Bård Vinje

Misoppfatninger tilknyttet brøk på mellomtrinnet

En kvantitativ studie av elever på mellomtrinnet sine misoppfatninger tilknyttet brøk

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk (5-10) - LMM55004
Veileder: Trygve Solstad
Mai 2019

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology

Bård Vinje

Misoppfatninger tilknyttet brøk på mellomtrinnet

En kvantitativ studie av elever på mellomtrinnet sine misoppfatninger tilknyttet brøk

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk (5-10) - LMM55004
Veileder: Trygve Solstad
Mai 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology

Forord

Masterstudiet har vært et langt og lærerikt løp, og nå som arbeidet med masteroppgaven går mot slutten, er det ufattelig godt å skimte målstreken. Det har vært krevende å kombinere studier med vanlig arbeid og en til tider hektisk hverdag, men samtidig har jeg i de to årene som masterstudent lært masse både faglig og fagdidaktisk. Spesielt har arbeidet med masteroppgaven vært lærerikt. Det har vært en helt ny erfaring å skrive en så omfattende oppgave, og skriveprosessen har virkelig gitt meg mulighet til å gå i dybden på ulike fagfelt. Når jeg nå ser tilbake på veien mot et endelig produkt, er det mange som fortjener en stor takk.

Først vil jeg takke alle lærere og elever som har bidratt i studien min. Uten deres positive innstilling til å delta ville jeg aldri fått det utvalget jeg trengte til datainnsamlingen. I denne sammenheng vil jeg rette en ekstra stor takk til Mari Johanne Selnes som gjennom hele masterstudiet har vært behjelpelig med å skaffe elever til ulike utprøvinger.

Videre vil jeg takke min veileder, Trygve Solstad, som har guidet meg gjennom skriveprosessen på en god måte. Jeg har satt stor pris på hans konstruktive tilbakemeldinger. Tilbakemeldingene har hele veien utfordret meg, og samtidig hjulpet meg med å holde fokus på den riktige veien videre.

Kombinasjonen av studier og arbeid har som nevnt vært krevende, og uten velvilje og god tilpasning fra arbeidsgiver ville det vært umulig å fullføre dette løpet. Jeg vil derfor takke min leder, Kjersti Wæge, for at hun har gjort det mulig å gjennomføre masterstudiet. I tillegg vil jeg takke mine arbeidskolleger Mona Nosrati og Olaug Svingen for gjennomlesing av oppgaven. Monica Rehaug, kollega og medstudent, har vært en god samtalepartner det siste året, og hun fortjener også en takk.

Til slutt vil jeg takke mine aller nærmeste. Uten støtte og forståelse fra familie og venner hadde hverdagen aldri gått rundt. Min fantastiske kone, Kamilla, er den som fortjener den aller største takken. Hun har tatt seg av våre to barn i hektiske perioder, slik at jeg kunne konsentrert meg om oppgaveskriving. Uten Kamilla ved min side ville kombinasjonen av studier, arbeid og hverdag vært uoverkommelig. Jeg vet at arbeidet med masteroppgaven har stjålet mye av familiens dyrebare fritid, og derfor gleder jeg meg nå til å tilbringe mer tid sammen med Kamilla, våre barn, familie og venner.

Lensvik, mai 2019

Bård Vinje

Sammendrag

Studien fokuserer på misoppfatninger tilknyttet brøk hos elever på mellomtrinnet. Hensikten med studien har vært å undersøke hvor utbredt noen vanlige misoppfatninger tilknyttet brøk er på mellomtrinnet, og hvordan utbredelsen avhenger av elevenes trinntilhørighet og dyktighet. I tillegg har studien undersøkt om det på grunnlag av utbredelsen er mulig å finne noen sammenhenger eller systematikk for misoppfatningene. Studiens forskningsspørsmål er: *Hvor utbredt er tegn på misoppfatninger tilknyttet brøk hos et utvalg elever på mellomtrinnet? Hvilke sammenhenger mellom eller systematikk for misoppfatningene kan vi finne?*

Studien er hovedsakelig en kvantitativ studie, der test er brukt som metode for datainnsamling. Datamaterialet er analysert for å få et innblikk i utbredelsen av fem vanlige misoppfatninger tilknyttet brøk. På grunnlag av utbredelsen er sammenhenger mellom eller systematikk for misoppfatningene undersøkt. De fem misoppfatningene er «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse», «jo større nevner (eller teller), jo større brøk», «differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til en brøk», «brøkstrek er lik komma» og «teller (eller nevner) er et isolert tall». I analyseprosessen er klassisk testteori og item response teori benyttet.

Datamaterialet i studien er 739 elevers besvarelse av et oppgavesett med diagnostiske oppgaver. Elevene kommer fra ni ulike skoler, og er jevnt fordelt på 5., 6. og 7. trinn. I tillegg til det kvantitative datamaterialet er det gjennomført intervju med fire elever. Intensjonen med intervjuene var å få et dypere innblikk i elevenes forståelse for brøk. Studien kombinerer altså bruk av kvantitativ og kvalitativ metode, men det kvantitative datamaterialet har den viktigste rollen.

Resultatene indikerer at misoppfatninger tilknyttet brøk er svært vanlig. Omtrent halvparten av elevene i utvalget er i én eller flere misoppfatninger, og da er da er det å være i en misoppfatning definert som at elevene viser samme feiltenkning i flere oppgaver. Fire av de fem misoppfatningene som er undersøkt, har en utbredelse på mer enn 10 %. Funnene i studien tyder også på det er enkelte misoppfatninger som er mer grunnleggende enn andre.

Innhold

Figuroversikt

Tabelloversikt

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for studien

Matematikk har en viktig posisjon i samfunnet, og med dagens teknologiske utvikling blir behovet for matematikkompetanse større og større. I mange år har det vært stort fokus på norske elevers prestasjoner i realfagene i internasjonale undersøkelser som PISA[1] og TIMSS[2]. Dette fokuset har blant annet ført til store nasjonale satsinger som for eksempel *Tett på realfag*. Gjennom slike satsinger har staten brukt enorme midler på å bedre kompetansen i matematikk hos norske elever og lærere, et sterkt signal på viktigheten av matematikk. Sitatet nedenfor fra strategidokumentet for *Tett på realfag* illustrerer den viktige rollen matematikk har i samfunnet.

> Mange synes matematikk er mystisk og vanskelig. Andre lurer på hvorfor vi skal pugge gangetabeller og gjøre kompliserte beregninger når vi har datamaskiner og kalkulatorer. Eksemplene som illustrerer det motsatte, er mange: Sykepleieren som ga pasienten feil dose medisin fordi han ikke kunne prosentregning. Ingeniørene som feilberegnet slik at en bro kollapset. Det unge paret i TV-programmet «Luksusfellen» som må søke hjelp etter å ha brukt kredittkort og forbrukslån til ferier og restaurantbesøk. Vi må vise at matematikk er viktig og gir muligheter – for samfunnet og for den enkelte. (Kunnskapsdepartementet, 2015, s. 6)

TIMSS er den internasjonale undersøkelsen som er tettest koblet til læreplanen i ulike land, og resultatene fra TIMSS-gjennomføringen i 2015 (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016) viser at norske elever har en positiv utvikling i matematikk. De norske elevene på 5. trinn presterer svært bra, men relativt sett skårer de svakest på det sentrale emneområdet tall. Det er innenfor dette emneområdet forskjellen er størst mellom Norge og de østasiatiske landene som skårer aller best. Emneområdet tall inneholder i stor grad oppgaver som handler om å beherske de fire regneartene, og å regne med brøk og desimaltall (Grønmo, Lindquist, Arora & Mullis, 2015). For de norske elevene på 9. trinn er emneområdet algebra den store utfordringen, og innenfor dette området presterer de veldig mye svakere enn på de andre områdene. Den samme utfordringen ser vi i TIMSS Advanced, der de norske elevene på 13. trinn presterer klart svakest innenfor algebra (Grønmo, Hole & Onstad, 2017). Selv om de norske elevene har vist en positiv utvikling, har de altså utfordringer innen tall og algebra.

[1] Norske nettsider PISA: https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/pisa/index.html
[2] Norske nettsider TIMSS: https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/

Med tanke på de norske elevenes utfordringer med tall og algebra, er det svært interessant at Siegler og flere kolleger (2012) har sett på hvilke variabler som best predikerer prestasjoner i matematikk. I sin longitudinelle studie finner de at kunnskaper innen brøk er den variabelen som best predikerer 16-åringers kunnskaper om algebra og deres matematiske prestasjoner generelt. Brøk har større effekt på prestasjoner i algebra og matematikk generelt enn andre matematiske områder, intellektuelt nivå og familiebakgrunn. Den variabelen som kommer nærmest brøk er elevenes kunnskap om divisjon, og divisjon er et emne som har sterke koblinger til nettopp brøk. På grunnlag av funnene til Siegler og hans kolleger er det mulig å hevde at de svake prestasjonene til norske 9. og 13. klassinger innen algebra, kan ha sammenheng med at de skårer svakest innenfor emneområdet tall på 5. trinn. Et emneområde som inneholder brøkoppgaver. Denne mulige sammenhengen er i hvert fall en god motivasjon for å se på kunnskaper om brøk hos norske elever på mellomtrinnet.

Det er flere andre studier som også sier noe om viktigheten av brøk, og spesielt forståelse for størrelsen til brøker. I studiene kommer det frem at brøk er en kritisk komponent for matematisk forståelse og en inngangsdør til mange attraktive yrker (Bailey, Siegler & Geary, 2014; Neagoy, 2017; Tian & Siegler, 2017). Samtidig blir det å undervise og lære brøk omtalt som noe av det mest utfordrende (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Hecht & Vagi, 2010). Forskning viser altså at forståelse for brøk er viktig, men samtidig er det et utfordrende emne for elever. Til tross for dette har det i Norge vært relativt lite forskning på brøk.

Utfordringene med brøk kan føre til at elever havner i misoppfatninger. De siste årene har det vært fokusert mye på elevers feil i forskning som har sett på sammenhengen mellom undervisning og læring, og det blir hevdet at feil er en viktig kilde til læring (Boaler, 2015). Elevers feil kan ha ulike årsaker. De kan være tilfeldige eller ikke tilfeldige. Ikke tilfeldige feil er systematiske tankefeil eller logiske feil, og disse blir ofte kalt misoppfatninger (Statped, 2019). Misoppfatninger kan skyldes ufullstendige tanker knyttet til et begrep. Bak disse tankene ligger det en bestemt tenkning som eleven bruker ganske systematisk, og de er ofte et resultat av en overgeneralisering av tidligere kunnskaper til nye områder der disse kunnskapene ikke er gjeldende (Brekke, 2002). Et eksempel på en slik misoppfatning er at multiplikasjon alltid gjør et tall større. Misoppfatninger er en naturlig del av elevenes utvikling, og mange ser i dag misoppfatninger som et utgangspunkt for videre læring (Drews, Dudgeon, Hansen, Lawton & Surtees, 2017; Leonard, Kalinowski & Andrews, 2014). Det å synliggjøre og diskutere typiske misoppfatninger blir også løftet frem som et prinsipp for god matematikkundervisning (Swan, 2005).

1.2 Forskningsspørsmål

Viktigheten av brøk for elevers senere matematiske forståelse og prestasjoner, og et økende fokus på betydningen av elevers feil og misoppfatninger, er det som i utgangspunktet dannet utgangspunktet for mitt forskningsspørsmål. Swan (2005) skriver som tidligere nevnt at undervisningen blir mer effektiv når man synliggjør, utfordrer og diskuterer elevers misoppfatninger, og da skal læreren kunne lede elevene ut av misoppfatningene. En slik undervisning forutsetter derimot at lærerne innehar det Seifrid og Wuttke (2010) kaller «professional error competence». Lærerne må ha forståelse av og kunnskap om vanlige feil hos elevene. Gjennom KIM-prosjektet (Kvalitet i matematikkundervisningen) på 1990-tallet og Matematikksenterets FRAMM-prosjekt[3] har man kartlagt hvilke misoppfatninger norske elever har innenfor ulike matematiske områder, inkludert brøk. Det har derimot vært relativt lite forskning, spesielt i Norge, på utbredelsen av disse misoppfatningene og eventuelle sammenhenger mellom misoppfatningene. Når det gjelder utbredelse er det for eksempel kun referert til resultater på enkeltoppgaver. Jeg har derfor valgt å ta utgangspunkt i at vi vet hvilke misoppfatninger norske elever har tilknyttet brøk, og heller fokusere på å finne ut mer om utbredelsen av disse hos elever på mellomtrinnet. Utbredelse er i denne studien knyttet til systematiske feil gjennom flere oppgaver (Brekke, 2002; Statped, 2019). Emnet brøk og elever på mellomtrinnet ble valgt på grunnlag av forskningen til Siegler et al. (2012) og prestasjonene til norske 5.trinnselever i TIMSS.

Hensikten med studien har vært å undersøke hvor utbredt noen vanlige misoppfatninger tilknyttet brøk er på mellomtrinnet, og hvordan utbredelsen avhenger av elevenes trinntilhørighet og dyktighet. I tillegg vil studien undersøke om det på grunnlag av utbredelsen er mulig å finne noen sammenhenger eller systematikk for misoppfatningene. Jeg har tatt utgangspunkt i følgende forskningsspørsmål:

1. ***Hvor utbredt er tegn på misoppfatninger tilknyttet brøk hos et utvalg elever på mellomtrinnet?***

   - Hvordan utvikler utbredelsen seg fra 5.-7. trinn?

   - Hvordan er utbredelsen knyttet til elevenes ferdigheter?
2. ***Hvilke sammenhenger mellom eller systematikk for misoppfatningene kan vi finne?***

[3] Prosjektets nettside: https://www.matematikksenteret.no/eksamen-pr%C3%B8ver-og-kartlegging/fra-misoppfatning-til-mestring

Tilknyttet det andre forskningsspørsmålet vil studien blant annet undersøke om det er de samme elevene som viser tegn på flere av misoppfatningene, og om noen misoppfatninger er mer grunnleggende enn andre.

For å finne svar på forskningsspørsmålene har jeg fått cirka 750 elever (fordelt på tre trinn) til å svare på et oppgavesett med ulike brøkoppgaver. Hver oppgave er i utgangspunktet relatert til én misoppfatning. I litteratur er det beskrevet mange misoppfatninger tilknyttet brøk, og for å begrense meg har jeg hovedsakelig valgt å se på misoppfatninger knyttet til grunnleggende brøkforståelse. Datamaterialet er analysert gjennom klassisk testteori og item response teori. I tillegg har jeg intervjuet noen elever for å få et dypere innblikk i deres forståelse av brøk.

1.3 Oppgavens oppbygning

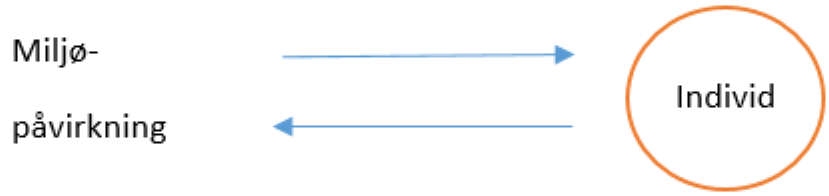
Denne oppgaven består av sju hovedkapitler. Etter innledningen kommer teorikapitlet, der jeg hovedsakelig vil sette fokus på de to hovedtemaene i denne studien; brøk og misoppfatninger. I beskrivelsen av brøk vil jeg se på mulige årsaker til elevers utfordringer med emnet, og spesielt se nærmere på de fem ulike aspektene av brøk; del-hel, mål/tallstørrelse, kvotient, operator og forhold. Videre vil begrepet misoppfatninger bli beskrevet, før jeg fokuserer på de misoppfatninger knyttet til brøk som er aktuelle i denne studien. Det tredje hovedkapitlet har jeg kalt psykometri. I dette kapitlet vil jeg beskrive teorier og teknikker som er sentrale i denne oppgaven, blant annet klassisk testteori og item response teori. Gjennom teori- og psykometrikapitlet ønsker jeg å etablere et teoretisk grunnlag, før jeg i metodekapitlet går inn på beskrivelsen av denne studien. I metodekapitlet er arbeidsgangen i studien beskrevet fra start til slutt. Her er valg av forskningsmetoder, datainnsamling, bearbeiding av dataene og etiske refleksjoner sentralt. Min bearbeiding av dataene har dannet utgangspunktet for analysekapitlet. I analysen vil jeg presentere statistiske resultater som er relevante for mine forskningsspørsmål. De statistiske resultatene vil bli krydret med utdrag fra intervjuene jeg har hatt med enkeltelever. Etter analysen kommer drøftingskapitlet, der jeg vil jeg drøfte resultatene fra analysene opp mot aktuell teori og annen relevant forskning. Her vil det blant annet være naturlig å se mine resultater opp mot andre studier som har sagt noe om utbredelse av misoppfatninger. I dette kapitlet vil jeg også se på oppgavesettet og studien min med et kritisk blikk. Til slutt kommer et lite kapittel der jeg oppsummerer funnene fra studien og kommer med forslag til videre forskning innenfor brøk og misoppfatninger.

2 Teori

I dette kapitlet presenteres først læringsteorien konstruktivisme. Denne læringsteorien er grunnlaget for det synet på misoppfatninger som er utgangspunkt i denne studien. Videre vil jeg se på begrepet brøk, og spesielt beskrive mulige årsaker til at dette begrepet er utfordrende for elever. Ved læring av matematiske begreper havner mange elever i misoppfatninger, og derfor vil både begrepet misoppfatninger og misoppfatninger knyttet til brøk bli belyst. Til slutt i teoridelen vil jeg omtale diagnostisk undervisning som er en arbeidsmetode for å lede elever ut av misoppfatninger.

2.1 Konstruktivisme

Konstruktivisme er en av de pedagogiske hovedteoriene, og et sentralt element innenfor denne teorien er at mennesket konstruerer sin egen kunnskap. Kunnskapen blir konstruert gjennom en aktiv og subjektiv prosess (Imsen, 1998). En av de mest fremtredende personene innen konstruktivisme er den sveitsiske psykologen og filosofen Jean Piaget (1896–1980). Piagets form for konstruktivisme har ofte blitt kalt kognitiv konstruktivisme, og dette sier noe om de sterke koblingene mellom kognitiv teori og konstruktivisme. I den kognitive konstruktivismen er det et sterkt fokus på hva som skjer i en persons indre under læring. Målet er kognitiv utvikling og dyp forståelse (Fosnot & Perry, 2005). Ifølge et kognitivt læringssyn er læring tilegnelse av kunnskaper, ferdigheter og holdninger som skal øke evnen til å utføre en handling eller å løse en oppgave. Vi kan kalle det økt kompetanse (Imsen, 1998). Ifølge Piaget er det vi lærer og opplever ikke et speilbilde av en ytre verden. All stimulering vi får fra den ytre verden blir tolket gjennom våre «gamle» kunnskaper og forestillinger. Læring skjer ikke ved at kunnskap blir «fylt på» ved hjelp av en aktiv ytre stimuleringskilde, men ved at et menneske aktivt velger ut, tolker og tilpasser stimuleringen til sitt eget system basert på eksisterende kunnskap og oppfatning. Vi har en aktiv læringsprosess, der en person konstruerer sin egen kunnskap gjennom subjektive prosesser (se figur 1). Læringen eller konstruksjonen skjer «i hodet» til den som lærer. Enkelt kan vi si at læring er en interaksjon mellom mennesket og den ytre verden. Interaksjonen mellom individet og den ytre verden er derimot ikke så enkel og lineær som modellen i figur 1 gir uttrykk for. Læring er komplekst og ikke lineært (Fosnot & Perry, 2005; Mack, 2001).



Figur 1 Interaksjonsmodellen. Hentet fra Imsen (1998).

Sentrale begreper innenfor Piagets og konstruktivismens syn på læring er kognitive skjema, kognitive strukturer, assimilasjon og akkomodasjon (Imsen, 1998). Kognitive skjema er skjema lagret i en persons indre. Disse skjemaene kan hentes fram og anvendes i situasjoner som er forskjellige fra der de har blitt brukt tidligere. Vi bruker skjemaene når vi skal gjøre en eller annen form for «tenkning». Enkelte skjema kan grupperes på grunn av likheter og indre sammenhenger, og det er nettverket av slike grupper som blir kalt kognitive strukturer. De to siste begrepene, assimilasjon og akkomodasjon, er knyttet til selve læringsprosessen. Assimilasjon er en delprosess som skjer når vi møter nye og ukjente situasjoner eller fenomener. Vi prøver å forstå eller tolke det ukjente ved hjelp av de kognitive skjemaene vi har fra før. Et eksempel på dette kan være at elever tar i bruk skjemaene de har for heltallstenkning, når de møter et ukjent fenomen som brøk. Elevene tar i bruk gammel kunnskap i nye situasjoner. Om elevene opplever at de gamle skjemaene ikke er tilstrekkelig, trer den andre delprosessen, akkomodasjon, frem. De gamle skjemaene blir reorganisert og utvidet, slik at de også passer i den nye situasjonen. Det har skjedd en endring av de kognitive strukturene. Akkomodasjon innebærer også at man endrer sine oppfatninger. De to delprosessene skjer hele tiden ved læring og er komplementære. Ved assimilasjon kan det oppstå en ubalanse (en følelse av at noe ikke stemmer) hos den som skal lære, og et ønske om å opprette indre likevekt (eng. equilibration) fører da til en akkomodasjon. Akkomodasjon er helt avgjørende for utvikling og ny læring.

Den konstruktivistiske læringsteorien sitt syn på læring får konsekvenser for læreren. I undervisningen skal læreren legge til rette for og støtte elevene, slik at de selv kan konstruere sin egen kunnskap og forståelse. Læreren skal ikke være en som foreleser og gir elevene «svarene». Ovenfor ble akkomodasjon trukket frem som avgjørende for utvikling og ny læring, og en viktig del av lærerens arbeid blir dermed å legge til rette for at denne prosessen skal skje. Dette kan læreren for eksempel gjøre gjennom å skape en ubalanse hos eleven. Ved ubalanse vil eleven oppleve at de gamle kognitive strukturene ikke stemmer med virkeligheten. I undervisningssammenheng kaller vi ofte en slik ubalanse en kognitiv konflikt

(Schunk, 2012). Den kognitive konflikten blir løst gjennom akkomodasjon, en endring i de kognitive strukturene. Kognitive konflikter har en viktig rolle i diagnostisk undervisning som er omtalt senere i teorikapitlet.

Konstruktivisme handler altså om hvordan elever konstruerer sin egen kunnskap og forståelse, og i denne studien er elevers kunnskap og forståelse knyttet til begrepet brøk sentralt. På grunn av dette vil brøkbegrepet bli behandlet i neste delkapittel. Hovedfokus er hva som gjør brøk utfordrende for elever.

2.2 Brøk

De første tallene barn møter i barnehagen og skolen er de naturlige tallene. Naturlige tall er mengden av alle positive heltall, N = {1, 2, 3, 4, …}, og blir ofte kalt telletallene. Senere møter barna det vi kaller hele tall. Dette er en utvidelse av de naturlige tallene, og inkluderer negative tall og tallet 0. Vi kan si at de naturlige tallene er en undermengde av de hele tallene. I den norske læreplanen for matematikk blir brøk og desimaltall omtalt for første gang i kompetansemålene for 4. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013), og dette er enda en utvidelse av tallbegrepet. Ordet brøk kommer fra det latinske ordet *fractus* som på engelsk betyr «broken». En brøk er en tallstørrelse skrevet på formen $\frac{a}{b}$, der b ≠ 0. Brøken består av to tall skrevet over hverandre med en brøkstrek mellom. Det øverste tallet kalles teller og det nederste tallet kalles nevner (Lamon, 2012). Utvidelsen av tallbegrepet til brøk og desimaltall medfører at barna ikke skal arbeide med bare hele tall. De skal også møte rasjonale tall. Rasjonale tall (fra det engelske ordet *ratio*) er alle tall som kan skrives som en brøk ($\frac{a}{b}$), der teller og nevner er heltall. De hele tallene er en delmengde av de rasjonale tall, siden et hvilket som helst heltall, a, kan skrives på formen $\frac{a}{1}$ (Neagoy, 2017).

En utvidelse av tallbegrepet til brøker er for mange vanskelig, og derfor har det vært mye forskning på undervisning av brøk. Forskeren Leen Streefland skrev at «Fractions are without doubt the most problematic area in mathematics education» (1991, s. 66), og i senere forskning blir det å undervise og lære brøk fortsatt sett på som et av de mest problematiske områdene (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Clarke & Roche, 2009; Hansen, Jordan & Rodrigues, 2017; Hecht & Vagi, 2010; Moss & Case, 1999; Ni & Zhou, 2005; Nunes, 2008; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Samtidig som brøk er vanskelig for mange, blir kunnskap om brøk ansett som viktig for senere forståelse og prestasjoner i matematikk og spesielt innenfor emnet algebra (Aliustaoğlu, Tuna & Biber, 2018; Booth & Newton, 2012; Booth, Newton & Twiss-Garrity, 2014; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Hansen et al., 2017; Hecht & Vagi, 2010; Tian & Siegler, 2017). Siegler og hans kolleger (2012) fant i sin longitudinelle studie at kunnskap om brøk ved 10-årsalder var den viktigste årsaksvariabelen for 16-åringers kunnskap om algebra og generelle prestasjoner i matematikk. Kunnskap om brøk blir også trukket frem som viktig for hverdags- og arbeidsliv. Sitatet nedenfor er et godt bilde på viktigheten av god brøkforståelse.

> The losses that occur because of the gaps in conceptual understanding about fractions, ratios, and related topics are incalculable. The consequences of doing, rather than understanding, directly or indirectly affect a person's attitudes toward mathematics, enjoyment and motivation in learning, course selection in mathematics and science, achievement, career flexibility, and even the ability to fully appreciate some of the simplest phenomena in everyday life. (Lamon, 2012, s. xi)

Forskning synliggjør altså en utfordring knyttet til brøk. Kunnskap om brøk blir sett på som viktig, men samtidig er det vanskelig å lære for mange elever. Spørsmålet blir da hva som gjør det så problematisk å lære brøk. I litteraturen finner vi flere mulige årsaker.

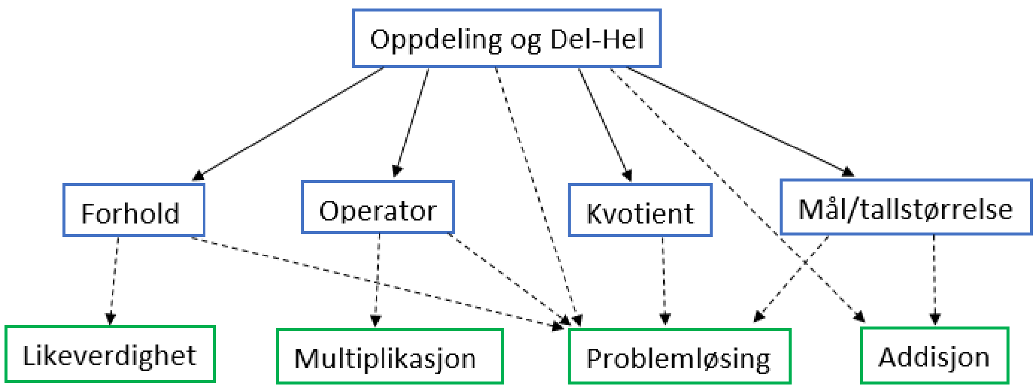
Den første årsaken til elevenes utfordringer med brøk kan være det som blir omtalt som «whole number bias» (Ni & Zhou, 2005; Siegler, Thompson & Schneider, 2011). «Whole number bias» handler om at elever bruker heltalltenkning når de skal forstå og anvende brøk. Neagoy (2017) skriver at overgangen fra heltall til brøk er et stort kognitivt sprang. Elevene tror at egenskapene de har lært for heltall gjelder for alle tall (Hansen et al., 2017). De vil for eksempel si at $\frac{5}{15}$ er større enn $\frac{3}{6}$, fordi 5 er større enn 3 og 15 er større enn 6. Et annet eksempel på heltallstenkning er synlig hos elever som mener at $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$. Disse elevene ser på tallene i brøkene som isolerte heltall. Ifølge Vamvakoussi og Vosniadou (2010) etablerer elevene et teoretisk rammeverk (en forståelse) for tall basert på det de har lært om heltall, og dette rammeverket vil være et hinder når de skal lære om brøk og andre rasjonale tall.

En annen årsak til at brøk er utfordrende kan være undervisningen elevene får. Mange (Bjerke, Eriksen, Rodal & Ånestad, 2013; Neagoy, 2017) mener at undervisning i brøk i for stor grad handler om å memorere og anvende algoritmer for regning med brøk, og at dette skjer uten at elevene har etablert en god forståelse av brøkbegrepet først. Det kan for eksempel resultere i at elevene i liten grad klarer å reflektere over og vurdere svar de får ved utregninger, fordi de ikke er i stand til å vurdere brøkenes størrelse. Undervisningen elevene møter kan også være preget av lite variasjon i representasjonsformer. En undervisning preget av algoritmer og få representasjonsformer, vil ha større fokus på instrumentell forståelse enn på relasjonell forståelse (Skemp, 1976). Instrumentell forståelse har fokus på hva som skal gjøres, «rules without reason», og vi kan sammenligne det med prosedyremessig kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Star & Stylianides, 2013). En undervisning som fremmer relasjonell forståelse vil ha fokus både på hva som skal gjøres og hvorfor det skal gjøres, og her kan vi trekke paralleller til begrepsmessig kunnskap eller konseptuell forståelse (Hiebert & Lefevre, 1986; Kilpatrick et al., 2001; Star & Stylianides, 2013). Hvorfor multipliserer man for eksempel teller og nevner med samme tall, når man skal utvide en brøk?

Den tredje årsaken som blir omtalt, er en av de mest fremtredende i litteraturen. Elevers problemer med brøk kan skyldes kompleksiteten til brøkbegrepet. Kieren (1976) var den første som hevdet at brøk bestod av flere delkonstrukter, og hans tanker ble videreutviklet av Behr og hans kolleger (1983). De utviklet en teoretisk modell der brøk består av fem aspekter; del-hel, forhold, operator, kvotient og mål/størrelse. Man må beherske alle de fem aspektene for å ha en god brøkforståelse, og et ensidig fokus på kun ett av aspektene gir en mangelfull forståelse (Bjerke et al., 2013).

2.2.1 Aspekter ved brøk

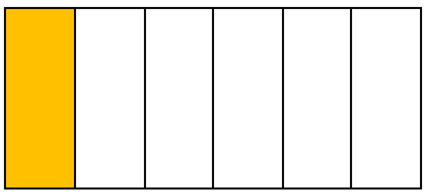
Behr et al. (1983) lanserte som nevnt en teoretisk modell (figur 2) som illustrerte aspektene ved brøk, og denne modellen vil jeg nå bruke som grunnlag for å se nærmere på de ulike aspektene. I modellen er de ulike aspektene ved brøk plassert i blå bokser, mens de grønne boksene viser mulige bruksområder. Pilene indikerer mulige sammenhenger mellom boksene.

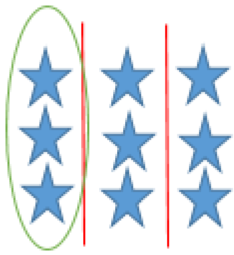


Figur 2 Modell for aspekter ved brøk. Oversatt fra Behr et al. (1983).

2.2.1.1 Del-Hel

Av modellen ser vi at aspektet del-hel sammen med prosessen oppdeling blir sett på som et fundament for å beherske de fire underliggende aspektene. Del-hel aspektet handler om å kunne dele opp en kontinuerlig enhet eller et sett av diskrete objekter i delmengder med lik størrelse (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2012). En brøk $\frac{a}{b}$ betyr a deler av b like deler. Figur 3 viser hvordan vi kan dele opp en kontinuerlig enhet og diskrete objekter. På bildet til venstre er et rektangel delt opp i seks like deler, og én av delene er markert. Vi har brøken $\frac{1}{6}$. Til høyre ser vi ni stjerner (diskrete objekter) som er delt i tre like store deler. Hver del består av tre stjerner, og det er satt ring rundt en av delene. Vi har brøken $\frac{1}{3}$. Bildet til høyre kan også representere brøken $\frac{3}{9}$. Vi har altså to ulike brøker som angir samme mengde/størrelse. Dette kaller vi likeverdige brøker.



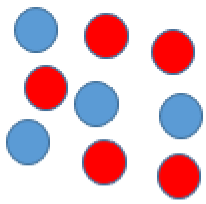


Figur 3 Representasjoner av aspektet del - hel.

Prosessen ved å dele opp noe i like deler, likedeling (eng. equipartitioning), blir av mange sett på som grunnlaget for brøker (Lamon, 2012; Petit, Marsden, Ebby & Laird, 2015). For å kunne dele opp noe i like deler, er det helt avgjørende å forstå hva som er det hele. I bildet til høyre på figur 3 må man for eksempel forstå at det hele er ni stjerner, og ikke hver enkelt stjerne. I tillegg kan det være utfordrende å forstå at delene skal representere samme mengde/størrelse, men at de ikke nødvendigvis har samme form.

2.2.1.2 Forhold

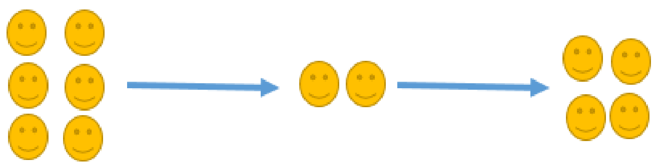
Aspektet forhold handler om en sammenligning av to størrelser (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2012). Dette kan være to størrelser av samme type eller to størrelser av ulik type. Når vi sammenligner to størrelser av ulik type snakker vi ofte om begrepet rate. Hastigheten til en bil er et godt eksempel på rate. Vi kan si at bilen beveger seg 240 km på 3 timer. Vi har da en rate lik $\frac{240}{3}$, og hastigheten blir 80 km/t. Når man sammenligner størrelser av samme type har vi to typer forhold, del-hel sammenligning og del-del sammenligning. Forskjellen mellom disse to sammenligningene kan vi se ved å ta utgangspunkt i figur 4. På figuren ser vi ni prikker, fire blå og fem røde. Vi har da følgende forhold; $\frac{4}{5}$ (del-del), $\frac{5}{4}$ (del-del), $\frac{4}{9}$ (del-hel) og $\frac{5}{9}$ (del-hel). Det er altså avgjørende hva vi sammenligner en del med, enten en annen del eller helheten.



Figur 4 Representasjon av aspektet forhold.

2.2.1.3 Operator

I aspektet «operator» ser man på brøk som en funksjon som man skal bruke på et tall, et objekt eller et sett (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2012). Brøken vil symbolisere instruksjoner for en prosess som skal utføres. Prosessene kan for eksempel være øke og minke, forstørre og forminske eller multiplisere og dividere. Brøken $\frac{2}{3}$ forteller oss at noe skal multipliseres med 2 og divideres med 3. Rekkefølgen på de to regneoperasjonene er likegyldig. Figur 5 viser hvordan et sett med diskrete objekter vil reagere på $\frac{2}{3}$ som operator.



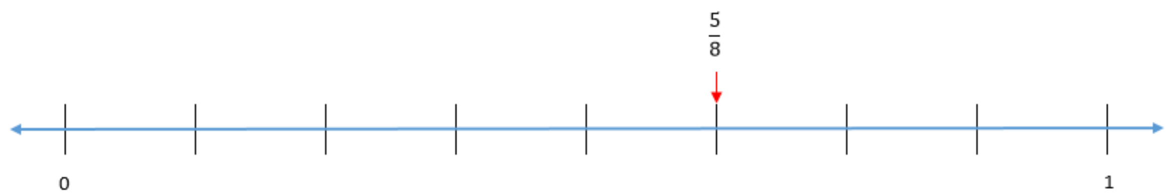
Figur 5 Representasjon av aspektet operator.

2.2.1.4 Kvotient

Aspektet kvotient er tett knyttet til å dele likt som også ble omtalt under del-hel aspektet. Når vi forstår brøk som en kvotient, ser vi på brøken som svaret i et divisjonsstykke (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2012). Brøken $\frac{a}{b}$ vil da være den numeriske verdien vi får om a er dividert med b. Et eksempel på dette er om 3 liter brus skal deles på 4 barn. Hvert barn vil da få $\frac{3}{4}$ liter brus.

2.2.1.5 Mål/tallstørrelse

Dette aspektet handler om at brøk kan være en tallstørrelse eller et mål på en avstand/lengde fra et gitt punkt (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2012). Å se på brøker som en tallstørrelse er en utvidelse av tallområdet utover de hele tallene, og dette er som tidligere nevnt et stort kognitivt sprang. I arbeid med hele tall er barn vant til at det er ingen andre tall mellom 4 og 5, og da kan det være utfordrende å forstå at det mellom $\frac{1}{5}$ og $\frac{1}{4}$ alltid vil være et uendelig antall andre brøker. Tilknyttet dette aspektet er det vanlig at en brøk angir lengden til et intervall på en en-dimensjonal tallinje. Da er hver enhet på tallinjen delt inn i b delintervaller, og hvert delintervall har lengde $\frac{1}{b}$. Brøken $\frac{a}{b}$ vil da bety at vi har a delintervaller med lengde $\frac{1}{b}$. Figur 6 viser hvordan $\frac{5}{8}$ kan angi avstanden fra null til den røde pilen.



