Johanne Sofie Strand

Matematisk modellering

En kvantitativ studie om læreres opplevde utfordringer i undervisningen av modellering

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Eivind Kaspersen
Mai 2019

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Johanne Sofie Strand

Matematisk modellering

En kvantitativ studie om læreres opplevde utfordringer i undervisningen av modellering

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Eivind Kaspersen
Mai 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Matematisk modellering er utfordrende for lærere og elever, og som en konsekvens av dette har ikke modellering en så stor plass i klasserommet som forskningen skulle tilsi. I dag finnes det mange kvalitative studier som omhandler modelleringsprosessen. Fordi matematisk modellering er en kompleks og sammensatt prosess er den utfordrende å måle. I denne studien har jeg brukt kvantitative metode til å måle læreres utfordringer med modellering. Studiens forskningsspørsmål er: (1) Hvordan kan læreres opplevde utfordringer i undervisningen av matematisk modellering måles? og (2) Hva opplever matematikklærere som mest utfordrende når de jobber med matematisk modellering?

Comparative judgement er en metode som er bygget på det psykologiske prinsippet om at mennesker er flinkere til å sammenligne to objekter enn å vurdere et objekt isolert. I denne undersøkelsen er utsagn om modelleringsprosessen sammenlignet. Totalt har 25 utsagn blitt vurdert over 500 ganger. Utsagnene i denne studien bygger på rammeverket til Blum og Leiß (2007) sin modell av modelleringssyklusen.

For å analysere datamaterialet har jeg sett på validiteten og reliabiliteten av studien. Ved hjelp av SPSS og Winsteps har datamaterialet blitt analysert for å undersøke om modelleringsprosessen kan måles. De statistiske testene som i hovedsak er benyttet er *t*-test, ANOVA, og PCA (faktoranalyse). For å se nærmere på hva lærere opplever som mest utfordrende med matematisk modellering, har jeg gjort en kvalitativ analyse ved å studere målestokken som comparative judgement har rangerte utsagnene langs. Analysene viser at modelleringsprosessen kan måles og at den delprosessen som matematikklærerne synes er mest utfordrende er *matematisering*.

Abstract

Mathematical modeling is challenging for teachers and students, and as a consequence of this, modeling has not been as present in the classrooms as research would indicate. However, there are several studies that have examined the modeling process. Due to the complex and intricate process behind mathematical modeling, it is challenging to measure. This study will focus on teachers’ challenges with modeling through quantitative methods. The research questions for this study are: (1) How can teachers' perceived challenges in the teaching of mathematical modeling be measured? And: (2) What does mathematics teachers experience as most challenging when working with mathematical modeling?

Comparative judgement is a method based on the psychological principle that humans are better at comparing two objects, than considering an object isolated. In this study, statements about the modeling process are compared, and 25 statements have been reviewed over 500 times in total. The statements are based on Blum and Leiß’ (2007) model of the modeling cycle, which is the framework in this study.

To analyze the data, I have looked at the validity and the reliability of the study. Using SPSS and Winsteps the data has been analyzed to see if the modeling process can be measured. The statistical tests that are mainly used are t-test, ANOVA, and PCA (factor analysis). To look further into what teachers comprehend as most challenging with mathematical modeling, I have done a qualitative analysis by studying the scale by which comparative judgements have ranked the statements along. The analysis shows that the modeling process can be measured and that the sub-process that mathematics teachers find most challenging, is mathematization.

Forord

Min egen interesse for matematisk modellering har utviklet seg i møte med elever og matematikk. Det har vært viktig for meg som lærer å vise elevene hvordan matematisk modellering kan benyttes til å løse verdensproblemer og hverdagsproblemer.

Matematisk modellering åpner nye dører inn i en verden hvor matematikk og virkeligheten møtes. På samme måte har arbeidet med denne masteroppgaven åpnet nye dører for meg inn i en verden hvor forskning og praksis møtes. Jeg vil takke mine forståelsesfulle kollegaer som alltid har latt meg prioritere masterarbeidet i travle tider. Studien min har fått bein å gå på takket være de 15 tøffe lærerne som har svart på undersøkelsen min – takk for deres deltagelse.

Jeg vil også takke min veileder Eivind Kaspersen som tålmodig har veiledet meg gjennom prosessen, og som alltid har hatt tro på at dette lot seg gjennomføre. Og til slutt takk til familie og venner som har heiet på meg hele veien, og som alltid har bidratt til å gjøre arbeidsprosessen min best mulig.

Trondheim, mai 2019.

Johanne Sofie Strand

Innholdsfortegnelse

Figurer

Tabeller

Formler

Forkortelser

ANOVA	Analysis of variance
DIF	Differential item functioning
ICC	Item characteristic curve
KfK	Kompetanse for kvalitet
Logit	Log odds unit
NESH	Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora
PCA	Principal component analysis

1 Innledning

I dagens samfunn er det behov for mennesker som kan håndtere sammensatte problemer og utfordringer. Mennesker må lære kreativitet, innovasjon, kritisk tenkning, og problemløsning for å bli en god samfunnsborger (NOU, 2015). For å utvikle seg i takt med disse behovene, er modellering en viktig ferdighet som må læres. Dette er en av grunnene til at modellering er en integrert del av mange fagfelt, blant annet naturvitenskap, teknologi, og økonomi. Egenskaper som å stille opp, analysere og kritisere matematiske modeller er en del av modelleringskompetansen; disse egenskapene gir den enkelte faglig kritisk dømmekraft som er avgjørende for å være en deltager i demokratiske prosesser (Skovsmose & Blomhøj, 2006).

1.1 Modellering i skolen

Modellering i skolen er viktig fordi den støtter elevers faglige læring av matematikk og utvikler deres egenskaper til å løse problemer (Schou, Skott, Jess & Hansen, 2008). Slik kompetanse er en forutsetning for utvikling, påvirkning og forståelse av samfunnet, fordi det gjør elever i stand til å ta beslutninger i forbindelse med viktige avgjørelser i samfunnsmessige sammenhenger (Schou et al., 2008).

I læreplanen LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2013) er modellering beskrevet som en metode for å analysere og løse et problem, gjøre om problemet til en matematisk form, for så å vurdere gyldigheten av problemet. Dette er en prosess som knytter matematikken og virkeligheten sammen. Derfor jobbes det, hver dag, i norske skoler med å koble sammen klasserommet og verden utenfor. For å koble sammen disse to «verdenene», må matematikken bringes inn for å beskrive og analysere en situasjon eller et problem. Sammenkoblingen av virkeligheten og matematikken er en prosess hvor matematikken brukes for å beskrive et problem. Når elevene arbeider med disse prosessene, så kvalifiserer det dem til å anvende den matematikken de lærer i skolen, også i ikke-matematiske sammenhenger (Schou et al., 2008).

Modellering i skolen har i de siste tiårene fått mye oppmerksomhet i matematikkdidaktikk (Kaiser, 2005), og vi vet fra disse studiene at modellering har en mindre rolle i undervisningen enn ønsket. Blum og Ferri (2009), for eksempel, mener at hovedgrunnen til at det er et stort gap mellom utdanningsforskningen og praksis i klasserommet, er at modellering er utfordrende både for elever og lærere. I den planlagte fagfornyelsen som trer i kraft fra 2020 er «modellering og anvendelser» et av kjerneelementene i faget matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2018). Studien til Blum og Ferri (2009) advarer oss: modellering er vanskelig. En av årsakene til at modellering er vanskelig, er at modelleringsoppgaver har høy grad av kognitiv kompleksitet (Blum & Ferri, 2009); modelleringsprosessen er en prosess hvor elever jobber med mange ulike ferdigheter samtidig. For eksempel trekker Blum og Ferri (2009) fram at å *konstruere*, *forenkle*, og *validere* er vanskelig for elever. De viser også til at dette er individuelt og avhengig av elevens matematiske tankemåte. De empiriske funnene til Blum og Ferri (2009) viser også at elevene, i de fleste tilfeller, ikke har et bevisst forhold til valg av problemløsningsstrategi, noe som er vesentlig i modellering. Modellering er også utfordrende fordi det ikke er en isolert ferdighet. Modelleringskompetanse består av en rekke andre kompetanser, blant annet; å lese og kommunisere, lage og bruke problemløsningsstrategier, samt jobbe matematisk (Niss, 2003).

1.2 Læreres utfordringer med matematisk modellering

Modellering er ikke bare vanskelig for elevene; modellering er en aktivitet som oppleves utfordrende for lærere å praktisere i undervisningen (Blum & Ferri, 2009). Modellering er utfordrende for læreren fordi det krever at læreren har en bred kompetanse i matematikk. For at en lærer skal legge til rette for en god modelleringundervisning stiller det krav til både lærerens støtte og elevers selvstendighet. I tillegg krever god modelleringundervisning at læreren er tilpasningsdyktig og kan veilede elevene i deres vei mot selvstendig tenkning. En annen utfordring er at læreren ofte har sin egen løsning på en oppgave; når læreren veileder elevene i deres arbeid vil det være utfordrende å ikke veilede elevene mot eget løsningsforslag (Blum & Ferri, 2009).

1.3 Måling av en kompleks prosess

Det finnes også metodiske utfordringer; Hvordan kan man studere modelleringsprosessen? Modellering er en kompleks og sammensatt prosess, og derfor følger det noen metodiske problemer ved å undersøke prosessen. Et spesielt problem er knyttet til måling.

Å gjøre én måling som beskriver kompleksiteten av verden er ikke mulig, men vi kan lage modeller som beskriver virkeligheten (Singer, 2007). Modeller leder oss til å lage representasjoner som beskriver verden, og de er nyttig av mange grunner. For eksempel hjelper modeller oss å fokusere på et bestemt aspekt og forenkle virkeligheten. Modeller gjør det også mulig å generalisere et gitt fenomen eller gjøre fenomenet abstrakt ved å ta bort én eller flere dimensjoner.

Alle mål er lineære, mens modelleringsprosessen er sammensatt og kompleks. Dette kan være én av grunnene til at de fleste studier på matematisk modellering i skolen (for eksempel Blum og Ferri (2009); Blum og Leiß (2007); Stillman, Brown og Galbraith (2010)) anvender kvalitative metoder. I denne studien derimot, har jeg valgt å utfordre disse metodene ved å bruke en kvantitativ forskningsstrategi for å undersøke læreres utfordringer i undervisningen av modellering. Metoden jeg har brukt kalles *comparative judgement* (CJ) og den bygger på sammenligning av to stimuli. Målemetoden er basert på at mennesker er flinkere til å sammenligne to objekter enn å vurdere objektene isolert fra hverandre.

Det er også teoretiske problemer forbundet med studien av modellering. På grunn av den naturlige kompleksiteten til modellering er det ikke mulig å beskrive modellering med én teori eller én metode, det er behov for flere teorier og metoder for å beskrive forskningsfeltet. For å måle modellering er det derfor mye å ta hensyn til, ikke bare fordi modellering er sammensatt, men også fordi det er mange ulike aspekter ved modelleringsprosessen.

I dag finnes det få kvantitative studier av læreres utfordringer med matematisk modellering. Det er et problem, både at vi ikke vet hva lærere synes er utfordrende med modellering, og at det er vanskelig å måle modellering, fordi prosessen er kompleks. Jeg ønsker derfor å undersøke hvilke utfordringer lærere har i arbeidet med modellering med fokus på modelleringsprosessen. Et innblikk i disse utfordringene kan være med å gjøre lærere bedre rustet til å jobbe med matematisk modellering.

1.4 Forskningsspørsmål

I min forskning har jeg valgt å dele opp undersøkelsen i to deler. En del som tar for seg det metodiske problemet med å undersøke en kompleks prosess som modellering, og en del som ser på utfordringer lærere har med modellering i undervisningen.

1) Hvordan kan læreres opplevde utfordringer i undervisningen av matematisk modellering måles?
2) Hva opplever matematikklærere som mest utfordrende når de jobber med matematisk modellering?

1.5 Begrepsforklaring

I denne oppgaven vil jeg bruke en rekke faglige begreper, og mange av dem vil jeg forklare underveis i teksten. Noen begreper er med gjennom hele oppgaven og jeg har derfor valgt å forklare disse begrepene her. Jeg kommer i enkelte tilfeller til å bruke ordet modellering istedenfor matematisk modellering; jeg vil understreke at når jeg skriver modellering mener jeg alltid matematisk modellering. Matematisk modellering er å ta utgangspunkt i et virkelig problem og løse problemet ved hjelp av matematikk. Et annet begrep som er nært knyttet til modellering er **modelleringssyklusen**, og for å beskrive elevers aktiviteter i syklusen bruker jeg begrepet **modelleringsprosessen**. Modelleringssyklusen er en modell som beskriver den kognitive analysen som eleven er i når det arbeides med modelleringsoppgaver. For å undersøke om matematisk modellering kan måles skal jeg bruke **comparative judgement (CJ)**. Comparative judgement er en metode hvor stimuli rangeres ved hjelp av sammenligning.

1.6 Oppgavens oppbygning

For å svare på forskningsspørsmålene i denne studien har jeg valgt å bygge opp oppgaven som følgende: Først presenterer jeg teori om matematisk modellering. I teorien viser jeg til ulike perspektiver til hvorfor matematisk modellering bør jobbes med i skolen, jeg vil også beskrive ulike tilnærminger til begrepet modellering. Ulike modelleringssykluser beskrives før rammeverket for modelleringsprosessen presenteres. Rammeverket jeg har valgt å bruke er modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). Videre skal jeg presentere metode for innsamling av data og gjennomføring av analyse. Metoden bygger på Rasch-modellen og *comparative judgement*. Undersøkelsen består av 25 utsagn om modellering, og er besvart av 15 lærere. I resultat-kapittelet skal jeg analysere datamaterialet med utgangspunkt i ulike analysemetoder. Etter at resultatene er presenterte skal jeg diskutere egne funn, beskrive implikasjoner, og tanker om videre forskning.

2 Teori

I dette kapittelet skal jeg presentere de teoriene som er grunnlaget for denne oppgaven. Jeg vil begynne med å presentere hva jeg legger i ordet teori; det vil si, teori som en representasjon av virkeligheten, og beskrive min pragmatiske tilnærming til teori. Videre skal jeg beskrive et sosiokulturelt læringssyn som jeg mener ligger til grunn for matematisk modellering. Jeg vil så komme nærmere inn på modellering ved å vise til tre perspektiv for å jobbe med modellering i skolen. Jeg skal deretter presentere ulike modelleringssykluser og beskrive modellen jeg har valgt å ta utgangspunkt i. Til slutt vil jeg avslutte teorikapittelet med å beskrive lærerens fagdidaktiske kunnskaper i modellering.

2.1 Teori som en representasjon av virkeligheten

Teori kan sees som en representasjon av virkeligheten; i matematikkdidaktikk representerer teorien et problem eller en utfordring som viser seg i matematikkundervisningen i praksis. Når teorier om matematisk modellering skal etableres, trekkes det inn ideer og grunntanker fra andre områder innenfor fagmiljøet. Eksempelvis teorier om hva matematikk er, teorier om matematikkundervisningen eller generelle læringsteorier. Med slike bidrag dannes det en grunnmur for en didaktisk teori om modellering (Skovsmose & Blomhøj, 2006).

2.1.1 Pragmatisk tilnærming til teori

Mitt valg av teori er pragmatisk. Det betyr at jeg anerkjenner teoripluralisme: flere beskrivelser av *matematisk modellering* kan være riktig. Pragmatikere mener at det ikke er noen objektive kriterier som er basis for en begrepsdannelse, men at det finnes måter, for eksempel anvendelse av teorier, som er hensiktsmessig og mindre hensiktsmessig å ordne data på (Martinsen, 1991). Modellen jeg har valgt som rammeverk i denne oppgaven er derfor gjort på bakgrunn av forskningens problemstilling, og ikke på bakgrunn av hvilken teori som er «rett» i ontologisk forstand. Noen av modelleringssyklusene jeg viser til senere i dette kapittelet er rammeverk jeg ikke har valgt å bruke i min analyse; det skyldes ikke at rammeverkene er feil, men at Blum og Leiß (2007) sin modelleringssyklus passer bedre til det jeg vil undersøke.

2.2 Sosiokulturelt læringssyn

Læring og undervisning i modellering foregår i en læringssituasjon som er preget av kulturelle og historiske faktorer. Jeg vil derfor beskrive modelleringsprosessen ut fra et sosiokulturelt læringssyn. Fordi modelleringsprosessen kan være en kognitiv prosess skal jeg beskrive den med utgangspunkt i Vygotsky sitt begrep: *internalisering*. Internalisering er en psykologisk prosess hvor eksterne verktøy og tegn tas opp og blir en del av personens psykologiske verktøy. Prosessen som tar en ekstern handling, hvor handlingen blir en del av en indre rekonstruksjon, kalles internalisering (Vygotsky, 1978).

Prosessen består av tre overganger. Den første overgangen er en ytre handling som begynner å bli internalisert. Et barn skal dele pastiller mellom to personer. Barnet gir en pastill til seg selv og en pastill til den andre, og fortsetter slik helt til alle pastillene er fordelt. For utviklingen av høyere mentale prosesser er det viktig med aktiviteter hvor tegn blir brukt som en ekstern representasjon. I den første overgangen vil tegnet være de fysiske pastillene.

Neste overgang er en medmenneskelig prosess som utvikles til å bli en indre prosess, hvor utviklingen skjer først på et sosialt nivå og deretter på et indre nivå. All utvikling på høyt nivå kommer opprinnelig fra medmenneskelig samhandling. Her blir pastillene fordelt ved å late som, uten at de fysiske pastillene er der.

Den siste overgangen er en medmenneskelig prosess som blir til en personlig utvikling (Vygotsky, 1978). I denne overgangen vil barnet klare å fordele pastillene ved å tenke. Barnet trenger ikke fysiske pastiller eller kommunikasjon for å mestre handlingen. Internalisering som en prosess, som er beskrevet her, kan være en beskrivelse av modelleringsprosessen.

På samme måte som eksempelet over, er modelleringssyklusen et verktøy som må internaliseres for å læres. For at modellering skal læres krever det samhandling, rekonstruksjon av ytre handlinger, bruk av tegn som språk, kommunikasjon, og matematiske symbol, og aktivitet for å utvikle høyere mentale prosesser.

Säljö (2001) er kritisk til Vygotsky sin teori om internalisering. Han mener at internalisering forsterker bildet av læring som innlæring, at noe utenfra kommer «inn» i individet. Når vi lærer, er det ikke noe som kommer «inn» i individet for at læring skal oppstå, hevder Säljö. Säljö (2001) mener at internalisering bærer preg av å være en fiks ferdig mental struktur som er en kopi av omverdenen. På tross av Säljö sin kritikk av Vygotsky sin bruk av ordet internalisering, velger jeg å bruke begrepet som en forklaring på at modelleringsprosessen kan sees på som både et internt og et eksternt verktøy.

Modellering, som en psykologisk prosess, utvikles fra det eksterne til det interne: Først må elevene tilegne seg eksterne verktøy i en modelleringsaktivitet, etter hvert kan disse verktøyene internaliseres.

2.3 Tre perspektiver på matematisk modellering

I den didaktiske teorien om matematisk modellering kan vi se på tre perspektiver for modelleringen. Perspektivene er hentet fra Blomhøj (2006, s. 89-93), og er presentert fordi de beskriver tre nytteperspektiv av matematisk modellering. Disse perspektivene er det samfunnsmessige, det undervisningsmessige, og det læringsmessige perspektivet.

Det *samfunnsmessige* perspektivet på modellering handler om å se rollen som matematisk modellering har i samfunnet. Jeg skal presentere tre samfunnsmessige perspektiver på modellering. Det første perspektivet er at modellering er en integrert del av mange naturvitenskaplige, tekniske, og økonomiske fagområder. Det er stor nytteverdi i å kunne stille opp, analysere, og kritisere matematiske modeller. Det andre perspektivet handler om at vi omgir oss av matematiske modeller hele tiden, og at det derfor er en viktig egenskap å kunne bruke modeller i dagens samfunn. Eksempler på slike modeller er pensjonsplaner, spareplaner, forsikringer, skattesystem, og kredittkortavtaler. Det tredje perspektivet innebærer at elever må ha grunnlag for å ta samfunnsmessige beslutninger. Å ha en faglig kritisk dømmekraft er avgjørende for i hvilken grad en kan delta i de demokratiske prosessene. Alle disse tre samfunnsmessige perspektivene grunngir at matematisk modellering skal finne sted i skolen.

Det *undervisningsmessige* perspektivet handler om å kunne begrunne og beskrive det som matematikkfaget inneholder på de ulike faglige nivåene i utdanningsløpet. Det er derfor viktig at modellering er en grunnleggende metode for å jobbe med anvendt matematikk. Manglende modelleringskompetanse kan gi elevene problemer med å klare å knytte virkeligheten og matematikken sammen, og at elevene dermed ikke klarer å knytte matematikken inn i sin erfaringsverden. Problemer med å knytte disse verdenene sammen kan videre føre til at elevene har vansker med å bruke ferdigheter og kunnskap fra matematikkundervisningen på andre områder. For å utvikle modelleringsferdigheter må det jobbes med modelleringsprosessen. Modellering kan ikke læres uten øvelse.

Det *læringsmessige* perspektivet handler om at elever må utvikle modelleringskompetanse for å arbeide med modellering; tilnærmingen til faget matematikk er mer praktisk og fruktbart gjennom å arbeid med matematisk modellering. Dette perspektivet omfatter også utfordringer knyttet til læring. Elevers øvelse av autonomi i læringsprosessen er en del av modelleringskompetansen, men den forutsetter at elevene har en viss kompetanse og erfaring med modellering (Skovsmose & Blomhøj, 2006). Perspektivene på modellering som er presentert, begrunner hvorfor det er viktig å lære modellering. Videre skal jeg presentere noen ulike tilnærminger til matematisk modellering.

2.4 Ulike tilnærminger til matematisk modellering

Innenfor forskning på matematisk modellering er det mange tilnærminger til modellering og mange modelleringssykluser. Borromeo Ferri (2006) beskriver et utvalg av ulike teoretiske og empiriske framstillinger av modelleringssyklusen. Syklusene viser elevenes prosess i arbeid med modellering, og er forskjellige fordi de bygger på ulike tilnærminger til hva modellering er (Borromeo Ferri, 2006).

