BACHELOROPPGAVE

Brøkundervisning

Kristian Sandland

GLU- 1-7 Lærerutdanning
2018

Sammendrag

I min bacheloroppgave undersøker jeg hvordan brøkundervisningen foregår i praksis. Forskningsfeltet er omfattende så jeg avgrenset problemstillingen min til: «Hvordan kan man som lærer jobbe med å bygge forståelse for brøkbegrepet i sin undervisning?». For å besvare forskningsspørsmålet gjennomførte jeg kvalitativ forskningsmetode, der jeg intervjuet to lærere. Dermed fikk jeg tilgang til to matematikklæreres erfaringer om brøkundervisning.

Det viste seg at mange elever har en svak forståelse av at brøk formidler forholdet mellom to mengder. I resultatet av drøftingsdelen der jeg vurderer lærernes undervisning opp mot relevant teori om brøkbegrepet, kom det frem at undervisningene inneholdt en liten variasjon av kontekster, modeller, konkreter. Begrenset variasjon i undervisningen vil påvirke elevens forståelse av brøkbegrepet.

Innledning

Helt siden jeg begynte på barneskolen har matematikk vært et fag som har fascinert meg. Mange oppgaver har blitt gjort, og mye streb har blitt lagt ned. Jeg har alltid hatt innstillingen om at det vil løse seg så lenge jeg legger ned nok innsats, for faget består jo tross alt bare av pugging, trodde jeg. Da jeg startet på lærerstudiet skjedde det en åpenbaring, jeg fikk revolusjonerende tanker rundt matematikken. Jeg gikk fra å tenke at «matematikk er bare sånn», til å oppdage logiske forklaringer på operasjonene som ble gjort. Brøk har gjennom skoleløpet vært det temaet som jeg syns har vært mest utfordrende. Grunnen til dette var nok kompleksiteten rundt brøkbegrepet. Å forholde seg til betydningen av teller, nevner, brøkstrek, alle de forskjellige modellene samt alle de ulike vinklinger på problemene har gjort til at jeg har sett på emnet som utfordrende. Dette er grunnen til at jeg ønsker å fordype meg i emnet brøk i mitt arbeid med bacheloroppgaven som lærerstudent.

Jeg ønsker at min fordypning med denne oppgaven, skal styrke min kunnskap slik at jeg kan hjelpe mine elever i deres arbeid med matematikk og spesielt brøk. Elevene møter på mange utfordringer på deres vei til å knekke brøkkoden. Jeg ønsker å se nærmere på disse utfordringene og få en større forståelse av dem. Mange misoppfatninger kan oppstå i elevens møte med brøk. Kilpatrick, Swafford & Findell (2001) melder at mange lærere ikke har den kunnskapen eller den kompetansen som skal til for å lære bort brøk til sine elever. Gjennom arbeidet med bacheloroppgaven min ønsker jeg å få et innblikk i hvordan lærerne arbeider for å tilegne elevene en forståelse av brøkbegrepet, der jeg spesielt ønsker å se på hvordan lærerne kan forholde seg til de elevutfordringene som oppstår i arbeidet med brøk. Min problemstilling lyder som følgende:

«Hvordan kan man som lærer jobbe med å bygge forståelse for brøkbegrepet i sin undervisning?»

Innsnevring av oppgaven

I denne forskningsoppgaven har jeg tatt for meg kvalitativ metode. Der to matematikklærere på henholdsvis 4. og 5. trinn har blitt intervjuet. Når jeg skal undersøke hvordan man som lærer kan bygge forståelse for brøkbegrepet i sin undervisning, tar jeg utgangspunkt i praksisen til mine to informanter. Dette medfører at teorien som jeg presenterer er selektert med hensyn til hva som har relevans for informantenes undervisning. Derfor diskuterer jeg tre av de fem aspektene ved brøk; brøk som del av hel, brøk som måling og brøk som divisjon. Samt at modeller er det konkretiseringsverktøyet som blir vektlagt og dermed diskutert mest.

Teori

I dette kapittelet presenteres brøk som et matematisk fenomen. Jeg vil innledningsvis fokusere på brøkens plass i skolen. Siden oppgaven skal handle om hvordan læreren kan bygge forståelse for brøkbegrepet i sin undervisning er det hensiktsmessig å definere og omtale brøk som begrep, samt å gå inn på andre sentrale matematiske begreper tilknyttet brøkbegrepet. Senere blir konkretisering av brøk presentert, med et fokus på abstrakte modeller. Avslutningsvis vil jeg presentere noen av brøkbegrepets sentrale aspekter. Brøk som del av en hel, brøk som måling og brøk som divisjon er aspektene som blir inkludert.

Brøk i skolen

Brøk har en viktig plass i norsk grunnskole, og innehaver en sentral rolle i matematikkfaget på barneskolen. Emnet brøk inngår allerede i kompetansemålene etter 2. årstrinn der elevene skal mestre å doble og halvere. Videre øker omfanget av brøk og får en sentral plass i kompetansemålene etter 4., 7., og 10. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Brøkens plass og omfang i barneskolen er betydelig, likevel er det mange elever som synes brøk er vanskelig å forstå. Overgangen fra å arbeide med hele tall i matematikken, til å utvide tallområdet til å omfatte brøk og desimaltall er en velkjent kritisk fase for mange elever (Bondø, 2010). En sentral utfordring er å omstille elevene til å forstå at de ideer og begreper de allerede har dannet seg, ikke alltid vil gjelde i nye situasjoner. Et vanlig fenomen er at elevene danner seg ufullstendige tanker på bakgrunn av deres erfaringer. Ofte er deres erfaringer tilknyttet et avgrenset felt, og som oftest er ikke disse tankene tilstrekkelig for å konkludere generelt. I disse tilfellene oppstår *misoppfatninger*. Misoppfatninger oppstår når eleven har dannet seg en bestemt idé som brukes konsekvent feil. Disse er ikke tilfeldige ideer, og kommer som et resultat av overgeneralisering (Brekke, 2002). Når det gjelder brøk bruker elevene kunnskap de allerede har om naturlige tall for å løse brøkproblemene, dette skaper forvirring (Van de Walle et al., 2014). McIntosh (2007) påpeker at vi bruker for lite tid på å forstå hva brøk er. Tradisjonelt har brøk blitt tilsidesatt for de fire regneoperasjonene.
Hva er brøk

På grunn av omfanget av brøk er det hensiktsmessig å ta med tre ulike definisjoner av brøk; «En brøk består av tre elementer, teller, brøkstrek og nevner. Brøkstrek er det samme som deletegn. En brøk er en del av noe» (www.matematikk.net, 2018). Denne definisjonen fra matematikk.net (2018) fokuserer på brøkstreken, der den defineres som det samme som deletegnet. Videre kommer Birkeland, Breiteig & Venheim (2011) med følgende definisjon:

«Vi arbeider oss fram til en god forbindelse mellom begrepene divisjon og brøk. Brøken $\frac{3}{8}$ *er svaret på divisjonen 3 : 8. Generelt: En brøk* $\frac{a}{b}$ *er svaret på divisjonsoppgaven a : b»* (Birkeland et al., 2011, s. 189).

Birkeland et al. skiller definisjonen av brøk og divisjon ved å eksplisitt si at brøk og divisjon ikke er det samme, men at brøken er svaret på divisjon. Den tredje og siste definisjonen er:

«En brøk er et uttrykk som kan representere en operasjon eller et objekt.
Eksempel: Uttrykket $\frac{24}{3}$ *kan representere en operasjon, dvs. tjuefire dividert med tre, eller et objekt, nemlig brøken eller det rasjonale tallet tjuefire tredeler»* (Nämnaren, 1997, s. 23).

I definisjonen til Nämnaren (1997), gjenforenes brøk og divisjon ved at begrepet brøk defineres som en operasjon og et objekt (Bondø, 2010).

Begreper tilknyttet brøkbegrepet

Når jeg skal utforske min problemstilling er det hensiktsmessig å redegjøre for noen sentrale begreper som er tilknyttet temaet. I tillegg til å redegjøre for begrepene inkluderes aktuelle misoppfatninger som kan oppstå vedrørende de aktuelle temaene som nevnes. Påfølgende vil jeg ta for meg; rasjonale tall, en brøks sammensetning, brøk større enn 1, relativ tenking, konkretisering av brøk, brøk som del av en helhet, brøk som måling og brøk som divisjon.