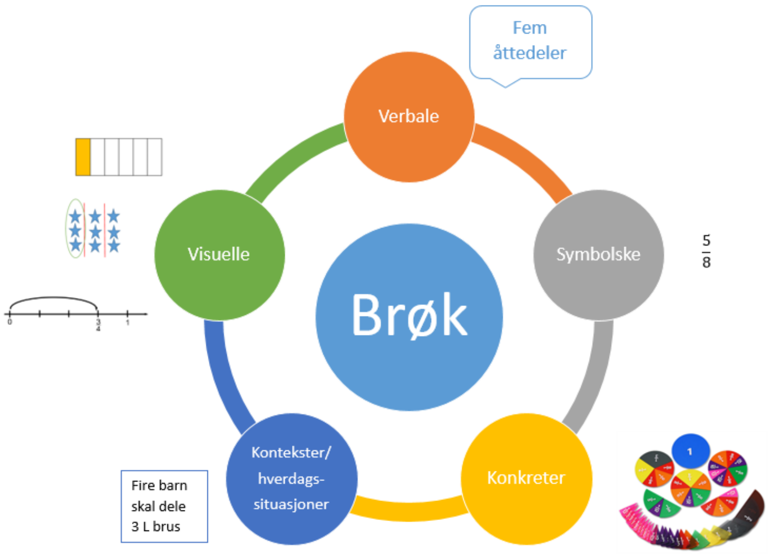
Figur 6 Representasjon av aspektet mål/tallstørrelse.

Denne forståelsen av brøk ligger bak nyttige hjelpemidler som en linjal og et målebeger. 1 cm er for eksempel $\frac{1}{100}$ av 1 m.

For å oppnå en god brøkforståelse bør man som nevnt arbeide med alle aspektene i undervisningen. I tillegg er det anbefalt å la elevene møte varierte representasjonsformer. Jeg vil derfor se kort på representasjonsformer tilknyttet brøk i neste delkapittel.

2.2.2 Representasjonsformer og brøk

Brøk og alle andre matematiske objekter er i utgangspunktet abstrakte objekter. For å gjøre de «synlige» er det vanlig å vise til fem ulike representasjonsformer; visuelle, konkreter, kontekst/hverdagssituasjoner, verbale og symbolske (Lesh, 1976; Svingen, 2018). Gjennom å bruke ulike representasjonsformer, vil elevene se et begrep på ulike måter, og de vil på denne måten få en bedre forståelse for begrepet. Ifølge Duval (2006) er matematisk aktivitet å bearbeide matematiske objekter, og dette omtaler han som transformasjoner på ulike representasjoner. Han definerer to ulike former for transformasjoner; behandlinger og omdanninger. Behandlinger er transformasjoner innenfor samme representasjonsform, for eksempel en symbolsk løsning av et regnestykke. Omdanninger er transformasjoner der man skifter fra en representasjonsform til en annen, mens det matematiske objektet er det samme. Elever kan for eksempel skifte fra symbolsk til visuell representasjon for å få bedre forståelse for en brøks størrelse. Omdanninger er vanskeligere enn behandlinger (Duval, 2006), men for å oppnå god forståelse i matematikk er det viktig å fokusere på begge deler i undervisningen. Elevene vil da oppdage sammenhenger mellom representasjonsformene.



Figur 7 Ulike representasjonsformer i matematikk. Inspirert av Svingen (2018).

Gjennom beskrivelsen av brøk har vi sett at det er flere årsaker til elevers utfordringer tilknyttet dette matematiske begrepet. Utfordringene gjør at mange elever havner i det vi kaller misoppfatninger. Misoppfatninger generelt og misoppfatninger tilknyttet brøk vil bli behandlet i de neste delkapitlene. Samtidig vil diagnostisk undervisning som fokuserer på elevers feil og misoppfatninger, bli omtalt.

2.3 Misoppfatninger

Forskning på misoppfatninger (eng. misconceptions) innen matematikk og naturvitenskapene begynte på midten av 1970-tallet, og ifølge Ay (2017) har forskningen hatt et økende fokus på misoppfatninger i matematikk de siste årene. I starten var mesteparten av forskningen knyttet til naturvitenskapene, men navn som Erlwanger, Davis og Ginsburg gjorde seg bemerket innen matematikkfeltet (Fujii, 2014). De forsket alle sammen på elevers oppfatninger av begrep. Helt frem til i dag har bruken av begrepet misoppfatninger vært mye diskutert, og det skyldes blant annet at det har blitt lagt to ulike forståelser til begrepet (Leonard et al., 2014; Maskiewicz & Lineback, 2013).

For det første kan man forstå misoppfatninger som «feiloppfatninger» hos elevene som må avsløres, konfronteres og fjernes. Et slikt syn på misoppfatninger blir støttet av de som mener at misoppfatninger er en «dårlig ting» og et stort hinder for videre læring. Motsatt kan man se på misoppfatninger som en produktiv komponent som lærere bør vektlegge og bygge sin undervisning på. Misoppfatningene gir læreren et innblikk i elevenes tenking og sier mye om hvordan elevene forstår matematiske objekter (Cockburn & Littler, 2008; Ryan & Williams, 2007). Elevers første oppfatninger av et begrep er verdifulle ressurser som kan utvikles til en «riktig» begrepsoppfatning (Drews et al., 2017). I tillegg har det vært diskutert hvilket navn man skal bruke på fenomenet. Leonard, Kalinowski og Andrews (2014) støtter i sin artikkel bruken av begrepet misoppfatninger, selv om mange forskere har foreslått andre navn som alternative oppfatninger, preoppfatninger, naive oppfatninger og lignende. I dag fronter Matematikksenteret (2019b) og Statped (2019) et syn på misoppfatninger som en produktiv komponent for videre læring, og det er denne forståelsen av misoppfatninger jeg vil bygge på i denne studien.

Grunnlaget for et produktivt syn på misoppfatninger er et konstruktivistisk læringssyn. Elevene kommer ikke som «blanke ark» inn til undervisningen. De vil alltid ha med seg tidligere kunnskap, og dette er den primære kilden for å tilegne seg ny kunnskap. Ny kunnskap blir bygd på gammel kunnskap (Ay, 2017; Booth & Newton, 2012; Moss & Case, 1999). I mange tilfeller vil elevene utvikle ideer og oppfatninger knyttet til begreper som ikke er 100 % vitenskapelig korrekte. Det er slike ufullstendige ideer og oppfatninger vi kaller misoppfatninger. Går vi til undervisningslitteratur finner vi følgende definisjon på det engelske begrepet misconceptions:

> Certain conceptual relations that are acquired may be inappropriate within a certain context. We terms such relations as "misconceptions". A misconception does not exist independently, but is contingent upon a certain existing conceptual framework. Misconceptions can change or disappear with the framework changes.
>
> (Pines, 1985, s. 110)

Denne definisjonen bekrefter at misoppfatninger handler om begrepsoppfatninger som ikke er passende i enkelte kontekster (ny kunnskap), og det er også viktig å merke seg at misoppfatninger ifølge definisjonen kan endre seg eller forsvinne.

Misoppfatninger bygger på et konseptuelt rammeverk (kognitiv struktur), og det er dette rammeverket en lærer må jobbe med for å hjelpe en elev ut av en misoppfatning. Vosniadou (1994) hevder at rammeverkene kan modifiseres gjennom berikelse (assimilasjon) eller revisjon (akkomodasjon). Ved berikelse legger man ny informasjon til eksisterende rammeverk, mens man ved revisjon endrer oppfatninger eller strukturer i rammeverket.

Revisjon er den vanskeligste formen for konseptuell endring, og kan ifølge Vosniadou føre til misoppfatninger. Misoppfatninger oppstår når elever forsøker å tolke vitenskapelig informasjon innenfor et eksisterende rammeverk som inneholder informasjon som står i konflikt med et vitenskapelig syn. Det er også mulig å trekke paralleller mellom begrepet misoppfatninger og begrepene begrepsbilde (concept image) og begrepsdefinisjon (concept definition) lansert av Tall og Vinner (1981). Et begrepsbilde inneholder alle mentale bilder, egenskaper og prosesser man knytter til et begrep, og hos elever i en misoppfatning vil begrepsbildet og den personlige begrepsdefinisjonen være forskjellig fra det som er akseptert i det vitenskapelige miljøet.

Som nevnt i innledningen kan misoppfatninger medføre at elever gjør feil. I et konstruktivistisk perspektiv kan man derimot se på misoppfatninger som en naturlig del av en utviklingsprosess (Drews et al., 2017; Leonard et al., 2014), og det er dermed ikke snakk om at elever med misoppfatninger har mangler eller feil. For en lærer er det viktig å se verdien i elevers feil. Læreren må forstå forskjellen mellom de tilfeldige feil elever gjør og de ikke tilfeldige feilene som kan skyldes misoppfatninger. Bak feil som skyldes misoppfatninger ligger det en bestemt tenkning eller idé som blir brukt konsekvent. Vi kan si at misoppfatninger fører til systematiske feil, og at de er en delmengde av elevers feil. Ay (2017) skriver at vi kan definere alle misoppfatninger som feil, men ikke alle feil er misoppfatninger.

Ifølge Ojose (2015) er det matematikkens natur som gjør at misoppfatninger er aktuelt innen matematikkundervisning. Matematiske begreper blir ofte definert ved hjelp av underliggende begreper, samtidig som reglene endrer seg fra et matematisk begrep til et annet (Ay, 2017; Ojose, 2015). Misoppfatninger kan skyldes en misforståelse eller manglende oppfatning av et matematisk begrep. Det kan også i mange tilfeller skyldes en overgeneralisering (Maskiewicz & Lineback, 2013; Nygaard & Zernichow, 2006), der tidligere kunnskaper blir overført til nye områder, der disse kunnskapene ikke gjelder fullt ut. Brekke (2002) skriver at nettopp det å få elevene til å innse at de ideer og begreper de har dannet, ikke alltid gjelder i alle nye situasjoner, er en sentral utfordring i matematikkundervisningen. Vanlige eksempler på misoppfatninger i matematikk er «*multiplikasjon gjør større, divisjon gjør mindre*» og «*jo lengre et desimaltall er, jo større er det, så 1,217 er for eksempel større enn 1,3*». Ser vi på det første eksemplet, så vil en slik oppfatning av begrepene multiplikasjon og divisjon stemme i mange sammenhenger, mens det i andre sammenhenger ikke vil stemme. Misoppfatninger er et vanlig steg på veien mot god forståelse av matematiske begreper. Vi kan si at misoppfatninger er noe elevene er i, og ikke noe de har eller ikke har. Forskning viser derimot at misoppfatningene ofte følger elevene gjennom hele skoleløpet og også senere i livet (Brekke, 2002; Fujii, 2014).

2.4 Misoppfatninger knyttet til brøk

I forskningslitteraturen er flere vanlige misoppfatninger knyttet til brøk beskrevet (Bjerke et al., 2013; Mohyuddin & Khalil, 2016; Navigator; Neagoy, 2017; Newstead & Murray, 1998; Ojose, 2015; Ryan & Williams, 2007; Streefland, 1991). Misoppfatningene er knyttet til elevenes forståelse av brøkbegrepet. I min studie har jeg valgt å se nærmere på fem misoppfatninger; «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse», «jo større nevner (eller teller), jo større brøk», «differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til en brøk», «brøkstrek er lik komma» og «teller (eller nevner) er et isolert tall». Disse fem misoppfatningene er noen av misoppfatningene som er trukket frem av Matematikksenteret i prosjektet «Fra misoppfatning til mestring»[4](FRAMM). I tillegg til at de fem misoppfatningene er omtalt i FRAMM-prosjektet, er de også beskrevet i flere andre forskningsstudier. FRAMM-prosjektet var en videreføring av KIM-prosjektet på 1990-tallet. I prosjektet er flere vanlige misoppfatninger innenfor ulike matematiske emner omtalt, og utbredelsen av misoppfatningene er undersøkt på 6. og 9. trinn.

De fem misoppfatningene er i hovedsak knyttet til aspektene del-hel, forhold og mål/tallstørrelse, og årsaken til flere av dem er at elevene ikke betrakter brøk som en egen tallstørrelse. Ingen av misoppfatningene jeg ser nærmere på handler om å utføre regneoperasjoner med brøk. I de følgende underkapitlene vil jeg beskrive de misoppfatningene jeg ser nærmere på i studien. I beskrivelsen vil jeg også trekke frem hvor utbredt disse misoppfatningene har vært i andre studier og prosjekter. Det er viktig å påpeke at tallene fra tidligere studier og prosjekter er resultater på enkeltoppgaver.

2.4.1 Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse

Misoppfatningen «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse» er knyttet til begrepet likedeling omtalt under aspektet del-hel. Elever med denne misoppfatningen er ikke bevisst på at deling i like deler er en forutsetning for brøker, og de vil dermed ikke ta hensyn til brøkdelenes størrelse. Nevner vil representere antall deler, uavhengig av delenes størrelse.

[4] Prosjektets nettside: https://www.matematikksenteret.no/eksamen-pr%C3%B8ver-og-kartlegging/fra-misoppfatning-til-mestring/misoppfatninger-knyttet-til-br%C3%B8k

Elever som svarer at figur 8 representerer $\frac{1}{4}$ viser tegn på denne misoppfatningen. De ser at figuren er delt i fire deler, men ser bort fra delenes størrelse.

Figur 8 Feil representasjon av brøken 1/4.

I FRAMM-prosjektet var det 41,8 % av elever på 6. trinn som viste tegn på denne misoppfatningen, i en oppgave der de skulle gjenkjenne representasjoner av brøken $\frac{1}{3}$. Det var også 75 % av britiske 9-åringer som viste denne misopppfatningen under standardiseringen av testverktøyet Mathematics Assessment for Learning and Teaching (Ryan & Williams, 2007).

2.4.2 Jo større nevner (eller teller), jo større brøk

Under beskrivelsen av brøk skrev jeg om «whole number bias», og misoppfatningen «jo større nevner (eller teller), jo større brøk» henger sammen med denne problematikken. Elever som viser tegn på denne misoppfatningen gjør en overgeneralisering av egenskapene til hele tall, og velger å bruke de samme egenskapene når de møter brøker. Elevene ser på teller og nevner som isolerte heltall, og vil da ikke ta hensyn til forholdet mellom dem når de skal vurdere størrelsen til en brøk. Denne misoppfatningen er et eksempel på overgeneralisering av egenskaper som gjelder for heltall og desimaltall. Et eksempel på misoppfatningen «jo større nevner (eller teller), jo større brøk» er elever som sier at $\frac{1}{9}$ er større enn $\frac{1}{8}$, fordi 9 er større enn 8. I kombinasjon med misoppfatningen «brøkstrek er lik komma», kan vi også ha elever som mener at $\frac{1}{9}$ er større enn $\frac{1}{8}$, fordi 1,9 er større enn 1,8. Et annet eksempel er elever som sier at $\frac{5}{15}$ er større enn $\frac{3}{6}$, fordi 5 er større enn 3 og 15 er større enn 6. Newstead og Murray (1998) referer til en oppgave som handler om denne misoppfatningen i sin studie. Elever i Sør-Afrika ble bedt om å rangere brøkene $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$ og $\frac{2}{9}$ fra minst til størst. Da var det 16 % av elevene på 4. trinn og 38 % av elevene på 6. trinn som svarte $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{9}$. Elevene rangerte på grunnlag av størrelsen til nevneren. Det var også henholdsvis 18 % og 30 % som svarte at $\frac{3}{5}$ var større enn $\frac{3}{4}$.

2.4.3 Differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til en brøk

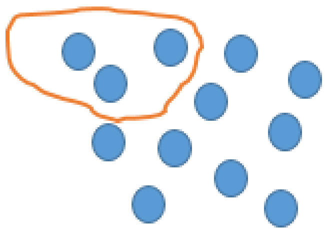
Misoppfatningen «differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til en brøk» kan komme til syne når man skal sammenligne størrelsen til to brøker eller finne likeverdige brøker. Elever som viser tegn på denne misoppfatningen kan skrive at $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, og begrunne dette med at forskjellen mellom teller og nevner er den samme i begge brøkene. Vi har da det som i litteraturen er omtalt som «gap thinking» (Bjerke et al., 2013; Mitchell & Horne, 2010). Denne tenkningen er preget av heltallstenkning. Et annet eksempel på «gap thinking» er å si at $\frac{3}{5}$ er større enn $\frac{5}{8}$, fordi «gapet» (eller differensen) er større mellom 5 og 8. Man skal imidlertid være klar over at svar som tyder på denne misoppfatningen, også kan skyldes andre typer tenkning. Elever kan for eksempel tenke additivt, og svare at $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, fordi man adderer 1 i både teller og nevner. Ved standardiseringen av Mathematics Assessment for Learning and Teaching (MaLT) var det 13 % av 9-åringer og 10 % av 13-åringer som hadde svar som indikerte «gap thinking» (Ryan & Williams, 2007), mens det i FRAMM-prosjektet var 25 % av elever på 6. trinn som svarte at $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$. Også andre studier viser at over 20 % av elevene har svar som kan indikere denne misoppfatningen (Mitchell & Horne, 2010; Mohyuddin & Khalil, 2016).

2.4.4 Brøkstrek er lik komma

Elever som er i misoppfatningen «brøkstrek er lik komma» ser på brøkens deler som isolerte deler. Skrivemåten for brøk skiller seg fra det elevene kjenner fra hele tall og desimaltall. Her møter de teller, nevner og brøkstrek. Noen vil se på teller og nevner som to isolerte heltall, mens brøkstreken er symbolet som skiller disse to tallene. Det vil da være mulig å koble dette til desimaltall, der heltall er skilt ved hjelp av komma. Elevene vil se brøkstrek på lik linje med et desimaltegn. Et eksempel på dette er at $\frac{3}{4}$ er det samme som 3,4. I FRAMM-prosjektet var det omtrent halvparten av elevene på 6. trinn som svarte at $\frac{1}{4}$ er lik 1,4.

2.4.5 Teller (eller nevner) er et isolert tall

Enkelte elever vil se på en brøk som to isolerte tall, og velger deretter å forholde seg bare til telleren eller nevneren. For å avdekke en slik misoppfatning er det viktig å variere helheten elevene møter. Om de blir bedt om å sette ring rundt $\frac{1}{4}$ av fire prikker vil elever i misoppfatningen «teller (eller nevner) er et isolert tall» få korrekt svar, dersom de velger å bare forholde seg til telleren. Telleren er 1 så det skal være én prikk. Blir elevene derimot bedt om sette ring rundt $\frac{1}{4}$ av åtte prikker, vil samme fremgangsmåte gi feil svar. Elevene klarer ikke å se brøken som en del-hel sammenligning (forhold), og det vil i tillegg være avgjørende å klare å se hva som er helheten. Elever som viser tegn på denne misoppfatningen kan svare som vist i figur 9, når de blir bedt om å fargelegge $\frac{1}{3}$ av 12 prikker. I eksemplet har eleven kun forholdt seg til nevneren. Han har satt ring rundt tre prikker, fordi nevneren er 3.



Figur 9 Elevsvar som kan indikere misoppfatning, når eleven skal skravere 1/3 av 12 prikker.

Liknende tenkning finner vi hos både 8-åringer og 10-åringer under standardiseringen av MaLT. Det var for eksempel 50 % av 10-åringene som skraverte to eller tre deler, når de ble bedt om å skravere $\frac{2}{3}$ av et rektangel delt i seks like deler (Ryan & Williams, 2007).

2.5 Diagnostisk undervisning

Diagnostisk undervisning er en arbeidsmetode som sikter mot å bygge opp solide begreper som kan gi et godt grunnlag for langtidslæring (Brekke, 2002). Arbeidsmetoden setter fokus på vanlige feil og misoppfatninger elever har, fordi de tankene og oppfatningene elevene har kan være til hinder for videre læring. Utgangspunktet for undervisningen er et fåtall velvalgte aktiviteter, og gjennom aktivitetene ønsker man å få frem tanker og oppfatninger elever har om ulike matematiske begrep. Diagnostiske oppgaver og prøver er eksempler på slike aktiviteter. En diagnostisk undervisning består ofte av fire faser:

1. Identifisere misoppfatninger og delvis utviklede begreper hos elevene.
2. Tilrettelegge undervisningen slik at eventuelle misoppfatninger eller delvise begreper blir framhevet. En kaller dette å skape en kognitiv konflikt.
3. Løse den kognitive konflikten gjennom diskusjoner og refleksjoner i undervisningen.
4. Bruke det utvidede (eller nye) begrepet i andre sammenhenger.

Om vi tenker tilbake på Piagets og konstruktivismens sentrale begreper (kap. 2.1), så kan vi her knytte assimilasjon til fase 1, 2 og 4, mens akkomodasjon skjer i fase 3.

3 Psykometri

Psykometri er en fellesbetegnelse for feltet som omhandler teorier og teknikker som brukes ved måling av ulike konstrukter, og i denne delen av oppgaven vil jeg presentere de teorier og teknikker som er relevante for min studie. Jeg vil også definere sentrale begreper som reliabilitet og validitet.

Et grunnleggende prinsipp innenfor måling er at vi aldri måler en ting eller en person direkte. Det vi måler er alltid en kvalitet eller en egenskap ved tingen eller personen. Eksempler på dette kan være lengden til et bord eller intelligensen til en person. Thorndike og Thorndike-Christ (2014) skriver at man går gjennom tre faser ved måling: (1) identifisere og definere kvaliteten eller egenskapen som skal måles, (2) bestemme hvordan kvaliteten/egenskapen kan isoleres og observeres, og (3) finne ut hvordan kvaliteten/egenskapen kan kvantifiseres. Det at kvaliteten/egenskapen blir gitt en numerisk verdi er sentralt innenfor måling. Kvaliteter og egenskaper som er abstrakte og vanskelige å observere blir ofte kalt konstrukter. Eksempler på slike konstrukter kan være en persons lesekompetanse eller matematiske kompetanse. Et viktig mål innenfor måling er å bestemme hvor mye en person innehar av et gitt konstrukt (Baker & Kim, 2017). Opp gjennom historien har man brukt ulike teorier for å utvikle og analysere instrumenter (tester) som skal måle konstrukter på en god måte. I denne studien vil både klassiske testteori (CTT) og item response teori (IRT) bli brukt.

3.1 Klassisk testteori

Klassisk testteori er den teorien som oppstod først av de to statistiske rammeverkene som er populære i dag, og innenfor denne teorien er det tre sentrale begreper. Begrepene er test-skåre (observert skåre), sann-skåre og feil-skåre (Hambleton & Jones, 1993). Sammenhengen mellom disse er:

$$\text{Test-skåre} = \text{sann-skåre} + \text{feil-skåre}$$

Test-skåre er den poengsummen en person får ved gjennomføringen av en test som er ment å måle et fenomen, og dette er den eneste observerbare variabelen i sammenhengen uttrykt ovenfor. Det er ikke mulig å observere en persons sanne skåre og heller ikke feil-skåre. Ved måling er man ute etter å finne den sanne skåre, og denne definerer vi som den forventede test-skåre ved gjennomføring av flere tester som er ment å måle samme fenomen. Ved bruk av klassisk testteori vil både test-skåre og sann-skåre være avhengig av den testen som blir gjennomført. Dette betyr i praksis at en person ville fått ulike test-skårer om han gjennomførte en enkel og en vanskelig test som skulle målt samme fenomen. Vanskegraden til oppgavene i testen vil ha betydning for den test-skåren personen vil oppnå. Denne avhengigheten av testen som blir brukt, blir trukket frem som en ulempe ved klassisk test-teori (Linden & Hambleton, 1997). Det vil for eksempel ikke være mulig å sammenligne skårer, dersom samme test ikke blir benyttet.

3.2 Item response teori (IRT)

Innen psykometrimiljøet ønsket man derimot en teori som resulterte i et dyktighetsmål som var uavhengig av den testen som ble brukt, og derfor begynte man å bruke item response teori (IRT). Det at dyktighetsmålet er uavhengig av en test, betyr at en person ville fått samme skåre uansett hvilken test som ble gjennomført. Det ville altså ikke spille noen rolle om testen var enkel eller vanskelig. I utgangspunktet kan vi si at klassisk testteori og item response teori har ulike fokus. I CTT er fokuset på en persons test-skåre, mens i IRT er det fokus på enkeltoppgaver. Det viktige innen IRT er om personen svarer korrekt eller ikke på hver enkelt oppgave. Innenfor IRT bruker man matematiske modeller for å gjøre statistiske korrigeringer av test-skåren. Man korrigerer for faktorer som vanskelighetsgraden og diskrimineringen til en oppgave (Linden & Hambleton, 1997). Det avgjørende innenfor IRT vil ikke være hvor mange oppgaver en person svarer korrekt på. Hvilke oppgaver personen svarer korrekt på er viktigere. Eksemplet nedenfor (tabell 1) illustrerer denne vesentlige forskjellen. Her har to personer (A og B) gjennomført samme test. Testen består av fem oppgaver med stigende vanskelighetsgrad fra item 1 til item 5.

Tabell 1 Skåre person A og B ved bruk av CTT og IRT

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Skåre CTT	Skåre IRT
Person A	1	1	0	1	0	3	52
Person B	0	1	0	1	1	3	58

Vi ser at begge personene har svart riktig på tre oppgaver. Ved bruk av CTT får personene samme skåre, mens person B får høyere skåre ved bruk av IRT. Dette skyldes at person B har korrekt på oppgaver med høyere vanskelighetsgrad.

Innen IRT blir det brukt ulike modeller, og alle disse modellene forutsetter et forhold mellom den observerbare testprestasjonen til en person og den uobserverbare egenskapen som skal måles i testen. Dette forholdet blir beskrevet ved hjelp av en matematisk funksjon, en matematisk modell. I IRT er denne modellen en logistisk funksjon. To vanlige modeller som blir brukt i arbeidet med dikotome data er en-parameter modell og to-parameter modell. En-parameter modell har store likhetstrekk med Rasch-modell, men i en-parameter setter man ikke alltid oppgavenes diskriminering lik 1. I denne studien blir det brukt en to-parameter modell, og formelen for den logistiske modellen er:

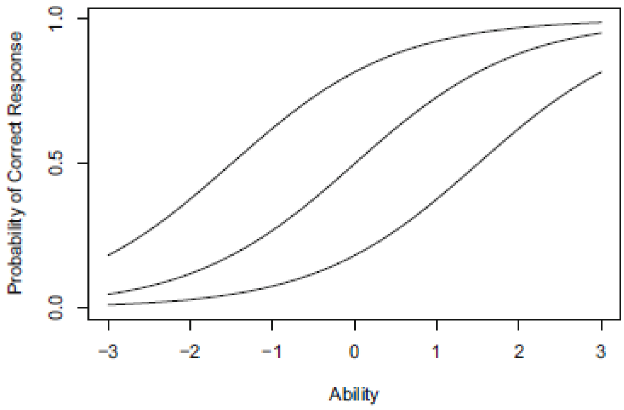
$$P(\theta) = \frac{e^{(\theta-b)}}{1 + e^{1,7a(\theta-b)}}$$

I formelen er P(θ) sannsynligheten for riktig svar med dyktighet θ, *e* er konstanten 2,718, *a* er oppgavens diskriminering og *b* er oppgavens vanskegrad. Alle begrep forklares i den videre teksten.

I både en-parameter og to-parameter modeller er det et grunnleggende premiss at alle som responderer på testen innehar en viss mengde av den underliggende egenskapen, og denne mengden kan bli angitt som en numerisk verdi på en dyktighetsskala. Dyktighetsverdien blir angitt med den greske verdien theta, θ, og ved hver verdi er det en viss sannsynlighet for at en respondent med denne dyktigheten vil svare korrekt på oppgaven, P(θ). Dyktigheten, θ, vil i virkeligheten gå fra minus uendelig til positiv uendelig, men blir ofte satt fra for eksempel -4 til 4 på en standardisert skala med gjennomsnitt 0 og standardavvik 1.

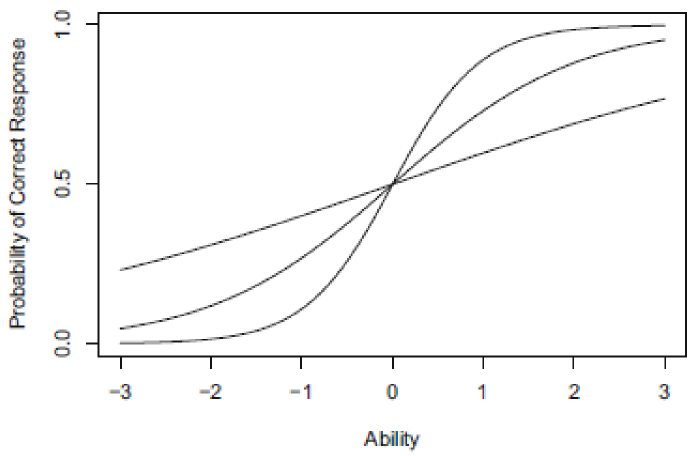
Med utgangspunkt i formelen for den logistiske modellen som blir brukt, vil vi i IRT-analyser få ut en item characteristic curve (ICC) for alle oppgaver i settet (Baker & Kim, 2017; Thorndike & Thorndike-Christ, 2014). Kurvene er den grunnleggende byggesteinen i IRT, og alle andre konstrukter innenfor teorien er avhengig av disse. ICC-kurvene beskriver forholdet mellom sannsynligheten for riktig svar på oppgaven, P(θ), og dyktighetsskalaen (θ). Formen på kurvene vil variere fra oppgave til oppgave, og det er to tekniske egenskaper som brukes for å beskrive en slik kurve. Den første egenskapen er oppgavens vanskelighetsgrad. Vanskegraden er en lokaliseringsindeks, og tilsvarer den dyktigheten man trenger for å ha 50 % sannsynlighet for riktig svar. Vanskegraden blir angitt med bokstaven *b*, og blir i IRT-analyser satt på samme standardiserte skala som elevenes dyktighet. Lokaliseringen til b-verdien kan vi finne i kurvens vendepunkt. I figur 10 ser vi kurven til tre oppgaver med ulik vanskegrad. Den øverste kurven har lav vanskegrad, og vi ser dette ved at man trenger en dyktighet på cirka – 1,5 for å ha 50 % sannsynlighet for riktig svar. Tilsvarende har vi at den midterste kurven har middels vanskegrad og den nederste kurven har høy vanskegrad. I den nederste kurven ser vi at man trenger en dyktighet på cirka 1,5 for å ha 50 % sannsynlighet for riktig svar. Det er slik at oppgaver med lav vanskegrad vil gi mest informasjon om respondenter med lav dyktighet og oppgaver med høy vanskegrad vil gi mest informasjon om respondenter med høy dyktighet.

Den andre tekniske egenskapen kurven sier noe om, er oppgavens diskriminering.



Figur 10 Item characteristic curve (ICC) for tre oppgaver med ulik vanskegrad, men samme diskriminering. Hentet fra Baker og Kim (2017, s. 4).

Diskrimineringen forteller hvor godt en oppgave skiller mellom respondenter med dyktighet over vanskegraden og respondenter under vanskegraden. Det er hvor bratt kurven er i vendepunktet som sier noe om diskrimineringen. Jo brattere, jo bedre diskriminering. Diskrimineringen blir angitt med bokstaven *a*. Figur 11 viser kurven til tre oppgaver med ulik diskriminering, men lik vanskegrad. Vi ser at vanskegraden er 0 for alle oppgavene, men kurvene har forskjellig bratthet rundt dette punktet. Oppgaven med en kurve som er en rett linje, er den oppgaven som skiller dårligst mellom elever med lav og høy dyktighet, og dermed har lavest diskriminering.



Figur 11 Item characteristic curve (ICC) for tre oppgaver med ulik diskriminering, men samme vanskegrad. Hentet fra Baker og Kim (2017, s. 5).

Det er viktig å påpeke at både *a* og *b* er tekniske egenskaper. De sier noe om hvordan oppgaven fungerer, men de sier ingen ting om oppgaven innholdsmessig måler det den er ment å måle. For å finne ut mer om kvaliteten til en oppgave eller en test som helhet må vi gå inn på psykometriske begreper som reliabilitet og validitet. I det videre vil jeg derfor se på disse to begrepene, og andre statistiske begreper som er relevante for analyser.

3.3 Reliabilitet

Reliabilitet handler om nøyaktigheten eller presisjonen til en måling, og indikerer i hvor stor grad resultatene fra en test eller målingsprosess er konsekvente og reproduserbare (Thorndike & Thorndike-Christ, 2014). Et eksempel på dette kan være om vi måler massen til den samme pakken hvetemel på en kjøkkenvekt flere ganger. Da ville vi forventet å måle samme masse hver gang. Hvis den målte massen hadde variert mye fra gang til gang, så vil vi si at kjøkkenvektens reliabilitet var lav.

Vi kan angi reliabiliteten til en test på to ulike måter. Den første måten er å angi målingens standardfeil (Thorndike & Thorndike-Christ, 2014). Standardfeil angir feilmarginen til en måling, og kan regnes ut ved å ta standardavviket dividert med kvadratroten av antall observasjoner (Cohen, Manion & Morrison, 2018, s. 210). Den andre måten å angi reliabilitet på er å regne ut en reliabilitetskoeffisient. Reliabilitet innebærer at den indre rekkefølgen (for eksempel rangeringen av elever) skal være konsekvent ved gjentatte målinger. Vi snakker da om indre konsistens. Reliabilitetskoeffisienten er en statistisk indeks på indre konsistens, og det er flere måter å finne denne koeffisienten på. I denne studien bruker jeg Cronbach's Alpha som er vanlig når man har bare én gjennomføring av en test. Formelen for Cronbach's Alpha ved dikotome resultater (0/1) er:

$$\alpha = \frac{K}{K-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{K} P_i Q_i}{\sigma_X^2}\right)$$

K er her antall oppgaver, $\sigma^2{}_X$ er variansen til testskåren, P_i er andelen som skårer 1 på item i, og $Q_i = 1 - P_i$.

Kravene til reliabilitetskoeffisienten vil avhenge av hva en test skal brukes til, men det er vanlig å si at akseptable verdier skal være over 0,7. Verdier over 0,8 er ansett som god reliabilitet (Cohen et al., 2018), og dette kan vi tolke som at vi kan forvente over 80 % samsvar i resultatene mellom flere gjennomføringer. Det er verdt å merke seg at reliabilitet kun er et mål på indre konsistens, og ikke på dimensjonalitet (hvor mange områder en test måler). En høy reliabilitet sier derfor ikke at en test er endimensjonal (måler bare én ting). Ønsker vi å undersøke dimensjonaliteten til en test kan vi gjennomføre en faktoranalyse.

3.4 Faktoranalyse

Faktoranalyse er en statistisk metode som undersøker mønster i sammenhengene mellom items i en test. Målet med analysen er å se om testen måler en eller flere latente variabler eller underliggende konstrukter. Slike latente variabler blir kalt faktorer. Antall mulige faktorer i en test med K antall items kan være $K - 1$. Utgangspunktet for faktoranalysen er korrelasjonene mellom items. Korrelasjon er et statistisk mål på sammenhengen mellom to variabler, og den vanligste korrelasjonskoeffisienten er kanskje Pearsons produkt-moment (Allen & Yen, 2001, s. 24). Gjennom en faktoranalyse vil det for eksempel være mulig å undersøke om en test som skal måle matematisk kompetanse, kan deles opp i flere faktorer. Ved å analysere de eventuelle faktorene kan vi da si mer om hva matematisk kompetanse består av.

3.5 Forskjeller mellom to grupper

En vanlig praksis ved statistiske analyser er å sammenligne resultatene til to eller flere grupper. Utgangspunktet for sammenligning er som regel gruppenes gjennomsnitt. I sammenligningen kan man sjekke om forskjellen mellom gruppene er signifikante (signifikanstesting) eller kvantifisere hvor stor forskjellen er (effektstørrelse).

3.5.1 Signifikanstesting

Vanlig utgangspunkt for signifikanstesting er en nullhypotese, H_0, og en alternativ hypotese, H_a. Gjennom signifikanstesten undersøker man om nullhypotesen kan forkastes eller ikke. Før man gjennomfører testen må man bestemme et signifikansnivå. Det er vanlig å velge signifikansnivå 5 %, $\alpha = 0{,}05$. Dette betyr at vi godtar 5 % sjanse for å forkaste nullhypotesen, selv om den er sann. De observerte dataene gir da bevis mot H_0 som bare vil skje i 5 % av tilfellene, hvis H_0 er sann. Ved en signifikanstest finner man sannsynligheten for at det observerte utfallet er like ekstremt som det faktiske utfallet. Denne sannsynligheten kaller vi P-verdien. Har vi valgt signifikansnivå lik 5 %, må P-verdien være mindre enn 0,05 for at vi skal kunne forkaste H_0.