Før jeg presenterer de ulike syklusene, ser jeg det nødvendig å beskrive forskningsfeltets ulike tilnærminger til modellering. Kaiser og Sriraman (2006, s. 304) beskriver i sin artikkel et klassifiseringssystem for de ulike tilnærmingene. Klassifiseringen er gjort med utgangspunkt i de publikasjoner som er gjort av ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) og ICTMA (The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Application). De ulike tilnærmingene blir presentert med hensyn til de sentrale målene med modellering og den bakgrunnen tilnærmingene har. Tilnærmingene beskriver hvilket syn og bakgrunn forskerne har på modelleringen. Når jeg videre skal beskrive noen ulike modeller for modelleringssyklusen vil jeg plassere dem i én av kategoriene; Tabell 1 .Modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007), som jeg velger å bruke videre i min analyse, er plassert innenfor tilnærmingene kontekstuell modellering og kognitiv modellering.

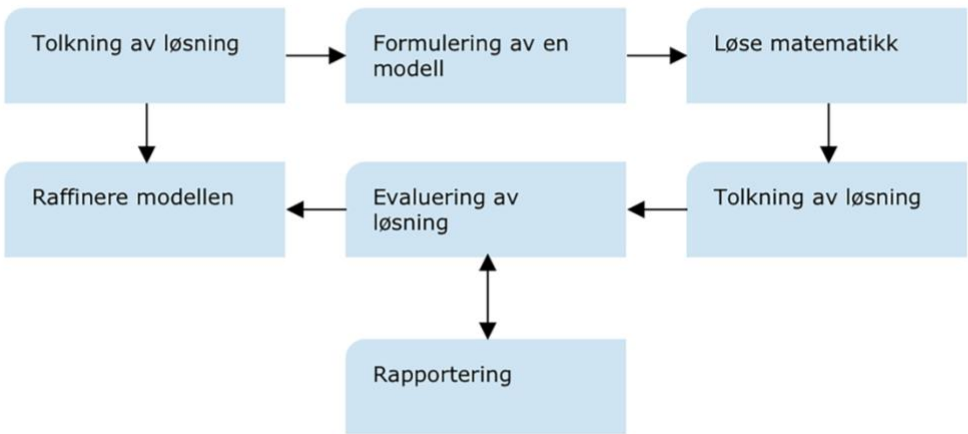
Tabell 1 – Klassifisering av perspektiver på matematisk modellering, med egne oversettelser av tabellen til Kaiser og Sriraman (2006)

Tilnærming	Sentrale mål	Forhold til tidligere forskning	Bakgrunn
Realistisk eller anvendt modellering *Berry og Davies (1996)*	Pragmatisk og nyttig mål (løse et virkelig verdensproblem, forstå den virkelige verden, fremme modelleringskompetanse)	Pragmatisk perspektiv av Pollak	Anglosaksisk pragmatisme og anvendt matematikk
Kontekstuell modellering *Blum og Leiß (2007)*	Subjektrelatert og psykologiske mål, løse verdensproblem	Informasjon, prosessere, tilnærmet læring til system-tilnærming	Amerikansk problemløsnings-debatt som en del av hverdags praksisen og psykologiske labeksperiment
Utdanningsrettet modellering skiller mellom: **1) Didaktisk** **2) Begrepsmessig** *Kaiser (1995) og Blum (1996). Maaß (2006). Galbraith og Stillman (2006)*	Pedagogisk og fagrelaterte mål: 1) Strukturering av læringsprosessen 2) Begrepslæring og utvikling	Integrerende perspektiver (Blum og Niss) og videreutvikling av naturvitenskaplig og humanistisk tilnærming	Didaktisk teori og læringsteori
Sosialkritisk modellering	Pedagogiske mål som kritisk tenkning om verden rundt oss	Frigjørende perspektiv	Sosialkritisk tilnærming til politisk sosiologi
Epistemologisk eller teoretisk modellering	Teoriorienterte mål, for å jobbe med en teori	Naturvitenskaplig og humanistisk perspektiv av tidlig Freudenthal	Romansk epistemologi
Meta-perspektiv: Kognitiv modellering *Blum og Leiß (2007)*	Forskningsmål: 1) Analysere kognitive prosesser som finner sted i modelleringsprosessen og forståelsen av disse kognitive prosessene Psykologisk mål: 2) Fremme matematisk tankeprosesser ved å bruke modeller som mentale bilder, eller understreke modellering som mentale prosesser som abstraksjon eller generalisering		Kognitiv psykologi

2.5 Ulike modelleringssykluser

I matematisk modellering er det flere modeller som representerer prosessen som en syklus. Den sykliske måten å illustrere modelleringsprosessen på startet på 1970-tallet. Prosessen ble brukt for å få ingeniørstudenter til å beskrive de ulike stegene de måtte gjennom for å tilnærme seg en realistisk modell (Haines & Crouch, 2010). Det er viktig å påpeke at modelleringsprosessen er en individuell prosess, og at prosessen ikke alltid følger pilenes retninger i syklusen (Kuntze, Siller & Vogl, 2013).

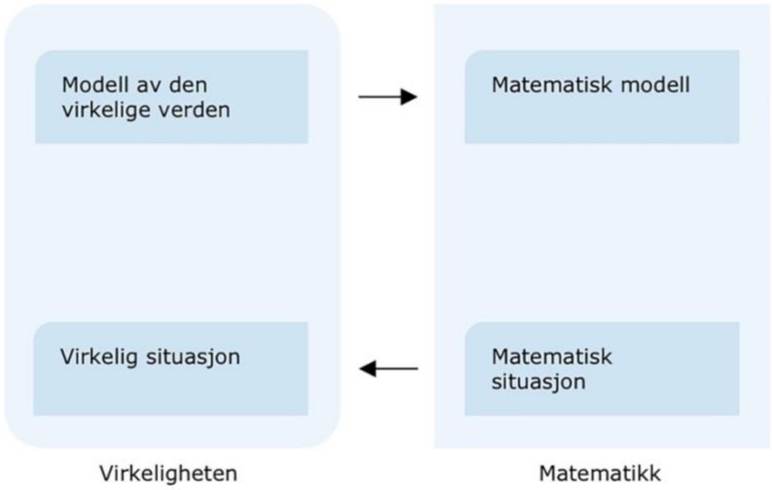
Den første syklusen som ble utviklet for å beskrive modelleringsprosessen har tilhørighet i den realistiske og anvendt tilnærmingen fra Tabell 1. Modellen som vist i Figur 1 er utviklet av Berry og Davies (1996). Det er flere modifikasjoner, utvidelser og forbedringer som er gjort med modelleringssyklusen. Modellen viser studenters aktivitet i seks steg, med et syvende steg for rapportering.



Figur 1 – Egen oversettelse av Berry og Davies (1996)

Det som skiller denne modellen fra de andre modellene – som blir beskrevet senere – er at *rapporteringen* er satt på utsiden av resten av syklusen, med en eksplisitt posisjon (Perrenet & Zwaneveld, 2012).

Forskere på undervisning i matematisk modellering er enig om at modelleringsprosessen er en syklus med en start og en ende, hvor det jobbes med et problem fra virkeligheten. Ingen av modellene jeg viser til i denne oppgaven har en lineær forståelse av modelleringsprosessen. En didaktisk tilnærming til modelleringsprosessen er laget av Kaiser (1995) og Blum (1996).

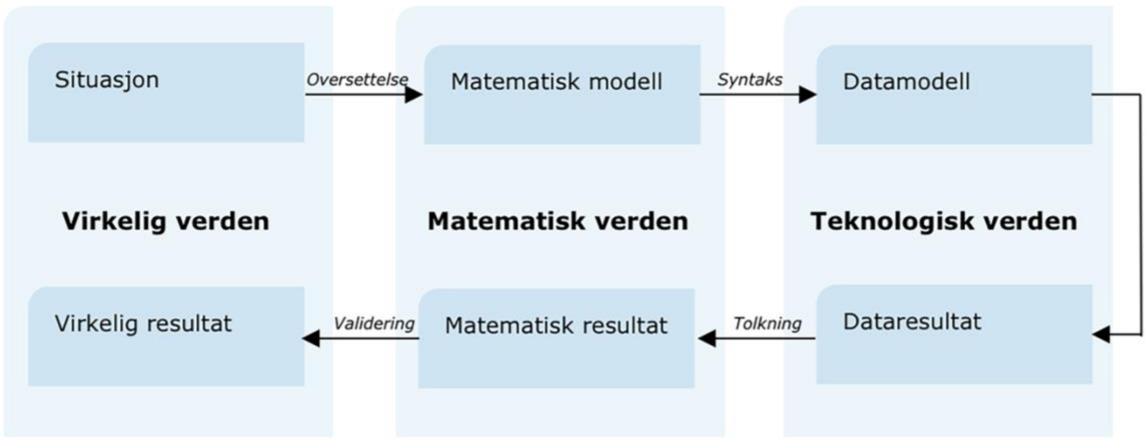


Figur 2 – Egen oversettelse av modellen til Kaiser (1995) og Blum (1996)

En rekke modelleringssykluser er basert på modellen i Figur 2, og den er derfor et utgangspunkt for mange av modellene som har blitt utviklet i etterkant. Modellen i Figur 2 er en enkel framstilling av modelleringssyklusen, fordi den tar for seg de fire hoveddelene av prosessen. Blum og Leiß (2007) har videreutviklet modellen i Figur 2, og den presenteres i kapittel 2.6.

Variasjonene på modellene avhenger av hvilket perspektiv modellene representerer. Modellene som er presentert i Figur 1 og Figur 2 er modeller som har eksistert over lengre tid. Nyere eksempler på modeller av modelleringssyklusen er varierte, noe som viser at prosessen fortsatt ikke har stabilisert seg. Fordi det finnes så mange ulike sykluser i dag, viser det at det ikke er én framstilling som er mer riktig enn de andre, men at det fortsatt er ulik oppfatning av hvordan prosessen foregår.

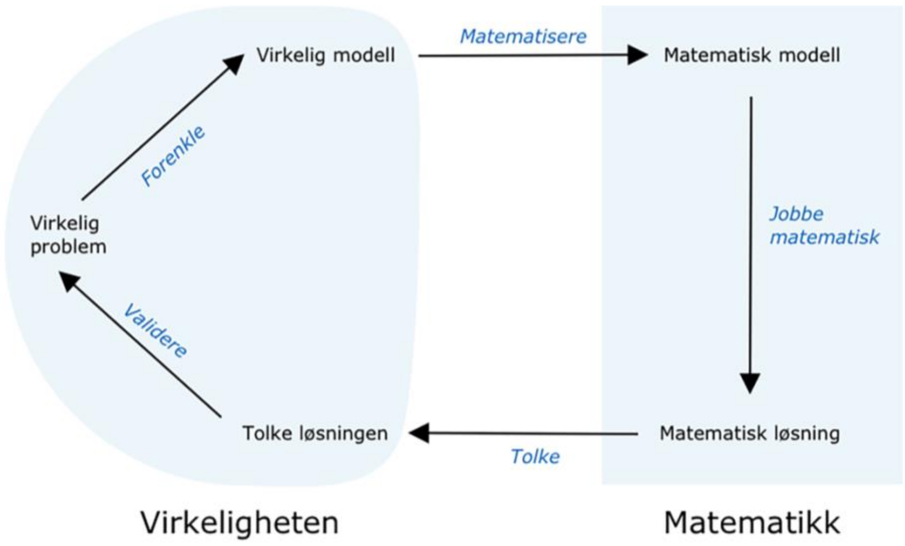
En av de nyere modellene av modelleringssyklusen har et punkt som beskriver rollen teknologi kan ha i modelleringsprosessen. Et eksempel på en modell som trekker inn teknologi som en del av modelleringsprosessen er Siller og Greefrath (2010).



Figur 3 – Egen oversettelse av modellen til Siller og Greefrath (2010)

Modellen i Figur 3 er basert på modellen i Figur 2, men har et ekstra aspekt som er den teknologiske verden (se høyre side av Figur 3). Modellen beskriver modelleringssyklusen ved hjelp av modellen til Blum og Leiß (2007) som viser til sentrale deler av modelleringsprosessen. Siller og Greefrath (2010) mener at teknologi er avgjørende i modelleringsprosessen i dagens skole. Valg av teknologiske programmer bør være grundig planlagt for at elevene skal få nytte av teknologi i modelleringsprosessen. De tre delene som er illustrert i Figur 3 representerer en ideelle prosess, og de påvirker hverandre. Bruken av teknologi utvider mulighetene for å løse bestemte matematiske modeller som ikke ville blitt løst uten at teknologien var tilstede. Siller og Greefrath (2010) viser til *software* verktøy som kan benyttes som verktøy i undervisningen, og eksemplene de trekker fram er *geogebra* og regneark.

En siste modell som illustrer modelleringssyklusen beskrives av Maaß (2006) som i sin artikkel presenterer hvilken kompetanse elevene må ha for å jobbe med modellering. Maaß (2006) mener at det er sammenheng mellom modelleringsprosess og modelleringskompetanse. Modelleringssyklusen til Maaß (2006) er en representasjon som er utviklet med utgangspunkt i Blum og Leiß (2007).



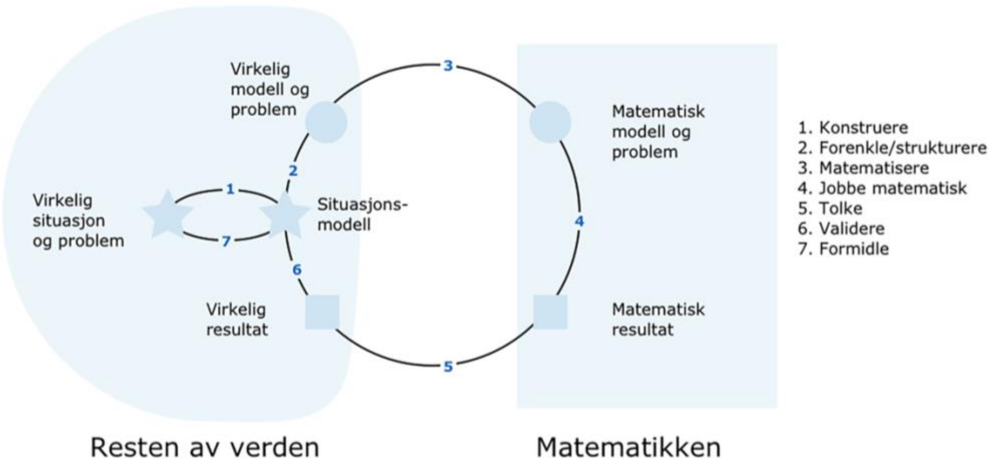
Figur 4 – Egen oversettelse av modelleringssyklusen til Maaß (2006)

Maaß (2006) sier at modellering handler om å bevege seg mellom virkeligheten og matematikken. Ved å forenkle, strukturere, og idealisere problemet får man en virkelig modell. Matematisering beskriver overgangen hvor den virkelige modellen leder til en matematisk modell, og ved å jobbe matematisk vil det føre til en matematisk løsning. Løsningsforslaget må tolkes og valideres, og hvis løsningen ikke passer med virkeligheten må prosessen jobbes gjennom på nytt. Modellen i Figur 4 viser en modelleringsprosess som er et forenklet skjema og ikke en algoritme, som må jobbes gjennom på en lineær måte. Prosessen påvirkes av ens egne matematikkunnskaper. Perspektivet i denne modellen er det samme som Blum og Leiß (2007) sitt: en didaktisk tilnærming.

2.6 Modelleringssyklusen til Blum og Leiß

I denne studien har jeg valgt å bruke Blum og Leiß (2007) sin modelleringssyklus (se Figur 5) som er illustrert av Blum og Ferri (2009). Jeg har valgt denne modellen fordi den har stor tyngde innenfor forskningsfeltet på matematisk modellering. En fordel med denne modellen er at den beskriver prosessen og gir beskrivende navn for hver av underkompetansene (Maaß, 2006). Det er viktig å påpeke at denne modellen, i likhet med de andre modellene, ikke er en lineær beskrivelse av modelleringsprosessen.

Modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) tilhører den kognitive og den kontekstuelle tilnærmingen til modellering fra Tabell 1. Modellen har en egen overgang som fokuserer på det kognitive i en modelleringsprosess og kalles situasjonsmodell. Blum og Leiß (2007) ser på situasjonsmodellering som den viktigste fasen av modelleringsprosessen, fordi det er i den overgangen oppgaven blir forstått. En lignende tilnærming til *situasjonsmodell* er en mental representasjon av modellen. Borromeo Ferri (2006) mener at uttrykket «*mental representasjon av modellen*» bedre beskriver en internaliseringsprosess. Internaliseringsprosessen beskriver et mentalt bilde av en individuell prosess (Borromeo Ferri, 2006). Hun bruker begrepet *mental representasjon* for det samme som Blum og Leiß bruker *situasjonsmodell*.



Figur 5 – Egen oversettelse av modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007)

Modellen har sju overganger som beskriver trinn elever må gjennom når de jobber med modelleringsoppgaver: (1) Problemet må forstås av problemløseren som skaper en situasjonsmodell. Det må konstrueres en individuell, mental modell. (2) Situasjonen må *forenkles*, struktureres, og gjøres mer presis, noe som leder til en virkelig modell av problemet. Problemløseren må gjøre noen antagelser og velge ut hva som er verdt å ta med av informasjon. (3) Matematiseringen av den virkelige modellen til en matematisk modell er en prosess hvor det tas i bruk ulike matematiske begreper og gjøres utregninger, for at den virkelige modellen kan blir gjort om til en matematisk modell. (4) Å *jobbe matematisk*, som for eksempel å gjøre beregninger, sette opp uttrykk, og løse likninger, fører til et matematisk resultat. Her brukes matematiske verktøy for å (5) *tolke* de matematiske resultatene som viser om den matematiske modellen kan sees som en modell for det virkelige problemet. (6) Validering av resultatet er nødvendig for å se om resultatet er nøyaktig og om forenklingene er tilstrekkelige. Validering av resultatene kan vise at det er nødvendig å gå gjennom prosessen en gang til, for å se om det er noen justeringer som må gjøres eller noen faktorer må legges til. (7) Det siste steget i syklusen er å legge fram eller presentere resultatet (Leiß, Schukajlow, Blum, Messner & Pekrun, 2010).

Fordelen med denne modelleringssyklusen er at den skiller den individuelle konstruksjonsprosessen i trinn 1 fra resten av prosessen. Trinn 1 av syklusen beskriver en kognitiv barriere for elever, som kan oppstå når de jobber med modelleringsoppgaver. Selv om trinn 2 kun er et kognitivt steg, betyr ikke det at de andre stegene ikke er det. Det er en fordel at prosessen ikke er lineær, det vil si at det er mulig å gå mellom trinnene uten å følge rekkefølgen til trinnene.

2.7 Utfordringer med matematisk modellering

Mange studier har pekt på at det er vanskelig for elever å tilegne seg ferdigheter innenfor matematisk modellering. Den vanskeligste delprosessen av matematisk modellering er matematisering, noe som har blitt dokumentert av blant annet Galbraith og Stillman (2006). Jankvist og Niss (2019) har i sin studie kommet fram til flere grunner for at matematisering er den mest utfordrende delen av prosessen. Den første grunnen er at elever ikke ser hvorfor oppgaven har noe med matematikk å gjøre; istedenfor å bruke matematikken, er betraktningene gjort på bakgrunn av det virkelige liv. En annen grunn til at elever ikke bruker matematikken er at de ikke vet hvilken matematikk som kan brukes i modelleringssituasjonen. Et siste eksempel er at elever ikke tenker på konsekvensene av de opplysningene de velger å trekke ut av oppgaven, noe som gjør at antagelsene av situasjonene blir feil (Jankvist & Niss, 2019).

2.8 Læreres fagdidaktisk kunnskap knyttet til modellering

Lærerens selvoppfatning av egen fagdidaktisk kunnskap er viktig når de skal undervise i modellering. Derfor er det viktig at lærere får utvikle sine fagdidaktiske kunnskaper om modellering, og sine modelleringsspesifikke kunnskaper. For at en lærer skal lykkes med modellering i klasserommet er det viktig med positive erfaringer og mestringsfølelse (Kuntze et al., 2013). Matematikklærerens kunnskaper og tro på egen rolle har innvirkning på hvordan læreren jobber med modellering med elever.

Kuntze (2011) viser til at det er to viktige faktorer for at læreren skal jobbe med modellering i klasserommet. Det ene er kunnskap og kompetanse om modellering, og det andre er valg av gode modelleringsoppgaver. Oppgaver med egnet kompleksitet og som er tilpasset læringsmål er viktig for å utvikle elevers kompetanse. I tillegg må læreren få erfaring med modellering (Maaß, 2006). Fordi lærerens erfaringer er viktig, mener Oliveira og Barbosa (2010) at det trengs flere studier for å se på de pedagogiske dimensjonene av modellering i skolen, og i lærerutdanningen. Læreres utfordringer med modellering er ikke bare knyttet til undervisningssituasjonen, men også til fagdidaktisk kunnskap om modellering, og erfaring.

I dette teorikapittelet har jeg presentert teori som jeg mener gir et viktig grunnlag for min studie. Fordi jeg har en pragmatisk tilnærming til teori har jeg valgt å presentere flere teorier om modellering, for så å beskrive det rammeverket jeg har valgt å bruke i analysen. Mitt sosiokulturelle læringssyn vil ligge til grunn for min undersøkelse, og det har derfor vært naturlig å ta det med i teorien. Jeg skal videre i denne oppgaven se på analyser av data som er gjort med utgangspunkt i teorien. Før analysen vil jeg presentere metoden som er brukt for datainnsamling. I metodekapittelet vil jeg beskrive hvordan jeg har samlet inn data og hvordan jeg skal analysere datamaterialet.