Brøks oppbygning

Brøk er *rasjonale tall*. Rasjonale tall tar for seg «hvor mye», istedenfor «hvor mange». Rasjonale tall er målinger som tar for seg mengder i grupper sammenliknet med andre grupper (Lamon, 2005). Rasjonale tall er tall som kan skrives som brøk der teller og nevner består av hele tall. Likevel påpeker Lamon (2005) at det er feil å se på rasjonale tall og brøk som likeverdig, dette fordi rasjonale tall også kan skrives på andre former. Det kan skrives som desimaltall og prosent, derfor blir det mer riktig å si at brøk er en underkategori for rasjonale tall.

Brøk er en tallstørrelse som består av en *teller* på toppen og en *nevner* på bunn, med en *brøkstrek* i mellom (Birkeland et al., 2011). Clarke, Roche og Mitchell (2008) trekker frem at man som lærer må hjelpe elevene til å danne seg en generaliserbar regel for å forstå teller og nevner i en brøk. Dette innebærer at elevene vil få en forståelse av at i brøken $\frac{Teller}{Nevner}$, symboliserer *nevner* størrelsen på delen og *teller* sier noe om antall størrelser av delen. Telle-tallet forteller hvor mange som har blitt talt. Brøksymbolikken blir ofte misforstått av elever på grunn av dets omfang (Van de Walle, 2004). Ofte kan elevene slite med å forstå teller og nevner som en samlet verdi. Ofte blir telleren og nevneren misforstått som to separate verdier (Van de Walle et al., 2014). Lamon (2005) trekker frem at misoppfatninger som den Van de Walle et al. nevner fører til at elevene ofte tenker at brøken med det største tallet utgjør den største brøken. Kilpatrick et al. (2001) argumenterer for at man må hjelpe elevene til å se sammenhengen og relasjonen mellom telleren og nevneren. Et av problemene de nevner er at elevene ofte begynner å regne med brøk før de har utviklet en forståelse av symbolene tilknyttet brøk.

Uekte brøker og blandede tall

Ekte brøk er en brøk som har verdi mellom 0 og 1, for eksempel brøken $\frac{1}{2}$. Dersom brøken har verdi som er høyere enn 1 kan det oppgis som enten *uekte brøk* eller *blandet tall.* En uekte brøk skrives med teller som er høyere enn nevneren $\frac{5}{2}$. Den nevnte brøken kan også skrives med en heltallsdel og en brøkdel 2 $\frac{1}{2}$, da omtales det som blanda tall. Clarke, Roche & Mitchell (2008) mener at elevene kan bli introdusert for uekte brøk og blandede tall tidlig i løpet. Så fort elevene klarer å bruke tallinje kan de også se sammenhengen mellom de to brøkbegrepene. Van de Walle et al. (2014) nevner at ordets betydning «uekte» kan føre til misforståelse for elevene. Derfor skal det heller omtales som «brøk» eller «brøk større enn 1» De påpeker at elever for sjeldent blir utsatt for problemer med brøk som har verdi høyere enn 1. I arbeidet med uekte brøk og blanda tall er det i følge Van de Walle et al. (2007) viktig at en definisjon utvikles av den individuelle elev med deres egne ord. Modeller og *connecting cubes* eller brøkstolper trekkes av Van de Walle et al. (2014) frem som det mest effektive redskapet når elevene skal se sammenhengen mellom uekte brøk og blandede tall.

Relativ tenking

Når elevene står ovenfor et problem i matematikk er det mulig å analysere situasjonen enten med et relativt eller et absolutt syn. Gjennom arbeidet med addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon har eleven opparbeidet seg en absolutt tankegang, noe som kommer av at tallene man jobber med i de nevnte operasjonene har en absolutt verdi. Lamon (2005) fremhever den relative tankegangen som nødvendig for å utvikle en abstrakt tankegang. Hun trekker frem relativ tenking som en kritisk egenskap for å forstå brøk. I en brøk vil tallene i telleren og nevneren ha en relativ verdi. Verdien blir først synlig når man ser tallene i forhold til hverandre. Brøkene $\frac{1}{2}$ og $\frac{4}{8}$ har samme verdi, selv om de består av ulike tall. Elevene er vant til å tenke absolutt, derfor kan det skape barrierer når de skal forholde seg til brøk fordi det krever relativ tenking.

Det er grunnleggende at eleven vet at mengden i brøk kan variere (Van de Walle et al., 2014). Lamon (2005) peker på arbeid med å sammenlikne brøker og arbeidet med likeverdige brøker som spesielt viktig for å skape en relativ forståelse for brøk. Ved å ta i bruk kontekster som legger opp til bruk av arealmodell, lengdemodell og mengdemodell kan elevene se at mengden kan deles inn i mindre like store biter, mens den totale størrelsen er konstant (Lamon, 2005).

Konkretisering

Lærerne har i flere tiår blitt lært opp til å oppmuntre elevene til å ta i bruk hjelpemidler i arbeidet med matematikk (Kilpatrick, 2001). Å konkretisere matematikk handler om å anvende konkrete hjelpemidler til å forstå teoretiske begreper (Kairavuo, 2010). Metodene og hjelpemidlene kan variere, men hensikten er å hjelpe elevene til å få innsikt i matematikken slik at de kan danne seg mentale representasjoner. Elevene bruker de mentale representasjonene til å tenke abstrakt (Cramer & Wyberg, 2009). For elever i alderen 6-12 år er det naturlig å konkretisere matematikken, dette vil øke elevenes interesse og forståelse (Kairavuo, 2010). Ved å ta i bruk konkretiseringsverktøy som for eksempel telleklosser, geometriske figurer, tegning av modeller, eller andre objekter, vil elevene engasjeres til aktivitet og medvirkning. Dette er svært viktig for elever på barneskolen (Cramer & Wyberg, 2009).

Bruk av modeller for å konkretisere brøk er i følge Van de Walle et al. (2014) viktig. Arealmodell, lengdemodell og mengdemodell er de tre typer modeller som anvendes i arbeidet med brøk (Van de Walle et al., 2014). Cramer & Wyberg (2009) sier at de ulike modellene har sine styrker og svakheter, dette er noe man må være obs på i undervisningen. En aktivitet kan i følge Van de Walle et al. (2014) gjøres flere ganger med flere ulike modeller for å få elevene til å se sammenhengen mellom modellene. Ulike modeller får frem ulike måter å lære på, og som lærer kan man ikke være sikker på at elevene virkelig forstår brøken, hvis eleven ikke har vist at de mestrer å representere brøken ved bruk av både areal-, lengde- og mengdemodeller. En elev kan ha problemer med å forstå enkelte modeller, det er derfor viktig å variere representasjonene. Arealmodellen, lengdemodellen og mengdemodellen består alle av styrker og svakheter, disse blir presentert nærmere i neste delkapittel, der jeg vil ta for meg de ulike aspektene ved brøk.

Ulike aspekter ved brøk

Et dilemma for både lærere og elever er hvordan man skal oppfatte og forså sammenhengen mellom de ulike aspektene ved brøk. For å besitte en vid og fleksibel forståelse av brøk er de ulike brøkaspektene fundamentale. Et problem er at mange matematikklærere ikke har den kunnskapen eller den kvalifikasjonen som skal til for å lære bort emnet til sine elever (Kilpatrick et al., 2001). Elever har ofte faste assosiasjoner når de tenker på brøk, for eksempel brøk som deler av en pizza. Denne forståelsen er ikke tilstrekkelig nok for at eleven skal få en allsidig og fleksibel forståelse av brøk (Clarke, Roche & Mitchell, 2008). En god forståelse av brøk kommer først når en klarer å koordinere mellom de fem ulike aspektene ved brøk; brøk som del av helhet, brøk som operator, brøk som divisjon, brøk som måling og brøk som forhold. Det er derfor en nødvendighet at lærerne bevisst benytter alle de ulike aspektene i undervisningen (Lamon, 2012). Videre vil brøk som del av en helhet, brøk som måling og brøk som divisjon omtales.