Signifikanstester kan for eksempel gjennomføres ved hjelp av SPSS (IBM Corporation, 2017). Ved å kjøre en t-test (Cohen et al., 2018, s. 777-780) kan man se på forskjellen mellom to grupper. Har man to eller flere grupper er det mulig å kjøre en One-way ANOVA-test med Post hoc test (Cohen et al., 2018, s. 782-784; Keselman & Lix, 2017). En signifikanstest vil kun fortelle om en forskjell er statistisk signifikant eller ikke. Den vil ikke si noe om størrelsen på forskjellen. Da må vi se på et statistisk mål kalt effektstørrelse.

3.5.2 Effektstørrelse

Effektstørrelse er en måte å kvantifisere forskjellen mellom to grupper på. Målet vektlegger størrelsen på forskjellen. Det finnes flere måter å regne ut effektstørrelser på, og i denne studien har jeg valgt å bruke Cohens d. Formelen for å finne denne er:

$$d = \frac{M_{g1} - M_{g2}}{SD_{pooled}}$$

Dette er forskjellen mellom gjennomsnittene til to ulike grupper, dividert med det gjennomsnittlige standardavviket til de to gruppene. Det gjennomsnittlige standardavviket finner vi ved følgende formel:

$$SD_{pooled} = \sqrt{(SD^2{}_{g1} + SD^2{}_{g2})/2}$$

Cohen foreslo i 1969 at 0,2 tilsvarer en «liten» effekt, 0,5 en «middels» effekt og 0,8 en «stor» effekt. En effektstørrelse lik 0,5 betyr at forskjellen er på 0,5 standardavvik (Cohen et al., 2018).

3.6 Validitet

Validitet er en viktig nøkkel til effektiv forskning. Hvis forskningen er invalid, er den verdiløs (Cohen et al., 2018). Det finnes mange ulike typer validitet, og begrepet har også ulik betydning innen ulike forskningsmetoder. Jeg vil her fokusere på validitet i kvantitativ forskning og spesielt i tester. Reliabilitet og validitet er to begreper som har en kobling. Cohen et. al. (2018) skriver at reliabilitet ikke er en tilstrekkelig betingelse for validitet, men det er en nødvendig betingelse for validitet. Det finnes ingen entydig definisjon av validitet. Noen definisjoner tar utgangspunkt i at validitet handler om å demonstrere at et måleinstrument faktisk måler det det hevder eller har til hensikt å måle. De fenomenene man har til hensikt å beskrive, forklare eller teorisere må være representert i instrumentet eller dataene. Andre definisjoner hevder at validitet handler om i hvilken grad tolkninger av dataene kan garanteres eller bekreftes av de teorier og bevis som blir benyttet. Teoriene og bevisene en forsker bruker skal være linken mellom dataene og konklusjoner som blir gjort.

Validitet handler altså både om innholdet i måleinstrumentet og om koblingen mellom måleinstrumentet og teori.

Shadish, Cook & Cambell (2001) skriver at validitet handler om hvor gyldige slutninger som blir tatt er, og de har identifisert fire ulike hovedkategorier for validitet; konstruktvaliditet, statistisk konklusjonsvaliditet, intern validitet og ekstern validitet. Disse hovedkategoriene ser på aspekter som innhold i måleinstrument, statistiske metoder som er brukt, forskningsdesign og muligheter for generalisering. Innenfor disse fire hovedkategoriene finnes det derimot et stort antall underkategorier, og jeg velger her å se nærmere på noen typer validitet som Cohen et. al. (2018) trekker frem som spesielt aktuelle for en test. De typene jeg vil se nærmere på er; konstruktvaliditet, innholdsvaliditet, kriterie-relatert validitet og kulturell validitet.

Konstruktvaliditet blir som nevnt ovenfor sett på som en av hovedkategoriene for validitet, og hovedspørsmålet knyttet til denne typen validitet er om måleinstrumentet, f.eks. en test, måler det den skal måle. Loevinger (1957) skriver at det er tre elementer som er involvert når man skal vurdere konstruktvaliditet; testen, egenskapene/område som blir testet og det testeren (forskeren) sier at testen måler. For å sikre konstruktvaliditet er det avgjørende at det aktuelle konstruktet er korrekt og tilstrekkelig definert. Konstruktet må være operasjonalisert på en god måte.

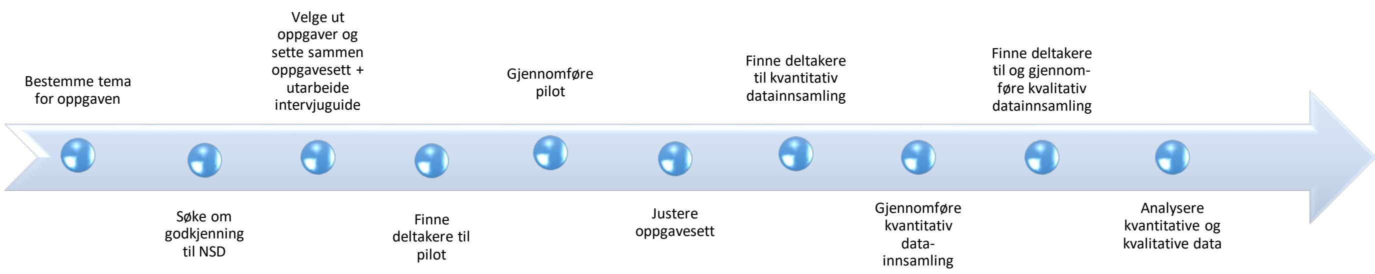
Innholdsvaliditet har sammenheng med konstruktvaliditet, og handler om å vise at oppgavene i testen dekker det emnet (konstruktet) de er ment å dekke på en tilfredsstillende og representativ måte. I de fleste tilfeller vil det være umulig å ha med oppgaver som dekker absolutt alle aspekter ved et konstrukt, og en forsker må derfor velge et fornuftig utvalg av oppgaver som sikrer en rettferdig representasjon av det konstruktet som skal undersøkes. Innholdsvaliditet handler også om å se på testens relevans. Da skal man vurdere i hvilken grad innholdet er «undervist». Kan man forvente at de som skal svare har mulighet til å svare?

Kriterie-relatert validitet, er i mindre grad knyttet til selve innholdet i måleinstrumentet. Denne typen validitet ser på sammenhengen mellom måleinstrumentet og andre måleinstrument. For å sjekke kriterie-relatert validitet relaterer man resultatene fra det aktuelle måleinstrumentet med resultatene fra et eksternt kriterium. Om det eksterne kriteriet skal måle samme konstrukt, bør det være høy korrelasjon mellom resultatene. Innenfor kriterie-relatert validitet kan vi finne to undergrupper, predikativ og «samtidig» (concurrent) validitet. Det som skiller disse to undergruppene er tidsaspektet. Ved predikativ skal resultatene korrelere høyt med resultatene fra en fremtidig test, mens ved «samtidig» validitet faller tidsaspektet bort, og man foretar en simultan sammenligning mellom ulike måleinstrument.

Den siste typen validitet jeg vil omtalte er kulturell validitet. Denne typen validitet handler om at måleinstrumentet skal være rettferdig med tanke på språk og andre kulturelle aspekter. Er det for eksempel brukt kontekster i en test, bør man unngå kontekster som kan virke støtende på enkelte av de som skal gjennomføre testen.

4 Metode

I dette kapitlet vil jeg presentere mitt forskningsdesign i detalj, og belyse de metodiske vurderinger og valg jeg har tatt underveis. I studien har jeg brukt både kvantitative og kvalitative metoder for datainnsamling, og studien har derfor et forskningsdesign som grenser mot mixed method research (MMR). Jeg vil uansett karakterisere arbeidet mitt som en kvantitativ studie, siden forskningsspørsmålene jeg vil finne svar på i hovedsak er av en kvantitativ art. Figur 12 er en illustrasjon av studiens gang fra start til slutt, og i beskrivelsen av denne reisen kommer jeg inn på hvilken rolle de kvantitative og kvalitative metodene har spilt. Avslutningsvis i kapitlet diskuteres de etiske vurderingene som det måtte tas hensyn til i studien.



Figur 12 Illustrasjon av studiens gang fra start til slutt.

4.1 Kvantitativ forskningsmetode

Som nevnt ovenfor er denne studien først og fremst en kvantitativ studie, selv om både kvantitative og kvalitative metoder er brukt. For å svare på forskningsspørsmålene i studien var det nødvendig med store mengder data, og derfor ble det hovedsakelig brukt kvantitativ metode. I dette delkapitlet vil jeg gjøre rede for hva som kjennetegner kvantitativ metode.

Aliaga og Gunderson referert i Muijs (2004, s. 2) definerer kvantitativ forskningsmetode slik: «Explaining phenomena by collecting numerical data that are analysed using mathematically based methods (in particular statistics)». Denne definisjonen kan være et godt utgangspunkt når vi skal se nærmere på kvantitativ metode.

Det første aspektet i definisjonen er et fellestrekk for både kvantitativ og kvalitativ forskning. All forskning handler om at vi ønsker å beskrive eller forklare et fenomen. Det kan for eksempel være at vi ønsker å finne ut hvilke faktorer som påvirker elevers motivasjon for matematikk. Det andre aspektet i definisjonen gjør derimot at kvantitativ forskning skiller seg fra kvalitativ. I kvantitativ forskning arbeider vi kun med numeriske data. Det er dermed en grunnleggende forutsetning at alle fenomen vi ønsker å se på i kvantitative studier kan reduseres til empiriske indikatorer som representerer sannheten (Apuke, 2017; Muijs, 2004; Sale, Lohfeld & Brazil, 2002). I mange tilfeller er det slik at det man ønsker å forske på ikke er i kvantitativ form, for eksempel elevers holdninger, og i slike tilfeller kan man konvertere fenomenet til kvantitative data. Det siste aspektet i definisjonen er at man bruker matematiske metoder, spesielt statistikk, til å analysere dataene. Det er gjerne dette aspektet mange forbinder med kvantitativ forskning, men det er verdt å merke seg at dette aspektet ikke er viktigere enn de andre aspektene.

Den store fordelen ved bruk av kvantitative forskningsmetoder er at vi har mulighet til å samle inn store mengder data (Sale et al., 2002). Den store datamengden kan gi et veldig «bredt» bilde av det man undersøker, mens kvalitative metoder som observasjon og intervju, vil egne seg mye bedre om man ønsker å gå i dybden på noe. Dette får selvfølgelig følger for hvilke spørsmål man kan svare på gjennom kvantitative studier. Gjennom analyse av data fra kvantitative undersøkelser søker forskeren ofte å bekrefte eller avkrefte en hypotese som er beskrevet i utgangspunktet (Apuke, 2017). Vi kan dermed kalle kvantitativ metode en «bekreftende» forskningsmetode. Sentralt i analysearbeidet er å beskrive en status og å se etter sammenhenger og forskjeller.

Typiske forskningsdesign innenfor det kvantitative området er deskriptive design og eksperimentelle design. Min studie har et deskriptivt design, og det som kjennetegner denne typen studier er at de har et beskrivende formål. Man forsøker å beskrive virkeligheten uten å gi forklaringer (årsaks-sammenhenger). I deskriptive design vil analysene av dataene ofte gi svar på spørsmål av typen *hvem, hvor mange, hva, hvor mye og hvordan*. Eksperimentelle design forsøker derimot å forklare årsaks-sammenhenger. I slike design sammenligner man gjerne to ulike grupper, der den ene gruppen blir «utsatt» for en type manipulasjon. Eksperimentelle design kan for eksempel se på hvordan en spesiell type matematikkundervisning virker på elevenes læring i faget matematikk. I eksperimentelle design kan man bruke et randomisert (tilfeldig) eller et ikke-randomisert (ikke tilfeldig) utvalg. Ved bruk av ikke-randomiserte utvalg blir det kalt kvasi-eksperimentelle design.

Vanlige metoder innen kvantitativ forskning er spørreundersøkelser og tester, og i denne studien ble det brukt en test.

4.2 Test som forskningsmetode

Bruk av test er en vanlig og tradisjonsrik metode innenfor kvantitative studier. Allerede på slutten av 1800-tallet dukket de første testene opp, og i dag blir det brukt et enormt volum av tester. Gjennom tester kan vi måle ulike ting, for eksempel faglige ferdigheter og lesehastighet. Hambleton (2017, s. 235) identifiserte åtte ulike typer tester; norm-relaterte ferdighets- og evnetester, kriterie-relaterte ferdighets- og evnetester, klasseromstester, prestasjonstester, personlighetstester, holdningstester, interesseverdi-tester og spørreskjema. Mangfoldet av tester er stort, og listen kunne sikkert vært enda lengre.

Denne studien hadde et deskriptivt design, og data ble hovedsakelig samlet inn ved hjelp av en test i papirformat. Ved deskriptive design kan bruk av test være formålstjenlig. Resultatene på en test vil gi forskeren et «bilde» av virkeligheten, samtidig som testen potensielt vil gi forskeren store mengder data. I dag har vi for eksempel både nasjonale og internasjonale storskala-tester (eks. nasjonale prøver, PISA og TIMSS) som gir forskere mye data. En fordel ved bruk av tester, er at de i stor grad vil gi objektive data. Objektive data betyr at vi har en saklig, upartisk og upersonlig behandling av svarene som blir gitt. Det betyr at forskeren har liten innvirkning på tolkningen av dataene (Apuke, 2017). Graden av objektivitet vil avhenge av gjennomføringen av testen og de oppgaveformatene som blir brukt. En test som blir gjennomført elektronisk og vurdert automatisk, vil gi tilnærmet 100 % objektive data. En papirtest vil derimot åpne for en mer subjektiv vurdering, og spesielt gjelder dette om man benytter åpne oppgaveformater der elevsvar i større grad kan tolkes av den som skal vurdere. Ved en subjektiv vurdering vil forskerens relasjon til de som gjennomfører testen kunne ha betydning. Siden jeg brukte en test i papirformat i denne studien, måtte jeg prøve å gjøre min vurdering av elevsvarene så objektiv som mulig.

I mange sammenhenger blir det utviklet egne tester til forskning, og dette var også delvis tilfelle i min studie. Jeg satte sammen testen selv, men hadde ikke utviklet alle oppgavene selv. Ved utvikling av tester er det flere ting en forsker må være oppmerksom på (Cohen et al., 2018). I bunnen for en test ligger ofte klassisk testteori og/eller IRT, og dette fundamentet må det bli tatt hensyn til. Testen vil for eksempel kun gi en observert skåre, og kvantifiseringen av den egenskapen som skal bli målt er avgjørende. I tillegg må forskeren blant annet tenke på hensikten med testen, hvilken type test er formålstjenlig, testens innhold, oppgaveformat, vanskegrad, oppgavenes egnethet, omfang og testens validitet og reliabilitet. Alle disse aspektene måtte jeg også tenke gjennom når jeg satte sammen min test, og dette vil jeg beskrive nærmere i neste delkapittel.

4.2.1 Oppgavesettet

Jeg hadde satt sammen et oppgavesett som i utgangspunktet bestod av 23 diagnostiske oppgaver (Brekke, 2002) tilknyttet det matematiske emnet brøk, og hovedsakelig aspektene del-hel, forhold og mål/tallstørrelse. Hensikten med oppgavene var identifisere tegn på de fem misoppfatningene som er omtalt i teorikapitlet. Misoppfatningene jeg hadde valgt ut handler om en grunnleggende brøkforståelse, og jeg forventet derfor at de også ville være synlige på 5. trinn. Resultatet av misoppfatninger er ofte en konsekvent feiltenkning, og da oppstår feil som ikke er tilfeldige (Brekke, 2002). For å fange opp dette hadde jeg for fire av de fem misoppfatningene tatt med flere oppgaver. I teorien så vi også at bruk av varierte representasjonsformer er viktig i brøkundervisningen, og en slik variasjon prøvde jeg å fange opp i noen av oppgavene. I den videre beskrivelsen av oppgavene refererer jeg til oppgavenummer, og da er det greit å ha oppgavesettet tilgjengelig (vedlegg 1).

Oppgavene i settet var en miks av egenproduserte oppgaver og oppgaver hentet fra tidligere studier/prøver. Jeg hentet oppgaver fra prosjektene KIM og FRAMM[5], kartleggingsverktøyet Alle Teller (McIntosh, 2007), tidligere nasjonale prøver og Pantziara og Philippou (2012) sin studie. Hvilke oppgaver som er hentet fra hvor står i valideringsskjemaet for settet (vedlegg 3). De egenproduserte oppgavene er til en viss grad bygd på idéer fra kildene nevnt ovenfor. Ved å ta utgangspunkt i noen av de misoppfatningene og oppgavene som er omtalt i FRAMM-prosjektet ville jeg ha konkrete resultater å sammenligne med.

Oppgavene var stort sett kortsvarsoppgaver eller flervalgsoppgaver (multiple-choice). Dette betyr at elevene i de fleste tilfeller skulle avgi svar ved å skrive korte numeriske svar eller markere riktig svar. Det var noen unntak, der elevene skulle representere brøker gjennom egenproduserte figurer. På flere oppgaver hadde jeg lagt til forklaringsruter, der elevene skulle forklare hvorfor de hadde svart som de gjorde. Forklaringene i disse rutene var ikke avgjørende for om elevene fikk rett eller galt på oppgavene, men forklaringene kunne forhåpentligvis gi meg en dypere innsikt i elevenes oppfatninger om brøk.

Alle oppgavene kan karakteriseres som diagnostiske oppgaver (Brekke, 2002). Dette er oppgaver som kan brukes både før og etter en undervisningssekvens for å studere elevenes forståelse. Diagnostiske oppgaver er mer rettet mot å kartlegge begrepsforståelse enn å kontrollere elevenes ferdigheter i å gjennomføre prosedyrer (Utdanningsdirektoratet, 2015). Målet med slike oppgaver er å identifisere og framheve misoppfatninger, gi læreren

[5] https://www.matematikksenteret.no/eksamen-pr%C3%B8ver-og-kartlegging/fra-misoppfatning-til-mestring

informasjon om elevenes løsningsstrategier, utvikle eksisterende strategier og måle om undervisningen har hjulpet elevene ut av aktuelle misoppfatninger (Brekke, 2002). Siden settet mitt bestod av diagnostiske oppgaver, vil jeg kalle oppgavesettet en diagnostisk prøve. Slike prøver gir informasjon om elevers sterke og svake sider, og bør være utgangspunkt for videre samtaler med elevene som kan gi en dypere innsikt i elevenes forståelse og tenking.

Jeg hadde i utgangspunktet tenkt at hver oppgave skulle fokusere på én misoppfatning. Oppgave 1 skulle for eksempel fokusere på misoppfatningen «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse». Samtidig valgte jeg helt bevisst å fokusere på misoppfatningene i ulik grad. Jeg hadde for eksempel plukket ut bare én oppgave som skulle avdekke misoppfatningen «brøkstrek er lik komma». Dette var oppgave 17, der elevene skulle gjøre om fra brøken $\frac{1}{4}$ til desimaltall. Her ville elevsvarene 1,4 og 4,1 være tegn på den aktuelle misoppfatningen. Jeg hadde valgt kun én oppgave knyttet til denne misoppfatningen, fordi elevene på 5. trinn ifølge læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2013) har liten erfaring med brøk og desimaltall og sammenhengen mellom disse.

Jeg hadde på forhånd kategorisert oppgave 1, 3, 6, 7 og 13 til misoppfatningen «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse». Det var tanken at alle disse oppgavene skulle avdekke om elevene var bevisst på at likedeling er en forutsetning for brøk. I oppgave 6 og 13 ville jeg se om elevene selv delte inn figurer i like deler, når de skulle representere en brøk. I de andre oppgavene knyttet til denne misoppfatningen skulle elevene ta stilling til brøkdel i gitte figurer. En typisk oppgave her er oppgave 1 (figur 13). I oppgaven skulle elevene finne hvor stor del av det colombianske flagget som er rødt, og elever som ikke er bevisst på kravet om likedeling vil svare $\frac{1}{3}$. De tar ikke hensyn til at flaggets deler har ulik størrelse.

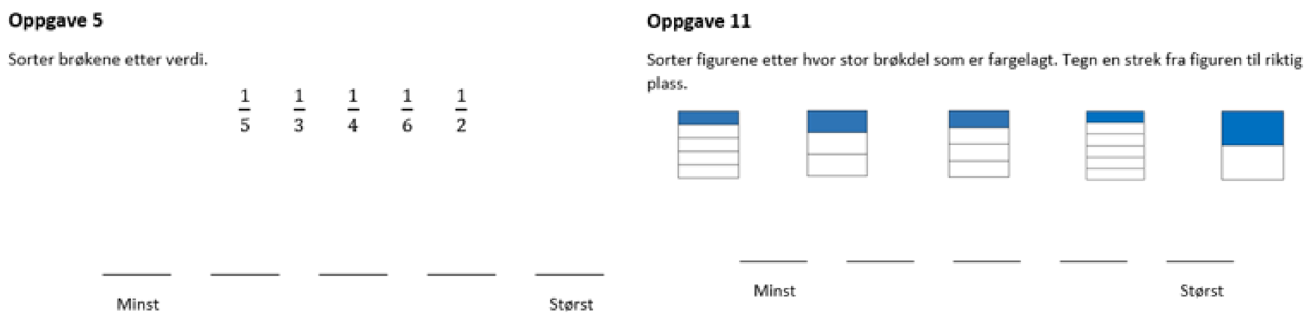
Oppgave 1

Hvor stor brøkdel av flagget til Colombia er rødt?

Svar: $\frac{\square}{\square}$

Figur 13 Oppgave 1 i studiens oppgavesett.

Oppgave 2, 5, 9, 11, 15, 16, 18, 20 og 21 hadde jeg kategorisert til misoppfatningen «jo større nevner (eller teller), jo større brøk», men disse oppgavene målte ulike faglige aspekter. I tilknytning til denne misoppfatningen ønsket jeg i utgangspunktet å se om representasjonsform hadde noen betydning. Oppgave 2, 5, 11, 15, 18 og 20 er alle oppgaver hvor elevene skal ta stilling til brøkers verdi, men i oppgavene er brøkene representert på tre ulike måter; symbol, areal og diskret. Figur 14 viser et eksempel på dette. I både oppgave 5 og 11 skal elevene sortere brøker etter størrelse, men det er to ulike representasjonsformer som er benyttet.



Figur 14 Oppgave 5 og 11 i studiens oppgavesett.

Oppgave 9, 16 og 21 er også oppgaver hvor elevene indirekte må ta stilling til brøkers verdi, men her er i tillegg begreper som halvering og dobling sentrale.

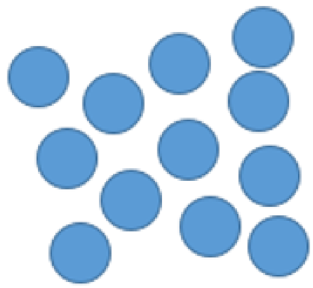
Til misoppfatningen «differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til en brøk» hadde jeg kategorisert oppgave 4, 8, 10, 14 og 22. Her var jeg klar over at elevene i oppgave 10 og 14 kunne vise tegn på ulike misoppfatninger avhengig av hvilke feilsvar de ga. Oppgave 8 illustrerer hva jeg ønsket å få frem i disse oppgavene. Her skulle elevene finne ut hvor mange tolvdeler som tilsvarer $\frac{1}{3}$, og elever med tegn til «gap thinking» vil her svare $\frac{10}{12}$.

Oppgave 4 og 8 inneholdt brøker representert med symbol, mens brøkene var representert gjennom arealmodell i de andre tre oppgavene.

Den siste misoppfatningen «teller (eller nevner) er et isolert tall» ville jeg avdekke gjennom oppgave 12, 19 og 23. Sentralt her er at elevene med tegn på denne misoppfatningen ikke tar hensyn til hele brøken og helheten, men at de istedenfor velger å fokusere kun på teller eller nevner. I oppgave 19 (figur 15) vil elever med tegn på denne misoppfatningen sette ring rundt én eller tre av de gitte prikkene, når de skal sette ring rundt $\frac{1}{3}$ av de 12 prikkene.

Oppgave 19

Sett ring rundt $\frac{1}{3}$ av prikkene nedenfor.



Figur 15 Oppgave 19 i studiens oppgavesett.

4.2.2 Oppgavesettets validitet

Som nevnt i teorikapitlet handler validitet om å sikre at man måler det man har tenkt å måle, og i teorien omtalte jeg fire typer validitet Cohen (2018) trakk frem som relevante for tester; konstruktvaliditet, innholdsvaliditet, kriterie-relatert validitet og kulturell validitet.

For å ivareta konstruktvaliditet i mitt oppgavesett, har jeg i stor grad brukt oppgaver som er brukt til å avdekke de samme misoppfatningene i andre studier og prøver. Dette er oppgaver som tidligere har fungert godt psykometrisk (f.eks. diskriminering), de er prøvd ut med elever og er til en viss grad også validert av lærere. På nasjonale prøver er det for eksempel vanlig at eksterne lærergrupper går innholdsmessig god for oppgavene som brukes. Da ser de både på kontekstene som blir benyttet og det matematiske innholdet. De oppgavene som er egenproduserte er ofte bygd på idéer fra tidligere brukte oppgaver. Jeg har for eksempel laget nye varianter, der jeg ønsker å måle det samme gjennom bruk av andre representasjoner.

I tilknytning til innholdsvaliditet har jeg prøvd å være veldig bevisst på hva jeg ønsker å måle gjennom mitt oppgavesett. Brøk er et stort og komplekst matematiske emne, og samtidig er det et stort mangfold av misoppfatninger knyttet til emnet. Jeg har plukket ut fem misoppfatninger som jeg ønsker å avdekke gjennom mitt oppgavesett, og her ligger det en klar begrensning. Min test måler ikke hele brøkbegrepet og ikke alle misoppfatninger knyttet til brøk. Som tidligere nevnt er heller ikke de fem misoppfatningene vektlagt i like stor grad i oppgavesettet. Uansett vil resultatene fra oppgavene gi en pekepinn på status. Gjennom valideringsskjemaet mitt (vedlegg 3), der alle oppgaver er beskrevet innholdsmessig og kategorisert i forhold til de aktuelle misoppfatningene, viser jeg at oppgavene samlet måler misoppfatningene på en tilfredsstillende og representativ måte.

Gjennom bruk av oppgaver fra andre studier og prøver har jeg også et godt utgangspunkt for å sikre kriterie-relatert validitet. Selv om de andre studiene ikke har målt med eksakt samme utvalg som i min studie, vil det være mulig å se om det er en viss korrelasjon mellom resultater på enkeltoppgaver.

For å sikre god validitet i oppgavesettet mitt ble både utvalg av oppgaver og kategorisering diskutert med veileder og en medstudent som skrev om samme tema. I tillegg sikrer den gjennomførte piloteringen validitet. Ved pilotering får jeg for eksempel sjekket at språket i oppgavene er greit. Vi er da inne på det Cohen et al. (2018) omtaler som kulturell validitet.

4.3 Intervju som forskningsmetode

Selv om denne studien først og fremst er en kvantitativ studie valgte jeg å bruke kvalitativt forskningsintervju som en støttende metode. Jeg var i utgangspunktet usikker på om jeg skulle bruke elevintervju eller ikke. Håpet var imidlertid at intervjuene kunne gi meg en dypere innsikt i elevenes oppfatninger om brøk, og jeg valgte derfor å bruke intervju i samspill med den kvantitative forskningsmetoden. En slik måte å bruke intervju på, er en av tre måter som blir omtalt av Cohen et al. (2018).

Ifølge Kvale (1996) er forskningsintervjuet en konversasjon med en struktur og hensikt. Det er ikke en konversasjon mellom likeverdige parter. Forskeren (intervjueren) definerer og kontrollerer situasjonen. Han introduserer et tema for intervjuet og følger kritisk opp svar gitt av intervjuobjektet. I forskningsintervjuet foregår det en utveksling av synspunkter mellom to personer, og det blir et sted for konstruksjon av kunnskap. Det er intervjueren som må skape mening i det som blir sagt underveis i et intervju, og jeg vil derfor påstå at kunnskap blir konstruert gjennom intervjuerens tolkninger av det som blir sagt. Kvale (1996) omtaler forskningsintervjuet som en intersubjektiv interaksjon, og dette tolker jeg som at det i et intervju er to subjektive parter som begge kan påvirke intervjuet. Vi kan se på intervjueren som en «reisende» som gjennom en vandring skal få innsikt i intervjuobjektets livsverden. Livsverden kan være intervjuobjektets oppfatninger og meninger om det temaet som blir undersøkt.

Jeg ønsket gjennom intervjuene å få en dypere innsikt i oppfatningene om brøk hos elever som i den kvantitative undersøkelsen viste tegn på misoppfatninger. I intervjuene var det viktig at elevenes svar og resonnement dannet grunnlag for mine oppfølgingsspørsmål, og jeg valgte derfor å bruke det Kvale (1996) kaller et semi-strukturert intervju. Et semi-strukturert intervju er verken en åpen konversasjon eller en strengt strukturert konversasjon. I forkant av mine intervju hadde jeg utarbeidet en intervjuguide (vedlegg 5) med et klart fokus på tre misoppfatninger knyttet til brøk. Jeg valgte å fokusere på misoppfatningene; (1) «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse», (2) «jo større nevner (eller teller), jo større brøk» og (3) «differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken». Dette var de misoppfatningene jeg hadde knyttet flest oppgaver til i oppgavesettet mitt. Til hver av misoppfatningene hadde jeg skrevet forslag til spørsmål, men jeg hadde ikke tenkt å forholde meg strengt til disse. Jeg ville ha mulighet til å velge fritt blant disse spørsmålene (ingen fast rekkefølge), og samtidig ha mulighet til å omformulere og formulere nye spørsmål underveis.

Det viktige for meg var å respondere på intervjuobjektenes svar og «grave» meg ned i deres oppfatninger om brøk. Som intervjuer ønsker man intervjuobjekter som i størst mulig grad svarer utfyllende, men samtidig er også intervjuerens rolle viktig. Kvale (1996, s. 13) skriver at «Interview research is a craft that, if well carried out, can become an art.». Forskningsintervjuet kan altså bli en suksess, men det krever at intervjueren utfører det på en god måte. Dette innebærer blant annet å stille de riktige spørsmålene, og å påvirke intervjuobjektets svar i så liten grad som mulig.

4.4 Datainnsamlingsprosessen

4.4.1 Utvalg kvantitativ metode

Internasjonalt, og spesielt i USA, er det forsket mye på elevers forståelse av brøk, og flertallet av disse studiene bruker utvalg med elever i alderen 10–15 år (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Clarke & Roche, 2009; Hansen et al., 2017; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Torbeyns, Schneider, Xin & Siegler, 2015). Ifølge læreplanen for matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2013) får norske elever sitt første møte med brøk på 3.–4. trinn, men det er først på mellomtrinnet elevene skal jobbe omfattende med brøkbegrepet. Når jeg da skulle se på misoppfatninger knyttet til brøk, fant jeg det naturlig å se på hvor utbredt misoppfatningene er og hvordan denne utbredelsen utvikler seg blant norske elever på mellomtrinnet.

Etter å ha landet på elever fra 5. til 7. trinn som deltakere i studien, var spørsmålet hvor mange elever jeg trengte fra hvert trinn. I forskning er reliabilitet og validitet sentrale begreper, og ved kvantitative undersøkelser er dette sterkt koblet til størrelsen på utvalget som blir brukt. Standardfeil er som nevnt tidligere, variansen dividert med kvadratroten av antall observasjoner. Målefeilen vil derfor bli mindre, dersom utvalget er stort. Et stort utvalg vil også føre til at resultatene i større grad kan generaliseres. Da er vi inne på den eksterne validiteten (Cohen et al., 2018, s. 254). Etter anbefalinger fra eksperter hos EKVA[6] og CEMO[7] endte jeg opp med at 250 respondenter på hvert trinn ville være et tilstrekkelig antall, dersom jeg ønsket å se på utvikling mellom trinnene.

Utfordringen ble derfor å skaffe et representativt utvalg på 750 elever, fordelt på tre trinn. For å gjøre utvalget så representativt som mulig ønsket jeg å finne respondenter fra små og store skoler, ulike skoleslag (1.–7. trinn og 1.–10. trinn) og skoler fra både by og bygd. Jeg anså det som viktig å være til stede ved datainnsamlingen for å sikre høyest mulig deltakelse og at gjennomføringen ble gjort så likt som mulig for alle deltakerne. Dette begrenset mulighetene noe når jeg skulle finne deltakere. Alle skoler ville for eksempel bli i Trøndelags-området. I min jakt på skoler brukte jeg kjenninger rundt på skolene, og de aller fleste var positive til å delta. En slik måte å velge utvalget på kan ha likhetstrekk med «convenience sampling» (Battaglia, 2008), men samtidig hadde jeg hele tiden et ønske om å gjøre utvalget så representativt som mulig. Dette ønsket påvirket hvem jeg spurte om å delta. Til slutt endte jeg opp med respondenter på ni ulike skoler, og disse skolene er beskrevet i tabell 2. Til sammen endte jeg opp med 739 respondenter; 245 på 5. trinn, 238 på 6. trinn og 256 på 7. trinn.

Tabell 2 Oversikt over utvalget i studien.

Skole nr.	Skoleslag	Størrelse	Geografi	5. trinn	6. trinn	7. trinn
1	1.–7. trinn	Stor	By		x	x
2	1.–7. trinn	Middels/stor	By/bygd	x	x	x
3	1.–10. trinn	Middels/stor	By	x	x	x
4	1.–7. trinn	Middels	By	x	x	x
5	1.–10. trinn	Middels	Bygd	x	x	x
6	1.–10. trinn	Stor	By	x		
7	1.–7. trinn	Liten/middels	Bygd	x	x	x
8	1.–10. trinn	Liten	Bygd		x	x
9	1.–7. trinn	Liten	Bygd	x	x	x

Det var flere grunner til at jeg ønsket å være til stede ved datainnsamlingen. Å sikre høyest mulig deltakelse og en lik gjennomføring er allerede nevnt. Samtidig ville jeg underveis i datainnsamlingen velge ut aktuelle kandidater til intervju.

[6] https://www.uv.uio.no/ils/om/organisasjon/ekva/
[7] https://www.uv.uio.no/cemo/

4.4.2 Utvalg kvalitativ metode

De elevene som jeg valgte ut til intervju ble på en måte mitt andre utvalg. I intervjuet ønsket jeg å få et dypere innblikk i elevenes oppfatninger knyttet til brøk, og jeg valgte derfor ut elever som i sin besvarelse av oppgavesettet viste tegn på én eller flere av de tre misoppfatningene jeg fokuserte på i intervjuguiden. Målet var å få intervjuet minimum én elev for hver av de tre misoppfatningene. Siden alle besvarelser i utgangspunktet var anonyme, måtte jeg være til stede under gjennomføringen for å fange opp elevene der og da. Jeg valgte i utgangspunktet ut tre elever, men gjennomføringen av de tre første intervjuene gjorde at jeg senere valgte ut en elev til. Alle elevene som ble intervjuet var gutter på 5. trinn. Det som var avgjørende for mitt valg av elever var svarene deres i oppgavesettet, og homogeniteten med tanke på kjønn og trinn var utilsiktet. De fire guttene var fra to ulike skoler.

4.4.3 Pilotering av oppgavesettet

Før jeg gikk i gang med datainnsamlingen piloterte jeg oppgavesettet. I piloteringen deltok 14 elever på 5. trinn. Siden mange av oppgavene i settet var hentet fra andre undersøkelser og tester, var hovedhensikten med piloteringen å sjekke at oppgavene var tilstrekkelig tilpasset norsk kontekst i form, innhold og vanskegrad. Det var derfor naturlig å gjennomføre piloten med elever fra 5. trinn, siden de i utgangspunktet skal ha minst erfaring med emnet brøk. I tillegg til å sjekke vanskegrad, ville piloteringen gi meg en tilbakemelding på formuleringer og lignende som ville være utfordrende for elevene.

Resultatene fra piloteringen viste at vanskegraden på oppgavene var godt tilpasset elevene på 5. trinn. Det var ingen av elevene som hadde alt korrekt og det var heller ingen elever som hadde alt galt. Elevene viste en fin spredning i forhold til hvor mange oppgaver de klarte. Dette ga meg en bekreftelse på at testens innhold var «undervist» for elever på 5. trinn, noe som var viktig i forhold til innholdsvaliditet. Gjennom å være til stede på piloteringen fikk jeg et godt innblikk i hva elevene spurte om, og på bakgrunn av dette gjorde jeg noen små språklige omformuleringer til det endelige oppgavesettet. Omformuleringene hadde til hensikt å gjøre oppgaveteksten tydeligere. I tillegg oppdaget jeg gjennom piloteringen at det var to oppgaver som var identiske i det piloterte settet. Her ble den ene oppgaven erstattet med en annen oppgave. Det ble også justert i nummereringen av oppgavene.