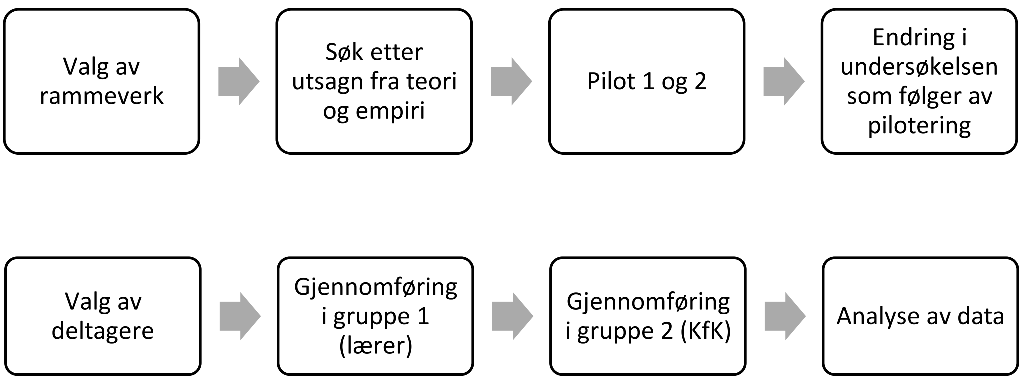
3 Metode

I min undersøkelse har jeg brukt en kvantitativ metode som måler hva lærere synes er utfordrende med matematisk modellering i undervisningen. Jeg har sett på hva lærere opplever som utfordrende når de støtter elevene i modelleringsprosessen. Som nevnt i teorikapittelet har jeg brukt et rammeverk for modelleringsprosessen som beskriver sju trinn i en modelleringssyklus. Ved å bruke en kvantitativ metode vil jeg kunne tallfeste egenskaper som er knyttet til det jeg skal undersøke: Er det mulig å sette mål på hvor vanskelig de ulike prosessene i rammeverket til Blum og Leiß (2007) oppleves av lærere?

For å svare på min problemstilling har jeg valgt å bruke metoden comparative judgement. Før jeg presenterer comparative judgement, skal jeg beskrive Rasch-modellen fordi comparative judgement bygger på denne modellen. Videre i oppgaven skal jeg beskrive undersøkelsen jeg har laget og vise til piloteringene jeg gjorde for å utvikle undersøkelsen. Deretter skal jeg se på utvalget av deltagere og vise hvilke metoder jeg har brukt for å behandle innsamlet data. Til sist vil jeg vise til de forskningsetiske retningslinjene som jeg har tatt utgangspunkt i mitt arbeid før jeg kritisk reflekterer over de metodene jeg har brukt.

3.1 Studien i grove trekk

Designet av studien er presentert i Figur 6. Studiens gang, i grove trekk, er som følger: (1) Valg av rammeverk av modelleringssyklus fra teori. (2) Søk etter utsagn fra teori som beskriver modelleringsprosessen og empiriske beskrivelser. (3) Egnede utsagn ble valgt ut og testet i to piloter. (4) Nødvendige endringer ble gjort etter pilotene. (5) Undersøkelsen ble gjennomført av 15 lærere. (6) Analyse av datamateriale.



Figur 6 – Studiens gang

3.2 Rasch

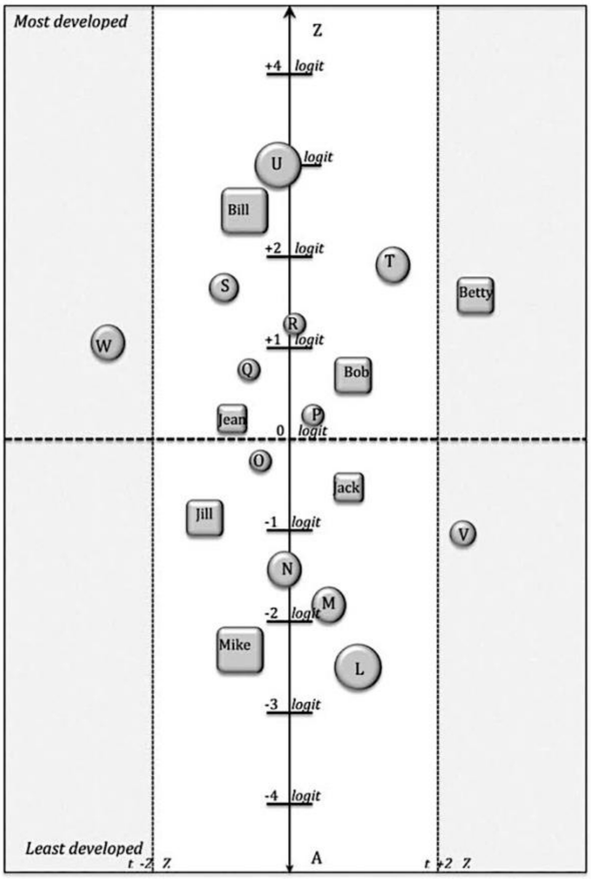
Rasch-modellen er en modell som ofte brukes for å måle personers kompetanse og oppgavers vanskelighetsgrad. Ved hjelp av differansen mellom personens kompetanse og oppgavens vanskelighetsgrad kan vi uttrykke hva sannsynligheten er for at en person skal få til en oppgave. Dersom personens kompetanse er lik oppgavens vanskelighetsgrad er sannsynligheten for at personen får til oppgaven 0,5. Ved å plassere personer og oppgaver langs én linje, vil denne linjen kunne beskrive hvilke oppgaver personer sannsynligvis klarer.

For å kunne bruke Rasch-modellen er det noen grunnleggende antagelser som må tas. Disse antagelsene er: (1) at hver person og hver oppgave kan karakteriseres med et mål og uttrykkes med en bestemt verdi langs en linje, og (2) at differansen mellom verdiene kan beregne sannsynligheten for et bestemt mål (Bond & Fox, 2015).

Ved å se på differansen mellom parameterne ß (en persons mål) og δ (en oppgaves mål), vil vi kunne si noe om sannsynligheten for at en person med et bestemt mål (f.eks., kompetanse) skal klare å løse en oppgave med et mål (f.eks., en vanskelighetsgrad). Sannsynligheten må representeres mellom 0 og 1, men differansen mellom ß og δ kan være uendelig. Rasch-modellen kan uttrykkes matematisk på denne måten:

$$P_{iJ}\left(ß_j, \delta_i\right) = \frac{\exp(ß_j - \delta_i)}{1 + \exp(ß_j - \delta_i)} \tag{1}$$

Det matematiske uttrykket som er presentert over utrykker sannsynligheten for at en person med kompetanse $ß_j$ kan løse en oppgave med vanskelighetsgrad δ_i. For å utlede denne formelen må en starte med å se på sannsynligheten for at en person svarer riktig på en oppgave. Det første steget er å estimere evnen en person har ß fra en råscore i prosent til en odds for suksess. Denne oddsen beregnes ved å se på forholdet mellom sjansen for at en person klarer oppgaven og at personen ikke klarer oppgaven. De estimerte verdiene for ß og δ er uttrykt på en skala med logaritmen til oddsen. Den gjennomsnittlige oddsen er 0, og odds med høyere sannsynlighet enn gjennomsnittet har en positiv verdi, og odds med lavere sannsynlighet enn gjennomsnittet har negativ verdi. Et eksempel på en slik skala er hentet fra Bond og Fox (2015) og illustrert i Figur 7.



Figur 7 – Eksempel på logaritmeskala fra Bond og Fox (2015)

Når en persons kompetanse og en oppgaves vanskelighetsgrad plasseres i samme skala må de ha samme måleenhet. I Rasch brukes måleenheten *logit* som står for «log odds unit». Personens andel av korrekte svar (*p*) og personens gale svar (1-*p*) er oddsen. Tilsvarende vil oddsen beregnes for en oppgave (Bond & Fox, 2015). Ved skrive om Rasch-modellen kan vi se at logit-verdien er den sammen som differansen mellom en persons kompetanse og en oppgaves vanskelighetsgrad (Wu & Adams, 2007):

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = ß - \delta \qquad (2)$$

3.3 Comparative judgement

Comparative judgement er en metode som brukes for å måle noe som er sammensatt og kompleks. Modellen er bygget på et psykologisk prinsipp om at mennesker er flinkere til å sammenligne to objekter, og vurdere objektene i forhold til hverandre, enn å vurdere uten sammenligning. Opphavsmannen til comparative judgement er Thurstone.

3.3.1 Thurstones prinsipper for måling

Thurstone mente at det var viktig at psykologi også kunne måles på en vitenskapelig måte (Pollitt, 2011). Modellen comparative judgement er basert på at alt vi vurderer vil påvirkes av andre objekter, og at det derfor er lettere å vurdere noe opp mot et annet objekt. For eksempel er det lettere å måle høyden av et tre dersom flere trær sammenlignes med hverandre enn å måle høyden av et tre som står for seg selv. Menneskelige verdier er subjektive, og kan derfor ikke representeres av fysiske objekter. Før vi kan utvikle en målestokk for subjektive målinger må det finnes en subjektiv enhet som det skal måles i (Thurstone, 1959).

Thurstone ville måle egenskaper eller ferdigheter hos mennesker som ikke har bestemte vurderingskriterier, som for eksempel håndskrift, engelskkompetanse, eller modelleringsferdigheter. Thurstone jobbet derfor med flere modeller som verktøy for måling i psykologi.

Den logistiske modellen til Thurstone (1959) , kan skrives som

$$\log odds\ (A\ slår\ B|\ v_a, v_b) = \ v_a - v_b \qquad (3)$$

På den høyre siden av likningen representerer verdiene til de to objektene som skal sammenlignes, *a* og *b*. Formelen uttrykker sannsynligheten for at *a* slår *b* som en funksjon av avstanden mellom *a* og *b*; jo høyere målet til *a* er i forhold til *b*, jo større er oddsen for at vi vil konkludere med at «*a* er høyere (tyngre, sterkere, bedre, etc.) enn *b*» Denne sammenhengen kan også skrives på med følgende formel:

$$\log odds\ (A\ slår\ B|\ v_a, v_b) = \frac{\exp(ß_j - \delta_i)}{1 + \exp(ß_j - \delta_i)} \qquad (4)$$

Den venstre siden representerer sannsynligheten for at A slår B i en sammenligning, og ut ifra modellen kan vi estimere den relative verdien av de ulike objektene som vurderes. I formel 4 er modellen til Thurstone og Rasch-modellen satt sammen.

For at modellen skal være gyldig er det noen viktige antagelser som må gjøres. (1) Verdien av *a* og *b* er relativ, siden det er differansen mellom paret som er avgjørende kan skalaen variere. (2) Thurstone mente at det var viktig å gjøre en sammenligning mellom hvert mulige par. Etter hvert har det blitt dokumentert at det er tilstrekkelig å gjøre ti ganger så mange sammenligninger som det er objekter for å lage en skala som alle objektene kan plasseres langs (Pollitt, 2011, s. 160). (3) Metoden som Thurstone fant opp kan brukes i flere sammenhenger enn det han først antok, også utenfor psykologien. (4) De objektene som sammenlignes kan i prinsippet være hva som helst.

Comparative judgement kan brukes innenfor mange fagfelt; det som er felles er at metoden egner seg for å gjøre vurderinger på områder som har uklare kriterier. Det kan være sammensatte elevtekster, det kan være en rapport fra et prosjekt, eller løsningsforslaget til en problemløsningsoppgave. Ved å bruke tradisjonelle vurderingsmetoder vil det oppstå utfordringer med å vurdere modelleringsoppgaver eller problemløsningsoppgaver; det vil dukke opp spørsmål som: Hva kan defineres som høy måloppnåelse? Hva skal jeg vektlegge i besvarelsen? Hvilke kriterier skal jeg ha for løsningen?

Comparative judgement er en metode som kan gi pålitelige mål uten klare vurderingskriterier. Ved å sammenligne mange elevarbeid mot hverandre og si hvilken som er bedre, vil en kunne plassere de på en målestokk som rangerer elevarbeidet på en skala. Den eller de som vurderer disse arbeidene blir spurt om å gjøre en gyldig vurdering av kvalitet, og vurderingsformen vil få en høy pålitelighet. Påliteligheten er oftest høyere enn den tradisjonelle vurderingsformen (Pollitt, 2012).

3.4 Fra modelleringsprosess til undersøkelse

Hensikten med denne studien er å undersøke hvilke overganger i modelleringssyklusen som oppleves mest utfordrende. For at deltagerne skal kunne vurdere ulike overganger i modelleringsprosessen, har jeg ved hjelp av rammeverket laget utsagn som beskriver overgangene (Tabell 2). I modelleringsprosessen er det sju overganger. Den sjuende overgangen, formidle, har jeg valgt å utelate fra undersøkelsen, fordi den ikke er en del av den sykliske prosessen, men heller en avslutning av modelleringsprosessen. For å lage utsagn som beskriver prosessen har jeg sett etter beskrivelser av overgangene i teori om modellering (Blomhøj og Jensen (2003), Blum og Ferri (2009), Greefrath og Vorhölter (2016), og Maaß (2006)).

I tillegg til å beskrive modelleringssyklusen er det sju utsagn som er rettet mot læreres rolle i modellering. De sju lærerutsagnene er hentet fra teorien, som beskrevet i forrige avsnitt, og fra empiri. I forkant av gjennomføring av undersøkelsen ble 10 lærere (gruppe 1) spurt hva de mente var viktig for en lærer å gjøre for å legge til rette for en god undervisningsøkt i modellering. De siste sju utsagnene er et resultat av innspill fra lærerne og teori. Utsagnene er presentert i Tabell 2.

Tabell 2 – Utsagnene i undersøkelsen

	KATEGORI	UTSAGN
1	Konstruere	Å få elevene til å forstå problemet
2	Konstruere	Å få elevene motiverte for å løse det virkelige problemet
3	Konstruere	Å få elevene til å se for seg ulike løsninger
4	Konstruere	Å få elevene til å velge ut verdier som er viktig for å lage modellen
5	Forenkle	Å få elevene til å forenkle problemet
6	Forenkle	Å få elevene til å strukturere informasjonen
7	Forenkle	Å få elevene til å lage en skisse for å få oversikt over problemet
8	Matematisere	Å få elevene til å notere ned utregninger
9	Matematisere	Å få elevene til oversette det virkelige problemet til en matematisk sammenheng ved å lage tabeller, formler, utregninger og funksjoner
10	Jobbe matematisk	Å få elevene til å samtale om metoder de bruker for å løse problemet
11	Jobbe matematisk	Å få elevene til å bruke sine matematiske kunnskaper for å løse problemet
12	Jobbe matematisk	Å få elevene til å vurder ulike representasjoner de kan løse problemet med
13	Tolke	Å få elevene til å vurdere om løsningen er gyldig
14	Tolke	Å få elevene til å knytte den matematiske løsningen tilbake til det virkelige problemet
15	Tolke	Å få elevene til å beskrive sin løsning med et matematisk språk
16	Validere	Å få elevene til å reflektere over om det er andre måter å løse problemet på
17	Validere	Å få elevene til å revidere løsningene dersom løsningen ikke passer med virkeligheten
18	Validere	Å få elevene til å stille kritiske spørsmål til egen og andres løsning
19	Lærerutsagn	Å finne gode modelleringsoppgaver
20	Lærerutsagn	Å stille gode spørsmål for å veilede elevene underveis
21	Lærerutsagn	Å drøfte ulike løsningsforslag sammen med elevene
22	Lærerutsagn	Konstruere læringssituasjoner som gjør at elevene engasjerer seg
23	Lærerutsagn	Å legge til rette for god kommunikasjon mellom elevene på gruppa
24	Lærerutsagn	Å stille spørsmål som gjør at elevene reflekterer over sin løsning
25	Lærerutsagn	Å ikke legge for mange føringer på løsningen underveis i arbeidet

Da jeg lagde utsagnene var jeg bevisst på å velge ord og begreper som er lette å forstå for at undersøkelsen skulle være enkel å gjennomføre. Ved å forenkle begreper og ord kan den originale betydningen ha blitt påvirket og jeg kan derfor ikke garantere for at den originale betydningen vil være nøyaktig den samme. Ett eksempel på et utsagn som er hentet fra teori, og deretter forenklet, er: *«Å gjenkjenne kvaliteter som påvirker situasjonen, navngi dem og identifisere nøkkelvariabler»* (Maaß, 2006). Utsagnet er forenklet til: *«Å få elevene til å velge ut verdier som er viktig for å lage modellen»*.

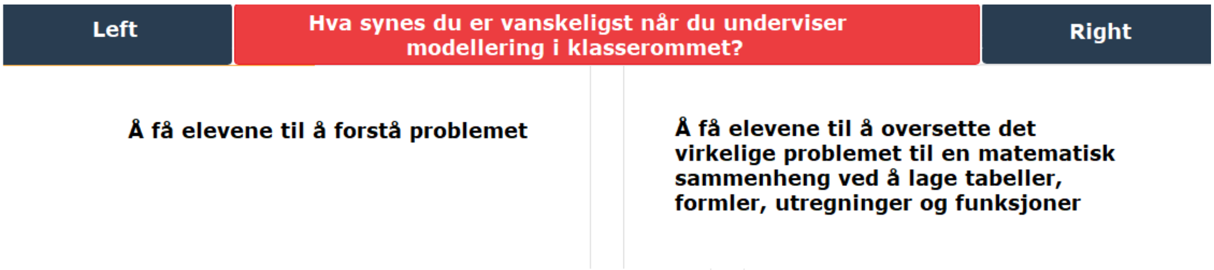
3.5 Gjennomføring av undersøkelsen

No more marking (2019) er et digitalt verktøy som gjør det enkelt å gjennomføre comparative judgement i praksis. Nettsiden er i hovedsak utviklet for å bruke comparative judgement på elevbesvarelser, men kan også benyttes på andre objekter. Fordi det som vanligvis skal vurderes er knyttet til personer, i form av en besvarelse, kalles det som skal vurderes for «kandidater». «Kandidatene» i denne undersøkelsen er derfor utsagnene om modellering.

For å sammenligne objektene som legges inn i oppgaven må det velges ut et utvalg av respondenter som skal gjøre sammenligningene. Det kan være én eller flere respondenter (i *no more marking* kalles de «dommere») som vurderer. Antall dommere har ikke betydning for undersøkelsen, det som er viktigst er antall sammenligninger. For hver besvarelse som er lagt inn i oppgaven kreves det ti ganger så mange sammenligninger. Dersom det er 20 besvarelser som skal vurderes må det gjøres 200 vurderinger totalt. Disse vurderingene kan fordeles på flere personer. Det er mulig å gjøre flere vurderinger, men ved det tidoble har reliabiliteten stabilisert seg, og det er derfor ikke nødvendig med flere. Etter at sammenligningene er gjort av én eller flere dommere vil objektene som er vurdert rangeres på en skala. Denne skalaen velger jeg å kalle for en målestokk, og presenteres i avsnitt 3.8.1.

3.5.1 Undersøkelsen

For å svare på undersøkelsen fikk hver respondent en link til *No more marking.* Da de fulgte linken fikk de beskjed om å registrere e-postadresse og navn. Da skjemaet var fylt ut ble deltageren informert om at det ikke er mulig å angre på en vurdering. Undersøkelsen ser ut som følgende:



Figur 8 – Eksempel på sammenligning av to utsagn i undersøkelsen

For hver sammenligning fikk deltagerne opp to nye utsagn. Spørsmålet som er skrevet i det røde feltet i Figur 8 forble det samme under alle sammenligningene.

3.6 Pilotering

I utviklingsprosessen av undersøkelsen gjennomførte jeg to piloter. Pilotene var nødvendig for å tilpasse og gjøre endringer underveis som undersøkelsen ble laget. Det var flere faktorer etter pilotering som gjorde at jeg måtte gjøre justeringer av undersøkelsen før jeg samlet inn data. Da den første piloteringen ble gjennomført, hadde jeg et utvalg med ti utsagn om modellering fra teori og empiri. Piloten ble gjennomført av meg og min veileder. Ved å gjennomføre en pilot fikk jeg et inntrykk av hvordan metoden fungerte, og jeg fikk sett hvilke formuleringer som passet best. De formuleringene som ikke fungerte var de vi stoppet opp ved og måtte lese flere ganger for å forstå. En erfaring som ble gjort etter første pilot var at det tok lang tid å gjøre 150 sammenligninger for én person. Det ble også tydelig at noen av utsagnene var formulert uklart og måtte endres.

I pilot 2 ble mange av de samme endringene gjennomført. Denne gangen var det tre personer som gjennomførte undersøkelsen, og hver person gjorde 90 vurderinger. I pilot 2 var det 27 utsagn om modellering som var med. To av utsagnene ble fjernet etter pilot 2:

1) Å få elevene til å velge riktig notasjon for å representere situasjonen
2) Å få elevene til å se endringer som kan gjøres med egen løsning/modell

Grunnen til at disse utsagnene ble fjernet etter pilot 2, var at de var svært lik enkelte andre utsagn. Da de ble satt opp mot tilsvarende likt utsagn, ble det vanskelig å velge det ene utsagnet over det andre. Utsagn (1) «*Å få elevene til å velge riktig notasjon for å representere situasjonen*» opplevdes relativt lik med «*Å få elevene til å oversette det virkelige problemet til en matematisk sammenheng ved å lage tabeller, formler, utregninger og funksjoner*». Siden det siste av disse to utsagnene var mer konkret valgte jeg å beholde dette. Begge disse utsagnene tilhørte kategorien *matematisere* i modelleringsprosessen.

Utsagn (2) *«Å få elevene til å se endringer som kan gjøres med egen løsning/modell»* ble også tatt bort fordi det hadde veldig lik ordlyd og innhold som *«Å få elevene til å stille kritiske spørsmål til egen og andre sin løsning»*. Disse utsagnene tilhører kategorien *validere*.