Brøk som del av en helhet

Introduksjonen til brøk burde være å forstå brøk som en del av en helhet, det er et effektivt startpunkt i arbeidet med å gi mening til brøk. Brøk som del av en helhet er den vanligste fremstillingen av brøk i barnas lærebøker på skolen. Denne formen presenteres ofte ved en arealmodell der deler av modellen er markert som deler av den hele. Denne fremstillingen er faktisk så mye brukt at det kan for mange være vanskelig å tenke på brøk gjennom de andre aspektene (Van de Walle et al., 2014). Brøk som del av hel består av en helhet som er delt inn i like store deler, der en bestemt mengde av delene skal representere delen av det hele (Lamon, 2005). Brøk som del av en helhet kan for eksempel være deler av en gruppe ($\frac{3}{5}$ av en klasse), eller deler av en lengde ($\frac{3}{1}$ av en mil) (Van de Walle et al., 2014). Arealmodellen er en figur som består av brøkdeler som er like store. Sirkulære arealmodeller er den modellen som oftest brukes. I tillegg til arealmodeller er mengdemodeller en god måte å representere brøk som del av en helhet. I mengdemodeller er den hele presentert som sett av objekter. Delene i telleren består her av sett med objekter (Van de Walle et al., 2014). Mengdemodeller kan for mange elever være utfordrende fordi man nå snakker om sett med mengder. Brøk representert gjennom mengdemodell kan hjelpe elevene til å forstå at brøk ikke sier noe om størrelsen på den hele eller størrelsen på delene, men at brøk forteller forholdet mellom delene og det hele (Van de Walle et al., 2014)

Lamon (2005) hevder at mesteparten av introduksjonen til arbeidet med brøk som del av en helhet, starter med at elevene tegner og fargelegger figurer. Her kan ulike utfordringer oppstå. En vanlig feil som gjøres er at figuren blir tegnet med enheter i forskjellige størrelser. Lamon (2005) mener at man som lærer må være obs på elevens svakheter i tegning. Mange av feilene elevene gjør er resultat av at lærere overvurderer elevenes ferdigheter i tegning og finmotorikk. Dersom konkretene ikke fungerer kan de skape problemer for elevene og heller bli et hinder i læringssituasjonen (Kaufmann, 2010). Man må legge opp til oppgaver som bygger på elevens styrker. Som lærer kan man foreslå modeller som egner seg og man kan dele ut modeller med allerede påtegnede landmerker som allerede er delt opp slik at elevene kan ta utgangspunkt i inndelingene (Lamon, 2005).

Brøk som divisjon

Når eleven skal lære brøk er det rimelig å ta utgangspunkt i elevens kunnskap om divisjon (Nunes, 2008). Brøk kan også representere en divisjonsporerasjon. Brøkstreken er et deletegn, noe som betyr at $\frac{3}{5}$ er det samme som 3÷5 (Clarke, Roche, Mitchell, 2008, s.374). Skrittet mellom de to notasjonene er liten, og mestringen av dette feltet vil hjelpe eleven til å ta for seg den mest nyttige strategien (Hansen, Skott, Jess, 2012). Divisjon kobles sjelden til brøk i undervisningen. Dersom elevene klarer å se sammenhengen mellom brøk og divisjon vil de oppdage at brøkutrykkene ikke er så kompliserte som de ser ut til ved første øyekast (Clarke, 2011). Clarke, Roche, Mitchell (2008) påpeker at elever for ofte tar i bruk en sirkulær modell i arbeidet med brøk. Ved å fokusere på brøk som divisjon vil elevene få presentert kontekster som utfordrer elevene til å dele likt. Når eleven jobber med brøk på denne måten gis de muligheten til å ta i bruk egenlagde modeller. Ved at elevene konstruerer sine egne modeller blir de nødt til å tenke over mange betydelige aspekter ved brøk (Clarke, Roche, Mitchell, 2008).

Brøk som måling

Brøk som måling skiller seg fra brøk som del av en helhet fordi det handler om å finne mengden som er oppgitt i brøken. Denne tolkningen fokuserer på hvor mye, og ikke hvor mange. Brøk egner seg godt til måling fordi det fins uendelig antall brøkdeler mellom to forskjellige brøker. Arbeid med brøk som måling er en god måte å formidle betydningen av nøyaktighet. Når elevene skal knekke brøkkoden er det viktig at de innser at delene det er snakk om er like store. Når elevene jobber med brøk på en tallinje vil de oppdage at oppmålingene må gjøres nøyaktig. Noe av målet med å jobbe med brøk som måling er at eleven skal forstå hvordan brøk relaterer seg til hverandre og hvor de ulike brøkene kan lokaliseres på en tallinje (Lamon, 2005).

Lengdemodeller er spesielt godt egnet for å forstå måling. Lengdemodeller som for eksempel en tallinje kan hjelpe elevene til å forstå brøk som tall, fordi brøken måler avstanden til et visst punkt på tallinjen målt fra 0. Linjemodellen er tett knyttet til den virkelige verden, derfor burde den tas i bruk oftere i brøkundervisningen (Van de Walle et al., 2014). Å arbeide med brøk som måling kan gjøre det enklere å sammenlikne brøker. Å finne størrelsen av en del vil komme mer naturlig dersom man setter det inn i en tallinje (Lamon, 2005). Brøk på en tallinje vil hjelpe elevene til å se sammenhengen mellom hele tall og brøk. En tallinje kan synliggjøre sammenhengen mellom den uekte brøken $\frac{5}{3}$ og det blandede tallet $1\frac{2}{3}$ (Clarke, Roche, Mitchell, 2008). En tallinje er også et godt redskap for å lære eleven om såkalte «benchmarks». «Benchmarks» er viktige brøker som elevene bruker til å kjenne igjen andre brøker. 0, $\frac{1}{2}$ og 1 er de viktigste referansepunktene tilknyttet til brøk. Disse størrelsene kan elevene bruke som hjelp når de skal utvikle en bedre forståelse for brøkens relative størrelse (Van de Walle, et al, 2014). Kunnskap om «benchmarks» kan brukes når elevene skal sammenlikne flere brøker (Clarke, Roche, Mitchell, 2008).

Metode

Valg av metode

I arbeidet med å belyse problemstilling ønsket jeg å undersøke hvordan lærere forholder seg til brøkundervisningen i praksis. For å finne ut av dette var det naturlig for meg å benytte meg av en kvalitativ metode. Personlig hadde jeg lite kunnskap om elevens forståelse av brøkbegrepet før undersøkelsen. Christoffersen og Johannesen (2012) trekker frem kvantitativ metode som godt egnet hvis man skal undersøke et felt som man har lite kunnskap om fra før. For å undersøke hvordan lærerne kan bygge forståelse for brøkbegrepet i sin undervisning var det hensiktsmessig å samle inn mine data ved å gjennomføre intervjuer, da denne varianten innbyr til detaljer og fyldighet (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Valg av intervju som forskningsmetode ga meg mulighet til å utforske problemstillingen gjennom en samtale med erfarne lærere. Jeg gjennomførte to intervjuer, disse ble utformet og gjennomført med en semistrukturert tilnærming. I et semistrukturert intervju er intervjuguiden (vedlegg 1) utformet på forhånd, men tilnærmingen er fleksibel og situasjonsbestemt, noe som betyr at temaene, spørsmålene og rekkefølgen på spørsmålene kan variere. Denne metoden legger opp til en mer uformell samtale hvor det er mulig å ta tak i det som er aktuelt underveis i samtalen (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Intervjuene ble gjennomført på informantenes arbeidsplass. Denne rammen ga en trygg atmosfære for informantene (Christoffersen & Johannessen, 2012). Intervjuene hadde en varighet på mellom 15 og 20 minutter. Med informantenes samtykke ble lydopptaker brukt for å dokumentere intervjuene. Dette ga meg muligheten til å fokusere på selve intervjuet, oppfordre til en meningsfull diskusjon, samt observere kroppsspråk som var relevant for en senere tolkning. Intervjuobjektet ønsket å være anonym, lydopptaket ble slettet så fort intervjuet var transkribert. Så fort intervjuene var gjennomført leste jeg inn mine umiddelbare tanker, dette var til hjelp når intervjuene senere skulle analyseres.