4.4.4 Gjennomføring av kvantitativ datainnsamling

Datainnsamlingen ble gjennomført ute på de ulike skolene, og som tidligere nevnt var jeg til stede ved all innsamling. Ved alle skoler ble det gjort avtaler med skoleledelsen og de respektive lærerne, og datainnsamlingen ble hovedsakelig gjennomført i perioden oktober – desember. Under datainnsamlingen brukte jeg tre versjoner av oppgavesettet. Versjon 1 og 2 inneholdt de samme oppgavene, men i noe ulik rekkefølge. Jeg byttet da stort sett plassering på oppgaver som jeg i utgangspunktet hadde tenkt skulle fokusere på samme misoppfatning. Dette ble gjort for å sjekke om oppgavenes rekkefølge hadde noen betydning. I versjon 3 var den opprinnelige oppgave 3 erstattet med en annen variant, fordi analyser underveis kunne tyde på at oppgaven ikke fungerte optimalt. Analysene viste blant annet at oppgavens diskriminering var for dårlig. Alle lærere som stilte sine elever til rådighet ble forespeilet at gjennomføringen ville ta maksimum 60 minutter, og dette klarte jeg fint å holde meg innenfor. De raskeste elevene var ferdig i løpet av 15 – 20 minutter, og de aller fleste hadde besvart oppgavesettet innen 45 minutter.

I alle elevgrupper hvor jeg gjennomførte datainnsamlingen startet jeg med å informere elevene først. I informasjonen fortalte jeg om studiens innhold og gikk gjennom de ulike oppgaveformatene i settet. Vi snakket også om hva det ville si å forklare svaret sitt. For å ufarliggjøre gjennomføringen for elevene snakket jeg med de om hva anonymitet innebærer. Det viktige for meg var at alle gjorde så godt de kunne, og jeg påpekte at blanke svar ville være verdiløse for min del. I analysene var det en lav andel ubesvarte oppgaver. Det tolker jeg som et tegn på at praten med elevene i forkant, hadde positiv effekt på elevenes holdning til gjennomføringen og de elevsvarene jeg fikk.

Mens elevene besvarte oppgavesettet gikk jeg rundt i klasserommet/arealet og svarte på spørsmål, hvis det var ord eller formuleringer elevene ikke forstod. Det vanligste spørsmålet jeg fikk var hva ordet «skraver» betydde. Når elevene mente de var ferdige med sin besvarelse, rakk de opp hånden, og jeg så gjennom besvarelsen før de leverte. På denne måten sikret jeg også færrest mulig blanke svar. Om jeg så at elever åpenbart hadde hoppet over oppgaver de kunne svart på, fikk de beskjed om å se nærmere på disse oppgavene. I tilknytning til gjennomføringen av den kvantitative datainnsamlingen, forberedte jeg også den kvalitative datainnsamlingen.

4.4.5 Gjennomføring av kvalitativ datainnsamling

I forkant av den kvantitative datainnsamlingen informerte jeg elevene om at jeg kanskje ville velge ut noen elever til et lite intervju i etterkant. Jeg sa at jeg ville plukke ut elever med interessante svar. Aktuelle elever for intervju var elever der foreldre/foresatte på forhånd hadde gitt samtykke til deltakelse. Etter hvert som elevene leverte sitt besvarte oppgavesett, ble enkelte elever med feilsvar som kunne tyde på misoppfatninger, spurt om de kunne bli med på et lite intervju.

De fire guttene som ble plukket ut til intervju var fra to ulike skoler. Intervjuet med de tre første guttene hadde mer preg av en uformell samtale. Guttene hadde i sin besvarelse vist tegn på ulike misoppfatninger, og jeg valgte å ha fokus på én misoppfatning hos hver gutt. Intervjuet/samtalen ble gjennomført i en sofakrok utenfor klasserommet, og jeg valgte å ta notater av det som ble sagt i intervjuet. Jeg forholdt meg til intervjuguiden, men opplevde at intervjuet raskt førte til at guttene havnet i kognitive konflikter. De oppdaget at det de hadde svart ikke ga mening, og endret derfor sine svar. På grunn av dette ble intervjuene mindre informative enn ønskelig. Den siste gutten jeg intervjuet var fra en annen skole. Her ble intervjuet gjennomført på et grupperom, og jeg tok lydopptak. Denne gutten hadde vist tegn til misoppfatningen «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse». I dette intervjuet fikk jeg gått mer i dybden på den faglige forståelsen, og jeg opplevde ikke at gutten kom i en kognitiv konflikt før jeg fremprovoserte den. Dette intervjuet ble lengre og mer informativt.

4.5 Bearbeiding og analyse av datamaterialet

Resultatet av datainnsamlingen min var 739 besvarte oppgavesett, en lydfil med intervju og notater fra tre intervjuer. I denne delen av metodekapitlet vil jeg beskrive hvordan jeg bearbeidet og analyserte de ulike dataene.

4.5.1 Bearbeiding og analyse av kvantitative data

Alle besvarte oppgavesett utgjorde grunnlaget for mine kvantitative data. Elevene var som tidligere nevnt anonyme i undersøkelsen. For å kunne identifisere hver enkelt besvarelse i datamaterialet, skrev jeg et ID-nummer på hvert enkelt hefte. Dette ID-nummeret ga meg mulighet til å koble interessante svar og koder med riktig i besvarelse i analysen. I perioden med datainnsamling ble alle besvarelser kontinuerlig punchet inn i en SPSS-fil. Det var i denne prosessen alle besvarelser ble omformet til numeriske data. For alle elever ble følgende data punchet; id, trinn, kjønn, skole, sett, poeng (riktig/galt) og svarkode på alle oppgaver. Det ble gitt 0 eller 1 poeng på alle oppgaver (dikotome data). Svarkodene skulle gi meg en indikasjon på hvilket svar hver enkelt elev ga, og underveis i prosessen med punching ble det utarbeidet en kodeoversikt. Kodeoversikten (vedlegg 2) var hele veien et dynamisk dokument, slik at jeg kunne fange opp alle interessante elevsvar som dukket opp. For å ha kontinuerlig oversikt over hvordan oppgavene fungerte kjørte jeg underveisanalyser på løsningsprosent og diskriminering i SPSS (IBM Corporation, 2017). Når jeg var ferdig med punchingen hadde jeg tre SPSS-filer; en fil med versjon 1+2+3, en fil med versjon 2 og en fil med versjon 3.

Etter omtrent 500 elever og etter at alle besvarelser var ferdigpunchet kjørte jeg IRT-analyser i Xcalibre (Assessment Systems Corporation, 2014). Grunnlaget for datafilen i IRT-analysen var poeng-kolonnene fra SPSS. I tillegg til datafilen ble det utarbeidet en kontrollfil til disse analysene. Kontrollfilen inneholdt en oversikt over alle oppgaver, oppgaveformat og poenggiving. IRT-analysen ga meg a-verdi (diskriminering) og b-verdi (vanskegrad) for alle oppgaver og mer overordnet statistikk for hele oppgavesettet. Jeg fikk også ut dyktighetsmål på ferdigheten (theta) til alle de 739 respondentene. Theta-verdien og råskåre ble kopiert over til SPSS-filen med alle settene.

SPSS-filene ble også kopiert over til Excel (Microsoft Corporation, 2016), både hele datasettet og enkeltkolonner. Grunnen til dette var at Excel ga meg bedre muligheter til sortere og filtrere dataene ut fra for eksempel spesifikke svarkoder, noe som ville være til stor hjelp når jeg skulle se nærmere på de ulike misoppfatningene.

Med utgangspunkt i de ulike datafilene gjorde jeg analyser som kunne hjelpe meg med å svare på forskningsspørsmålene. I dette arbeidet brukte jeg hele veien en miks av analyser utført i SPSS (klassisk testteori) og Xcalibre (IRT). Analysene og resultatene er beskrevet i kapittel 5.

4.5.2 Bearbeiding og analyse av kvalitative data

Grunnlaget for mine kvalitative data var notater fra de tre første intervjuene og en lydfil fra det fjerde intervjuet. Med utgangspunkt i lydfilen ble det fjerde intervjuet transkribert. Dette er en prosess, der man overfører tekst fra talespråk til skriftspråk. Transkripsjon av intervju fra muntlig til skriftlig form er en omstrukturering av intervjusamtalene, slik at de egner seg for nærmere analyse, og kan sees som en første analyseprosess (Kvale, 1996). I min transkripsjon «oversatte» jeg fra dialekt til bokmål, men forsøkte ellers å være så tro som mulig til det som ble sagt i lydfilen.

Notatene og det transkriberte intervjuet brukte jeg videre til å lete etter utsagn som kunne illustrere elevenes oppfatninger om brøk på en god måte.

4.6 Etiske betraktninger

Alle forskere må forholde seg til forskningsetiske retningslinjer (NESH, 2016). Disse retningslinjene innebærer at det er en del etiske forholdsregler som må bli tatt hensyn til under planlegging og gjennomføring av et forskningsprosjekt. Forholdsreglene skal blant annet ivareta personvern og vitenskapelig redelighet. Alle forskningsprosjekt som samler inn data som kan kobles tilbake til enkeltpersoner, må søke om godkjenning fra Norsk senter for forskningsdata (NSD)[8]. Siden jeg valgte å bruke lydopptak i min studie, søkte jeg om godkjenning fra NSD. Ingen av mine elevintervju ble gjennomført før denne godkjenningen var på plass.

I de forskningsetiske retningslinjene er ansvaret for å informere tydelig (NESH, 2016, s. 13-14). Jeg har derfor vært bevisst på å informere forskningsdeltakerne, deres foreldre/foresatte, lærere og skoleledere om innholdet i og målet med mitt prosjekt. I forkant av all datainnsamling hadde jeg fått samtykke fra deltakernes foreldre/foresatte. Jeg hadde utarbeidet et samtykkeskjema (vedlegg 6) med informasjon om prosjektet, der de kunne gi samtykke til å svare på oppgavesettet og delta i mulig intervju. Svar på samtykkeskjema ble gitt på papir eller elektronisk via digitale meldebøker. Jeg har tidligere beskrevet hva jeg informerte deltakerne om før de skulle besvare oppgavesettet. Ved utvelgelse av deltakere til intervju var jeg veldig bevisst på at det forelå samtykke fra foreldre/foresatte

Etter gjennomføring av datainnsamling i et klasserom, var eneste informasjon jeg hadde på besvarelsene skole, trinn og kjønn. Det ville derfor ikke være mulig å koble besvarelsene til enkeltelever. I behandlingen av datamaterialet har jeg kontinuerlig satt et ID-nummer på elevenes besvarelser. Hensikten med dette var å kunne koble interessante svar i dataene med riktig elevhefte på et senere tidspunkt. Jeg har ikke hatt mulighet til å kunne koble dette ID-nummeret med elevenes navn. For å ivareta kravet om konfidensialitet har jeg også oppbevart alle besvarelser og datafiler atskilt. Enkelte datafiler har også vært beskyttet med passord. Lydfil fra intervju ble ført over til egnet lagringssted og slettet fra lydopptaker så raskt som mulig etter intervju. Alle data jeg sitter på i dette forskningsprosjektet er anonymisert i henhold til NSD sine retningslinjer.

[8] Hjemmeside: https://nsd.no/

5 Analyse

I denne delen av oppgaven vil jeg gjøre rede for min analyse av datamaterialet. Jeg vil starte med å presentere en overordnet analyse av oppgavesettet og elevenes prestasjoner. Etter dette vil jeg se på analyser knyttet til det første av mine forskningsspørsmål; *Hvor utbredt er tegn på misoppfatninger tilknyttet brøk hos et utvalg elever på mellomtrinnet?* For hver misoppfatning presentert i teoridelen vil jeg se på resultater og elevsvar på enkeltoppgaver, og i tillegg vil jeg se på sammenhengen mellom oppgaver som i utgangspunktet var ment å avdekke samme misoppfatning. Sammenhengen mellom oppgaver blir viktig, siden misoppfatninger ofte resulterer i en konsekvent feiltenkning (Brekke, 2002). Elevene vil da gjøre systematiske feil. Jeg vil også gjøre rede for faktoranalysen som ble brukt for å bestemme hvilke oppgaver som var relevante for de ulike misoppfatningene. I siste del av analysen vil jeg se om det er mulig å finne sammenhenger mellom eller noe systematikk for misoppfatningene. Her vil jeg blant annet se på om det er mulig å knytte de ulike misoppfatningene til spesielle elevgrupper, og om det er forskjeller i dyktighet mellom elever som viser tegn på ulike misoppfatninger. Gjennom hele analysedelen er det referert til oppgavenummer, og jeg anbefaler derfor å ha oppgavesettet tilgjengelig (vedlegg 1). Det er mulig å finne utfyllende analyseresultater for enkeltoppgaver i teknisk rapport (vedlegg 4).

5.1 Overordnet analyse av oppgavesettet og elevenes prestasjoner

Før jeg går inn på analyser knyttet til mine forskningsspørsmål, ønsker jeg i dette delkapitlet å gi en overordnet analyse av oppgavesettet som ble brukt i studien og elevenes prestasjoner. I analysene vil jeg blant annet se på oppgavenes vanskegrad, settets reliabilitet og elevenes samlede prestasjoner. Hensikten med denne delen av analysene er å si noe om hvordan oppgavesettet som helhet har fungert.

Til sammen er det 739 elever på 5., 6. og 7. trinn som har gjennomført oppgavesettet. I tabell 3 ser vi hvordan disse elevene er fordelt på trinn og de ulike versjonene av oppgavesettet. I tabellen ser vi også gjennomsnittlig råskåre på trinn og versjon. Råskåre er maksimalt 23 poeng; 1 poeng per oppgave.

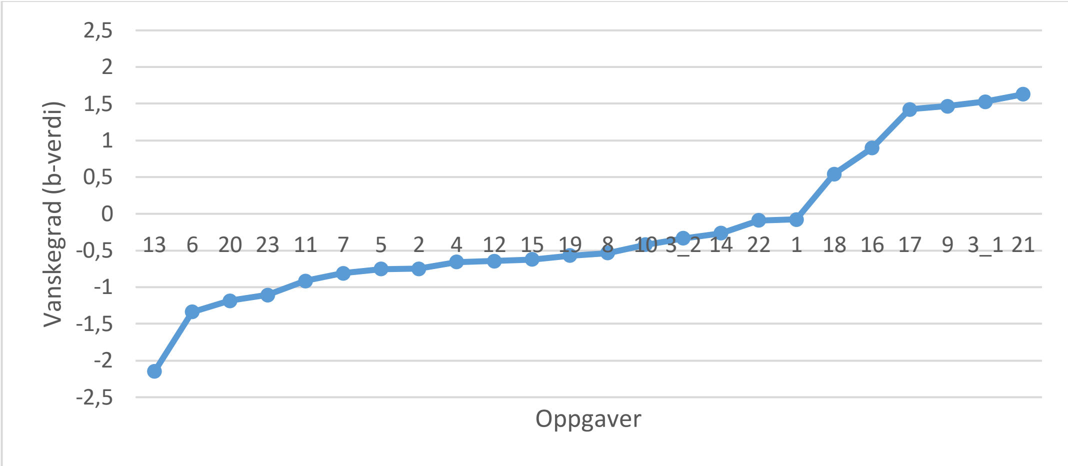
Ut fra resultatene i tabell 3 ser vi at de ulike versjonene av oppgavesettet oppfører seg relativt likt ovenfor elevene. Det er ikke store forskjeller mellom versjonene om vi ser på alle elevene samlet. Elevene kommer samlet ut med lavest gjennomsnittlig råskåre i versjon 2, men forklaringen på dette kan være at andelen elever fra 6. trinn er mye lavere for denne versjonen. Resultatene i tabell 3 tolker jeg som at oppgavenes plassering i settet ikke har hatt avgjørende betydning i denne studien. I videre analyser vil jeg på bakgrunn av dette se på de ulike versjonene av oppgavesettet som en helhet.

Tabell 3 Oversikt over deltakende elever og gjennomsnittlig råskåre fordelt på trinn og ulike versjoner av oppgavesettet.

		Versjon 1		Versjon 2		Versjon 3		Totalt	
		Ant. elever	**Snitt råskåre**	**Ant. elever**	**Snitt råskåre**	**Ant. elever**	**Snitt råskåre**	**Ant. elever**	**Snitt råskåre**
Trinn	**5.**	107	11,29	86	10,19	52	10,12	245	10,65
	6.	133	13,44	41	11,80	64	14,36	238	13,40
	7.	124	15,46	89	13,98	43	16,30	256	15,09
Totalt		364	13,49	216	12,06	159	13,50	739	13,07

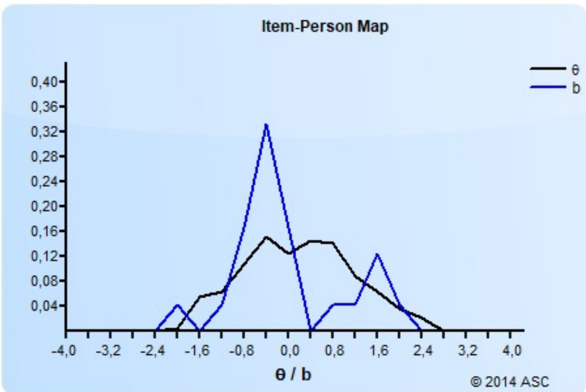
Ved bruk av tester i forskning er det et krav at testen skal ha en akseptabel reliabilitet. Dette handler om testens troverdighet, i hvilken grad kan vi stole på resultatene. Siden oppgave 3 er byttet ut med en annen oppgave i versjon 3, var det problematisk å kjøre en reliabilitetsanalyse for alle tre versjonene samlet. Jeg valgte derfor å kjøre en reliabilitetsanalyse basert på de 22 oppgave som var felles for oppgavesettene, og da ble Cronbach's Alpha lik 0,89. Fra teorien husker vi at Cronbach's Alpha var et mål på indre konsistens, og en koeffisient lik 0,89 betyr at det vil være 89 % samsvar mellom resultatene ved flere gjennomføringer med samme utvalg. Et annet mål på reliabilitet er standardfeilen, og denne verdien er lav i min studie. I tabell 3 så vi at gjennomsnittlig råskåre for alle elevene i studien var 13,07, og standardfeilen (se tabell 4) indikerer at det er 95 % sannsynlighet for at den sanne verdien ligger mellom 12,66 og 13,48. Verdiene for Cronbach's Alpha og standardfeil indikerer at resultatene i min studie har god reliabilitet.

I tillegg til at oppgavesettet bør ha høy reliabilitet, bør det også ha en passende vanskegrad. I denne studie var det for eksempel viktig at vanskegraden var grei for elever på 5. trinn, selv om dette ville medføre at settet hadde forholdsvis lav vanskegrad for elevene på 6. og 7. trinn. I figur 16 ser vi oppgavenes vanskegrad (b-verdi) hentet fra IRT-analyse. Oppgave 13 har lavest vanskegrad, mens oppgave 21 har høyest vanskegrad. b-verdiene varierer fra -2,151 til 1,628, og gjennomsnittlig b-verdi for settet ble -0,239. Siden b-verdi lik 0 tilsvarer middels (midtpunktet) vanskegrad, indikerer verdien -0,239 at oppgavene i snitt har en vanskegrad litt under middels. Vi ser av figur 16 at et stort flertall av oppgavene ligger i området fra -1,5 til 0.

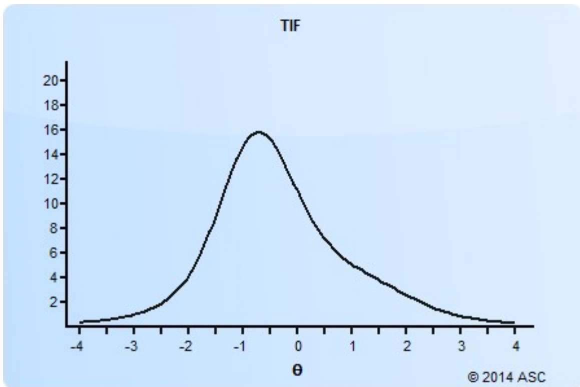


Figur 16 Oppgavenes vanskegrad (b-verdi) fra IRT-analyse.

Den blå kurven i figur 17 indikerer at hovedvekten av oppgavene har en vanskegrad lavere enn 0, mens den svarte kurven viser at elevenes dyktighet er fordelt fra -2,0 til 2,8. Siden de fleste oppgavene har en vanskegrad mellom -1,5 og 0, vil også oppgavesettet gi mest informasjon om elever med dyktighet i dette intervallet. Det ser vi av testinformasjons-kurven i figur 18. Settet gir mest informasjon om elever med dyktighet -0,700.



Figur 17 Item-person map fra IRT-analyse.



Figur 18 Testinformasjons-kurve fra IRT-analyse.

I tillegg til at oppgavene skal ha en passende vanskegrad, er det også viktig at oppgavene har god diskriminering. Det betyr at oppgavene skal skille godt mellom elever med lav og høy dyktighet. Et mål på oppgavenes diskriminering er a-verdien fra IRT-analysen, og oppgavesettet mitt kommer ut med en gjennomsnittlig a-verdi lik 0,996. Det betyr at oppgavene samlet diskriminerer godt mellom elever med lav og høy dyktighet. I praksis betyr det at elever med lav dyktighet vil ha mye mindre sannsynlighet for å svare korrekt på oppgavene enn elever med høy dyktighet. Oppgavenes a-verdier varierer fra 0,271 til 1,645.

Oppgave 3 i versjon 1 og 2 er oppgaven med lavest a-verdi, og det er flere tegn på at denne oppgaven ikke diskriminerte godt nok. For denne oppgaven er et annet mål, T-Rpbis, under 0,2, og det blir ofte satt som et minimumsmål for denne verdien. T-Rpbis angir (point biserial) korrelasjon mellom elevenes prestasjon på den enkelte oppgave og prestasjon på settet som helhet. Tegn på dårlig diskriminering gjorde at denne oppgaven ble byttet ut i versjon 3 av settet.

Målesikkerheten kan også gi en pekepinn på om oppgavesettet har fungert. Som tidligere nevnt så vi i figur 17 at elevenes dyktighet varierer fra -2,0 til 2,8. Ser vi nærmere på elevenes prestasjoner ser vi i tabell 4 at gjennomsnittlig dyktighet for elevene er -0,006. Det betyr i praksis at elevene har 50 % sannsynlighet for å klare en oppgave med vanskegrad -0,006. Siden gjennomsnittlig vanskegrad for mine oppgaver var -0,239, har da elevene i snitt mer enn 50 % sannsynlighet for å klare oppgavene. Ut fra standardfeilen for målingen kan vi si at 95 % konfidensintervall for elevenes gjennomsnittlige dyktighet er fra -0,078 til 0,066. Disse verdiene kan være vanskelige å forstå, men om vi hadde satt dyktigheten på en skala med 50 poeng som midtpunkt og standardavvik lik 10 poeng, så ville 95 % konfidensintervall for snittet gått fra 49,22 skalapoeng til 50,66 skalapoeng. Intervallet er lite, og det indikerer at målesikkerheten er god.

Tabell 4 Gjennomsnittlig råskåre og dyktighet fordelt på trinn. Standardavvik og standardfeil for målingene er oppgitt.

	Råskåre	**Standardavvik råskåre**	**Standardfeil råskåre**	**Dyktighet (θ)**	**Standardavvik dyktighet**	**Standardfeil dyktighet**
5. trinn	10,65	5,385	0,344	-0,422	0,898	0,057
6. trinn	13,40	5,612	0,364	0,028	0,985	0,064
7. trinn	15,09	4,799	0,300	0,360	0,885	0,055
Totalt	13,07	5,572	0,205	-0,006	0,976	0,036

Vi ser i tabell 4 at både råskåre og dyktighet varierer mellom trinnene. I utgangspunktet bør vi forvente at elevene presterer bedre jo eldre de er, og ved å kjøre variansanalyse (ANOVA) med Post-hoc testing i SPSS ser vi at det er signifikante forskjeller mellom trinnene på et signifikansnivå lik 0,01 (figur 19). Ved å regne på effektstørrelser (Cohens d) får vi for eksempel at effekten mellom 5. og 6. trinn er 0,50. Det betyr ifølge teorien (kap. 3.5.2) at det ekstra året med skolegang har middels effekt på prestasjonen. Effekten mellom 6. og 7. trinn er mindre. Oppgavesettets psykometriske verdier og et forventet elevresultat indikerer at måleinstrumentet har fungert godt.

Multiple Comparisons

Dependent Variable: Theta

Scheffe

(I) Trinn	(J) Trinn	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
5	6	-,4498471*	,0839692	,000	-,655801	-,243893
	7	-,7819056*	,0824582	,000	-,984154	-,579657
6	5	,4498471*	,0839692	,000	,243893	,655801
	7	-,3320585*	,0830755	,000	-,535821	-,128296
7	5	,7819056*	,0824582	,000	,579657	,984154
	6	,3320585*	,0830755	,000	,128296	,535821

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Figur 19 Resultat av ANOVA med Post hoc test i SPSS

5.2 Hvilke oppgaver er knyttet til de ulike misoppfatningene?

For å se på utbredelsen av de valgte misoppfatningene var det avgjørende å kartlegge hvilke oppgaver som ut fra resultatene egnet seg best til å avdekke de ulike misoppfatningene. Jeg gjennomførte derfor en faktoranalyse i SPSS, og figur 20 viser resultatet av denne.

Pattern Matrix[a]

	Component 1	2	3	4	5
p8	,799				
p10	,755				
p14	,733				
p22	,647				
p19	,608				
p23	,593				
p12	,407	,319			
p5		,917			
p15		,795			
p2		,765			
p11		,756			
p20	,303	,664			
p21			,770		
p9			,756		
p17			,646		
p16			,538	-,429	
p18					
p6				,613	
p13				,578	
p4	,310			,508	
p7				,347	,794
p24					,753
p1				,400	,436

Extraction Method: Principal Component Analysis.
Rotation Method: Promax with Kaiser Normalization.[a]

a. Rotation converged in 6 iterations.

Figur 20 Resultat av faktoranalyse i SPSS

Jeg sammenlignet resultatet av faktoranalysen med min forhåndsvalidering (vedlegg 3), og de to faktorene som umiddelbart skilte seg ut var da faktor 2 og faktor 5. Faktor 2 inneholdt fem oppgaver (2, 5, 11, 15 og 20) jeg hadde kategorisert til misoppfatningen «jo større nevner (eller teller), jo større brøk» (B), mens faktor 5 inneholdt tre oppgaver (1, 3[9] og 7) kategorisert til «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse» (A). I min videre analyse ble det naturlig å bruke disse to faktorene til å se på utbredelsen av de to nevnte misoppfatningene.

I faktor 3 finner vi tre andre oppgaver (9, 16 og 21) jeg hadde kategorisert til misoppfatning B, men disse har da ifølge faktoranalysen målt et annet aspekt enn oppgavene i faktor 2. Ser jeg nærmere på oppgave 9, 16 og 21 handler disse om dobling og halvering av brøker. I min forhåndsvalidering hadde jeg også validert oppgave 18 til misoppfatning B. I faktoranalysen ser vi derimot at oppgaven ikke lader mot noen av faktorene. Grunnen til dette kan være at alle oppgavene i faktor 2 er innholdsmessig knyttet til stambrøker, mens elevene i oppgave 18 skulle sortere brøker med ulike tellere og nevnere. Det er altså flere tegn på at oppgave 9, 16, 18 og 21 har målt andre aspekter enn bare misoppfatning B, og jeg valgte derfor å ikke fokusere på disse oppgavene i videre analyser knyttet til denne misoppfatningen. Siste oppgave i faktor 3 i analysen er oppgave 17, en oppgave jeg hadde kategorisert til «brøkstrek er lik komma» (D). Dette var den eneste oppgaven i settet rettet mot denne misoppfatningen.

Under faktor 4 finner vi oppgave 4, 6 og 13. I oppgave 6 og 13 skulle elevene selv lage figurer som representerte en gitt brøkdel, og det var de eneste oppgavene hvor elevens nøyaktighet ble subjektivt vurdert. I tillegg er dette de to oppgavene som har kommet ut med lavest vanskegrad (se figur 16), spesielt har oppgave 13 lav vanskegrad. Jeg valgte derfor å se bort fra oppgavene i videre analyser. Oppgave 4 lader også mot faktor 1, og jeg valgte derfor å se den i sammenheng med oppgavene i denne faktoren. Ved å se nærmere på oppgavene i faktor 1 ser jeg at oppgave 10 og 14 er komplekse innholdsmessig. De kan avdekke flere misoppfatninger, og vil derfor ikke egne seg til å studere én enkelt misoppfatning. De fire resterende oppgavene i faktor 1 pluss oppgave 4 har jeg kategorisert til misoppfatningene «differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til en brøk» (C) og «teller (eller nevner) er et isolert tall» (E). I min videre analyse av de fem misoppfatningene vil jeg bruke oppgavene vist i tabell 5.

---

[9] p24 i analysen

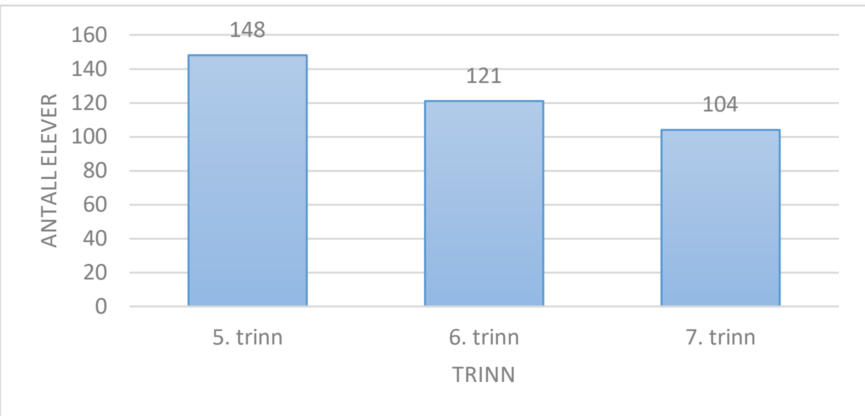
Tabell 5 Oversikt - oppgaver brukt i analysen av de ulike misoppfatningene

Misoppfatning	**Oppgave(r)**
«Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse» (A)	1, 3 (24) og 7
«Jo større nevner (eller teller), jo større brøk» (B)	2, 5, 11, 15 og 20
«Differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til en brøk» (C)	4, 8 og 22
«Brøkstrek er lik komma» (D)	17
«Teller (eller nevner) er et isolert tall» (E)	12, 19 og 23

5.3 Hvor utbredt er tegn på misoppfatninger?

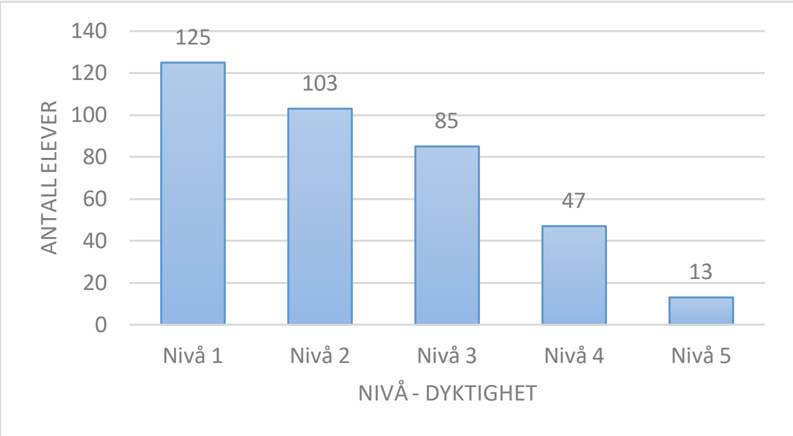
Etter å ha gjort rede for hvordan oppgavesettet mitt har fungert som måleinstrument, vil jeg nå rette analysens fokus over mot forskningsspørsmålene jeg hadde valgt. Det første forskningsspørsmålet mitt var hvor utbredt tegn på misoppfatninger tilknyttet brøk var i utvalget. I denne studien er tegn på misoppfatninger knyttet til systematiske feil. Det betyr at elever som viser tegn på misoppfatninger har samme feiltenkning i flere oppgaver. Eneste unntak er misoppfatningen «brøkstrek er lik komma», der jeg kun hadde én oppgave. For å svare på det første forskningsspørsmålet har jeg derfor identifisert elever som gjennom sine feilsvar viser samme feiltenkning i flere oppgaver knyttet til samme misoppfatning.

Ser vi på alle de fem misoppfatningene er det til sammen 373 elever i utvalget som viser tegn på én eller flere misoppfatninger. Det betyr at omtrent 51 % av elevene i utvalget viser tegn på misoppfatning. Figur 21 viser hvordan de 373 elevene er fordelt på trinn. Av figuren ser vi at det er flest elever på 5. trinn som viser tegn på misoppfatning, men at elevene er godt fordelt på de tre trinnene i studien. Det er 60 % av elevene på 5. trinn som viser tegn på misoppfatning, 51 % av elevene på 6. trinn og 41 % av elevene på 7. trinn. At andelen er lavest på 7. trinn er forventet, men uansett viser resultatene at misoppfatninger er vanlig blant elever på alle trinn i utvalget.



Figur 21 Elever som viser tegn på misoppfatninger - fordelt på trinn.

I tilknytning til det første forskningsspørsmålet hadde jeg også et underspørsmål som knyttet utbredelsen til elevenes dyktighet. For å se nærmere på dette valgte jeg å dele elevene inn i fem dyktighetsnivå. 20 % av elevene er på hvert nivå, og for eksempel er de 20 % elevene som fikk lavest dyktighet i IRT-analysen plassert på nivå 1. Det er viktig å påpeke at elevene med lavest dyktighet ikke nødvendigvis er de elevene som viser flest tegn på misoppfatninger. For eksempel vil elever som har svart blankt på stort sett alle oppgaver, komme ut med veldig lav dyktighet, men de har ikke feilsvar som indikerer at de er i en misoppfatning. Figur 22 viser hvordan de 373 elevene som viser tegn på misoppfatninger er fordelt på dyktighetsnivå. Vi ser at det er elever på alle nivå som viser tegn på misoppfatninger, men samtidig har vi en forventet utvikling fra nivå 1 til nivå 5. Det er flest elever på nivå 1 og færrest elever på nivå 5.

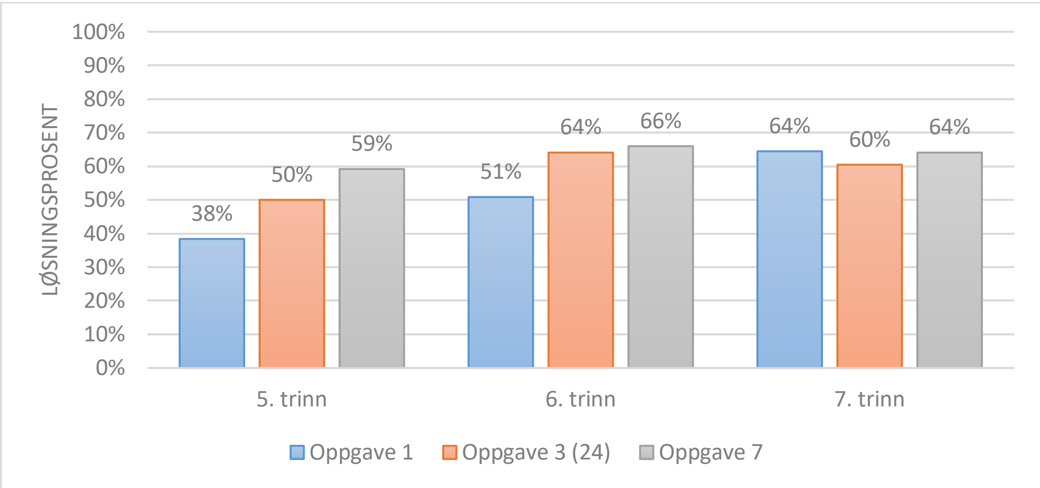


Figur 22 Elever som viser tegn på misoppfatninger - fordelt på dyktighetsnivå.

Av figur 21 og 22 ser vi altså en forventet utvikling for fordeling på trinn og dyktighetsnivå, men om vi velger å se på den enkelte misoppfatning er bildet mer nyansert. Ifølge analysen er da «brøkstrek er lik komma» den mest utbredte misoppfatningen (23 % av elevene), mens vi nesten ikke finner misoppfatningen «differensen mellom teller og nevner avgjør brøkens størrelse» (0,5 % av elevene). Det er imidlertid verdt å merke seg at fire av de fem misoppfatningene i studien har en utbredelse på over 10 %. Analysene viser også at utbredelsen av misoppfatningene A, C og D (se tabell 5) er relativt stabil på 5., 6. og 7. trinn, mens misoppfatningene B og E har en avtagende utbredelse fra 5. til 7. trinn. Vi ser også forskjeller mellom misoppfatningene, når det gjelder fordeling på dyktighetsnivå. For eksempel er elevene som viser tegn på misoppfatning A jevnt fordelt på nivå 1, 2, 3 og 4, mens 88 % av elevene som viser tegn på misoppfatning B er på nivå 1. Det er altså flere resultater som indikerer at det er forskjeller mellom misoppfatningene knyttet til utbredelse, og jeg vil derfor se nærmere på den enkelte misoppfatning i den videre analysen.