3.7 Valg av deltagere

Undersøkelsen er gjennomført i to grupper. Gruppe 1 består av ti matematikklærere, som underviser i matematikk fra 5. til 10. trinn på én skole. Gruppe 1 vil fra nå av kalles *lærergruppen*. I forkant av undersøkelsen sendte jeg ut informasjon om hvordan undersøkelsen skulle gjennomføres, samt en kort beskrivelse av hva jeg mente med matematisk modellering. I informasjonen jeg sendte ut valgte jeg å ha med et eksempel på en modelleringsoppgaven:

> *Maria bor i Meråker, like ved grensen til Sverige. Hun skal fylle opp tanken på bilen sin. Maria må finne ut om det lønner seg å fylle tanken i Meråker, 2 km fra der hun bor, eller om hun bør kjøre over grensa til Storlien, 30 km fra der hun bor. Presenter ditt løsningsforslag.*

Oppgaven har ingen tilknytning til resten av undersøkelsen, men er kun et eksempel på en modelleringsoppgave. I vedlegg 1 er all informasjon som lærerne fikk presentert samlet. Deltagerne fra lærergruppen består av lærere med ulik utdanningsbakgrunn og ulik arbeidserfaring. Alle har utdanning som adjunkt eller lektor med minimum 60 studiepoeng i matematikkdidaktikk. Arbeidserfaringen til deltagerne i gruppen er varierende, og spenner seg fra fire måneder arbeidserfaring til 30 år med arbeidserfaring som lærer. Variasjonen er representativ for utvalget av matematikklærere på mange skoler.

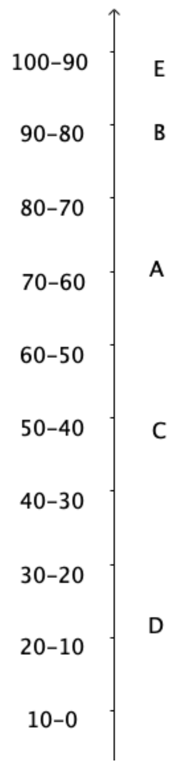
Gruppe 2 består av fem matematikklærere som tar matematikk som videreutdanning gjennom «Kompetanse for Kvalitet», de vil fra nå av kalles *KfK-gruppen*. Selv om også KfK-gruppen besår av lærere, har jeg valgt å kalle gruppe 1 for lærergruppen av praktiske grunner. KfK-gruppen er antatt å være mer homogen enn lærergruppen. Dette er lærere som har valgt å ta videreutdanning i matematikkdidaktikk. Lærerne som tar videreutdanning kan jeg anta at er interessert i matematikkdidaktikk, og at de derfor har en generisk interesse for å utvikle seg som matematikklærere.

3.8 Behandling av datamaterialet

I dette delkapittelet skal jeg presentere de metodene jeg har brukt for å analysere datamaterialet.

3.8.1 Målestokk

Etter at vurderingene var gjennomført med comparative judgement, ble målene til utsagnene estimert. Målene ble så reskalert, slik at de fleste mål lå mellom 0 og 100. Skaleringen er vilkårlig, og påvirker ikke resultatene av studien. I analysen fikk jeg opp en målestokk som rangerer utsagnene fra 0-100. Figur 9 er en illustrasjon av en hypotetisk målestokk, objektene langs målestokken er derfor bare eksempler.



Figur 9 – Eksempel på målestokk som rangerer utsagn

3.8.2 Reliabilitet

For å sikre kvalitet i forskningen min, er reliabilitet, også kalt pålitelighet, viktig. Det er flere måter å vurdere reliabilitet på. En måte å teste reliabiliteten på er å sende den samme undersøkelsen ut på nytt for å måle graden av samsvar mellom gjentatte målinger av samme variabel. Dette kan i noen tilfeller være problematisk fordi det er tidkrevende, dyrt og vanskelig å gjennomføre en undersøkelse to ganger. En annen måte å måle reliabilitet på, er å undersøke graden av intern konsistens mellom indikatorene som inngår. Intern konsistens måles med Cronbach's alfa som er en statistisk størrelse som varierer fra 0 til 1 (Ringdal, 2018). Indeksen har høy reliabilitet dersom Cronbachs alfa ligger mellom 0,70 og 1. Dersom undersøkelsen som gjennomføres ikke har nok oppgaver/spørsmål vil det blir upresist hvor på skalaen et målt objekt er, og det vil derfor påvirke reliabiliteten. Desto flere spørsmål i undersøkelsen, desto mer presist blir de målte objektene plassert langs måleskalaen (Bond & Fox, 2015).

En annen faktor som påvirker reliabiliteten er inkonsistens. Ved kalibrering av instrumentet vil gruppens oppfatning av begrepet *modellering* ha innvirkning på reliabiliteten. Dersom gruppens forståelse av *modellering* er lik, vil sannsynligheten øke for høy reliabilitet, og hvis forståelsen av *modellering* er ulik, vil sannsynligheten minke.

3.8.3 Validitet

Begrepsvaliditet betyr at utsagnene måler begrepet *modellering*, som utsagnene er ment for å måle. Dette er en viktig form for validitet i min undersøkelse. Som nevnt i avsnitt 3.4, har jeg valgt å gjøre noen forenklinger av utsagn til undersøkelsen; faren med det er at noe av betydningen kan utelates og det vil påvirke begrepsvaliditeten. Ofte er teoretiske begreper rikere på meningsinnhold enn det som blir gjengitt med noen utsagn (Ringdal, 2018, s. 104). Ved operasjonalisering vil noe av betydningen til et begrep reduseres for å gjøre det håndterlig i empirien.

Innholdsvaliditet er en annen form for validitet som sikrer at innholdet gir en god dekning av modelleringsprosessen som skal måles (Ringdal, 2018, s. 105). Det innholdet som skal måles må dekkes av utsagnene som er med i undersøkelsen. Her er det avgjørende for min undersøkelse at jeg har med utsagn som er dekkende for modelleringsprosessen.

3.8.4 Antallet vurderinger

Reliabiliteten i comparative judgement er avhengig av antall vurderinger som gjøres per utsagn (det må være ti vurderinger per utsagn eller besvarelse). Disse vurderingene kan deles opp på så mange lærere en vil (Christodoulou, 2019), men det er anbefalt å bruke så mange lærere som mulig. I min undersøkelse har jeg 25 utsagn om modellering, og det er derfor nødvendig med totalt 250 vurdering. Antall vurderinger deles på antallet lærere som skal vurdere. I KfK-gruppen var det fem lærere, så hver lærer måtte gjennomføre 50 vurderinger. I lærergruppen var det først seks lærere som svarte på undersøkelsen. Fordi reliabiliteten ikke stabiliserte seg etter 250 vurderinger, valgte jeg å få to lærere ekstra til å svare på undersøkelsen. Reliabiliteten økte etter de siste vurderingene.

En fordel med å bruke comparative judgement som metode er at det minimerer den individuelle subjektive vurderingen. Ved å bruke mange lærere som dommere vil den enkelte person sin subjektive mening balanseres ut av de andres vurderinger.

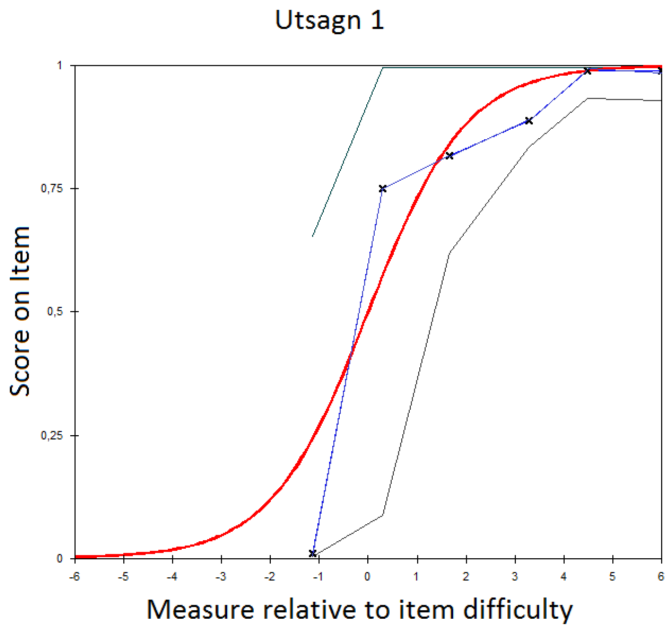
3.8.5 Infit

For å analysere den tekniske validiteten til utsagnene, har jeg undersøkt om fit-verdiene står til de forventede responsene; det vil si, jeg sammenligner observert data med Rasch-modellen. I *comparative judgement* får alle utsagnene og alle lærerne en infit-verdi. Utsagnene vil få en infit-verdi som sier noe om hvor enige dommerne om det bestemte utsagnet. Et utsagn med lav infit – for eksempel 0,5 – er et utsagn der lærerne er relativt enige om hvor «vanskelig» dette utsagnet er. Et utsagn med høy infit – for eksempel, 1,7 – er et utsagn der lærerne er mer uenig; noen lærere synes utsagnet er relativt lett, mens andre synes det er vanskeligere. Bond og Fox (2015, s. 273) beskriver 0,4 -1,2 som en akseptabel grense.

På samme måte har læreren en infit-verdi. Infit-verdi mellom 0 og 1 viser at lærerens vurdering sammenfaller meget bra med vurderingen til gruppen som helhet. En lærer med infit-verdi på mellom 1 og 1,3 er en som vurderer noe ulikt resten av gruppen, og en lærer med infit-verdi over 1,3 gjør ganske mange vurderinger som er forskjellig fra gruppen som helhet.

3.8.6 ICC-kurve

En annen måte å sikre teknisk validitet på er å sjekke *item characteristics curve* (ICC), som er en representasjon på hvordan utsagnene passer modellen. I min undersøkelse beskriver ICC-kurven hvordan deltagerne har svart i forhold til det som er forventet. ICC-kurven uttrykker forventet og observert sannsynlighet for at ett utsagn slår et annet. ICC sammenligner Rasch-modellen (rød linje) og det empiriske resultatet (blå linje). Dersom den observerte kurven ikke passer med modellen, så antyder det at utsagnet ikke handler om det samme som de andre utsagnene, som i dette tilfellet er modellering. De svarte linjene indikerer et konfidensintervall på 95%: hvis den blå linjen er utenfor dette intervallet, så konkluderes det med at det er signifikante forskjeller mellom Rasch-modellen og observert data. Figur 10 viser et konkret eksempel på en ICC-kurve (for utsagn 1).



Figur 10 – ICC-kurve for utsagn 1

3.8.7 Dimensjonalitet

Dimensjonalitet er den tredje egenskapen som vurder kvaliteten til et mål. En dimensjonsanalyse kan avgjøre om det er én eller flere dimensjoner som måles (Ringdal, 2018, s. 103). Styrken av dimensjonaliteten avgjør om kontrasten er stor nok for å regnes som en egen dimensjon, og kontrasten beregnes til å være over 2,0 (med enheten «egenverdi») ved flerdimensjonalitet (hvis egenverdien er mindre enn 2, så konkluderer vi med at instrumentet er tilstrekkelig endimensjonalt for måling). For å finne ut om undersøkelsen har flere dimensjoner har jeg brukt faktoranalyse (PCA).

3.8.8 Principal component analysis (PCA)

PCA brukes for å se etter mønster og korrelasjoner mellom utsagnene. Dersom det er et nytt mønster i datamaterialet som dukker opp blir det en ny dimensjon (Pallant, 2013, s. 188). Dersom analysen resulterer i flere dimensjoner er det en kvalitativ studie som må gjøres for å se på hva disse kategoriene betyr.

3.9 Analysemetoder av datamaterialet

For å se nærmere på problemstillingen min har jeg brukt IBM SPSS som analyseprogram, med støtte fra Winsteps. For å analysere data har jeg valgt å bruke to statistiske tester som sammenligner to eller flere forhold: *t*-test og ANOVA.

3.9.1 *T*-test for uavhengig utvalg

En *t*-test er en statistisk metode som brukes for å teste signifikant forskjell mellom to datasett. Jeg har sammenlignet gruppene (lærergruppen og KfK-gruppen), og sett om det er en signifikant forskjell mellom gruppene som har gjennomført undersøkelsen (Tabachnick & Fidell, 2007). Jeg har brukt den uavhengige *t*-testen fordi den sammenligner forhold fra to uavhengige undersøkelser. På grunn av Bonferroni's korreksjon av *p*-verdien, $p_{\alpha\kappa}$, hvor α=0,05 og k=25 (som er antallet sammenligninger), så burde *p*-verdien være mindre enn 0,002 for å være signifikant (Field, 2013, s. 69).

3.9.2 ANOVA

Den andre statistiske testen jeg skal bruke er *analysis of variance* (ANOVA) (Tabachnick & Fidell, 2007). Den brukes til å finne statistisk differanse mellom to eller flere grupper. I min analyse skal jeg bruke en ANOVA for uavhengig utvalg for å sammenligne de sju overgangene i modelleringsprosessen. Når jeg kjører en uavhengig ANOVA på kategoriene i begge gruppene er jeg ute etter om det er én kategori som er signifikant forskjellig fra de andre kategoriene. ANOVA er i stor grad lik *t*-test, men forskjellen er at ANOVA kan sammenligne flere enn to kategorier.

3.10 Forskningsetiske retningslinjer

Forskning har betydning for de som deltar, for fagmiljøet og for utviklingen av utdanning, og det er derfor viktig at forskningen foregår etisk forsvarlig. For å gjennomføre etisk forsvarlig forskning har jeg fulgt de nasjonale forskningsetiske retningslinjene av NESH (2016) som er et hjelpemiddel for meg som forsker. NESH står for *den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora.* Retningslinjene peker på faktorer som forskere bør ta hensyn til. Noen av retningslinjene er også nedfelt i lovgivning, for eksempel krav om personvern. For å sikre kravene har jeg samlet inn samtykke fra de som deltar ved hjelp av et samtykkeskjema, se vedlegg 2.

I oppstarten av mitt forskningsprosjekt søkte jeg til NSD om godkjenning til å gjennomføre min studie. Fordi undersøkelsen min er nettbasert måtte jeg søke om godkjenning av å innhente personopplysning som IP-adresse og e-postadresse. I samtykkeskjemaet informerte jeg om hva studien min handlet om, hvordan undersøkelsen skulle gjennomføres og hvilke personopplysninger jeg ville få fra deltagerne. Det var viktig for meg å presisere at de kunne trekke sin deltagelse når de måtte ønske. Det ble også informert om at materialet blir slettet ved avslutningen av prosjektet.

3.11 Metodekritikk

Comparative judgement blir brukt som metode for å vurdere noe som er sammensatt og kompleks, i dette tilfellet matematisk modellering. Fordi nomoremarking.com (2019) i hovedsak er ment for å brukes på elevbesvarelser kan det oppstå problemer med å benytte metoden. Jeg ser likevel at metoden har fungert for å vurdere utsagn om matematisk modellering. Begrunnelse for at metoden fungerer skal jeg presentere i analysen.

En annen faktor som kan ha påvirket undersøkelsen er at valget av deltagere ikke er tilfeldig. Deltagerne i lærergruppen er valgt ut på en skole jeg kjenner, derfor kan min relasjon til deltagerne ha vært med å påvirke hvordan de svarer på undersøkelsen. Et eksempel på slik påvirkning kan ha vært at deltagerne tenkte over hva jeg ville mene om svarene de ga på undersøkelsen. På tross av at utvalget ikke er tilfeldig er det ikke observert noen faktorer som har påvirket svargivingen.

Et annet aspekt som kan vurderes er om utsagnene jeg har valgt å ha med i undersøkelsen er dekkende for å beskrive modelleringsprosessen. Utsagnene ble endret fra teorien for å gjøre de enklere å forstå. I denne overgangen er det en fare for at noen av de faglige betydningene kan ha forsvunnet. Det var viktig at deltagerne gjennomførte undersøkelsen uten avbrytelser, og ved å forenkle språket ble undersøkelsen mer tilgjengelig og lettere å utføre for deltagerne. Likevel var det nødvendig å gjøre forenklingen for at undersøkelsen skulle være lett å svare på. I tillegg til at noen av betydningene kan ha blitt endret, er det også en fare for at deler av prosessen ikke er tilstrekkelig representert i undersøkelsen.

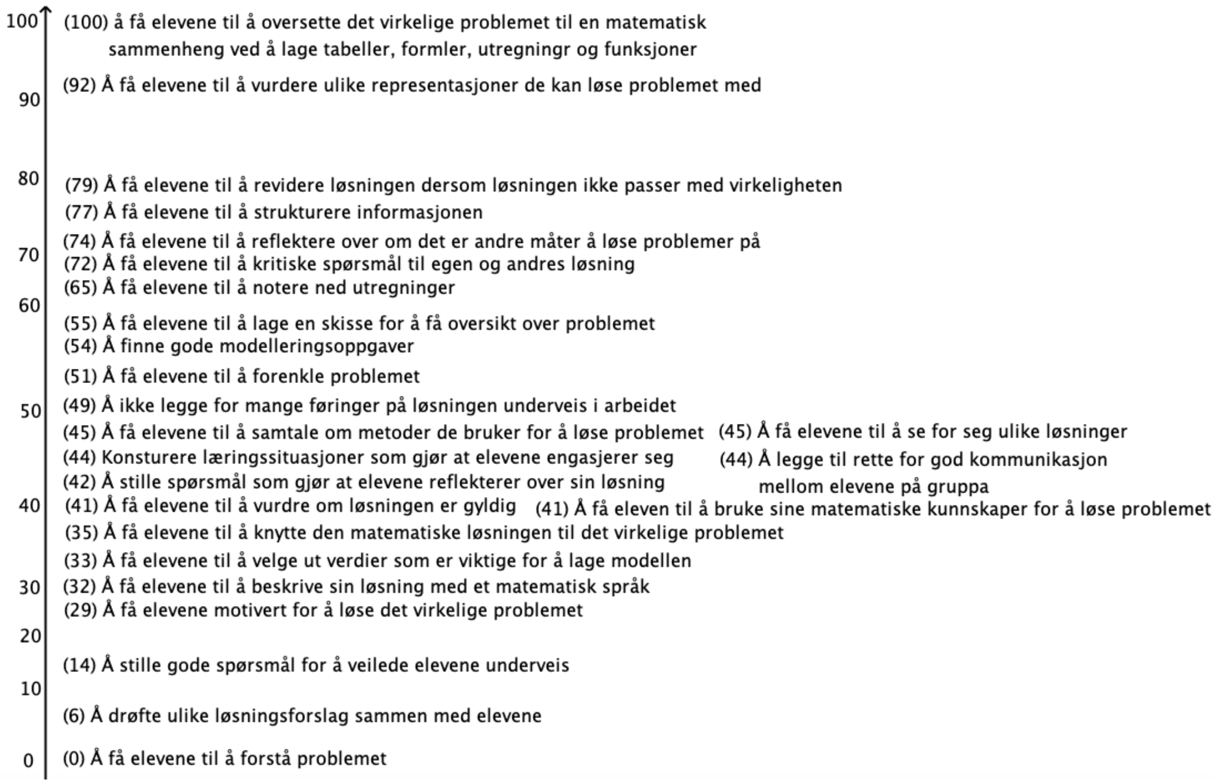
4 Resultater

For å finne svar på forskningsspørsmålene mine skal jeg trekke frem fem analyser: (1) Til å begynne med illustrerer jeg hvordan utsagnene er plassert langs målestokken; (2) deretter belyser jeg *matematisere* som den mest utfordrende overgangen i modelleringsprosessen; (3) i påfølgende avsnitt ser jeg på validiteten til instrumentet, det vil si, reliabiliteten, og infit-verdiene til lærerne og utsagnene; (4) videre skal jeg se på resultatene av faktoranalysen – måler instrumentet én eller flere dimensjoner? (5) Til slutt vil jeg se om resultatene er stabile: er lærergruppen og KfK-gruppen enige?

4.1 Utsagnene langs målestokken

Jeg skal begynne denne analysen med å presentere utsagnene langs en målestokk for å sammenligne målene fra lærergruppen og KfK-gruppen. Målestokken viser utsagnene rangert etter vanskelighetsgraden de er vurdert til å ha. Rangeringen kan være med å skape et visuelt bilde av tendenser eller grupperinger i gruppenes vurderinger. Jeg skal nå studere målestokken til hver enkelt gruppe, og deretter gjøre noen sammenligninger.

4.1.1 Målestokk som representerer lærergruppen



Figur 11 – Målestokken til lærergruppen

Målestokken til lærergruppen er illustrert i Figur 11. Nederst på skalaen ligger det tre utsagn med mål: 0, 6, og 14. To av utsagnene, med henholdsvis 6 og 14 som mål, tilhører kategorien med *lærerutsagn*. Utsagnet med mål 0 er fra kategorien *konstruere*, og av alle lærerne i lærergruppen, er dette vurdert som det minst utfordrende utsagnet.

Neste gruppering langs målestokken består av 15 utsagn med mål mellom 29 og 55.

Tabell 3 – Utsagn fra lærergruppen med mål mellom 29 og 55

Kategori	**Nr.**	**Mål**	**Utsagn**
Konstruere	2	29	Å få elevene motivert for å løse det virkelige problemet
	3	45	Å få elevene til å se for seg ulike løsninger
	4	33	Å få elevene til å velge ut verdier som er viktig for å lage modellen
Forenkle	5	51	Å få elevene til å forenkle problemet
	7	55	Å få elevene til å lage en skisse for å få oversikt over problemet
Tolke	13	41	Å få elevene til å vurdere om løsningen er gyldig
	14	35	Å få elevene til å knytte den matematiske løsningen til det virkelige problemet
	15	32	Å få elevene til å beskrive sin løsning med et matematisk språk

I denne grupperingen er utsagn fra kategoriene *konstruere*, *forenkle,* og *tolke* høyt representert, og disse utsagnene kan sees i Tabell 3. Utsagnene med mål mellom 29 og 55 ligger rundt gjennomsnittet av målestokken, og er derfor ikke det læreren anser som mest eller minst utfordrende. Utsagn fra kategoriene *validere* og *matematisere* er ikke representert i denne grupperingen.

