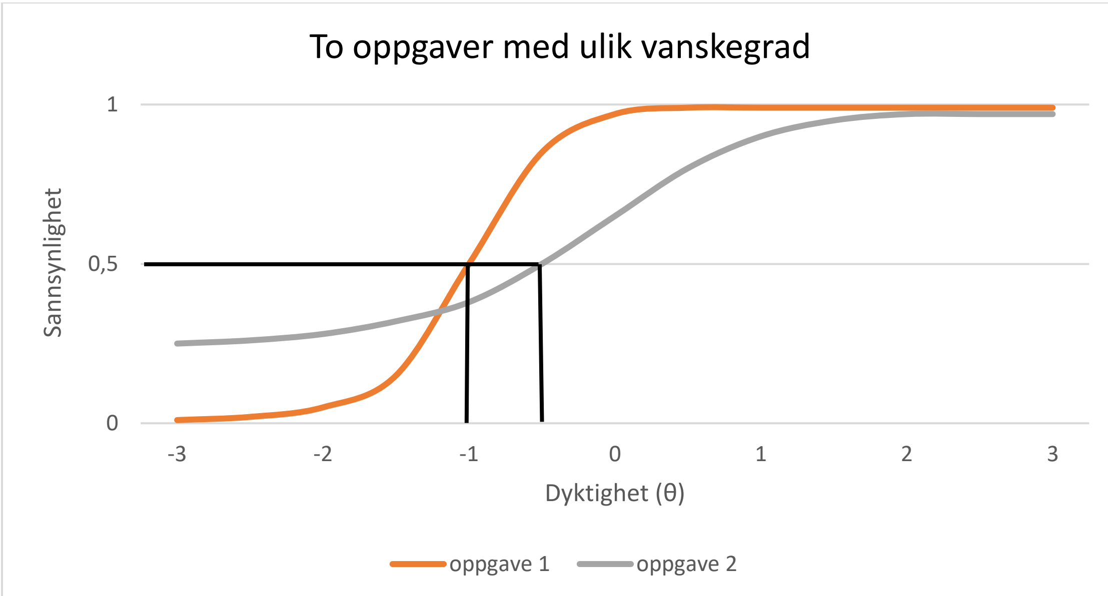
P(θ) indikerer sannsynligheten for riktig svar på en oppgave, gitt θ og parameteren *b*.

I min studie vil jeg bruke 2 PL og denne modellen blir beskrevet mer i detalj nedenfor.

3.5.2. IRT 2 PL

En elev som tar en test hvor testen blir analysert ved hjelp av IRT vil få ut en IRT-skår. Denne skåren kalles i IRT ofte dyktighet (θ) og dyktigheten tar i betraktning vanskegraden til oppgavene og diskrimineringen. Oppgaver som diskriminerer høyere er mer reliable og blir vektet tyngre. Det gjør at en IRT-skår er mer reliabel enn antall korrekte svar.

IRT 2 PL tar, som tidligere nevnt, utgangspunkt i et matematisk uttrykk som sier noe om hvordan responsen avhenger av dyktigheten. Denne sammenhengen kan framstilles i en *item response function* (IRF), se *Figur 5*.

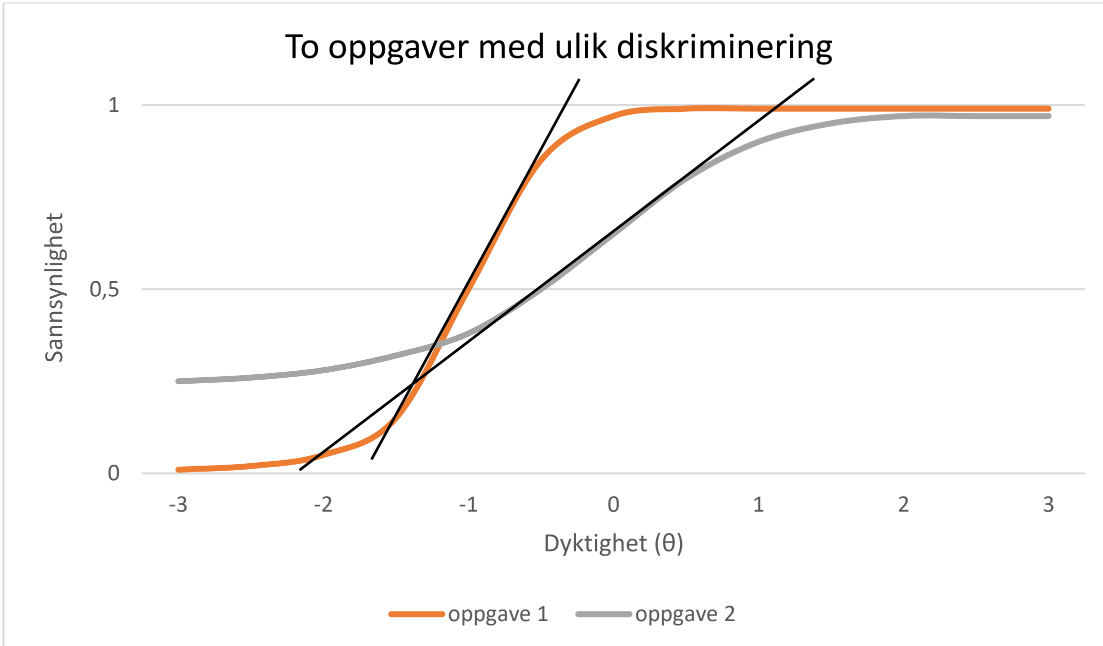


Figur 5. IRF – b-verdi for to oppgaver.

En oppgave sin vanskegrad og diskriminering blir oppsummert i en IRF. Et annet navn på denne framstillingen er *item-characteristic curve* (ICC). Som oftest vil en slik IRF være s-formet og ulike deler av kurven gir informasjon om de to parameterne *b*, oppgaven sin vanskegrad og *a*, oppgaven sin diskriminering (DeVellis, 2017).

Figur 5 viser sannsynlighet for riktig svar på to oppgaver for elever med ulik dyktighet. Den loddrette aksen viser sannsynligheten for riktig svar og den vannrette aksen viser dyktigheten. Oppgavens vanskegrad (*b*-verdi) defineres ut fra der sannsynligheten for riktig svar er 50 %, og kan leses av på den vannrette aksen. For oppgave 1 er $b = -1$, og for oppgave 2 er $b = -0{,}5$. Det betyr at oppgave 1 har en lavere vanskegrad enn oppgave 2. Vanskegraden til en oppgave går i teorien fra $-\infty$ til $+\infty$. I praksis vil vanskegraden gå fra -3 til $+3$.

Diskrimineringen (*a*-verdi) til oppgaven styrer hvor bratt kurven blir. En oppgave som diskriminerer sterkt mellom elever med lav og høy dyktighet vil være brattere rundt oppgavens vanskegrad, enn en oppgave med svak diskriminering (Bjørnsen, 2018, s. 6). Dette kan vi se i *Figur 6*, hvor stigningen til to oppgaver er markert med ei svart linje. Oppgave 1 har en brattere stigningskurve rundt oppgaven sin vanskegrad, enn hva som er tilfellet for oppgave 2. Det betyr at oppgave 1 skiller mer effektivt mellom de som får til oppgaven og de som ikke får til oppgaven, enn hva som er tilfellet med oppgave 2. Oppgave 1 vil dermed ha en høyere *a*-verdi enn oppgave 2.



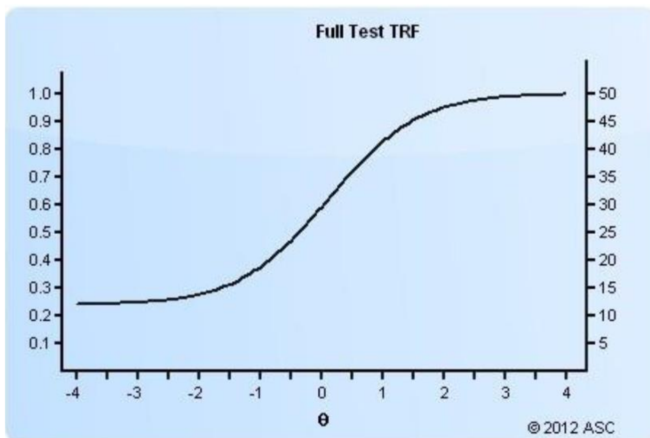
Figur 6. IRF – diskriminering for to oppgaver.

I en IRT-analyse får man ut ulike verdier for hver oppgave. De viktigste er beskrevet over, nemlig *a*- og *b*-verdi. I tillegg får man ut gjennomsnittsdyktigheten til elever som har svart riktig og feil på oppgaven, samt hvor stor andel av elevene som har svart riktig på oppgaven (løsningsprosent).

En annen viktig verdi er *item point-biserial correlation with θ* (T-Rpbis), som er et mål på hvor godt en oppgave skiller eller korrelerer mellom gjennomsnittlig dyktighet til elever som har fått til en oppgave, med gjennomsnittlig dyktighet til elever som ikke har fått til oppgaven (Guyer & Thompson, 2014). Hvis denne verdien er for lav, det vil si < 0,3, så har ikke de «rette» elevene fått til oppgaven. Det kan bety at flere elever med lav dyktighet, som ikke burde fått til oppgaven, har fått riktig svar; eller at flere elever med høy dyktighet, som burde fått til oppgaven, ikke har fått riktig svar. En negativ T-Rpbis indikerer en veldig dårlig oppgave, der elever med høy dyktighet svarer feil og elever med lav dyktighet svarer riktig. T-Rpbis på 0 tilsier at oppgaven ikke skiller mellom elever med høy og lav dyktighet i det hele tatt (Guyer & Thompson, 2014).

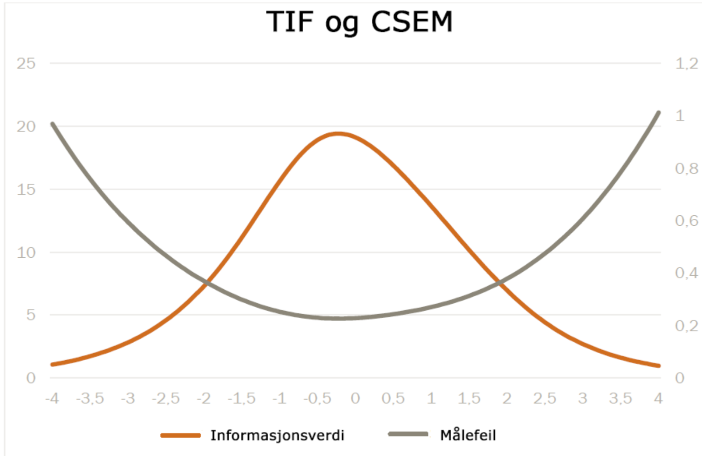
Oppgaver som ikke passer inn i IRT-modellen blir flagget for misfit (*standarized residual (z) fit statistic*) (Guyer & Thompson, 2014), hvis tilhørende $p < 0,05$. Det bør foretas en kvalitativ vurdering av oppgaver med misfit, for å vurdere om oppgavene må ut av testen eller om de kan være med. I tillegg bør en analysere korrelasjonen mellom instrumentet *med* misfit-oppgavene og instrumentet *uten* misfit-oppgavene, for å finne ut om oppgavene med misfit forstyrrer instrumentet—det vil si om misfit-oppgavene må ut eller om de kan beholdes. Målefeil vil alltid gjøre korrelasjoner lavere enn hvis målingen hadde vært helt presis, og derfor har jeg foretatt en analyse av «disattenuated correlation» som korrigerer for dette. (Schumacker & Muchinsky, 1996).

I IRT 2 PL får man også ut en del informasjon rundt testen som helhet. Alle IRF summert gir en *test response function* (TRF) (se *Figur 7*). En TRF viser dermed en oppsummering av alle oppgavene i en test. Diagrammet viser forventet skår som en funksjon av dyktigheten (θ), for en test som inneholder 50 oppgaver. For eksempel, en elev med θ = −1 har omtrent 40 % sannsynlighet til å få til om lag 20 oppgaver.



Figur 7. Test response function (Guyer & Thompson, 2014).

En *test information function* (TIF) gir en oversikt over informasjonsverdien til en test (*Figur 8*). Den enkelte oppgave sin informasjonsverdi er et produkt av sannsynligheten for riktig svar, sannsynligheten for galt svar, og oppgavens diskriminering i annen potens (Bjørnsen, 2018). Summeres dette for hver oppgave får vi TIF for hele testen. Målefeil representerer det motsatte av informasjonsverdien og presenteres i *CSEM function*. Målefeilen i IRT er avhengig av elevens skår. Det gjør at målefeilen er ulik for ulike områder av skalaen (Bjørnsen, 2018, s. 7). Når informasjonsverdien er høy, er målefeilen lav, og motsatt.



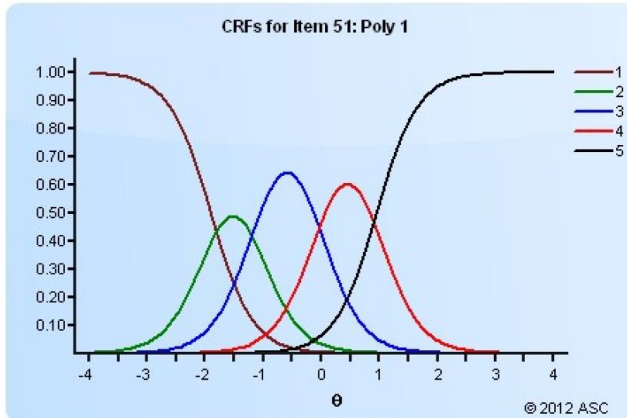
Figur 8. Informasjon og målefeil for en hel test (Bjørnsen, 2018).

Diagrammet viser at informasjonsverdien er høyest rundt θ = −0,25. Tilsvarende er målefeilen lavest rundt θ = −0,25. Det betyr at testen som er gjengitt i *Figur 8* gir mest presis informasjon for personer som har en dyktighet rundt θ = −0,25. For personer med mye lavere eller høyere dyktighet vil denne testen gi mindre informasjon, og målefeilen vil være større. Dette er det viktig å være oppmerksom på når resultater skal tolkes.

Funksjonene over er et kraftig verktøy i prøvekonstruksjon, fordi det gjør det mulig å sette sammen en prøve slik at den måler med størst presisjon akkurat der en ønsker på dyktighetsskalaen (Bjørnsen, 2018, s. 8). Denne studien har som formål å teste elevers misoppfatninger, og da er det forventet at elever med lav dyktighet har flere misoppfatninger enn elever med høy dyktighet. Derfor er det ønskelig med en test som har størst informasjonsverdi og lavest målefeil rundt en forholdsvis lav dyktighet.

En *differential item functioning* (DIF) gjør det mulig å se om noen oppgaver favoriserer en bestemt gruppe framfor en annen gruppe (Bjørnsen, 2018), for eksempel om oppgavene eller testen som helhet favoriserer gutter framfor jenter, eller innfødte framfor innvandrere. Gitt at to grupper har samme underliggende ferdighet, så ønsker vi at en oppgave skal oppleves like lett eller like vanskelig for begge gruppene. Hvis dette ikke er tilfellet, men at oppgaven for eksempel oppleves lettere for gutter enn for jenter, så favoriserer oppgaven gutter og vi sier at oppgaven har DIF.

Til nå er dikotome data blitt beskrevet, men analyser med polytome data kan også gjøres med IRT 2 PL. På samme måte som vi får ut IRF for en oppgave med dikotome data, får vi en *category response function* (CRF) for polytome data. Et eksempel på en CRF er gitt i *Figur 9*.



Figur 9. Eksempel på en category response function (CRF) for polytome data.

En CRF, også kalt et plott, gir en oversikt over sannsynligheten for ulike avgitte svar (kategorier) avhengig av dyktigheten (θ). I *Figur 9* er svart linje riktig svar og de andre fargene er andre avgitte ukorrekte svar. Hvis vi ser på det avgitte svaret som er representert med brun linje, så er dette svaret mest utbredt blant elever med svært lav dyktighet og sannsynligheten for å avgi dette svaret avtar med økende dyktighet. Når dyktigheten passerer 0 så er dette svaret fraværende. Riktig svar (svart linje) forekommer ikke før dyktigheten er rundt −1, og øker med økende dyktighet. Elever med dyktighet > 2,00 vil med nesten 100 % sannsynlighet avgi riktig svar på denne oppgaven.

3.6. Signifikans

Statistisk signifikans er et begrep som ofte går igjen i kvantitative analyser (Cohen, Manion & Morrison, 2018). Å teste for statistisk signifikans dreier seg om å ta høyde for usikkerheten som oppstår, når vi kun har data fra et representativt utvalg, men ønsker å uttale oss om hele populasjonen. Hvis en studie omfatter absolutt alle mennesker i Norge, så er ikke begrepet statistisk signifikans relevant, da det ikke finnes usikkerhet i et datamateriale som omfatter absolutt alle.

En måte å regne ut statistisk signifikans på, er å bruke følgende formel:

$$z = \frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{\sqrt{(\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2})}}$$

Fra en z-tabell (one-tailed) leser man så av en ny verdi: *p*-verdien for statistisk signifikans. En *p*-verdi < 0,05 sies ofte å være statistisk signifikant..

I utgangspunktet er en forskjell signifikant hvis *p* < 0,05. Men ettersom jeg har utført 46 slike utregninger på det samme datamaterialet må det foretas en *Bonferroni-korreksjon* for å minske sannsynligheten for å feilaktig konkludere med signifikante forskjeller. Ny p-verdi blir da 0,05/46 = 0,001. Det vil si at $p < 0,001$ før en forskjell er signifikant.

4. Metode

I denne studien har jeg undersøkt utbredelsen av misoppfatninger knyttet til brøk på ungdomstrinnet og sett på om det finnes en struktur eller et mønster i misoppfatningene. For å finne et svar på hvor stor utbredelsen er, har jeg skaffet meg en oversikt over hvor stor del av elevene som har en misoppfatning, gjennom en kvantitativ metode. En kvantitativ metode innebærer at jeg når ut til et større antall elever, enn om jeg hadde valgt en kvalitativ metode. For å se om det eksisterer en struktur i misoppfatningene, har jeg undersøkt de innsamlede kvantitative dataene med tanke på å finne mønster og sammenhenger i misoppfatningen. Jeg har utviklet et måleinstrument, et hefte med brøkoppgaver, for å prøve å finne svar på mine forskningsspørsmål.

Brøk har mange aspekter, og med måleinstrumentet ønsket jeg å få fram misoppfatninger knyttet til del-av-hel-aspektet, da dette anses som å være det mest grunnleggende innenfor emnet brøk (Behr et al., 1983). Det finnes ikke noen ferdige diagnostiske tester til akkurat dette formålet, og det betyr at en del av masteroppgaven har bestått i å utvikle et måleinstrument som passer til mitt formål.

Til analyse av dataene som er samlet inn har jeg valgt å bruke SPSS (IBM Corporation, 2017) og Xcalibre (Assessment Systems Corporation, 2014). SPSS (CTT) egner seg godt til å legge inn talldata, kode ulike feilsvar, og gjøre enkle analyser med datamaterialet og måleinstrumentet. Xcalibre (IRT 2 PL) egner seg godt til å gå mer i dybden på datamaterialet for blant annet å finne dyktigheten til elevene, vanskegrad til oppgavene, hvor godt en oppgave diskriminerer mellom elever med lav dyktighet og høy dyktighet, strukturer i misoppfatningene, og generelt hvor godt måleinstrumentet måler det jeg er ute etter.

4.1. Utvikling av måleinstrumentet

For å kunne bruke en test til å måle må man ha en klar formening om hva man skal måle (Wu et al., 2016). Jeg skal se på misoppfatninger knyttet til del-av-hel-aspektet til brøk og det betyr at jeg må vite hvilke misoppfatninger jeg ønsker å undersøke og hvordan jeg skal få undersøkt de. I mitt tilfelle vil den latente variabelen bli misoppfatninger.

Ettersom det finnes mange misoppfatninger knyttet til brøk, bestemte jeg meg, etter en liten litteraturgjennomgang, for å undersøke fem misoppfatninger, som er beskrevet i teorikapittelet. Alle fem misoppfatningene er knyttet til del-av-hel-aspektet til brøk.

A – Nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse.

B – Jo større nevner eller teller, dess større brøk og motsatt.

C – Brøkstrek er lik komma.

D – Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken.

E – Teller eller nevner er et isolert tall.

For å gjøre det enklere å referere til de ulike misoppfatningene, så har hver misoppfatning blitt tildelt en bokstav. En henvisning til misoppfatning A, vil fra nå av bety at jeg refererer til misoppfatningen *nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse*.

Ettersom jeg ikke fant et ferdig utviklet måleinstrument som tester det jeg skal undersøke i denne studien, så måtte jeg utvikle mitt eget. Det vil si at jeg måtte finne oppgaver og sette dem sammen til en test. Det er flere ting å ta hensyn til når man skal lage sin egen test, da en test kan ha mange ulike formål: (1) Skal testen være diagnostisk? (2) Skal testen samle informasjon om en kommune, eller et fylke? (3) Ligger fokuset på å lage gode oppgaver til framtidig bruk? (4) Er formålet å finne andel elever på ulike nivå (Wu et al., 2016)? Verken punkt 2, 3, eller 4 passer til mitt formål. En måte å få tak i elevers misoppfatninger på er å bruke diagnostiske oppgaver (Brekke, 2002; Cohen et al., 2018). Det vil si at jeg har laget en test som består av diagnostiske oppgaver.

4.1.1. Kriterier for valg av oppgaver

Brøkoppgavene i testen er plukket ut på grunnlag av flere kriterier som er hentet fra Cohen et al. (2018, s. 574-575): (1) *Oppgavene skal teste brøkkunnskaper i del-av-hel aspektet*. (2) *Oppgavene skal være diagnostiske*. (3) *Det faglige innholdet i oppgaven skal være kjent for elevene*. Elevene lærer om brøk fra 4.trinn og oftest starter innlæringa med del-av-hel. Det betyr at det aspektet som testes her skal være kjent for alle elever på ungdomstrinnet. (4) *Mengde tekst i oppgavene skal ikke være for krevende*. Ingen av oppgavene er gitt i kontekst, da jeg ikke ønsker at leseferdigheter skal komme i veien for tolkningen av oppgavene. (5) *Alle oppgavene i heftet skal være uavhengige av hverandre*. Det betyr at om du greier å løse en oppgave, så skal ikke det kunne påvirke om du greier å løse en annen oppgave. (6) *Heftet må inneholde nok oppgaver til å teste hver misoppfatning, samtidig som oppgaveheftet ikke må inneholde for mange oppgaver*.

For å finne passende enkeltoppgaver søkte jeg først i allerede validerte instrument som: Alle Teller! (McIntosh, 2007), gamle nasjonale prøver i regning, og FRAMM (Matematikksenteret, u.å.-a). Flere artikler om brøk og misoppfatninger ble også gjennomgått og oppgaver ble hentet fra Charalambous og Pitta-Pantazi (2007). Ettersom testen er diagnostisk er det viktig å ha flere oppgaver som tester det samme (Cohen et al., 2018), det vil si, oppgaver som tester den samme misoppfatningen. De resterende oppgavene laget jeg selv, med tanke på å få nok oppgaver til hver misoppfatning og samtidig en variasjon i type oppgaver. Se *Vedlegg 1* for oppgaveheftet og *Vedlegg 2* for en oversikt over innhold i oppgavene og hvor de ulike oppgavene er hentet fra. En oversikt over misoppfatningene med tilhørende oppgaver er gjengitt i *Tabell 2*.

Tabell 2. Oversikt over misoppfatninger og tilhørende oppgaver.

Misoppfatning	**Markering**	**Oppgave**
Nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse	A	1, 3, 6, 7, 13
Jo større nevner eller teller, dess større brøk og motsatt	B	2, 5, 11, 14, 16, 17, 18, 20, 24
Brøkstrek er lik komma	C	9
Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken	D	4, 8, **10**, **15**, 21
Teller eller nevner er et isolert tall	E	**10**, 12, **15**, 19, 22, 23

Oppgave 10 og 15 står oppført under to misoppfatninger. Før gjennomføring var de to oppgavene sett på som å høre til under misoppfatning D. Etter gjennomføring viste elevsvar at både misoppfatning D og E var til stede i elevene sine forklaringer. Samme avgitte svar ble begrunnet både ut fra misoppfatning D og E. Derfor er oppgave 10 og 15 ikke med i analysene over elevsvar.

I heftet er det med én oppgave som tester misoppfatning C, *brøkstrek er lik komma*. Begrunnelsen for dette er at denne misoppfatningen egentlig hører til under aspektet tallstørrelse, men jeg ønsket å ha med én oppgave som tester denne misoppfatningen, da flere artikler, blant annet (Bill, 2003), omtaler denne misoppfatningen, og det er viktig for elever å vite at $\frac{1}{5}$ og 0,2 representerer samme tallverdi.

For å få et lite innblikk i hvordan elever har kommet fram til sine svar har oppgave 2, 4, 10, og 18 en forklaringsrute der elevene skal forklare eller begrunne sitt svar. En forklaring kan være med å underbygge om eleven har en misoppfatning knyttet til oppgaven eller ikke.