Intervjuguide og informantene

Intervjuguiden er utformet med åpne spørsmål, der informantene ble oppfordret til å trekke inn egne erfaringer fra praksisfeltet for å berike svarene med eksempler. En *kriteriebasert utvelgelse* av informanter ble gjort (Christoffersen & Johannessen, 2012). Valget av informanter ble altså gjort på bakgrunn av at informantene oppfyller kravene om å være matematikklærer på barneskolen. Informantene er lærere på henholdsvis 4. og 5. trinn. Informanten som blir omtalt med det fiktive navnet Axel er matematikklærer på 5. trinn og informanten som omtales som omtales med det fiktive navnet Britt er matematikklærer på 4. trinn. Jeg valgte å intervjue lærere på nevnte trinn fordi deres elever vil ha noe erfaring med brøkbegrepet, samtidig som utviklingen vil være i en tidlig fase. For å belyse problemstillingen vil disse trinnene være aktuelle. Når informantene skulle rekrutteres ble dette gjort på bakgrunn av at det er to personer som jeg har relasjoner til. En semistrukturert tilnærming ble valgt på bakgrunn av informantenes identitet. De utvalgte informantene er verbalt ulike. Axel er veldig frittalende, mens Britt er kortsnakket, men mer gjennomtenkt og presis i sine uttalelser. Dette var noe jeg tok høyde for når jeg utformet intervjuguiden som ligger vedlagt. I forberedelsesfasen var jeg bevisst på at jeg høyst sannsynlig måtte tilpasse spørsmålene underveis, med tilleggsspørsmål og omformuleringer. Med dette tatt i forbehold var spørsmålene i intervjuet kun et utgangspunkt, da jeg var klar over at spørsmålsformuleringen måtte tilpasses til aktualitet og situasjonen (Rognsaa, 2015) For at strukturen skulle bli nogen lunde lik og at jeg skulle få de svarene jeg ønsket fikk informantene spørsmålene tildelt på forhånd.

Kvaliteten av undersøkelsen

I forskningsarbeidet måtte jeg stille meg spørsmålet om hvor pålitelig og hvor gyldig datamaterialet mitt var. Påliteligehet som på forskningsspråket betegnes som *relabilitet* handler om nøyaktigheten av undersøkelsens data, hvilke data som kan brukes, måten dataen samles inn på, og bearbeidingsprosessen. Dataens gyldighet eller *validitet* på forskningsspråket, handler om hvor godt dataen representerer fenomenet som undersøkes (Christoffersen og Johannessen, 2012).

Relabiliteten i min oppgave kan svekkes dersom min gjengivelse av informantenes tanker ikke blir korrekt formidlet. Dette gjorde at jeg var bevisst på en presis formulering i arbeidet med å transkribere lydopptaket. Under intervjuet stilte jeg oppfølgingsspørsmål for å unngå eventuelle feiltolkninger. Om min oppgave har høy validitet avhenger av om dataen jeg har samlet inn er gode representasjoner av det jeg er på utkikk etter i problemstillingen. Oppgaven går i dybden på et område, noe som gir meg som forsker detaljert kunnskap på et forskningsområde. En eventuell svakhet med min oppgave er at begge mine informanter arbeider på samme skole. Lincoln og Guba (1985) trekker frem at funnene som gjøres i en kvalitativ studie er avhengig av konteksten der forskningen finner sted. Dette forteller at funnene i min undersøkelse kunne vært annerledes dersom forskingen skulle skjedd ved et annet tidspunkt eller om informantene hadde vært lærere på en annen skole (Nilssen, 2014).

Slik jeg ser det ville det vært mer ideelt å intervjue to lærere på to ulike skoler. Tatt høyde for at deres praksis da ville vært mer ulik, ville kanskje funnene i min analyse hatt et større sammenlikningsgrunnlag. En annen reell påvirkningsfaktor på informantenes svar kan være om informanten har temaet friskt i minnet. Forskningsfeltet for min problemstilling er snevert, noe som vil påvirke informasjonen jeg får av informantene. Som forsker er det viktig å være bevisst på å ikke generalisere, da dette kan være en svakhet for forskningen (Andersen, 2013). Mine funn vil gjenspeile mine informanters erfaringer og tanker på feltet. Dette vil gi et bilde av deres tanker om et utvalg 4. og 5. trinn elevers forståelse av brøkbegrepet. Det kan på ingen måte generaliseres. I det neste kapittelet skal jeg presentere de viktigste funnene i intervjuene.

Resultat

Etter å ha fått oversikt over empirien som jeg hadde samlet måtte jeg fremstille datamaterialet. For å undersøke problemstillingen min var det naturlig å fokusere på lærerne sine tanker om brøk som emne. Valg av temaer ble gjort med hensyn til problemstillingen. Først kartla jeg hva informantene mente var elevenes forståelse av brøkbegrepet. Deretter var det naturlig se nærmere på elevenes misoppfatninger for så å kartlegge undervisningen.

Elevens forståelse av brøkbegrepet

Arbeid med brøk utgjør en stor del av elevenes matematikkundervisning. Axel påpekte at arbeidet med brøk starter så tidlig som på 2. trinn og at emnet blir tatt opp hvert eneste skoleår ut barneskolen. Axel trakk frem denne gjentakelsen av emnet som avgjørende for at majoriteten av elevene skulle tilegne seg forståelse av brøkbegrepet. Når det gjaldt elevenes ferdigheter i brøk var informantene uenige. Axel sa at elevene var gode på brøk og at elevene likte å jobbe med brøk. Informanten fortalte at fokuset i undervisningen var å formidle en grunnleggende forståelse av brøk som en mengde. Så fort elevene hadde «knekt koden», ble arbeidet med emnet uproblematisk og morsomt. Axel trakk frem egen entusiasme for emnet som en påvirkende faktor på elevenes interesse og deres forståelse av emnet. Britt var motsigende og sa at elevene generelt syns brøk var vanskelig, og at det tok lang tid for mange elever å knekke koden. Både Axel og Britt refererte stadig til «pizzabrøk» som den fremstillingen av brøk som vektlegges i starten. «Pizzabrøk» viser seg å være brøk som del av en helhet fremstilt i en sirkulær arealmodell. Kontekster ble fremhevet som sentrale i arbeidet med brøk av begge informantene. De var enige om at mange elever klarte å ta i bruk konkreter, her nevnes modellering ved hjelp av tegning og bruk av brøkstolper. Begge informantene sa at mange elever mestrer å tegne den sirkulære arealmodellen på egenhånd. Å ta i bruk konkreter som løsningsstrategi ble av begge informantene trukket frem som ønskelig i arbeidet med å forstå brøkbegrepet. Informantene presiserte at de brukte modeller når de modellerte løsningsforslag til elevene både i individuell veiledning og i diskusjoner med full klasse. Konkreter var først og fremst et verktøy som både Axel og Britt ønsket at eleven skulle ta i bruk da de skulle velge løsningsstrategier i individuelt arbeid.

Utfordringer ved brøkbegrepet

Både Axel og Britt var enig om at den største utfordringen for elevene var å forstå brøk som en mengde. Utfordringen lå ifølge informantene i å tilegne seg en abstrakt tankegang, dette ble av begge informantene sett på som nødvendig for å forstå brøk som en mengde. Brøkens ulike komponenter ses på av Britt som en utfordring. Hun sa at det var «nytt og uvandt» for elevene. Ifølge Britt stoppet det opp for mange elever da de måtte forholde seg til brøkens teller, nevner og brøkstrek. Teller og nevner som en abstrakt mengde ble trukket frem av både Axel og Britt som en stor utfordring for elevene. Misoppfatninger om brøkens størrelse var ifølge informantene vanlig. Dette kom frem når elevene skulle sammenlikne størrelser. Eleven tenkte at brøken med høyest nevner var den største brøken. Den svake forståelsen av teller og nevner kom tydeligst frem når elevene skulle arbeide med likeverdige brøker, var informantene enige om.

Axel og Britt fremhevet begge to viktigheten av konkreter og ulike kontekster for å skape en forståelse av brøkbegrepet. Tegning av modeller ble nevnt hyppig av begge informantene. Axel påpekte at man måtte være obs på at modeller kunne virke mot sin hensikt. Noe mange elever slet med var å tolke konkretene, selv da de tilsynelatende var tatt i bruk som en god strategi. Da vil konkreter virke mot sin hensikt. I oppgaver der elevene fikk oppgitt flere brøker som skulle sammenliknes valgte flere av elevene å ta i bruk tegning som en løsningsstrategi. Elevene tegnet en arealmodell, men hadde problemer med å lese av modellen. Axel mente dette oppstod på grunn av misoppfatninger om at det høyeste tallet gir den største mengden, kunne for enkelte elever overveie deres egen tegning. Det var derfor mange av informantens elever som trodde at $\frac{1}{4}$ var større enn $\frac{1}{2}$. Dette var i følge Axel et vanlig problem. Britt var enig i at det kunne være komplisert å tolke egne tegninger. I følge Britt var elevene slurvete da de tegnet. Britt sa også at mange elever slet med å overføre kunnskapen fra en modell som de selv hadde tegnet til å skrive brøkens skriftlige form inn i boken. Britt trekker frem følgende eksempel; eleven kan forstå at en bit som deles i to består av to halve, men at det består av brøkene $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{2}$ er i følge Britt utfordrende for enkelte elever.