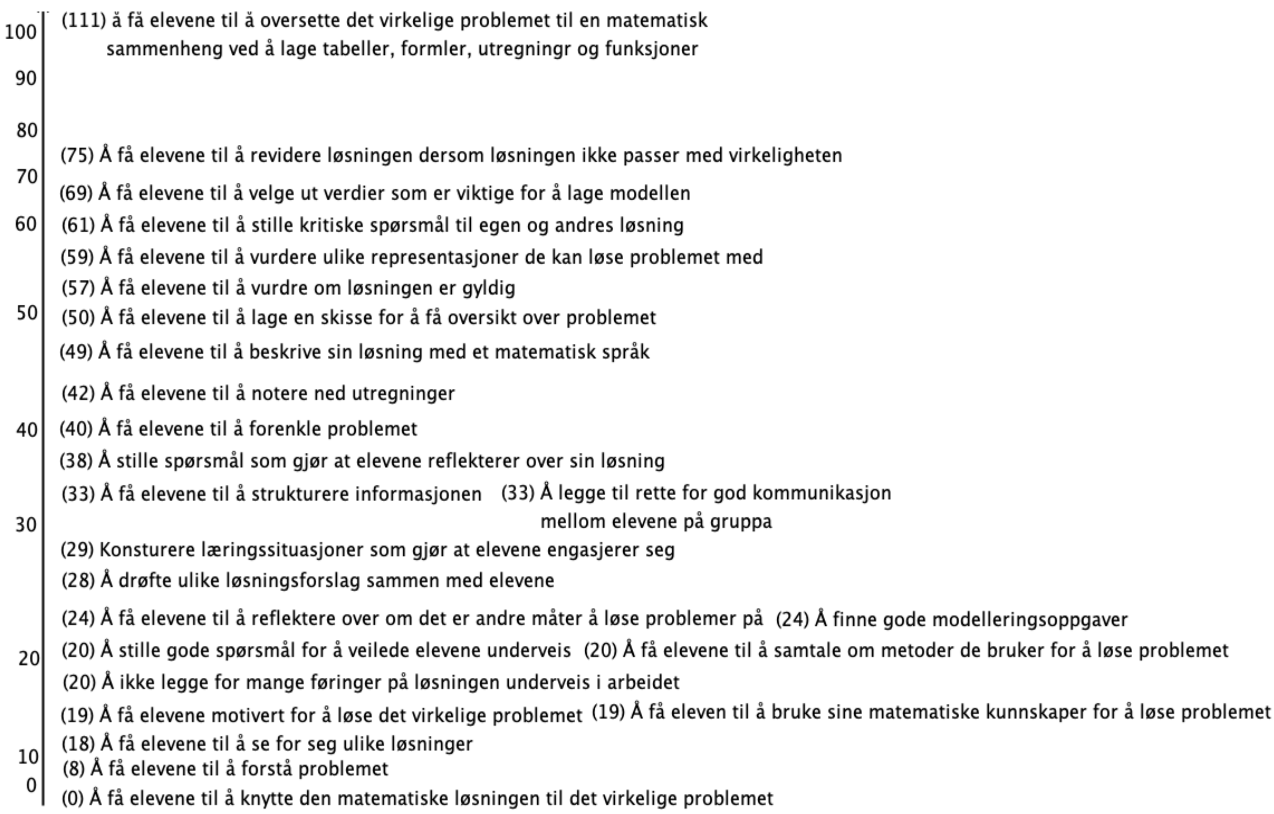
I øvre del av skalaen (Figur 11) er det to små grupperinger av utsagn, én mellom 65 og 79, og én mellom 92 og 100. Alle utsagn fra kategoriene *validere* og *matematisere* er representert i den øvre delene av skalaen, og disse er beskrevet i Tabell 4.

Tabell 4 – Utsagn som lærergruppen har vurdert som mest utfordrende

Kategori	Nr.	Mål	Utsagn
Matematisere	8	65	Å få elevene til å notere ned utregninger
	9	100	Å få elevene til å oversette det virkelige problemet til en matematisk sammenheng ved å lage tabeller, formler, utregninger og funksjoner
Validere	16	74	Å få elevene til å reflektere over om det er andre måter å løse problemet på
	17	79	Å få elevene til å revidere løsningene dersom løsningen ikke passer med virkeligheten
	18	72	Å få elevene til å stille kritiske spørsmål til egen og andres løsning

Utsagnene fra kategorien *validere* har til felles at de handler om å være kritisk til løsningsforslag og gjøre forbedringer av egen løsning. Utsagnene fra *matematisere* handler om å ta i bruk matematikk for å gå fra den virkelige situasjonen til en matematisk modell.

4.1.2 Målestokk som representerer KfK-gruppen



Figur 12 – Målestokken til KfK-gruppen

Målestokken til KfK-gruppen er illustrert i Figur 12. Langs målestokken ligger ulike grupperinger av utsagn, eksempelvis fra 0 til 24, 28 til 42, og 57 til 111.

Den første gruppen består av ti utsagn med mål fra 0 til 24. Høyest representert i denne grupperingen er utsagn fra kategoriene; *konstruere, jobbe matematisk* og *lærerutsagn*. Et utvalg av disse utsagnene er beskrevet i Tabell 5.

Tabell 5 – Utsagn fra KfK-gruppen med lavest mål

Kategori	Nr.	Mål	Utsagn
Konstruere	1	8	Å få elevene til å forstå problemet
	2	19	Å få elevene motivert for å løse det virkelige problemet
	3	18	Å få elevene til å se for seg ulike løsninger
Jobbe matematisk	10	20	Å få elevene til å samtale om metoder de bruker for å løse problemet
	11	19	Å få elevene til å bruke sine matematiske kunnskaper for å løse problemet
Lærerutsagn	19	24	Å finne gode modelleringsoppgaver
	20	20	Å stille gode spørsmål for å veilede elevene underveis
	25	20	Å ikke legge for mange føringer på løsningen underveis i arbeidet

Denne grupperingen ligger under gjennomsnittsverdien som er 39, og består av de utsagnene KfK-gruppen synes er minst utfordrende. Utsagn med verdi fra 28 til 42 ligger rundt gjennomsnittet. Kategoriene som er høyest representert her, er *lærerutsagn* og *forenkle*. Dette er utsagn som beskriver lærerens undervisning for en god modelleringsøkt, og elevers strukturering av informasjon fra oppgaven. I KfK-gruppen er alle lærerutsagnene vurdert, noe som betyr at denne gruppen mener at dette er noe av det minst utfordrende med modellering.

Mest utfordrende for KfK-gruppen, er utsagn med mål fra 57-111. Her er det seks utsagn fra kategoriene *konstruere, matematisere, jobbe matematisk, tolke,* og *validere*. Det er ikke én bestemt kategori som utmerker seg; flere er representert. Tabell 6 beskriver de utsagnene KfK-gruppen synes er mest utfordrende.

Tabell 6 – Utsagn fra KfK-gruppen med mål 57-111

Kategori	**Nr.**	**Mål**	**Utsagn**
Konstruere	4	69	Å få elevene til å velge ut verdier som er viktig for å lage modellen
Matematisere	9	111	Å få elevene til å oversette det virkelige problemet til en matematisk sammenheng ved å lage tabeller, formler, utregninger og funksjoner
Jobbe matematisk	12	59	Å få elevene til å vurdere ulike representasjoner de kan løse problemet med
Tolke	13	57	Å få elevene til å vurdere om løsningen er gyldig
Validere	17	75	Å få elevene til å revidere løsningene dersom løsningen ikke passer med virkeligheten
	18	61	Å få elevene til å stille kritiske spørsmål til egen og andres løsning

I neste avsnitt sammenlignes målestokkene til lærergruppen og KfK-gruppen.

4.1.3 Sammenligning av målestokkene fra lærergruppen og KfK-gruppen

Det er både likheter og forskjeller mellom målestokkene til gruppene. Begge gruppene vurderer utsagn fra kategoriene *konstruere* og *lærerutsagn* til å være minst utfordrende. KfK-gruppen mener i tillegg at *å jobbe matematisk* er noe av det minst utfordrende med modellering.

Lærergruppen har gjennomsnittsmål 49, og KfK-gruppen har gjennomsnittsmål 39. Dette betyr at lærergruppen generelt synes at alle utsagnene er litt mer utfordrende, sammenlignet med KfK-gruppen. I grupperingen som ligger midt på målestokken har begge gruppene utsagn fra kategorien *forenkle*, se Tabell 7.

Tabell 7 – Sammenligning av utsagn fra lærergruppen og KfK-gruppen med middels mål

Kategori	**Nr.**	**Mål lærer**	**Mål KfK**	**Utsagn**
Forenkle	5	51	40	Å få elevene til å forenkle problemet
	6	77	33	Å få elevene til å strukturere informasjonen
	7	55	50	Å få elevene til å lage en skisse for å få oversikt over problemet

Utsagn fra kategorien *forenkle* er vurdert ulikt av lærer- og KfK-gruppen. Lærergruppen vurderer utsagn 5 og 7 som gjennomsnittlig, og KfK-gruppen vurderer utsagn 5 og 6 som gjennomsnittlig.

Øverst på målestokken har begge gruppene kategoriene *matematisere* og *validere*. Lærergruppen har vurdert alle utsagnene i disse to kategoriene som mest utfordrende, mens KfK-gruppen har vurdert noen av dem som mest utfordrende. Videre har KfK-gruppen også vurdert utsagn fra kategoriene *konstruere, jobbe matematisk,* og *tolke* som blant de mest utfordrende; dette er utsagn 4, 12, og 13.

Tabell 8 – Utsagn som lærergruppen og KfK-gruppen har vurdert som mest utfordrende

Kategori	**Nr.**	**Mål lærer**	**Mål KfK**	**Utsagn**
Matematisere	8	65	42	Å få elevene til å notere ned utregninger
	9	100	111	Å få elevene til å oversette det virkelige problemet til en matematisk sammenheng ved å lage tabeller, formler, utregninger og funksjoner
Validere	16	74	24	Å få elevene til å reflektere over om det er andre måter å løse problemet på
	17	79	75	Å få elevene til å revidere løsningene dersom løsningen ikke passer med virkeligheten
	18	72	61	Å få elevene til å stille kritiske spørsmål til egen og andres løsning

I Tabell 8 beskrives utsagnene lærergruppen og KfK-gruppen mener er de mest utfordrende, og utsagnene tilhører kategoriene *matematisere* og *validere*. Selv om begge gruppene har vurdert disse utsagnene som de mest utfordrende, er det variasjon i *hvor* utfordrende de mener utsagnene er. Begge gruppene mener at utsagn 9 – i kategorien *matematisere* – er mest utfordrende. Utsagn 8 er vurdert høyt på målestokken. Kategorien *matematisere* inneholder utsagn 8 og 9, og får derfor høyest gjennomsnittsverdi, og det betyr at *matematisere* er den mest utfordrende kategorien. I kategorien *validere* er det større variasjon i hvordan utsagnene er vurdert. Lærergruppen vurder utsagn 16 som mye mer utfordrende enn KfK-gruppen, mens utsagn 17 og 18 er vurdert mer sammenfallende.

Tabell 9 – Utsagn med størst differanse mellom lærergruppen og KfK-gruppen

Kategori	**Nr.**	**Mål lærer**	**Mål KfK**	**Utsagn**
Konstruere	4	33	69	Å få elevene til å velge ut verdier som er viktig for å lage modellen
Forenkle	6	77	33	Å få elevene til å strukturere informasjonen
Jobbe matematisk	12	92	59	Å få elevene til å vurdere ulike representasjoner de kan løse problemet med
Tolke	14	34	0	Å få elevene til å knytte den matematiske løsningen tilbake til det virkelige problemet
Validere	16	74	24	Å få elevene til å reflektere over om det er andre måter å løse problemet på

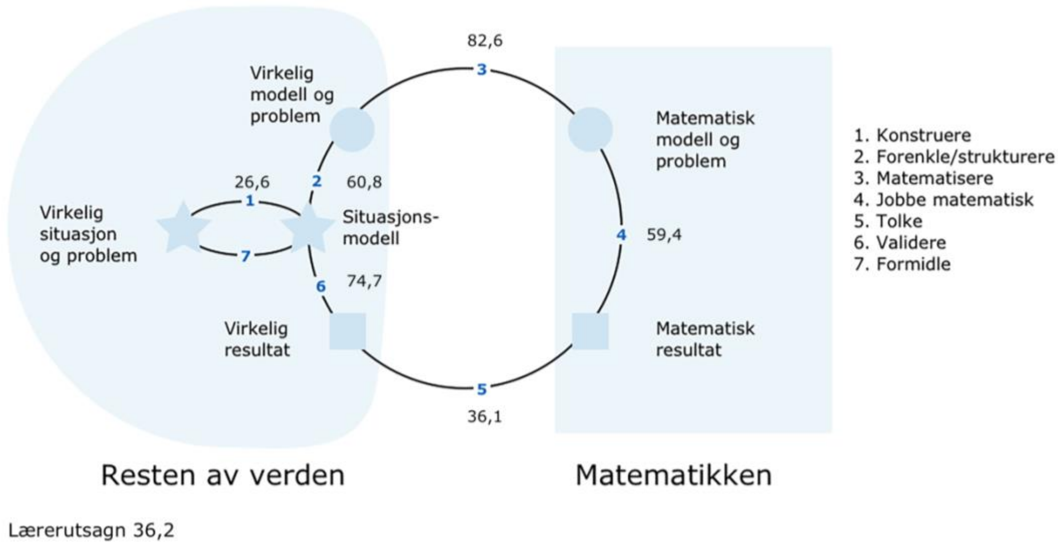
I Tabell 9 er utsagnene med størst differanse mellom gruppene beskrevet. Tabellen forteller at lærergruppen synes de fleste utsagnene er mer utfordrende sammenlignet med KfK-gruppen. Unntaket er utsagn 4 *«Å få elevene til å velge ut verdier som er viktig for å lage modellen»* som er det eneste utsagnet i Tabell 9 som lærergruppen vurderer som mindre utfordrende enn KfK-gruppen.

Målestokken er et analyseverktøy som har ført til at jeg har gjort visse antagelser i dette delkapittelet. To av tendensene jeg har oppdaget skal jeg studere videre. Den ene tendensen er at *matematisere* er den mest utfordrende overgangen i modelleringsprosessen. Den andre tendensen er at det er forskjell i hvordan gruppene har vurdert utsagnene.

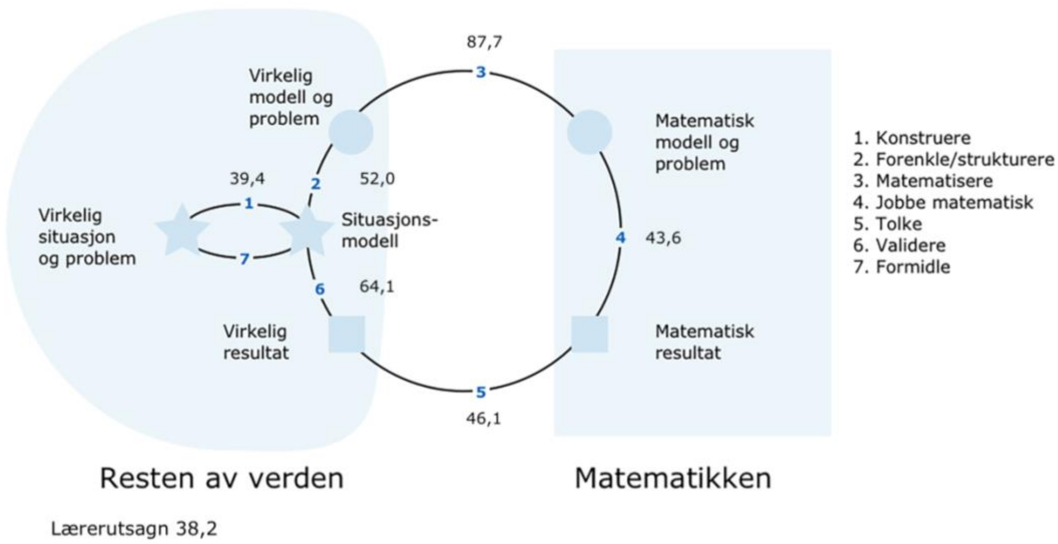
4.2 *Matematisere* som den mest utfordrende delprosessen

Modelleringsprosessen består av flere delprosesser. Den delen av prosessen som er mest utfordrende er *matematisering*, hvor det virkelige problemet knyttes opp til matematikk. Her begynner elevene å ta i bruk matematiske begreper, og gjøre utregninger og framstillinger ved hjelp av matematikk.

I resultatene av min undersøkelse kan jeg se på hvilken av de sju kategoriene som har høyest gjennomsnittsverdi. Gjennomsnittsverdiene forteller hvordan lærerne har vurdert utsagnene i de bestemte kategoriene. I Figur 13 og Figur 14 kan vi se verdiene for gjennomsnittsmål plassert i modelleringssyklusen.



Figur 13 – Gjennomsnitt til lærergruppen for hver delprosess i modelleringssyklusen



Figur 14 – Gjennomsnitt til KfK-gruppen for hver delprosess i modelleringssyklusen

Kategorien med høyest gjennomsnittsverdi er i begge gruppene kategori 3: *matematisere*. Det er ingen signifikant forskjell på hvordan lærergruppen og KfK-gruppen har vurdert kategori 3 – *matematisere*.

Mine resultater viser kvantitative data, som bekrefter de kvalitative undersøkelsene som er gjort av andre. I litteratur om modellering er det flere som mener at *matematisering* er mest utfordrende for både elever og lærere, for eksempel Galbraith og Stillman (2006) og Schaap, Vos og Goedhart (2011). Disse studiene viser til kvalitative undersøkelser som beskriver blokader som elever har i overgangene i modelleringsprosessen.

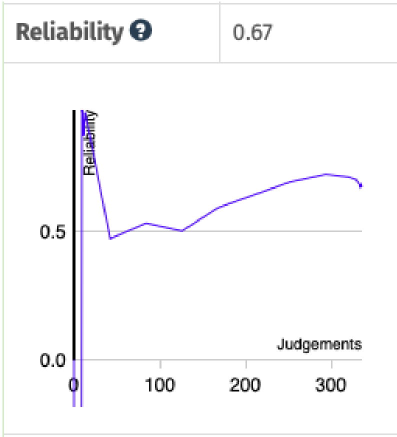
En annen grunn til at *matematisering* er den mest utfordrende prosessen, er at det er en kognitivt krevende aktivitet for elevene, selv om situasjonen inneholder matematiske begreper som er kjent for dem (Blomhøj & Jensen, 2003). For læreren blir utfordringen å skape en læringssituasjon som gjør at elevene kan delta aktivt i matematiseringen. Med intensjonen om at problemer skal være realistiske og kunne representeres av matematisk modellering, burde elever jobbe med problemer som reflekterer deres kunnskaper og erfaringer om konteksten til et problem. Ved å finne problemer som elevene kan løse, vil det utvikle deres kompetanse til å løse problemer ved hjelp av matematikk.

Den delprosessen som begge gruppene synes er minst utfordrende er *konstruere.* Dette er delprosessen hvor modelleringsoppgaven skal forståes, og situasjonsmodellen skapes. Det er en avgjørende fase for at elevene skal kunne jobbe videre med oppgaven.

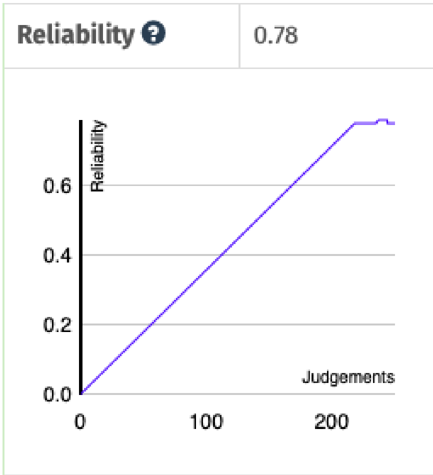
Modelleringssyklusen fra Figur 13 og Figur 14 forteller at lærerne har vurdert overgangen fra virkelig verden og fra matematisk verden forskjellig. Overgangen fra den virkelig verden til matematikken er *matematisere,* som allerede er omtalt som den mest utfordrende delprosessen. Den motsatte overgangen, fra matematikken til den virkelige verden, kalles *tolke.* Kategorien *tolke* er vurdert som mindre utfordrende i begge gruppene, med gjennomsnittsverdi 36,1 og 46,1. Det betyr at lærerne ikke mener at det er like utfordrende å gå fra den matematiske modellen tilbake til virkelig resultat. Her må elevene vurdere om løsningene er gyldige.

4.3 Reliabilitet og validitet

Reliabilitetsverdien, Cronbach’s alfa, beskriver intern konsistens. Jo mer samstemte lærerne er, og jo flere de er, desto bedre blir reliabiliteten. Grafene i Figur 15 og Figur 16 viser reliabiliteten til lærergruppen og KfK-gruppen, avhengig av antall vurderinger.



Figur 15 – Reliabilitet til lærergruppen



Figur 16 – Reliabilitet til KfK-gruppen

Reliabiliteten til lærergruppen utvikler seg ujevnt med antall sammenligninger. Grafen i Figur 15 viser at reliabiliteten går ned etter cirka 120 sammenligninger, før den stiger sakte oppover med antall vurderinger. Da alle åtte lærerne hadde gjort sine vurderinger stabiliserte reliabiliteten seg på 0,67. En av grunnene til at reliabiliteten er lavere enn ønsket, kan være at gruppen er heterogen. Deltagerne i gruppen er heterogen fordi den består av lærere med stor variasjon i studiebakgrunn, alder, erfaring, og didaktiske kunnskaper. En av grunnene til den noe lave reliabiliteten kan være at deltagerne har vurdert utsagnene ulikt.

Sammenlignet med lærergruppen, har KfK-gruppen en høyere reliabilitet på 0,78. KfK-gruppen består av fem lærere som tar matematikk som videreutdanning. Et felles utgangspunkt er at lærerne har valgt å ta videreutdanning i matematikk, og jeg antar derfor at de har en interesse og et engasjement for faget. Dette utgangspunktet gjør KfK-gruppen mer homogen sammenlignet med lærergruppen, og kan derfor være en av grunnene til at reliabiliteten er høyere blant KfK-gruppen enn blant lærergruppen.