En test må ikke bli for omfattende, da det kan resultere i at elevene mister konsentrasjonen (Cohen et al., 2018). Det kan føre til at oppgaver lengre bak i heftet får en høyere andel ubesvart eller høyere andel feilsvar enn oppgaver lenger fram i heftet. For å minske dette problemet, er det en mulighet å lage flere hefter hvor en oppgave står på ulike plasser i de ulike heftene, såkalt «rotated booklet design» (Wu et al., 2016). Jeg laget derfor 5 hefter, hvor oppgavene er roterte ved hjelp av https://www.random.org/lists/. Det medfører at oppgaver langt bak i heftet kommer lengre fram i andre hefter, og jeg har med dette grepet prøvd å unngå at siste oppgave får større andel ubesvart grunnet sin plassering enn oppgaver lenger fram. *Tabell 3* viser gjennomsnittlig skår for de roterte heftene. Det kan se ut til at rekkefølgen på oppgavene i de ulike heftene ikke har betydning for elevenes avgitte svar, da gjennomsnittlig skår for hvert heftet ligger nær gjennomsnittlig skår for alle heftene samlet.

Tabell 3. Gjennomsnittlig råskår for de ulike oppgaveheftene.

Oppgavehefte	Antall elever	Snitt skår
Nr. 1	136	18,82
Nr. 2	80	18,61
Nr. 3	123	18,71
Nr. 4	132	18,56
Nr. 5	127	18,40
Total	598	18,62

4.2. Pilotering

Det er viktig å pilotere oppgaver som skal brukes i en test for å få et innblikk i hvordan oppgavene fungerer (Cohen et al., 2018).

Før pilotering gjorde jeg noen endringer på noen oppgaver etter innspill fra veileder. Deretter fikk jeg ansatte og kolleger fra Matematikksenteret ved NTNU til å gå igjennom alle oppgavene. Hensikten var å få validert oppgavene, spesielt med tanke på om oppgavene kunne brukes diagnostisk til å få fram misoppfatninger knyttet til brøk. Oppgavene ble ansett å være gode til sitt formål.

Piloteringen ble utført med seks elever fra 8.trinn. Denne piloteringen ble utført som om det var en endelig gjennomføring. Hensikten med denne piloteringen var å se hvor lang tid elevene brukte på å besvare alle oppgavene i heftet og om det var noen oppgaver som var tvetydige eller for vanskelige for elevene. Elevene brukte fra 15 min til 30 min på piloteringen. Alle elevene mente at oppgavene var oversiktlige og at ingen av oppgavene bød på utfordringer knyttet til det oppgaven etterspør. På grunnlag av tilbakemeldingene fra piloten ble ingen oppgaver endret før gjennomføring.

4.3. Gjennomføring av undersøkelsen

Deltakende elever kom fra skoler spredt rundt i landet: Nordland, Trøndelag, Oppland, Østfold, Vestfold, og Rogaland. En fordel med et såpass spredt utvalg kan være at utvalget blir mer representativt. Ulempen var at jeg mistet muligheten til å være tilstede under alle gjennomføringene. Jeg var kun til stede ved gjennomføring på én skole i Trøndelag.

Testen ble gjennomført på papir uten hjelpemidler. Kun navn på skole, klassetrinn og kjønn ble registrert. En besvarelse kan dermed ikke spores tilbake til en enkelt elev, og undersøkelsen er dermed anonym.

Før gjennomføring fikk elevene beskjed om å svare på alle oppgavene, samt skrive forklaring til de oppgavene som krevde det og generelt gjøre sitt beste. Basert på piloteringen ble avsatt tid til gjennomføringen satt til 45 minutter, for at alle elever skulle ha nok tid til å svare på alle oppgavene.

Fra oktober til desember 2018 ble testen gjennomført av 347 elever fra åtte ulike skoler på 8.trinn og 251 elever fra åtte ulike skoler på 10.trinn. Til sammen deltok 598 elever fordelt på 295 gutter, 283 jenter og 20 elever som ikke hadde oppgitt kjønn.

4.4. Bearbeiding og analyse av datamaterialet

For å kunne dra nytte av svarene elevene har avgitt på oppgavene må alle avgitte svar bli omgjort til talldata slik at analyser kan bli utført. Jeg har valgt å bruke SPSS og Xcalibre til analyse av datamaterialet for å finne svar på mine forskningsspørsmål. SPSS ble i all hovedsak brukt til å registrere og sammenligne data, og til å utføre spesifikke analyser. Xcalibre ble brukt for å gå mer i dybden på datamaterialet og for å validere måleinstrumentet. I tillegg brukte jeg Excel for å sortere og filtrere data.

4.4.1. Bearbeiding og analyser utført i SPSS

Oppgavene ble lagt inn i SPSS hvor jeg registrerte rett eller feil (rett = 1 og feil = 0) for hver enkelt oppgave. I tillegg kodet jeg alle oppgavene en gang til, basert på type feilsvar (typiske misoppfatningssvar) og ubesvart. Et eksempel med koder for oppgave 17, for andre gangs koding, er gjengitt i *Tabell 4*. Oppgaven ber elevene finne en brøk som har dobbelt så stor verdi som $\frac{1}{6}$.

Tabell 4. Oversikt over koder til oppgave 17.

Kode	Avgitt svar
1	$\frac{1}{3}$ riktig svar
2	$\frac{2}{12}$
3	$\frac{1}{12}$
8	Andre svar enn de over
9	Ubesvart

For oppgave 17 ble riktig svar kodet med 1. Besvarelser med feilsvaret $\frac{2}{12}$ ble kodet med kode 2 og feilsvaret $\frac{1}{12}$ ble kodet med 3. Andre svar ble kodet med 8 og ubesvart ble kodet med 9. Grunnen til denne kodingen er at SPSS gir muligheter for oversikter over andel elever som har svart de ulike feilsvarene, og det blir enkelt å sammenligne på tvers av ulike grupper, som kjønn, klassetrinn, eller skole. Se *Vedlegg 3* for kodeskjema for alle oppgavene.

Følgende analyser ble gjennomført i SPSS: (1) En *Principal Component Analysis* (faktoranalyse) be utført for å se om måleinstrumentet besto av flere dimensjoner; (2) En *t*-test ble utført for å se om det er en statistisk signifikant forskjell mellom elever på 8.trinn og elever på 10.trinn, både med tanke på råskår (verdi fra CTT) og dyktighet (verdi fra IRT); (3) For å teste reliabiliteten til måleinstrumentet ble en analyse gjennomført for å få ut en verdi for Cronbachs alpha.

4.4.2. Analyser utført med IRT

Jeg har gjennomført flere analyser med Xcalibre. Først ble en standard 2 PL med dikotome data for alle elever gjennomført. Det ga meg verdier for måleinstrumentet som helhet og for hver enkelt oppgave, i tillegg til verdier for misfit og DIF.

For å få ut verdier for oppgavene sin vanskegrad basert på de ulike trinnene, har jeg gjennomført separate analyser for 8.trinn og for 10.trinn. I tillegg har jeg gjennomført en analyse med polytome data for å få ut verdier for alle feilsvar, samt en CRF for hver oppgave.

Alle verdier som er oppgitt i resultatkapittelet kommer fra de nevnte analysene ovenfor.

4.4.3. Bearbeiding av data, analyser og forskningsspørsmålene

For å finne svar på forskningsspørsmål 1, om hvor stor utbredelsen av misoppfatningene er, har jeg: (1) Funnet andel elever med avgitte svar som kan tyde på en misoppfatning; (2) Laget et premiss for når elever kan sies å ha en misoppfatning. Premisset blir presentert i kapittel 5; (3) Laget tabeller som presenterer resultater basert på mitt premiss; (4) Delt elevene inn i nivå etter dyktighet, for å vise hvilke elever som har misoppfatninger; og (5) Utført en polytom analyse i IRT for å vise utbredelsen av feilsvar knyttet til dyktighet.

For å svare på siste del av forskningsspørsmål 1, om det er en endring fra 8.-10.trinn, har jeg: (1) Sammenlignet elever på 8.trinn og 10.trinn med tanke på løsningsprosent og andel feilsvar for hver oppgave; (2) Brukt *t*-test for å se om forskjellene mellom 8.trinn og 10.trinn er statistisk signifikante, både med hensyn til råskår og dyktighet; og (3) Sett på enkeltoppgaver for å se om det er en statistisk signifikant forskjell mellom elever på 8.trinn og 10.trinn som har avgitt riktig svar og feilsvar som kan tyde på en misoppfatning.

For å svare på forskningsspørsmål 2, om det eksisterer et hierarki i misoppfatningene, har jeg sett etter om det er en sammenheng mellom oppgavenes vanskegrad og misoppfatningen de tester.

4.5. Reliabilitet og validitet

Når en test skal måle misoppfatninger, så er det essensielt at oppgavene tester for misoppfatninger og ikke andre variabler som leseferdigheter eller utholdenhet. På samme tid må måleinstrumentet være konsistent, det vil si vise stabilitet i målingene. Det innebærer at skåren som måleinstrumentet produserer ikke skal endre seg, så fremt det ikke har vært en reell endring av variabelen som blir målt. En perfekt reliabel test skal reflektere en sann skår og ingenting annet. Dette er i prinsippet uoppnåelig, da andre utenforstående faktorer alltid vil påvirke skåren (DeVellis, 2017).

Det finnes flere statistiske metoder for å beregne reliabilitet, men alle har det til felles at de tar utgangspunkt i den sanne skåren, en observert skår, og et estimat for feil.

$$sann\ skår\ = observert\ skår - feil$$

$$reliabilitet = \frac{sann\ skår}{observert\ skår}$$

Validitet (gyldighet) refererer til om testen måler det den er ment til å måle. Det finnes ikke noen analyser som kan utføres for å avgjøre validitet, men det handler om å samle bevis for at testen måler det den skal måle (Pallant, 2013).

Ofte vil man finne tre typer validitet som blir diskutert i kvantitative metoder: innholdsvaliditet, kriterievaliditet, og teoretisk validitet (DeVellis, 2017). *Innholdsvaliditet* handler om oppgavene i en test reflekterer domenet som skal undersøkes. Hvis en lærer skal lage en gloseprøve i engelsk, for eksempel, så blir ikke prøven valid om læreren legger inn franske gloser. For å ha *kriterierelatert* validitet kreves det at en oppgave eller en test kan knyttes til et kriterium, slik at testen forutsier en oppførsel den er designet til å forutsi. *Teoretisk* validitet handler om å finne bevis for at testen som helhet fanger opp konseptet den er designet til å fange opp (DeVellis, 2017; Pallant, 2013).

Denne studien skal undersøke misoppfatninger knyttet til brøk, og da handler validitet om at testen må kun inneholde oppgaver som tester misoppfatninger knyttet til brøk. Det kan ikke være slik at leseferdigheter blir avgjørende, eller at testen inneholder så mange oppgaver at den tester elever sin utholdenhet.

For å etterstrebe en så god validitet som mulig har jeg, som tidligere nevnt, fått fagpersoner til å vurdere oppgavene og heftet som helhet. Det er likevel en mulighet for at elever kan tolke oppgaver på en annen måte enn det som er tiltenkt. Koding av oppgaver er blitt gjort på en konsekvent måte, men jeg kan ikke utelukke at feil i kodingen har forekommet, selv om jeg har sjekket for mulige feil.

I oppgave 6 og 13 må jeg utføre en manuell vurdering. I oppgave 6 skal elevene markere $\frac{1}{5}$ av et rektangel. Selv om jeg har laget kriterier for hva jeg godtar som rett svar, så kan det medføre et validitetsproblem om jeg ikke retter konsekvent (Cohen et al., 2018). Etter en evaluering av elevsvar for oppgave 6 og 13, i samarbeid med matematikkdidaktikere, oppdaget jeg til dels stor uenighet angående svar som bør godtas som riktig eller feil. For å sikre validitet i analysen har jeg derfor valgt å ikke omtale de to oppgavene i resultatkapittelet.

Oppgave 21 ble også etterhvert en omdiskutert oppgave. Før pilotering ble oppgaven validert til misoppfatning D, *differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken*. Men etter å ha studert elevsvar og notater fra elever rundt oppgaven, er jeg usikker på om misoppfatning D er det som blir testet i denne oppgaven. Oppgaven blir derfor ikke videre omtalt i resultatkapittelet.

4.6. Metodekritikk

Jeg ønsket primært å ha deltakende skoler fra nærområdet, slik at jeg kunne være til stede under alle gjennomføringene. Da dette viste seg vanskelig ble jeg nødt til å ta de skolene som takket ja til å delta. Det medførte en usikkerhet i gjennomføringen. Jeg kan ikke gå god for at alle elever gjorde så godt de kunne eller at alle elever fikk nok tid til å gjennomføre på en skikkelig måte. Jeg vet heller ikke om elever samarbeidet eller om noen elever fikk hjelp av lærer. Det samme gjelder for tidspunkt på dagen for gjennomføring og om alle lærere ga den samme informasjonen til elevene før gjennomføring.

4.7. Etiske forholdsregler

Alle forskere må forholde seg til forskningsetiske retningslinjer (NESH, 1993). Det innebærer at forskere må følge en del etiske og juridiske retningslinjer, for å sikre at forskningen er god og ansvarlig. For å tilfredsstille de etiske kravene, ble det ved oppstart av denne studien søkt om godkjenning til Norsk senter for forskningsdata. Tilbakemeldingen var at studien ikke var søknadspliktig, da studien samler inn anonyme data (*Vedlegg 4*).

5. Resultater

I dette kapittelet vil jeg først legge fram resultater fra analyser av selve måleinstrumentet, da det er viktig at måleinstrumentet fungerer som det er ment og at det tester det jeg sier det skal teste (Cohen et al., 2018). Deretter vil jeg gå inn på analyser på oppgavenivå for å vise at hver enkelt oppgave har akseptable verdier for parameterne *a* og *b*, samt for T-Rpbis. Videre vil jeg se på feilsvar som kan tyde på misoppfatninger for å kunne svare på første del av forskningsspørsmål 1. Først vil jeg gi en oversikt over utbredelsen, før jeg går mer i detalj og tar for meg én misoppfatning om gangen. Deretter vil jeg vise at det er en endring i andel elever som kan antas å ha en misoppfatning fra 8.–10.trinn, for å svare på siste del av forskningsspørsmål 1. Til slutt vil jeg vise at det finnes en mulig hierarkisk struktur i misoppfatningene, for å kunne svare på forskningsspørsmål 2.

5.1. Testen som måleinstrument

For å vise at måleinstrumentet fungerer til sitt formål, vil jeg i denne delen: (1) Vise verdier fra både CTT og IRT; og (2) Vise diagrammer fra analyse med IRT over fordelingen av oppgavenes vanskegrad, elevers dyktighet, informasjonsverdi og målefeil.

Tabell 5. Verdier basert på råskår fra CTT for hel test.

Test	Items	Alpha	Mean	Min	Median	Max
Full test	24	0,879	18,622	1	20	24

Tabell 5 visere talldata fra CTT. Analysen viser at Chronbachs alpha = 0,879.
En verdi > 0,80 viser at måleinstrumentet er koherent (DeVellis, 2017). Det vil si at oppgaveheftet har intern konsistens, oppgavene måler det samme, og treffer målgruppen som er elever på ungdomstrinnet. Gjennomsnittskåren er 18,622 (Mean), den laveste skåren er 1 og den høyeste er 24. To elever (0,3 %) har oppnådd en skår på 1 og 49 elever (8,2 %) har oppnådd en skår på 24.

Tabell 6. Verdier basert på Theta for hel test.

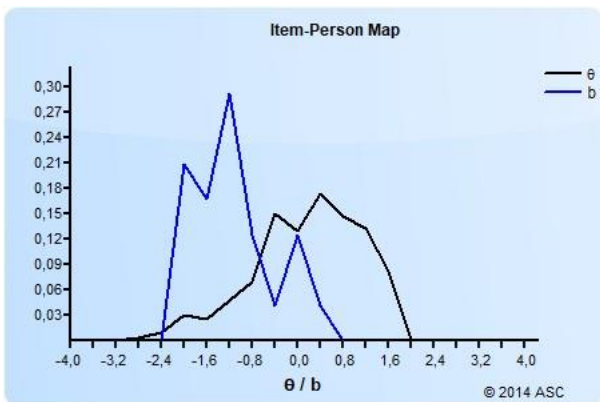
Test	Examinees	Mean	SD	SE	Min	Median	Max
Full Test	598	-0,018	0,956	0,0391	-2,913	0,116	1,436

Besvarelser fra 598 elever er analysert (*Tabell 6*). Elevene har fått en gjennomsnittsdyktighet (MEAN) på $\theta = -0{,}018$. Den laveste målte dyktigheten (Min) er $\theta = -2{,}913$ og den høyeste målte dyktigheten (Max) er $\theta = 1{,}436$.
Standardavviket (SD) = 0,956, viser at 68,2 % av elevene ligger innenfor ±1 standardavvik fra gjennomsnittet, det vil si fra $\theta = -0{,}974$ til $\theta = 0{,}938$. Standardfeilen (SE) er 3,9 %.

Tabell 7. Gjennomsnittsverdier for parameterne a og b for hel test.

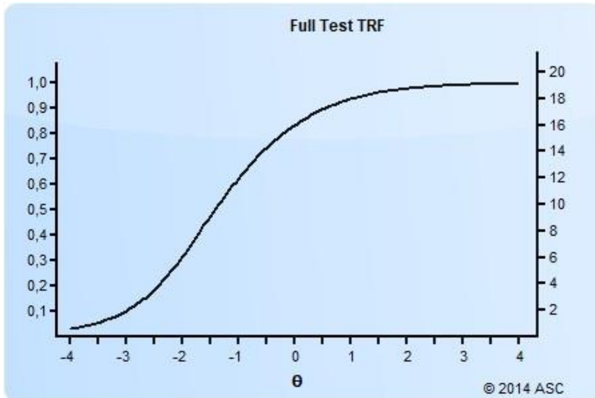
Parameter	Items	Mean	Min	Max
a	24	0,938	0,464	1,384
b	24	-1,309	-2,13	0,289

I *Tabell 7* er verdier til parameterne a og b for hele testen. Gjennomsnittet for *a*-verdien = 0,938. Det tyder på at oppgavene i testen skiller godt mellom elever med lav dyktighet og elever med høy dyktighet. Hensikten med en diagnostisk test, som i alle tester, er å kunne skille mellom elever som tar testen. *a*-verdier < 0,5 er ansett å være lave verdier (Guyer & Thompson, 2014). Gjennomsnittsvanskegraden til oppgavene (*b*-verdi) er −1,309, som viser at oppgavene i testen er forholdsvis lette, sett opp mot gjennomsnittsdyktigheten til elevene som er θ = −0,018.



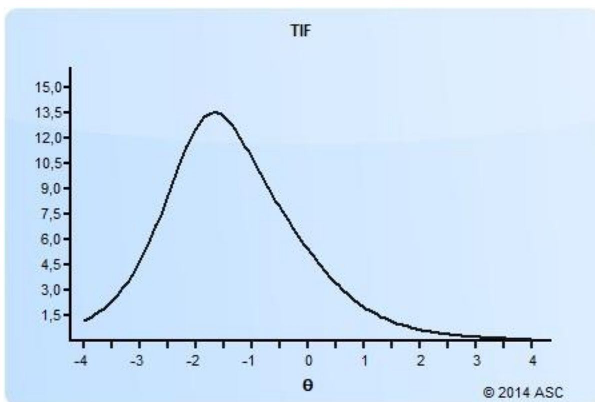
Figur 10. Oppgavenes vanskegrad og elevers dyktighet.

Vi kan se på fordelingen av oppgavenes vanskegrad sammenlignet med elevenes dyktighet. I *Figur 10* viser den blå linjen oppgavenes vanskegrad. Flesteparten av oppgavene kan karakteriseres som enkle, da de har en verdi som er lavere enn elevenes gjennomsnittsdyktighet. Den svarte linjen viser dyktigheten til elevene som har svart på oppgavene i heftet. Elevenes dyktighet er forskjøvet til høyre i forhold til vanskegraden til oppgavene. Det viser at mange elever har svart riktig på alle eller nesten alle oppgaver, men at flest oppgaver har en vanskegrad rundt der vi finner de minst dyktige elevene.



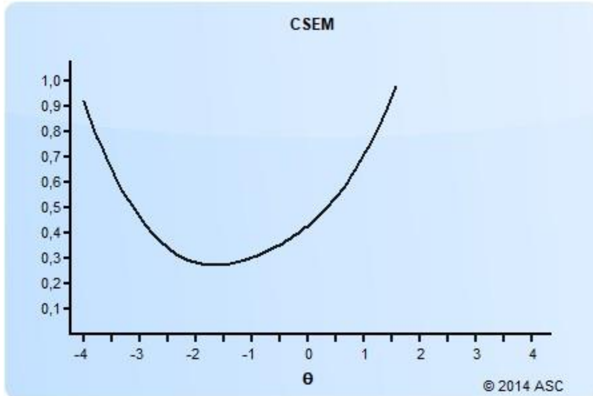
Figur 11. Testen sin test response function, TRF

Det samme ser vi i TRF-kurven i *Figur 11*, som er forskjøvet til venstre når vi tar utgangspunkt i θ = −0,018 som gjennomsnittlig dyktighet. Grafen i *Figur 11* viser at en elev med θ = 0 har om lag 80 % sannsynlighet for å få riktig svar på 16 oppgaver, og en elev med θ = −2,0 har om lag 30 % sjanse til å få riktig svar på 6 oppgaver.



Figur 12. Testinformasjon for hele testen, TIF.

TIF-kurven i *Figur 12* viser ved hvilken dyktighet (θ) måleinstrumentet gir mest informasjon. Maksimum informasjon er ved θ = −1,55. Testen gir dermed mest informasjon om elevene som har lavest dyktighet.



Figur 13. Måleusikkerhet for hele testen.

Figur 13 viser måleusikkerheten til måleinstrumentet. Målefeilen er lavest ved θ = −1,55. Målefeilen er derimot ganske mye større når dyktigheten blir høy eller veldig lav, det vil si når θ < −3,00 og θ > 0,50. De elevene vi er ute etter å måle med denne testen har dyktighet fra θ = −2,90 og opp mot θ = 0,0. Det betyr at målefeilen er akseptabel for de elevene vi ønsker å teste.

Ut fra tabellene og figurene ovenfor som viser måleegenskapene og reliabiliteten til måleinstrumentet, kan vi anta at måleinstrumentet måler det det skal måle hos de elevene vi er ute etter.

5.1.1. Oppgavene

Når vi har en test som består av ulike oppgaver er vi også interessert i å vite hvordan hver enkelt oppgave fungerer. Det betyr å få kjennskap til løsningsprosenten eller andel elever som har løst oppgaven riktig (P-verdi [merk: ikke det samme som *p*-verdi]), hvordan oppgavene korrelerer (T-Rpbis), hvor godt oppgaven diskriminerer/skiller mellom elever med lav dyktighet og høy dyktighet (*a*-verdi), og oppgaven sin vanskegrad (*b*-verdi). *Tabell 8* viser en oversikt over alle oppgavene i testen.

Tabell 8. Alle oppgavene i testen med tilhørende verdier.

Oppgave	N	P-verdi	T-Rpbis	a-verdi	b-verdi
1	598	0,81	0,493	0,770	-1,512
2	598	0,90	0,446	0,854	-2,095
3	598	0,51	0,401	0,495	-0,030
4	598	0,81	0,509	0,812	-1,430
5	598	0,91	0,550	1,379	-1,839
6	598	0,67	0,387	0,509	-0,933
7	598	0,76	0,439	0,631	-1,336
8	598	0,88	0,478	0,897	-1,852
9	598	0,57	0,688	1,195	-0,226
10	598	0,81	0,516	0,841	-1,411
11	598	0,92	0,447	0,959	-2,130
12	598	0,85	0,602	1,240	-1,421
13	598	0,68	0,343	0,464	-1,074
14	598	0,43	0,543	0,761	0,289
15	598	0,76	0,671	1,302	-0,919
16	598	0,93	0,496	1,220	-2,050
17	598	0,53	0,604	0,890	-0,103
18	598	0,67	0,607	0,935	-0,648
19	598	0,88	0,583	1,283	-1,592
20	598	0,93	0,530	1,384	-1,950
21	598	0,76	0,422	0,605	-1,351
22	598	0,87	0,377	0,668	-2,089
23	598	0,89	0,583	1,351	-1,639
24	598	0,92	0,473	1,061	-2,071

Løsningsprosenten (P-verdi) er oppgitt i prosentfaktor og varierer fra 0,43 til 0,93. Alle oppgaver har T-Rpbis > 0,3, som er satt som et krav til denne verdien. Det vil si at alle oppgaver korrelerer godt. En *a*-verdi bør være > 0,5 (Guyer & Thompson, 2014), for at oppgavene skal skille godt nok mellom elever med lav dyktighet og elever med høy dyktighet.

To oppgaver har *a*-verdi < 0,5. Det gjelder oppgave 3 og 13. En grunn til at oppgaver får lav *a*-verdi kan være at oppgaven er uvant for elevene. Det kan igjen føre til at elever med høy dyktighet som burde fått til oppgaven har avgitt et feil svar og at elever som ikke burde ha fått til oppgaven har avgitt riktig svar. I oppgave 13 har mange elever med høy dyktighet vært veldig unøyaktige i sin deling av en figur i tre deler. Det kan være at de er klar over at delene skal være like store, men at de ser på figuren som en skisse. Oppgavene er likevel didaktisk gode, da de gir informasjon om feilsvar som dyktige elever kan avgi.

Den enkleste oppgaven i testen er oppgave 11 (lavest *b*-verdi) og den vanskeligste oppgaven i testen er oppgave 14 (høyest *b*-verdi).