Arbeidet med brøk i skolen

En forståelse av brøkbegrepet skulle i følge informantene tilegnes gjennom mye arbeid og repetisjon. Axel hevdet at brøk ikke skulle læres gjennom algoritmer, men gjennom å skape en forståelse. Denne forståelsen skulle læreren formidle ved å hjelpe eleven med å ta i bruk konkreter og modeller, og sette brøk inn i en kontekst. Etter endt skoleår ønsket Axel at elevene skulle sitte igjen med forståelsen av hva en mengde er. Eleven skal kunne utrykke mengder ved bruk av brøk, ikke bare mengder knyttet til hele tall. Personlig ønsker Axel at elevene skal kunne bruke brøk i dagligdagse samtaler, for eksempel rundt middagsbordet. Britt hadde som mål etter at elevene var ferdig med 3. trinn at de skulle se sammenhengen mellom brøk og hele tall. Brøk som del av en helhet ble vektlagt i undervisningen, og fokuset var å knytte brøk til noe konkret. Begrepsforståelse av teller, nevner og brøkstrek var også noe som ble vektlagt ved fjorårets brøkundervisning. Britt sa at når de skal ta opp arbeidet med brøk, så blir fokuset fortsatt på å knytte en mengde til brøken. Gjennom tekstoppgaver med hverdagslige problemer skal elevene i følge Britt klare å se sammenhengen mellom modeller og brøkens skriftlige form. Hun trakk frem divisjon som innfallsporten når elevene igjen skal starte med brøk. Divisjon og brøk sitt tette slektskap skulle brukes til å hekte elevene på brøk. Begge informantene sa at man må spille videre på elevenes kunnskap om divisjon for å knekke brøkkoden.

Det var enighet mellom informantene om at regnefortellinger har en sentral rolle i brøkundervisningen. Axel fortalte hvordan tekstoppgaver kan få frem ulike aspekter og vinklinger ved brøken. Brøk som del av en helhet, brøk som divisjon og brøk som måling nevnes som ulike vinklinger som jobbes med i undervisning. Axel prøvde å variere mellom disse for å skape bredde, noe informanten mente styrket elevenes forståelse. I tillegg til å få frem de ulike aspektene bruker han tekstoppgaver for å skape en realisme til brøken, og det ble nevnt at gode tekstoppgaver kan sikre et bredt spekter og variasjon i arbeidet med brøk. I Britt sin undervisning ble brøk som del av en helhet vektlagt sterkest. I likhet med Axel mente

Britt at variasjon mellom de ulike fremstillingene trukket frem som fordelaktig. En fast type kontekst kunne i følge informantene føre til faste assosiasjoner til brøk, noe som er uønsket. Britt fortalte at kontekster som får frem praktiske situasjoner som for eksempel baking og matlaging var eksempler på kontekster som ble brukt i undervisningen. Disse kontekstene ville utfordre elevene til å se oppmålinger som deler av 1 liter, 1 kg osv. Her trakk Britt frem tallinjen som viktig i arbeidet med å lære måling. At lærere formet tekstoppgavene selv er også noe Britt så på som en god mulighet til å kunne tilpasse, alt etter hva elevene trengte å trene på.

Modeller var i følge begge informantene sentralt i arbeidet med å skape en forståelse av brøk som begrep. Arealmodell ble nevnt hyppig av både Axel og Britt, og ble trukket frem som godt egnet i arbeidet med brøk som del av en helhet. Modeller var i følge Britt spesielt nyttig da elevene skulle se sammenhengen mellom teller og nevner. Begge informantene oppfordret elevene i undervisningssituasjoner til å tegne modeller i boka for å få et konkret bilde av brøken. Connecting cubes brukes også av informantenes elever.

Informantene presiserte at en grunnleggende forståelse av brøk måtte være på plass før de kunne begynne å arbeide med uekte brøk, blandede tall og regning med brøker. Axel hevdet at først da elevene har fått en forståelse av brøk som abstrakte mengder, ble arbeidet med uekte brøk, blandede tall og regning med brøk problemfritt. Derfor bruker de mye tid på å gjøre brøk begripelig.

DISKUSJON

I denne delen av oppgaven vil jeg rette meg inn på forskningsspørsmålet mitt. I de foregående kapitelene blir teori, forskningsmetoden og analyse presentert. I denne delen av oppgaven skal funnene fra analysen diskuteres i lys av aktuell teori. Axel og Britt sine tanker om elevenes oppfatning av brøkbegrepet, samt informantenes brøkundervisning vil bli presentert og drøftet i lys av teori. I den forbindelse er det hensiktsmessig med en gjentagelse av problemstillingen: «Hvordan kan man som lærer jobbe med å bygge forståelse for brøkbegrepet i sin undervisning?». Som nevnt i innledningen på side 2 hevder Kilpatrick et al. (2001) at mange lærere ikke har den kunnskapen som skal til for å undervise i brøk. Med dette i minne blir informantenes undervisning drøftet med et kritisk blikk. Dette gjør at jeg skal knytte deres erfaringer opp mot arbeidsmetoder og tanker som teoretikerne har om emnet.

Elevens forståelse av brøk

Brøk som begrep viser seg å være komplekst, og omfanget fører med seg ulike elevutfordringer. Overgangen fra å jobbe med hele tall til å forstå brøk som mengde viser seg å være vanskelig for mange elever (Bondø, 2010; Lamon, 2005; Van de Walle et al., 2014). Dette kunne begge informantene bekrefte. Axel og Britt var enige i at elevenes største utfordring var å forstå brøk som forhold mellom to mengder. Brøk generelt er noe elevene til Britt og Axel bruker mye tid på og da er det først og fremst mengdeforståelse som er i fokus. Informantene påpeker at den årlige gjentakelsen av emne er avgjørende for at elevene skal tilegne seg tilstrekkelige kunnskaper om emnet. Brøk sitt omfang kommer tydelig frem i kompetansemålene, der elevene allerede etter 2. årstrinn skal besitte kompetanse om brøk. At mesteparten av undervisningen går ut på å forstå brøk som forholdet mellom en del og en helhet er i følge Lamon (2005) riktig, hun sier at dette er kompetanse som er helt elementært i elevenes arbeid med brøk. Denne kunnskapen vil være avgjørende når elevene senere skal begynne med mer avanserte brøkoperasjoner (Lamon, 2005). Det er viktig at Britt og Axel legger vekt på at elevene danner seg en god defensjon av brøkbegrepet, dette kan ses i lys av teorien til McIntosh (2007) som mener at vi bruker for lite tid på å forstå hva brøk er. En konsekvens av at elevene ikke har en klar og tydelig forståelse av brøkbegrepet vil i følge Brekke (2002) være at eleven danner seg misoppfatninger. Begge informantene er klare på at eleven enkelt tillegger seg misoppfatninger tilknyttet brøkbegrepet. Informantene mener at komplikasjonene oppstår i det elevene tar steget fra å jobbe med hele tall til å jobbe med brøk. Van de Walle et al. (2014) og Brekke (2002) hevder at misoppfatningene oppstår fordi eleven tar med seg ideer og begreper som allerede er konstruert gjennom arbeidet med hele tall, dette skaper vrangforestillinger som vil forvirre eleven. På bakgrunn av det Lamon (2005), Van de Walle et al. (2014) og Brekke (2002) sier er det riktig av Axel og Britt å sette av mye tid til å definere brøk som begrep der fokuset ligger i å forstå mengder.