4.3.1 Lærernes infit

Infit-verdien til lærerne beskriver hvor konsekvent læreren har vært i sin vurdering, sammenlignet med resten av gruppen. Det er to lærere (lærer C og H) som har infit over 1,2 (det vil si, det jeg har definert som en kritisk grense). Disse to lærerne har ikke vært så konsekvente i sin vurdering som de med infit under 1.

Tabell 10 – Infit for lærere fra lærergruppen og KfK-gruppen

Lærergruppen	Infit
A	0,88
B	0,78
C	1,26
D	1
E	0,85
F	0,82
G	0,94
H	1,32

KfK-gruppen	Infit
L	0,76
M	1,17
N	0,83
O	0,93
P	1,05

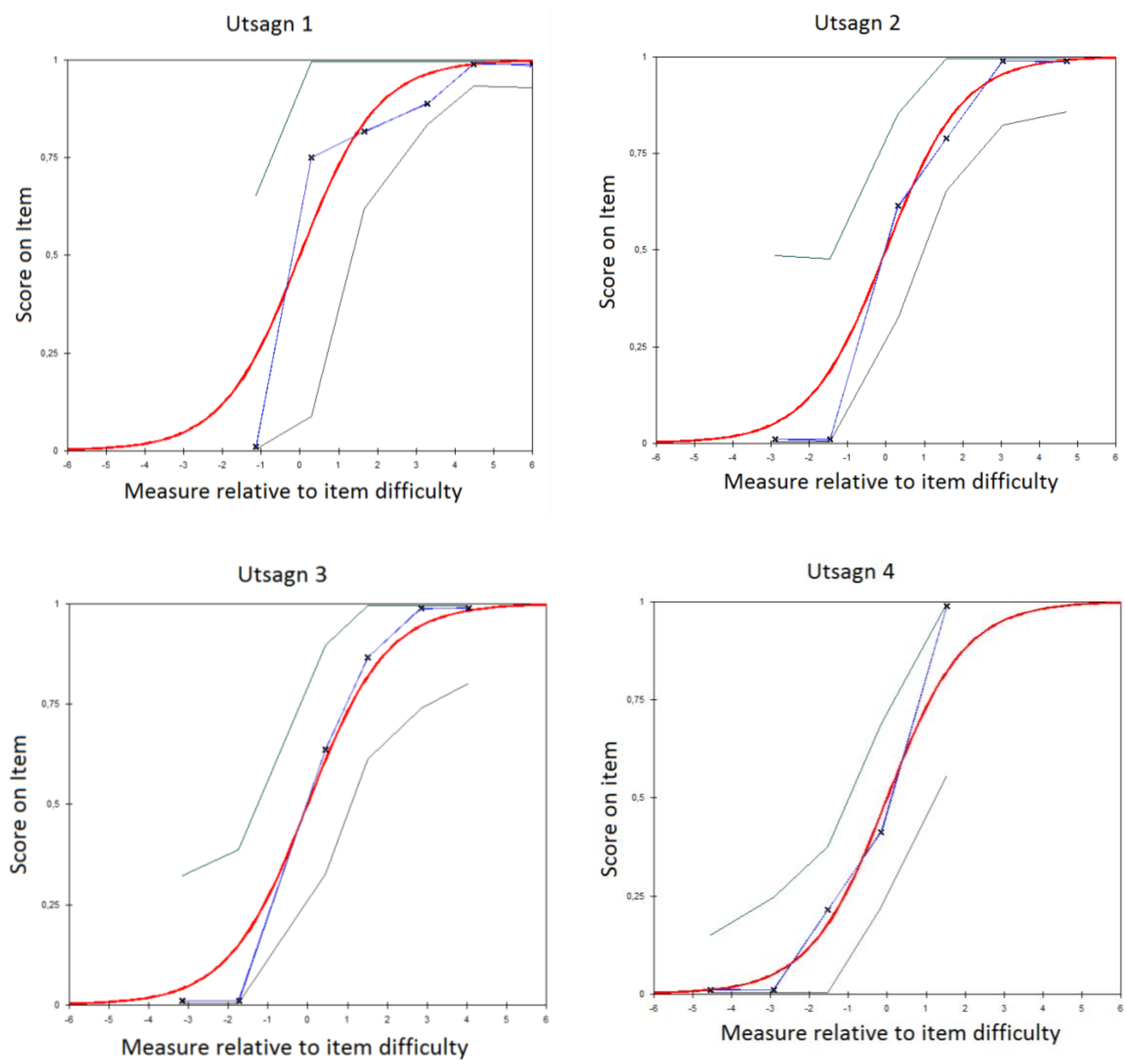
4.3.2 Utsagnenes infit

Infit-verdiene til utsagnene forteller at utsagnene tilhører samme tema: modellering. Det er liten variasjon i infit til utsagnene som er framstilt i Tabell 11. I følge Bond og Fox (2015) er alle utsagn med infit utenfor 0,4-1,2 relativt uforutsigbare. Utsagnene med høye infit-verdier er: «*Å få elevene til å vurdere om løsningen er gyldig*», som har infit på 1,5, og «*Å konstruere læringssituasjoner som gjør at elevene engasjerer seg*», som har infit på 1,3. Det betyr at lærerne har vært uforutsigbare når de har vurdert disse to utsagnene. I motsatt ende av skalaen, med infit 0,6, har lærerne vært veldig forutsigbare når de, for eksempel har vurdert utsagnet «*Å få elevene til å se for seg ulike løsninger*». Alle utsagnene, med unntak av 13 og 22, har infit-verdi innenfor akseptabel grense, i begge gruppene.

Tabell 11 – Infit til utsagn fra lærergruppen og KfK-gruppen

Lærergruppen			KfK-gruppen		
Kategori	Utsagn	Infit	Kategori	Utsagn	Infit
Konstruere	1	1	Konstruere	1	1
	2	0,9		2	0,9
	3	1,1		3	0,6
	4	1,1		4	0,7
Forenkle	5	0,9	Forenkle	5	0,9
	6	1		6	1
	7	1		7	0,8
Matematisere	8	0,8	Matematisere	8	1,2
	9	0,9		9	0
Jobbe matematisk	10	1	Jobbe matematisk	10	1
	11	1,1		11	1
	12	0,9		12	1
Tolke	13	1,1	Tolke	13	1,5
	14	1		14	1
	15	1,1		15	0,8
Validere	16	1,1	Validere	16	0,9
	17	1,2		17	0,9
	18	1		18	0,6
Lærerutsagn	19	1	Lærerutsagn	19	0,9
	20	0,9		20	0,8
	21	1		21	1
	22	0,8		22	1,3
	23	0,9		23	0,8
	24	0,9		24	0,9
	25	0,9		25	1,2

En annen måte å se på hvordan utsagnene passer Rasch-modellen er å studere ICC-kurvene. Kurvene beskriver hvordan lærerne har svart på undersøkelsen i forhold til det som er forventet fra modellen. I Figur 17 er ICC-kurven til de fire første utsagnene illustrert. ICC-kurvene viser at utsagnene passer modellen fordi den blå linja ligger innenfor konfidensintervallet på 95%. Jeg har valgt å ikke ta med flere enn fire fordi alle utsagnene hadde «fine» ICC-kurver (tilsvarende dem under).



Figur 17 – Fire utvalgte ICC-kurver

4.4 Faktoranalyse: Måler instrumentet én eller flere dimensjoner?

En virkelig situasjon har aldri én dimensjon. Spørsmålet er som følger: Er instrumentet endimensjonalt «nok»? For å undersøke dimensjonalitet skal jeg bruke faktoranalyse

(PCA). For å kjøre PCA må datamaterialet være stort, og jeg har derfor lagt sammen svarene til lærergruppen og KfK-gruppen i denne analysen. Figur 18 er et kart som viser fordelingen av utsagnene langs en logit-skala, til høyre i figuren er utsagnene delt inn i flere dimensjoner.

I Figur 18 er det to horisontale røde linjer. Disse linjene viser inndelingen mellom hovedgruppen (klase 2) og de to underdimensjoner som er klase 1 og 3. Dersom underdimensjonene er sterke, vil utsagnene som ligger i klase 1 ha en kvalitativ likhet, på samme måte som utsagnene i klase 3 er kvalitativt like. I klasekartet kan det se ut som det, i tillegg til hoveddimensjonen, er to underdimensjoner i undersøkelsen. Jeg skal nå se på hvilke kvalitative likheter disse grupperingene kan ha. I klase 1 er det fem utsagn:

1) Å få elevene til å forstå problemet
8) Å få elevene til å notere ned utregninger
20) Å stille gode spørsmål for å veilede elevene underveis
24) Å stille spørsmål som gjør at elevene reflekterer over sin løsning
25) Å ikke legge for mange føringer på løsningen underveis i arbeidet

```
       STANDARDIZED RESIDUAL CONTRAST 1 PLOT

      -4      -3      -2      -1       0       1       2       3
      -+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+- COUNT CLUSTER
   .6 +        A                       |                        + 1     1
      |                                |                        |
C  .5 +                                |                        +
O     |                                | B                      | 1     1
N  .4 +                              C |                        + 1     1
T     |                         D      |                        | 1     1
R  .3 +                             E  |                        + 1     1
A     |                                |                        |
S  .2 +                                |                       F+ 1     2
T     |                                |    G                   | 1     2
   .1 +                 J          I   |   H                    + 3     2
1     |                                K                        | 1     2
   .0 +--------------------------------|------------------------+
L     |                           L    |                        | 1     2
O -.1 +                   j           1M     k                  + 4     2
A     |                                |h                 i     | 2     3
D -.2 +                  g           f |                        + 2     3
I     |                       e        |                        | 1     3
N -.3 +                                |d        c              + 2     3
G     |                                |     b                  | 1     3
  -.4 +                                |                        +
      |                                |                        |
  -.5 +                                |                 a      + 1     3
      -+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-
      -4      -3      -2      -1       0       1       2       3
                             ITEM MEASURE
```

Figur 18 – PCA. Kart med inndeling i én hoveddimensjon (klase 2) og to underdimensjoner (klase 1 og 3)

Tre av utsagnene, 20, 24, og 25, tilhører kategorien *lærerutsagn* som inneholder utsagn som beskriver lærerens rolle i modelleringsprosessen. Disse tre utsagnene handler om kommunikasjon, hvordan læreren veileder elevene ved å stille spørsmål og har samtaler om løsninger. Det er vanskelig å se hva utsagn, 20, 24, og 25 har til felles med 1 og 8. Utsagn 1 og 8, har til felles at de er korte og konkrete utsagn.

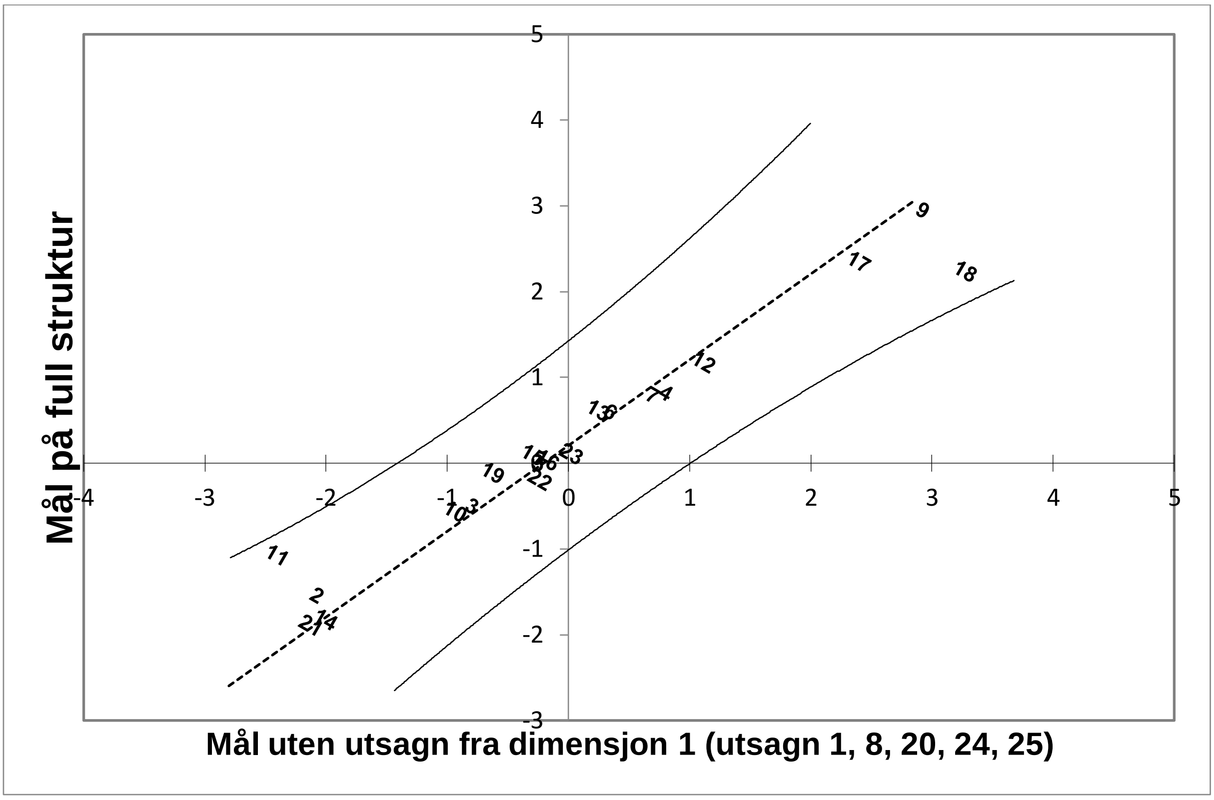
Klase 3, som er den andre underdimensjonen i Figur 18 inneholder ni utsagn:

7) Å få elevene til å lage en skisse for å få oversikt over problemet
11) Å få elevene til å bruke sine matematiske kunnskaper for å løse problemet
12) Å få elevene til å vurder ulike representasjoner de kan løse problemet med
14) Å få elevene til å knytte den matematiske løsningen tilbake til det virkelige problemet
15) Å få elevene til å beskrive sin løsning med et matematisk språk
17) Å få elevene til å revidere løsningene dersom løsningen ikke passer med virkeligheten
18) Å få elevene til å stille kritiske spørsmål til egen og andres løsning
22) Konstruere læringssituasjoner som gjør at elevene engasjerer seg
23) Å legge til rette for god kommunikasjon mellom elevene på gruppen

I denne klasen er det flere utsagn og derfor vanskeligere å beskrive hvilke kvalitative likheter de har til felles. Det er likevel mulig å finne noen likheter mellom utsagnene. Alle utsagnene kommer fra samme kategori som ett annet utsagn, bortsett fra utsagn 7. Utsagn 11 og 12 tilhører kategorien *jobbe matematisk*, og de har derfor en felles egenskap som handler om å bruke matematiske kunnskaper for å lage en matematisk representasjon av løsningen. Utsagn 14 og 15 tilhører kategorien *tolke*. Å tolke handler om å vurdere om den matematiske løsningen kan kobles tilbake til det virkelige problemet. Utsagn 17 og 18 hører til kategorien *validere*, som handler om å sjekke gyldigheten av svaret og vurdere om det er endringer som kan gjøres for å forbedre løsningen. Utsagn 22 og 23 hører til *lærerutsagn*, som er rettet mot hva læreren kan gjøre for å legge til rette for en god modelleringsøkt.

I tillegg til at utsagnene fra klase 3 har en felles kategori med ett annet utsagn, kan det se ut som det er noen kvalitative likhetstrekk utover det. Utsagn 11, 14, og 15 inneholder ordet «matematisk», og har derfor et likhetstrekk der. Noen av verbene som er brukt i klase 3 er verb som brukes i læreplanen for matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2013): beskrive, vurdere, lage, og bruke. Det er utsagn 7, 11, 12, og 15 som innehar disse verbene. Dette er verb som er hyppig brukt i læreplanen og er derfor verb som lærere har god kjennskap til i møtet med lærerplanen i matematikk.

Har det en praktisk betydning at instrumentet inneholder flere underdimensjoner? For å analysere om det har betydning har jeg tatt bort utsagnene som tilhører klase 1 (utsagn 1, 8, 20, 24 og 25). Dette gjøres for å se om de resterende utsagnene påvirkes av at dimensjonen tas ut (se Figur 19).



Figur 19 – Mål til utsagn med og uten dimensjon 1

Figur 19 viser målene til utsagnene langs en logit-skala hvor 0 er gjennomsnittsverdien. Den prikkede linjen er Rasch-modellens perfekte mål på invarians – utsagn som ligger på denne linjen er ikke påvirket av underdimensjonen i instrumentet. Langs førsteaksen er målene til utsagnene med klase 1 tatt ut. Langs andreaksen er målene for full struktur, altså opprinnelig mål uten at dimensjon 1 er tatt ut.

I Figur 19 er det beskrevet om de andre utsagnene har blitt påvirket av utsagnene i dimensjon 1. For å se om utsagnene har blitt påvirket ser vi på, for eksempel, utsagn 12. Utsagn 12 har mål 1,2 logit langs begge aksene og er derfor ikke påvirket av dimensjon 1. Utsagn 3 har mål -0,8 logit langs førsteaksen og -0,5 logit langs andreaksen, og er derfor i liten grad påvirket av dimensjon 1. Utsagnene ligger nærmes den prikkede linjen har ikke blitt påvirket av å fjerne dimensjon 1.

Utsagn 18 har mål 3,2 logit langs førsteaksen og 2,1 logit langs andreaksen. Her er det større forskjell på målet med og uten dimensjon 1. Utsagn 18 er «*Å få elevene til å* *stille kritiske spørsmål til egen og andres løsning*». Utsagn 11 har også stor variasjon med mål -2,5 logit og -1,1 logit. Utsagn 11 er «*Å få elevene til å bruke sine matematiske kunnskaper for å løse problemet*». Utsagn 18 og 11 har størst forskjell i mål fra opprinnelig struktur til endret struktur, og det kan sees i Figur 19 ved at de ligger lengst unna den prikkede linjen.

De buede linjene viser et konfidensintervall på 95%. Siden alle utsagnene ligger innenfor konfidensintervallet kan jeg ikke si at de er forstyrret av underdimensjoner i instrumentet. Den samme analysen er gjort ved å fjerne den andre dimensjonen, klase 3. Resultatet av å se bort fra utsagnene i klase 3 ga det samme som resultatet jeg har presentert her. Jeg konkluderer med at dimensjonene ikke har praktisk betydning for målingene.

Resultatet av PCA indikerer at styrken på dimensjonene er for svak til å påvirke datamatrisen. Første kontrast av uforklarte faktorer er 1,8 (se Tabell 12). Fordi kontrasten er mindre enn 2,0 er det ikke systematisk variasjon i datamatrisen (Bond & Fox, 2015). De dimensjonene som er beskrevet over er av så liten betydning at de ikke skaper systematisk støy på datamaterialet.

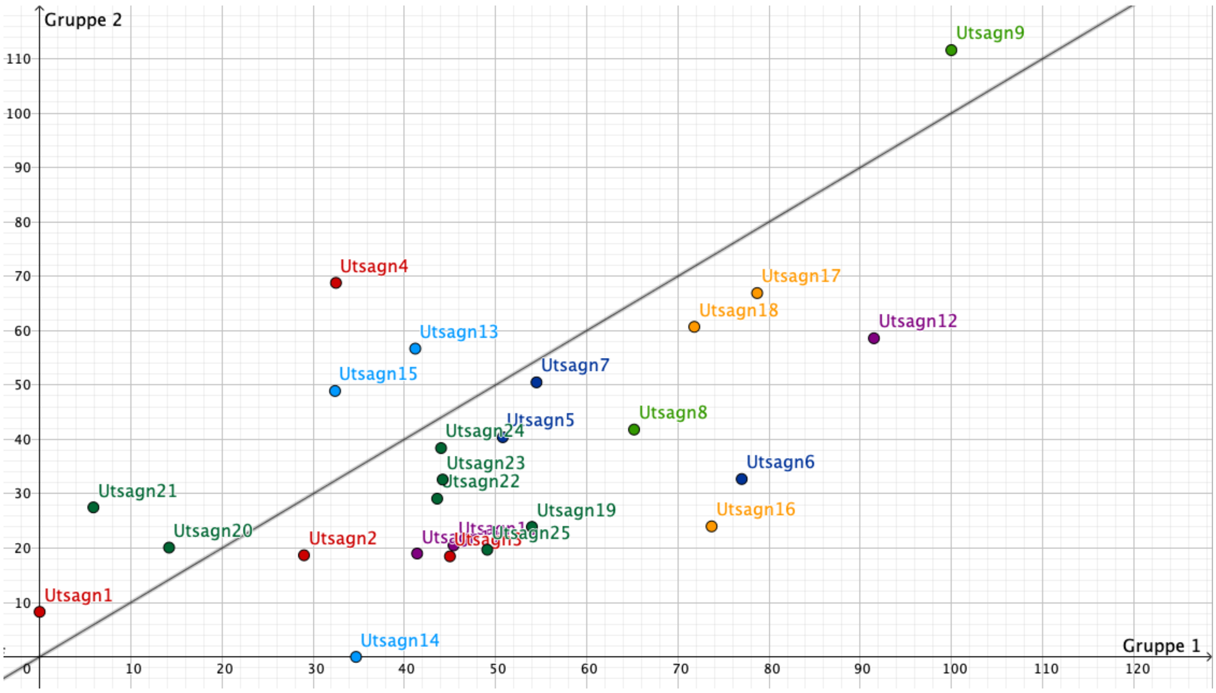
Tabell 12 – Dimensjonalitetmål i PCA

Table of STANDARDIZED RESIDUAL variance in Eigenvalue units = ITEM information units

		Eigenvalue	Observed		Expected
Total raw variance in observations	=	37.1230	100.0%		100.0%
Raw variance explained by measures	=	12.1230	32.7%		31.8%
Raw variance explained by persons	=	5.4573	14.7%		14.3%
Raw Variance explained by items	=	6.6657	18.0%		17.5%
Raw unexplained variance (total)	=	25.0000	67.3%	100.0%	68.2%
Unexplned variance in 1st contrast	=	1.7932	4.8%	7.2%	
Unexplned variance in 2nd contrast	=	1.5566	4.2%	6.2%	

4.5 En sammenligning av lærergruppen og KfK-gruppen

I dette delkapittelet skal jeg se på om det er signifikant forskjell mellom utsagnene i lærer- og KfK-gruppen. For å gjøre det skal jeg først illustrere forskjellene i Figur 20.