5.3.1 Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse (A)

Ut fra forhåndsvalideringen var det tre oppgaver i hvert sett som kunne avdekke denne misoppfatningen. Disse oppgavene kom også ut som en egen faktor i faktoranalysen. De aktuelle oppgavene var oppgave 1, 3[10] (24) og 7. Gjennomsnittlig b-verdi (vanskegrad) for disse oppgavene var -0,407. Om vi tar i betraktning at gjennomsnittlig dyktighet for elevene var -0,006, så betyr det at elevene i snitt har hatt mer enn 50 % sannsynlighet for å få riktig på disse tre oppgavene. Analysene viser at løsningsprosenten til de tre oppgavene varierer fra 51 % til 63 %. Nedenfor ser vi andelen riktig svar på de ulike trinnene.

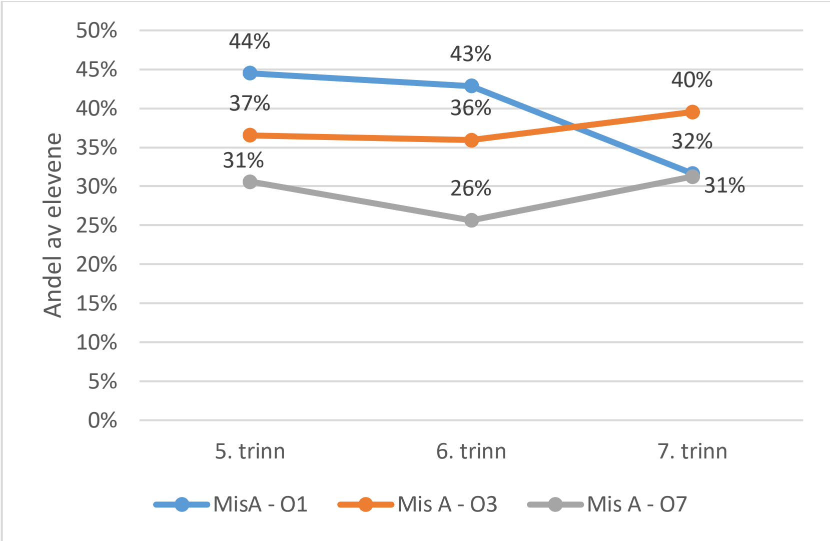


Figur 23 Andelen riktige svar på oppgave 1, 3 og 7.

Av figur 23 ser vi at løsningsprosenten er høyere på 6. trinn enn på 5. trinn for alle tre oppgavene, men for oppgave 3 (24) og 7 er løsningsprosenten lavere på 7. trinn enn på 6. trinn. Det er for eksempel 64 % av elevene på 7. trinn som svarer riktig på oppgave 7, mens det er 66 % av elevene på 6. trinn.

I hver av de tre oppgavene er det et feilsvar som kan indikere misoppfatningen «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse». Dette feilsvaret finner vi hos 40 % av elevene i oppgave 1, 37 % i oppgave 3 og 29 % i oppgave 7. Ser vi nærmere på utbredelsen av feilsvarene som kan indikere misoppfatningen, så ser vi i figur 24 at utbredelsen er relativt stabil på 5., 6. og 7. trinn. Vi ser også samme trend som for andelen riktige svar. I både oppgave 3 (24) og 7 er feilsvaret som kan tyde på den aktuelle misoppfatningen mer utbredt på 7. trinn enn på 5. og 6. trinn. I figur 24 ser vi for eksempel at 31 % av elevene på 7. trinn viser tegn til misoppfatning i oppgave 7, mens den tilsvarende andelen er 26 % på 6. trinn.

[10] Ble byttet ut med en annen variant som skulle avdekke samme misoppfatning i versjon 3. Dataene for oppgave 3 i analysene, er dataene for den nye varianten angitt som oppgave 24 i datafilene.



Figur 24 Utbredelse av feilsvar som indikerer misoppfatning A. Fordelt på trinn.

I oppgave 7 fikk elevene presentert fire ulike visuelle representasjoner, og de skulle sette ring rundt representasjonene som viste $\frac{1}{4}$. Figur 25 viser hvordan en elev på 5. trinn har besvart oppgaven. Dette elevsvaret kan være et tegn på den aktuelle misoppfatningen, siden eleven også har satt ring rundt representasjon nr. 2, der figuren ikke er delt i like store deler. Eleven har imidlertid forstått at én av de fire delene skal være fargelagt. I intervju med eleven fikk jeg bekreftet dette, og det ser vi av dialogen nedenfor.

I: Så har vi fire figurer her, og du har markert to av dem. Hvorfor tenker du at de to som du har markert viser én firedel?

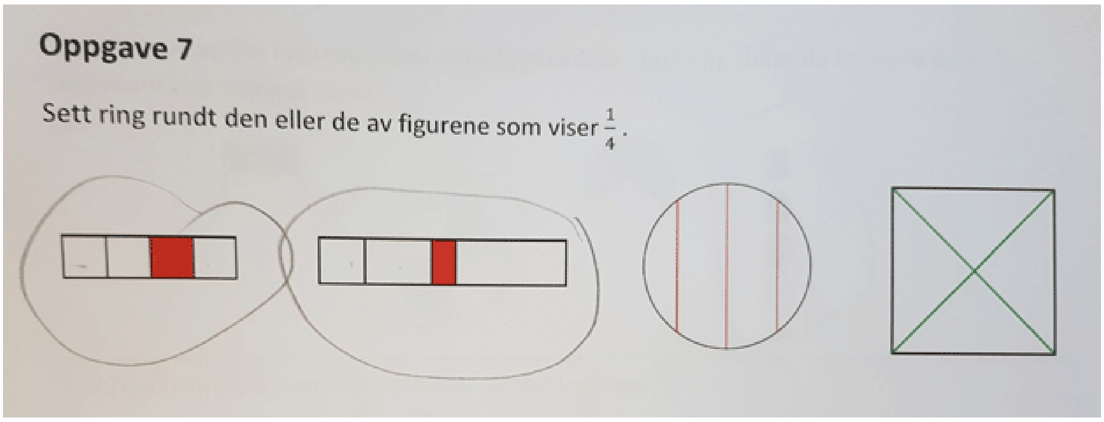
E: Fordi det er fire sånne brikker, eller firkanter, og så er det én av dem som er rød.

I: Hmm … så det er én av de fire som er rød. Så har vi en figur her som er …, den er delt inn i fire deler. Hvorfor er ikke den én firedel?

E: Fordi der er det ingen som er fargelagt.

I: nei, der er det ingen som er markert nei. Så det er på en måte null av fire.

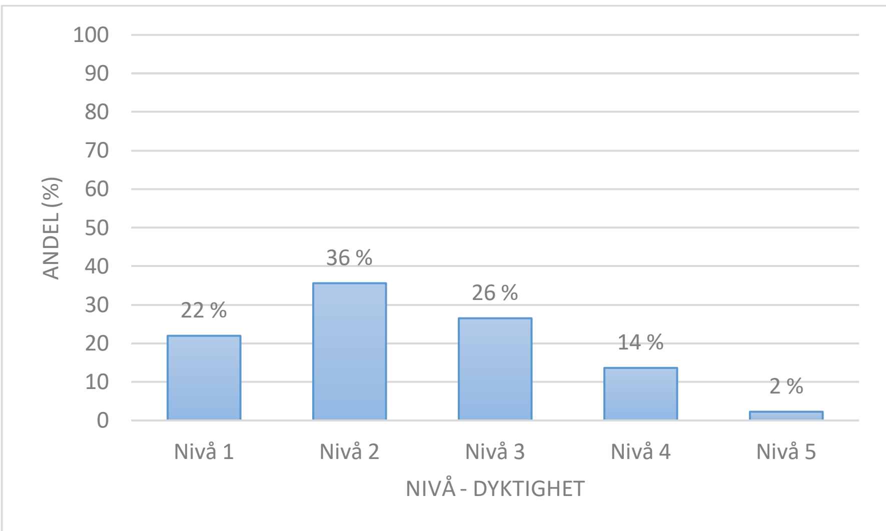
E: ja, hmm …



Figur 25 Eksempel på elevsvar i oppgave 7.

Misoppfatninger gir ofte feil som skyldes en systematisk, konsekvent feiltenkning (Brekke, 2002). På grunn av dette vil det være interessant å se nærmere på elevene som viser tegn på denne misoppfatningen i alle de tre oppgavene. Til sammen er det 132 elever som viser tegn på den samme misoppfatningen i alle de tre oppgavene. Da har jeg tatt med elevene som har kode for misoppfatning på alle tre oppgavene (128) eller kode for misoppfatning på to av oppgavene pluss ubesvart på den tredje (4). Disse elevene er jevnt fordelt på de tre trinnene; 44 elever på hvert av trinnene. De 132 elevene utgjør 18 % av alle elevene i studien. Til sammenligning er det 167 elever (23 %) som har alle de tre oppgavene riktig.

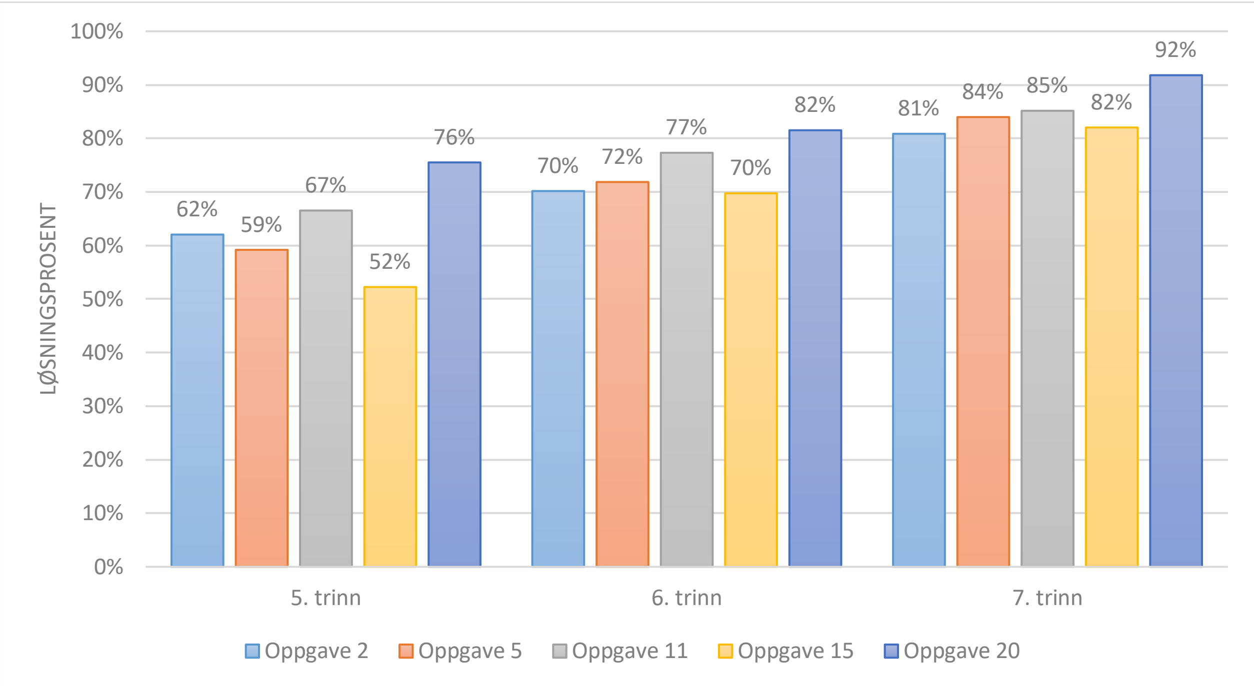
Ikke bare er de 132 elevene jevnt fordelt på trinn. Vi finner de også på alle dyktighetsnivå. I figur 26 ser vi at de fleste elevene som viser tegn på misoppfatningen «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse» ligger på dyktighetsnivå 2. Det er 47 av de 132 elevene som ligger på dette nivået, og de utgjør 36 %. Det er også verdt å merke seg at både nivå 2 og 3 er mer representert enn nivå 1.



Figur 26 Fordeling på dyktighetsnivå for elever som viser tegn på misoppfatning A.

5.3.2 Jo større nevner (eller teller), jo større brøk (B)

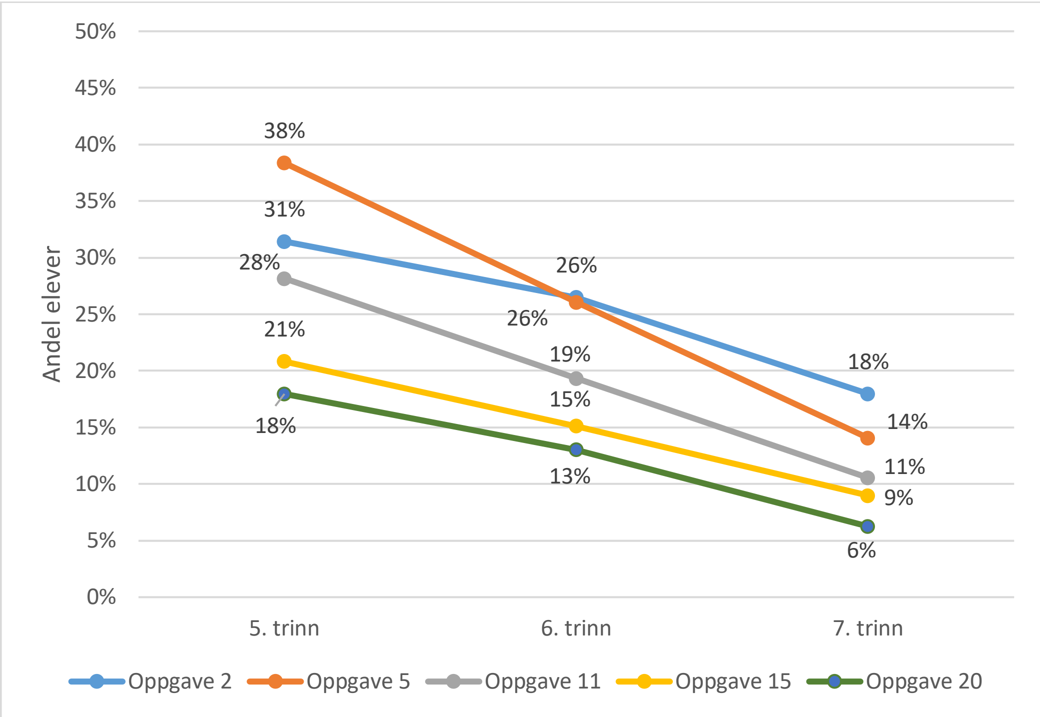
Faktoranalysen viser at det er fem oppgaver som er egnet til å avdekke misoppfatningen «jo større nevner (eller teller), jo større brøk». Dette er oppgave 2, 5, 11, 15 og 20. Løsningsprosenten for oppgavene er i snitt 74 %. Basert på IRT-analysen kommer de fem oppgavene ut med en gjennomsnittlig b-verdi lik -0,845, og dette bekrefter at oppgavene har vært relativt enkle for elevene. Samtidig betyr det at oppgavene har lavere gjennomsnittlig vanskegrad enn oppgavene som var knyttet til misoppfatningen «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse». Figur 27 viser andelen riktige svar på de ulike trinnene for alle de fem oppgavene. I alle oppgavene har løsningsprosenten en positiv utvikling fra 5. til 6. trinn og fra 6. trinn til 7. trinn.



Figur 27 Andel riktige svar på oppgave 2, 5, 11, 15 og 20.

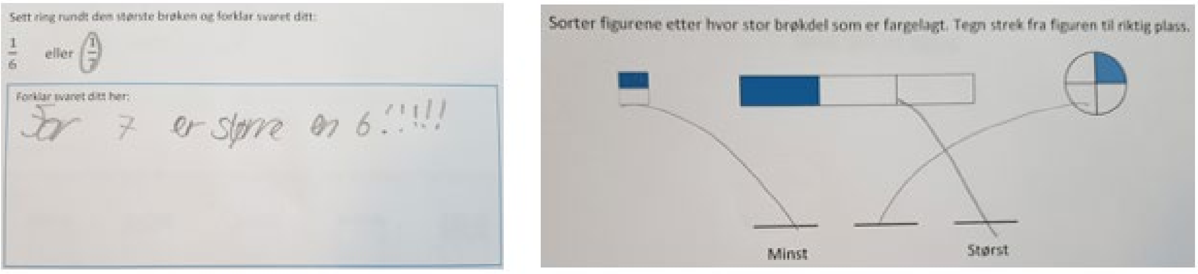
I oppgavene knyttet til denne misoppfatningen er det også verdt å merke seg at det er brukt ulike representasjonsformer. I oppgave 2 og 5 er brøkene representert ved symbol, i oppgave 11 og 15 er brøkene representert ved arealmodell, mens brøkene er representert ved en diskret representasjon i oppgave 20. Knyttet til dette er det spesielt interessant å se på oppgave 5 og 11. Disse to oppgavene er innholdsmessig identiske. I begge oppgavene skal elevene sortere fem enhetsbrøker etter størrelse, men representasjonsformen er ulik. Ut fra figur 27 kan det se ut til at symbolrepresentasjon er mer utfordrende enn arealmodell for elevene på 5. og 6. trinn, mens representasjonsform spiller mindre rolle når vi kommer til 7. trinn. På 5. trinn er det for eksempel 59 % av elevene som har riktig på oppgave 5 (symbol), mens 67 % har riktig på oppgave 11 (areal). Av de fem oppgavene har oppgave 15 høyest vanskegrad (b = -0,623). I denne oppgaven er brøkene representert ved arealmodellen, men her gir ulik størrelse på helheten en ny utfordring til elevene.

I de fem aktuelle oppgavene vil tegn på misoppfatning føre til at elevene rangerer brøkene i motsatt rekkefølge. Figur 28 viser hvor stor andel av elevene som gjør dette i hver av de fem oppgavene.



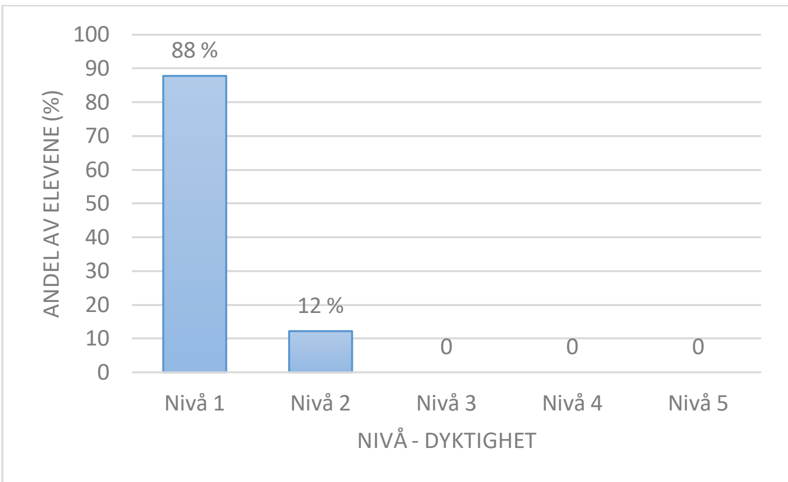
Figur 28 Utbredelse av feilsvar som indikerer misoppfatning B. Fordelt på trinn.

For alle oppgavene ser vi at tegn på misoppfatning avtar fra 5. til 7. trinn. Av figuren ser vi også at feilsvarene som indikerer en misoppfatning er hyppigst i oppgave 2 og 5. Det er de to oppgavene hvor det er brukt en symbolrepresentasjon. I figur 29 ser vi hvordan en elev på 5. trinn som viser tegn på denne misoppfatningen, har svart på oppgave 2 og 15. Eleven viser tegn på den aktuelle misoppfatningen i oppgave 2, der han skriver at $\frac{1}{7}$ er større enn $\frac{1}{6}$, fordi 7 er større enn 6. Han sammenligner kun heltall, og dette indikerer at eleven bruker heltallstenkning. Eleven viser tegn på den aktuelle misoppfatningen i fire av de fem oppgavene. I oppgave 15 viser derimot eleven en annen feiltenkning knyttet til arealmodellen. Eleven vurderer størrelsen på det fargelagte arealet, istedenfor å vurdere hvor stor brøkdel som er fargelagt.



Figur 29 Eksempel på elevsvar i oppgave 2 og 15.

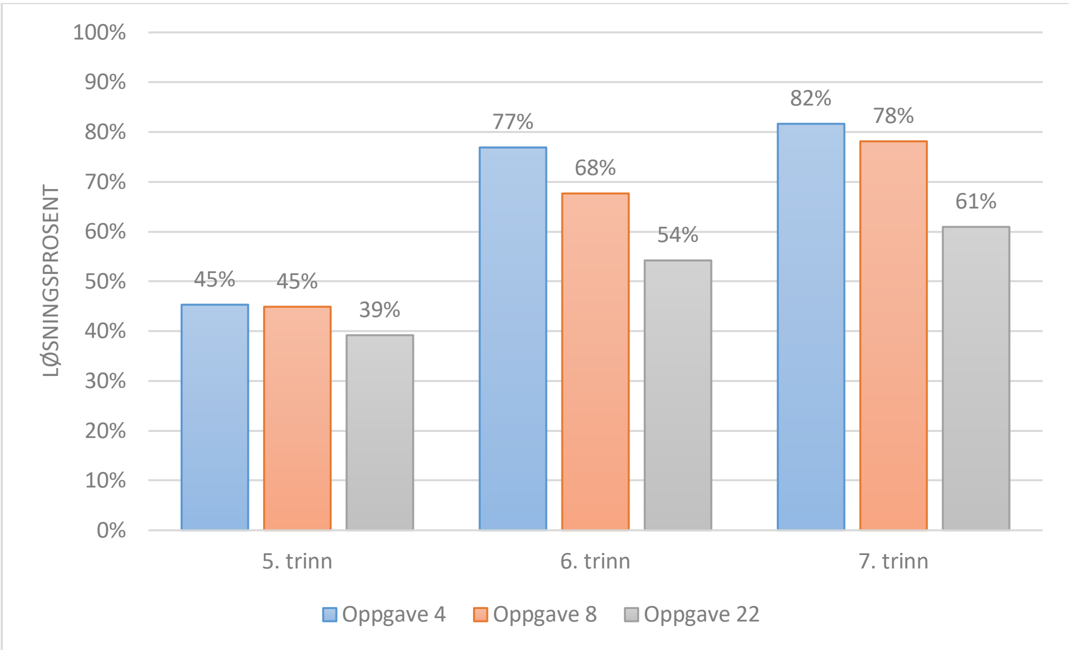
Totalt er det 41 elever som viser tegn på misoppfatningen «jo større nevner (eller teller), jo større brøk» i alle de fem oppgavene. Disse elevene utgjør 6 % av alle elevene i studien. Analysene viser også at nesten halvparten av de 41 elevene går på 6. trinn; 13 stk. på 5. trinn, 20 stk. på 6. trinn og 8 stk. på 7. trinn. Om vi tar med elever som viser tegn på denne misoppfatningen i fire av fem oppgaver, er det til sammen 82 elever (11 % av elevene) som viser klare tegn på denne misoppfatningen. Hovedvekten av elevene som viser tegn på denne misoppfatningen i minimum fire av fem oppgaver, finner vi på 5. og 6.trinn. Faktisk er det hele 83 % av de 82 elevene som går på disse trinnene. Om vi ser på hvilket dyktighetsnivå elevene befinner seg på, finner vi en enda klarere tendens. 72 av elevene som viser tydelig tegn på misoppfatningen «jo større nevner (eller teller), jo større brøk» befinner seg på nivå 1, altså blant de 20 % elevene med lavest dyktighet. Figur 30 viser hvordan de 82 elevene er fordelt på de ulike dyktighetsnivåene. Av figuren ser vi at det er ingen elever på nivå 3, 4 og 5 som viser tegn på denne misoppfatningen. Oppgaver knyttet til denne misoppfatningen vil altså skille mye mellom elever med lav og høy dyktighet, og dette blir bekreftet gjennom en gjennomsnittlig diskrimineringsverdi (a-verdi) lik 1,536. Denne verdien indikerer at oppgavene tilknyttet denne misoppfatningen, diskriminerer bedre enn en gjennomsnittlig oppgave i settet.



Figur 30 Fordeling på dyktighetsnivå for elever som viser tegn på misoppfatning B.

5.3.3 Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til en brøk (C)

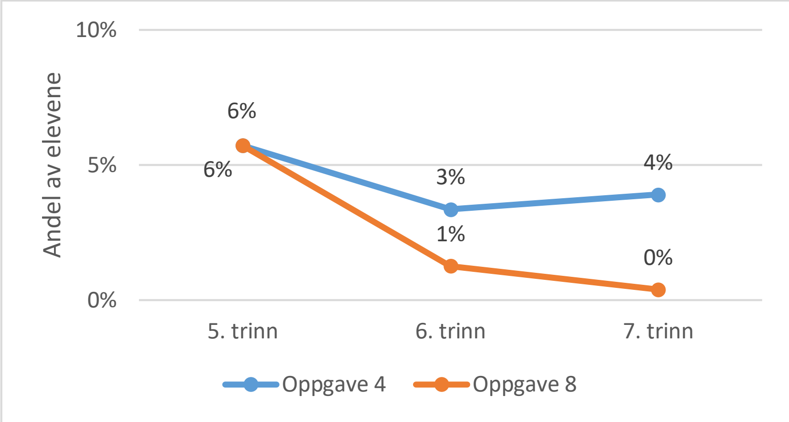
Misoppfatningen «differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til en brøk» var i hovedsak relatert til oppgave 4, 8 og 22, selv om det også er feilsvar i andre oppgaver som kan tyde på samme tenkning. Av de tre oppgavene er det oppgave 4 og 8 som innholdsmessig er mest like. De tar begge utgangspunkt i en symbolrepresentasjon. I oppgave 22 er oppgavene representert med arealmodellen, og der er sammenhengen mellom teller og nevner mer skjult. Alle de tre oppgavene er innholdsmessig knyttet til likeverdige brøker, altså brøker som er like store.



Figur 31 Andelen riktige svar på oppgave 4, 8 og 22.

Av figur 31 ser det ut til at oppgave 4 og 8 i større grad har målt samme aspekt hos elevene, siden de har mest lik løsningsprosent. Vanskegrad fra IRT-analysen viser det samme. Vanskegraden til oppgave 4 og 8 er -0,659 og -0,534, mens den er -0,090 for oppgave 22. Korrelasjonsanalyse i SPSS viser også at oppgave 4 og 8 korrelerer bedre med hverandre enn de gjør med oppgave 22. Korrelasjonen mellom oppgave 4 og 8 er 0,485, mens de to andre korrelasjonene er 0,271 og 0,311. Når jeg skal se nærmere på misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til en brøk» velger jeg å ta utgangspunkt i oppgave 4 og 8, siden både analyseresultater og innhold indikerer at oppgave 22 har målt andre aspekter.

Vi ser at løsningsprosenten (figur 31) i snitt er noe høyere for oppgave 4 enn for oppgave 8, og dette kan ha sammenheng med at brøkene vi finner i oppgave 4 er mer kjent for elevene. I oppgave 4 skulle de finne at $\frac{2}{4}$ er lik $\frac{1}{2}$, mens de i oppgave 8 skulle finne at $\frac{4}{12}$ er lik $\frac{1}{3}$. Elever med tegn på misoppfatningen «differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til en brøk» vil svare at $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ og at $\frac{1}{3} = \frac{10}{12}$.



Figur 32 Utbredelse av feilsvar som indikerer misoppfatning C.

Figur 32 viser at tegn på misoppfatningen «differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til en brøk» er lite utbredt på alle trinn. I oppgave 4 har 4 % av elevene svar som indikerer den aktuelle misoppfatningen, mens det er bare 2 % i oppgave 8. Ser vi nærmere på de elevene som viser tegn på denne misoppfatningen, er det faktisk bare 4 av 739 elever som gjør den samme feiltypen i begge oppgavene. Av de fire elevene går tre på 5. trinn og én på 6. trinn. Fordelingen på dyktighetsnivå er én på nivå 1, én på nivå 2 og to på nivå 3. I figur 31 så vi at løsningsprosenten på oppgave 4 og 8 var mye lavere på 5. trinn enn på 6. og 7. trinn, og resultatene tyder derfor på at spesielt elevene på 5. trinn har store utfordringer med oppgaver knyttet til likeverdighet og brøkers størrelse. Dialogen nedenfor er fra et intervju jeg hadde med en av elevene på 5. trinn som viste tegn på den aktuelle misoppfatningen i begge oppgavene. Eleven bekrefter i sine utsagn oppfatningen om at forskjellen mellom teller og nevner er viktig, og denne differensen gjenspeiler hvor mye som mangler.

I: Mener du at $\frac{1}{2}$ *og* $\frac{2}{3}$ *er like store?*

E: Ja, begge mangler 1.

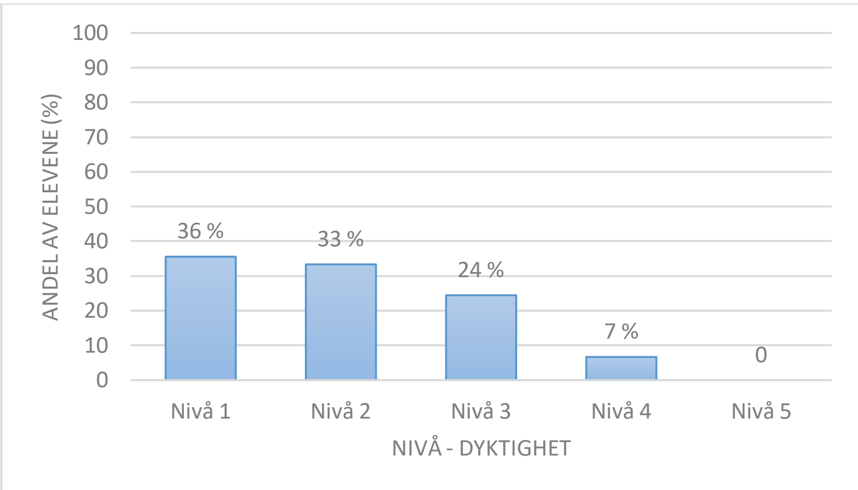
I: Hva med $\frac{1}{3}$ *og* $\frac{10}{12}$ *? Er de også like store?*

E: Ja. Jeg trekker 10 fra 12. Det blir 2, og 1 fra 3 blir også 2.

Videre i intervjuet fikk eleven beskjed om å tegne $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{3}$. Han hadde ikke problemer med å tegne korrekte representasjoner av begge brøkene, og oppdaget da at svaret han hadde gitt ikke kunne være korrekt. Jeg vil si at eleven raskt havnet i en kognitiv konflikt.

Det er ikke spesielt mange elever på 5. trinn (eller de andre trinnene) som viser tegn på den aktuelle misoppfatningen, og da er det interessant å se på hvilke feil elevene faktisk gjør. I oppgave 4 er det 37 % av elevene på 5. trinn som svarer at $\frac{1}{2} = \frac{2}{1}$, og dette er også den mest frekvente feilen på 6. og 7. trinn. Denne feilen kan tyde på at elevene er usikre på hva som er teller og nevner, eller rett og slett lite bevisst på plasseringen av disse. Vi finner derimot ikke samme tenkning i oppgave 8. Ellers er det ifølge analysene, ikke andre feilsvar som er høyfrekvente i de to oppgavene.

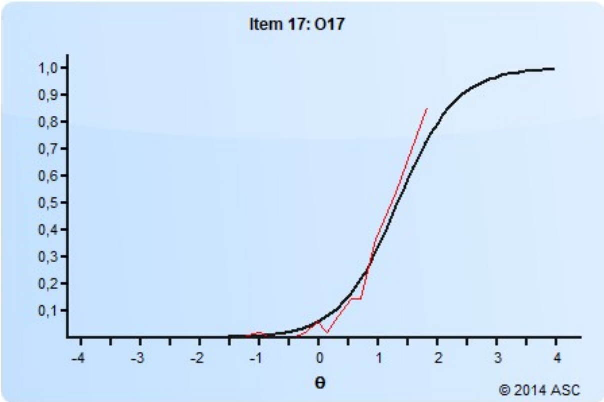
Til sammen er det 45 elever, 6 % av alle elevene, som viser tegn på misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til en brøk» i minimum én av de to oppgavene (4 og 8). Over halvparten av de 45 elevene finner vi på 5. trinn, 56 %. Ellers er fordelingen relativt jevn på dyktighetsnivå 1,2 og 3 (figur 33).



Figur 33 Fordeling på dyktighetsnivå for elever som viser tegn på misoppfatning C.

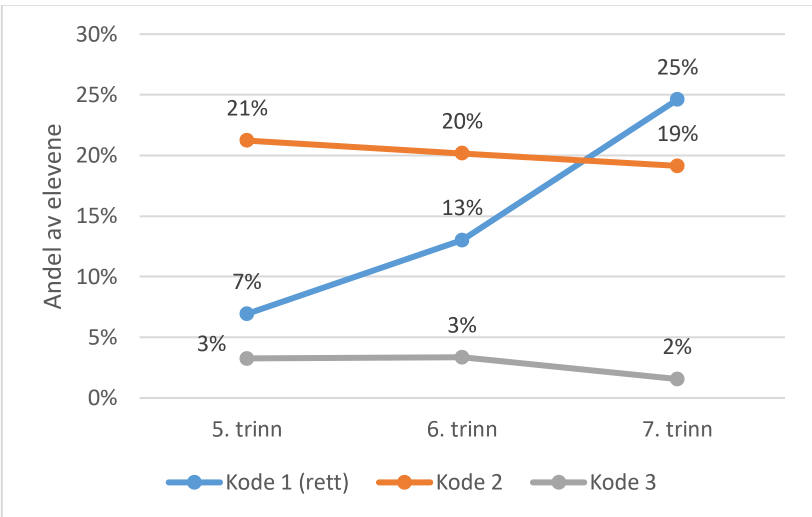
5.3.4 Brøkstrek er lik komma (D)

Misoppfatningen «brøkstrek er lik komma» var den misoppfatningen jeg hadde minst fokus på i oppgavesettet. Det var bare én oppgave, oppgave 17, som hadde til hensikt å avdekke denne misoppfatningen. a-verdien til oppgaven er 1,190 og b-verdien er 1,424. Oppgaven er blant de vanskeligste i settet, og diskriminerer over gjennomsnittet. I figur 34 ser vi oppgavens ICC.



Figur 34 Item characteristic curve for oppgave 17.

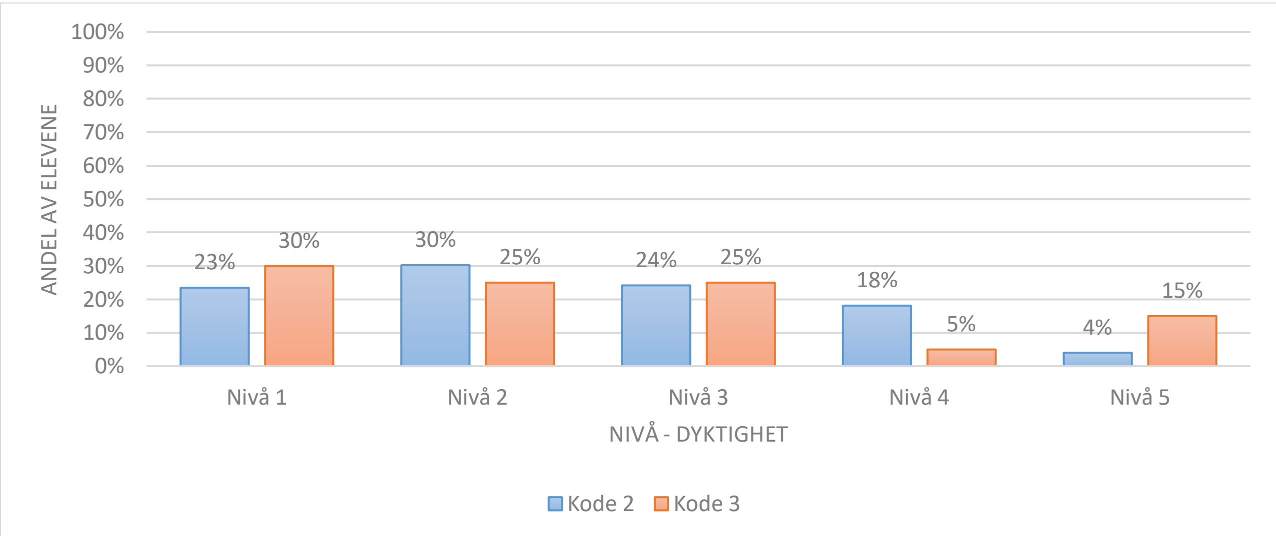
Av kurven ser vi at elevene må ha dyktighet over 0 for å ha mer enn 10 % sjanse for å klare oppgaven. Siden gjennomsnittlig dyktighet for elevene i mitt utvalg var -0,006, betyr det at elevene har hatt liten sjanse for å svare riktig på denne oppgaven. 22 % av elevene hadde ubesvart på oppgaven, og oppgaven skilte seg klart ut som den med høyest andel ubesvart. I tillegg var dette en oppgave hvor jeg fikk veldig mange ulike feilsvar. Figur 35 viser fordelingen av de mest frekvente elevsvarene på denne oppgaven.