Noe av det som viser seg å skape misoppfatninger for elevene er brøkens sammensetning av teller, nevner og brøkstrek. Britt og Axel sier at mange av deres elever ikke klarer å forholde seg til brøkens ulike komponenter. Britt sine elever syns det var «nytt og uvandt» å forholde seg til overgangen fra hele tall til å forstå brøk gjennom en brøkstrek, teller og nevner. Å forstå at teller, nevner og brøkstrek var én abstrakt mengde var vanskelig begge av informantenes elever. Kilpatrick et al. (2001) sier at problemer oppstår dersom elevene begynner å regne med brøk før de har utviklet en forståelse av symbolene tilknyttet brøk. Dette kom til syne da informantene fortalte at enkelte elever hadde misoppfatninger om at brøken med det høyeste tallet utgjør den største mengden. Dette kan i følge Van de Walle et al. (2014) tyde på at eleven har en svak begrepsforståelse av teller og nevner. En av grunnene til at slike misoppfatninger kan oppstå er i følge Van de Walle et al. (2014) at elevene oppfatter teller og nevner som to separate verdier. For at slike misoppfatninger skal unngås er det i følge Clarke, Roche og Mitchell (2008) avgjørende at informantene hjelper elevene til å lage en generaliserbar definisjon av teller og nevner, slik at elevene forstår at teller- tallet forteller hvor mange som blir talt, mens nevner- tallet symboliserer størrelsen på delen.

Som nevnt bruker informantene mye tid på å formidle brøk som forholdet mellom to mengder. For å forstå at brøk handler om forhold mellom to mengder er det i følge Lamon (2005) helt kritisk at eleven forstår at brøkens verdi er relativ. På grunn av elevenes arbeid med addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon har elevene tilegnet seg en absolutt tankegang. Mangel på en relativ forståelse er i følge Lamon roten til mesteparten av elevenes utfordringer og misoppfatninger. Britt trakk frem et eksempel der noen av elevene hadde problemer med å forstå at en hel del besto av brøkene $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{2}$. Utfordringen elevene møtte kan tyde på at elevene ikke klarer å knytte brøkens verdi opp mot den skriftlige formen. Det å forstå sammenhengen mellom brøk og mengde er i følge Van de Walle et al. (2014) en vanlig utfordring for elevene. For at eleven skal tilegne seg en forståelse av brøk som relative mengder er det i følge Lamon (2005) avgjørende at de vet at mengden i en brøk kan variere. I det følgende avsnittet blir informantenes brøkundervisning diskutert.

Mengdeforståelse

I arbeidet med å forstå brøk som en relativ mengde fremhever Axel og Britt at brøk må konkretiseres. Informantene sa at de alltid oppfordret eleven til å tegne modeller som støtte for å forstå brøken. Viktigheten av å konkretisere matematikk kan forstås i lys av Kilpatrick et al. (2001) som mener at elevene alltid skal oppfordres til å ta i bruk konkreter som et hjelpemiddel i matematikk. Ettersom at Axel og Britt sa at elevenes største utfordring var å se brøk som en relativ mengde, mener Cramer & Wyberg (2009) at bruk av konkreter vil hjelpe elevene til å danne mentale representasjoner av brøkens mengde. Konkreter vil gi en gi brøken en konkret representasjon, som elevene kan dra nytte av for å forstå brøk som noe abstrakt. Informantene oppfordret elevene til å aktivt ta i bruk konkreter når de selv skulle finne løsningsstrategier. Sett i lys av Kairavuo (2010) som forklarer hvordan konkretisering av matematikk vil øke elevens interesse og forståelse, vil elevene dra fordel av informantenes fokus på å konkretisere brøk. I intervjuene kommer det frem at informantene er motsigende når det gjelder elevenes interesse for brøk. Axel hevder at eleven syns det er morsomt å jobbe med brøk, mens Britt hevder at elevene syns det er vanskelig. Det viser seg at utfordringene i klassen til Axel er vel så mange som utfordringer i klassen til Britt, dette på tross av at elevene virker å være mer interessert i å jobbe med brøk. Sett i lys av Kairavuo (2010) sin teori om at konkretisering kan øke elevens interesse for matematikk, er det mulig at informantenes ulike konkretiseringsparaksis er grunnen til ulik interesse i de to klassene.

Begge informantene oppfordret elevene til å tegne arealmodellen som støtte. De trakk frem denne modellen som mest brukt av elevene når de skulle danne en mental representasjon av brøken. I tillegg til arealmodellen nevnte Britt at lengdemodellen ble brukt i undervisningen. Begge informantene nevnte brøkklosser som et konkretiseringsverktøy som ble tatt i bruk i undervisningen. På den ene siden er det i følge Cramer & Wyberg (2009) positivt å la elevene ta i bruk konkrete modeller fordi det oppfordrer til aktivitet og elevinvolvering. På den andre siden refererte både Axel og Britt til noe de kalte «pizzabrøk», dette viste seg å være brøk fremstilt i en sirkulær arealmodell. Denne modellen var tilsynelatende så mye bruk at det var sjelden elevene tok i bruk andre modeller som løsningsstrategier. I følge Clarke, Roche & Mitchell (2008) er det ikke ønskelig at eleven utvikler faste assosiasjoner til brøk. En allsidig og fleksibel forståelse for brøk vil ikke utvikles dersom eleven kun tenker på brøk som deler av en pizza. Grunnen til at elevene må ta i bruk ulike modeller er i følge Cramer & Wyberg (2009) på grunn av at de ulike modellene har sine styrker og svakheter. Axel og Britt må derfor legge til rette for at elevene kan variere brøkens fremstilling ved å ta i bruk lengde og mengdemodellen i tillegg til arealmodellen som begge nevner. I følge Van de Walle et al. (2014) må eleven representere brøken gjennom både areal-, lengde- og mengdemodell for at man kan vite om eleven forstår brøken. Axel sin fremstilling av brøk gjennom kun en av modellene holder ikke.

Brøk som del av en helhet

Arealmodellen blir av begge informantene fremhevet som viktig i startfasen. Denne modellen viser et antall deler som er markert av den hele delen. Å forstå brøk som del av en helhet er den fremstillingen Lamon (2005) og Van de Walle et al. (2014) mener elevene først skal få kjennskap til. Her er Axel og Britt enige med Lamon og Van de Walle et al. Eleven ble oppfordret til å tegne en arealmodell som støtte for å konkretisere brøken. Informantene sa at deres elever hadde utfordringer med å tegne modeller for så å skrive brøken inn i boka. I følge

Lamon (2005) må man som lærer være obs på at utfordringer kan oppstå når elevene skal tolke sine egne tegninger. Problemer oppstår av ulike grunner, de kan ofte slurve når de tegner, dette kan føre til at tegningen blir vanskelig å tyde og at delene kan bestå av ulike størrelser. Dette bekreftes av en av Axel som sier at mange av elevene sliter med å tolke sine egne tegninger på grunn av slurv. At eleven tar i bruk tegning som en løsningsstrategi, er et steg i riktig retning, men det vil i følge Lamon (2005) og Van de Walle et al. (2014) virke mot sin hensikt dersom brøkens deler ikke er like store. En mulig løsning for å forhindre disse misforståelsene er i følge Lamon (2005) at Britt og Axel kan dele ut modeller med påtegnede «benchmarks». Dersom elevene slurver og ikke innser viktigheten i å være presis kan kontekster med brøk som måling være det som skal til for å formidle betydningen av nøyaktighet (Lamon, 2005). Informantene refererte som oftest til kontekster der brøk fremstilles som del av en helhet gjennom en arealmodell. Man skal i følge Van de Walle et al. (2014) være forsiktig med dette fordi denne fremstillingen blir så mye brukt at det kan for mange elever være vanskelig å tenke på brøk gjennom de andre aspektene.

Lamon (2005) sier at kontekster som legger opp til bruk av mengdemodell eller lengdemodell kan være vel så nyttig når elevene skal utvikle en mer fleksibel forståelse av relative mengder. Mengdemodellen vil gi elevene variasjoner når de skal tenke på brøk som del av en helhet. Van de Walle et al. (2014) presiserer at mengdemodellen kan hjelpe elevene til å forstå at brøk handler om forholdet mellom delene og det hele. Denne modellen kunne blitt brukt som støtte da elevene ikke klarte å tyde arealmodellene som de selv hadde tegnet. Dersom Axel hadde lagt opp til en kontekst der den samme brøken skulle blitt fremstilt med en mengdemodell i tillegg til arealmodellen kunne eleven sammenliknet de to modellene og ut i fra det fått en dypere forståelse av forholdet mellom mengdene i brøken. Som Van de Walle et al. (2014) sier burde en brøk fremstilles gjennom flere ulike modeller for å være sikker på at eleven forstår brøken.