Figur 20 – Sammenligning av mål mellom lærer- og KfK-gruppen

Utsagn 1-4 Konstruere

Utsagn 5-7 Forenkle

Utsagn 8-9 Matematisere

Utsagn 10-12 Jobbe matematisk

Utsagn 13-15 Tolke

Utsagn 16-18 Validere

Utsagn 19-25 Lærerutsagn

I diagrammet i Figur 20 er det noen utsagn som skiller seg ut, spesielt, 4, 14, og 16. Disse utsagnene skiller seg ut fordi de ligger lengst unna identitetslinjen. Første- og andreaksen representerer målet til utsagnene fra lærer- og KfK-gruppen, og koordinatene til hvert punkt beskriver hvordan gruppene har vurdert utsagnet. Målene fra KfK-gruppen er reskalert slik at de kan sammenlignes, direkte, med målene fra lærergruppen.

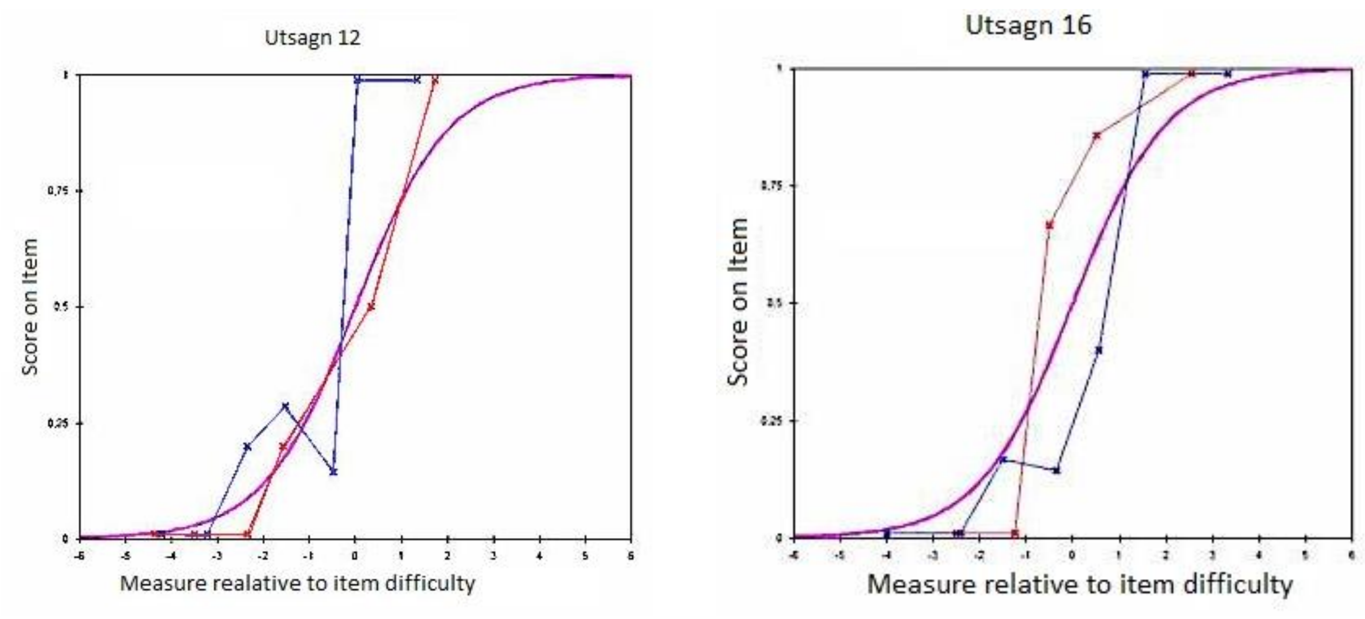
En mer systematisk analyse viser at det er fire utsagn som har variert måling i lærergruppen og KfK-gruppen: 4, 14, 15, og 16. Differansen til utvalgte utsagn er presentert i Tabell 13. Dette er utsagn som er grensetilfeller for signifikans; signifikansen utrykkes med en *p*-verdi og beskriver om utsagnene har signifikant forskjell i vanskelighetsgrad mellom lærergruppen og KfK-gruppen.

Tabell 13 – Differansemål for utsagn 4, 14, 15, og 16

Utsagn nr.	DIF signifikans, *p*-verdi
4	0,0500
14	0,0430
15	0,0351
16	0,0653

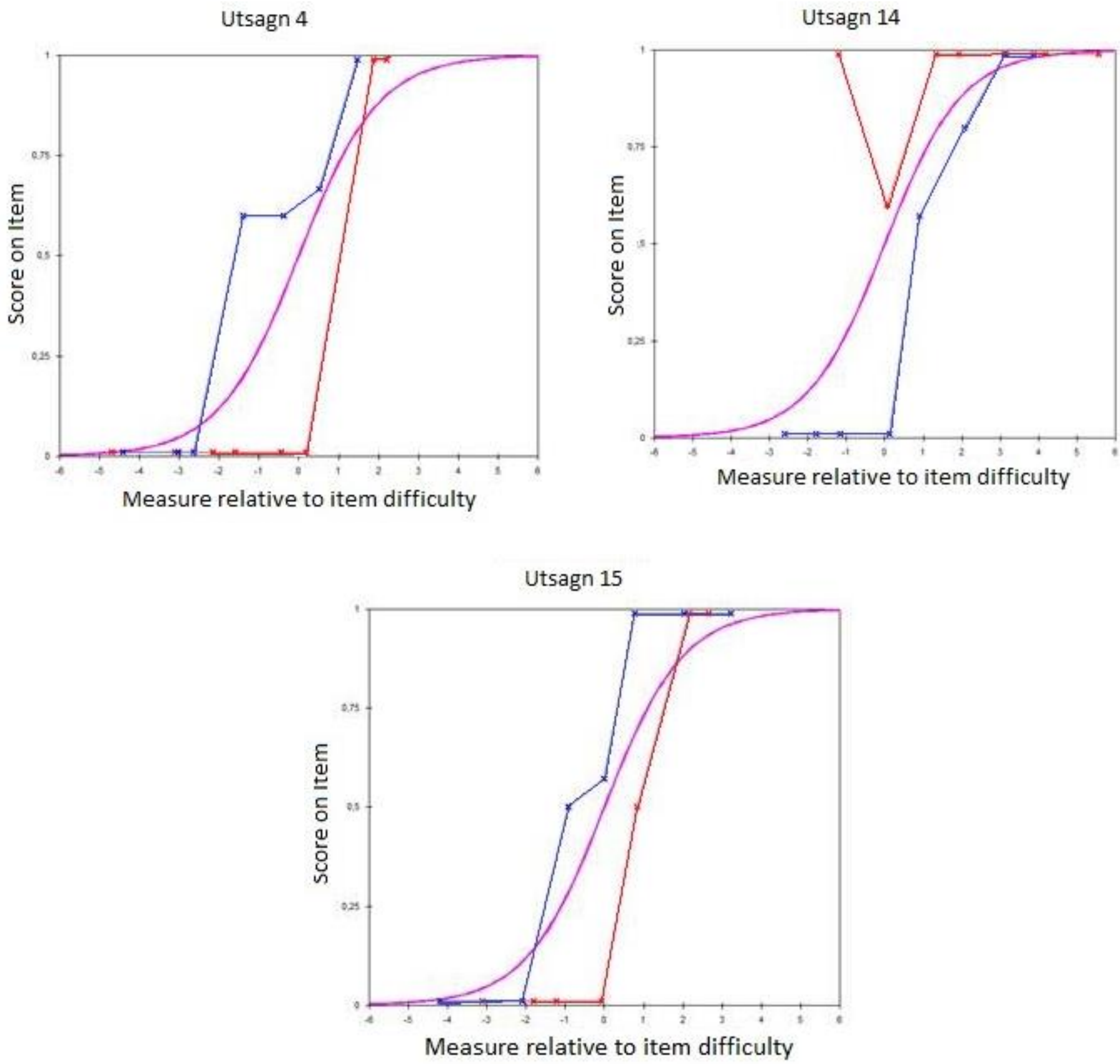
Ingen av utsagnene i Tabell 13 har $p<0{,}002$ (med Bonferroni-korreksjon), og det er derfor ikke signifikant forskjell på målene i lærergruppen og KfK-gruppen. Sammenlignet med $p<0{,}05$ er det to utsagn som ligger på grensen til å være signifikant forskjellig mellom gruppene, hvis vi ser bort fra Bonferroni-korreksjonen; dette er utsagn 14 og 15.

Ved hjelp av ICC-kurvene skal det sees nærmere på forskjellene til noen av utsagnene. Er det uniform forskjell på et utsagn vil det si at hele gruppen har vurdert utsagnet annerledes enn den andre gruppen. Utsagn som er ikke-uniform forskjellig mellom gruppene kan skyldes vurderinger som er gjort av én deltager. I Figur 21 er det to eksempler på utsagn med ikke-uniform forskjell.



Figur 21 – ICC-kurve med ikke-uniform forskjell (utsagn 12 og 16)

Utsagn 12 er *«Å få elevene til å vurder ulike representasjoner de kan løse problemet med».* Den blå linjen representerer lærergruppen og den røde linjen representerer KfK-gruppen. Utsagn 16 er *«Å få elevene til å reflektere over om det er andre måter å løse problemet på».* Når den blå og den røde linjen krysser hverandre, betyr det at det ikke er en uniform forskjell mellom gruppene; når linjene krysser hverandre, betyr det at eventuelle forskjeller i vanskelighetsgrad ikke er systematisk. Utsagn 4, 14, og 15 har alle en uniform forskjell mellom gruppene, fordi linjene i ICC-kurvene ikke krysser hverandre.



Figur 22 – ICC-kurver med uniform forskjell (utsagn 4, 14, og 15)

Den blå linjen representerer lærergruppen og den røde linjen representerer KfK-gruppen. Utsagnene er vurdert forskjellig av hele gruppen, som betyr at det er en «enighet» i gruppen om at utsagnet er mer utfordrende. Utsagn 4 og 15 har KfK-gruppen vurdert som mer utfordrende enn lærergruppen. Utsagn 14 har lærergruppen vurdert som mer utfordrende enn KfK-gruppen. Utsagnet som ligger «øverst», eller på den venstre siden er den gruppen som har vurdert utsagnet som det mest utfordrende. Dette bekreftes av å se på utsagnene i Figur 22, hvor utsagn 4 og 15 har høyest mål i KfK-gruppen og utsagn 14 har høyest score i lærergruppen.

Oppsummert viser delkapittel 4.5 at det er små forskjeller mellom målene fra lærergruppen og KfK-gruppen. Det er noen grensetilfeller som jeg har beskrevet, men forskjellene er ikke store nok til å kalles signifikante.

4.6 Oppsummering

I dette kapittelet har jeg presentert funnene fra min studie. Ved å studere utsagnene langs en målestokk har likheter og forskjeller mellom gruppene og utsagnene blitt beskrevet. Det har kommet tydelig fram at noen utsagn utmerker seg som mer utfordrende enn andre. I analysen av datamaterialet har jeg sett at *matematisere* utmerker seg som den mest utfordrende delen av modelleringsprosessen. For å svare på om matematisk modellering kan måles, har jeg sett på reliabiliteten til undersøkelsen, og studert infit for lærere og for utsagnene. Faktoranalysen har vist at undersøkelsen er endimensjonal, og derfor ikke har flere sterke dimensjoner enn matematisk modellering. Jeg har studert utsagnene i et koordinatkart som sammenligner målene mellom lærergruppen og KfK-gruppen. Ved hjelp av koordinatkartet og analyse av differansemål er det vist at det ikke er signifikant forskjell mellom gruppene. På tross av ulikhetene mellom gruppene er de ikke signifikant forskjellig i hvordan de har vurdert utfordringer med matematisk modellering. I neste kapittel skal jeg drøfte funnene og se på hvilken betydning mine funn har for videre forskning.

5 Diskusjon

Hensikten med denne studien har vært å undersøke om læreres utfordringer kan måles, og se hva som kan være utfordrende med å undervise i modellering. For å undersøke dette har jeg valgt å bruke rammeverket til Blum og Leiß (2007) for matematisk modellering. I teorikapittelet har jeg presentert rammeverket og tre perspektiver på matematisk modellering. Videre har jeg redegjort for ulike tilnærminger til modellering og sett på flere modelleringssykluser som beskriver modelleringsprosessen. Jeg har også beskrevet min pragmatiske tilnærming til teori og mitt sosiokulturelle læringssyn for å tydeliggjøre eget ståsted i forskning og undervisning. I metodekapittelet har jeg presentert comparative judgement og Rasch-modellen som modeller for å svare på forskningsspørsmålene. I analysen av funnene har jeg fokusert på hvilken del av modelleringsprosessen som lærere opplever som mest utfordrende, og om matematisk modeller er mulig å måle. *Matematisere* er ifølge min analyse den mest utfordrende delen av modelleringsprosessen, dette funnet skal jeg diskutere nærmere i dette kapittelet. Jeg skal også presentere ulike implikasjoner studien har for lærere og forskere, tydeliggjøre hvilke begrensninger jeg ser at studien min har, og beskrive hvordan jeg mener funnene mine kan brukes i videre forskning.

5.1 Implikasjoner

Hvilken nytte kan matematikklæreren ha av denne studien? Kan comparative judgement bli en del av vurderingspraksisen til lærere i norske skoler? I dette delkapittelet skal jeg besvare disse spørsmålene og deretter skal jeg vurdere hvilke implikasjoner studien har for universitetslærere.

5.1.1 Didaktiske implikasjoner

For lærere vil det være lønnsomt å ha kjennskap til utfordringene når man skal jobbe med modellering i klasserommet. Bevissthet om modelleringsprosessen gjør at læreren kan ta gode didaktiske vurderinger for tilpasset undervisning. Å kjenne til at å *matematisere* er den mest utfordrende delen av modelleringsprosessen, mener jeg er det viktigste funnet lærere kan dra nytte av fra denne studien.

En viktig tilpasning av undervisningen er å velge passende modelleringsoppgaver. Oppgaven bør både stille krav til selvstendighet og inneha elementer av veiledning fra læreren. Elevene bør veiledes på en slik måte at deres valg av strategier støttes og får anledning til å utvise høy grad av selvstendighet når de løser oppgavene. Når elevene jobber med modelleringsoppgaver er lærerens bevissthet rundt veiledning av elevene sentralt for deres læring (Blum & Ferri, 2009, s. 52).

En annen tilpasning, som er en konsekvens av at *matematisere* er mest utfordrende, er å være bevisst på at elevene har individuelle løsninger på modelleringsoppgavene. Dette innebærer at løsningen ikke nødvendigvis er den læreren selv ville valgt, men er en naturlig følge av elevenes kompetanse og erfaringer med matematikk. Lærerens mål med modellering er at elevene skal være aktive og selvstendige i arbeidet med å finne en løsning på problemet. For å tilrettelegge for selvstendighet og aktiv læring er det viktig at læreren har kjennskap til utfordringer med å gå fra det virkelige problemet til den matematiske verden (Kuntze, 2011).

Hvorfor er matematisering utfordrende? Én grunn kan være at elevene har vanskelig for å se hvilken sammenheng problemet har med matematikk. Det kan derfor oppleves som utfordrende å trekke ut de riktige opplysningene fra en oppgave, for så å *jobbe matematisk* med disse opplysningene. Her vil det være avgjørende at læreren finner en oppgave som er tilpasset elevenes matematikkkunnskaper og kunnskaper om konteksten (Blomhøj & Jensen, 2003, s. 127). En annen grunn som Jankvist og Niss (2019) peker på er at elevene ikke mestrer å trekke ut informasjon fra situasjonen slik at det leder til en fornuftig matematisering, som derfor ender opp med å være utilstrekkelig og mislykket. En siste grunn til at matematisering er utfordrende er at elevene ikke tenker over konsekvensene av hvilken informasjon de velger å hente fra oppgaven (Jankvist & Niss, 2019, s. 27).

5.1.2 Metodiske implikasjoner

I tillegg til didaktiske implikasjoner for lærere, har studien en metodisk implikasjon. Comparative judgement er en vurderingsmetode som er basert på sammenligning og det er derfor et nyttig verktøy å ta med inn i egen undervisningspraksis (Jones & Inglis, 2015). Metoden er velegnet for å vurdere elevbesvarelser fordi de individuelle feilvurderingene blir tilnærmet borte fra vurderingene. Metoden kan brukes for å vurdere elevbesvarelser uten bestemte kriterier eller for å vurdere løsningen på komplekse modelleringsoppgaver. Metoden gir lærere en mulighet til å vurdere elevarbeid fordi det er lettere å sammenligne to ting enn å vurdere noe isolert.

Studien til Jones, Swan og Pollitt (2013, s. 166) viser at comparative judgement er velegnet som metode for vurdering av problemløsningsoppgaver. Metoden kan være med å øke reliabiliteten og minke arbeidsmengden til de som skal vurdere elevarbeidet. Metoden er egnet fordi målefeil som påvirker lærerens vurdering av elevarbeid reduseres. En slik målefeil kan være lærerens kjennskap til og erfaringer med elevens tidligere besvarelser og arbeid. En annen målefeil ved tradisjonell vurdering er læreres favorisering av elever (McMahon & Jones, 2015, s. 372).

En annen fordel med å bruke comparative judgement som vurderingsmetode i skolen er at vurderingene ikke nødvendigvis må gjøres av kun én lærer. Det forutsetter at det er en homogenitet i lærergruppene som skal vurdere besvarelsene (McMahon & Jones, 2015, s. 372). I min studie har jeg derimot sett at homogenitet i lærergruppen ikke nødvendigvis er avgjørende for resultatet av vurderingene. Det var ikke en signifikant forskjell på vurderingene til den homogene og den heterogene gruppen. Det tyder på at homogeniteten ikke er avgjørende for reliabiliteten på undersøkelsen. Til sist vil jeg peke på at tiden som brukes på vurdering kan reduseres ved bruk av comparative judgement sammenlignet med tradisjonelle vurderingsmetoder, fordi hver lærer ikke må vurdere ut fra bestemte kriterier.

5.1.3 Implikasjoner for forskeren og lærerutdanneren

Fordi modellering er en viktig del av fagfornyelsen (Utdanningsdirektoratet, 2018) bør modellering få et større fokus i lærerutdanningen. Studien min redegjør for at det er utfordrende for lærere å undervise i modellering, og ekstra utfordrende å støtte elevene i matematiseringen. Lærerutdanningen bør gi lærerstudentene erfaringer og faglig kunnskap om modellering for være forberedt på å jobbe med dette i klasserommet. Studentene må bli kjent med flere kontekster og verktøy som engasjerer dem i metanivået av modelleringsaktivitet (Doerr, 2007, s. 77).

Matematisk modellering bringer flere fagfelt sammen, ikke bare innenfor matematikk. Dette illustrerer hvordan matematikk er et produkt og en prosess av alt vi omgir oss med (Lingefjärd, 2007, s. 333). Det er viktig å anerkjenne at matematisk modellering er en prosess hvor ulike deler av matematikken trekkes inn for å løse et problem med en matematisk modell. Som universitetslærer kan modellering også være en nyttig metode for å samle og vurdere matematikkompetansen studentene har, samtidig som modelleringskompetanse må læres. Det er avgjørende at universitetslæreren formidler til studentene hvordan de skal arbeider, veileder og vurderer matematisk modellering.

Comparative judgement kan brukes på andre områder enn i undervisning av matematisk modellering. For forskere kan metoden brukes for å sammenligne eller vurdere komplekse situasjoner eller forhold. Metoden kan også brukes som modell for å undersøke, for eksempel, holdninger eller kunnskaper om matematikk.

5.2 Studiens begrensninger

En begrensning ved denne studien er antallet utsagn. For at undersøkelsen skulle ha kartlagt mer av modelleringsprosessen, ville det vært nyttig med flere utsagn som beskriver prosessen. På denne måten ville hver kategori blitt beskrevet grundigere. En grundigere beskrivelse av prosessen ville imidlertid gjort det vanskeligere å skille mellom utsagnene.

Valg av rammeverk er en begrensende faktor i studien fordi det er utgangspunktet for utsagnene i undersøkelsen. Rammeverket til Blum og Leiß (2007) fokuserer på overgangene i modelleringsprosess og ikke på det metakognitive med modellering. Det kunne derfor vært et alternativ å basere undersøkelsen på et annet rammeverk som handler om metakognitiv kompetanse i modelleringsprosessen (Schaap et al., 2011, s. 145).

5.3 Videre forskning

Vil det være mulig å bruke comparative judgement i andre tilfeller enn det jeg har gjort i arbeidet med denne studien? Er funnene avhengig av kontekst eller ville resultatet blitt det samme i andre kontekster? I tillegg til de metodiske spørsmålene skal jeg nå se på hvordan funnene om modelleringsprosessen kan brukes i andre studier.

Comparative judgement er en metode som er lite brukt i skole og forskning (Jones & Inglis, 2015). Nettsiden Nomoremarking.com (2019) beskriver først og fremst metoden som et verktøy for å vurdere elevbesvarelser. Det vises videre til at metoden øker effektiviteten, reliabiliteten og gyldigheten av vurderingene. Et forslag til videre forskning kan vært å se på hvordan lærere vurderer løsninger på modelleringsoppgaver ved hjelp av comparative judgement. Dette kan gjøres ved å sammenligne vurderingen av modelleringsoppgaver med bruk av tradisjonell vurdering sammenlignet med comparative judgement som vurderingsmetode. Det ville gitt en pekepinn på om metoden er egnet for den type materiale.

Min studie viser at *matematisering* er den vanskeligste delprosessen. Det ville vært interessant å forske på hvordan man kunne lette utfordringen for lærere som jobber med modellering i klasserommet. Én mulighet er å gjennomføre en kvalitativ studie hvor en eller flere lærere ble studert i undervisningen, for å undersøke utfordringene med modellering. Det kunne også vært interessant å følge en gruppe lærerstudenter i arbeidet med modellering, og vurdere hvordan man kan gjøre dem tryggere på å undervise i modellering.

Undersøkelsen i studien min er basert på rammeverket til Blum og Leiß (2007). Utsagnene jeg har brukt er valgt ut med utgangspunkt i hvordan modelleringssyklusen er beskrevet i nettopp dette rammeverket. Et annet rammeverk, eksempel teorien til Galbraith og Stillman (2006) eller Berry og Davies (1996), kunne ha påvirket utsagnene som skulle sammenlignes. Et spørsmål blir da om en endring i valg av rammeverk ville endret resultatene? Ville undersøkelsen fått de samme resultatene om den hadde handlet om læreres utfordringer på andre områder? Funnene av en slik undersøkelse ville vært interessant å sammenligne med mine funn.

Et siste forslag til videre forskning er å se om undersøkelsen er avhengig av kontekst eller ikke. Dersom undersøkelsen hadde blitt gjennomført på en annen dag, i et annet land eller med andre deltagere, ville resultatet blitt det samme? Dersom resultatene hadde sammenfalt med mine resultater, ville det betydd at resultatene er uavhengige av kontekst.

5.4 Refleksjoner over egne funn

Hvordan kan målestokken brukes for å studere utsagnene fra undersøkelsen? I resultatkapittelet har jeg sett på grupperinger og tendenser til ulik vurdering mellom gruppe 1 og 2. Det som kommer fram av analysen er at det er noen utsagn som er vurdert ulikt mellom gruppene. Dette kan ha sin forklaring i at deltagerne i gruppene har ulik erfaring med modellering. Som nevnt tidligere er sammensetningen av deltagere forskjellig i gruppene. Selv om gruppe 1 er en heterogen gruppe med forskjellig typer lærere og gruppe 2 er en homogen gruppe trenger det ikke å bety at den ene gruppen har mer rett i sin vurdering enn den andre. Ved å bruke comparative judgement har det subjektive aspektet ved vurderingen blitt utelukket. Det gjør at resultatene av undersøkelsen ikke representerer den subjektive meningen til hver enkelt lærer, men gir et helhetlig resultat av gruppens vurdering.

Selv om målestokken til gruppene er noe forskjellig, er det også mange likhetstrekk. For eksempel mener begge gruppene at *lærerutsagn* og utsagn fra kategorien *konstruere* er minst utfordrende. *Lærerutsagn* beskriver det læreren selv må gjøre for å legge til rette for en god modelleringsøkt. Det er minst utfordrende å påvirke hva læreren gjør i modelleringsøkten, fordi det har læreren mest kontroll over. Utsagn fra kategorien *konstruere* oppleves også som relativt lite utfordrende, kanskje fordi det er oppstarten av modelleringssyklusen, og representerer en fasen hvor elevene skal forstå og bli motivert for å jobbe med modelleringsoppgaven.

Hvorfor er *matematisere* det mest utfordrende? Studien til Galbraith og Stillman (2006) er en av studiene som beskriver modelleringsporsessen, og peker på at å gå fra et problem fra den virkelige verden til en matematisk modell er en utfordrende overgangen i modelleringssyklusen. Galbraith og Stillman (2006) sin studie er en kvalitativ studie som ser på elevers blokader i modelleringsprosessen. Selv om studien er kvalitativ forskning har den noen likhetstrekk med min studie. For det første så har de et rammeverk som beskriver modelleringsprosessen. Det består av 4-8 beskrivende utsagn om hver av kategoriene i prosessen, og er et resultat en empirisk studie (Galbraith, Stillman, Brown & Edwards, 2007). Rammeverket som benyttes for å identifisere elevers blokader i modelleringsprosessen har mange likhetstrekk med utsagnene som jeg bruker i min undersøkelse. Utsagnene mine beskriver også seks av stegene i modelleringsprosessen og i tillegg noen utsagn som er rettet mot lærerens undervisning. De seks kategoriene som beskriver elevens modelleringsprosess har mange likhetstrekk med rammeverket som er presentert i Galbraith og Stillman (2006, s. 147). Mine 25 utsagn har utgangspunkt i Maaß (2006) sin beskrivelse av modelleringsprosessen til Blum og Leiß (2007). I Tabell 14 skal jeg vise noen sammenligner av utsagn som har omhandler det samme.

Tabell 14 – Sammenligning av utsagn fra egen undersøkelse og Galbraith og Stillman (2006).

Utsagn i egen undersøkelse	**Utsagn fra Galbraith og Stillman (2006)**
1.Å få elevene til å forstå problemet	1.1 Klargjøre konteksten til problemet
4. Å få elevene til å velge ut verdier som er viktig for å lage modellen	2.4 Gjøre relevante antagelser
8. Å få elevene til å notere ned utregninger	3.6 Bruke riktige regler for notasjon
9. Å få elevene til oversette det virkelige problemet til en matematisk sammenheng ved å lage tabeller, formler, utregninger og funksjoner	2.5 Velge matematiske tabeller for å gjøre beregninger.
14. Å få elevene til å knytte den matematiske løsningen tilbake til det virkelige problemet	5.3 Forsone matematikk og verdensaspekter ved problemet
17. Å få elevene til å revidere løsningene dersom løsningen ikke passer med virkeligheten	5.4 Innse at det er grenser for hva som er en akseptabel løsning på problemet

Tabell 14 illustrerer likheter mellom utsagn fra egen studie og Galbraith og Stillman (2006) sin studie. Nummeringen på utsagnene til Galbraith og Stillman er hentet fra deres tabell. Kolonnen til venstre viser mine utsagn og kolonnen til høyre viser utsagn til Galbraith og

Stillman. Her ser vi at utsagnene har store likhetstrekk selv om de tar utgangspunkt i ulikt rammeverk. Utsagn 1 og 1.1 handler om å forstå oppgaven før en begynner å løse den. Utsagn 4 og 2.4 beskriver hvordan man bruker opplysninger fra oppgaven til å lage en matematisk modell. Utsagn 8 og 3.6 handler om å ta i bruk notasjon for å gjøre nødvendige utregninger. Utsagn 9 og 2.5 behandler matematiske tabeller og andre representasjoner for å gjøre beregninger som passer til modellen. Kobling mellom matematisk modell og virkelig verden skjer i utsagn 14 og 5.3. Utsagn 17 og 5.4 handler om å vurdere om løsningen er gyldig for å eventuelt revidere den. Likhetstrekkene mellom utsagnene i Tabell 14 viser at det er store likheter mellom to rammeverk for matematisk modellering, selv om perspektivet på modellering ikke er de sammen. Blum og Leiß (2007) tilhører den kontekstuelle tilnærmingen til modellering, hvor det sentrale målet er å løse verdensproblem for å sette modelleringen i en kjent kontekst. Galbraith og Stillman (2006) har en utdanningsrettet tilnærming til modellering hvor prosessen er en metode for begrepslæring og strukturering av læringsprosessen.

Jankvist og Niss (2019) viser til mange studier som peker på at matematiseringen er en av de vanskeligste delene av modelleringsprosessen for elevene, blant annet Frejd og Ärleback (2011) og Schaap et al. (2011). I teorien viser jeg til Borromeo Ferri (2006) som beskriver ulike teoretiske og empiriske framstillinger av modelleringssyklusen. Borromeo Ferri beskriver overgangen fra en virkelig modell til en matematisk modell som en individuell prosess hvor matematiske kunnskaper hos det enkelte individ brukes for å bygge en matematisk modell. Denne beskrivelsen mener jeg gir et godt bilde på hvorfor denne delen av prosessen er mest utfordrende. Det er den delen som i størst grad karakteriseres ved at prosessen er avhengig av de individuelle kompetansene og som lærer vil det være vanskelig å påvirke prosessen fordi den er en individuell prosess. Ved å støtte elever i å gjøre nytte av egen kompetanse vil det øke deres modelleringskompetanse.

5.5 Avslutning

Modellering er et av kjerneelementene i ny læreplanen i matematikk fra 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2018), og det vil derfor bli et økt fokus på modellering i årene fremover. Modelleringskompetanse er en viktig ferdighet for å bli en god samfunnsborger som kan delta med kreativitet, innovasjon, kritisk tenkning og problemløsning (NOU, 2015). I tillegg til det samfunnsmessige perspektivet, er modellering en kompetanse som støtter elever i deres faglige læring av matematikk. For å bringe matematikken sammen med resten av verden, og for at elever skal tilegne seg modelleringskompetanse, er det avgjørende med en lærer som har gode fagdidaktiske kunnskaper i matematisk modellering.

Referanser

Berry, J. & Davies, A. (1996). Written reports. I C. Haines & S. Dunthorne (Red.), *Mathematics learning and assessment: Sharing innovative practices*. London: Arnold.

Blomhøj, M. (2006). Mod en didaktisk teori for matematisk modellering. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (Red.), *Kunne det tænkes? – om matemtiklæring*. Albertslund: Malling Beck.

Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications: An international journal of the IMA, 22*(3), 123-139. https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht–Trends und perspektiven. *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, 23*, 15-38.

Blum, W. & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application, 1*(1), 45-58.

Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.), *Mathematical modelling ICTMA 12: education, engineering and economics* (s. 222-231). Chichester, UK: Horwood publishing.

Bond, T. & Fox, C. M. (2015). *Applying the Rasch model: Fundamental measurement in the human sciences* (3. utg.). New York: Routledge.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM Mathematics education, 38*(2), 86-95.

Christodoulou, D. (2019, 07. januar). How many judgements does each teacher need to do? Hentet fra https://blog.nomoremarking.com/how-many-judgements-does-each-teacher-need-to-do-c61fe69f1926

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? I W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and applications in mathematics education* (s. 69-78). New York: Springer.

Field, A. (2013). *Discovering statistics using IBM SPSS statistics*. London: Sage.

Frejd, P. & Ärleback, J. B. (2011). First results from a study investigating Swedish upper secondary students' mathematical modelling competencies. I G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri & G. Stillman (Red.), *Trends inn teaching and learnign of mathematical modelling* (s. 407-416). Dordrecht: Springer.

Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 143-162. https://doi.org/10.1007/BF02655886

Galbraith, P., Stillman, G., Brown, J. & Edwards, I. (2007). Facilitating middle secondary modelling competencies. I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (s. 130-140). Chichester, UK: Horwood Publishing.

Greefrath, G. & Vorhölter, K. (2016). Modelling cycle. I G. Greefrath & K. Vorhölter (Red.), *Teaching and learning mathematical modelling* (s. 10-14). Hamburg: Springer International Pu.

Haines, C. R. & Crouch, R. (2010). Remarks on a modeling cycle and interpreting behaviours. I R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines & A. Hurford (Red.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (s. 145-154). Dordrecht: Springer.

Jankvist, U. T. & Niss, M. (2019). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. *International Journal of mathematical education in science and technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1587530

Jones, I. & Inglis, M. (2015). The problem of assessing problem solving; can compartive judgement help? *Educational studies of mathematics, 89*(3), 337-355.

Jones, I., Swan, M. & Pollitt, A. (2013). Assessment mathematical problem solving using comparative judgement. *International journal og science and mathematical education, 13*(1), 151-177.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht: Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. *Materialien für einen realitatsbezogenen mathematikunterricht*, 66-84.

Kaiser, G. (2005). Mathematical modelling in school–Examples and experiences. I H. W. Henn & G. Kaiser (Red.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation.* (s. 99-108). Hildesheim: Franzbecker.

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics education, 38*(3), 302-310.

Kuntze, S. (2011). In-Service and Prospective Teachers' Views About Modelling Tasks in the Mathematics Classroom – Results of a Quantitative Empirical Study. I G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri & G. Stillman (Red.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (s. 279-288). Dordrecht: Springer.

Kuntze, S., Siller, H. S. & Vogl, C. (2013). Teachers' self-perceptions of their pedagogical content knowledge related to modelling–an empirical study with austrian teachers. I G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum & J. P. Brown (Red.), *Teaching mathematical modelling: connecting to research and practice* (s. 317-326). Dordrecht: Springer.

Leiß, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R. & Pekrun, R. (2010). The Role of the Situation Model in Mathematical Modelling—Task Analyses, Student Competencies, and Teacher Interventions. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(1), 119-141. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0006-y

Lingefjärd, T. (2007). Mathematical modelling in teacher education—Necessity or unnecessarily. I W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and applications in mathematics education* (s. 333-340). New York: Springer.

Martinsen, V. (1991). *Filosofi : en innføring*. Oslo: Kontekst.

McMahon, S. & Jones, I. (2015). A comparative judgement approach to teacher assessment. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 22*(3), 368-389.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM Mathematics education, 38*(2), 113-142.

NESH. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humainora, juss og teologi* Oktan Oslo AS. Hentet fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/60125_fek_retningslinjer_nesh_digital.pdf?fbclid=IwAR0N9X__Hqj7yquRL9-82I3XPmpvXZRB1Gd1sfuE9RJiwCBOITMphFjiBOI

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (s. 115-124).

Nomoremarking.com. (2019, 11. mai). Hentet fra https://www.nomoremarking.com
NOU. (2015). *Fremtidens skole — Fornyelse av fag og kompetanser*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/sec3
Oliveira, A. M. P. d. & Barbosa, J. C. (2010). Mathematical Modeling and the Teachers' Tensions. I R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Red.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (1. utg., s. 511-517). New York: Springer
Pallant, J. (2013). *SPSS survival manual* (5. utg.). Berkshire: McGraw-Hill Education.
Perrenet, J. & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of mathematical modelling and application, 1*(6), 3-21.
Pollitt, A. (2011). Comparative judgement for assessment. *International Journal of Technology and Design Education, 22*(2), 157-170.
Pollitt, A. (2012). The method of Adaptive Comparative Judgement. *Assessment in Edication: Principles, Policy & Practice, 19*(3), 281-300. https://doi.org/10.1080/0969594X.2012.665354
Ringdal, K. (2018). *Enhet og mangfold: samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode* (4. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.
Schou, J., Skott, J., Jess, K. & Hansen, H. C. (2008). *Matematik for lærerstuderende–Omega*. Gylling: Samfundslitteratur.
Schaap, S., Vos, P. & Goedhart, M. (2011). Students overcoming blockages while building a mathematical model: Exploring a framework. I G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri & G. Stillman (Red.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (s. 137-146). Dordrecht: Springer.
Siller, H. S. & Greefrath, G. (2010). Mathematical modelling in class regarding to technology. *Proceedings of the sixth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 2136-2145).
Singer, M. (2007). Modelling Both Complexity and Abstraction: A Paradox? I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and applications in mathematical education* (s. 233-240). New York: Springer.
Skovsmose, O. & Blomhøj, M. (2006). *Kunne det tænkes?* Albertslund: Malling Beck.
Stillman, G. A., Brown, J. & Galbraith, P. (2010). Identifying challenges within transition phases of mathematical modeling activities at year 9. I R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines & A. Hurford (Red.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (s. 385-398). Dordrecht: Springer.
Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: et sosiokulturelt perspektiv*. Oslo: Cappelen akademisk forlag.
Tabachnick, B. G. & Fidell, L. S. (2007). *Using multivariate statistics* (5. utg.). Boston: Pearson education.
Thurstone, L. (1959). *The measurement of values*. Oxford: Chicago Press.
Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04
Utdanningsdirektoratet. (2018). *Fornyer innholdet i skolen*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/?expand=factbox2606064
Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. London: Harvard university press.
Wu, M. & Adams, R. (2007). *Applying the Rasch model to psycho-social measurement: A practical approach*. Melbourne: Educational Measurement Solutions.

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsmailer om deltagelse i undersøkelsen

Vedlegg 2: Samtykkeskjema til deltagere

Vedlegg 1: Informasjon sendt på mail til deltagerne

23.10.18

<u>Til matematikklæreren på 5.-10. trinn</u>

I arbeidet med min masteroppgave undersøker jeg hva det er viktig at en lærer gjøre når han/hun underviser i modellering/problemløsning i matematikk. Se for deg at du skal jobbe med modellering med din klasse. Et eksempel på en modelleringsoppgave kan være slik:

> *Maria bor i Meråker, like ved grensen til Sverige. Hun skal fylle opp tanken på bilen sin. Maria må finne ut om det lønner seg å fylle tanken i Meråker, 2 km fra der hun bor, eller om hun bør kjøre over grensa til Storlien, 30 km fra der hun bor. Presenter ditt løsningsforslag.*

Spørsmålet er:

- ***Beskriv hvordan du arbeider med modellering i matematikklasserommet.***
    - Hvordan du legger til rette for arbeid med modellering?
    - Hvordan er du i klasserommet når elevene jobber med modellering?
    - Hvordan du veileder elevene når de jobber med modellering?

Skriv ned din tanke, og ikke dvel ved om det er riktig eller ikke. Alle svar mottas!

<u>Ett kriterie for å svare på spørsmålet er at du er matematikklærer på 5.- 10. trinn.</u>

Neste fase i undersøkelsen er at jeg sender deg et slags spørreskjema som du skal svare på. Det er frivillig å svare på spørreskjemaet. Selv om du svarer meg på spørsmålet over er du ikke nødt til å svare på spørreskjemaet.

Håper du har tid til å svare meg.

Med vennlig hilsen Johanne S. Strand

21.11.18
Hei,

Jeg sender deg denne mailen fordi du har takket ja til å delta i mitt forskningsprosjekt.

Vedlagt ligger en fil som jeg ønsker at du skal lese. Dersom du samtykker til å delta kan du skrive under på skjemaet når vi møtes neste gang. Du behøver ikke å skrive ut og signere i dag. Dersom du ikke samtykker til å delta kan du svare "Ønsker ikke å delta" på denne mailen.

Du vil snart motta en ny mail med en kort beskrivelse av det du skal gjennomføre og en link til et spørreskjema.

Med vennlig hilsen Johanne Sofie Strand

21.11.18

Hei,

Jeg viser til mailen som jeg sendte deg tidligere i dag. Før du trykker på linken under vil jeg at du skal lese denne mailen.

Du skal jobbe med modellering i klasserommet. Elevene får presentert et problem fra virkeligheten som de skal løse. Det finnes ingen riktig eller gal løsning på problemet.
Et eksempel på en modelleringsoppgave:

> *Maria bor i Meråker, like ved grensen til Sverige. Hun skal fylle opp tanken på bilen sin. Maria må finne ut om det lønner seg å fylle tanken i Meråker, 2 km fra der hun bor, eller om hun bør kjøre over grensa til Storlien, 30 km fra der hun bor. Presenter ditt løsningsforslag.*

I linken vil du bli bedt om å skrive inn mailadresse og navn. Når du har gjort det vil du få opp ett spørsmål. Spørsmålet besvarer du ved at du velger mellom to utsagn/setninger. For å velge høyre eller venstre må du trykke der det står "Left" eller "Right" på toppen av siden. Du skal gjøre 42 sammenligninger og det vil ta 5-10 minutter. Du bør sitte uforstyrret når du gjennomføre undersøkelsen.

https://www.nomoremarking.com/judges/reg/RyZcSZBGKjfdwTeQX

Takk for at du svarer på undersøkelsen min!

Med vennlig hilsen Johanne Sofie Strand

Vedlegg 2: Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet «Utfordringer med modellering i klasserommet»

Til deltagere for mitt forskningsprosjekt

Jeg er masterstudent ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning, og skal gjennomføre et kort forskningsprosjekt. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære.

Formål

Formålet med prosjektet er å se på hvilke modelleringskompetanser som matematikklærere synes det er vanskelig å få elevene til å tilegne seg. Jeg skal i min undersøkelse spørre flere lærere anonymt om hvilke matematiske kompetanser de synes det er vanskelig å få eleven til å tilegne seg i arbeidet med modellering/problemløsning. For å svare på mitt spørsmål skal jeg bruke et program som heter «No more Marking». Programmet sammenligner to og to utsagn. Når du velger det utsagnet du synes er mest utfordrende vil programmet rangere utsagnene.

I masteroppgaven min skal jeg analysere hvilke kompetanser som elever må ha for å jobbe med modellering i matematikk. Resultatene av studien vil bli brukt i en eksamensbesvarelse/masteroppgave ved NTNU.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Fordi du er i min målgruppe som matematikklærer.

Spørsmålene mine vil besvares anonymt og jeg har ikke mulighet til å knytte ditt svar opp mot deg.

Hva innebærer det for deg å delta?

For deg innebærer det å svare på et spørsmål i 10-15 minutter. Måten du svarer på er å sammenligne to utsagn for å velge det du synes er vanskeligst. Når du har gjort dette flere ganger med flere utsagn vil de rangere seg fra vanskeligst til lettest. Du skal svare på spørsmålet på egen datamaskin eller ved å benytte min. Svaret ditt vil registreres elektronisk.

Hvilke opplysninger om deg får vi vite når du deltar?

Dersom du svarer på min undersøkelse på egen datamaskin vil jeg få informasjon om din E-postadresse, ip-adresse eller annen nettidentifikator. Dersom du svarer på undersøkelsen på min datamaskin vil jeg ikke få tilgang til disse opplysningene.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Johanne Sofie Strand og veileder vil ha tilgang til datamaterialet. Datamaterialet vil kunne diskuteres med medstudenter.
- For å sikre at dine personopplysninger ikke kommer ut vil jeg oppbevare ditt navn og kontaktopplysninger i et låst skap. Digitalt datamaterialet skal ligge på en minnepenn som er låst inne.
- Du vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen. Alle som svarer på mitt spørsmål vil omtales som matematikklærer.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 20. juni 2019. Når prosjektet er avsluttet vil alle data som er samlet inn slettes.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved Eivind Kaspersen (eivind.kaspersen@ntnu.no)
  Vårt personvernombud: NTNUs personvernombud er Thomas Helgesen

  (mailto:thomas.helgesen@ntnu.no)

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (persoverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Eivind Kaspersen	Johanne Sofie Strand
Prosjektansvarlig	Student

(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet
«Utfordringer med modellering i klasserommet?»

og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i den digitale spørreundersøkelsen

Jeg samtykker til at opplysninger om meg behandles frem til prosjektet er avsluttet, juni 2019

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

NTNU

Kunnskap for en bedre verden