Oppgavene ble testet for misfit (*standarized residual (z) fit statistic*) og fire oppgaver ble flagget med $p < 0{,}05$. Det gjelder oppgave 15, 16, 20, og 23, der oppgave 16, 20, og 23 er blant oppgavene med høyest løsningsprosent i testen. Er det noe med oppgavene som skulle tilsi misfit? Oppgave 15 kan være uvant for elevene. I oppgaven skal elevene finne figurer med samme brøkverdi fargelagt, der figurene er delt i ulike brøkdeler og med ulike representasjoner som rektangel og sirkel som arealmodell og en mengdemodell. Jeg tror ikke elevene ofte møter en slik blanding av representasjoner i en og samme oppgave, om de i det hele tatt har gjort det. Det kan gjøre noen elever usikre og gi utslag i mange uventede svar.

For oppgave 16, 20, og 23 som alle har en løsningsprosent ≥ 89 %, er det forventet at alle elever med høy dyktighet skal svare riktig. Hvis flere elever med høy dyktighet har avgitt feil svar på de tre oppgavene, kan det føre til at oppgavene blir flagget som misfit (Fayers & Machin, 2007). I tillegg kan det være interessant å se om det er noe kvalitativt med oppgave 16, 20 og 23, som gjør at de blir flagget for misfit, tilsvarende som jeg har gjort for oppgave 15 ovenfor. Oppgave 16 tester om elevene kan avgjøre hvilken figur som har størst brøkdel fargelagt, der figuren med minst brøkdel fargelagt bevisst er gjort større enn figuren med størst brøkdel fargelagt. I spørsmålet til oppgaven brukes ordet «størst» og det kan forvirre dyktige elever som har det travelt med å besvare oppgaven, slik at de velger den største figuren. Noe av det samme kan være tilfelle med oppgave 20. Der etterspør oppgaven figuren med størst brøkdel fargelagt, noe som kan føre til at elever velger den største diskret figuren. Oppgave 23 er en flervalgsoppgave der distraktorene er bevisst valgt for å få fram ulike misoppfatninger. Bruk av flervalgsoppgaver kan føre til at elever blir lurt til å velge feil alternativ, spesielt hvis de er litt usikre. Dessuten har ikke elevene erfaring fra skolehverdagen med slike oppgaver. Oppsummert vil jeg si at alle de fire oppgavene som kom ut med misfit, kan oppleves som ukjente for elevene. Det kan føre til at elever som ikke tar seg tid til å lese oppgavene godt nok, eller som tenker at denne oppgaven var enkel, lett kan svare feil på en oppgave de burde ha fått riktig.

Jeg kjørte en ny analyse uten oppgavene med misfit for å kunne sammenligne elevenes dyktighet og Cronbachs alpha i denne nye analysen, med verdier fra en analyse hvor de fire oppgavene med misfit er med. En *disattenuated correlation* mellom elevenes dyktighet i de to analysene ble utført og *disattenuated correlation* fikk verdien 1. Cronbachs alpha var høyere når oppgavene med misfit var med: 0,879 mot 0,846. Det betyr at jeg beholder oppgavene, da misfit ikke har signifikant forstyrrende effekt på målingen.

5.1.2. Dimensjonalitet

En faktoranalyse kan si noe om måleinstrumentet er endimensjonalt, noe som er et krav i måling. Resultatet fra en *Principal Component Analysis* med standardiserte residualer viste at høyeste faktor fikk en egenverdi på 1,9. En egenverdi større enn 2,0 indikerer at måleinstrumentet har flere dimensjoner. Jeg konkluderte, derfor, med at instrumentet var endimensjonalt nok.

5.2. Utbredelse av misoppfatninger på ungdomstrinnet

Jeg vil i denne delen svare på det første forskningsspørsmålet ved å vise at en viss andel av elevene på ungdomstrinnet kan antas å ha misoppfatninger knyttet til del-av-hel-aspektet til brøk, og at det er en endring i utbredelsen fra 8.trinn til 10.trinn.

En undersøkelse av elevers misoppfatninger må alltid gjøres med et visst forbehold. Jeg kan ikke vite helt sikkert om elever har misoppfatninger, selv om de har avgitt svar som kan tyde på det. For enkelthetsskyld vil jeg videre referere til elever som *har* misoppfatninger, selv om jeg bare kan anta det. I stedet for å skrive *feilsvar som kan tyde på en misoppfatning*, vil jeg videre bruke ordet *feilsvar*; alle feilsvarene som blir omtalt, er feilsvar som kan tyde på en misoppfatning.

Jeg vil starte med å presentere en oversikt over utbredelsen av misoppfatninger, før jeg ser på de ulike misoppfatningene mer i detalj.

For hver oppgave presenteres løsningsprosent (andel elever med riktig svar) og prosentandel elever som svarer et feilsvar. Ettersom tankegangen som ligger bak et feilsvar er ganske konsekvent (Brekke, 2002), kan vi anta at elever med en misoppfatning vil gjøre samme type feil i tilsvarende oppgaver. Jeg har valgt et ganske restriktivt kriterium for å kunne si at elever har en misoppfatning. Det betyr at en elev må ha gjort samme type feil i de oppgavene som tester det samme før jeg velger å si at eleven har en misoppfatning. Jeg har likevel valgt å vise andel elever som har gjort samme type feil i to av tre oppgaver, da det ikke kan utelukkes at noen av disse eleven også har en misoppfatning.

For å kunne gi et bilde av hvilke elever som har en misoppfatning har jeg valgt å dele elevene inn i tre nivå, basert på elevenes dyktighet (*Tabell 9*).

Tabell 9. Forslag til inndeling av elever etter dyktighet, basert på standardavviket.

	Lav dyktighet Nivå 1	**Middels dyktighet Nivå 2**	**Høy dyktighet Nivå 3**
Dyktighet (θ)	< −0,974	−0,974 til 0,938	> 0,938
Antall elever	88	406	104
Prosent elever	15 %	68 %	17 %

Grensene er satt slik at middels dyktighet inneholder elever med en dyktighet på ± 1 standardavvik fra gjennomsnittet. Det betyr at 68 % av elevene ligger på nivå 2. Elever med en lavere dyktighet enn −1 standardavvik fra gjennomsnittet er plassert på nivå 1. Elever med en høyere dyktighet enn +1 standardavvik fra gjennomsnittet er plassert på nivå 3. Basert på denne nivådelingen vil jeg presentere et diagram for hver misoppfatning, som viser antall elever med misoppfatninger for hvert nivå (se *Figur 15* for et eksempel).

I tillegg presenteres plott (CRF) som viser sannsynligheten for ulike avgitte svar ut fra dyktigheten til elevene (se *Figur 16* for et eksempel). Plottet gir en god visuell oversikt over hvilke svar som er utbredt hos elever med ulik dyktighet, og hvordan avgitte svar endrer seg med økende dyktighet.

Jeg har gjort et utvalg blant oppgavene og kommer til å vise en misoppfatning av gangen, gruppert på samme måte som i metodekapittelet. Hver misoppfatning blir behandlet i et eget delkapittel.

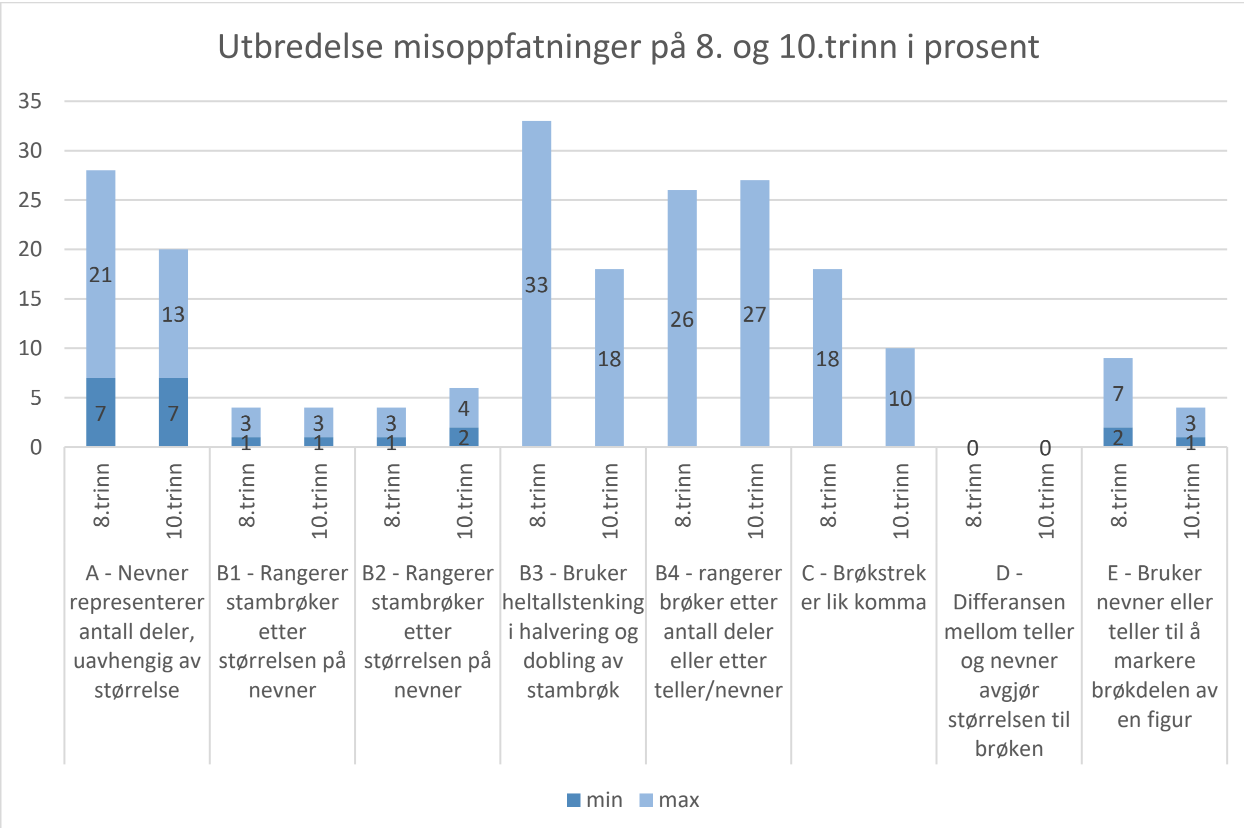
Til slutt vil jeg vise at det er en endring i andel elever som har en misoppfatning fra 8.–10.trinn, både når det gjelder løsningsprosent, andel feilsvar og dyktigheten til elevene.

I alle tabeller i dette kapittelet vil en grønn farge i tabellen vise til riktige svar og en rød farge vil vise til et feilsvar.

5.2.1. En oversikt over utbredelsen av misoppfatninger

Her vil jeg gi en oversikt som viser utbredelsen av misoppfatninger på ungdomstrinnet. *Figur 14* viser prosentandel elever på 8. og 10.trinn med misoppfatninger innen de fem misoppfatningene jeg har testet. Noen av søylene består av to deler, en mørk blå del og en lys blå del. Som jeg sa i innledningen til dette kapittelet, har jeg valgt en restriktiv linje for å kunne si når en elev har en misoppfatning. Den mørke blå delen av søylene representerer elever som har avgitt samme type feilsvar på tre av tre oppgaver. Den lyse blå delen representerer elever som har avgitt samme type feilsvar i to av tre oppgaver. For misoppfatning B_3, B_4, og C, har jeg færre enn tre oppgaver, derfor er søylene kun lys blå.

Misoppfatning B, *jo større teller eller nevner, dess større brøk*, er delt inn i B_1, B_2, B_3 og B_4. Det er mange oppgaver i testen som tester misoppfatning B, og oppgavene er såpass ulike i både innhold og vanskegrad, at jeg fant det mest hensiktsmessig å dele opp misoppfatningen slik.



Figur 14. Utbredelse av misoppfatninger på ungdomstrinnet.

Ut fra diagrammet ser vi at det er en viss utbredelse av misoppfatningene, men at andel elever for hver misoppfatning er noe usikker, med tanke på de lyse blå søylene. Det vi kan fastslå er at flere elever har utfordringer, om ikke misoppfatninger, når det gjelder del-av-hel-aspektet til brøk.

Ingen elever har misoppfatninger knyttet til misoppfatning D, *differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken*. Jeg kommer tilbake til denne misoppfatningen i siste kapittel. Om lag en firedel av elevene kan ha en misoppfatning knyttet til nevner og størrelsen på delene (misoppfatning A). Hele 33 % av elevene på 8.trinn bruker egenskaper fra hele tall når de skal halvere eller doble en stambrøk (misoppfatning B_3). Andelen synker til 18 % for elever på 10.trinn. En firedel av elevene rangerer tre brøker fra minst til størst ved enten å rangere etter størrelsen på teller eller nevner, eller ved å rangere etter størrelsen på delene (misoppfatning B_4). Litt færre andel av elevene ser på brøkstreken som komma (misoppfatning C). En liten andel elever rangerer stambrøker etter størrelsen på nevner (misoppfatning B_1 og B_2).

Tabell 10. Andel elever med misoppfatning etter nivå.

Misoppfatning	Nivå 1	Nivå 2	Nivå 3
A	84 %	20 %	0 %
B_1	20 %	0 %	0 %
B_2	30 %	1 %	0 %
B_3	41 %	30 %	0 %
B_4	58 %	26 %	0 %
C	31 %	14 %	0 %
D	0 %	0 %	0 %
E	41 %	1 %	0 %

< 20%
[20 % til 50 %>
[50 % til 80 %>
≥ 80 %

Tabell 10 viser andel elever med misoppfatninger etter nivå. Funn fra denne studien tyder på at ingen elever med høy dyktighet har misoppfatninger knyttet til det oppgaver i denne studien tester. Flest elever med misoppfatninger finner vi på nivå 1, det vil si at elevene har en dyktighet < −0,974. Fra *Tabell 10* ser vi videre at 84 % av elevene på nivå 1 har en misoppfatning knyttet til nevner og størrelsen på delene, og 20 % av elevene på nivå 2 har denne misoppfatningen.

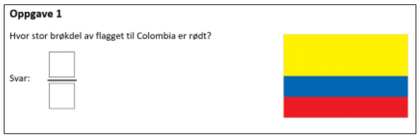
5.2.2. Misoppfatning A: «nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse»

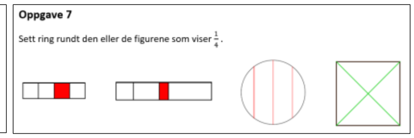
Oppgaver: 1, 3 og 7

Nesten halvparten av elevene på 8.trinn har avgitt et feilsvar i oppgave 3 og en tredel har avgitt feilsvar på to av tre oppgaver. Andelen er litt lavere for elever på 10.trinn.

Oppgavene omhandler figurer som er delt opp i deler som ikke er like store. I oppgave 1 skal elevene skrive inn hvor stor del fargen rød utgjør av det hele, i oppgave 3 skal elevene krysse av for figurer som viser $\frac{1}{5}$, og i oppgave 7 skal elever ringe rundt figurer som viser $\frac{1}{4}$. Hensikten med oppgavene er å se om elever tar hensyn til størrelsen på delene en figur er delt opp i.

41 % av elevene har riktig svar på alle tre oppgaver.





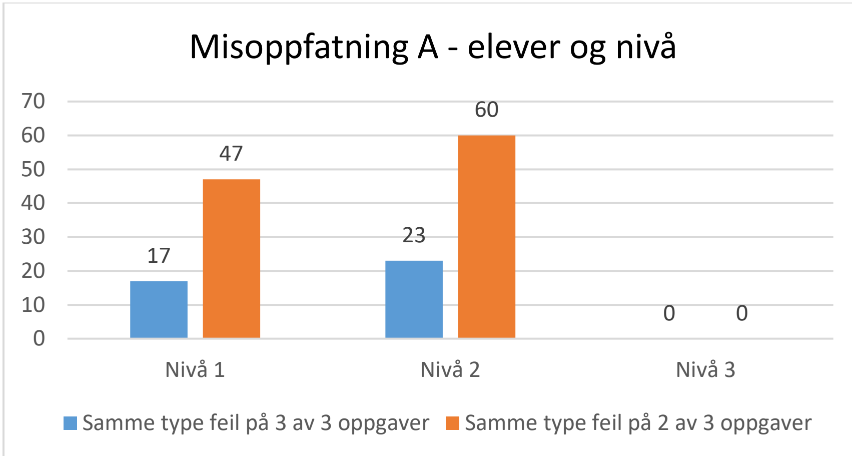
Tabell 11. Talldata fra oppgave 1, 3 og 7.

Oppgave	Avgitt svar	Svarprosent 8.trinn	Svarprosent 10.trinn
Oppgave 1	*1/4*	79 %	84 %
	1/3	16 %	12 %
Oppgave 3	*Figur 2*	47 %	55 %
	Figur 1 og 2	44 %	39 %
Oppgave 7	*Figur 1*	75 %	78 %
	Figur 1 og 2	19 %	13 %
Samme type feil; alle tre oppgaver		7 %	7 %
Samme type feil; minst to av oppgavene		28 %	20 %

I *Tabell 11* ser vi at løsningsprosenten går opp for alle oppgaver fra 8. til 10.trinn og andel elever med feilsvar går ned fra 8. til 10.trinn.

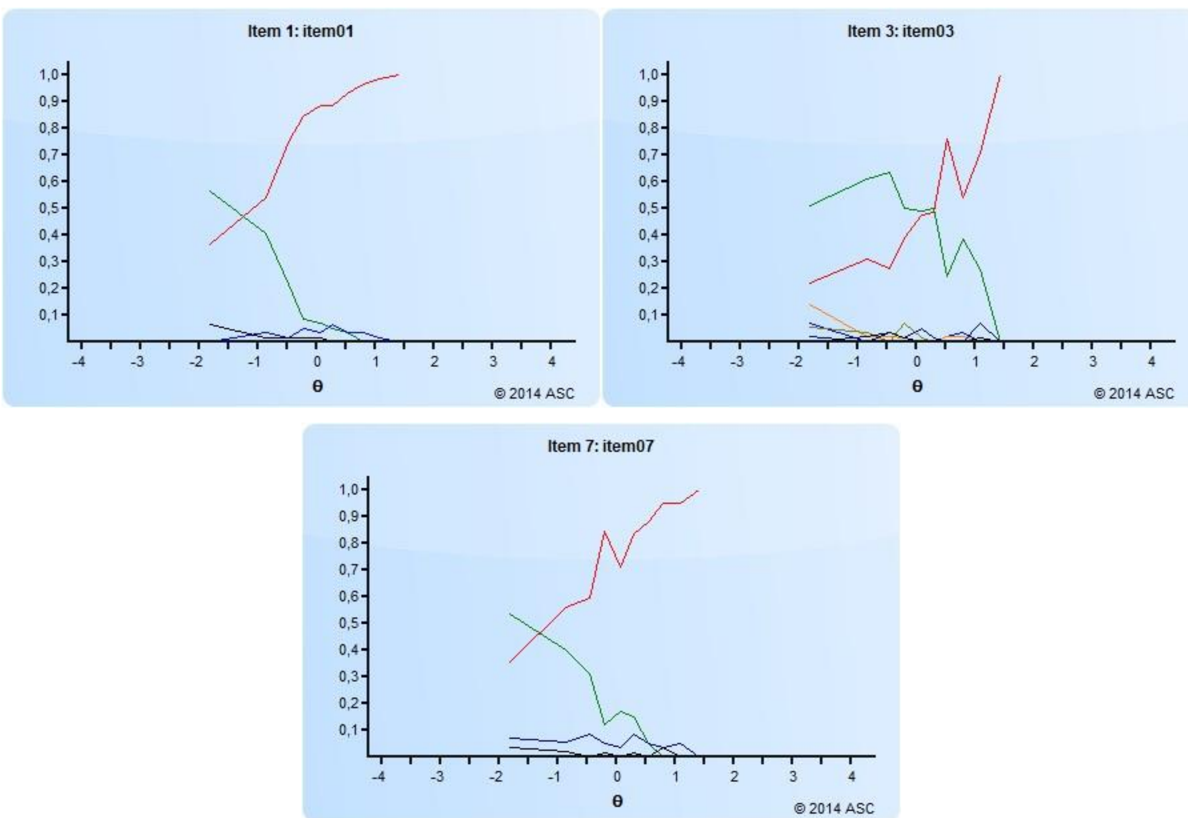
Omtrent like stor andel elever har avgitt et feilsvar i oppgave 1 og 7. Begge oppgavene består av et rektangel, der delene ikke er like store. Oppgave 3 har en høyere andel elever som har avgitt et svar som kan tyde på en misoppfatning, enn de to andre oppgavene. Sirkel 1 i oppgave 3 er delt inn i deler med lik bredde. Elever kan derfor velge dette alternativet om de bruker kunnskap fra like deler i et rektangel. De tar ikke hensyn til at arealet til hver del må være like stort. Det samme fant Bill (2003) når elever skulle markere figurer som viste $\frac{1}{3}$. 55 % av elevene på 7.trinn valgte alle figurer med tre deler uavhengig av størrelsen på delene. Blant figurene var en sirkel som er tilnærmet lik sirkelen i oppgave 3.

Diagrammet i *Figur 15* viser elever som har samme type feil på alle tre oppgaver og elever som har svart samme type feil på to av tre oppgaver. Vi ser at det en ganske stor økning i antall elever som har feilsvar i to av oppgavene, sammenlignet med elever som har feilsvar i alle tre oppgaver.



Figur 15. Elever og misoppfatning A - etter nivå.

I plott diagrammene får vi en oversikt over hvilke svar som er mest utbredt blant elever med ulik dyktighet (*Figur 16*). For alle plott som følger er riktig svar rød linje og feilsvar er grønn linje.



Figur 16. Plott for avgitte svar: oppgave 1, 3 og 7.

For oppgave 1 (Item 1) ser vi at når dyktigheten til elevene øker så avtar sannsynligheten for feilsvaret $\frac{1}{3}$, mens sannsynligheten for riktig svar øker. Hos elever med lav dyktighet er feilsvaret $\frac{1}{3}$ mer utbredt enn riktig svar.

For oppgave 3 er grønn linje feilsvaret «figur 1 og 2». Feilsvaret øker hos elever med lav dyktighet før det deretter avtar med økende dyktighet. Feilsvaret er tilstede hos elever med dyktighet opp mot θ = 1,5, det vil si for elever med høy dyktighet. Mange elever har svart korrekt på oppgave 1 og 7, men viser i denne oppgaven at de ikke tar hensyn til at arealet må være like stort i alle delene i en sirkel som er delt vertikalt, da de kun har tatt hensyn til bredden til delene.

For oppgave 7 er grønn linje feilsvaret «figur 1 og 2». Her ser vi at ved økende dyktighet så øker sannsynligheten for riktig svar og sannsynligheten for å svare «figur 1 og 2» avtar. For denne oppgaven er også sannsynligheten for et feilsvar større enn sannsynligheten for riktig svar hos elever med lav dyktighet.

5.2.3. Misoppfatning B: «jo større nevner eller teller, dess større brøk»

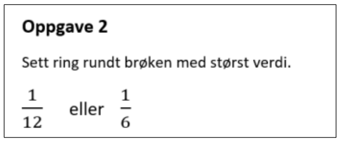
Oppgaver: 2, 16 og 24 (B_1), 5, 11 og 20 (B_2), 14 og 17 (B_3), 18 (B_4)

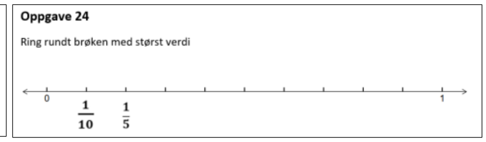
Det er stor forskjell i løsningsprosent og andel elever med svar som kan tyde på en misoppfatning innad i oppgavene til denne misoppfatningen. Få elever har misoppfatning knyttet til rangering av stambrøker. En firedel av elevene viser feil tankegang i rangering av tre brøker fra minst til størst som ikke er stambrøker, og en tredel av elevene på 8.trinn har en misoppfatning når det gjelder halvering og dobling av en stambrøk.

Det er mange oppgaver som tester denne misoppfatningen og for å få en bedre oversikt blir like oppgaver omtalt sammen. Først skal vi se på oppgave 2, 16, og 24, som omhandler å avgjøre hvilken brøk som er størst av to stambrøker; deretter oppgave 5, 11, og 20, som omhandler rangering av flere stambrøker med ulik representasjon. I oppgave 14 og 17 skal vi se på halvering og dobling av $\frac{1}{6}$. Til slutt kommer oppgave 18 som omhandler rangering av tre brøker.

De tre første oppgavene omhandler å avgjøre hvilken brøk som er størst av to stambrøker. I oppgave 2 er to stambrøker oppgitt, der den ene er dobbelt så stor som den andre. Det samme er innholdet i oppgave 24, men der er brøkene plassert på ei tallinje. I oppgave 16 er brøkene representert med arealmodell. Oppgavene er ment å teste om elever velger brøken med størst nevner eller brøken med størst areal (uavhengig av brøkdel).

82 % av elevene hadde riktig svar på alle tre oppgaver.

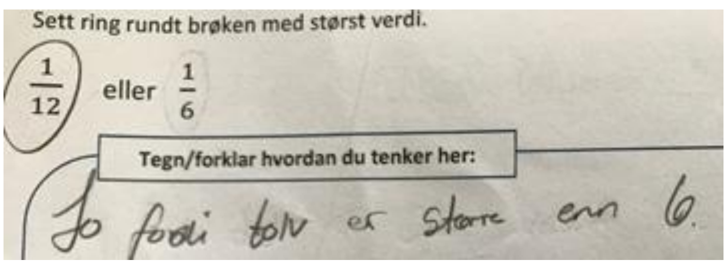




Tabell 12. Talldata fra oppgave 2, 16 og 24 – misoppfatning B_1.