Brøk som måling

For å skape variasjon i undervisningen nevner Britt kontekster som tar for seg baking, der bruk av tallinje blir trukket frem som spesielt godt egnet. Tallinja eller lengdemodellen vil få frem målingsaspektet ved brøk (Lamon, 2005). Axel og Britt nevner at de trekker inn brøk som måling i undervisningen for å gi variasjon i brøkbegrepet. Mens Britt referer til kontekster med baking og bruk av tallinje, sier ikke Axel noe om hvordan han jobber med dette aspektet. At informantene jobber med brøk som måling og bruk av tallinjen i deres undervisning er i følge Lamon (2005) viktig fordi det får frem et helt annet aspekt ved brøkbegrepet, da det fokuserer på å finne mengden, ikke antallet. Det er i følge Kilpatick et al. (2001) avgjørende at elevene blir introdusert for de ulike aspektene for å tilegne seg en vid og fleksibel forståelse av brøk. Likevel er det mulig å være kritisk til variasjonen av de ulike brøkaspektene i Britt og Axel sin undervisning. Informantene hevder at brøk som måling er noe som skal gi variasjon til såkalt «pizzabrøk». Både Axel og Britt sier også at «pizzabrøk» er det de vektlegger. Dette kommer til syne i samtlige av elevutfordringene som informantene nevner. Gjennomgående er utfordringene tilknyttet den sirkulære arealmodellen. I følge Clarke, Roche & Mitchell (2008) er det et problem at elevene alltid assosierer brøk med pizza, fordi det ikke gir en allsidig og fleksibel forståelse av brøk. Det er i følge Lamon (2005) lærerens ansvar å være bevisst på de fem ulike aspektene ved brøkbegrepet, fordi en god forståelse av brøk kommer først når eleven klarer å koordinere mellom de fem ulike aspektene.

Måling er et velkjent fenomen for eleven og linjemodellen er tett knyttet til den virkelige verdenen, så brøk som måling burde i følge Van de Walle et al. (2014) tas i bruk oftere i brøkundervisningen. Informantenes elever slet med å se størrelser i forhold til hverandre, dette kom til syne når elevene arbeidet med å sammenlikne brøker og i arbeidet med likeverdige brøker. Kontekster med brøk som måling er i følge Lamon (2005) en god vinkling som kan hjelpe elevene til å forstå brøkens plass og relasjon til hverandre. En av grunnene er at brøk som måling og spesielt brøk på en tallinje kan hjelpe elevene til å forstå brøken som tall, dette vil gi en sammenlikning til vanlige tall som eleven kan dra nytte av. Tidligere ble det nevnt at noen av Britt sine elever ikke klarte å se sammenhengen mellom at en hel består av brøkene $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{2}$. Til dette ble arealmodellen brukt. En lengdemodell kunne gjort det mer synlig for eleven ved å referere til vanlige tall. Lengdemodellen kunne synliggjort brøken i forhold til hverandre. En tallinje har også den egenskapen at elevene kan få en forståelse av at det fins uendelig mange brøker mellom to brøker (Lamon, 2005). Denne forståelsen er grunnleggende for å forstå brøk som en mengde og relasjonene mellom ulike mengder. Linjemodellen kunne også vært benyttet i den nevnte situasjonen der elevene slet med å lese av arealmodellen på grunn av slurv. Linjemodellen vil i følge Lamon (2005) få elevene til å innse viktigheten av å gjøre oppmålingene nøyaktig. Tallinjen kan hjelpe elevene til å innse at størrelsen på delene må være like, delenes størrelser vil komme mer naturlig til syne på en tallinje.

Britt nevnte at elevene hadde misoppfatninger om at det høyeste tallet gir den høyeste brøken. Dette er en overgeneralisering som elevene har fra arbeidet med hele tall (Van de Walle et al., 2014). Dersom elevene hadde satt brøkene inn på en tallinje kunne misoppfatninger vært unngått ved at de kunne sett hvor brøken var plassert i forhold til hverandre. Lamon (2005) trekker frem arbeidet med å sammenlikne brøker og arbeidet med likeverdige brøker som spesielt viktig for å skape en relativ forståelse. Et hjelpemiddel Axel og Britt kan ta i bruk for å sammenlikne brøker er «benchmarks». Clarke, Roche, Mitchell (2008) fremhever «benchmarks» som 0, $\frac{1}{2}$ og 1 som et godt hjelpemiddel når elevene skal lære å sammenlikne brøker. Begge informantene sier at målet med undervisningen er å knytte en mengde til brøken, dette forutsetter at elevene klarer å se brøkens mengder i forhold til hverandre. Ved å sammenlikne de ulike brøker med «benchmarks» som er kjent for elevene vil de få noen holdepunkter som de kan ta utgangspunkt i. Lamon (2005) trekker frem arbeidet med å sammenlikne brøker og arbeidet med likeverdige brøker som spesielt viktig for å skape en relativ forståelse. Den relative forståelsen av brøk er nettopp det informantene streber for at eleven skal tilegne seg.

Egenskapene til lengdemodellen gjør at den er nyttig når elevene skal introduseres for uekte brøk og blandede tall (Clarke, Roche & Mitchell, 2008). Der forskning sier at elevene bør bli introdusert for uekte brøk og blandede tall tidlig i løpet (Clarke, Roche & Mitchell, 2008), står Britt og Axel fast på at uekte brøk og blandede tall ikke skal presenteres før elevene har fått en forståelse av brøk som en abstrakt mengde. Her er det en konflikt mellom informantene og teorien. Van de Walle et al. (2014) påpeker at elevene for sjelden blir utsatt for problemer med brøk som har verdi høyere enn 1. Dette kommer tydelig frem ved at begge informantene venter med å introdusere brøk med verdi over 1 til eleven har utviklet en grunnleggende forståelse for brøk som mengder. Brøk med verdi høyere enn 1 kan gjøre forståelsen for brøkbegrepet mer allsidig da brøk med verdi høyere enn 1 også er brøk. Når elevene skal utforske uekte brøk og blandede tall er det i følge Van de Walle et al. (2014) viktig at det omtales som «brøk større enn 1», dette fordi ordet «uekte» kan skape barrierer for elevene. I stedet for å ta avstand til brøk med verdi høyere enn 1 mener Van de Walle et al. (2014) at man skal la elevene få utforske og selv komme opp med en definisjon. Informantene nevnte brøkstolper som en god måte å konkretisere brøk på. Brøkstolper trekkes frem av Van de Walle et al. (2014) som det mest effektive redskapet når eleven skal se sammenhengen mellom blandede tall og brøk høyere enn 1. Dette gjør at elevene kan ta i bruk brøkstolper som et verktøy som de allerede har erfaring med.

Brøk som divisjon

Da Axel og Britt ble spurt om de ulike aspektene ved brøk var det tre av fem aspekter som ble nevnt av begge; brøk som del av en helhet, brøk som måling og brøk som divisjon. Selv om det kan tyde på at informantene og teoretikerne har noen ulike syn om hvordan brøkundervisningen skal foregå rår det enighet mellom informantene og teoretikerne om at variasjon mellom de ulike brøkaspektene vil skape den mest fleksible forståelsen av brøk (Lamon, 2005). Både Britt og Axel bruker divisjon som innfallsport når de skal jobbe med brøk. Brøk og divisjon sitt tette slektskap blir av dem begge brukt for å få gi eleven noen assosiasjoner som kan hekte elevene på arbeidet med brøk. At det er en sammenheng mellom brøk og divisjon kan vi se i definisjonen til Birkeland et al. (2011) som påpeker at en brøk og divisjon ikke er det samme, men at brøk er svaret på divisjon. At informantene spiller på elevenes forkunnskap i divisjon er i følge Nunes (2008) fordelaktig når eleven arbeider med brøk. Clarke (2011) mener at brøkutrykkene blir mindre kompliserte dersom eleven klarer å koble sammenhengen mellom brøk og divisjon, derfor kan det være fordelaktig å utnytte elevenes kunnskap om divisjon i arbeidet med brøk. Når det gjelder de av informantenes elever som ikke klarer å se sammenhengen mellom brøk og modeller kan det i følge Clarke, Roche, Mitchell (2008) lønne seg å lage problemstillinger som oppfordrer til å dele likt. Dette kan i følge dem være nøkkelen til å få elevene til å lage egne modeller som løsningsstrategi. Axel og Britt var enige om at de ikke ønsket å skape noen faste assosiasjoner til brøkbegrepet, egne modeller kan da hjelpe elevene til å få en større forståelse av mengder. Vi kan dermed anta at et enda større fokus på å få frem de ulike aspektene ved brøk vil være lønnsomt for informantenes elever.

Konklusjon

I arbeidet med denne oppgaven har mitt mål vært å få et innblikk i hvordan man som lærer kan jobbe med å bygge forståelse for brøkbegrepet i undervisningen. Ved å intervjue to lærere på henholdsvis 4. og 5. trinn kom jeg opp med følgende forskningsspørsmål: «Hvordan kan man som lærer jobbe med å bygge forståelse for brøkbegrepet i sin undervisning?». Når jeg gjennomførte intervjuene fant jeg fort ut at brøk er et emne som mange av Axel og Britts elever hadde utfordringer med. Utfordringene i klasserommene til de to informantene består tilsynelatende av mange fellestrekk. Informantene refererer til et bredt spekter av tolkninger og misoppfatninger som er tilknyttet å forstå brøk som forholdet mellom to mengder. Roten til utfordringene er i følge informantene å forstå brøk som rasjonale tall, der teller, nevner og brøkstrek utgjør forholdet mellom to mengder.

Informantene fremhever bruk av konkreter som spesielt viktig i undervisningen når elevene skal danne en mengdeforståelse av brøkbegrepet. For å hjelpe elevene til å skape mentale representasjoner av brøken blir den sirkulære arealmodellen trukket frem av både Britt og Axel som det beste konkretiseringsredskapet. Teoretikerne Cramer & Wyberg (2009) sier at bruk av modeller som hjelpemiddel er viktig når elevene skal forstå brøkbegrepet. Men elevene vil ikke tilegnes en fleksibel forståelse av brøkbegrepet ved å ta i bruk kun en type modell. Arealmodell, mengdemodell og lengdemodell må alle inkluderes i undervisningen på grunn av at disse modellene har forskjellige svakheter og styrker. Det er da oppsiktsvekkende at mengdemodellen ikke nevnes av verken Britt eller Axel, mens lengdemodellen kun nevnes av Britt.

Noe annet som er oppsiktsvekkende er at informantene virker å konsentrere sin brøkundervising rundt brøk som del av en helhet. Brøk som del av en måling og brøk som divisjon blir også nevnt men det blir brukt for å skape variasjon rundt brøk. Lamon (2005) påpeker at elevene vil få best utbytte av variasjon mellom de ulike aspektene. Derfor er det bemerkelsesverdig at informantene kun nevner tre av fem aspekter ved brøk, der brøk som måling og brøk som divisjon tilsynelatende blir tilsidesatt for brøk som del av en helhet.

Videre i elevenes arbeid med brøk burde elevgruppa få se større variasjon av kontekster som blir presentert, dette vil få frem alle de ulike aspektene ved brøk. Elevgruppa burde også ta i bruk et større spekter av modeller, med tyngde på linjemodeller (Lamon, 2005). Videre kan elevene introduseres for uekte brøk og blandede tall, ved å benytte kunnskapen de allerede har tilegnet seg om linjemodeller. Samlet vil dette forhåpentligvis styrke elevenes forståelse av brøkbegrepet. I arbeidet med denne forskningsoppgaven er det mye som tyder på at brøk er noe mange elever har utfordringer med. Teorien bak god brøkundervisning kan tilsynelatende bli tilsidesatt i praksis, noe som er synd fordi kompleksiteten av utfordringene krever at læreren har bred kunnskap og forståelse om god brøk undervisning. Det blir derfor spesielt viktig for meg som fremtidig lærer å ha kunnskap om hvordan jeg kan håndtere utfordringene som oppstår i elevens møte med brøkbegrepet.

Litteratur

Bergsten, C., Häggström, J., Lindberg, L., & Emanuelsson, G. (1997). *Algebra för alla*. Göteborg: Nämnaren.

Birkeland, P. A., Breiteig, T., & Venheim, R. (2011). *Matematikk for lærere 1* (5 utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Brekke, Gard. (2002). Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk. Læringssenteret. Lokalisert på: http://bestilling.utdanningsdirektoratet.no/Bestillingstorg/PDF/59447_KAR_MAT_007_innmat.pdf

Bondø, A. (2010). Brøk - Er det noe problem, da?. *Tangenten*, 21(1), 35-38.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt forlag AS.

Clarke, D.M, Roche, A, Mitchell, A. (2008) Ten Practical Tips for Making Fractions Come Alive and Make Sense. *Mathematics Teaching in the Middle School,* Vol. 13, No. 7, 372- 380 Lokalisert på: https://www.jstor.org/stable/41182579?seq=1&cid=pdfreference#references_tab_contents

Clarke, D. M. (2011). Fractions: Teaching for Understanding. *Fraction as Division: The Forgotten Notion?*. 33-44. Lokalisert på: https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:TSqwb4v3hg4J:https://www.aamt.edu.au/content/download/19933/273067/file/tdt_F_clarke2.pdf+&cd=1&hl=no&ct=clnk&gl=no&client=safari

Cramer, K., & Wyberg, T. (2009). Efficacy of Different Concrete Models for Teaching the Part-Whole Construct for Fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(4), 226-257.

Hansen, H. K., Skott, J. & Jess, K. (2012). *Ypsilon- Matematikk for lærerstuderende* (3. utg.). Danmark: Roskilde Universitetsforlag

Kairavuo, K. (2010). Konkretiseirng av matematiska begrep i skolan. *Tangenten,* 21 (1), s.11-15

Kaufmann, O. T. (2010). Bruk av konkreter. *Tangenten,* 21 (1), s.23-26

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Developing Proficiency with Other Numbers. J. Kilpatrick, J. Swafford, B. Findell (Red.) *Adding it up: Helping children learn* (s.231-254). Washington, DC: National Academy Press

Lincoln, Y.S. & Cuba, E.G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Newbury park, CA: Sage Publications

Matematikk.net. (2016). Brøkregning. 2016, Hentet fra: http://matematikk.net/side/Br%C3%B8k

McIntosh, A., Settemsdal, M. R., Stedøy-Johansen, I., Arntsen, T. J., & Nasjonalt senter for matematikk i, o. (2007). *Alle teller! : håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen : kartleggingstester og veiledning om misoppfatninger og misforståelser på området : tall og tallforståelse*. Trondheim: Matematikksenteret.

Nilssen, V. (2014). *Analyse I kvalitative studier* (2.utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Nunes, T. (2008). *Understanding rational numbers.* Att erövra världen. I A. Engström (Red.) *Dokumentation av konferensen Grundläggande färdigheter i läsning, skrivning och Matematik,* (s.23-52) Linköping: Linköpings universitet.

Rognsaa, A. (2015) *Bacheloroppgaven- skriveråd og regler for utformingen.* Oslo: Universitetsforlaget

Lamon, S. J. (2005) *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2 utg.). Mahwah, N.J: Erlbaum.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i Matematikk* (MAT1-04). Lokalisert på: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Van de Walle. (2004). *Elemantary and middle school mathematics - Teaching developmentally* (5 utg.). Virginia Commonwealth University: Person Education, Inc.

Van de Walle, J. A., Karp, K., Bay-Williams, J. M., & Wray, J. (2007). *Elementary and middle school mathematics : Teaching developmentally* (6 utg.). Boston: Allyn and Bacon.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M. (2014). *Elementary and middle school mathematics : Teaching developmentally* (8 utg.). Essex: Pearson Education Limited

Vedlegg

1. Intervjuguide

Intervjuguide

- Hva oppfatter du som utfordrende i elevens arbeid med brøk?
- Hvordan forstår elevene seg på rasjonale tall?
- Hvordan jobber dere med uekte brøker og blandede tall?
- Litteratur og forskning sier at elevenes forståelse av brøkbegrepet kan styrkes gjennom variasjon mellom ulike fremstillinger eller kontekster. Vi har brøk som del, brøk som måling, brøk som divisjon, brøk som operator, brøk som forholdstall. Vektlegges dette i din undervisning? Og hvordan jobber dere med de ulike aspektene av brøk?
- Hva ønsker du at elevene sitter igjen med etter at brøk som emne er ferdig dette skoleåret?