Figur 35 Svarfordeling oppgave 17. Fordelt på trinn.

Det var 15 % av alle elevene som klarte å gjøre om $\frac{1}{4}$ til 0,25 (kode 1). Misoppfatningen «brøkstrek er lik komma» er synlig i både kode 2 og 3. Kode 2 er de elevene som har svart at $\frac{1}{4}$ er lik 1,4, mens kode 3 er de som har svart 4,1. I begge disse svartypene blir altså brøkstreken tolket som et komma, et skilletegn mellom tallene. Det er 20 % av alle elevene som har svart 1,4, og dette svaret er som vi ser av grafen et stabilt feilsvar på de ulike trinnene. Svaret 4,1 er mindre utbredt, 3 % av elevene, men denne feiltypen er også jevnt fordelt på trinnene. For de 169 elevene som har svart kode 2 eller 3 er fordelingen på trinn slik; 60 på 5. trinn, 56 på 6. trinn og 53 på 7. trinn.

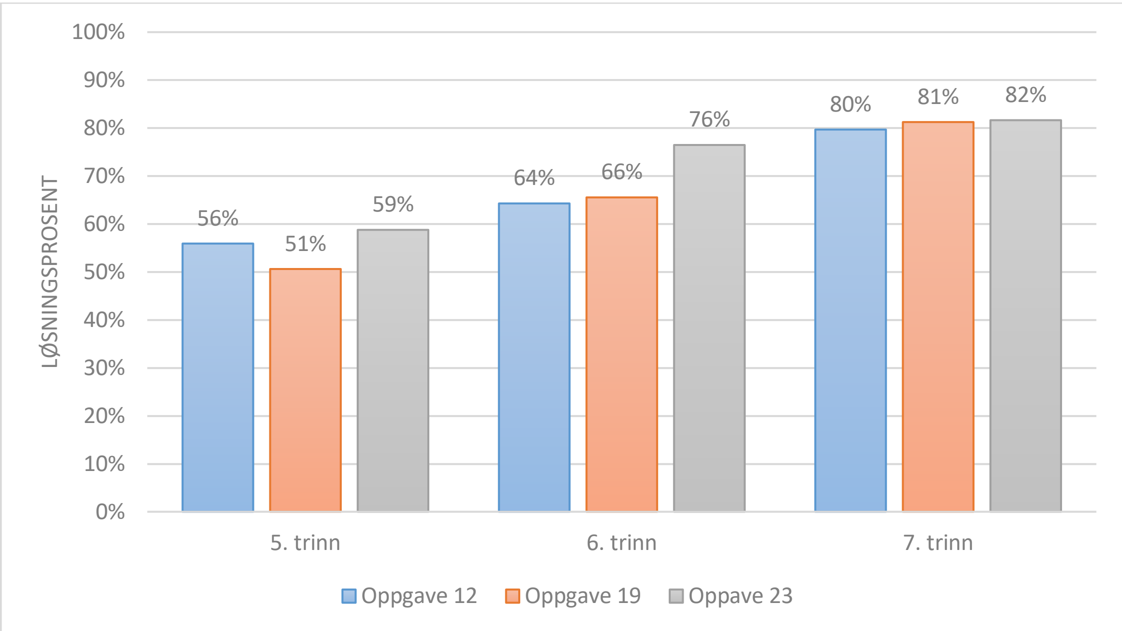
I figur 36 har jeg sett nærmere på elevene som har svart kode 2 og 3. Det første vi kan legge merke til er at begge feiltypene er fordelt på alle de fem dyktighetsnivåene jeg hadde delt inn i. Kode 2 er som nevnt tidligere den mest utbredte av de to, og vi ser at hovedvekten av elevene som har gitt dette svaret ligger på dyktighetsnivå 1, 2, 3 og 4. Av de 149 elevene som har svart kode 2, er det er faktisk en større andel elever på nivå 2 og nivå 3 enn det er på nivå 1. For de 20 elevene som har svart kode 3 ser vi ikke samme tendens. Av elevene som svarer kode 2 og 3 er en liten andel på dyktighetsnivå 5 (4 % og 15 %), og dette gjenspeiles blant elevene som har svart riktig. Blant de elevene som har svart riktig på oppgave 17 er hele 78 % av elevene på nivå 5.



Figur 36 Fordeling på dyktighetsnivå av elever som har svart kode 2 eller 3 på oppgave 17.

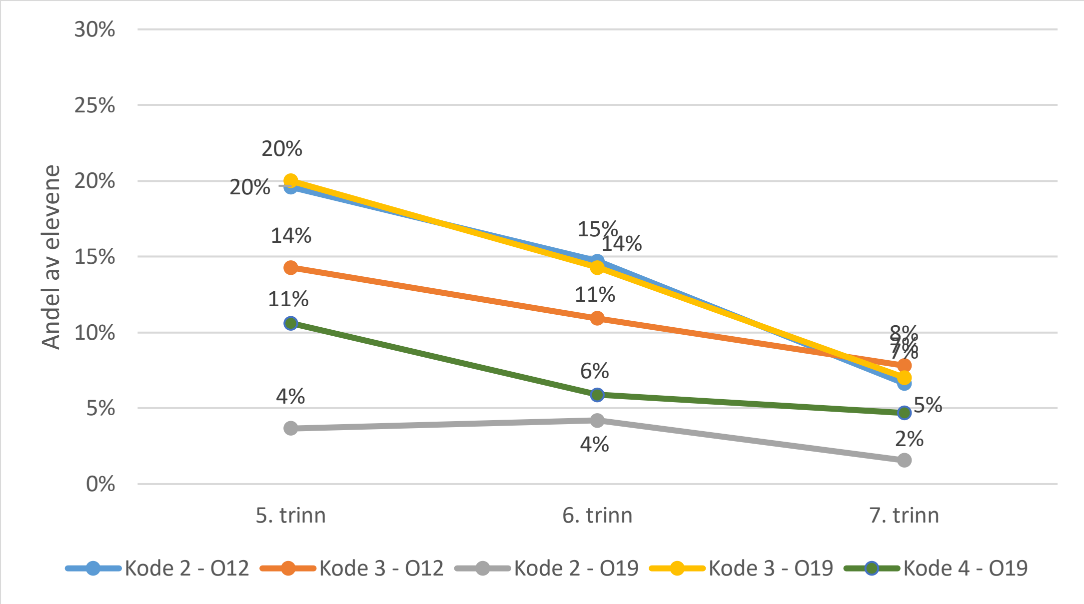
5.3.5 Teller (eller nevner) er et isolert tall (E)

I min valideringen av oppgavesettet mente jeg at oppgave 12, 19 og 23 skulle avdekke denne misoppfatningen, og oppgavene kommer også ut i samme faktor ved faktoranalysen. Gjennomsnittlig b-verdi for de tre oppgavene er -0,774, og løsningsprosentene varierer fra 66 % til 72 %. Oppgave 12 og 19 er de to oppgavene som i utgangspunktet er mest like innholdsmessig. I begge oppgavene skal elevene finne en brøkdel av en gitt mengde, men de inneholder ulike representasjoner (areal og diskret). I figur 37 ser vi at det ikke er stor forskjell i andelen riktige svar på oppgave 12 og 19 for noen av trinnene, så representasjonsformen ser ikke ut til å ha hatt stor betydning i denne sammenheng.



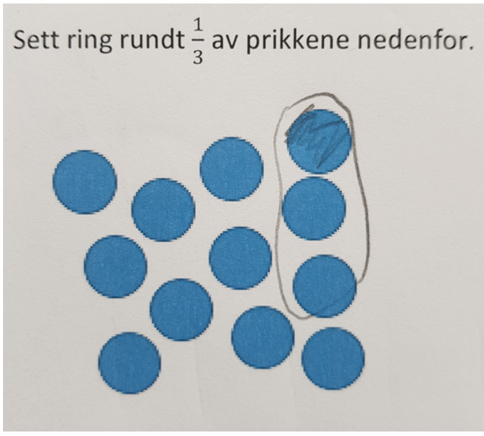
Figur 37 Andelen riktige svar på oppgave 12, 19 og 23.

Ser vi nærmere på feilsvar i oppgave 12 og 19 (figur 38), så ser vi at elevene tolker både teller og nevner som isolerte tall. Elevene velger å fargelegge/sette ring rundt antallet representert i teller (kode 2) eller nevner (kode 3). I oppgave 12 skal elevene fargelegge en brøkdel av et gitt areal, og analysene viser at kode 2 er mer frekvent her enn i den diskret representasjonen som er benyttet i oppgave 19. Det er 14 % av alle elevene som har kode 2 i oppgave 12, mens det er bare 3 % i oppgave 19.



Figur 38 Utbredelse – feilsvar som indikerer misoppfatning E i oppgave 12 og 19. Fordelt på trinn.

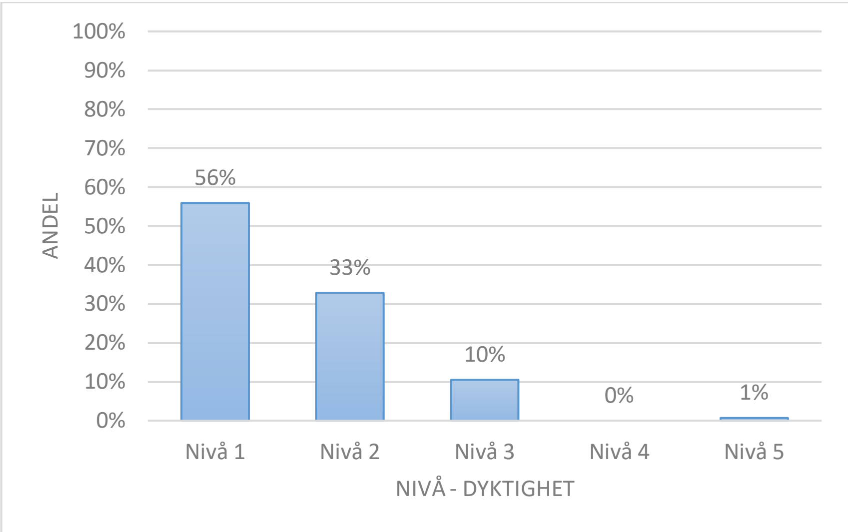
Deler av forskjellen i utbredelse av kode 2 blir fanget opp av kode 4 i oppgave 19. Denne koden indikerer at elevene har satt ring rundt antallet representert av både teller og nevner, og det er 7 % av elevene som gjør dette. I figur 39 ser vi et eleveksempel på et slik svar. Eleven har satt ring rundt tre prikker og deretter skravert én av de tre prikkene.



Figur 39 Eksempel på elevsvar i oppgave 19.

I oppgave 23 skulle elevene finne ut hvilket alternativ som forteller hvor stor brøkdel blå klinkekuler utgjør. Her er det til sammen 18 % av elevene som ser på de blå og gule klinkekulene som to isolerte mengder, og svarer $\frac{5}{3}$ (3 %) eller $\frac{3}{5}$ (15 %).

Det er 41 elever som viser tegn på misoppfatningen «teller (eller nevner) er et isolert tall» i alle de tre oppgavene, og hvis vi tar med de elevene som viser tegn på misoppfatningen i to av de tre oppgavene, så har vi til sammen 143 elever. Dette er 19 % av alle elevene i studien. De aktuelle elevene er fordelt på alle trinn i studien, men over halvparten går på 5. trinn (72, 45, 26). I figur 40 ser vi hvordan de 143 elevene er fordelt på dyktighetsnivå. Vi ser blant annet at 56 % av elevene som viser tydelig tegn på den aktuelle misoppfatningen befinner seg på nivå 1. Det er én elev på nivå 5, og denne eleven går på 7. trinn.



Figur 40 Fordeling på dyktighetsnivå for elever som viser tegn på misoppfatning E.

5.3.6 Oppsummering utbredelse av misoppfatninger

I tabell 6 er de viktigste resultatene knyttet til utbredelsen av de ulike misoppfatningene oppsummert.

Tabell 6 Oppsummering resultater utbredelse.

Misoppfatning	**Tegn på misoppfatninger (andel av elevene)**	**Gjennomsnittlig vanskegrad oppgaver**	**Jevnt fordelt på trinn?**	**Jevnt fordelt på nivå?**
A	18 %	-0,407	Ja	Ja
B	11 %	-0,845	Nei	Nei
C	0,5 %[11]	-0,428	Nei	Ja
D	23 %	1,424	Ja	Ja
E	19 %	-0,774	Nei	Nei

[11] 6 % om vi forutsetter bare feiltenkning i én av to oppgaver

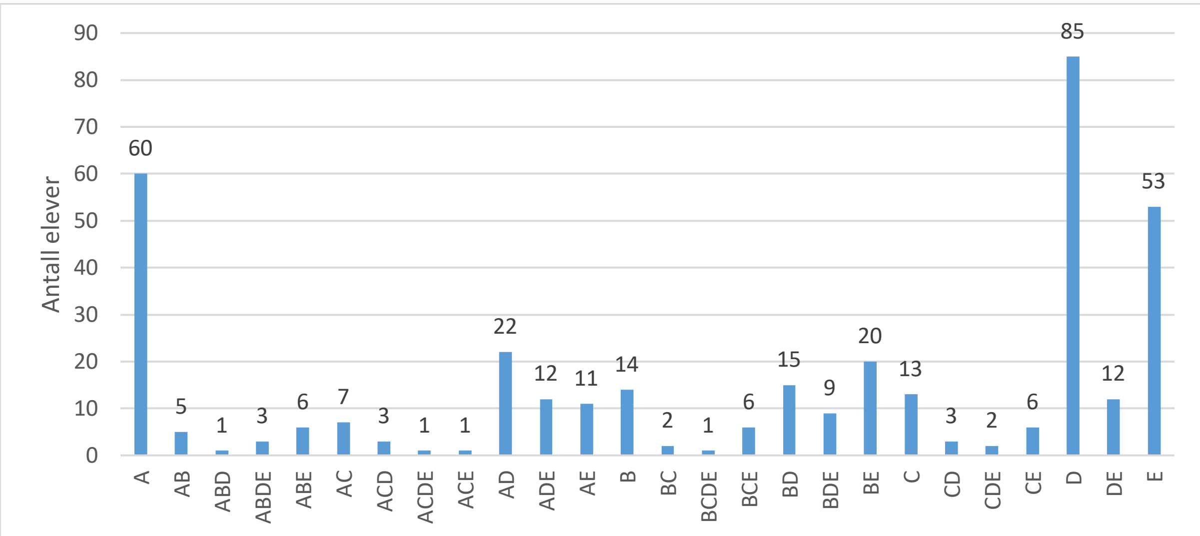
5.4 Kan vi finne noe systematikk for misoppfatningene?

Analysene så langt har vist at utbredelsen varierer fra misoppfatning til misoppfatning, og resultatene tyder på at fire av de fem valgte misoppfatningene har en relativt stor utbredelse i utvalget. Det er derfor verdt å se nærmere på elevenes misoppfatninger, og jeg vil nå rette fokus mot mitt andre forskningsspørsmål, *hvilke sammenhenger mellom eller systematikk for misoppfatningene kan vi finne?* Her ønsker jeg å se om det er mulig å finne et system for misoppfatningene, og relevante problemstillinger er da:

- I hvilken grad er det de samme elevene som viser tegn på flere av misoppfatningene?
- Hvordan korrelerer misoppfatningene med hverandre?
- Hvilke koblinger er det mellom trinn, elevenes dyktighet og mulige misoppfatninger?

5.4.1 Er det de samme elevene som viser tegn på alle misoppfatninger?

Ved å se samlet på de fem misoppfatningene finner vi som tidligere nevnt, at det til sammen er 373 av de 739 elevene som viser tegn på én eller flere misoppfatninger. Dette er 51 % av elevene. Av disse er det 225 elever som viser tegn på én misoppfatning, 103 to misoppfatninger, 40 tre misoppfatninger og 5 fire misoppfatninger. Det betyr at 60 % av elevene som viser tegn på misoppfatninger, kun viser tegn på én misoppfatning. Om jeg ser nærmere på hvilke misoppfatninger den enkelte elev viser tegn på, får jeg ut statistikken i figur 41.



Figur 41 Antall elever med tegn på ulike kombinasjoner av misoppfatninger.

Figuren ovenfor viser at av de elevene som viser tegn på kun én misoppfatning så er det 198 elever (88 %) som viser tegn på kun misoppfatning A, D eller E. Tidligere i analysedelen har vi sett at 11 % av alle elevene i studien viser tegn på misoppfatning B, men analysene viser at denne misoppfatningen opptrer i mye mindre grad alene. Det er bare 14 elever som viser tegn på kun misoppfatning B, mens 68 elever viser tegn på denne misoppfatningen i kombinasjon med én eller flere andre misoppfatninger. Av figuren kan det også se ut som ulike kombinasjoner av misoppfatningene A, D og E og B, D og E er de mest vanlige. Kombinasjonene AD og BE er for eksempel de mest frekvente kombinasjonene for elever med tegn på mer enn én misoppfatning.

5.4.2 Hvordan korrelerer misoppfatningene med hverandre?

Selv om analyseresultatene indikerer at det vanligste er å vise tegn på kun én misoppfatning, så er det tall i figur 41 som indikerer at enkelte kombinasjoner av misoppfatninger er mer vanlig enn andre. På grunn av dette fant jeg det interessant å undersøke hvordan de ulike misoppfatningene korrelerer med hverandre. For å se nærmere på sammenhengen mellom misoppfatningene summerte jeg elevenes prestasjon (råskåre) tilknyttet hver misoppfatning, og kjørte deretter en korrelasjonsanalyse for disse summene. Resultatet av denne analysen er vist i tabell 7. Her ser det ut til at det er misoppfatningene B, C og E som korrelerer best med hverandre. Dette er tre misoppfatninger som ifølge teoridelen kan knyttes til heltallstenkning, og derfor er det kanskje forventet at de har høy korrelasjon. Ellers tyder analysene på at det er liten korrelasjon mellom misoppfatningene, og det kan være en forklaring på at det er vanligst å vise tegn på kun én misoppfatning.

Tabell 7 Korrelasjon mellom misoppfatningene.

	Sum A	Sum B	Sum C	Sum D	Sum E
Sum A		0,300	0,289	0,244	0,287
Sum B	0,300		0,514	0,266	0,555
Sum C	0,289	0,514		0,310	0,571
Sum D	0,244	0,266	0,310		0,292
Sum E	0,287	0,555	0,571	0,292	

5.4.3 Er det koblinger mellom elevenes trinntilhørighet og dyktighet, og misoppfatningene deres?

Tidligere i analysedelen så vi at det var signifikante forskjeller mellom elevenes prestasjoner på oppgavesettet som helhet, men vi finner ikke de samme forskjellene om vi ser på gjennomsnittlig antall misoppfatninger per elev (tabell 8). Variansanalyser med Post hoc testing viser at det er signifikant forskjell på signifikansnivå lik 0,01 mellom 5. og 7. trinn, og på signifikansnivå lik 0,05 mellom 6. og 7. trinn, mens det ikke er signifikant forskjell mellom gjennomsnittlig antall misoppfatninger per elev for 5. og 6. trinn. Effektstørrelsen på forskjellen mellom 5. og 6. trinn er cirka 0,2, altså har ett års skolegang liten effekt på gjennomsnittlig antall misoppfatninger. Analyseresultatene kan altså indikere at forskjellen mellom trinnene er mindre når det gjelder antall misoppfatninger per elev, enn den er på elevenes prestasjon på hele oppgavesettet.

Tabell 8 Gjennomsnittlig antall misoppfatninger per elev. Fordelt på trinn.

Trinn	Gjennomsnittlig ant. misoppfatninger per elev	Standardavvik	Standardfeil
5.	0,97	0,966	0,062
6.	0,78	0,943	0,061
7.	0,58	0,837	0,034

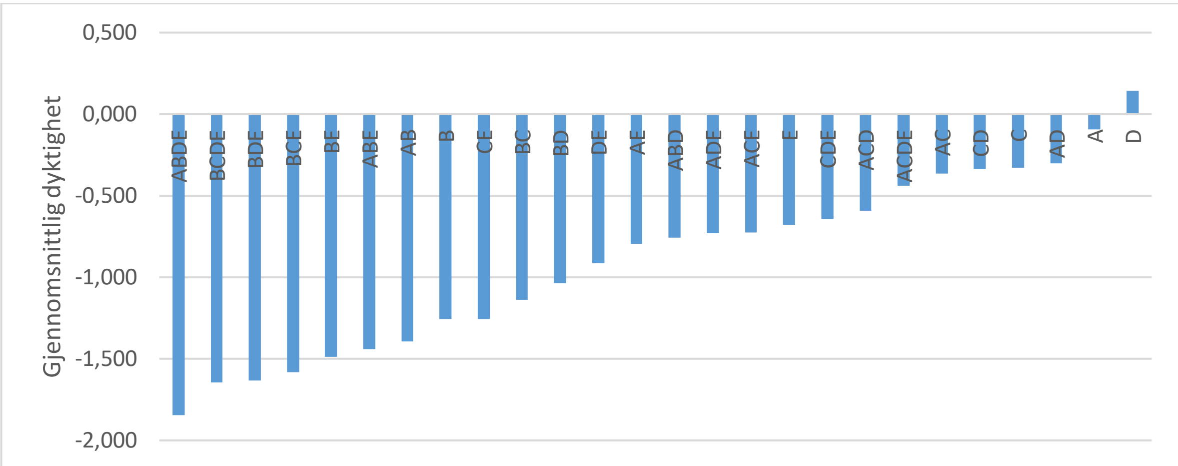
I tabell 9 har jeg sett på hvordan de tolv hyppigste kombinasjonene av misoppfatninger varierer mellom trinnene. Dette er kombinasjoner som er observert hos minimum ni elever. Vi finner alle kombinasjonene på alle de tre trinnene. Trinnet hvor det er størst andel elever med den enkelte kombinasjon har grønn farge, mens gul farge indikerer den minste andelen. Vi ser da at for enkelte kombinasjoner finner vi den største andelen av elevene på 6. og 7. trinn. For eksempel er 38,3 % av de elevene som viser tegn på kun misoppfatning A fra 7. trinn. Det er også verdt å merke seg at kombinasjonene A og BDE er minst utbredt på 5. trinn. Til sammen er tre av de tolv kombinasjonene mer utbredt på 6. trinn enn på 5. trinn, og fire av de tolv er mer utbredt på 7. trinn enn på 6. trinn.

Tabell 9 Fordeling på trinn for de tolv hyppigste kombinasjoner av misoppfatninger.

Misoppfatning	5. trinn	6. trinn	7. trinn
A	25,0%	36,7%	38,3%
AD	40,9%	27,3%	31,8%
ADE	41,7%	41,7%	16,7%
AE	54,5%	36,4%	9,1%
B	50,0%	28,6%	21,4%
BD	20,0%	66,7%	13,3%
BDE	22,2%	44,4%	33,3%
BE	65,0%	30,0%	5,0%
C	61,5%	15,4%	23,1%
D	31,8%	29,4%	38,8%
DE	66,7%	16,7%	16,7%
E	41,5%	37,7%	20,8%

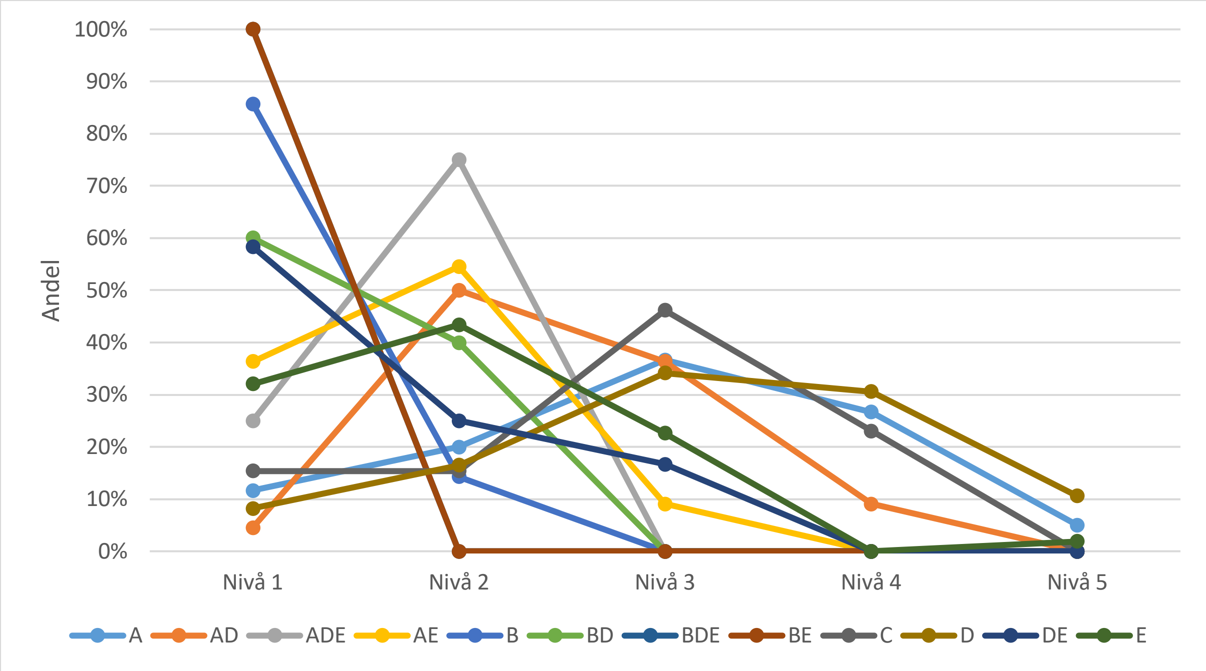
Resultatene i tabell 8 og 9 tyder altså på at elevene på 5. trinn viser tegn på flere misoppfatninger enn elevene på 6. og 7. trinn, men det er ikke slik at alle kombinasjoner av misoppfatninger er mest utbredt blant elevene på 5. trinn. Dette kan indikere at elevenes trinntilhørighet kan ha betydning for hvilke kombinasjoner av misoppfatninger de viser tegn på. Spørsmålet videre blir om elevenes dyktighet kan ha den samme betydningen.

I figur 42 ser vi gjennomsnittlig dyktighet til elevene med ulike kombinasjoner. Her ser vi en tendens til at elever med kombinasjoner der misoppfatningene B og E er inkludert, kommer ut med lavest dyktighet. Dette harmonerer godt med at oppgavene knyttet til disse misoppfatningene hadde lav gjennomsnittlig vanskegrad. Tidligere analyser viste også at tegn på disse misoppfatningene var mest utbredt på 5. trinn og til dels 6. trinn. Innholdsmessig er misoppfatningene «jo større nevner (eller teller), jo større brøk» (B) og «teller (eller nevner) er et isolert tall» (E) knyttet til heltallstenkning.



Figur 42 Gjennomsnittlig dyktighet til elever med tegn på kombinasjoner av misoppfatninger.

Videre har jeg sett på hvordan de tolv hyppigste kombinasjonene varierer mellom elever på ulike dyktighetsnivå. Resultatet av denne analysen ser vi i figur 43. Det som er verdt å merke seg her er at enkelte kombinasjoner av misoppfatninger kun forekommer hos elever på nivå 1 og 2, mens vi finner andre kombinasjoner hos elever på alle nivåer. Vi ser også at alle kombinasjoner der misoppfatning B er inkludert, kun forekommer hos elever på nivå 1 og 2. For eksempel er alle de 20 elevene som viser tegn på kombinasjonen BE på nivå 1. For de fleste kombinasjoner der B ikke er inkludert, er kombinasjonene hyppigere hos elever på nivå 2, og til dels nivå 3, enn hos elever på nivå 1.



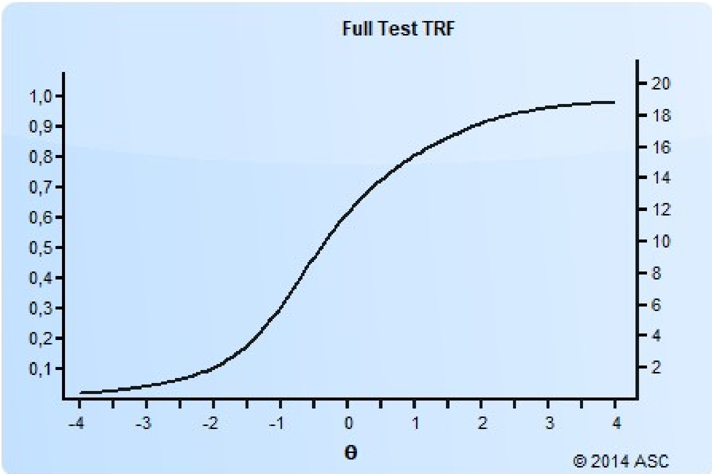
Figur 43 Kombinasjoner av misoppfatninger. Fordelt på nivå.

Mønsteret med at elevene som viser tegn på kombinasjoner med misoppfatning B er de med lavest dyktighet, ser vi også om vi studerer theta til elevene som viser tegn på misoppfatninger. I tabell 10 ser vi gjennomsnittlig dyktighet til elever som viser tegn på de ulike misoppfatningene. Av tabellen ser vi at de elevene som viser tegn på misoppfatning B har den laveste gjennomsnittlige dyktigheten.

Tabell 10 Gjennomsnittlig dyktighet for elever som viser tegn på de ulike misoppfatningene.

Misoppfatning	**Antall elever**	**Dyktighet (theta)**
«Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse» (A)	132	-0,433
«Jo større nevner (eller teller), jo større brøk» (B)	82	-1,376
«Differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til en brøk» (C)	45	-0,734
«Brøkstrek er lik komma» (D)	169	-0,336
«Teller (eller nevner) er et isolert tall» (E)	143	-1,008

Om vi knytter gjennomsnittverdiene for dyktighet til oppgavesettets test response function (figur 44), vil en elev med tegn på misoppfatningen «jo større nevner (eller teller), jo større brøk» (B) har cirka 25 % sannsynlighet for å løse en oppgave korrekt, mens en elev med tegn på misoppfatningen «brøkstrek er lik komma» (D) har cirka 50 % sannsynlighet for å løse den samme oppgaven. Analysene av de tolv hyppigste kombinasjonene av misoppfatninger (figur 42), bekrefter at de 14 elevene som viser tegn på kun misoppfatning «jo større nevner (eller teller), jo større brøk» (B) har en mye lavere dyktighet enn de andre elevene som viser tegn på kun én misoppfatning. Vi ser også at de 80 elevene som viser tegn på kun misoppfatning D er de elevene med den høyeste dyktigheten, om vi ser bort fra de som ikke viser tegn til noen misoppfatninger.



Figur 44 Test response function (gjennomsnittlig ICC) for hele prøven.

Oppsummert kan vi si at resultatene indikerer at det vanligste er å vise tegn på kun én misoppfatning. Resultatene tyder dermed på at det ikke er noen automatikk i at en elev har flere misoppfatninger, om man først har én misoppfatning. Det gjennomsnittlige antallet misoppfatninger per elev er høyest på 5. trinn, men samtidig ser vi at ikke alle kombinasjoner av misoppfatninger er vanligst blant elevene på 5. trinn. Elever med tegn på misoppfatningene «jo større nevner (eller teller), jo større brøk» (B) og «teller (eller nevner) er et isolert tall» (E) har lavest gjennomsnittlig dyktighet, og dette resultatet kan tyde på at det er viktig for senere forståelse av brøk å lede elevene ut av heltallstenkningen som er knyttet til disse misoppfatningene.

6 Drøfting

Denne studien har undersøkt utbredelsen av noen vanlige misoppfatninger knyttet til brøk hos elever på mellomtrinnet og om det er mulig å finne sammenhenger mellom eller en systematikk for misoppfatningene. Misoppfatninger ble tidligere i oppgaven definert som en systematisk, konsekvent feiltekning (Brekke, 2002; Statped, 2019). På grunnlag av denne definisjonen ble tegn på misoppfatning i denne studien, definert som samme feiltenkning i flere oppgaver. I andre studier er utbredelse stort sett relatert til enkeltoppgaver (Aliustaoğlu et al., 2018; Makonye & Fakude, 2016; Mitchell & Horne, 2010; Mohyuddin & Khalil, 2016; Newstead & Murray, 1998; Ryan & Williams, 2007). Det er viktig å merke seg denne forskjellen, når resultatene fra denne studien blir sammenlignet med andre resultater.

I analysekapitlet så vi at utbredelsen varierte fra misoppfatning til misoppfatning, men vi kan allikevel trekke frem noen hovedfunn i denne studien:

- Misoppfatninger knyttet til brøk er vanlig hos elever på mellomtrinnet.
- Enkelte misoppfatninger er like utbredt på 7. trinn som de er på 5. trinn.
- Enkelte misoppfatninger finner vi kun hos elevene med lavest dyktighet.
- Enkelte misoppfatninger er mer grunnleggende enn andre.

I dette kapitlet vil jeg drøfte mine hovedfunn opp mot relevant teori, og i tillegg se nærmere på hvilke didaktiske implikasjoner resultatene kan ha for senere undervisning og læring av brøkbegrepet. Jeg vil også drøfte min forskningsmetode og hva min studie kan bidra med til forskningsfeltet.

6.1 Hva sier utbredelsen av misoppfatninger om elevers utfordringer?

Denne studien viser at misoppfatninger knyttet til brøk er vanlig hos mellomtrinnselevene i utvalget, og studien bekrefter dermed det andre studier og tester har vist. Det er mange barn som er i misoppfatninger (Aliustaoğlu et al., 2018; Bjerke et al., 2013; Makonye & Fakude, 2016; Mitchell & Horne, 2010; Mohyuddin & Khalil, 2016; Newstead & Murray, 1998; Ryan & Williams, 2007). I denne studien er det over halvparten av elevene som er i én eller flere misoppfatninger, og da er det altså snakk om elever som viser en konsekvent feiltenkning i flere oppgaver. Hadde jeg derimot valgt å definere elever i misoppfatning som feiltenkning i minimum én oppgave, så hadde andelen elever i misoppfatning vært enda større. Jeg gjorde et forsøk med dette, og så da at andelen elever med tegn på misoppfatning steg fra 51 % til 64 %. Se vi på den enkelte misoppfatning vil måten å definere misoppfatning på ha enda større betydning. I denne studien finner jeg at 11 % av elevene er i misoppfatningen «jo større nevner (eller teller), jo større brøk». Dette er da elever som viser samme feiltenkning i minimum fire av fem oppgaver. Hadde vi derimot sett kun på oppgave 5, ville vi hevdet at 26 % av elevene var i den samme misoppfatningen. Hvordan man definerer å være i en misoppfatning, vil dermed ha betydning for hvordan man bør tolke resultater i studier. Uavhengig av definisjon på misoppfatninger, er det derimot liten tvil om at misoppfatninger knyttet til brøk er vanlig. Hva kan være årsaken til at så mange elever havner i misoppfatninger?

Resultatene i denne studien indikerer at mange elever er i misoppfatninger knyttet til brøk, og ifølge Vamvakoussi og Vosniadou (2010) skyldes dette at elevene må gjennom en konseptuell endring når de skal lære om brøk og rasjonale tall. Grunnlaget for denne forklaringen er rammeverksteorien for begrepslæring (Vosniadou, 1994). Før elevene møter brøk og rasjonale tall har de etablert et teoretisk rammeverk for tall, basert på egenskapene til heltall. I møtet med brøk og rasjonale tall vil da elevene i utgangspunktet bruke additive mekanismer for læring (assimilasjon), for å berike det rammeverket de allerede har etablert. Når de derimot erfarer at informasjonen om brøk og rasjonale tall kommer i konflikt med tidligere informasjon, oppstår det et behov for å revidere eller endre det etablerte rammeverket. Denne endringen kan ta lang tid, og det er i denne prosessen misoppfatninger kan oppstå. Misoppfatningene er bevis på at elevene forsøker å gi mening til brøk og rasjonale tall gjennom å bygge på sin opprinnelige forståelse av tall (DeWolf & Vosniadou, 2015; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Vosniadou, 1994). Siden misoppfatninger knyttet til brøk er så vanlig hos elevene, er det interessant å drøfte begreper knyttet til brøk som er utfordrende for elevene.