		Svarprosent	
Oppgave	**Avgitt svar**	**8.trinn**	**10.trinn**
Oppgave 2	*1/6*	89 %	91 %
	1/12	4 %	2 %
Oppgave 16	*Figur 1*	92 %	94 %
	Figur 2	6 %	3 %
Oppgave 24	*1/5*	91 %	93 %
	1/10	3 %	2 %
Samme type feil; alle tre oppgaver		1 %	1 %
Samme type feil; minst to av oppgavene		3 %	3 %

Alle tre oppgavene har høy løsningsprosent, med litt høyere løsningsprosent for 10.trinn sammenlignet med 8.trinn. Andel feilsvar går noe ned fra 8.trinn til 10.trinn.

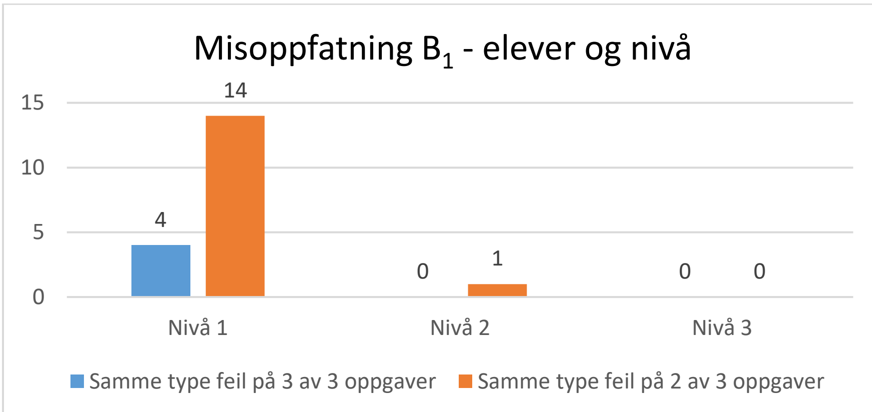


Figur 17. Elevsvar oppgave 2.

Elever med feilsvar kan tenke at $\frac{1}{12}$ er større enn $\frac{1}{6}$ fordi 12 er større enn 6 (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Elevsvaret i *Figur 17* viser akkurat denne tankegangen.

Det kan se ut til at å avgjøre størrelsen til en brøk basert på nevner også er tilstede selv om brøkene er plassert på tallinje. I oppgave 24 har 3 % av elevene på 8.trinn og 2 % av elevene på 10.trinn svart at brøken lengst til venstre på tallinja har størst verdi. Elever i grunnskolen skal ifølge læreplanen, ha arbeidet med tallstørrelser på tallinja siden 2.trinn (Utdanningsdirektoratet, 2006). Det betyr at elevene bør være klar over at verdiene til hele tall øker mot høyre på tallinja. Når de likevel velger brøken med lavest verdi i denne oppgaven, så kan det bety at en eventuell misoppfatning er så sterk at den overkjører det de allerede vet om tall på tallinja. De ser dermed bort fra tallinja og velger brøken med størst nevner, eller det kan være at elevene ikke er vant med å plassere brøker på tallinja og kobler ikke en brøk på tallinja til verdien til brøken.

Oppgave 16 skiller seg litt fra de andre to oppgavene, da brøkene i denne oppgaven er representert med arealmodell. Oppgaven er med for å sjekke om elever velger figuren med størst areal og ikke tar hensyn til brøkdelen som er fargelagt. 6 % av elevene på 8.trinn og 3 % av elevene på 10.trinn velger figuren med størst areal uten å ta hensyn til brøkdelen som er fargelagt.

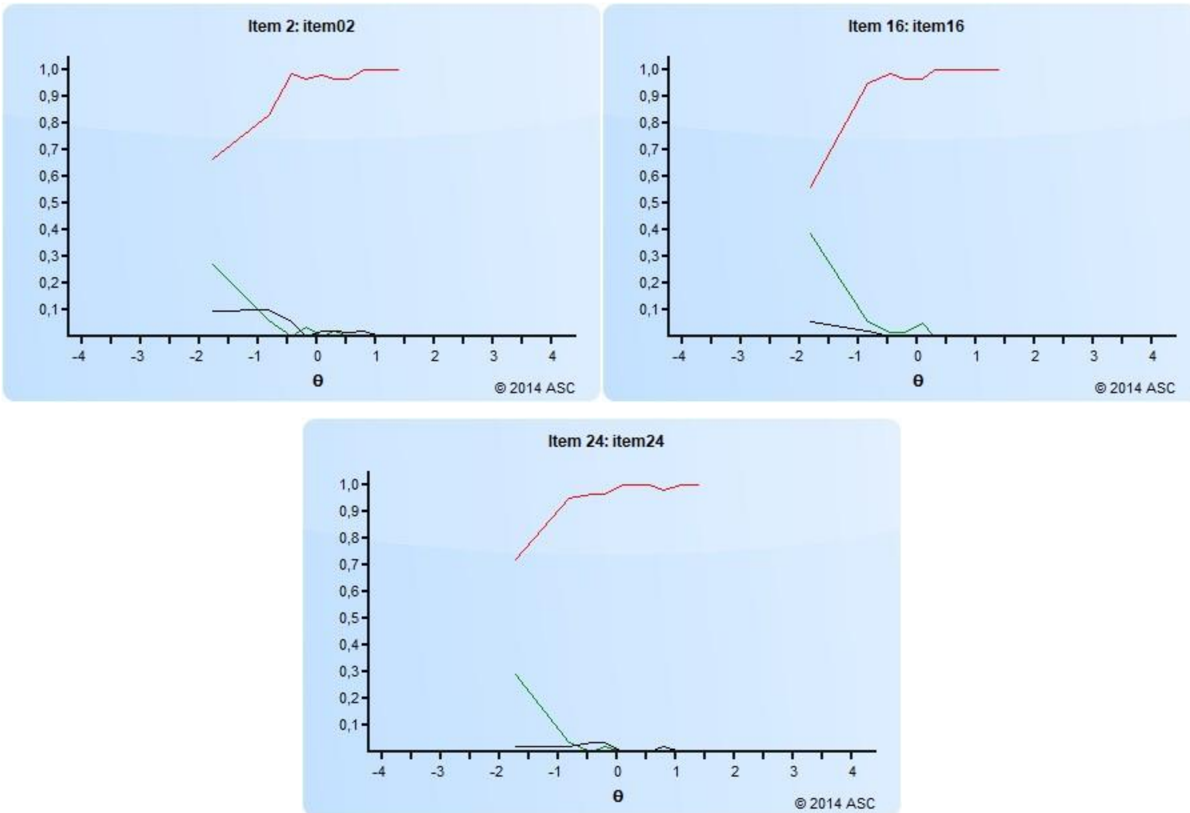


Figur 18. Elever og misoppfatning B_1 - etter nivå.

Figur 18 viser at nesten alle elever som har avgitt et feilsvar, befinner seg på nivå 1. Elever som sorterer brøker etter nevner er funnet å være blant de minst dyktige elevene (Mitchell & Horne, 2010), og dette stemmer godt med funn i denne studien.

Plott for oppgave 2, 16, og 24 er vist i *Figur 19*. Rød linje er riktig svar, og grønn linje er feilsvaret. Grafene til oppgave 2, 16, og 24 ser tilnærmet like ut. For alle oppgavene vil en økende dyktighet føre til at feilsvaret avtar ganske raskt. Når dyktigheten $\theta > 0$, er misoppfatningen nesten ikke-eksisterende. For elever med lav dyktighet er sannsynligheten for riktig svar større enn sannsynligheten for feil svar.

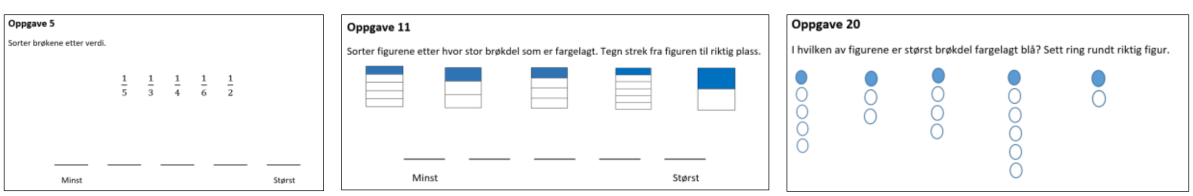
Gjennomsnittsdyktigheten til elever med feilsvar i oppgave 2, 16, og 24 er $-1{,}5$. Elever på 10.trinn som svarte $\frac{1}{10}$ i oppgave 24, har en gjennomsnittsdyktighet på $-2{,}1$. Det viser at elever som har avgitt et feilsvar har svært lav dyktighet.



Figur 19. Plott for avgitte svar: oppgave 2, 16 og 24.

Oppgave 5, 11, og 20 omhandler å rangere et utvalg stambrøker. I oppgave 5 er brøkene gitt med symboler, i oppgave 11 er brøkene gitt med arealmodell og i oppgave 20 er brøkene gitt i en diskret modell (mengdemodell). Oppgavene er ment å teste det samme som foregående oppgaver, men her er brøken $\frac{1}{2}$ med, samt at representasjonen er ulik for hver oppgave. Hensikten med oppgavene er å se om elever rangerer brøkene etter størrelsen på nevner, antall deler eller etter antall objekter i mengdemodellen.

86 % av elevene hadde riktig svar på alle tre oppgaver.

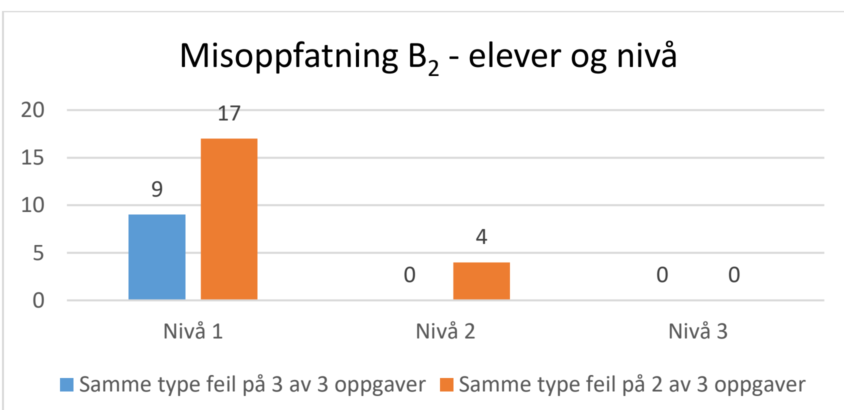


Tabell 13. Talldata fra oppgave 5, 11 og 20 – misoppfatning B_2.

Oppgave	Avgitt svar	Svarprosent 8.trinn	10.trinn
Oppgave 5	*sortert riktig*	92 %	91 %
	sortert motsatt	5 %	4 %
Oppgave 11	*sortert riktig*	91 %	92 %
	sortert motsatt	4 %	4 %
Oppgave 20	*figur 5*	93 %	92 %
	figur 4	3 %	3 %
Samme type feil; alle tre oppgaver		1 %	2 %
Samme type feil; minst to av oppgavene		4 %	6 %

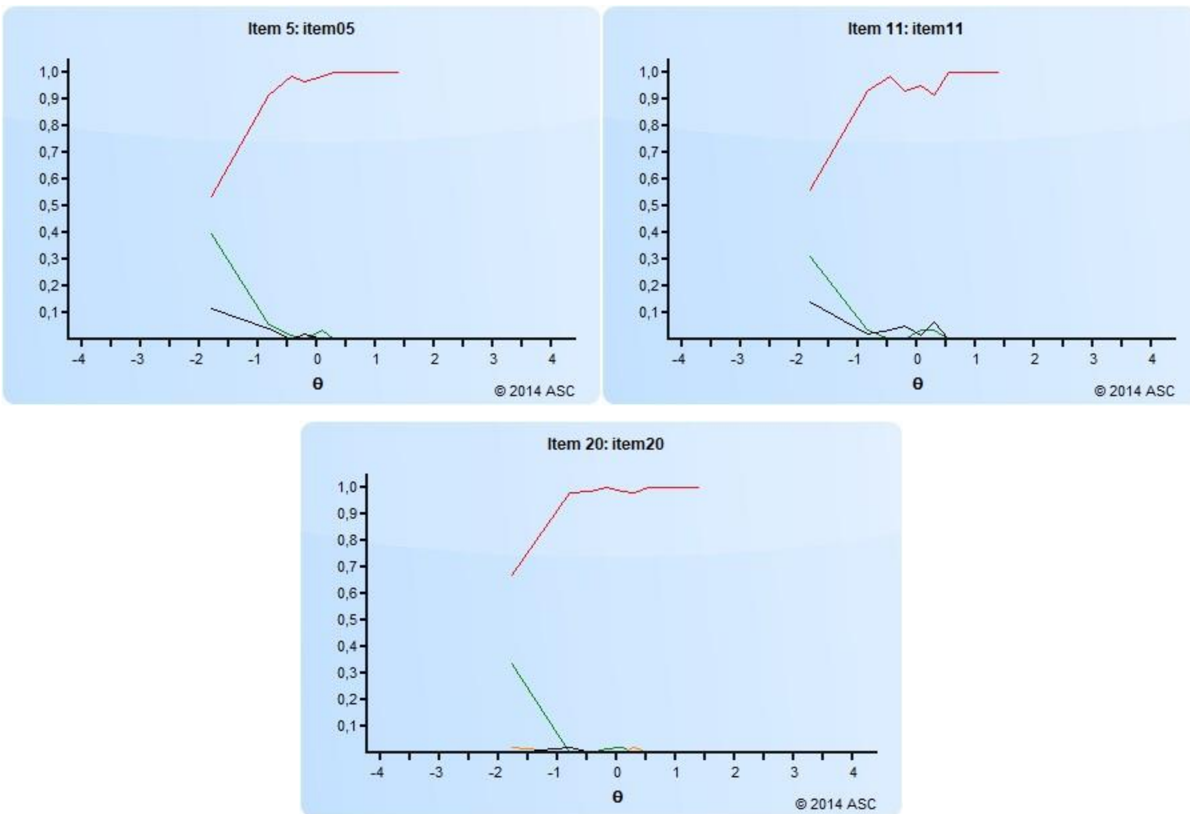
Oppgave 5, 11, og 20 har tilnærmet lik løsningsprosent for både 8.trinn og 10.trinn. Andel feilsvar er også tilnærmet lik for alle oppgaver og for 8.trinn og 10.trinn.

Elever som sorterer motsatt i oppgave 5, kan sortere etter tallverdien i nevner. I oppgave 11 og 20 kan de sortere etter antall deler figurene er delt opp i. De kan basere seg på samme feiltenkning som tidligere nevnt for oppgave 2, 16, og 24. Det vil si at elever sorterer etter størrelsen på nevner: $\frac{1}{5}$ er større enn $\frac{1}{2}$ fordi 5 er større enn 2 (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Det samme gjelder arealfigurene og mengdemodellen, der antall deler representerer nevneren og dermed vil en figur med flere deler, få større verdi enn en figur med færre deler. Ni (2001) hevder det er enklere å vurdere størrelsen til brøker representert med arealmodell enn ved symbol. Mine funn viser at det ikke er tilfellet i denne studien. Om brøkene er representert med symbol, arealmodell eller mengdemodell, er både løsningsprosent og andel feilsvar forholdsvis konsistent.



Figur 20. Elever og misoppfatning B_2 - etter nivå.

Figur 20 viser at flest elever med denne misoppfatningen befinner seg på nivå 1. Elever på nivå 2 har kun avgitt feilsvar i to av tre oppgaver. Fordelingen er ganske lik, som i misoppfatning B_1. Oppgavene i misoppfatning B_1 og B_2 er også ganske like, da elevene må finne minste og største brøk i et utvalg stambrøker.

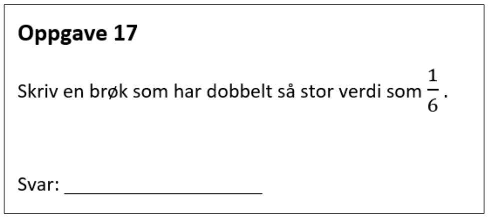


Figur 21. Plott for avgitte svar: oppgave 5, 11 og 20.

Diagrammene i *Figur 21* viser mye av den samme tendensen som for oppgave 2, 16, og 24, der sannsynligheten for riktig svar stiger raskt med økende dyktighet og tilsvarende avtar sannsynligheten for feilsvaret med økende dyktighet. Selv elever med veldig lav dyktighet har større sannsynlighet for riktig svar enn for feilsvar. Med dyktighet $\theta = 0$, som er tilnærmet gjennomsnittlig dyktighet for alle som har tatt testen, er feilsvarene omtrent fraværende for alle oppgavene.

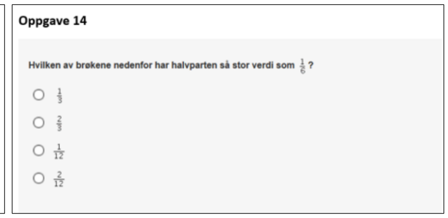
Oppgave 14 og 17 omhandler halvering og dobling av brøken $\frac{1}{6}$. Oppgave 14 er en flervalgsoppgave, der alle distraktorer—alternativ som ikke er riktige svar—kan tyde på en misoppfatning eller feiltenkning. Hensikten med oppgavene er å se om dobling av brøk medfører multiplikasjon med 2 og om halvering av brøk medfører divisjon med 2.

36 % av elevene hadde riktig svar på både oppgave 14 og 17.


Oppgave 17

Skriv en brøk som har dobbelt så stor verdi som $\frac{1}{6}$.

Svar: ____________________


Oppgave 14

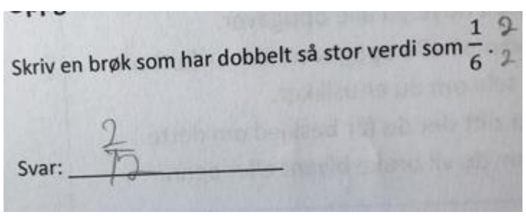
Hvilken av brøkene nedenfor har halvparten så stor verdi som $\frac{1}{6}$?

- $\frac{1}{3}$
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{1}{12}$
- $\frac{2}{12}$

Tabell 14. Talldata fra oppgave 14 og 17 – misoppfatning B_3.

		Svarprosent	
Oppgave	**Avgitt svar**	**8.trinn**	**10.trinn**
Oppgave 14	1/3	24 %	22 %
	2/3	5 %	3 %
	1/12	*37 %*	*52 %*
	2/12	28 %	19 %
Oppgave 17	*1/3*	*45 %*	*63 %*
	2/12	42 %	24 %
Oppgave 14: 1/3 og oppg 17: 2/12		13 %	8 %
Har svart 2/12 på begge oppgaver		20 %	10 %

Løsningsprosenten går opp fra 8.trinn til 10.trinn og andel feilsvar går ned fra 8.trinn til 10.trinn. Oppgave 14 og 17 er de to oppgaven med størst nedgang i andel feilsvar fra 8.trinn til 10.trinn.


Skriv en brøk som har dobbelt så stor verdi som $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{2}$

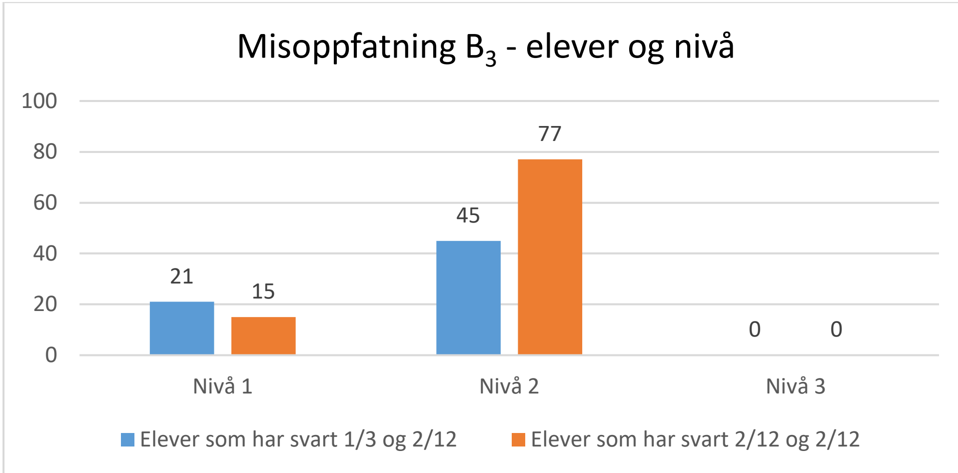
Svar: $\frac{2}{12}$

Figur 22. Elevsvar oppgave 17.

Elever som har svart $\frac{1}{3}$ i oppgave 14, kan tenke at halvparten av 6 er 3. De ser kun på tallet i nevner og kobler det til kunnskap om heltallene (Siegler et al., 2011). Den samme tankegangen gjelder feilsvaret $\frac{2}{12}$ i oppgave 17. For å finne noe som er dobbelt så stort må vi multiplisere med 2, og elevene har multiplisert både teller og nevner med 2. Se *Figur 22* for eksempel på et elevsvar. Omtrent 1 av 10 elever har brukt en heltallstenking i begge oppgavene ved å dividere med 2 og multiplisere med 2.

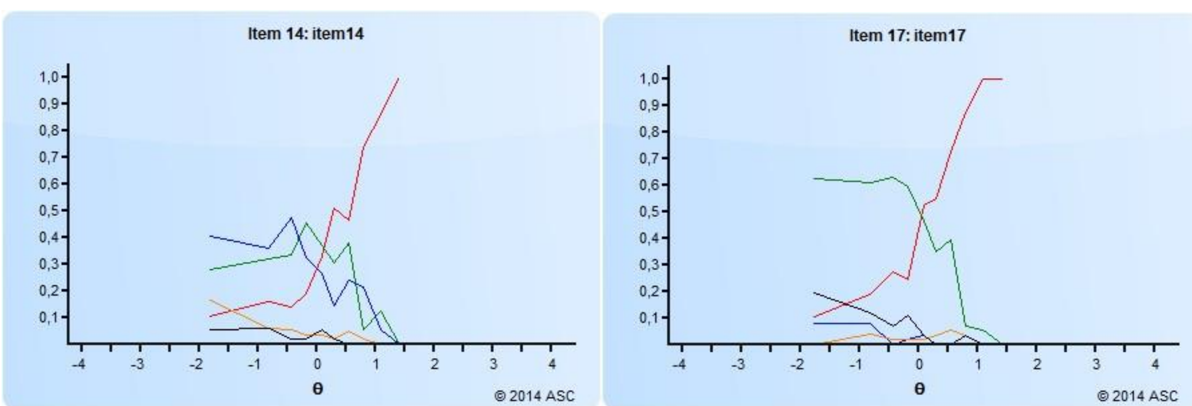
En femdel av elevene på 8.trinn og en tidel av elevene på 10.trinn har derimot svart $\frac{2}{12}$ på begge oppgavene. Elever som svarer $\frac{2}{12}$ på oppgave 14, kan tenke at de må dividere med 2. Å dividere med brøk betyr å multiplisere ved å snu den bakerste brøken. Men ettersom de ikke deler på en brøk, så multipliserer de bare med 2 i teller og nevner. En annen tankemåte kan være at de gjør om tallet 2 til brøk, men de får $\frac{2}{2}$. Da blir regnestykket

$\frac{1}{6} : \frac{2}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{12}$. Dette virker logisk da elevsvar viser at å multiplisere en brøk med 2 fører til at de multipliserer både nevner og teller med 2.



Figur 23. Antall elever med misoppfatning B_3 etter nivå.

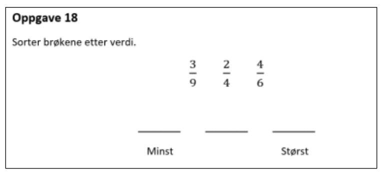
Elever med feilsvar befinner seg på nivå 1 og 2 (*Figur 23*). For elever på nivå 2 er det flere som har svart $\frac{2}{12}$ på begge oppgavene, enn $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{12}$. Det motsatte er tilfellet for elever på nivå 1. Mange elever på nivå 1 har avgitt andre svar, som ikke tyder på en misoppfatning.



Figur 24. Plott for avgitte svar: oppgave 14 og 17.

I *Figur 24* ser vi dyktigheten til elever knyttet opp mot de ulike feilsvarene i oppgave 14 og 17. For oppgave 14 ser vi at sannsynligheten for å avgi feilsvaret $\frac{1}{3}$ (blå linje) er størst blant elever med lav dyktighet. Med økende dyktighet så blir $\frac{2}{12}$ et mer attraktivt svar (grønn linje), men sannsynligheten for å avgi dette svaret avtar når dyktigheten nærmer seg $\theta = 0$. Den samme tendensen ser vi også i *Figur 23* som viser at flere på nivå 2 har valgt $\frac{2}{12}$ enn elever på nivå 1. Sannsynligheten for rett svar øker med økende dyktighet. Det samme ser vi i oppgave 17, men der skiller feilsvaret $\frac{2}{12}$ (grønn linje) seg ut med å være et veldig attraktivt feilsvar for elever med dyktighet < 0. For dyktighet > 0 øker sannsynligheten for riktig svar betraktelig.

Oppgave 18 skiller seg fra rangeringsoppgavene som er omtalt tidligere. I denne oppgaven skal elevene rangere tre brøker som ikke er stambrøker. Denne oppgaven kan også sees å tilhøre et annet aspekt enn *del-av-hel*, men Lamon (2012) mener at en del av kunnskapen under *del-av-hel* er å kjenne til størrelsen til kjente brøker. I denne oppgaven kan elevene rangere brøkene kun ved å se på at den ene har verdien $\frac{1}{2}$, en annen er mindre enn $\frac{1}{2}$ og den siste er større enn $\frac{1}{2}$. Hensikten med oppgaven er å se om elevene rangerer brøkene etter størrelsen på delene eller etter størrelsen på teller eller nevner.


Oppgave 18

Sorter brøkene etter verdi.

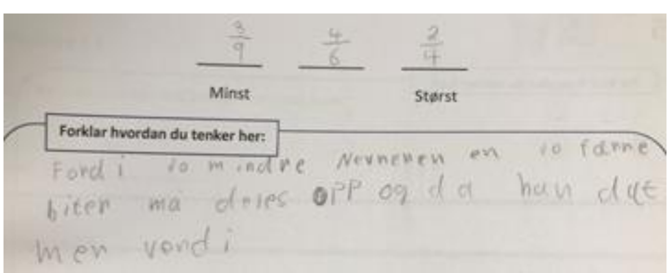
$\frac{3}{9}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{6}$

Minst Størst

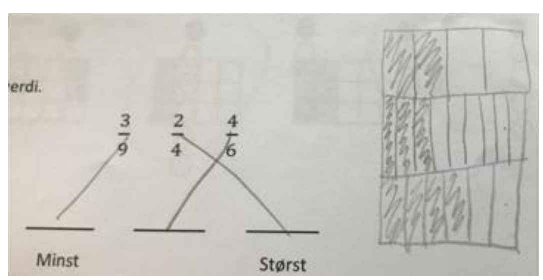
Tabell 15. Talldata fra oppgave 18 – misoppfatning B_4.

Oppgave	Avgitt svar	Svarprosent 8.trinn	Svarprosent 10.trinn
Oppgave 18	*3/9 - 2/4 - 4/6*	*65 %*	*69 %*
	3/9 - 4/6 - 2/4	19 %	23 %
	2/4 - 3/9 - 4/6	5 %	3 %
	2/4 - 4/6 - 3/9	2 %	1 %

Det er en liten økning i andel riktig svar fra 8.trinn til 10.trinn. Andel feilsvar er tilnærmet lik mellom trinnene, men litt flere elever på 10.trinn har rangert brøkene etter størrelsen på delene enn hva tilfellet er for elever på 8.trinn.



Figur 26. Elevsvar 2 oppgave 18 - rangering etter størrelse på delene

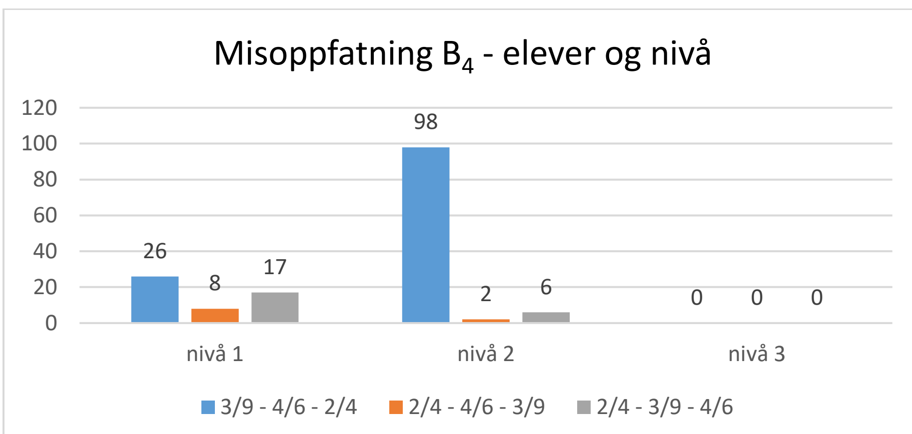


Figur 25. Elevsvar 1 oppgave 18 - rangering etter størrelsen på delene.

I *Figur 25* og *Figur 26* ser vi eksempler på elevsvar, der eleven har rangert brøkene etter størrelsen på delene. I *Figur 26* har eleven tegnet opp brøkene ved å bruke arealmodell.

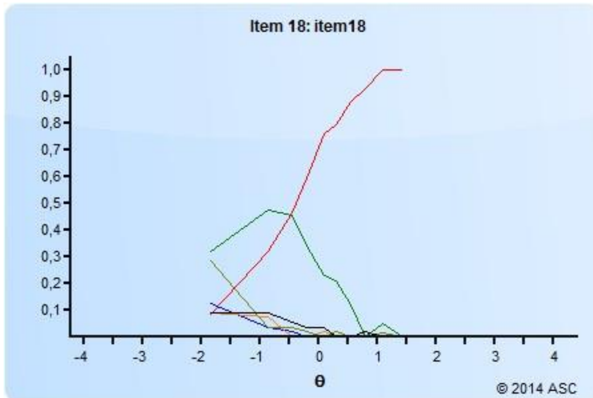
Brøkene er tegnet opp korrekt, med tanke på at helheten er like stor for alle brøkene. Likevel velger eleven å rangere brøkene etter størrelsen på delene. Kanskje kan ordet minst i oppgaveteksten knyttes til minst i størrelse, der eleven ser på én del. I *Figur 25* ser vi en forklaring fra en elev som også har rangert brøkene etter størrelsen på delene. Eleven skriver: «*fordi jo mindre nevneren er jo færre biter må deles opp og da har det mer verdi*».

At elever rangerer brøker etter størrelsen på delene fant også Stafylidou og Vosniadou (2004) blant elever på 8.trinn. De fant også at andel elever som rangerte brøkene etter størrelse på delene ble redusert fra mellomtrinnet til ungdomsskolen til videregående. Resultatet her viser at andel elever med dette feilsvaret har gått noe opp fra 8.trinn til 10.trinn. Malone og Fuchs (2017) fant at 19 % av elevene greide å sortere tre brøker etter størrelse og at 18 % av elevene rangerte brøker etter størrelsen på delene. Det må påpekes at deres studie var på 4.trinnselever. Andelen riktig svar er høyere i denne studien, mens andel som rangerer etter størrelsen på delene er tilnærmet lik. Resultater fra NAEP 2004 viste at 50 % av 8.trinnselever ikke greide å rangere tre brøker fra minst til størst (Vosniadou, 2014). Resultatet i denne studien er i så måte positivt, da hele 65 % av elevene greide å sortere tre brøker riktig etter størrelse.



Figur 27. Antall elever med misoppfatning B_4 etter nivå.

Malone og Fuchs (2017) hevder at å rangere brøker etter størrelsen på delene er en mer avansert måte å rangere brøker på, enn å rangere etter nevner eller teller. Vi ser av *Figur 27* at flest elever som rangerer etter størrelsen på delene befinner seg på nivå 2 (blå søyle), men svaret er også utbredt blant elever på nivå 1. Blant elever som rangerer brøkene etter teller (grå søyle) eller nevner (oransje søyle) befinner flesteparten seg på nivå 1.



Figur 28. Plott for avgitte svar: oppgave 18.

Figur 28 viser at feilsvaret hvor elevene rangerer brøker etter størrelsen på delene (grønn linje) øker med økt dyktighet for de svake elevene, men avtar igjen når dyktigheten > –1. Feilsvaret forsvinner ikke før elevene har en dyktighet på θ = 1,5. De minst dyktige elevene har større sannsynlighet for å rangere brøkene etter størrelse på delene eller etter teller (brun linje), enn de har for å avgi riktig svar.

5.2.4. Misoppfatning C: «brøkstrek er lik komma»

Oppgave: 9

Heftet inneholder kun én oppgave som tester misoppfatningen *brøkstrek er lik komma*. De to feilsvarene 1,5 og 0,5 er omtrent like mye utbredt.

I oppgave 9 skal elevene skrive en brøk som et desimaltall. Hensikten med oppgaven er å se om elevene ser på brøkstreken som et komma og avgir svar som 1,5 eller 0,5.

Oppgave 9

Hvilket desimaltall har samme verdi som brøken $\frac{1}{5}$?

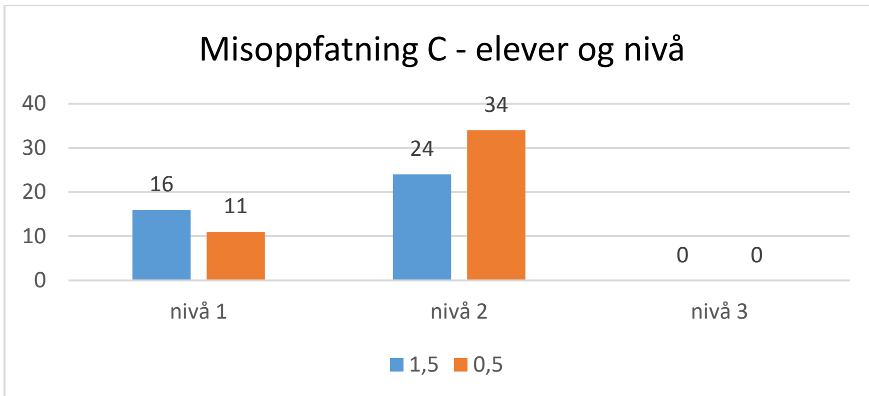
Svar: ____________

Tabell 16. Talldata fra oppgave 9 – misoppfatning C.

		Svarprosent	
Oppgave	**Avgitt svar**	**8.trinn**	**10.trinn**
Oppgave 9	*0,2*	*48 %*	*69 %*
	1,5	9 %	4 %
	0,5	9 %	6 %

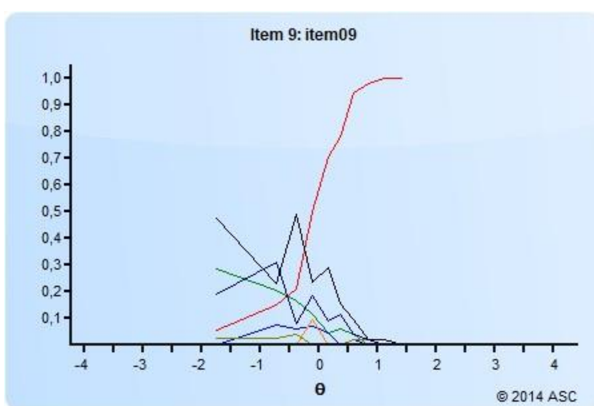
Andel elever med riktig svar øker fra 8.trinn til 10.trinn. Økningen er på 21 prosentpoeng og er den største økningen i løsningsprosent av alle oppgavene i testen. Andel feilsvar går litt ned fra 8. til 10.trinn. Det bør bemerkes at for elever på 8.trinn har nesten en tredel av elevene avgitt andre svar eller ikke besvart oppgaven.

I en studie blant elever som har gått sju år på skole ble det rapportert at 35 % av elevene svarte riktig på denne oppgaven, 18 % av elevene svarte 1,5 og 17 % av elevene svarte 0,5 (Bill, 2003). Elevene i denne studien er ett til tre år eldre, og vi ser at løsningsprosenten er høyere og andelen med feilsvar er lavere enn i den refererte studien. Men samtidig ser vi at fordelingen mellom de to feilsvarene fortsatt er lik.



Figur 29. Antall elever med misoppfatning C etter nivå

Flere elever på nivå 1 avgir svaret 1,5 enn 0,5. For elever på nivå 2 er feilsvaret 0,5 mer utbredt enn 1,5. Det kan tyde på at elever på nivå 2, kan ha en formening om at verdien til brøken $\frac{1}{5}$ må være mindre enn 1.



Figur 30. Plott for avgitte svar: oppgave 9.

I *Figur 30* ser at denne oppgaven har høy andel ubesvart blant elever med lav dyktighet (svart linje). Elever med lav dyktighet har større sannsynlighet til å avgi 0,5 (grå linje), 1,5 (grønn linje) eller ubesvart som svar, enn å avgi riktig svar. Sannsynligheten for riktig svar har en sterk økning når dyktigheten passerer θ = −0,5. Men samtidig ser vi at feilsvarene og ubesvart er tilstede blant elever med høy dyktighet.

5.2.5. Misoppfatning D: «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken»

Oppgaver: 4 og 8

Nesten ingen av elevene har avgitt et svar hvor de ser på differansen mellom teller og nevner for å finne en likeverdig brøk og ingen av elevene har avgitt samme type feilsvar i begge oppgaver.

Oppgave 4 og 8 tester om elevene kan finne en likeverdig brøk. I oppgave 4 mangler nevneren og i oppgave 8 mangler telleren. Hensikten med oppgavene er å se om elevene benytter en såkalt «gap thinking» (Pearn & Stephens, 2004), som betyr at de ser på differansen mellom teller og nevner når de skal finne likeverdige brøker.

77 % av elevene hadde riktig svar på begge oppgavene.

Oppgave 4

Hvilket tall skal stå i den tomme ruta?

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{\square}$$

Svar: ________

Oppgave 8

Hvilket tall skal stå i den tomme ruta?

$$\frac{2}{6} = \frac{\square}{12}$$

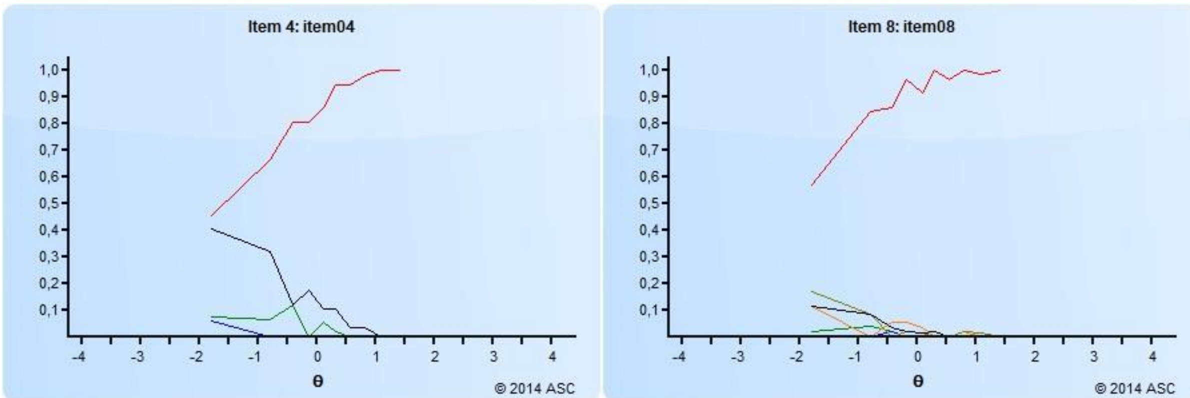
Svar: ______

Tabell 17. Talldata fra oppgave 4 og 8 – misoppfatning D.

		Svarprosent	
Oppgave	**Avgitt svar**	**8.trinn**	**10.trinn**
Oppgave 4	12/15	79 %	84 %
	12/13	3 %	2 %
Oppgave 8	*4/12*	*86 %*	*91 %*
	8/12	0 %	1 %
Samme type feil; begge oppgaver		0 %	0 %

Løsningsprosenten går noe opp fra 8.trinn til 10.trinn. Ingen elever har samme type feil på begge oppgaver.

Braithwaite og Siegler (2018) fant i sin studie at 25 % av elever på 8.trinn brukte en eller annen form for heltallstenking i arbeidet med å finne likeverdige brøker. Etter å ha sett mer nøye på andre feilsvar gitt av elever, kan jeg ikke finne noe som tyder på annen feiltenking med grunnlag i en heltallstenking. De fleste andre feilsvar har kommet som en følge av feil i utvidinga av brøkene. Et eksempel er at eleven har vist at hen i oppgave 4 må utvide brøken med 3. Men når 5 multipliseres med 3, så ender eleven opp med for eksempel 20, og får at $\frac{4}{5}$ tilsvarer $\frac{12}{20}$.



Figur 31. Plott for avgitte svar: oppgave 4 og 8.

I *Figur 31* ser vi plott for oppgave 4 og 8. For oppgave 4 er grønn linje feilsvaret $\frac{12}{13}$. Svart linje er andre svar, og blant andre svar er det mange som har tenkt riktig, men regnet feil. Selv blant elever med lav dyktighet er det størst sannsynlighet for at elevene avgir et riktig svar. Sannsynligheten for å avgi feilsvaret $\frac{12}{13}$ er lav og eksisterer ikke blant elever med høy dyktighet. For oppgave 8 er grønn linje feilsvaret $\frac{8}{12}$. Feilsvaret $\frac{8}{12}$ er lite utbredt. Selv elever med lav dyktighet har mye større sannsynlighet for å avgi riktig svar, enn et feilsvar.

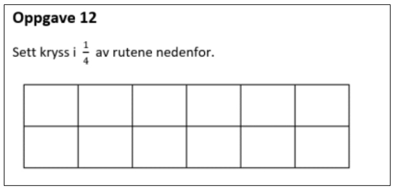
5.2.6. Misoppfatning E: «teller eller nevner er et isolert tall»

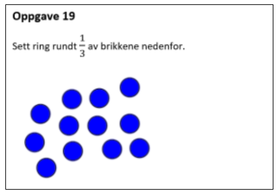
Oppgaver: 12, 19, 23

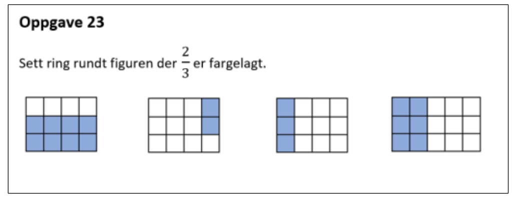
Få elever har avgitt et svar som kan tyde på at de bruker bare tallet i nevner eller teller for å markere en brøkdel i en figur.

Oppgave 12, 19, og 23 tester om elevene kan markere en bestemt brøkdel i en figur. I oppgave 12 og 19 er brøken en stambrøk, mens i oppgave 23 skal elevene velge hvilken figur som representerer $\frac{2}{3}$. Hensikten med oppgavene er å se om elevene bruker teller eller nevner for å markere brøkdelen av en figur. Det vil for eksempel i oppgave 12 føre til at elevene setter ett eller fire kryss.

78 % av elevene hadde riktig svar på alle tre oppgavene.





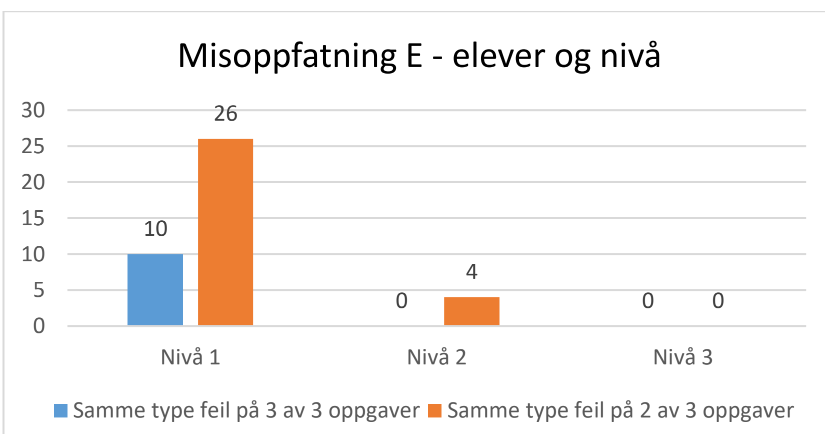


Tabell 18. Talldata fra oppgave 12, 19 og 23 – misoppfatning E.

		Gjennomsnittlig dyktighet	
Oppgave	**Avgitt svar**	**8.trinn**	**10.trinn**
Oppgave 12	*3 kryss*	83 %	88 %
	1 eller 4 kryss	5 %	4 %
Oppgave 19	*4 brikker*	85 %	92 %
	1 eller 3 brikker	4 %	4 %
Oppgave 23	*Figur 1*	86 %	94 %
	Figur 2 eller 3	3 %	3 %
Samme type feil; alle tre oppgaver		2 %	1 %
Samme type feil; minst to av oppgavene		9 %	4 %

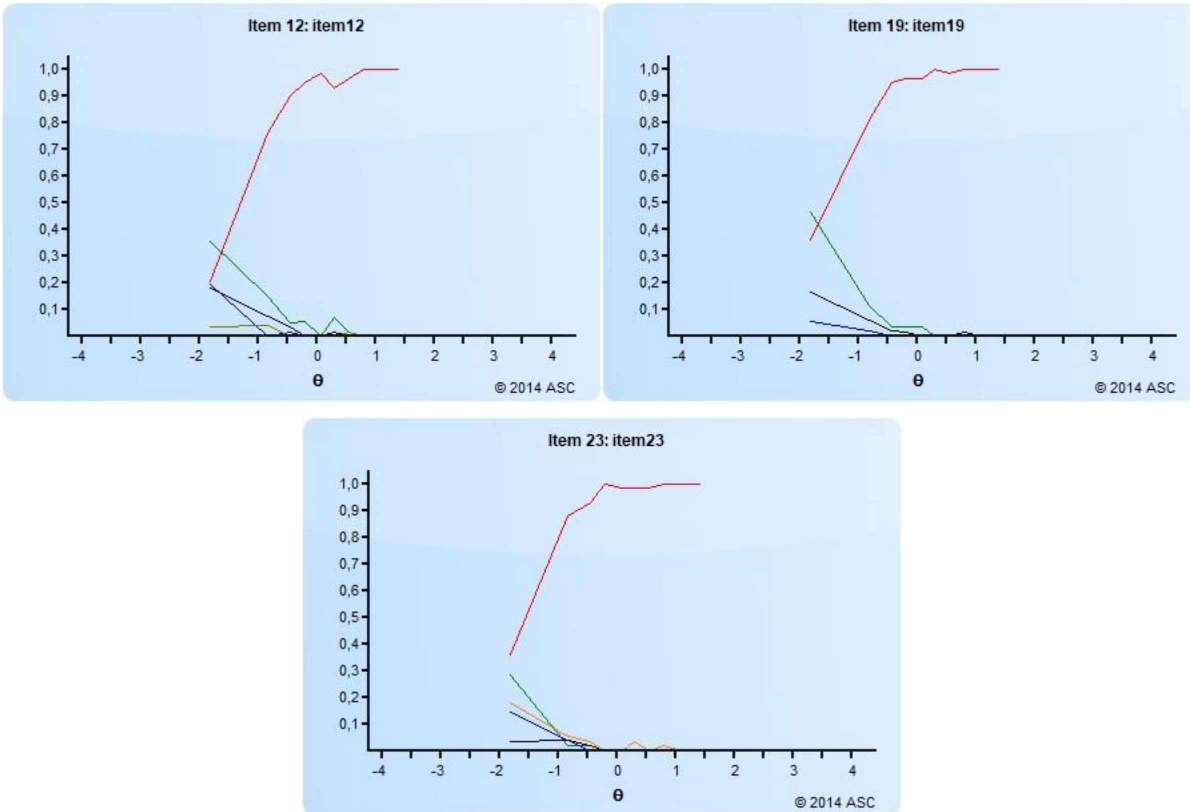
En høy andel av elevene har avgitt riktig svar og andelen øker litt fra 8.trinn til 10.trinn. Andel feilsvar er stabil for 8.trinn og 10.trinn.

Elever med feilsvar bruker tallet i teller eller nevner for å markere brøkdelen av en figur. For oppgave 23 betyr det at elever velger figur 2 om de bruker tallet i teller og figur 3 om de bruker tallet i nevner. Stafylidou og Vosniadou (2004) fant at 7,5 % av elevene på 8.trinn, så på teller og nevner som to uavhengige tall, noe som ikke er så langt fra det data denne studien viser.



Figur 32. Antall elever med misoppfatning E etter nivå.

Ut fra *Figur 32* ser vi at misoppfatningen er mest utbredt blant elever på nivå 1. De fire elevene på nivå 2 har alle avgitt feilsvar i oppgave 12 og 19, og riktig svar på oppgave 23.



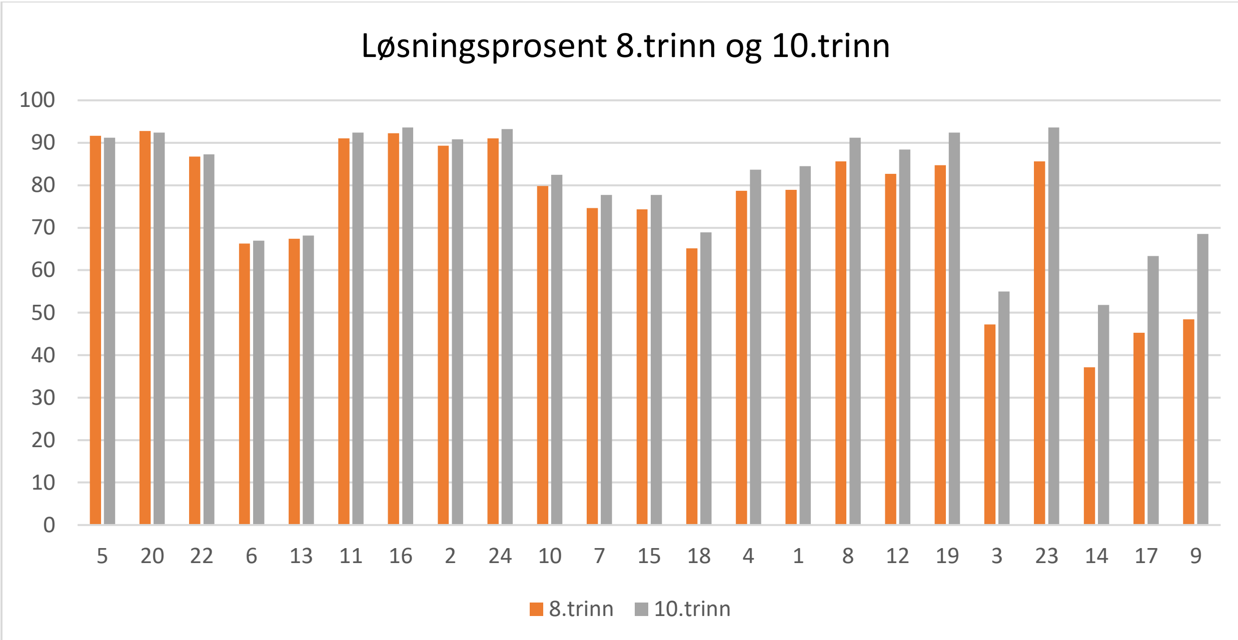
Figur 33. Plott for avgitte svar oppgave 12, 19 og 23.