Den første begrepet jeg vil se nærmere på i drøftingen er likedeling. Dette begrepet er synlig i misoppfatningen «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse». Denne misoppfatningen har stor utbredelse i denne studien, og det samsvarer med funn i andre studier (Matematikksenteret, 2019b; Ryan & Williams, 2007). Samtidig er det verdt å merke seg at den forekommer hos elever på alle dyktighetsnivå og er jevnt fordelt på trinn. Resultatene kan tyde på at elevene ikke er bevisst på delenes størrelse, og fordelingen på trinn og dyktighetsnivå kan i tillegg tyde på at denne misoppfatningen er vedvarende. Den jevne fordelingen kan vi også tolke som en bekreftelse på at endringen av rammeverk er en lang og krevende prosess (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Litteratur bekrefter at elever har utfordringer knyttet til begrepet likedeling (Aliustaoğlu et al., 2018; McIntosh, 2007; Ryan &

Williams, 2007; Yoshida & Sawano, 2002). Likedeling er en grunnleggende mekanisme for å bygge opp forståelse for brøkbegrepet (Lamon, 2012; Petit et al., 2015). Selv om elevene ofte har gode intuitive strategier for deling, trenger de ifølge Lamon (2012) påminnelser om de grunnleggende reglene for deling:

- Helheten må deles i like deler.
- Hvis helheten består av mer enn et objekt, må objektene ha samme størrelse.
- Lik betyr lik i mengde (areal), men delene har ikke alltid samme antall.
- Like deler trenger ikke å ha samme form.
- Form må tilpasses antall deler (noen ganger er et rektangel bedre enn en sirkel).

I undervisningen kan elevene få erfaringer med de grunnleggende reglene gjennom å bli utsatt for mange og varierte delingsaktiviteter (Lamon, 2012). Det blir hevdet at tidlige erfaringer med fysisk deling av objekter eller sett av objekter kan være like viktig for barns utvikling av brøkforståelse som telling er for deres utvikling av heltallsforståelse (Petit et al., 2015, s. 57). Deling er en veldig konkret handling, og det vil derfor være fornuftig å bruke varierte visuelle og taktile modeller i delingsaktivitetene. Neagoy (2017) skriver at sirkelmodeller som representerer pizzaer, uten tvil er den vanligste arealmodellen brukt i brøkundervisning, og det fikk jeg bekreftet i det ene intervjuet mitt. Eleven snakket ensidig om deling av pizza når han skulle forklare brøkbegrepet, og jeg spurte derfor om det måtte være brøk. Da svarte han at det også kunne være kake. Det virket som om elevens forståelse av brøkbegrepet var veldig knyttet til de modellene han hadde møtt. På bakgrunn av dette vil jeg si at variasjon av modeller vil gi elevene en dypere forståelse av brøkbegrepet. I undervisningen bør elevene møte arealmodeller (ulike geometriske figurer), lengdemodeller (for eksempel tallinjer og centikuber) og diskrete modeller (for eksempel sett av prikker). Gjennom å variere modeller, møter elevene varierte delingsaktiviteter der de kan få mange erfaringer med de grunnleggende reglene for deling og likedeling.

Et annet sentralt begrep som er synlig i misoppfatningene er tallstørrelse. Resultatene i studien tyder på at det er viktig at elevene klarer å se på brøk som en tallstørrelse. Dette er spesielt knyttet til misoppfatningene «jo større nevner (eller teller), jo større brøk» og «teller (eller nevner) er et isolert tall». To misoppfatninger hvor utbredelsen ikke er like jevnt fordelt på trinn og dyktighetsnivå. Analysene viser at disse misoppfatningene er mye utbredt, og vi finner flertallet av elever i disse misoppfatningene på 5. trinn og på dyktighetsnivå 1.

Utfordringen er at elevene ikke klarer å se brøk som en egen tallstørrelse. Elevene velger istedenfor å fokusere på teller og nevner som isolerte tall, og de bruker en heltallstenkning. Denne problematikken omtalte jeg i teoridelen som «whole number bias» (Ni & Zhou, 2005; Siegler et al., 2011). Ser vi på enkeltoppgaver, er andelen feilsvar som indikerer de to aktuelle misoppfatningene, på nivå med resultatene angitt i annen litteratur (Newstead & Murray, 1998; Ryan & Williams, 2007), og vi har dermed flere bevis på at heltalltenkning er svært vanlig hos elever.

Ved heltallstenkning vil elevene ikke være i stand til å vurdere størrelsen til en brøk. Flere forskere har omtalt viktigheten av evnen til å vurdere størrelsen til en brøk, og Kilpatrick et al. (2001, s. 235) skriver at «of all the ways which rational numbers can be interpreted and used, the most basic is the simplest - rational numbers are numbers. That fact is so fundamental that it is easily overlooked». Kanskje er det slik at lærere i mange sammenhenger tar det for gitt at elever klarer å se på brøk som et tall, siden det er så elementært. Det å se brøk som en tallstørrelse handler om å ha en god konseptuell forståelse, og Hecht og Vagi (2010) skriver at dette kan hjelpe elevene med å unngå prosedyrefeil ved utregninger. Hvordan skal for eksempel elever klare å vurdere svarene på regnestykker som $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ om de ikke er i stand til å vurdere størrelsen til brøkene? Da kan svaret like gjerne være 19 eller 21. I tillegg skriver Wong og Evans (2011) at elever som klarer å se på brøker som en tallstørrelse viser et høyere nivå av konseptuell forståelse for likeverdige brøker, og spørsmålet blir dermed hvordan vi skal klare å lede elevene bort fra heltalltenkningen.

Ni og Zhou (2005) hevder at grunnen til heltallstenkningen, er at elevene overgeneraliserer telle-skjemaer de har møtt i arbeidet med heltall. For å forstå brøkbegrepet er det avgjørende at elevene oppdager forskjellen mellom kvantifisering av diskrete (heltall) og kontinuerlige (brøk) mengder. Ni og Zhou skriver videre at det er to ulike tilnærminger som kan hjelpe elevene mot en god forståelse for begrepet brøk og skape en konseptuell transformasjon fra heltall til brøk og rasjonale tall. Den ene tilnærmingen er å erstatte en statisk del-hel tilnærming med en tilnærming som tar utgangspunkt i likedeling og måling. Likedelingen er knyttet til multiplikasjon og divisjon, mens måling tar utgangspunkt i prinsippet om at alle mengder kan måles med en mindre mengde eller deles i mindre mengder. En slik tilnærming harmonerer veldig godt med viktigheten av å bruke varierte modeller som er omtalt tidligere. Elevene må få oppleve brøk som noe annet enn statiske figurer der to av fem deler er fargelagt.

Den andre tilnærmingen som Ni og Zhou (2005) trekker frem er å planlegge undervisningen om heltall, brøk og rasjonale tall samtidig. Dette handler om å planlegge en helhetlig opplæring som skal skape en god tallforståelse. Gjennom en slik tilnærming kan man også oppnå det Siegler, Thompson og Schneider (2011) har som mål i sin «integrated theory of whole number and fractions development». Sentralt i denne teorien er å forstå at alle tall er størrelser som kan sammenlignes og plasseres på en tallinje, samtidig som det er viktig å fokusere på likheter og ulikheter mellom ulike typer tall. Jeg tenker at det kanskje er enklere å synliggjøre disse likhetene og ulikhetene, om vi ikke behandler heltall og brøk som separate emner. Et mer helhetlig og simultant opplæringsløp for tall, kan også hindre at elevene danner separate teoretiske rammeverk for heltall og brøk. Det beste vil være om elevene istedenfor danner et helhetlig teoretisk rammeverk for tall, der likheter og ulikheter mellom ulike typer tall er godt ivaretatt. Mangel på et helhetlig teoretisk rammeverk for tall er omtalt som en kilde til elevers problemer med brøk (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Jeg synes også det er interessant å drøfte den misoppfatningen som i min studie viser seg å være minst utbredt. Dette var misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner, avgjør brøkens størrelse». I teoridelen står det at denne misoppfatningen kan skyldes både heltalltenkning og en additiv tenkning. I forskning er en slik misoppfatning omtalt som «gap thinking» (Bjerke et al., 2013; Mitchell & Horne, 2010). Det som er interessant er derimot at en slik tenkning er mye mer utbredt i andre studier og tester (Mitchell & Horne, 2010; Mohyuddin & Khalil, 2016; Ryan & Williams, 2007) enn i denne studien. Ser vi på resultater fra for eksempel FRAMM-prosjektet var det 25 % av elevene på 6. trinn som svarte at $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, mens tilsvarende andel hos meg var 4 %. Hva kan så være grunnen til at «gap thinking» er mye mer utbredt i andre studier og tester? Ved å sammenligne mine oppgaver med oppgaver brukt i andre studier og tester, ser jeg at forskjellen i utbredelse kan skyldes oppgaveformat. Jeg har valgt å bruke åpne oppgaver (oppgave 4 og 8), mens alle andre resultater er knyttet til flervalgsoppgaver. Det er et vanlig prinsipp ved utvikling av flervalgsoppgaver at man skal bruke trolige elevsvar som alternativ (Haladyna, Downing & Rodriguez, 2002), men det spørs om resultatene da gir et riktig bilde på hvor utbredt en misoppfatning er. Jeg tolker forskjellen mellom resultatene fra denne studien og andre studier som om at svaralternativ kan lede eller lokke elever inn i misoppfatninger de egentlig ikke er i. Hvilken innvirkning svaralternativer har på elevers misoppfatninger kunne vært et interessant tema å se på i fremtidig forskning.

6.2 System i elevers misoppfatninger

I starten av kapitlet ble det nevnt at et hovedfunn i studien var at vi kunne ane et system i misoppfatningene, der enkelte misoppfatninger er mer grunnleggende enn andre. Analysene viser at oppgavene som er ment å avdekke misoppfatningene «differansen mellom teller og nevner, avgjør brøkens størrelse» og «teller (eller nevner) er et isolert tall» har lavere gjennomsnittlig vanskegrad enn oppgavene koblet til andre misoppfatninger. Det er også slik at elevene som viser tegn på misoppfatningene «differansen mellom teller og nevner, avgjør brøkens størrelse» og «teller (eller nevner) er et isolert tall» har lavere gjennomsnittlig dyktighet enn elevene som viser tegn på andre misoppfatninger. En mulig tolkning av disse resultatene er at det er grunnleggende å komme seg ut av heltallstenkning.

Modellen til Behr et al. (1983) i figur 2 støtter ikke at det er grunnleggende å komme seg ut av heltallstenkning, i hvert fall er ikke dette eksplisitt i modellen. Modellen indikerer at brøkaspektet mål/tallstørrelse er viktig for elevers senere problemløsing og addisjon med brøk, men samtidig indikerer modellen at likedeling og aspektet del-hel er på et mer grunnleggende nivå. Uavhengig av hvor sentral plass brøkaspektet mål/tallstørrelse skal ha i en slik modell, vil jeg påstå at det å se brøk som en tallstørrelse har stor betydning for alle bruksområdene i modellen til Behr et al.. Det vil for eksempel være vanskelig å vurdere likeverdighet, om man ikke er i stand til å vurdere brøkenes størrelse. I denne sammenheng er det interessant at Thomas Kieren lanserte en ny modell («Fire-tre-fire modellen») for brøkaspektene (Mitchell, 2012, s. 514). I denne modellen er aspektet del-hel borte, mens begrepene deling, kvantitativ likeverdighet og helhetsforming er lagt inn som grunnleggende aspekter. Kvantitativ likeverdighet er sterkt koblet til det å kunne vurdere størrelsen til en brøk, og kanskje er derfor «fire-tre-fire modellen» mer i tråd med mine resultater. Viktigheten av kunnskap om brøkers størrelse blir også bekreftet av forskning som sier at denne kunnskapen har stor betydning for elevers senere læring i algebra (Booth et al., 2014). Min påstand på bakgrunn av resultatene i denne studien og annen forskning er at kunnskap om brøkers størrelse bør ha en sentral rolle i modeller for brøkbegrepet, og kanskje en mer sentral rolle enn det har i modellen fra Behr og hans kolleger.

Ellers ser vi av analysene at elevene er i ulike kombinasjoner av misoppfatninger. Ser vi nærmere på elevene som viser tegn på misoppfatninger, så er det derimot et stort flertall av elevene som viser tegn på kun én misoppfatning (se fig. 42). Dette kan vi tolke som at det ikke er noen automatikk i at om du har én misoppfatning knyttet til brøk, så har du også mange flere. I denne studien innebærer det at en elev som er i den mest grunnleggende misoppfatningen, ikke nødvendigvis er i alle de andre misoppfatningene. Ifølge Ay (2017) er det slik at ny kunnskap blir bygd på gammel kunnskap, og dette kan være en forklaring på at elevene har ulike misoppfatninger. Elevene kommer inn i undervisningen med ulik kunnskap, og siden tidligere kunnskap ofte er grunnlaget for misoppfatningene, så vil de også komme i ulike misoppfatninger. Rammeverksteorien til Vosniadou (1994) kan også forklare det faktum at elevene i liten grad har flere ulike misoppfatninger. Ifølge DeWolf og Vosniadou (2015) er det nemlig slik at misoppfatninger kun oppstår på de eksakte områdene, der elevene opplever en konflikt mellom ny informasjon og eksisterende rammeverk. Ulike elever vil oppleve konflikter på forskjellige områder, og dermed vil de også komme i forskjellige misoppfatninger. Blant elevene som viser tegn på kun én misoppfatning, så er misoppfatningene «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse», «teller (eller nevner) er et isolert tall» eller «brøkstrek er lik komma» vanligst. Det er faktisk mer enn en firedel av elevene i utvalget som viser tegn på kun én av disse misoppfatningene. De to førstnevnte misoppfatningene her er kun knyttet til begrepet brøk, og jeg mener disse resultatene igjen synliggjør viktigheten av begrepene likedeling og tallstørrelse.

6.3 Studiens didaktiske implikasjoner

Denne studien har bekreftet at misoppfatninger er svært vanlig hos elever, og i tillegg viser studien at det er to begreper som er utfordrende for elevene; likedeling og tallstørrelse. Jeg har tidligere nevnt at lærere kan arbeide med de to begrepene gjennom delingsaktiviteter med varierte modeller (Lamon, 2012; Petit et al., 2015) og å plassere brøker på tallinjer (Pearn & Stephens, 2004; Siegler et al., 2011). I arbeidet med brøk bør man også fokusere på andre områder enn bare disse to begrepene, og det er flere forskere som mener det er viktig å utvikle konseptuell forståelse for brøk og rasjonale tall. For å utvikle konseptuell forståelse er det anbefalt å ha et stort fokus på hva en brøk betyr, tydeliggjøre forskjeller mellom brøk og heltall, og bruke varierte representasjonsformer for å vise sammenhenger (Baroody & Hume, 1991; Clarke & Roche, 2009; Moss & Case, 1999). I tillegg er det flere som trekker frem viktigheten av å fokusere på ulike aspekter av brøk, og ikke bare del-hel (Bjerke et al., 2013; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Fokus på konseptuell forståelse innebærer også et mindre fokus på prosedyrer.

Den hyppige forekomsten av misoppfatninger bør også få mer generelle implikasjoner for læreres undervisning. Lærere bør legge mer vekt på misoppfatninger i undervisningen, og det kan da være lurt å legge opp undervisning etter prinsippene for diagnostisk undervisning (Brekke, 2002). I en slik undervisning blir det lagt stor vekt på å få frem elevenes misoppfatninger, og deretter er målet å lede elevene ut av disse oppfatningene gjennom kognitive konflikter og gode matematiske diskusjoner. En slik undervisning forutsetter at lærere har stor kunnskap om mulige misoppfatninger, fordi det å kunne forutse mulige elevsvar blir ansett som et viktig prinsipp for å lykkes med matematiske diskusjoner (Smith & Stein, 2011).

All matematikkundervisning trenger ikke å være diagnostisk undervisning. I dag er det flere som fremmer ambisiøs matematikkundervisning (Anthony, Hunter, Hunter & Duncan, 2015; Lampert, Beasley, Ghousseini, Kazemi & Franke, 2010), og flere av prinsippene og praksisene (Matematikksenteret, 2019a) for ambisiøs matematikkundervisning fanger opp det diagnostiske aspektet. I en ambisiøs matematikkundervisning er det viktig å synliggjøre elevenes matematiske tenkning, alle elevers bidrag skal verdsettes og matematisk læring er et samspill mellom lærer og elev. Jeg mener det viktigste er at elevenes misoppfatninger blir sett på som verdifulle bidrag til videre læring. Med dette utgangspunkt blir det lærerens utfordring å lede elevene ut av misoppfatning og mot god matematisk læring.

6.4 Drøfting av metode og studiens bidrag til forskningsfeltet

I dette delkapitlet vil jeg se med et kritisk blikk på metodene som er brukt i studien, og kommentere hva studien kan bidra med til forskningsfeltet.

Først vil jeg se med et kritisk blikk på oppgavesettet mitt. Her ville jeg i etterkant gjort noen endringer. Med tanke på tiden elevene brukte til å gjennomføre testen vil jeg si at omfanget var riktig, men jeg mener selv at vektleggingen av de aktuelle misoppfatningene ble litt uheldig. Ifølge min egen valideringen av oppgavene ble det for mange oppgaver knyttet til misoppfatningen «jo større nevner (eller teller), jo større brøk», og i tillegg tyder resultatene på at enkelte av disse oppgavene målte andre aspekter enn bare den aktuelle misoppfatningen. Dette gjelder spesielt oppgavene med halvering/dobling. De kommer ut med høy vanskegrad i IRT-analysen. Det kan se ut til at begrepene halvering/dobling har gjort oppgavene for komplekse, og oppgavene har dermed ikke målt det som var intensjonen. Elevenes forklaringer ga meg verdifull informasjon, og i en eventuell oppfølgingsstudie ville det derfor vært positivt å ha forklaringsruter i flere oppgaver. I enkelte oppgaver (for eksempel 10 og 14) er flere misoppfatninger knyttet til elevenes feilsvar, og da ville en forklaring hjulpet meg med å tolke de ulike svarene. I utgangspunktet hadde jeg også et ønske om å se på om misoppfatningene kunne være avhengige av representasjonsform, men det var jeg ikke bevisst nok på når jeg satte sammen settet mitt. Det er indikasjoner på at elevene har mest utfordringer med symbolrepresentasjon, og derfor kunne det vært interessant å utarbeide et oppgavesett som hadde mer fokus på ulike representasjonsformer. Et større fokus på varierte representasjonsformer ville medført et behov for flere oppgaver knyttet til hver misoppfatning, og resultatet av det ville vært at jeg kanskje måtte valgt å fokusere på færre misoppfatninger.

I etterkant er det altså flere ting som kunne vært gjort annerledes i oppgavesettet, men på tross av dette mener jeg selv at settet fungerte godt. Elevene brukte passe tid på gjennomføringen, oppgavetekstene var forståelige for elevene, elevenes prestasjoner viser en forventet utvikling fra 5. til 7. trinn og oppgavene har bidratt til å avdekke flere tegn på misoppfatninger. Det er altså flere ting som indikerer at oppgavesettet har hatt en god validitet, og jeg kommer også ut med en høy reliabilitet i analysen.

I metodekapitlet skrev jeg at tre av de fire intervjuene jeg gjennomførte ble mindre informative enn ønskelig. Det fjerde intervjuet var mer vellykket. I dette intervjuet var jeg mer bevisst på å bli med på en «reise» i elevens verden. Sammen brukte vi god tid på å snakke om svarene eleven hadde gitt, og jeg følte at jeg fikk et godt innblikk i elevens oppfatninger om brøk. Her ble ikke den kognitive konflikten fremprovosert før langt ut i intervjuet. På bakgrunn av mine erfaringer vil jeg si at det hadde vært positivt med en pilotering av intervjuguiden. Først og fremst for å trene meg i rollen som intervjuer.

Selv om alle intervjuene ikke ble så vellykkede, vil jeg karakterisere studien min som vellykket. Den skulle først og fremst være en kvantitativ studie, og kilden til de kvantitative dataene har fungert godt. I tillegg er det en styrke for studien at jeg har et stort og gjennomtenkt utvalg. Utvalget er riktignok begrenset til skoler og elever i Trøndelag, men jeg mener at et utvalg på nesten 750 elever, allikevel betyr at vi til en viss grad kan generalisere funnene i studien. Jeg mener min studie er den første i Norge som med et kvantitativt blikk sier noe om utbredelsen av misoppfatninger på de ulike trinnene på mellomtrinnet, og i tillegg mener jeg det er en styrke at jeg har sett på misoppfatninger som en systematisk, konsekvent feiltenkning på flere oppgaver. Matematikksenterets FRAMM-prosjekt kan si noe om hvordan utbredelsen utvikler seg fra mellomtrinnet til ungdomstrinnet, men det prosjektet sier ikke noe om hvordan utbredelsen utvikler seg innad på mellomtrinnet. Her kan min studie bidra med nyttig informasjon til norske matematikklærere og forskere. Det er for eksempel et interessant funn at enkelte misoppfatninger ser ut til å være like utbredt på alle trinn, mens andre er mer trinnavhengige.

7 Konklusjon og videre forskning

Hensikten med denne studien var å se på utbredelsen av noen vanlige misoppfatninger tilknyttet brøk hos et utvalg elever på mellomtrinnet. I tillegg ønsket jeg å undersøke om det var mulig å finne sammenhenger mellom eller systematikk for misoppfatningene. Bakgrunnen for studien var at brøk i mange undersøkelser fremstår som et utfordrende matematisk emne for elever, og at det av mange blir ansett som viktig å avdekke og bygge på elevers misoppfatninger i undervisningen. Et slikt syn på misoppfatninger tar utgangspunkt i at misoppfatninger er en naturlig del av elevenes læringsløp, og at det er en produktiv komponent det er viktig å bygge videre på. I studien satte jeg sammen et oppgavesett som bestod av diagnostiske oppgaver. Oppgavesettet ble besvart av 739 norske elever på mellomtrinnet. Resultatene fra datainnsamlingen ga meg muligheter til å se på utbredelsen av tegn på misoppfatninger, og i tillegg undersøke om det var mulig å finne sammenhenger mellom eller et system for de valgte misoppfatningene.

Resultatene viser at utbredelsen av misoppfatninger knyttet til brøk varierer fra misoppfatning til misoppfatning. I studien har det vært avgjørende å identifisere de elevene som viser tegn på de samme misoppfatningene i flere oppgaver. På grunnlag av denne forutsetningen, er det over halvparten av elevene i studien som viser tegn på én eller flere misoppfatninger. Analysene viser videre at utbredelsen av de ulike misoppfatningene varierer fra cirka 0,5 % til over 20 % av elevene. For fire av de fem misoppfatningen i studien er utbredelsen over 10 %. Misoppfatningen «brøkstrek er lik komma» er mest utbredt. Det er også vært å merke seg at misoppfatningen «differensen mellom teller og nevner avgjør brøkens størrelse» er veldig lite utbredt hos elevene i denne studiens utvalg. Bakgrunnen for denne misoppfatningen er det som i forskningslitteratur har blitt kalt «gap thinking», og «gap thinking» har tidligere blitt trukket frem som vanlig hos elevene. Da er det interessant at vi nesten ikke ser tegn på en slik tenkning i denne studien. Studien viser også at flere av misoppfatningene er like utbredt på 5., 6. og 7. trinn, og samtidig ser vi at misoppfatninger er noe vi finner hos alle elever, ikke bare de som presterer svakest. Ser vi nærmere på utbredelsen av misoppfatningene, så forekommer enkelte av misoppfatningene blant elever på alle dyktighetsnivå, mens andre misoppfatninger kun forekommer blant de elevene som presterer svakest.

På grunnlag av resultatene i studien kan det virke som enkelte misoppfatninger er mer grunnleggende enn andre, og vi kan ane en systematikk for misoppfatningene. Elevene som viser tegn på misoppfatninger knyttet til heltallstenkning kommer ut med lavest dyktighet i analysene. Det kan tyde på at det å skape forståelse for brøk som en tallstørrelse har stor betydning for elevenes videre arbeid med brøk. Som nevnt er det over 50 % av elevene som viser tegn på én eller flere misoppfatninger. Et stort flertall av elevene viser derimot kun tegn på én misoppfatning. Resultatene indikerer altså at misoppfatningene knyttet til heltallstenkning er grunnleggende, men samtidig tyder resultatene på at det å være i en av disse misoppfatningene, ikke nødvendigvis medfører at du er i alle andre misoppfatninger.

7.1 Videre forskning

Denne studien er begrenset til et utvalg på cirka 750 elever, men den gir klare indikasjoner på at misoppfatninger knyttet til brøk er utbredt i norske klasserom. Forekomsten av misoppfatninger blir også bekreftet i internasjonale undersøkelser som PISA og TIMSS. Både i Norge og internasjonalt er det mye kunnskap om hvilke misoppfatninger elevene er i knyttet til brøk og andre matematiske emner. Det er også flere studier som sier noe om utbredelsen av misoppfatninger på enkeltoppgaver. Spørsmålet er derimot hvilken undervisning som er best egnet for å hjelpe elevene ut av misoppfatninger. På grunnlag av dette vil det være interessant å gjennomføre studier med eksperimentelle design, der man kan forske på intervensjoner som har som mål å hjelpe elever ut av misoppfatninger. Hvilken type undervisning har best effekt med tanke på å lede elever ut av misoppfatninger? Jeg har ikke kommet over intervensjonsstudier med et slikt fokus i arbeidet med denne studien.

I denne studien kan vi ane en utvikling i utbredelsen fra 5. til 7. trinn, men svakheten er at vi ikke følger de samme elevene gjennom flere år. For å si mer om hvordan misoppfatninger utvikler seg hos elever, ville det vært interessant å forske på mer longitudinelle studier, der man kan følge de samme elevene over flere år. Da kan man for eksempel se på ved hvilke tidspunkt misoppfatninger dukker opp, og om misoppfatningen dukker opp i bestemte rekkefølger. Er det misoppfatninger som kan være indikatorer på senere misoppfatninger?

Det siste jeg vil trekke frem som et mulig forskningsfokus er oppgaveformaters betydning for misoppfatninger. De siste årene har flervalgsoppgaver fått en større rolle i norske klasserom, og det store spørsmålet er da ofte hvilke svaralternativer som skal brukes. Det vil være interessant å undersøke om svaralternativer kan lokke elever til å avgi svar som indikerer misoppfatninger, selv om elevene i utgangspunktet ikke er i de aktuelle misoppfatningene. Om alternativene gjør det, så må vi spørre oss om det er ønskelig.

Referanseliste

Aliustaoğlu, F., Tuna, A. & Biber, A. Ç. (2018). The Misconceptions of Sixth Grade Secondary School Students on Fractions. *International Electronic Journal of Elementary Education, 10*(5), 591-599.

Allen, M. J. & Yen, W. M. (2001). *Introduction to measurement theory* Waveland Press.

Anthony, G., Hunter, R., Hunter, J. & Duncan, S. (2015). How ambitious is "ambitious mathematics teaching". *Set: Research Information for Teachers, 52*(2 (10.18296)), 45-52.

Apuke, O. D. (2017). Quantitative research methods a synopsis approach. *Kuwait Chapter of the Arabian Journal of Business Management Review, 6*(11), 40-47. Hentet fra https://www.arabianjbmr.com/pdfs/Arabian%20Journal%20of%20Business%20and%20Management%20Review%20(Kuwait%20Chapter)_KD_VOL_6_11/5.pdf

Assessment Systems Corporation. (2014). Xcalibre 4.2 IRT Item parameter calibration (Versjon 4.2.2.0).

Ay, Y. (2017). A Review of Research on the Misconceptions in Mathematics Education. I D. M. Shelley & D. M. Pehlivan (Red.), *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology 2017* (s. 21-31). USA: ISRES Publishing.

Bailey, D. H., Siegler, R. S. & Geary, D. C. (2014). Early predictors of middle school fraction knowledge. *Developmental science, 17*(5), 775-785. Hentet fra https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/desc.12155

Baker, F. B. & Kim, S.-H. (2017). *The Basics of Item Response Theory Using R*. Cham: Springer International Publishing, Cham.

Baroody, A. J. & Hume, J. (1991). Meaningful mathematics instruction: The case of fractions. *Remedial and Special Education, 12*(3), 54-68.

Battaglia, M. (2008). Convenience Sampling. Hentet 15.04 2019 fra http://methods.sagepub.com/Reference//encyclopedia-of-survey-research-methods/n105.xml

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. I R. A. Lesh & M. Landau (Red.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (s. 91-126). New York: Academic Press.

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag-Resultater og analyser fra TIMSS 2015* Universitetsforlaget.

Bjerke, A. H., Eriksen, E., Rodal, C. & Ånestad, G. (2013). Når brøk ikke er et tall - Eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. *FoU i Praksis 2012*, 28-36.

Boaler, J. (2015). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching* John Wiley & Sons.

Booth, J. L. & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology, 37*(4), 247-253.

Booth, J. L., Newton, K. J. & Twiss-Garrity, L. K. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *Journal of Experimental Child Psychology, 118*, 110-118.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk* Læringssenteret (Utdanningsdirektoratet).

Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*(3), 293-316.

Clarke, D. M. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics, 72*(1), 127-138.

Cockburn, A. D. & Littler, G. (2008). *Mathematical misconceptions : a guide for primary teachers*. London: SAGE.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education*. New York: Routledge.

DeWolf, M. & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction, 37*, 39-49.

Drews, D., Dudgeon, J., Hansen, A., Lawton, F. & Surtees, L. (2017). *Children's Errors in Mathematics: Understanding Common Misconceptions in Primary Schools 4th Edition*. London: SAGE.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131. Hentet fra https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-006-0400-z

Fosnot, C. T. & Perry, R. S. (2005). Constructivism: A Psychological Theory of Learning. I C. T. Fosnot (Red.), *Constructivism: Theory, perspectives, and practice* (s. 8-38). Teachers College, Columbia University: Teachers College Press.

Fujii, T. (2014). Misconceptions and alternative conceptions in mathematics education. I *Encyclopedia of mathematics education* (s. 453-455). Springer.

Grønmo, L. S., Hole, A. & Onstad, T. (2017). *Ett skritt fram og ett tilbake: TIMSS Advanced 2015: Matematikk og fysikk i videregående skole* Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, L. S., Lindquist, M., Arora, A. & Mullis, I. V. S. (2015). TIMSS 2015 mathematics framework. I I. V. S. Mullis & M. O. Martin (Red.), *TIMSS 2015 Assessment Frameworks* (s. 11-27)Boston College, TIMSS & PIRLS International Study center. Hentet fra https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/downloads/T15_FW_Chap1.pdf

Haladyna, T. M., Downing, S. M. & Rodriguez, M. C. (2002). A review of multiple-choice item-writing guidelines for classroom assessment. *Applied Measurement in Education, 15*(3), 309-333.

Hambleton, R. K. (2017). Measurement and validity. I R. Coe, M. Waring, L. V. Hedges & J. Arthur (Red.), *Research Methods & Methodologies in Education* (s. 234-240). London: SAGE Publications.

Hambleton, R. K. & Jones, R. W. (1993). An NCME Instructional Module on: Comparison of Classical Test Theory and Item Response Theory and Their Applications to Test Development. *Educational measurement. Issues and practice, 12*(3), 38-47.

Hansen, N., Jordan, N. C. & Rodrigues, J. (2017). Identifying learning difficulties with fractions: A longitudinal study of student growth from third through sixth grade. *Contemporary Educational Psychology, 50*, 45-59.

Hecht, S. A. & Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of educational psychology, 102*(4), 843-859.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* (bd. 2, s. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

IBM Corporation. (2017). IBM SPSS Statistics (Versjon 25.0.0.1).

Imsen, G. (1998). *Elevens verden. Innføring i pedagogisk psykologi.* Tano Ascehoug. Hentet fra https://www.nb.no/nbsok/nb/ae9a44ebe8bf065609161d5c625e3c43?index=6#3

Keselman, H. J. & Lix, L. M. (2017). Analysis of variance (ANOVA). I R. Coe, M. Waring, L. V. Hedges & J. Arthur (Red.), *Research Methods & Methodologies in Education 2nd edition* (s. 303-314). London: SAGE Publications.

Kieren, T. E. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. I R. A. Lesh & D. A. Bradbard (Red.), *Number and measurement. Papers from a research workshop* (s. 101-144): ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: The National Academies Press.

Kunnskapsdepartementet. (2015). *Tett på realfag. Nasjonal strategi for realfag i barnehagen og grunnopplæringen (2015–2019).* Oslo.

Kvale, S. (1996). *An Introduction to Qualitative Research Interviewing*. London: SAGE Publications.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* Routledge.

Lampert, M., Beasley, H., Ghousseini, H., Kazemi, E. & Franke, M. (2010). Using designed instructional activities to enable novices to manage ambitious mathematics teaching. I *Instructional explanations in the disciplines* (s. 129-141). Springer.

Leonard, M. J., Kalinowski, S. T. & Andrews, T. C. (2014). Misconceptions yesterday, today, and tomorrow. *CBE-Life Sciences Education, 13*(2), 179-186. Hentet fra https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4041497/pdf/179.pdf

Lesh, R. (1976). Directions for research concerning number and measurement concepts. I R. A. Lesh & D. A. Bradbard (Red.), *Number and Measurement. Papers from a Research Workshop.* (s. 1-18): ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics and Environmental Education.

Linden, W. J. v. D. & Hambleton, R. K. (1997). *Handbook of Modern Item Response Theory*. New York: Springer Science+Business media.

Loevinger, J. (1957). Objective tests as instruments of psychological theory. *Psychological reports, 3*(3), 635-694. Hentet fra https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.2466/pr0.1957.3.3.635?casa_token=HZ1PPakz3xYAAAAA:NQ2OekYQt5CLSItmA2IHQE4vI694wzHUqd3coOE9ZB49QXfFS6nsIatKOIvoe1O0iIK1CVI3yMoi3Q

Mack, N. K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in mathematics Education*, 267-295.

Makonye, J. P. & Fakude, J. (2016). A Study of Errors and Misconceptions in the Learning of Addition and Subtraction of Directed Numbers in Grade 8. *SAGE Open, 6*(4). Hentet fra https://journals.sagepub.com/doi/full/10.1177/2158244016671375

Maskiewicz, A. C. & Lineback, J. E. (2013). Misconceptions are "so yesterday!". *CBE-Life Sciences Education, 12*(3), 352-356. Hentet fra https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3763002/pdf/352.pdf

Matematikksenteret. (2019a). Ambisiøs undervisning. Hentet 16.04 2019 fra https://www.matematikksenteret.no/node/6456

Matematikksenteret. (2019b). Dette er FRAMM. Hentet 01.01 2019 fra https://www.matematikksenteret.no/eksamen-pr%C3%B8ver-og-kartlegging/fra-misoppfatning-til-mestring/dette-er-framm

McIntosh, A. (2007). *Alle Teller! Håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen* (M. R. Settemsdal & I. M. Stedøy-Johansen, Overs.). Trondheim: Skipnes.

Microsoft Corporation. (2016). Microsoft Excel (Versjon 16.0.4738.1000).

Mitchell, A. (2012). The Four -Three -Four Model: Drawing on Partitioning, Equivalence, and Unit-Forming in a Quotient Sub -Construct Fraction Task. I L. P. C. J. Dindyal, & S. F. Ng (Red.), *Mathematics education: Expanding horizons. (Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Research Group of Australasia)* (s. 513-520). Singapore:

Mitchell, A. & Horne, M. (2010). Gap Thinking in Fraction Pair Comparisons Is Not Whole Number Thinking: Is This What Early Equivalence Thinking Sounds Like? I L. Sparrow, B. Kissane & C. Hurst (Red.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (s. 414-421). Fremantle: MERGA.

Mohyuddin, R. G. & Khalil, U. (2016). Misconceptions of students in learning mathematics at primary level. *Bulletin of Education and Research, 38*(1), 133-162.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in mathematics Education, 30*(2), 122-147.