For oppgave 12 (grønn linje) og 19 (grønn linje) ser vi at feilsvaret hvor elevene baserer seg på tallet i nevner når de skal markere en brøkdel av en figur er et mer utbredt svar blant de minst dyktige elevene enn hva riktig svar er. Oppgave 23 er en flervalgsoppgave og vi ser at alle alternativer blir valgt, men selv for elever med lavest dyktighet er riktig svar mest utbredt.

5.3. Endring i utbredelsen av misoppfatninger fra 8.trinn til 10.trinn

Ved å se på løsningsprosenten og andel feilsvar til oppgavene, samt råskår og dyktigheten til elevene vil jeg vise at det er en statistisk signifikant forskjell når vi ser på resultatene til elever fra 8.trinn sammenlignet med resultatene til elever på 10.trinn.

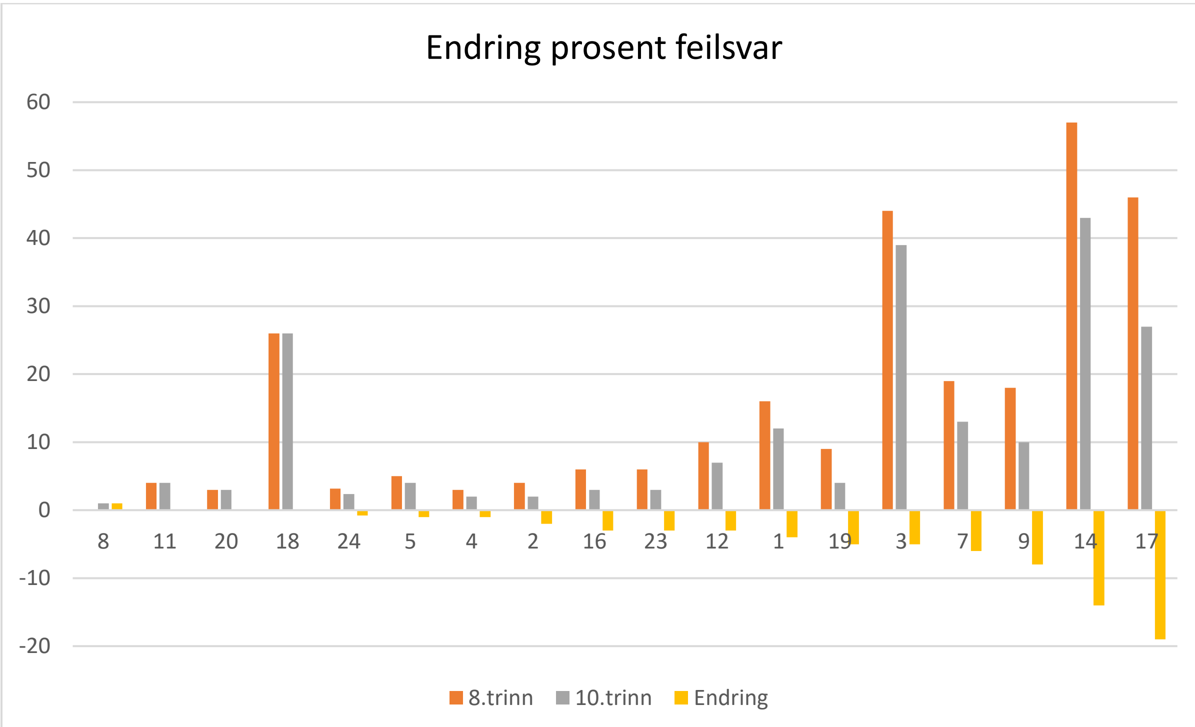
Figur 34 viser løsningsprosenten for oppgavene i heftet sortert fra minst til størst positiv endring fra 8.trinn til 10.trinn.



Figur 34. Løsningsprosent 8. og 10.trinn.

Oppgavene lengst til venstre har omtrent lik løsningsprosent på begge trinnene, mens oppgavene til høyre er de med størst positiv endring fra 8.trinn til 10.trinn. Sammenligner vi med oppgavenes vanskegrad finner vi grovt sett de lette oppgavene til venstre og de vanskeligste oppgavene til høyre. Alle oppgaver med unntak av oppgave 5 og 20 har en økning i løsningsprosenten fra 8.trinn til 10.trinn. Oppsummert kan det se ut til at løsningsprosenten går opp fra 8.trinn til 10.trinn. Dette stemmer med gjennomsnittlig råskår som er 18,1 for elever på 8.trinn og 19,3 for elever på 10.trinn. Det betyr at i snitt så har elever på 10.trinn flere riktige svar enn elever på 8.trinn. Ser vi på gjennomsnittlig dyktighet finner vi også en forskjell. Elever på 8.trinn har en gjennomsnittlig dyktighet på $\theta = -0{,}15$, og elever på 10.trinn har $\theta = 0{,}16$. Det vil si at den gjennomsnittlige dyktigheten for elever på 8.trinn er lavere enn snittet for alle elevene, og tilsvarende er 10.trinn sin gjennomsnittlige dyktighet høyere enn snittet.

Tidligere i dette kapittelet har vi sett på oppgaver knyttet til fem ulike misoppfatninger. I *Figur 35* er alle oppgaver, som tidligere er blitt omtalt, presentert med andel elever fra 8.trinn og 10.trinn som har svart feilsvar som kan tyde på en misoppfatning. Oppgavene er sortert fra minst til størst nedgang i prosentandel feilsvar fra 8.trinn til 10.trinn. Også her finner vi oppgaver med høyest vanskegrad til høyre i diagrammet og oppgaver med lavere vanskegrad til venstre. Unntaket er oppgave 18, som er den femte mest vanskelige oppgaven. For denne oppgaven ser vi at andel feilsvar som kan tyde på en misoppfatning ikke har endret seg fra 8.trinn til 10.trinn. Men det kan se ut til at det er en sammenheng mellom *Figur* 34 og *Figur 35*, der en økende løsningsprosent på 10.trinn fører til at andel feilsvar som kan tyde på misoppfatning avtar. Dette stemmer med funn i andre studier; at andel elever med misoppfatninger går ned når elevene blir eldre (Siegler et al., 2012; Stafylidou & Vosniadou, 2004).



Figur 35. Endring prosent feilsvar fra 8.trinn til 10.trinn.

For å sjekke at det virkelig er en forskjell mellom elever på de to trinnene, har jeg utført en *t*-test, både med hensyn til elevenes råskår og elevenes dyktighet. *t*-test med råskår viser at det er en statistisk signifikant forskjell mellom elever på 8.trinn (råskår = 18,1) og 10.trinn (råskår = 19,3), der $t = -3{,}111$ og $p = 0{,}002$. *t*-test med dyktighet viste også at det er en statistisk signifikant forskjell mellom elever på 8.trinn ($\theta = -0{,}15$) og 10.trinn ($\theta = 0{,}16$), med $t = -4{,}011$ og $p = 0{,}000$. Men gjelder dette for enkeltoppgaver også?

For alle oppgaver i testen som tidligere er omtalt har jeg hentet ut gjennomsnittsdyktigheten for elever på 8.trinn og 10.trinn for riktig svar og for interessante feilsvar. I tillegg er en signifikanstest blitt utført for å se om det er en statistisk signifikant forskjell mellom dyktigheten til elever på 8.trinn og elever på 10.trinn for avgitte svar. Se *Tabell 19* for et eksempel som viser oppgavene 1, 3, og 7.

Tabell 19. Test av statistisk signifikans for forskjell i dyktighet mellom elever på 8. og 10.trinn for avgitte svar i enkeltoppgaver.

Oppgave	Avgitt svar	8.trinn	10.trinn	Signifikans	
Oppgave 1	*1/4*	0,078	0,376	ja	p = 0,000
	1/3	−1,144	−1,251	nei	p=0,58
Oppgave 3	*Figur 2*	0,229	0,517	ja	p=0,000
	Figur 1 og 2	−0,367	−0,219	nei	p=0,20
Oppgave 7	*Figur 1*	0,074	0,409	ja	P=0,000
	Figur 1 og 2	−0,867	−0,882	nei	p=0,94

På grunn av at mange signifikanstester er utført, er ny *p*-verdi for signifikans regnet ut til å være $p < 0{,}001$, ved å bruke en *Bonferroni-korreksjon.*

For oppgave 1 ser vi at dyktigheten til elever på 10.trinn ($\theta = 0{,}376$) er høyere enn for elever på 8.trinn ($\theta = 0{,}078$) for riktig svar. Forskjellen ble regnet ut til å være statistisk signifikant med $p = 0{,}000$. Det vil si at forskjellen i dyktighet mellom elever på de to trinnene ikke skyldes tilfeldigheter. Det betyr at elever på 10.trinn som har svart riktig på oppgaven er dyktigere enn elever på 8.trinn som har svart riktig på oppgaven.

Ser vi på dyktigheten til elever med feilsvar i oppgave 3, ser vi at elever på 10.trinn ($\theta = -0{,}219$) er litt dyktigere enn elever på 8.trinn ($\theta = -0{,}367$). Forskjellen er ikke statistisk signifikant. Så selv om det er en forskjell i verdiene, så er ikke forskjellen «stor nok» til at vi kan si at det er en forskjell.

Signifikansen er regnet ut for alle avgitte svar som er omtalt tidligere og mønsteret som er beskrevet over, gjentar seg for nesten alle oppgaver. Det vil si at for flesteparten av oppgavene er det en statistisk signifikant forskjell mellom elever på 8.trinn og 10.trinn når det gjelder riktig svar, der elever på 10.trinn er dyktigere enn elever på 8.trinn. På samme tid er det for flesteparten av oppgavene *ikke* en statistisk signifikant forskjell mellom elever på 8. og 10.trinn når det gjelder feilsvar som kan tyde på en misoppfatning. Betydningen av dette funnet blir diskutert i siste kapittel.

En DIF-analyse (Diferential item functioning) med Mantel-Haenszel (Guyer & Thompson, 2014) ble utført for å se om noen av oppgavene favoriserer elever på 10.trinn framfor elever på 8.trinn. To oppgaver slo ut med mulig bias mot 8.trinn, det vil si at to oppgaver kan favorisere elever på 10.trinn (*Tabell 20*).

Tabell 20. Oppgaver med mulig bias.

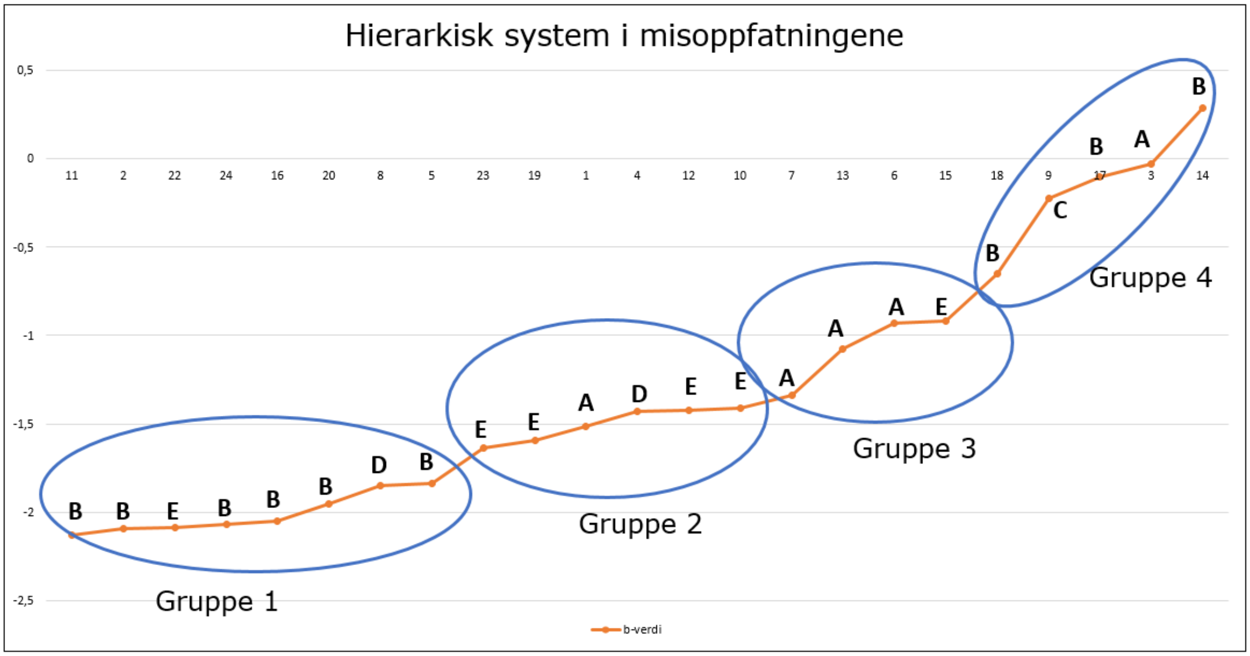
Oppgave	M-H D	p-verdi
9	1,785	0,011
17	1,313	0,035

Ser vi på innholdet i oppgavene så omhandler oppgave 9 omgjøring fra brøk til desimaltall og oppgave 17 omhandler dobling av en stambrøk. Det faglige innholdet i oppgavene skal elevene ha lært på 7.trinn, men når elevene har kommet til 10.trinn vil de selvsagt ha hatt flere erfaringer med akkurat denne typen operasjoner, enn tilfellet er for elever på 8.trinn. Det er verdt å merke seg at oppgave 9 og 17 er de to oppgavene med størst økning i løsningsprosent fra 8.trinn til 10.trinn, henholdsvis 21 og 18 prosentpoeng. Det kan være en av grunnene til at oppgavene slår ut med bias.

5.4. Hierarkisk system i misoppfatningene

I denne delen vil jeg beskrive det hierarkiske systemet jeg har funnet. I arbeidet med analyser av datamaterialet pekte det seg ut et mønster hvor oppgaver med rangering av stambrøker som tester misoppfatning B, *teller eller nevner avgjør størrelsen til brøken*, var blant de enkleste oppgavene i testen. Basert på denne oppdagelsen har jeg sett etter en struktur eller et mønster basert på oppgavenes vanskegrad og misoppfatningen de tester.

Figur 36 viser oppgavene i testen rangert etter vanskegrad, koblet til misoppfatningen den enkelte oppgave tester for alle elever.



Figur 36. Hierarkisk system i misoppfatningene.

Jeg har laget et forslag til et system i hierarkiet ved å gruppere oppgavene. Jeg har satt en ring rundt oppgaver som «passer sammen», det vil si at de ligger samlet og tester samme misoppfatning, eller at det blir en økning i vanskegrad til neste oppgave. Jeg har kalt de ulike grupperingene for gruppe 1, 2, 3, og 4, der gruppe 1 er oppgavene med lavest vanskegrad og gruppe 4 er oppgavene med høyest vanskegrad. Det vil si at flest elever har riktig svar på oppgaver i gruppe 1 og andel misoppfatninger i gruppe 1 er lav. Tilsvarende vil løsningsprosenten være lavere for oppgavene i gruppe 4 og andel misoppfatninger høyere. Merk at både gruppe 1 og gruppe 4 inneholder oppgaver fra misoppfatning B. For å følge samme inndeling som i analysen ovenfor så inneholder gruppe 1 misoppfatning B_1 og B_2, mens gruppe 4 inneholder misoppfatning B_3 og B_4, i tillegg til misoppfatning C.

I grove trekk forteller *Figur 36* følgende: (1) De fleste elever med lavest dyktighet har alle misoppfatninger; (2) De fleste elever med dyktighet høyere enn $\theta = -1{,}5$ har ikke misoppfatning B_1 og B_2, men har fremdeles de andre misoppfatningene; (3) De fleste elever med dyktighet høyere enn $\theta = -1{,}0$ har forlatt misoppfatning E; (4) De fleste elever med dyktighet høyere enn $\theta = -0{,}5$ har forlatt misoppfatning A; og (5) Først når elevene har en dyktighet høyere enn $\theta = 0{,}5$ vil de fleste elever ha forlatt alle misoppfatningene.

En praktisk betydning av hierarkiet er at man fra ett enkelt mål, eleven sin dyktighet, kan estimerer hvilke misoppfatninger elever har. For eksempel, hvis jeg vet at en elev har dyktighet $\theta = -0{,}70$, så kan jeg lese av grafen og gjøre et kvalitativt estimat over hvilke misoppfatninger eleven har. Med dyktighet θ = −0,70 vil jeg, på bakgrunn av hierarkiet, kunne estimere at eleven har B_3, B_4, C (gruppe 4), og kanskje A (gruppe 3). Og jeg kan estimere at eleven ikke har misoppfatningene B_1, B_2, D, og E.

For å kvalitetssikre funnet har jeg analysert elever på 8.trinn og 10.trinn hver for seg. Da har jeg fått ut oppgavene sin vanskegrad for elever på 8.trinn og oppgavene sin vanskegrad for elever på 10.trinn.

Tabell 21 viser oppgavene rangert etter vanskegrad for elever på 8.trinn, elever på 10.trinn og for elever på 8. og 10.trinn samlet.

Tabell 21. Oppgavenes vanskegrad for 8.trinn, 10.trinn og 8. og 10.trinn samlet.

	Oppgavene sortert etter vanskegrad																						
Trinn	**Gruppe 1**								**Gruppe 2**						**Gruppe 3**				**Gruppe 4**				
8.trinn	11	16	22	24	20	2	5	8	1	23	10	4	19	12	7	13	6	15	18	9	3	17	14
10.trinn	11	22	2	16	24	20	5	8	23	19	1	4	12	10	7	13	15	6	18	9	17	3	14
8. og 10.trinn	11	2	22	24	16	20	8	5	23	19	1	4	12	10	7	13	6	15	18	9	17	3	14

Her har jeg markert mitt forslag til inndeling i hierarkiet etter farger basert på gruppene i *Figur 36*. Hvis vi ser på gruppe 1 (blå farge), ser vi at oppgavene ikke er rangert på samme måte for verken 8.trinn eller 10.trinn som de er for 8. og 10.trinn samlet. Men innenfor den blå fargen finner vi de samme oppgavene. Selv om rekkefølgen er litt ulik, får vi de samme oppgavene i gruppe 1, enten vi ser bare på 8.trinn, bare på 10.trinn, eller på 8. og 10.trinn samlet. Det samme gjelder for de andre gruppene.

Dette kan tyde på at det kan være en sammenheng mellom vanskegraden til oppgaven og misoppfatningen de tester.

Flere andre har kommet med forslag til hierarkiske system innenfor brøk (Charalambous, 2007; Novillis, 1976; Wilkins & Norton, 2018), men ingen studier har til nå sett på om det finnes et hierarkisk system innenfor oppgaver som tester misoppfatninger knyttet til del-av-hel-aspektet til brøk.

6. Diskusjon og konklusjon

I denne masteroppgaven har jeg sett på elevers feilsvar i brøkoppgaver som tester del-av-hel-aspektet, for å kunne svare på følgende forskningsspørsmål: (1) Hvor stor andel av elever på ungdomstrinnet kan antas å ha en misoppfatning knyttet til brøk, og er det en endring i andel elever som kan antas å ha en misoppfatning fra 8. til 10.trinn? (2) Er det en hierarkisk sammenheng mellom misoppfatninger i brøk?

For å svare på forskningsspørsmålene har jeg utviklet et måleinstrument med brøkoppgaver og gjennomført en kvantitativ undersøkelse med elever fra 8. og 10.trinn. Resultatene er blitt analysert med CTT og IRT.

I denne delen vil jeg først se på mitt kriterium for når en elev har en misoppfatning før jeg går over til å se på noen funn fra analysen. Jeg vil fokusere på ett funn fra utbredelsen av misoppfatninger der ingen elever ser ut til å ha misoppfatninger knyttet til misoppfatning D, *differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken*. Deretter vil jeg se på funn knyttet til endring fra 8.trinn til 10.trinn og noen betraktninger rundt et hierarkisk system i misoppfatningene. Til slutt vil jeg se på studiens implikasjoner og begrensinger før jeg ser på muligheter for videre forskning og konkluderer.

6.1. Når har en elev en misoppfatning?

Mange studier konkluderer med at en alarmerende andel elever har misoppfatninger i brøk (Alghazo & Alghazo, 2017; Bill, 2003; Razak et al., 2012). Resultatene i min studie utfordrer disse resultatene. Min studie viser at elever kan ha færre misoppfatninger enn hva andre studier har rapportert. Men, denne antakelsen bygger på mitt premiss om at elevene må ha gjort samme type feil i tre av tre oppgaver eller to av tre oppgaver og mitt premiss bygger på at misoppfatninger fører til nokså konsekvente feil (Brekke, 2002). Men er en misoppfatning absolutt? Vil en misoppfatning føre til at elever konsekvent svarer samme type feilsvar absolutt hver gang de møter samme oppgavetype?

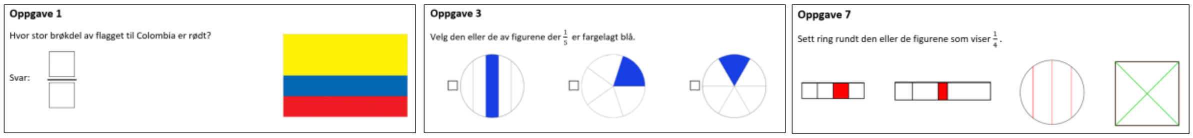
Figur 37. Når har en elev en misoppfatning?

Tallinja i *Figur 37* prøver å konkretisere avstanden mellom en elev som avgir et feilsvar én gang til en hypotetisk elev som avgir feilsvar absolutt hver gang. Hvor på denne skalaen kan vi definere en elev til å ha en misoppfatning?

Det finnes ingen konvensjon som definerer når en elev har en misoppfatning, men Brekke (2002) påpeker at det ligger en nokså konsekvent tankegang bak feilsvar som gir utslag i misoppfatninger. Det betyr at en elev som blir utsatt for flere like oppgaver, *mest sannsynlig* vil gjøre samme type feil i oppgaver som tester den samme misoppfatningen. Dette har jeg prøvd å ta hensyn til i utformingen av måleinstrumentet, ved at flere oppgaver tester én og samme misoppfatning. Jeg har også prøvd å ta hensyn til dette i min behandling av talldata for utbredelsen av misoppfatninger, ved å slå fast at alle som avgir et konsekvent feilsvar har en misoppfatning, i tillegg til at elever som avgir et nokså konsekvent feilsvar også har en misoppfatning.

Jeg vil påpeke at flere andre studier ofte omtaler elevers misoppfatninger basert på avgitte svar fra kun én oppgave (Bill, 2003; Pearn & Stephens, 2004; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Noen studier som har fokus på kun én misoppfatning, for eksempel rangering av to brøker, har derimot inkludert mange like oppgaver i sine studier (Dewolf et al., 2014; DeWolf & Vosniadou, 2011). I denne studien har jeg oppgaver som tester flere misoppfatninger og har valgt et restriktivt kriterium for når en elev kan sies å ha en misoppfatning. Ettersom det ikke finnes en konvensjon for når vi kan si at elever har en misoppfatning, kan det føre til at sammenligninger mellom ulike studier ikke alltid blir like relevante. Som et eksempel kan vi bruke oppgave 3 som tester misoppfatning A, *nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse*. På 8.trinn har 44 % av elevene avgitt et svar som kan tyde på en misoppfatning. Basert på kun denne ene oppgaven kan jeg si at 44 % av elevene på 8.trinn mener at nevner representerer antall deler uavhengig av størrelsen. Dette tallet stemmer godt med undersøkelser fra andre studier som refererer til én oppgave (Bill, 2003). Tar jeg derimot i betraktning at elevene må ha gjort samme type feil på to av tre oppgaver, synker andel elever med misoppfatning til 28 %. Andelen synker enda mer om jeg ser på elever som har avgitt samme type feilsvar i tre av tre oppgaver. Da er andelen nede på 7 % på 8.trinn. Da er vi tilbake til hva vi kan konkludere med. Har 44 %, 28 %, eller 7 % av elevene på 8.trinn en misoppfatning hvor de ikke tar hensyn til størrelsen på delene? Eller er det noe annet med oppgavene som også spiller inn?

Det er en tydelig forskjell mellom de tre oppgavene som tester misoppfatning A (se *Figur 38*). I oppgave 1 er det brukt et rektangel. Rektangel er også brukt i oppgave 7 for figur 1 og 2. I oppgave 3, derimot, er alle figurene sirkler, og sirkel 1 er delt inn på en utradisjonell måte med vertikale deler.



Figur 38. Oppgave 1, 3 og 7.

Det kan se ut til at de fleste elevene er klar over at delene i et rektangel må være like store, men en god del flere elever avgir et feilsvar i møte med oppgave 3. Det kan tyde på at figuren brukt i oppgave 3 er mer ukjent for elever. Hvis elevene bruker kunnskap fra brøkdeler i et rektangel, blir det «logisk» å tenke at så lenge delene i en sirkel er like brede, er delene like. Men da har de glemt å ta i betraktning at arealet av hver del må være like stor. Kanskje er det ikke så enkelt å si at en elev har eller ikke har en misoppfatning. Oppgavene som tester misoppfatning A kan vise at det finnes grader av misoppfatning. Med det mener jeg at elever som har riktig svar på oppgave 1 og 7 har kontroll på at delene i et rektangel må være like store. Men når de kommer til oppgave 3, så avgir mange elever et svar som kan tyde på en misoppfatning, selv om de har riktig svar på oppgave 1 og 7. En sirkel delt vertikalt er funnet å være mer krevende enn rektangler delt vertikalt (Watson et al., 1999). Det kan bety at valg av geometrisk figur og måten de blir oppdelt på har betydning for andel feilsvar. Andre faktorer som kan påvirke er valg av kontekst i oppgaver og valg av tall.

Jeg forholder meg til mitt premiss for når elever har en misoppfatning; det vil si at elever må ha avgitt nokså konsekvente feilsvar for at jeg skal kunne si at de har en misoppfatning.

6.2. Funn knyttet til misoppfatningene

Analyse av elevers feilsvar viser at elever på ungdomstrinnet har misoppfatninger knyttet til brøk, og andel elever med misoppfatninger varierer avhengig av type misoppfatning. Alle misoppfatningene som er omtalt i denne studien har sitt utspring i «*whole number bias*» (Braithwaite & Siegler, 2018; Dewolf & Vosniadou, 2015; Ni & Zhou, 2005), som innebærer at elevene overgeneraliserer kunnskap fra arbeid med hele tall og bruker det i sitt arbeid med brøk.

Tabell 22 viser en samlet oversikt for 8. og 10.trinn over andel elever med misoppfatninger. Tabellen gjengir andel elever som har avgitt et feilsvar på minst to av tre oppgaver. Jeg velger å gjengi det på denne måten, fordi jeg ikke kan se bort ifra at elever som har et nokså konsekvent feilsvar har en misoppfatning. Unntakene står i kursiv. Det er bare én oppgave som tester B_4 og C.

Tabell 22. Oversikt over utbredelsen av misoppfatninger, samlet for 8. og 10.trinn.

	Misoppfatning	**Andel elever**
A	Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse	25 %
B_1 og B_2	Rangerer stambrøker etter størrelsen på nevner	5 %
B_3	Bruker heltallstenking i halvering og dobling av stambrøk	26 %
B_4	*Rangerer tre brøker etter størrelsen på delene*	*21 %*
B_4	*Rangerer tre brøker etter teller eller nevner*	*6 %*
C	*Brøkstrek er lik komma*	*14 %*
D	Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken	0 %
E	Bruker nevner eller teller til å markere brøkdelen av en figur	7 %

Selv med et forholdsvis restriktivt premiss er andel misoppfatninger ganske stor. En firedel av elevene tar ikke hensyn til størrelsen på delene, og det samme gjelder halvering og dobling av en stambrøk. En femdel av elevene rangerer tre brøker etter størrelsen på delene. Ingen elever har misoppfatning D, og jeg vil se litt mer på denne misoppfatningen nedenfor.

Misoppfatningen *differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken*, såkalt «gap thinking», skiller seg ut i min studie ved at ingen elever har gjort samme type feil i de to oppgavene som tester denne misoppfatningen. I en tilsvarende undersøkelse avga 15 % av elever på 9.trinn et svar som tyder på «gap thinking» (Matematikksenteret, u.å.-b). Braithwaite og Siegler (2018) fant i sin studie at 25 % av elever på 8.trinn brukte en eller annen form for heltallstenkning i arbeidet med å finne likeverdige brøker; Mitchell og Horne (2010) fant at 42 % av elever på 6.trinn brukte «gap thinking» og at denne tankegangen var mest utbredt hos elever som presterte gjennomsnittlig. De minst dyktige elevene gjorde andre typer feil som ikke var knyttet til «gap thinking» (Mitchell & Horne, 2010).

I min studie fant jeg, i tråd med det Mitchell og Horne fant, at de minst dyktige elevene gjorde andre typer feil. Etter å ha sett mer nøye på andre feilsvar gitt av elever, kan jeg heller ikke finne noe som tyder på annen feiltenking med grunnlag i en heltallstenking. De fleste andre feilsvar har kommet som en følge av feil i utvidinga av brøkene.

Mitchell og Horne (2010) fant også at denne typen feil var mest utbredt når teller og nevner var nær hverandre. Dette har jeg tatt hensyn til i oppgave 4, som tester denne misoppfatningen, ved å bruke brøken $\frac{4}{5}$. Denne oppgaven er også den eneste hvor elever på

8.trinn bruker «gap thinking» for å finne en likeverdig brøk. I oppgave 8, hvor teller og nevner er lenger fra hverandre, så har ingen elever på 8.trinn brukt «gap thinking».

Jeg finner ingen god forklaring til ulikhetene i resultatene knyttet til denne misoppfatningen. Et forslag er å bruke brøker med større nevner og teller, der teller og nevner ligger nær hverandre, gjerne med en differanse på bare én mellom teller og nevner. Det er også mulig at et annet spørsmål ville ha tvunget frem «gap thinking». Clarke, Roche og Mitchell (2007) fant i sin studie at «gap thinking» ble brukt når elever skulle sammenligne to brøker, som for eksempel $\frac{3}{7}$ og $\frac{4}{5}$.

6.3. Endringer fra 8.trinn til 10.trinn

Analyse av elevsvarene viser at det er en nedgang i andel misoppfatninger fra 8.trinn til 10.trinn. Elever på 10.trinn som løser en oppgave riktig er signifikant dyktigere enn elever på 8.trinn som har løst samme oppgave riktig. På samme tid er det verdt å merke seg at for elever som svarer et feilsvar som indikerer en misoppfatning, så er dyktigheten lik for elever på 8. og 10.trinn. Hvilken betydning har dette siste funnet?

Vi kan ta utgangspunkt i et konkret eksempel.

Tabell 23. Dyktigheten til elever for avgitte svar, samt test av signifikans for oppgave 2.

Oppgave	**Avgitt svar**	**Trinn**		**Signifikans**	
		8.trinn	**10.trinn**		
Oppgave 5	*sortert riktig*	−0,002	0,341	ja	p=0,000
	sortert motsatt	−1,666	−1,765	nei	p=0,74

Fra *Tabell 23* ser vi at elever på 10.trinn som har sortert stambrøker riktig er dyktigere enn elever på 8.trinn som har sortert riktig. Denne forskjellen er statistisk signifikant, som betyr at elever på 10.trinn er dyktigere enn elever på 8.trinn. For elever som har sortert motsatt, det vil si sortert brøkene etter størrelsen på nevner, så er elevene på 8.trinn litt dyktigere enn elever på 10.trinn. Forskjellen er ikke statistisk signifikant. Så selv om det er en forskjell i verdiene, så er ikke denne forskjellen «stor nok» til at vi kan si at det er en reell forskjell.

Hvilken betydning kan det ovenfor ha? Se for deg følgende scenario. Du går på 8.trinn og tar testen som denne studien bygger på. I oppgave 5 sorterer du stambrøker etter størrelsen på nevner, fordi du har en misoppfatning knyttet til det oppgaven etterspør. Når du kommer til 10.trinn har du fortsatt samme misoppfatning, og avgir fortsatt det samme svaret som da du gikk på 8.trinn. Dyktigheten din for testen som helhet er mer eller mindre den samme som da du gikk på 8.trinn. Det vil si at for testen som helhet har du ikke greid å løse flere oppgaver, enn da du tok testen på 8.trinn. Signifikanstestingen tyder da på at du ikke har blitt noe dyktigere siden 8.trinn, og misoppfatningen kan da være et hinder for ny læring. Booth og Koedinger (2008) sier rett ut, at misoppfatninger hindrer ny læring.

Kort fortalt kan vi kanskje si at løser du oppgaver riktig på 8.trinn, blir du dyktigere når du kommer til 10.trinn. Har du derimot en misoppfatning på 8.trinn og du beholder denne misoppfatningen til du kommer til 10.trinn, så har du ikke blitt noe dyktigere siden 8.trinn.

Dette er et interessant funn, fordi det viser viktigheten av å arbeide med elevers misoppfatninger, da misoppfatningene legger hindringer i veien for elevers læring. Det blir derfor spesielt viktig å ta tak i misoppfatninger hos de minst dyktige elevene, fordi misoppfatninger kan være en årsak til at de minst dyktige elevene er akkurat minst dyktige (Booth & Koedinger, 2008).

6.4. Hierarkisk system

Basert på analyser av oppgavenes vanskegrad og misoppfatningene oppgavene tester, kan det se ut til at det finnes et hierarkisk system i misoppfatningene.

Jeg har ikke funnet andre studier som ser på hierarkiske strukturer eller mønstre innenfor misoppfatninger knyttet til brøk. Det er derimot utført studier som ser på mer generelle strukturer innenfor brøk-konseptet. Wilkins og Norton (2018), for eksempel, skisserte en læringsprogresjon fra del-av-hel-aspektet til målingsaspektet. Resultater fra deres studie viser at del-av-hel-aspektet er enklest for elever og at målingsaspektet er vanskeligst. I en annen studie foreslo Charalambous (2007) en skala for å måle elevers forståelse av alle aspektene til brøk. Han fant at de letteste oppgavene tilhørte del-av-hel-aspektet og de vanskeligste tilhørte aspektet måling (Charalambous, 2007). Pantziara og Philippou (2012) undersøkte om elevers brøkforståelse kunne knyttes til Sfard (1991) sine tre nivå for forståelse: *interiorization*, *condensation*, og *reification*. De fant indikasjoner på at det kan eksistere en skala basert på oppgavers vanskegrad i forhold til operasjonell og strukturell forståelse. Novillis (1976) har også sett på brøkkonseptet som et hierarki med underkonsepter.

Min studie indikerer at det finnes et hierarki innenfor aspektene til brøk. Det kan også se ut til at det finnes et hierarki knyttet til elevers grad av forståelse av brøk. Studiene som er referert ovenfor har undersøkt strukturer i et litt større bilde, enn det jeg har gjort i denne studien.

Jeg har i min studie funnet en mulig hierarkisk struktur i misoppfatningene knyttet til del-av-hel-aspektet til brøk. Hierarkiet er basert på oppgavenes vanskegrad. Det er derfor en mulig sammenheng mellom oppgavers vanskegrad og misoppfatningen den enkelte oppgave tester.

Hierarkiet er foreslått inndelt i fire grupper. Gruppe 1 består hovedsakelig av oppgaver som tester misoppfatning B. Det vil si at elever med en misoppfatning vil rangere stambrøker etter størrelsen på nevner. Denne misoppfatningen er det kun de minst dyktige elevene som har. Det samme fant Mitchell og Horne (2010) i sin studie. Gruppe 2 består hovedsakelig av oppgaver der elever med en misoppfatning ser på teller eller nevner som et isolert tall, og bruker nevner eller teller til å angi brøkdel av en figur. I gruppe 3 finner vi oppgaver som tester misoppfatningen *nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse*, og i gruppe 4 finner vi ulike oppgaver som omhandler «regneoperasjoner» som halvering og dobling av en stambrøk, omgjøring fra brøk til desimaltall, og rangering av brøker som ikke er stambrøker.

En måte å se hierarkiet på er å koble det opp mot Charalambous (2007) sitt forslag til hierarki innenfor alle aspektene til brøk. Da kan vi si at det finnes et hierarki innenfor kun det ene aspektet del-av-hel, der rangering av stambrøker er lettest. Deretter følger gruppe 2, gruppe 3, og vanskeligst er oppgaver knyttet til gruppe 4. Da kan hierarkiet gi en oversikt over hva elever finner lettest og vanskeligst i aspektet del-av-hel.

En annen viktig betydning av denne hierarkiske strukturen er mer praktisk rettet. Ettersom oppgavenes vanskegrad og elevenes dyktighet henger sammen i IRT, så kan vi bruke hierarkiet til å estimere hvilke misoppfatninger en elev har, basert på eleven sin dyktighet. Det betyr at hvis vi, for eksempel, vet at en elev har dyktighet –1,50 så kan vi lese av på grafen og gjøre et kvalitativt estimat på hvilke misoppfatninger denne eleven har. Ut fra grafen ser vi da at eleven kan antas å ha misoppfatninger knyttet til gruppe 2, 3 og 4. En elev med dyktighet 0,50 kan antas å ikke ha misoppfatninger i det hele tatt. Det vil si at vi på grunnlag av et enkelt mål, eleven sin dyktighet, kan estimere hvilke misoppfatninger eleven har. Dette er et interessant funn, da det impliserer at det er en sammenheng mellom oppgavene sin vanskegrad, eleven sin dyktighet og misoppfatninger knyttet til del-av-hel. I tillegg kan hierarkiet være et godt verktøy for lærere for å få en enkel oversikt over mulige misoppfatninger i egen klasse.

6.5. Implikasjoner

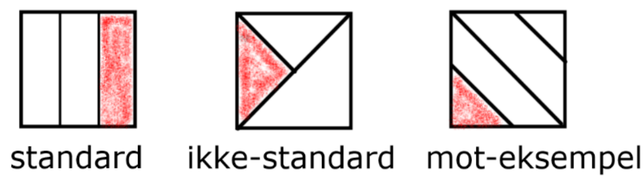
Denne studien er viktig for lærere fordi den viser at misoppfatninger er utbredt blant elever i norsk skole. Med alt fokuset som er på prestasjoner og kunnskapsnivå i norsk skole, kan en god start være å se på om elever som strever i matematikk har misoppfatninger. Lærere bør derfor ha kjennskap til hva misoppfatninger er, hvorfor de kan oppstå, og tiltak som kan settes inn både for å hindre at elever får misoppfatninger, men også hva som kan gjøres for å hjelpe elever med misoppfatninger (Aliustaoğlu, Tuna & Biber, 2018). I *prinsipper for god regneopplæring* vises det til at lærere må kunne gjenkjenne og bruke elevene sine misoppfatninger som utgangspunkt for diskusjon og refleksjon, slik at elevene får justert sine misoppfatninger (Udanningsdirektoratet, 2015). Gjenkjenning av misoppfatninger krever kunnskap, og denne studien kan være med å hjelpe lærere til å oppnå akkurat det.

Lærere har en fin mulighet til å kartlegge misoppfatninger i egen klasse ved å bruke vedlagte oppgavehefte. Skal heftet kunne brukes fullt ut i skolen, bør det følge med en veiledning som forklarer kort om de ulike misoppfatningene, samt et retteskjema hvor oppgaver som tester samme misoppfatning blir sett i sammenheng med hverandre. I tillegg bør testen utformes slik at lærere ikke behøver å bruke IRT for å kunne tolke resultatet.

Hierarkiet gir lærere en mulighet til enkelt å tilpasse undervisningen til den enkelte elev. En elev med dyktighet –2,0 har sannsynligvis lite utbytte av å arbeide med oppgaver i gruppe 3 eller 4, så lenge eleven har problemer med oppgaver i gruppe 1. Det er viktig at elever med lav dyktighet får hjelp med den mest grunnleggende misoppfatningen først. En elev som rangerer stambrøker etter størrelsen på nevner (gruppe 1), har sannsynligvis lite utbytte av å arbeide med rangering av brøker som ikke er stambrøker som vi finner i gruppe 4.

Studien er også viktig for lærebokforfattere. Jeg mener ett resultat peker seg ut som noe lærebokforfattere bør merke seg. Det gjelder oppgave 3, der en sirkel er delt inn i deler som ikke har like stort areal. Hele 44 % av elevene på 8.trinn har avgitt et misoppfatningssvar på denne ene oppgaven. En titt i en av de nyeste matematikkbøkene på markedet, *Matemagisk* (Kroknes, Kavén, Persson & Ødegaard, 2013), viser at introduksjonen til brøk på 3.trinn består av at elever skal markere brøkdeler i en arealfigur eller skrive ned brøkdelen som er fargelagt. Deretter følger flere sider med tilnærmet like oppgaver. Da kan vi trekke frem igjen resultatet fra oppgave 3. Selv om elevene har arbeidet med «hundrevis» av standardiserte fargelagte figurer på barneskolen, så viser resultatet av oppgave 3 at en viktig del av brøkbegrepet ikke blir forstått gjennom slike repeterende oppgaver.

Gu, Huang og Marton (2004) setter søkelyset på viktigheten av variasjon i figurene som blir brukt i undervisningen. De mener at bruk av figurer gir støtte til ulike begreper, og de fokuserer på at det finnes standardfigurer og ikke-standardiserte figurer. I tillegg må elevene få kjennskap til figurer som *ikke* oppfyller kravene til begrepet som undervises, et såkalt mot-eksempel (Gu et al., 2004). Se *Figur 39* for et eksempel.



Figur 39. Eksempler på en standardfigur, en ikke-standardisert figur og et mot-eksempel.

En standardfigur er en typisk figur slik elevene er vant til å møte figurer i arbeid med brøk. En ikke-standardisert figur avviker fra den standardiserte figuren, men oppfyller likevel kravet til at den belyser konseptet. For eksempel handler det om at ved å trekke opp en strek i figuren, så vil vi få fire like store deler. Mot-eksempler er viktige fordi de gir rom for samtale rundt begrepet. Hvorfor tilfredsstiller ikke mot-eksemplet kravet om at $\frac{1}{4}$ er fargelagt? Kan vi lage andre figurer som er et mot-eksempel og hvorfor er disse figurene mot-eksempler? En slik variasjon i bruk av figurer gjør elevene bedre rustet til å forstå essensen i et begrep (Gu et al., 2004).

Et forslag til forbedring av lærebøker er at de bør inneholde oppgaver som utfordrer elevene sin tenkning. Det kan være figurer som er delt inn på en slik måte at man *ikke* greier å finne brøkdelen skravert, for å sette søkelyset på viktigheten av at delene må være like store.

Studien er også viktig for forskere med tanke på muligheten for at det finnes et hierarkisk system i misoppfatningene. Jeg har ikke funnet artikler som har sett på dette tidligere og dermed blir det viktig å undersøke om dette funnet er stabilt, ved å replikere eller utvide studien.

6.6. Forslag til forbedring av måleinstrumentet ved videre bruk

I metodekapittelet ble sammensetningen av måleinstrumentet beskrevet. En forutsetning for at en test skal fungere diagnostisk er at testen må inneholde flere oppgaver som tester det samme (Cohen et al., 2018). For fire av de fem misoppfatningene inneholder testen flere oppgaver som tester samme misoppfatning. Unntaket er for misoppfatning C, *brøkstrek er lik komma*, som er representert med kun én oppgave, der $\frac{1}{5}$ skal skrives som desimaltall. Avgitte svar viser at 1 av 7 elever ser på brøkstrek som komma. Det hadde vært interessant å se hvilke svar vi hadde fått om testen hadde inneholdt flere oppgaver som tester det samme. Hvilke svar hadde vi fått på oppgaver der $\frac{5}{4}$ eller $\frac{1}{20}$ skal skrives som desimaltall? Hadde vi fått feilsvarene 5,4 (0,4) og 1,20 (0,20)?

I tillegg er oppgavene som tester misoppfatningen *jo større nevner eller teller, dess større brøk* såpass ulike at det burde vært med flere oppgaver med rangering av tre eller flere brøker som ikke er stambrøker, i tillegg til iallfall én oppgave til som omhandler dobling eller halvering av brøk.

For å forbedre måleinstrumentet foreslår jeg at oppgave 21 går ut. Det bør legges til oppgaver som tester rangering av tre brøker, samt halvering eller dobling av stambrøk. Oppgave 9 bør enten gå ut, eller så må det legges til to oppgaver til som tester om brøkstreken er lik komma. Det er viktig at oppgavesettet ikke blir for omfattende, men mine erfaringer er at et oppgavesett på rundt 30 oppgaver ikke skal være for omfattende for elever på ungdomsskolen.

6.7. Studiens begrensning

Det kan være et problem at jeg ikke har fått vært tilstede i alle klasserom under gjennomføringene. Selv om alle lærere hadde fått informasjon på forhånd om gjennomføringen, så har jeg ingen garanti for at lærerne fulgte mine anvisninger når det gjaldt tidsbruk og informasjon gitt til elever på forhånd. Jeg har heller ingen kontroll over om elevene gjorde sitt beste med å avgi svar på alle oppgaver. En ulempe med kvantitative undersøkelser er nettopp avstand til de som gjennomfører og dermed kan ikke alle variabler kontrolleres (Cohen et al., 2018).

I en kvantitativ undersøkelse har jeg ingen mulighet for å samtale med alle elevene som har gjennomført testen. Derfor er det viktig å påpeke at andel elever med misoppfatninger kan avvike fra tall funnet i denne studien; andelen kan være høyere eller lavere. Samtidig vil et strengt kriterium for å kunne si at en elev har en misoppfatning gjøre sannsynligheten for en overestimering lavere.

Et større og mer randomisert utvalg ville ha styrket argumentene i min studie. I tillegg, som nevnt i forrige delkapittel, ville en utvidelse av oppgavene i heftet, ført til bedre talldata for alle misoppfatninger.

6.8. Videre forskning

Denne studien viser at det kan eksistere et hierarki innenfor misoppfatningene. Det er nødvendig å undersøke dette videre både med tanke på om funnet er stabilt, men også med tanke på om dette gjelder for alle misoppfatninger knyttet til alle aspektene til brøk, eller om dette bare er noe som eksisterer innenfor del-av-hel-aspektet til brøk. Videre bør det også undersøkes om det finnes tilsvarende hierarki knyttet til misoppfatninger i andre matematiske emner som desimaltall, algebra, og geometri. En slik forskning vil kunne hjelpe lærere med både å kartlegge egne elever og planlegging av undervisning tilrettelagt for den enkelte elev.

Basert på diskusjonen rundt misoppfatningen *nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse*, mener jeg det ville vært interessant å gå mer i dybden på akkurat denne misoppfatningen. Tidligere forskning viser at ulike studier bruker ulike figurer for å si noe om andel elever med misoppfatning. Vil bruk av noen bestemte figurer gi et høyere andel feilsvar som viser til en misoppfatning enn andre figurer? Vil bruk av ulike figurer, som er oppdelt i ulike deler, kunne gi et slags hierarki innenfor kun denne ene misoppfatningen?

6.9. Konklusjon

Studien viser at flere misoppfatninger er tilstede hos elever på ungdomstrinnet og at noen misoppfatninger er mer fremtredende enn andre. Flest elever har misoppfatninger knyttet til halvering og dobling av en stambrøk, men også når det gjelder rangering av tre brøker så er misoppfatninger framtredende. Elever med høy dyktighet har ingen misoppfatninger knyttet til del-av-hel-aspektet, mens det kun er elever med svært lav dyktighet som rangerer brøker etter størrelsen på nevner. Det kan se ut til at innenfor misoppfatningen *nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse*, så har figurene som blir brukt i oppgaven betydning for elevers avgitte svar. Figurer som er ukjente eller uvante for elevene fører til flere feilsvar enn kjente figurer.

Andel misoppfatninger går ned fra 8.trinn til 10.trinn; elever på 10.trinn er signifikant dyktigere enn elever på 8.trinn. På samme tid er det viktig å være klar over at dette ikke gjelder for elever som har misoppfatninger, da elever med misoppfatninger på 10.trinn er like dyktige som elever med misoppfatninger på 8.trinn.

Det kan se ut til at det finnes en hierarkisk struktur i misoppfatningene. Dette er et viktig og interessant funn som kan gjøre det enklere å estimere hvilke misoppfatninger en elev har, basert på eleven sin dyktighet. I tillegg kan denne strukturen i misoppfatningene hjelpe lærere til å få en bedre oversikt over vanskegraden til ulike oppgavetyper under del-av-hel-aspektet til brøk.

7. Referanser

Alghazo, Y. M. & Alghazo, R. (2017). Exploring common misconceptions and errors about fractions among college students in Saudi Arabia. *International Education Studies, 10*(4), 133-140.

Aliustaoğlu, F., Tuna, A. & Biber, A. C. (2018). The misconceptions of sixth grade secondary school students on fractions. *International Electronic Journal of Elementary Education, 10(5)*, 591-599. https://doi.org/10.26822/iejee.2018541308

Andrich, D. (1989). Distinctions between assumptions and requirements in measurement in the social sciences. I J. A. Keats, R. Taft, R. A. Heath & S. H. Lovebond (Red.), *Proceedings of the XXIV International Congress of Psychology of the International Union of Psychological Science (I.U.Psy.S.)* (s. 7-16). Amsterdam: North-Holland.

Assessment Systems Corporation. (2014). Xcalibre 4.2. IRT item parameter calibration. (Versjon 4.2.2.0.).

Bailey, D. H., Siegler, R. S. & Geary, D. C. (2014). Early predictors of middle school fraction knowledge. *Developmental Science, 17*(5), 775-785. https://doi.org/10.1111/desc.12155

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational-number concepts. I R. Lesh & M. Landau (Red.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (s. 91-125). New York: Academic Press.

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag.* Oslo: Scandinavian University Press (Universitetsforlaget).

Bill, C. (2003). Errors and misconceptions in KS3 "number". I J. Williams (Red.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (bd. 3, s. 7-12). Birmingham: BSRLM.

Bjørnsen, J. (2018). *Metodegrunnlag for nasjonale prøver*. Hentet fra https://www.udir.no/globalassets/filer/vurdering/nasjonaleprover/metodegrunnlag-for-nasjonale-prover-august-2018.pdf

Booth, J. L. & Koedinger, K. R. (2008). Key misconceptions in algebraic problem solving. I *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (bd. 30, s. 571-576). California: University of California.

Braithwaite, D. W. & Siegler, R. S. (2018). Developmental changes in the whole number bias. *Developmental Science, 21*(2), e12541. https://doi.org/10.1111/desc.12541

Bray, W. S. (2013). How to leverage the potential of mathematical errors. *Teaching Children Mathematics, 19*(7), 424-431. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.19.7.0424

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk* (Bokmål utg.). Oslo: Læringssenteret.

Charalambous, C. Y. (2007). Developing and testing a scale for measuring students' understanding of fractions. I J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Red.), *31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 105-112).

Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*(3), 293-316. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2

Clarke, D. M., Roche, A. & Mitchell, A. (2007). Year six fraction understanding: A part of the whole story. I J. Watson & K. Beswick (Red.), *Mathematics: Essential research, essential practice. 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.*

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8. utg.). London and New York: Routledge.

DeMars, C. (2010). *Item response theory*. Oxford: Oxford University Press.

DeVellis, R. F. (2017). *Scale development: Theory and applications* (4. utg.). Thousand Oaks, California: Sage.

Dewolf, M., Grounds, M. A., Bassok, M., Holyoak, K. J. & Enns, J. T. (2014). Magnitude comparison with different types of rational numbers. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 40*(1), 71-82. https://doi.org/10.1037/a0032916

DeWolf, M. & Vosniadou, S. (2011). The whole number bias in fraction magnitude comparisons with adults. I *Proceedings of the annual meeting of the cognitive science society* (bd. 33, s. 1751-1756).

Dewolf, M. & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction, 37*(C), 39-49. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.07.002

Durkin, K. & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction, 37*(C), 21-29. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.08.003

Fayers, P. M. & Machin, D. (2007). *Quality of life: The assessment, analysis and interpretation of patient-reported outcomes* (2. utg.). Chichester: John Wiley.

Grønmo, L. S., Hole, A. & Onstad, T. (2016). *Ett skritt fram og ett tilbake: TIMSS advanced 2015. Matematikk og fysikk i videregående skole.* Cappelen Damm Akademisk/NOASP (Nordic Open Access Scholarly Publishing).

Gu, L., Huang, R. & Marton, F. (2004). Teaching with variation: A chinese way of promoting effective mathematics learning. I *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (s. 309-347). World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Guilford, J. P. (1941). The difficulty of a test and its factor composition. *Psychometrika, 6*(2), 67-77.

Guyer, R. & Thompson, N. A. (2014). User's manual for Xcalibre item response theory calibration software, version 4.2.2 and later.

Hambleton, R. K. & Jones, R. W. (1993). An NCME instructional module on comparison of classical test theory and item response theory and their applications to test development https://doi.org/10.1.1.690.7561

IBM Corporation. (2017). IBM SPSS Statistics (Versjon 25.0.0.1.).

Kieren, T. E. (1981). Five faces of mathematical knowledge building. I. Edmonton: Department of Secondary Education, University of Alberta.

Kroknes, T.-E., Kavén, A., Persson, H. & Ødegaard, E. (2013). *Grunnbok 3B* (Bokmål. utg.). Oslo: Aschehoug.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3. utg.)Routledge Ltd - M.U.A.

Li, X. & Li, Y. (2008). Research on students' misconceptions to improve teaching and learning in school mathematics and science. *School Science and Mathematics, 108*(1), 4-8.

Lortie-Forgues, H., Tian, J. & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review, 38*, 201-221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Lyngsnes, K. M. & Rismark, M. (2014). *Didaktisk arbeid* (3. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Malone, A. S. & Fuchs, L. S. (2017). Error patterns in ordering fractions among at-risk fourth-grade students. *Journal of Learning Disabilities, 50*(3), 337-352. https://doi.org/10.1177/0022219416629647

Matematikksenteret. (u.å.-a). Fra misoppfatning til mestring. Hentet 3. mars 2019 fra https://www.matematikksenteret.no/eksamen-pr%C3%B8ver-og-kartlegging/fra-misoppfatning-til-mestring

Matematikksenteret. (u.å.-b). Misoppfatninger knyttet til brøk. Hentet 14.februar 2019 fra https://www.matematikksenteret.no/eksamen-pr%C3%B8ver-og-kartlegging/fra-misoppfatning-til-mestring/misoppfatninger-knyttet-til-br%C3%B8k

McIntosh, A. (2007). *Alle teller! Håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen.* (M. R. Settemsdal & I. M. Stedøy-Johansen, Overs.). Trondheim: Matematikksenteret.

Mitchell, A. & Horne, M. (2010). *Gap thinking in fraction pair comparisons is not whole number thinking: Is this what early equivalence thinking sounds like?* Innlegg presentert ved the Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Freemantle, Western Australia. Abstract hentet fra https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED520918.pdf

NESH. (1993). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Oslo: Forskningsetiske komiteer. Hentet fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/60125_fek_retningslinjer_nesh_digital.pdf

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology, 26*(3), 400-417. https://doi.org/10.1006/ceps.2000.1072

Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Novillis, C. F. (1976). An analysis of the fraction concept into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies. *Journal for Research in Mathematics Education, 7*(3), 131-144. https://doi.org/10.2307/748339

Pallant, J. (2013). *SPSS survival manual : A step by step guide to data analysis using IBM SPSS* (5. utg.). Maidenhead: McGraw-Hill.

Pantziara, M. & Philippou, G. (2012). Levels of students' "conception" of fractions. *An International Journal, 79*(1), 61-83. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9338-x

Pearn, C. & Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. I R. F. Putt & M. McLean (Red.), *27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (s. 430–437).

Pearn, C. & Stephens, M. (2007). Whole number knowledge and number lines help to develop fraction concepts. I J. Watson & K. Beswick (Red.), *Mathematics: Essential research, essential practice. 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.*

Razak, F. A., Noordin, N., Alias, R. & Dollah, R. (2012). How do 13-year olds in Malaysia compare fractions? *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 42*(C), 100-105. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.04.171

Ringdal, K. (2018). *Enhet og mangfold: samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode* (4. utg. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Schumacker, R. E. & Muchinsky, P. M. (1996). Disattenuating correlation coefficients. *Rasch Measurement Transactions, 10*(1), 479.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *An International Journal, 22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., … Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological science, 23(7)*, 691-697. https://doi.org/10.1177/0956797612440101

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H. & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Grantee Submission, 17*(1), 13-19. https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004

Siegler, R. S., Thompson, C. A. & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273-296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Sophian, C. (2007). *The origins of mathematical knowledge in childhood*. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*(5), 503-518. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Statped. (2019). Misoppfatninger. Hentet 18.01.2019 fra http://www.acm1.no/dynamisk-undervisning/?page_id=327

Stevens, S. S. (1946). On the theory of scales of measurement. *Science, 103*, 677-680.

Trivena, V., Ningsih, A. R. & Jupri, A. (2017). Misconception on addition and subtraction of fraction at primary school students in fifth-grade. *Journal of Physics: Conference Series, 895*, 012139. https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012139

Udanningsdirektoratet. (2015). *Prinsipper for god regneopplæring: Ta utgangspunkt i noe elevene kan eller kjenner fra før.* Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/grunnleggende-ferdigheter/regning/god-regneopplaring/4.-ta-utgangspunkt-i-noe-elevene-kan-eller-kjenner-fra-for/

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Vosniadou, S. (2014). Examining cognitive development from a conceptual change point of view: The framework theory approach. *European Journal of Developmental Psychology, 11*(6), 1-17. https://doi.org/10.1080/17405629.2014.921153

Watson, J. M., Campbell, K. J. & Collis, K. F. (1999). The structural development of the concept of fraction by young children. *Journal of structural learning and intelligent systems, 13*(3-4), 171-193.

Wilkins, J. & Norton, A. (2018). Learning progression toward a measurement concept of fractions. *International Journal of STEM Education, 5*(1), 1-11. https://doi.org/10.1186/s40594-018-0119-2

Wu, M., Tam, H. P. & Jen, T.-H. (2016). *Educational measurement for applied researchers: Theory into practice*. Singapore: Springer Singapore.

8. Vedlegg

Vedlegg 1: Oppgavehefte

Vedlegg 2: Oversikt over oppgavene

Vedlegg 3: Kodeskjema

Vedlegg 4: Tilbakemelding fra NSD

Vedlegg 1: Oppgavehefte

Oppgavesett 1 - Brøk

☐ 8. trinn ☐ 9. trinn ☐ 10. trinn

☐ Gutt ☐ Jente

Skole: ______________________________

- Les oppgaveteksten nøye på alle oppgaver.
- Gjør så godt du kan på alle oppgaver! Det er flott om du avgir et svar, selv om du er usikker.
- Vis/forklar svaret ditt der du får beskjed om dette.
- Det er valgfritt om du vil bruke blyant eller penn.

Oppgave 1

Hvor stor brøkdel av flagget til Colombia er rødt?

Svar: $\frac{\square}{\square}$

Oppgave 2

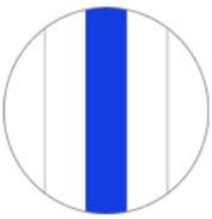
Sett ring rundt brøken med størst verdi.

$\frac{1}{12}$ eller $\frac{1}{6}$

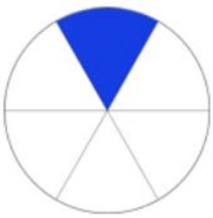
Tegn/forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 3

Velg den eller de av figurene der $\frac{1}{5}$ er fargelagt blå.

☐ 

☐ 

☐ 

Oppgave 4

Hvilket tall skal stå i den tomme ruta?

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{\square}$$

Svar: ___________

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 5

Sorter brøkene etter verdi.

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2}$$

________ ________ ________ ________ ________

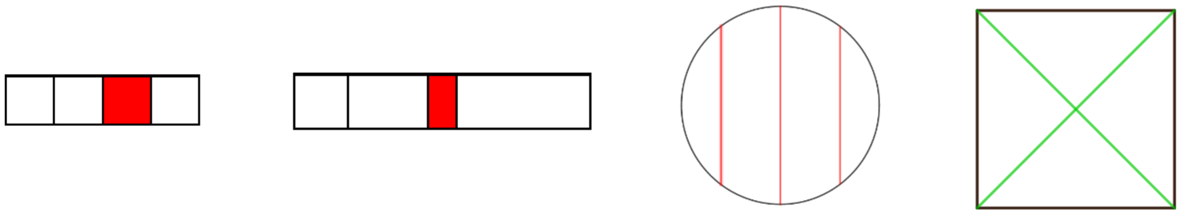
Minst Størst

Oppgave 6

Skraver $\frac{1}{5}$ av rektangelet nedenfor.

Oppgave 7

Sett ring rundt den eller de figurene som viser $\frac{1}{4}$.



Oppgave 8

Hvilket tall skal stå i den tomme ruta?

$$\frac{2}{6} = \frac{\square}{12}$$

Svar: ________

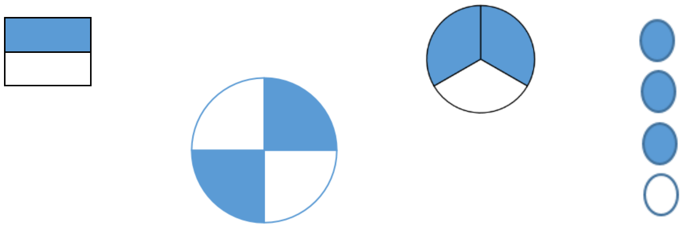
Oppgave 9

Hvilket desimaltall har samme verdi som brøken $\frac{1}{5}$?

Svar: ________________

Oppgave 10

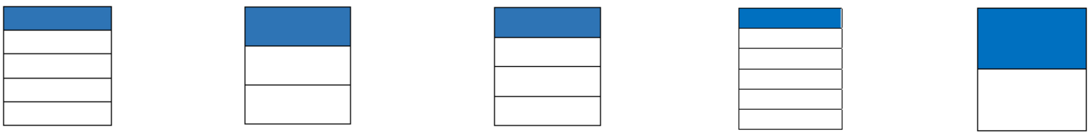
Ulike brøkdeler er fargelagt i figurene nedenfor. Sett ring rundt de figurene som har samme brøkverdi fargelagt.



Forklar svaret ditt her:

Oppgave 11

Sorter figurene etter hvor stor brøkdel som er fargelagt. Tegn strek fra figuren til riktig plass.



Minst Størst

Oppgave 12

Sett kryss i $\frac{1}{4}$ av rutene nedenfor.

Oppgave 13

Lag en figur der $\frac{1}{3}$ er skravert.

Lag figuren her:

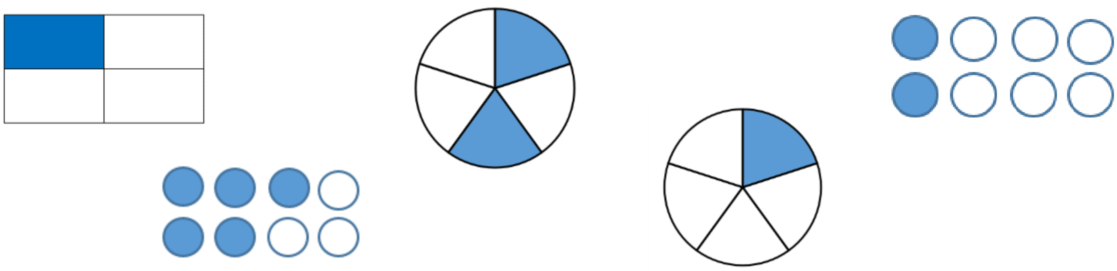
Oppgave 14

Hvilken av brøkene nedenfor har halvparten så stor verdi som $\frac{1}{6}$?

- ○ $\frac{1}{3}$
- ○ $\frac{2}{3}$
- ○ $\frac{1}{12}$
- ○ $\frac{2}{12}$

Oppgave 15

Sett ring rundt figurene som representerer samme brøkverdi.



Oppgave 16

Sett ring rundt figuren som har størst brøkdel fargelagt.

Oppgave 17

Skriv en brøk som har dobbelt så stor verdi som $\frac{1}{6}$.

Svar: ______________________

Oppgave 18

Sorter brøkene etter verdi.

$$\frac{3}{9} \qquad \frac{2}{4} \qquad \frac{4}{6}$$

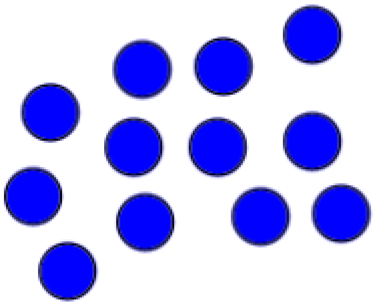
_________ _________ _________

Minst Størst

Forklar hvordan du tenker her:

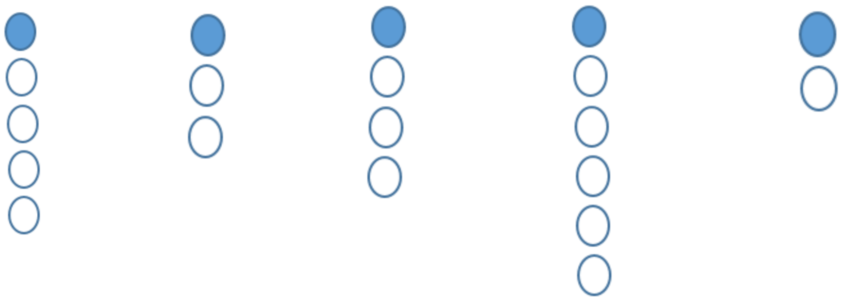
Oppgave 19

Sett ring rundt $\frac{1}{3}$ av brikkene nedenfor.



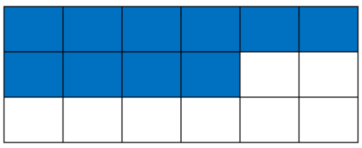
Oppgave 20

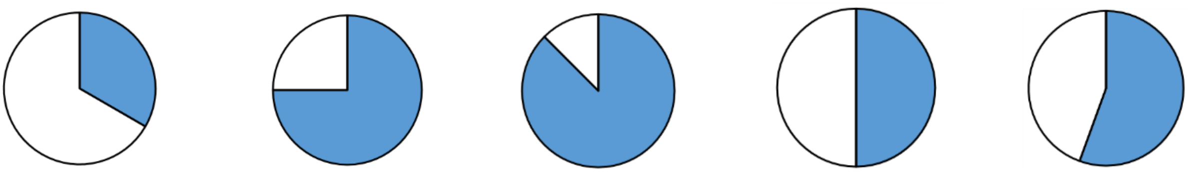
I hvilken av figurene er størst brøkdel fargelagt blå? Sett ring rundt riktig figur.



Oppgave 21

Hvilken av de fem sirklene representerer samme brøk som den i rektanglet? Sett ring rundt riktig sirkel.



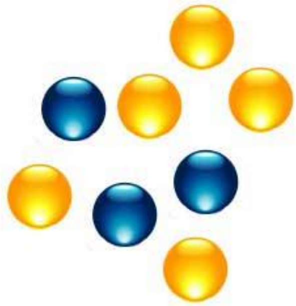


Oppgave 22

Jens har tre blå og fem gule klinkekuler.

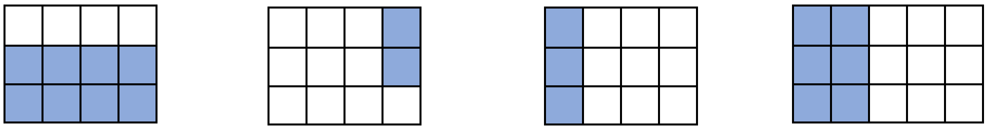
Hvor stor brøkdel av klinkekulene er blå?

- ○ $\frac{8}{3}$
- ○ $\frac{5}{3}$
- ○ $\frac{3}{5}$
- ○ $\frac{3}{8}$



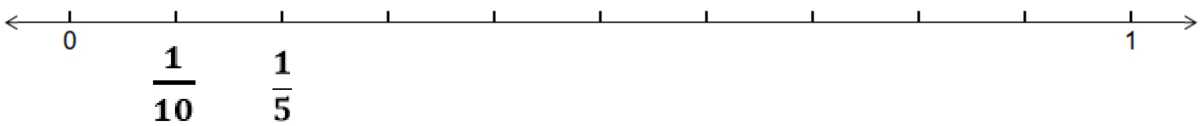
Oppgave 23

Sett ring rundt figuren der $\frac{2}{3}$ er fargelagt.



Oppgave 24

Ring rundt brøken med størst verdi



Tusen takk for hjelpen!

Vedlegg 2: Oversikt over oppgavene

Nr.	Innhold/oppgavens hensikt	Hentet fra
1	Tester om eleven kan finne brøkdel av en figur der delene ikke er like store.	Tidligere nasjonal prøve i regning.
2	Tester om eleven kan avgjøre hvilken av stambrøkene $\frac{1}{12}$ og $\frac{1}{6}$ som er størst.	Egenprodusert.
3	Tester om eleven tar hensyn til at delene må være like store.	FRAMM.
4	Tester om eleven kan finne en likeverdig brøk.	Egenprodusert. Idé hentet fra FRAM.
5	Tester om eleven kan sortere stambrøker etter stigende verdi.	Egenprodusert. Idé hentet fra Alle Teller!
6	Tester om eleven kan dele inn en figur etter tallet i nevner og markere antall deler etter tallet i teller.	Egenprodusert.
7	Tester om eleven tar hensyn til at delene må være like store.	Hentet fra Pantziara & Philippou (2012).
8	Tester om eleven kan finne en likeverdig brøk.	Egenprodusert. Idé hentet fra FRAMM.
9	Tester om eleven kan gjøre om mellom brøk og desimaltall.	Brøken $\frac{1}{5}$ er nevnt i flere artikler.
10	Tester om eleven kan finne likeverdige brøker representert med figurer.	Egenprodusert. Idé hentet fra Pantziara & Philippou (2012).
11	Tester om eleven kan sortere brøkfigurer etter størrelse. Jamfør sortering av stambrøker (oppg. 5) men i denne oppgaven er det brukt figurer.	Egenprodusert.
12	Tester om eleven kan finne $\frac{1}{4}$ av en figur inndelt i ruter.	Egenprodusert. Idé hentet fra FRAMM.
13	Tester om eleven kan lage en hensiktsmessig figur og skravere $\frac{1}{3}$ av figuren.	Egenprodusert.
14	Tester om eleven kan finne en brøk med halvparten så stor verdi som $\frac{1}{6}$.	Tidligere nasjonal prøve i regning.
15	Tester om eleven kan finne brøkfigurer som representer samme verdi.	Egenprodusert. Idé hentet fra Pantziara & Philippou (2012).
16	Tester om eleven kan avgjøre hvilken figur som representerer størst verdi, når figurene er i ulik størrelse.	Egenprodusert.
17	Tester om eleven kan finne brøk med dobbel så stor verdi som $\frac{1}{6}$.	Egenprodusert. Idé hente fra FRAMM.
18	Tester om eleven kan sortere brøker som ikke er stambrøker etter størrelse. En brøk har verdi under $\frac{1}{2}$,	Egenprodusert. Sortering av tre brøker er nevnt i flere artikler.

	en brøk har verdi over $\frac{1}{2}$ og den siste har verdi $\frac{1}{2}$.	
19	Tester om eleven kan finne $\frac{1}{3}$ av en mengdemodell.	FRAMM.
20	Tester om eleven kan sortere mengdemodeller etter størrelse.	Egenprodusert.
21	Tester om eleven kan finne likeverdige brøkfigurer der figurene er ulike (rutenett og sirkel).	Hentet fra Pantziara & Philippou (2012).
22	Tester om eleven kan finne brøkdel av blå kuler blant blå og gule kuler.	Tidligere nasjonal prøve i regning.
23	Tester om eleven kan knytte brøk til brøkfigur (rutenett).	Egenprodusert. Idé hentet fra tidligere nasjonal prøve i regning.
24	Tester om eleven kan avgjøre hvilken brøk som er størst når brøkene er plassert på tallinje.	Egenprodusert.

Vedlegg 3: Kodeskjema

Oppgave	Kode – avgitt svar
1	1 – ¼ 2 – 1/3 3 – 2/4 eller ½
2	1 – 1/12 2 – 1/6
3	1 – sirkel 1 2 – sirkel 2 3 – sirkel 3 4 – sirkel 1 og 2 5 – sirkel 1, 2 og 3 6 – sirkel 2 og 3
4	1 – 15 (12/15) 2 – 13 3 – 4
5	1 – sortert riktig (1/6, 1/5 … 1/2) 2 – sortert etter nevner (1/2, 1/3, … 1/6)
6	1 – 1/5 skravert 2 – delene er ikke tilnærmet like store
7	1 – figur 1 2 – figur 2 3 – figur 3 4 – figur 4 5 – figur 1 og 2 6 – ring rundt alle figurene 7 – figur 1 og 4
8	1 – 4 (4/12) 4 – 1 2 – 6 5 – 8 3 – 5
9	1 – 0,20 4 – 0,05 7 – 0,15 2 – 1,5 5 – 5 3 – 20 6 – 0,5
10	1 – 1 og 2 4 – 1, 2 og 3 2 – 3 og 4 5 – 2 og 3 3 – 1 og 2 + 3 og 4
11	1 – sortert riktig 2 – sortert motsatt
12	1 – 3 kryss 4 – 1 kryss 2 – 2 kryss 5 – 4 kryss 3 – 5 kryss
13	1 – 1/3 skravert riktig 2 – 1/3, men unøyaktig, rektangel ikke like store deler 3 – 1/3, men unøyaktig, sirkel ikke like store deler
14	1 – 1/3 2 – 2/3 3 – 1/12 4 – 2/12
15	1 – figur 1 og 5 2 – figur 2 og 5 3 – figur 1 og 4 + figur 3 og 5 4 – figur 2 og 3

	5 – figur 1 og 4 6 – figur 3 og 5
16	1 – figur 1 2 – figur 2
17	1 – 1/3 2 – 2/12 3 – 1/12
18	1 – rett sortering (3/9, 2/4, 4/6) 2 – sortert etter størrelsen på delene (3/9,4/6,2/4) 3 – sortert etter stigende nevner (2/4, 4/6, 3/9) 4 – sortert etter synkende teller (4/6, 3/9, 2/4) (eller begrunnelse ½ er størst) 5 – sortert etter stigende teller (2/4, 3/9, 4/6)
19	1 – ring rundt 4 brikker 2 – 3 brikker 3 – 1 brikke
20	1 – figur 1 2 – figur 2 3 – figur 3 4 – figur 4 5 – figur 5
21	1 – figur 1 2 – figur 2 3 – figur 3 4 – figur 4 5 – figur 5
22	1 – 8/3 2 – 5/3 3 – 3/5 4 – 3/8
23	1 – figur 1 2 – figur 2 3 – figur 3 4 – figur 4
24	1 – 1/10 2 – 1/5

8 = annet svar enn de i kodeskjema 9 = ubesvart 99 = andre svar som «vet ikke» etc.

Vedlegg 4: Tilbakemelding fra NSD

NSD Personvern
05.10.2018 09:51

Det innsendte meldeskjemaet med referansekode 841788 er nå vurdert av NSD.

Følgende vurdering er gitt:

Viser til telefonsamtale i dag 05.10.18 hvor det gikk frem at du ikke vil bruke lydopptak i prosjektet ditt, men kun samle inn anonyme data. Det er derfor vår vurdering at det ikke skal behandles direkte eller indirekte opplysninger som kan identifisere enkeltpersoner i dette prosjektet, så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg og per telefon 05.10.18. Prosjektet trenger derfor ikke en vurdering fra NSD. Vi minner om at den forskningsetiske informasjonsplikten må overholdes slik vi snakket om per telefon 05.10.18.

HVA MÅ DU GJØRE DERSOM DU LIKEVEL SKAL BEHANDLE PERSONOPPLYSNINGER? Dersom prosjektopplegget endres og det likevel blir aktuelt å behandle personopplysninger må du melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Vent på svar før du setter i gang med behandlingen av personopplysninger.

VI AVSLUTTER OPPFØLGING AV PROSJEKTET

Siden prosjektet ikke behandler personopplysninger avslutter vi all videre oppfølging.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Lisa Lie Bjordal

Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

NTNU

Kunnskap for en bedre verden