Muijs, D. (2004). Introduction to Quantitative Research. I D. Muijs (Red.), *Doing quantitative research in education with SPSS* (s. 1-12). London: SAGE Publications. Hentet fra

https://methods.sagepub.com/base/download/BookChapter/doing-quantitative-research-in-education-with-spss/n1.xml
Navigator, M. A Sample of Mathematics Errors and Misconceptions. Hentet fra https://pearsonnacommunity.force.com/support/s/article/Math-Navigator-A-Sample-of-Mathematics-Misconceptions-Errors
Neagoy, M. (2017). *Unpacking Fractions: Classroom-Tested Strategies to Build Students' Mathematical Understanding* ASCD.
NESH. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Oslo. Hentet fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/60125_fek_retningslinjer_nesh_digital.pdf
Newstead, K. & Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. *PME CONFERENCE* (s. 295-302).
Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.
Nunes, T. (2008). Understanding rational numbers. *Att erövra världen. Grundläggande färdigheter i läsning; skrivning och matematik* (s. 23-52): Linköping University Electronic Press.
Nygaard, O. & Zernichow, A. (2006). Den blokkerende misoppfatning. *Spesialpedagogikk. TEMA: Matematikkvansker/mestring, 4*, 34-38.
Ojose, B. (2015). *Common misconceptions in mathematics: Strategies to correct them* University Press of America.
Pantziara, M. & Philippou, G. (2012). Levels of students "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 61-83.
Pearn, C. & Stephens, M. (2004). Why do you have to probe to discover what Year 8 students really think about fractions. *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* (s. 27-30): Citeseer.
Petit, M. M., Marsden, E. L., Ebby, C. B. & Laird, R. E. (2015). *A focus on fractions: Bringing research to the classroom* Routledge.
Pines, A. L. (1985). Towards a taxonomy of conceptual relations and the implications for the evaluation of cognitive structures. . I L. West & A. L. Pines (Red.), *Cognitive structure and conceptual change* (s. 101-116). New York Academic Press.
Ryan, J. & Williams, J. (2007). *Children's Mathematics 4-15. Learning from errors and misconceptions.* Berkshire, England: Open University Press. McGraw - Hill Education.
Sale, J. E., Lohfeld, L. H. & Brazil, K. (2002). Revisiting the quantitative-qualitative debate: Implications for mixed-methods research. *Quality & quantity, 36*(1), 43-53. Hentet fra https://link.springer.com/content/pdf/10.1023%2FA%3A1014301607592.pdf
Schunk, D. H. (2012). *Learning theories an educational perspective 6th edition*. Boston: Pearson Education.
Seifried, J. & Wuttke, E. (2010). Student errors: how teachers diagnose and respond to them. *Empirical Research in Vocational Education and Training, 2*(2), 147-162.
Shadish, W. R., Cook, T. D. & Campbell, D. T. (2001). *Experimental and Quasi-Experimental Designs for Generalized Causal Inference* Cengage learning.
Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., … Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological science, 23*(7), 691-697.
Siegler, R. S., Thompson, C. A. & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive psychology, 62*(4), 273-296.
Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*(1), 20-26. Hentet fra https://www.nlcsmaths.com/uploads/2/6/3/6/26365454/skemp.pdf

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussion*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*(5), 503-518.

Star, J. R. & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 13*(2), 169-181.

Statped. (2019). Misoppfatninger. Hentet 12.01 2019 fra http://www.acm1.no/dynamisk-undervisning/?page_id=327

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research* Springer Science & Business Media.

Svingen, O. E. L. (2018). Representasjoner i matematikk. Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Elever%20som%20presterer%20lavt/P1_M4.Representasjoner%20i%20matematikk_fagtekst.pdf

Swan, M. (2005). *Improving learning in mathematics: challenges and strategies*. University of Nottingham. Hentet fra https://www.ncetm.org.uk/public/files/224/improving_learning_in_mathematicsi.pdf

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Thorndike, R. M. & Thorndike-Christ, T. M. (2014). *Measurement and evaluation in psychology and education* Pearson Education.

Tian, J. & Siegler, R. S. (2017). Fractions learning in children with mathematics difficulties. *Journal of learning disabilities, 50*(6), 614-620.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z. & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction, 37*, 5-13.

Utdanningsdirektoratet. (2013). Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04). Hentet 19.02.19 fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet. (2015). Vær bevisst i valg av oppgaver. Hentet 3. mai 2019 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/grunnleggende-ferdigheter/regning/god-regneopplaring/2.-var-bevisst-i-valg-av-oppgaver/

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction, 28*(2), 181-209. Hentet fra https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/07370001003676603needAccess=true

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modeling the process of conceptual change. *Learning instruction, 4*(1), 45-69.

Wong, M. & Evans, D. (2011). Assessing students' understanding of fraction equivalence. I J. Way & J. Bobis (Red.), *Fractions: Teaching for Understanding* (s. 81-90). Adelaide, Australia: Australian Association of Mathematics Teachers.

Yoshida, H. & Sawano, K. (2002). Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal-partitioning and equal-whole. *Japanese Psychological Research, 44*(4), 183-195.

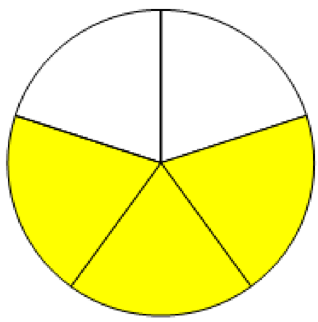
Vedlegg

Oppgavesett - Brøk

☐ 5. trinn ☐ 6. trinn ☐ 7. trinn

☐ Gutt ☐ Jente

Skole: ______________________________________



- Les oppgaveteksten nøye på alle oppgaver.
- Gjør så godt du kan på alle oppgaver! Det er flott om du avgir et svar, selv om du er usikker.
- Vis/forklar svaret ditt der du får beskjed om dette.
- Det er valgfritt om du vil bruke blyant eller penn.

Oppgave 1

Hvor stor brøkdel av flagget til Colombia er rødt?

Svar: $\frac{\square}{\square}$

Oppgave 2

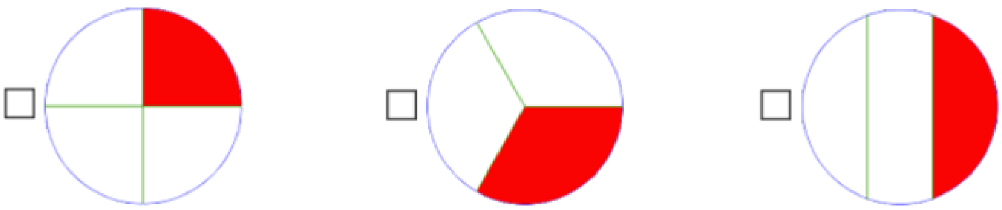
Sett ring rundt den største brøken og forklar svaret ditt:

$\frac{1}{6}$ eller $\frac{1}{7}$

Forklar svaret ditt her:

Oppgave 3

Velg den eller de av figurene der $\frac{1}{3}$ er fargelagt rød.



Oppgave 4

Hvilket tall skal stå i den tomme ruta? Forklar svaret ditt.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\square}$$

Forklar svaret ditt her:

Oppgave 5

Sorter brøkene etter verdi.

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2}$$

_______ _______ _______ _______ _______

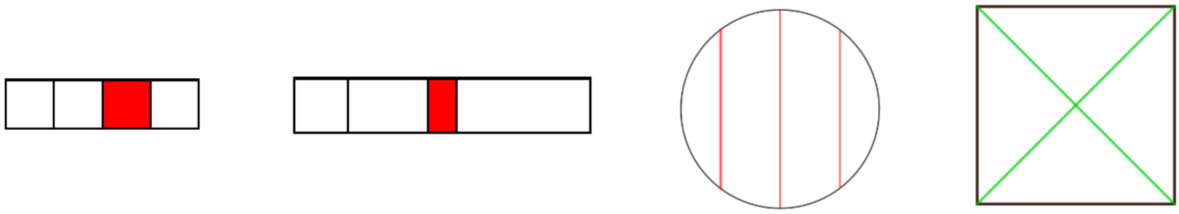
Minst Størst

Oppgave 6

Skraver $\frac{1}{3}$ av figuren nedenfor.

Oppgave 7

Sett ring rundt den eller de av figurene som viser $\frac{1}{4}$.



Oppgave 8

Hvilket tall skal stå på den tomme plassen?

$$\frac{1}{3} = \frac{}{12}$$

Svar: _______

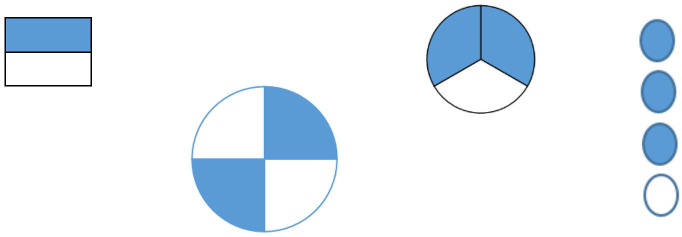
Oppgave 9

Hvilken av brøkene nedenfor har halvparten så stor verdi som $\frac{1}{6}$?

- ○ $\frac{1}{3}$
- ○ $\frac{2}{3}$
- ○ $\frac{1}{12}$
- ○ $\frac{2}{12}$

Oppgave 10

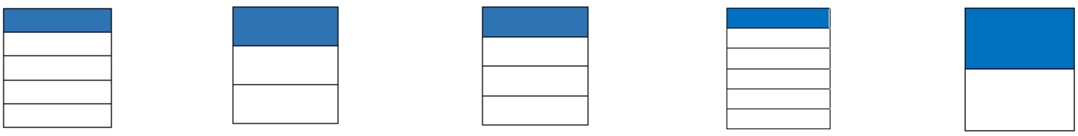
Figurene nedenfor representerer ulike brøkverdier. Sett ring rundt de figurene som representerer samme verdi.



Forklar hvorfor figurene representerer samme brøkverdi:

Oppgave 11

Sorter figurene etter hvor stor brøkdel som er fargelagt. Tegn en strek fra figuren til riktig plass.



______ ______ ______ ______ ______

Minst Størst

Oppgave 12

Skraver eller fargelegg $\frac{1}{4}$ av rutene nedenfor.

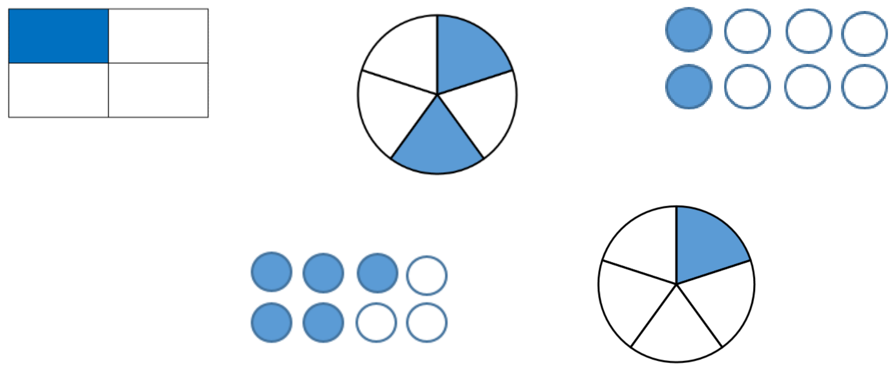
Oppgave 13

Lag en figur der $\frac{1}{4}$ er skravert eller fargelagt.

Lag figuren her:

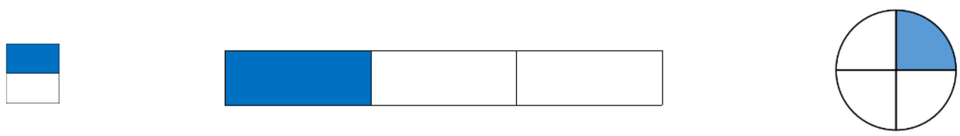
Oppgave 14

Sett ring rundt figurene som representerer samme brøkverdi.



Oppgave 15

Sorter figurene etter hvor stor brøkdel som er fargelagt. Tegn strek fra figuren til riktig plass.



________ ________ ________

Minst Størst

Oppgave 16

Skriv en brøk som har dobbelt så stor verdi som $\frac{1}{4}$.

Svar her:

Oppgave 17

Hvilket desimaltall har samme verdi som brøken $\frac{1}{4}$?

Svar: _______________

Oppgave 18

Sorter brøkene etter verdi.

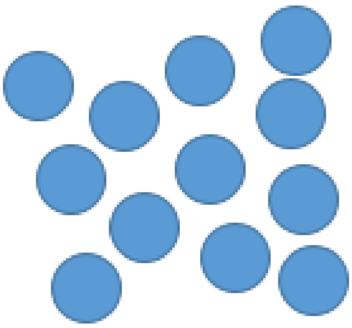
$$\frac{3}{9} \qquad \frac{2}{4} \qquad \frac{4}{6}$$

________ ________ ________

Minst Størst

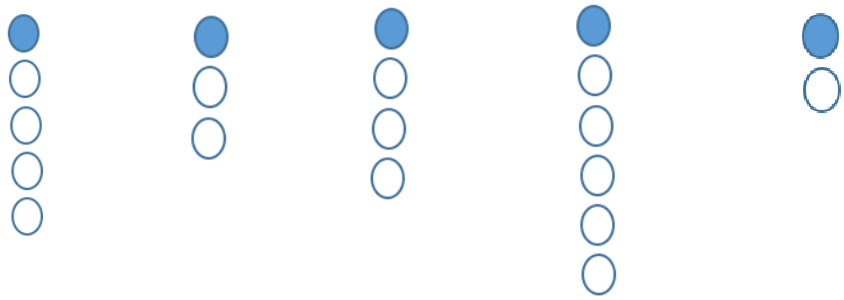
Oppgave 19

Sett ring rundt $\frac{1}{3}$ av prikkene nedenfor.



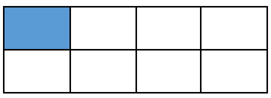
Oppgave 20

I hvilken av figurene er størst brøkdel fargelagt blå? Sett ring rundt riktig figur.



Oppgave 21

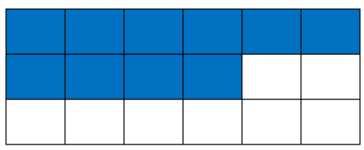
Figuren nedenfor representerer brøken $\frac{1}{8}$. Lag en figur som representerer en brøk som er halvparten så stor som $\frac{1}{8}$.

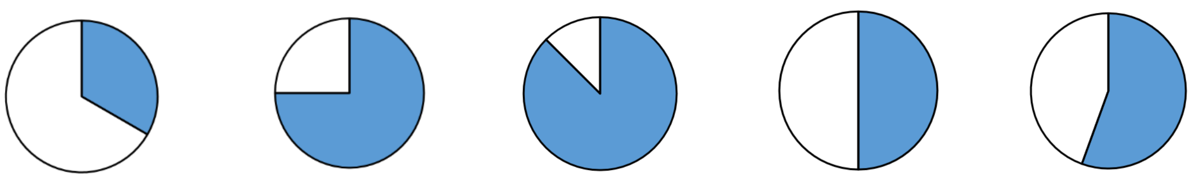


Lag figuren her:

Oppgave 22

Hvilken av de fem sirklene representerer samme brøk som den i rektanglet? Sett ring rundt riktig sirkel.



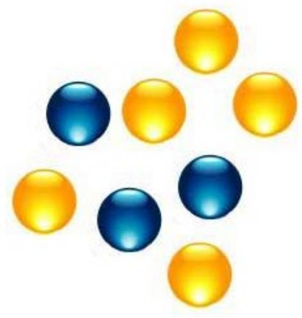


Oppgave 23

Jens har tre blå og fem gule klinkekuler.

Hvor stor brøkdel av klinkekulene er blå?

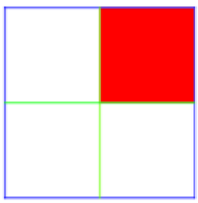
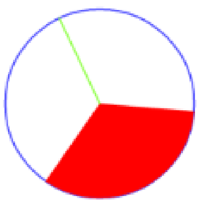
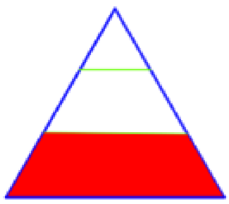
- ○ $\frac{8}{3}$
- ○ $\frac{5}{3}$
- ○ $\frac{3}{5}$
- ○ $\frac{3}{8}$



Tusen takk for hjelpa!

Oppgave 24 (nr. 3 i versjon 3)

Velg den eller de av figurene der $\frac{1}{3}$ er fargelagt rød.

☐  ☐  ☐ 

Vedlegg 2. Kodeoversikt

Kodeoversikt oppgavesett brøk

Kjønn:

1 – gutt
2 – jente

Skole:

Id fra 1–9.

Generelle koder:

9 - ubesvart

Nr.	Koder	
1	1 – ¼ 2 – 1/3 3 – 3/1 4 – ½ 5 – 2/1 7 – andre svar	
2	**1 – 1/6** 2 – 1/7 7 – andre svar	
3 (7)	1 – alt. 1 **2 – alt. 2** 3 – alt. 3 4 – alt. 1 og 2	5 – alt. 1 og 3 6 – alt. 2 og 3 7 – alt. 1, 2 og 3
4	1 – 2/4 2 – 2/3 3 – 2/1 7 – andre svar	
5 (11)	1 – riktig sortering 2 – motsatt sortering (ser kun på nevner) 7 – andre svar	
6	1 – riktig skravering 2 – skravert 1/3, men ulik størrelse på delene 3 – delt i tre like deler, men ingen skravert	4 – skravert 1/3, men egen figur 5 – egen figur, 1 av 3, men ulike deler 7 – andre svar
7 (3)	1 – alt. 1 2 – alt. 2 3 – alt. 1 og 2	4 – alt. 1, 2, 3, 4 5 – alt. 1, 2 og 4 6 – alt. 1 og 4 7 – andre svar
8 (10)	1 – 4/12 2 – 6/12 3 – 2/12	4 – 10/12 7 – andre svar
9 (12)	1 – alt. 1 2 – alt. 2 3 – alt. 3	4 – alt. 4 5 – alt. 1 og 3 6 – alt. 1 og 4

		7 – andre svar
10 (8)	1 – figur 1 og 2 2 – figur 1, 3 og 4 3 – figur 1, 2 og 3 4 – figur 2 og 3	5 – figur 2 og 4 6 – figur 3 og 4 7 – andre svar
11 (5)	1 – riktig sortering 2 – motsatt sortering (ser kun på nevner) 7 – andre svar	
12 (19)	1 – skravert tre ruter 2 – skravert én rute 3 – skravert fire ruter 7 – andre svar	
13	1 – riktig figur 2 – feil figur 3 – riktig brøk, men ulik inndeling 7 – andre svar	
14	1 – figur 1 og 5 2 – figur 1 og 4 3 – figur 3 og 5 4 – figur 1, 2 og 3 5 – figur 3 og 4	6 – figur 1, 3 og 5 7 – figur 1 og 4, og 3 og 5 8 – figur 1, 2, 3 og 5 9 – figur 4 og 5 10 – andre svar
15 (21)	1 – riktig sortering 2 – sorterer etter areal på den blå delen (1/2 – ¼ - 1/3) 3 – motsatt sortering (1/2 – 1/3 – ¼) 4 – motsatt av nr. 2 7 – andre svar	
16 (17)	1 – 2/4 2 – ½ 3 – 2/8	4 – riktig figur 5 – 4/8 6 – 1/8 7 – andre svar
17 (16)	1 – 0,25 2 – 1,4 3 – 4,1 4 – 2,5	5 – 0,14 6 – 0,2,5 7 – andre svar
18 (15)	1 – riktig sortering (3/9 – 2/4 – 4/6) 2 – sorterer etter størrelse på teller (2/4 – 3/9 – 4/6) 3 – sorterer etter størrelse på nevner (2/4 – 4/6 – 3/9) 4 – sorterer etter størrelse på nevner, men synkende (3/9 – 4/6 – 2/4) 5 – sorterer etter størrelse på teller, men synkende (4/6 – 3/9 – 2/4) 7 – andre svar	
19 (9)	1 – ring rundt fire prikker 2 – ring rundt én prikk 3 – ring rundt tre prikker 4 – ring rundt én prikk inni en ring med tre 7 – andre svar	
20	1 – riktig figur (nr. 5) 2 – motsatt figur (nr. 4) 7 – andre svar	
21 (18)	1 – riktig figur (eks. 1/16) 2 – 2/4 3 – ¼	5 – 0,5/4 6 – riktig brøk, men ikke figur 7 – andre svar

	4 – 2/16	
22	1 – figur 1 2 – figur 2 3 – figur 3	4 – figur 4 5 – figur 5 7 – andre svar
23	1 – alt. 1 2 – alt. 2 3 – alt. 3 4 – alt. 4	
24 (7-3)	1 – alt. 1 2 – alt. 2 3 – alt. 3 4 – alt. 2 og 3 5 – alt. 1 og 2	

Vedlegg 3. Valideringsskjema oppgaver

Valideringsskjema oppgaver brøk

- Nevner representerer antall deler – uavhengig av størrelse (A)
- Jo større nevner (eller teller), jo større brøk (B)
- Differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken (C)
- Brøkstrek er lik komma (D)
- Teller (eller nevner) er et isolert tall (E)

Oppgavenr.	Innhold – hva måler den?	Hentet fra
1	Måler om elevene kun ser på antall deler når de angir en brøk. Størrelsen på delene er uvesentlig. Misoppfatning A. Mulige elevsvar: 1/3 eller ¼	Nasjonale prøver
2	Måler om elevene ser på størrelsen til nevneren, når de skal avgjøre verdien til brøken. Ser isolert på verdien til tallene. Dette går på misoppfatning B. Ønsker at dette skal komme frem gjennom elevenes forklaring.	
3	Måler om elevene kun ser på antall deler når de angir en brøk. Størrelsen på delene er uvesentlig. Misoppfatning A. Elever i denne misoppfatningen vil krysse av alt. 2 og 3.	FRAMM
4	Måler om elevene ser på differensen mellom teller og nevner, når de skal avgjøre størrelsen til brøker. Dette går på misoppfatning C. Elever i denne misoppfatningen vil svare 3. Denne oppgaven vil ha sterk kobling med oppgave 8.	FRAMM/KIM
5	Måler om elevene ser på størrelsen til nevneren, når de skal avgjøre verdien til brøken. Ser isolert på verdien til tallene. Dette går på misoppfatning B. Oppgaven har kobling til oppgave 2.	Nasjonale prøver
6	Her skal elevene selv dele inn en figur i riktig antall deler, og deretter skravere én del. Ønsker her å se om elevene er bevisste på at delene skal være like store. Misoppfatning A.	
7	Måler misoppfatning A. Elever i denne misoppfatningen vil sette ring rundt alt. 1 og 2. I tillegg vil det også gi et bilde på om elevene skjønner betydningen av 1 i teller.	Pantziara & Philippou
8	Måler om elevene ser på differensen mellom teller og nevner, når de skal avgjøre størrelsen til brøker. Dette går på misoppfatning C. Elever i denne misoppfatningen vil svare 10. Denne oppgaven vil ha sterk kobling med oppgave 4.	Alle Teller
9	Måler om elevene forstår halvering av brøk. Ikke direkte relatert til en av misoppfatningene, men kan sees i sammenheng med misoppfatning B og C.	Nasjonale prøver

	Elever i misoppfatning B vil kun se på nevneren, og halverer denne. Da vil svaret bli 1/3.	
10	Denne oppgaven måler i stor grad det samme som oppgave 4 og 8, men med andre representasjoner (areal og diskret). For eksempel kan elever sette ring rundt alle figurer som mangler én blå. Ev. kan de sette ring rundt figurer med likt antall blått. Misoppfatning B og C.	Idé fra Pantziara & Philippou
11	Måler om elevene ser på størrelsen til «nevneren», når de skal avgjøre verdien til brøken. Ser isolert på antall deler. Dette går på misoppfatning B. Oppgaven har kobling til oppgave 2 og 5, men i denne oppgaven måles denne samme med en annen representasjon (areal).	
12	Måler om elevene ser på teller (eller nevner) som isolerte tall. Elever kan f.eks. se på teller lik 1, og derfor skravere én rute. Misoppfatning E.	Nasjonale prøver
13	Går på misoppfatning A, men her skal elevene lage hele figuren selv. Den går altså et skritt videre fra oppgave 6. Er de bevisst størrelsen på delene?	
14	Denne oppgaven måler i stor grad det samme som oppgave 4, 8 og 10. samme representasjoner som oppgave 10. For eksempel kan elever sette ring rundt alle figurer som mangler tre blå. Ev. kan de sette ring rundt figurer med likt antall blått. Litt vanskeligere brøker enn i oppgave 10. Misoppfatning B og C.	
15	Måler om elevene ser på størrelsen til «nevneren», når de skal avgjøre verdien til brøken. Ser isolert på antall deler. Dette går på misoppfatning B. Oppgaven har kobling til oppgave 2 og 5, men i denne oppgaven måles denne samme med en annen representasjon (areal). Her vil jeg også tydelig se om elevene ser på arealets størrelse, når de skal vurdere brøkdelen.	
16	Måler om elevene forstår dobling av brøk. Ikke direkte relatert til en av misoppfatningene, men kan sees i sammenheng med misoppfatning B og C. Elever i misoppfatning B vil kun se på nevneren, og doble denne. Da vil svaret bli 1/8.	Nasjonale prøver
17	Måler om elevene tolker brøkstrek som komma. Svaret vil da være 1,4. Misoppfatning D.	
18	Måler hva elevene ser på når de skal avgjøre en brøks verdi. Her kan de sortere etter teller, nevner eller faktisk verdi. Misoppfatning B.	

19	Måler om elevene ser på teller (eller nevner) som isolerte tall. Elever kan f.eks. se på teller lik 1, og sette ring rundt en prikk. Kobling til oppgave 12, men en annen representasjon her (diskret) Misoppfatning E.	Idé fra FRAMM/KIM
20	Måler om elevene ser på størrelsen til «nevneren», når de skal avgjøre verdien til brøken. Ser isolert på antall deler. Her betyr det antall prikker (diskret representasjon) Dette går på misoppfatning B. Oppgaven har kobling til oppgave 2, 5 og 11, men i denne oppgaven måles denne samme med en annen representasjon (diskret).	
21	Måler halvparten, og har kobling til oppgave 9 og 16. Her skal elevene imidlertid forholde seg til en annen representasjon (areal). Vil det hjelpe? Misoppfatning B.	
22	Måler om elevene klarer å se brøkens verdi ut fra differansen mellom teller og nevner. Kan knyttes til misoppfatning C.	Pantziara & Philippou
23	Måler om elevene ser på teller (eller nevner) som isolerte tall. Elever kan tolke gul og blå som to isolerte verdier, og svarer da f.eks. 3/5. Kobling til oppgave 12, men en annen representasjon her (diskret) Misoppfatning E.	Nasjonale prøver

Oppgavenr.	a-verdi (diskriminering)	b-verdi (vanskegrad)	T-Rpbis	Løsningsprosent alle	Løsningsprosent 5. trinn	Løsningsprosent 6. trinn	Løsningsprosent 7. trinn	Endring 5.-6.	Endring 5.-7.	Endring 6.-7.
1	0,897	-0,078	0,587	51 %	38 %	51 %	64 %	0,12	0,26	0,14
2	1,375	-0,749	0,639	71 %	62 %	70 %	81 %	0,08	0,19	0,11
3	0,271	1,526	0,113	33 %	35 %	40 %	27 %	0,04	-0,08	-0,13
4	1,215	-0,659	0,629	68 %	45 %	77 %	82 %	0,32	0,36	0,05
5	1,525	-0,754	0,659	72 %	59 %	72 %	84 %	0,13	0,25	0,12
6	0,628	-1,336	0,389	76 %	66 %	77 %	84 %	0,12	0,19	0,07
7	0,444	-0,809	0,316	63 %	59 %	66 %	64 %	0,07	0,05	-0,02
8	1,011	-0,534	0,596	64 %	45 %	68 %	78 %	0,23	0,33	0,10
9	0,577	1,466	0,381	23 %	21 %	24 %	25 %	0,02	0,03	0,01
10	0,982	-0,42	0,597	61 %	47 %	61 %	73 %	0,14	0,26	0,13
11	1,590	-0,916	0,592	76 %	67 %	77 %	85 %	0,11	0,19	0,08
12	1,051	-0,645	0,595	67 %	56 %	64 %	80 %	0,08	0,24	0,15
13	0,518	-2,151	0,259	84 %	79 %	86 %	87 %	0,07	0,08	0,01
14	1,367	-0,265	0,649	57 %	41 %	60 %	70 %	0,19	0,28	0,09
15	1,546	-0,623	0,681	68 %	52 %	70 %	82 %	0,18	0,30	0,12
16	0,701	0,896	0,482	30 %	31 %	28 %	32 %	-0,02	0,01	0,04
17	1,190	1,424	0,562	15 %	7 %	13 %	25 %	0,06	0,18	0,12
18	1,092	0,542	0,639	35 %	20 %	38 %	45 %	0,18	0,25	0,07
19	1,329	-0,57	0,659	66 %	51 %	65 %	82 %	0,15	0,31	0,17
20	1,645	-1,185	0,587	83 %	76 %	82 %	92 %	0,06	0,16	0,10
21	0,928	1,628	0,485	14 %	8 %	15 %	20 %	0,07	0,11	0,04
22	0,608	-0,09	0,45	52 %	39 %	54 %	61 %	0,15	0,22	0,07
23	0,648	-1,108	0,416	72 %	59 %	76 %	82 %	0,18	0,23	0,05
24[1]	0,770	-0,334	0,475	58 %	50 %	64 %	60 %	0,14	0,10	-0,04
Snitt	**0,996**	**-0,239**	**0,518**	**57 %**	**46 %**	**58 %**	**65 %**	**0,12**	**0,19**	**0,07**

[1] Oppgave nr. 3 i analysene.

Vedlegg 5. Intervjuguide

Intervjuguide – elevers forståelse av brøkbegrepet

Gjennom intervjuet ønsker jeg å få vite mer om hva som ligger bak elevers svar på utvalgte brøkoppgaver. Vede å stille elevene utdypende spørsmål, håper jeg å få bekreftet at det er de aktuelle misoppfatningene som ligger bak svarene deres. De aktuelle oppgavene fokuserer på utvalgte misoppfatninger som:

- Nevner representerer antall deler – uavhengig av størrelse
- Jo større nevner (eller teller), jo større brøk
- Differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken

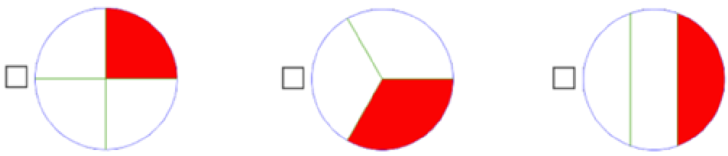
Jeg tenker i utgangspunktet å gjennomføre dette som et «dynamisk» intervju, der jeg kan stille elever utdypende spørsmål, mens de sitter med det anonyme oppgavearket. På denne måten vil det ikke være nødvendig for meg å få informasjon om elevers navn i prosessen.

Nevner representerer antall deler – uavhengig av størrelse

__Aktuelle oppgaver:__

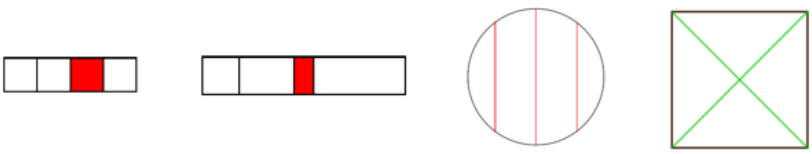
Oppgave 3

Velg den eller de av figurene der $\frac{1}{3}$ er fargelagt rød.



Oppgave 7

Sett ring rundt den eller de av figurene som viser $\frac{1}{4}$.



__Mulige spørsmål:__

- Hvordan tolker du brøken $\frac{1}{3}$?
- Hva betyr tallene i teller og nevner?
- Har det noen betydning hvor stor delene er?

Jo større nevner (eller teller), jo større brøk

<u>Aktuelle oppgaver:</u>

Oppgave 5

Sorter brøkene etter verdi.

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2}$$

______ ______ ______ ______ ______

Minst Størst

Oppgave 16

Sorter figurene etter hvor stor brøkdel som er fargelagt. Tegn strek fra figuren til riktig plass.

______ ______ ______

Minst Størst

<u>Mulige spørsmål:</u>

- Hva ser du etter når du skal sortere brøker etter størrelse?
- Er det forskjell på de ulike representasjonene?
- Hvorfor er brøken $\frac{1}{6}$ større enn for eksempel $\frac{1}{3}$?

Differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken

<u>Aktuelle oppgaver:</u>

Oppgave 8

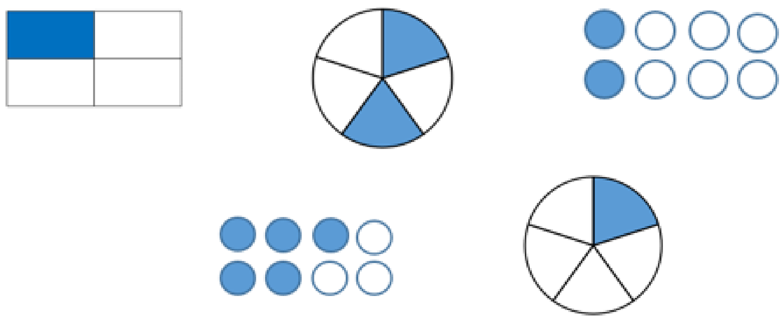
Hvilket tall skal stå på den tomme plassen?

$$\frac{1}{3} = \frac{\square}{12}$$

Svar: ________

Oppgave 15

Sett ring rundt figurene som representerer samme brøkverdi.



<u>Mulige spørsmål:</u>

- Hva bestemmer om brøker har samme verdi / er like store?
- Hvordan går du frem for å finne det tallet som mangler i oppg. 8?
- Hvordan løser du oppg. 15?

Vedlegg 6. Samtykkeskjema

Vil ditt barn delta i forskningsprosjektet

"Elevers forståelse av begrepet brøk"?

Til foresatte for elever på <>. trinn ved <> skole

Jeg er masterstudent ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning, og skal gjennomføre et kort forskningsprosjekt på skolen til ditt barn. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål

Resultatene av studien vil bli brukt i en eksamensbesvarelse/masteroppgave ved NTNU. I masteroppgaven ønsker jeg å se nærmere på elevenes forståelse av begrepet brøk. Min erfaring er at mange elever sliter med å forstå hva brøkbegrepet innebærer, og derfor vil jeg helt spesifikt se nærmere på hvilke og hvor mye utbredt ulike misoppfatninger knyttet til brøk er på ulike trinn i skoleløpet. I denne studien vil jeg se på misoppfatninger hos elever på 5.–7. trinn. Å være i en misoppfatning er en naturlig del av elevenes læringsprosess, og handler om at elevene overgeneraliserer basert på forhåndskunnskap. De tar med seg tidligere kunnskap inn i forståelsen av et nytt begrep.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Jeg ønsker å utføre studien min på elever på 5.–7. trinn, og derfor er din sønn/datter blant de som blir spurt. I utvalget mitt ønsker jeg å ha representert en blanding av barn fra by/bygd, og små og store skoler.

Hva innebærer det for ditt barn å delta?

I studien skal alle deltakere svare på et oppgavesett. Settet består av oppgaver som er ment å kartlegge misoppfatninger knyttet til brøk. Til sammen er det 20 - 25 oppgaver, og det vil ta elevene cirka 30 minutter å fullføre testen. I utgangspunktet vil jeg gjennom testene ikke samle inn opplysninger som gjør at jeg kan identifisere enkeltelever. Jeg ønsker opplysninger om skole, trinn og kjønn, men elevene vil være anonyme. Elevene vil gjennomføre testene på papir, og alle data vil så bli lagt inn på data av meg.

Det kan også bli aktuelt å foreta et lite intervju med utvalgte elever, og da trenger jeg eget samtykke til at ditt barn kan bli intervjuet. Intervjuene vil være «dynamiske». Med dette menes at jeg vil stille elever utdypende spørsmål, mens de sitter med oppgavesettet. På denne måten håper jeg å unngå behov for å vite elevenes navn. Spørsmålene har til hensikt å finne ut hva som ligger bak elevenes svar. Hvorfor har de svart som de gjør?

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet, men for å få et så riktig bilde av elevenes forståelse som mulig, håper jeg at alle blir med. Hvis du/ditt barn velger å delta, kan du/ditt barn når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om ditt barn vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for ditt barn hvis det ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Bård Vinje og veiledere/forelesere vil ha tilgang til datamaterialet. Datamaterialet vil kunne diskuteres med medstudenter.
- Eventuelle navn på elever vil jeg alltid erstatte med en kode. Koden vil oppbevares innelåst.
- Alle filer med personopplysninger vil oppbevares i passordbeskyttede filer og mapper.

Hva skjer med opplysningene når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes i løpet av juni 2019. Etter at prosjektet er avsluttet vil alle data bli anonymisert. Det vil dermed ikke være mulig å identifisere enkeltelever.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om ditt barn,
- å få rettet personopplysninger om ditt barn,
- få slettet personopplysninger om ditt barn,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

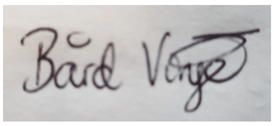
På oppdrag fra NTNU, Institutt for Lærerutdanning har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved Eivind Kaspersen (eivind.kaspersen@ntnu.no)
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen



Trygve Solstad, veileder   Bård Vinje, student

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Elevers forståelse av begrepet brøk*, og har fått anledning til å stille spørsmål.

Jeg samtykker til at …………………………………………… (elevens navn):

- ☐ Svarer på oppgavesettet
- ☐ Deltar i eventuelle elevintervju

Jeg samtykker til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. juni 2019

(Signert av foreldre/foresatte, dato)

Bård Vinje

Misoppfatninger tilknyttet brøk på mellomtrinnet

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology