NTNU
Det skapende universitet

# Overganger mellom matematiske representasjoner

En studie om hvordan 1T-elever gjennomfører overgangen fra situasjon til grafiske og algebraiske representasjoner av polynomer.

**Steinar Thorud**

Lektorutdanning med master i realfag
Innlevert: juni 2014
Hovedveileder: Frode Rønning, MATH
Medveileder: Heidi Strømskog Måsøval, HiST

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

## Forord

Denne masterstudien marker avslutningen på min lektorutdannelse i realfag ved Norges teknisk-naturvitenskaplige Universitet (NTNU). Denne studien ble gjennomført våren 2014. Arbeidet med studien har vært både morsomt og lærerikt, men også til tider veldig utfordrende. Jeg vil derfor benytte anledningen til å takke alle som har støttet og veiledet meg underveis i dette arbeidet.

Jeg vil først og fremst takke mine veiledere Frode Rønning og Heidi Strømskag Måsøval. Dere har vært utrolig flinke til å sette dere inn i min studie og å komme med konkrete tilbakemeldinger på arbeidet mitt underveis. Jeg vil også takke dere for deres oppmuntrende ord og deres smittende humør i tider der arbeidet har vært tøft.

Videre vil jeg takke alle mine medstudenter på matteland. Dere har sørget for et godt og konstruktivt arbeidsmiljø. Men dere har også bidratt til et godt sosialt miljø i avbrekkene fra studiene. Kortspill og bordtennis blir aldri det samme uten dere.

Til slutt vil jeg takke min familie, mine venner og ikke minst Johanne for at dere har støttet meg gjennom masterarbeidet.

## Sammendrag

Denne studien bygger på et sosiokulturelt læringssyn. Fokuset for studien har ligget på hvordan 1T-elever gjennomfører overgangen fra situasjon, som er beskrevet ved naturlig språk, til algebraiske og grafiske representasjoner av polynomer. Hensikten med denne oppgaven er å få innsikt i hvordan elevene bruker matematisk kunnskap i arbeidet med overgangene, og å se nærmere på hvordan elever verifiserer at overgangene deres har blitt korrekt utført. En slik innsikt kan forhåpentligvis gjøre det lettere for lærere å tilrettelegge undervisningen, slik at elevene får en kunnskap om de matematiske representasjonene og en forståelse av sammenhengen imellom dem.

Studien bygger på en kvalitativ metode, hvor datainnsamlingen er basert på observasjoner og intervjuer. Utvalget i studien er en gruppe på fem elever fra matematikkurset 1T. I observasjonsdelen av datainnsamlingen, som ble gjort ved hjelp videoopptaker, ble utvalget delt inn i to mindre elevgrupper. Begge gruppene gjennomførte en elevundersøkelse som bestod av fire oppgaver som omhandlet hverdagssituasjoner representert gjennom naturlig språk. Målet med oppgavene var å la elevene gjennomføre overganger til både grafiske og algebraiske representasjoner av polynomer. Den andre delen av datainnsamlingen bestod av intervjuer med hver enkelt elev og foregikk dagen etter observasjonen. Her ble det fokusert på oppgavene fra elevarbeidet og egenskaper ved første- og andregradspolynomer. Intervjuene ble tatt opp med lydopptaker. I analysen har det blir brukt den konstant komparative analysemetode, hvor datamaterialet resulterer i et sett med kategorier som har til hensikt å tydeliggjøre funnene i studien.

Resultatene fra studien antyder at 1T-elever kan ha vanskeligheter med å tolke enkelte egenskaper ved polynomer representert ved et naturlig språk. Studien viser også at elever mestrer overgangen fra situasjon til lineære grafer og at det dessuten finnes det en variasjon av elevers foretrukne fremgangsmåter ved denne overgangen. Videre viser studien tegn til at overgangen mellom tekst og algebraiske representasjoner er utfordrende for 1T-elever. Avslutningsvis viser studien at 1T-elever kan ha billedlige tolkninger av grafiske representasjoner av andregradspolynomer som omhandler hverdagssituasjoner.

# Summary

The present thesis has been derived from a sociocultural learing perspective. It focuses on how stutents who participates in the mathematical cource 1T[1] in Norwegian High School are conducting the translation process between multiple mathematical representations of polynomials. The purpose of the presented study was to gain insight into how they use their mathematical knowledge in the translation process and how they verify that the translations are correct. Such an insight would perhaps make it easier for teachers in their work to facilitate the students learning process within this area of mathematics.

The chosen methodology approach of the study is qualitative, where the data collection is carried out by use of observations and interviews. The total sample size of this study is a group of five students from the 1T cource. In the observation part of the data collection, the students where divided into two smaller groups. Both groups conducted a student survey consisting of four problems involving everyday situations in terms of natural language. The aim of the problems was to let the students make translations to both graphical and algebraic representations of polynomials. The observations of the students work was video recorded. The second part of the data collection involved interviews with each student focusing on the tasks and the features of both first and second order polynomials. These interviews was recorded by a sound recorder. The total amount of recordings was then transcribed and processed according to the principles of «grounded theory», which resultet in categories that emphasize the findings.

The results of the study suggest that 1T students may have difficulty interpreting certain properties of polynomials represented by a natural language. The study also shows that students master the translation from situation to linear graphs. Furthermore, the students shows a variety of preffered methods for translating between these representations. The study indicates that 1T students may have difficulties with translating from natural language to algebraic representations. Finally, the study shows signs of 1T students errors with respect to interpreting and contructing graphs of quadratic polynomials that represents everyday situations.

[1] «1T» is a thoretical cource in the first year of Norweagian high school mathematics

# Innhold

# 1 Innledning

## 1.1 Bakgrunn for studien

Gjennom mange år, både som elev og lektorstudent, har jeg bitt meg merke i hvor vanskelig det kan være for elever å transformere informasjon mellom de ulike matematiske representasjonssystemene, og da spesielt transformasjonen fra et naturlig språk. I tekstoppgaver kan det ofte være mye informasjon som eleven må bearbeide, tolke og strukturere. Oppgavene skal som oftest besvares ved en annen matematisk representasjon som for eksempel et funksjonsuttrykk, en graf eller en tabell. Det stilles derfor ikke kun krav til at eleven må forstå essensen i oppgaven, men også et krav om eleven må kunne strukturere og transformere informasjonen mellom flere matematiske representasjonssystemer.

I de didaktiske matematikkemnene jeg har gjennomført i forkant av masterstudien har det både blitt fokusert på hvordan man kan undervise i matematikk og hvordan elever tar til seg matematisk kunnskap. Vi har blant annet gjort epistemologiske analyser av hvilke bakgrunnskunnskaper elever bør ha ved introduksjon av nye matematiske begreper og temaer. Dette har vært svært sentralt for planleggingen av denne masterstudien. For å kunne forstå elevenes evne til å gjøre transformasjonen fra en matematisk representasjon til en annen, mener jeg det også er viktig å se på hvordan elevene bruker deres opplærte kunnskap og forståelse om begrepene som inngår i de ulike representasjonene.

Hensikten med denne studien har dermed vært å få en innsikt i hvordan elever ved videregående skole forstår tekstoppgaver og gjennomfører overgangen til andre representasjonssystemer, nærmere bestemt overgangen grafiske og algebraiske representasjoner av funksjoner. Dette er det flere grunner til. For det første er det en vesentlig del av opplæringen i både ungdomsskolen og videregående skole som omhandler funksjoner. Som kommende lærer mener jeg det derfor er viktig å ha innsikt i for eksempel hvilke utfordringer elever møter i arbeidet med overganger mellom representasjoner innenfor dette temaet. Dessuten viser studier at selv om elever kan ha god forståelse av ulike representasjonssystemer av funksjoner, kan de ha vanskeligheter med å utføre overgangen i mellom dem (Adu-Gyamfi Stiff & Bossé, 2012). I tilknytning til funksjonsbegrepet finnes det også en stor variasjon av representasjonssystemer, hvor hver enkelt representasjon formidler spesifikk informasjon. De kan gi informasjon rundt spesielle aspekter ved begrepet, uten å være i stand til å beskrive funksjonen helhetlig. Variasjonen av representasjoner innenfor et tema vil derimot komplementere hverandre (Gagatsis & Shiakalli, 2004). For en matematikkelev er det derfor viktig å kunne gjøre overganger mellom de ulike representasjonssystemene for å kunne beskrive og forstå funksjonsbegrepet på en helhetlig måte (Adu-Gyamfi et al., 2012). Dubinsky (1993) presiserer også i sine studier viktigheten med det å ha en forståelse av funksjoner og dens bruksområde. Han sier «it can be argued that functions form the single most important idea in all mathematics, at least in terms of understanding the subject as well as for using it» (Dubinsky, 1993, s. 527).

## 1.2 Presentasjon og redegjørelse av problemstilling

Som jeg nevnte i kapittelet over er hensikten med studien å se på hvordan elever ved videregående skole forstår tekstoppgaver, og gjennomfører overgangen til andre representasjonssystemer. Jeg har derfor utarbeidet følgende problemstilling for studien:

> «Hvordan gjennomfører 1T-elever overgangen fra situasjon til grafiske og algebraiske representasjoner av polynomer?»

Det er viktig å presisere noen elementer ved formuleringen av denne problemstillingen. For det første er det viktig å få presisert hva jeg mener med *gjennomføringen* av overgangene. Denne studien fokuserer på hvordan elever bruker deres matematiske kunnskap i tolkningen av semiotiske representasjoner, og overgangen mellom dem. Den fokuserer også på hvordan elevene argumenterer og verifiserer at overgangene har blitt korrekt utført. Videre vil elevenes løsningsstrategier også bli presentert, men denne studien går ikke i dybden på dette aspektet av overgangsprosessen.

Det er også viktig å presisere formuleringen av representasjonen situasjon. Dette innebærer i denne studien hverdagssituasjoner som hovedsakelig er formulert gjennom naturlig språk. I oppgavene i elevundersøkelsen tilknyttet denne studien har det blitt gitt rene tekstoppgaver, med unntak av en oppgave som også inneholdt et funksjonsuttrykk. Det er derfor også viktig å presisere formuleringen «fra situasjon til algebraiske- og grafiske representasjoner». Jeg mener at overgangsprosessen mellom to bestemte matematiske representasjoner kan være kompleks og at «avstanden» mellom de respektive representasjonene kan variere. Altså at overgangen fra situasjon til grafiske og algebraiske representasjoner kan innebære å måtte gå via andre representasjonssystemer på veien til den endelige representasjonen i besvarelsen. En slik formulering av problemstillingen vil derfor indirekte innebære at jeg også tar for meg overgangen til og fra for eksempel tabeller, grafer og algebraiske uttrykk.

Til slutt vil jeg presisere formuleringen av polynomer. Dette dreier seg polynomer av første og andre grad, og i hovedsak om førstegradspolynomer. Dette har jeg gjort både for å avgrense omfanget til oppgaven, men også av hensyn til at elevene i undersøkelsen ikke har mye erfaring med polynomer av høyere grad.

Jeg har valgt å bygge studien på et sosiokulturelt læringssyn og basere den på en kvalitativ undersøkelse der utvalget består av fem elever fra en førsteklasse i matematikkfaget 1T på videregående skole. Jeg valgte denne metodologiske tilnærmingen fordi jeg ønsket å se hvordan elevene uttrykker og kommuniserer matematisk kunnskap i gjennomføringen av overgangene.

For å kunne besvare problemstillingen på en helhetlig måte vil jeg i teoridelen beskrive ulike aspekter ved matematiske representasjoner og overgangen mellom dem. Jeg trekker inn Vygotsky (1987) sin teori om hverdagsbegreper og vitenskapelige begreper, og (Steinbring, 2006) sin teori om relasjonene mellom matematiske tegn og begreper, for å beskrive elevenes formuleringer og forståelse av sentrale begreper. Videre vil Duval (2006) sin teori om matematiske representasjonssystemer, og overgangen mellom disse, være svært relevant for studien. Det samme gjelder Adu-Gyamfi et al. (2012) sin teori om hvilke bekreftelser elever bør gjøre underveis i overgangsprosessen for å kunne utføre korrekte transformasjoner. Denne delen vil også danne et solid grunnlag for studiens analyse og diskusjon.

Mange internasjonale forskere bruker det engelske ordet «translation» for å beskrive overgangene. På norsk synes jeg ikke dette er en passende beskrivelse av denne prosessen, da jeg ser på overgangsprosessen som noe mer enn kun en oversettelse. I denne oppgaven kommer jeg derfor til å bruke ordet transformasjon for å beskrive handlingene som foregår i overgangsprosessen.

## 1.3 Oppgavens oppbygning

Masteroppgaven består i alt av seks hovedkapitler. Innledningsvis har jeg presentert bakgrunnen for studien min. Jeg har også kommet med en redegjørelse av formålet med studien i tillegg til å definere en problemstilling. I neste kapittel følger det teoretiske rammeverket i oppgaven, som består av seks deler. Her vil jeg først beskrive det læringsteoretiske perspektivet som ligger til grunn for studien. Videre presenterer jeg teorier som omhandler ulike aspekter ved overgangen mellom matematiske representasjoner. Dette innebærer Steinbring (2006) sin teori om å gi mening til matematiske tegn, Duval (2006) sin teori om semiotiske representasjoner, og overgangen mellom disse, og Adu-Gyamfi et al. (2012) sin teori som nødvendige bekreftelser som bør finne sted i overgangsprosessen. Som siste del av teorikapittelet vil jeg presentere andre relevante forskningsresultater, og dessuten gi en oversikt over hvordan sentrale matematiske begreper innenfor temaet funksjoner er definert og beskrevet.

I kapittel 3 legger jeg til grunn for metodologien i studien. I dette kapittelet presenterer jeg hvilke forskningsmetoder studien er basert på, hvordan gjennomføringen av datainnsamlingen foregikk, og hvilke analysemetoder som har blitt brukt for å analysere datamaterialet. Videre vil analysen av resultatene fra studien bli presentert i kapittel 4, mens jeg i kapittel 5 diskuterer de viktigste funnene i studien i tillegg til studiens gyldighet og pålitelighet. Helt avslutningsvis vil jeg vurdere hvilke muligheter denne studien gir for videre forskning.

# 2 Teoretisk rammeverk

## 2.1 Sosiokulturell læringsteori

Jeg bruker i denne studien et sosiokulturelt syn på læring. I et sosiokulturelt syn på utvikling og læring er mestring av språklige og intellektuelle redskaper et sentralt innslag (Säljö, 2001). Kommunikasjon blir sett på som ett av de viktigste elementene i den sosiale interaksjonen som individet tar del i innenfor et sosiokulturelt læringssyn. Det er gjennom språket individet har mulighet til å gi meninger, erfaringer og tanker. Bruken av språk blir derfor fremhevet av Vygotsky som en svært viktig del av læring (Säljö, 2001). Innenfor Vygotsky`s syn på læring og utvikling finnes det tre sentrale teoretiske begreper (Daniels, 2007). Dette gjelder den generelle loven om kulturell utvikling, proksimal utviklingssone og tilslutt; begrepsdannelsen som et resultat av interaksjonen mellom spontane hverdagsbegreper og vitenskapelige begreper.

### 2.1.1 Hverdagsbegreper og vitenskapelige begreper

Ifølge (Vygotsky, 1987) er læringen av et faglig innhold assosiert med to forskjellige begrepsmessige prosesser. Det ene er dannelsen av de spontane hverdagsbegrepene og den andre er dannelsen av de vitenskapelige begrepene. Barnas anskaffelse av hverdagsbegreper skjer utenfor undervisningskonteksten og dannes gjerne ved at man identifiserer vanlige kjennetegn ved empiriske hendelser eller objekter. De er usystematiske og dessuten ofte ukorrekte i den grad at de ofte er basert på enkelte observerte egenskaper, mens begrepet i seg selv også krever andre egenskaper for å være fullstendig. Et eksempel på dette kan være utsagnet om at «alle funksjoner er rette linjer». Denne oppfatningen kan eleven ha etablert gjennom erfaring fra tidligere observasjoner av funksjoner, men den stemmer ikke overens med egenskapene til for eksempel en andregradsfunksjon. Vitenskapelige begreper derimot, representerer en generalisering av kollektive erfaringer og de er fastsatte innenfor vitenskapen. For eleven vil dannelsen av vitenskapelige begreper skje innenfor en undervisningskontekst gjennom opplæring fra lærer. I følge Daniels (2001) er også dette helt fundamentalt. Innenfor vitenskapen vil disse begrepene tilsvare en akademisk, strukturert argumentering (Vygotsky, 1987).

Så hvordan er forholdet mellom hverdagsbegrepene og de vitenskapelige begrepene? Det er ifølge Vygotsky en sammenflettet modell som forbinder hverdagsbegrepene med de vitenskapelige begrepene. Han mener begrepsdannelsen utvikles simultant fra to sider. Mens viklingen av vitenskapelige begrep begynner med den verbale definisjon, som en del av et organisert system. Deretter blir begrepene brukt ved fenomener som begrepet representerer. Altså fra det generelle til det spesielle. Hverdagslige begrep derimot har ofte i begynnelsen ikke tilhørighet i noe fast system. De vil deretter kunne øke i abstraksjonsnivå eller gå mot det generaliserte. Det er ifølge Vygotsky (1987) viktig at barnet utvikler en mengde med spontane hverdagsbegreper før man kan lære de respektive vitenskapelige begrepene. Læring av vitenskapelige begreper vil ha en tilbakevirkende kraft på hverdagsbegrepene ved at man da i større grad klarer å strukturere og systematisere kunnskapen. Det vil også bidra til en økt bevissthet i elevens tenkning (Vygotsky, 1987).

## 2.2 Å gi mening til matematiske tegn

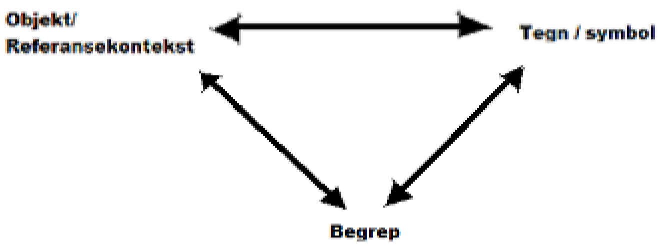
I opplæringen av matematikk står de matematiske tegnene helt sentralt. Matematiske tegn blir sett på som redskaper for å beskrive og kommunisere matematisk kunnskap, og for å generalisere det. Men for å kunne karakterisere rollen til matematiske tegn, eller semiotiske representasjoner, må man ifølge  Steinbring (2006) først ta for seg to funksjoner som tegnet har i matematisk læring; en semiotisk funksjon og en epistemologisk funksjon. Den semiotiske funksjonen er at tegnet «står for noe annet». Det Steinbring (2006) mener med «noe annet» er en referansekontekst eller et referanseobjekt til tegnet. Denne sammenhengen mellom tegn og objekt illustreres i figur 2.1.


**Figur 2.1: Relasjonen mellom objekt og tegn. Hentet fra Steinbring (2006, s. 135)**

Som vi kan se av figuren peker pilen mellom tegnet og objektet begge veier. Det vil altså si at objektet er en referanse til tegnet, men også motsatt. For eksempel kan brøken $1/2$ være et referanseobjekt til desimaltallet 0,5, men det samme gjelder motsatt ved at desimaltallet står som referansekontekst til brøken.

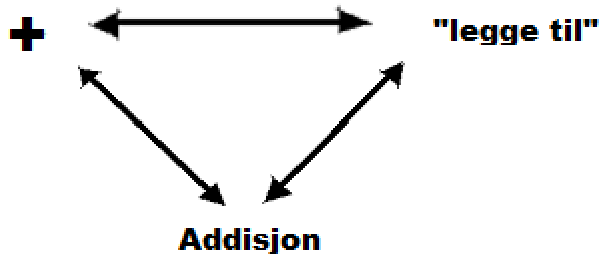
Det som menes med tegnets epistemologiske funksjonen, er ifølge Steinbring (2006) at tegnet inneholder kunnskap om det det står for. Nå man er i læringsfasen av nye tegn og begreper trenger ikke tegnene i seg selv å ha noen betydning. «These signs do not have a meaning of their own, this has to be produced by the learner by means of establishing a mediation to suitable reference contexts» (Steinbring, 2006, s. 135). For å ta eksempelet med brøktegnet og desimaltallet igjen, så kan en elev lære at 0,5 er det samme som «en halv» uten at det gir eleven noe mer forståelse av sammenhengen. Man må derfor selv skape mening til tegnene ved å forstå hva som medieres imellom dem. Det er først når eleven forstår sammenhengen, altså hva som medieres mellom tegnet og referanseobjektet, at den utvikler kunnskap.

Sammenhengen mellom matematiske tegn, objekt og medieringen imellom dem kan illustreres ved hjelp av den epistemologiske trekanten (Steinbring, 2006). Den er vist i figur 2.2.




**Figur 2.2: Den epistemologiske trekanten. Hentet fra Steinbring (2006, s. 135)**

Av figuren (Figur 2.2) ser vi at det matematiske begrepet medieres mellom «tegn/symbol» og «objekt/referansekontekst». Steinbring (2006) legger til at den epistemologiske trekanten kan brukes til å analysere etablering og utvikling av matematisk kunnskap i sosiale settinger. Det betyr at trekanten kan være til hjelp når man ser på hvilke sammenhenger og strukturer som konstrueres av elever i samhandling med andre. Videre uttrykker (Steinbring, 2006) at hjørnene i trekanten ikke kan bli gitt eksplisitt da både ny og gammel kunnskap hos eleven kan påvirke medieringen. Medieringen vil også kunne variere fra person til person. Dette betyr at trekanten er fleksibel og at hjørnene utgjør et gjensidig system av elementer. Jeg vil ta et enkelt eksempel med en tekstoppgave der elevene må avgjøre hva som medieres gjennom begreper i teksten: «Eva har fire røde epler i handlekurven også legger hun til to grønne epler. Hvor mange epler kjøper Eva til sammen?» I utregningen av slike tekstoppgaver må elevene vite hva slags tegn som står i referanse til ordene «legge til», og hvilken regneoperasjon som medieres mellom disse. Dette kan illustreres med den epistemologiske trekanten.




**Figur 2.3. Eksempel på hvordan addisjon gir mening mellom ordene «legge til og symbolet «pluss»**

## 2.3 Semiotiske representasjoner og overgangen i mellom dem

Ifølge Duval (2006) er representasjoner og visualisering kjernen til forståelse i matematikk. Han trekker her fram viktigheten av å kunne mestre ulike representasjoner av begrep og overgangen mellom disse. Duval (2006) beskriver kort matematiske representasjoner som «noe som står for noe annet». Denne beskrivelsen kjenner vi igjen fra Steinbring (2006) sin generelle beskrivelse av tegn, som jeg presenterte i forrige delkapittel. Men til forskjell fra Steinbring (2006), som fokuserer på hvordan man gir mening til tegn, legger Duval (2006) vekt på det å gjøre endringer innenfor samme representasjonssystem og det å «bevege» seg mellom representasjonssystemer

I forhold til fag som Fysikk, biologi og kjemi er systemer av semiotiske representasjoner i matematikk spesielt viktige. I matematikk har man nemlig ikke har den samme tilgangen til objekter som de nevnte fagområdene og man er derfor simpelthen nødt til uttrykke seg gjennom semiotiske representasjoner. I de nevnte fagområdene kan semiotiske representasjoner være bilder eller forklaringer om fenomener i den fysiske verdenen, mens det ifølge Duval (2006) ikke finnes slike i matematikken. For å få tilgang til matematikken er man derfor nødt til å bruke tegn og semiotiske representasjoner.

Matematikk er det området hvor det er størst spenn av semiotiske representasjonssystemer siden det omfatter både naturlig språk, som ikke er særegent for matematikk, og representasjonssystemer som er mer typiske for matematikk, som for eksempel notasjoner innen algebra  (Duval, 2006). Når man skal klassifisere semiotiske representasjonssystemer eller «registre», er det ifølge Duval (2006) vanlig å skille mellom språk (både naturlig og symbolsk) og figurer.  Ifølge Duval (2006) er det ikke alle semiotiske systemer som er registre, kun de som tillater en transformasjon mellom representasjoner. Innenfor emnet *funksjoner* kan eksempler på slike registre være grafer, likninger og funksjonsuttrykk og tabeller (Janvier, 1987).

Duval (2006) benytter seg av to begreper når han snakker om transformasjon i og mellom registre. Det er behandling og omdannelse (Duval, 2006). Behandlinger transformasjoner av representasjoner som foregår innenfor samme representasjonssystem. Innenfor et algebraisk representasjonssystem kan dette for eksempel være å løse ut en ligning eller et ligningssystem. I geometrien kan dette bety å rotere, speile eller manipulere figurer. Behandlingen avhenger ifølge Duval (2006) i hovedsak av de mulighetene av semiotiske transformasjoner som er spesifikke for det aktuelle registeret. Det å faktorisere et funksjonsuttrykk kan for eksempel være en mulighet som er spesifikk for algebraiske representasjonssystemer.

Omdannelse er transformasjoner der man bytter representasjonssystem, men bevarer referansen til objektet. Et eksempel på dette kan være å gå fra en algebraisk representasjon i form av et funksjonsuttrykk til en grafisk representasjon. Ifølge Duval (2006) er omdannelse en mer kompleks form for transformasjon enn det behandling er nettopp fordi ethvert bytte av register krever at begge registre har samme referanseobjekt. Det kan dessuten være «lang avstand» mellom registrene, altså at innholdet i registrene har lite til felles. Ifølge Janvier (1987) er dessuten omdannelser retningsbestemte. Det vil si at det spiller en rolle hvilken retning man utfører overgangene. Han mener blant annet at prosessen det innebærer å transformere informasjon fra en graf til et funksjonsuttrykk er forskjellig fra prosessen det er å gå motsatt vei (Janvier, 1987). Logiske analyser av disse to prosessene antyder at det er vanskeligere å omgjøre en grafisk representasjonen til en algebraisk representasjon, enn motsatt. Det er fordi denne prosessen innebærer at man må ha evne til å gjenkjenne mønstre, mens det å tegne en graf ut ifra et funksjonsuttrykk kan gjøres steg for steg ved å generere ordnede tallpar, plotte de inn i et kartesisk koordinatsystem for så å knytte grafen sammen ved hjelp av en linjer gjennom koordinatene.

Duval (2006) mener at omdannelsen for ofte blir sett på som en oversettelse eller «koding». I enkelte tilfeller kan omdannelsen virke åpenbar ved at det er en én-til-én relasjon mellom komponentene i start- og målrepresentasjonen. Denne formen for omdannelse kaller Duval (2006) for en kongruent omdannelse (vises til venstre i Tabell 2.1). Her mener han at en direkte oversettelse av startrepresentasjonen vil kunne bevare de riktige komponentene i målrepresentasjonen. I andre tilfeller er det ikke noen direkte relasjon mellom komponentene i start- og målrepresentasjonen. En slik omdannelse vil ifølge Duval (2006) karakteriseres som ikke-kongruent (vises til venstre i Tabell 2.1). Her vil en oversettelse av være villedende da teksten ikke lar seg oversette direkte (Duval, 2006).

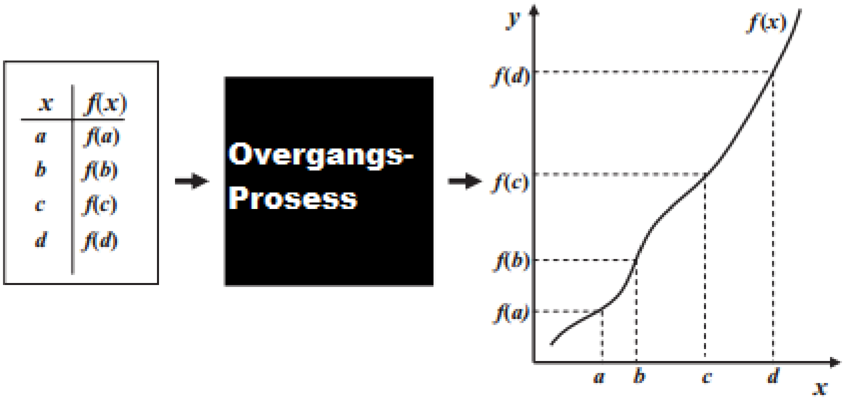
**Tabell 2.1. Oversikt over en kongruent og en ikke-kongruent omdannelse**

| | | |
|---|---|---|
| Naturlig språk<br>⬇<br>Symbol | Fem pluss tre er lik åtte<br>↓ ↓ ↓ ↓ ↙<br>5 + 3 = 8 | Fem er tre mindre enn åtte<br><br>8 = 5 + 3 |
| | Kongruent omdannelse | Ikke-kongruent omdannelse |

## 2.3.1 Overgangsprosess

Begrepene overgang og overgangsprosess henviser ifølge Adu-Gyamfi et al. (2012) til de kognitive aktiviteter som underligger det å omgjøre informasjon fra en matematisk representasjon til en annen. Det er verdt å la merke seg at det ikke er selve representasjonene som overføres, men idéene og begrepene som er uttrykt gjennom dem. Dermed vil en overgang alltid involvere to representasjoner, en gitt «startrepresentasjon» og en spesifikk «målrepresentasjon». Startrepresentasjonen vil her være den opprinnelige representasjonen som er utgangspunktet for overgangen, mens målrepresentasjonen er den matematiske representasjonen hvor overgangen ender opp i. En overgang er vellykket dersom elementene eller begrepene i «startrepresentasjonen» blir vel formulert gjennom strukturene til «målrepresentasjonen». Det å transformere en funksjon, uttrykt gjennom en tabell og representere den algebraisk, som en avhengig relasjon er et eksempel på en slik prosess.

I følge Adu-Gyamfi et al. (2012) har tidligere forskning gitt et lite helthetlig bilde av slike overgangsprosesser. De fleste studier har betraktet overgangsprosessen som en «svart boks» (se Figur 2.4) der elevenes ulike evner til å transformere informasjon er for dårlig definert. De mener at en slik forenklet tilnærming til å forstå overgangsprosessen en «rett/galt-karakterisering» der overgangene enten blir utført korrekt eller ukorrekt.




**Figur 2.4. «svart-boks» modellen for overgangsprosessen(Adu-Gyamfi et al., 2012, s. 160).**

Som vi ser av Figur 2.4 forteller en slik svart boks lite om hva som skjer imellom start- og målrepresentasjonen. Av den grunn vil feil tilknyttet overganger antas å være gjort fordi den som utfører overgangene enten hadde en misoppfatning av fagstoffet som er relatert til start- eller målrepresentasjonen, eller at man gjort en triviell feil (Adu-Gyamfi et al., 2012).

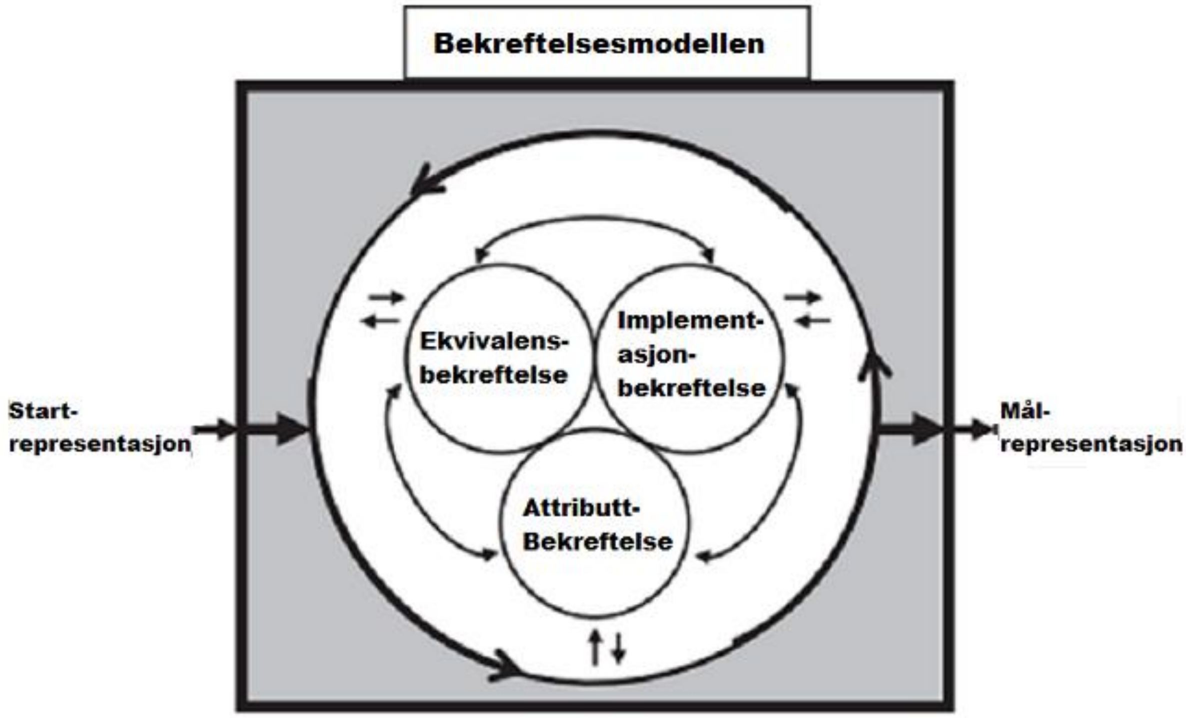
Adu-Gyamfi et al. (2012) mener at en «svart boks-tilnærming» på overgangsprosessen ikke er dekkende nok for å kartlegge elevenes feil og vanskeligheter i gjennomføringen av overganger mellom matematiske representasjoner. De har derfor utviklet en modell som gjør det mulig å forklare og avdekke elevenes feil og vanskeligheter i overgangsprosessen. Den modellen kalles Bekreftelsesmodellen[2] og vil bli presentert i neste delkapittel (Adu-Gyamfi et al., 2012).

### 2.3.2 Overgangsbekreftelse-modellen

Bekreftelsesmodellen (se Figur 2.5) ble utviklet for å kunne forklare elevenes handlinger tilknyttet overganger fra en matematisk representasjon til en annen. Adu-Gyamfi et al. (2012) mener det dessuten er viktig å kunne bestemme om hvorvidt overgangen *fra* en representasjon

[2] Min oversettelse av translation-verifcation model

er vanskeligere enn fra andre, og hvorvidt overgangen *til* enkelte representasjoner er vanskeligere enn andre.




**Figur 2.5. Bekreftelsesmodellen. Hentet fra Adu-Gyamfi et al. (2012, s. 161)**

Som vi ser av Figur 2.5 består bekreftelsesmodellen av tre sentrale begreper, nemlig; Implementasjonsbekreftelse, attributtbekreftelse og ekvivalensbekreftelse.[3] Disse tre begrepene eller handlingene henger sammen og kan ifølge (Adu-Gyamfi et al., 2012) utføres i en tilfeldig rekkefølge. Selv om det er mulig å gjennomføre en korrekt overgang uten å være oppmerksom på disse handlingene, mener Adu-Gyamfi et al. (2012) at det er viktig å bekrefte disse handlingene for å unngå feil i overgangen mellom matematiske representasjoner (Adu-Gyamfi et al., 2012). De ulike begrepene kan beskrives som følger:

*Implementasjonsbekreftelse*

I denne delen av overgangsprosessen gir man en bekreftelse på at algoritmen eller steg-for-steg metoden, som blir brukt for å avbilde elementer, begreper eller ideer fra startrepresentasjonen til målrepresentasjonen har blitt riktig utført. I enhver overgang mellom matematiske

[3] Dette er min oversettelse av begrepene implementation verification, attribute verification og equivalence verification

representasjoner må elever avbilde elementer i startrepresentasjonen til elementer i målrepresentasjonen. I noen tilfeller mener Adu-Gyamfi et al. (2012) at dette kan gjøres prosedyremessig uten at det blir gitt så mye oppmerksomhet til utførelsene av stegene overgangen. Et eksempel på dette kan være når elevene transformerer ordnede tallpar fra en tabell til et koordinatsystem. I en slik situasjon kan det være at elevene ikke tenker på entydighet som et krav til funksjonen. Altså at en x-verdi ikke kan gi to y-verdier. Dermed avhenger prosedyrene og elevens handlinger av det matematiske innholdet og derfor må man bekrefte at implementeringene har blitt riktig gjennomført. En oversikt over andre eksempler på implementasjonsbekreftelse for ulike transformasjoner gis i Figur 2.6 under.

**Handlinger og prosedyrer i overgangen**

| Til / Fra | Tabell | Graf | Symbolsk |
|---|---|---|---|
| **Tabell** | | Plotte koordinater | Kurvetilpasning |
| **Graf** | Avlese ordnede tallpar | | Kurvetilpasning |
| **Symbolsk** | Utregning av ordnede tallpar | Skissere algebraisk informasjon | |

**Figur 2.6 viser eksempler på implementasjonsbekreftelser. Hentet fra Adu-Gyamfi et al. (2012, s. 162)**

*Attributtbekreftelse*

Med attributtbekreftelse menes at man gir bekreftelse på at det matematiske innholdet i startrepresentasjonen er bevart i målrepresentasjonen. Det er derfor viktig at elevene klarer å identifisere og forstå egenskapene til de respektive representasjonene for å kunne utføre en korrekt transformasjon. I denne delen av overgangsprosessen sier man gjerne at man «ser på startrepresentasjonen fra målrepresentasjonens øyne» I overgangen fra en tabell til en algebraisk representasjon kan dette for eksempel være å bekrefte at vekstfarten er bevart. For å kunne gjøre dette er elevene avhengige av å forstå hvordan man skal bruke dataene i tabellen (startrepresentasjonen), men også hvordan man representerer vekstfarten i funksjonsuttrykket.

*Ekvivalensbekreftelse*

Denne delen av fasen handler om å bekrefte at både start og målrepresentasjonen formidler den samme informasjonen. Det vil si at eleven må kontrollere at alle egenskapene til både start- og målrepresentasjonen er transformert i form av å bevare matematisk mening. Adu-Gyamfi et al.

(2012) hevder at det kan være lett å forveksle ekvivalensbekreftelse med attributtbekreftelse siden de begge handler om å bevare matematiske egenskaper under transformasjonen. De forklarer allikevel forskjellen med at attributtbekreftelse sertifiserer at begrepene i startrepresentasjonen er riktig transformert til målrepresentasjonen, mens ekvivalensbekreftelse bekrefter at strukturene og begrepene, som ikke er eksplisitt er gitt i startrepresentasjonen, allikevel er bevart i målrepresentasjonen.

## 2.3.2 Vanlige feil knyttet til overgangsprosessen

Adu-Gyamfi et al. (2012) hevder at det kan oppstå tre typer feil i overgangen mellom matematiske representasjoner. Her vil jeg presentere de ulike typene feil slik Adu-Gyamfi et al. (2012) definerer de. Feiltypene har fått navnene implementasjonsfeil, tolkningsfeil og bevaringsfeil[4].

*Implementasjonsfeil* skjer vanligvis når et steg i algoritmen er ukorrekt utført. Denne typen feil blir gjerne sett på som feil ved beregningene, men den kan også oppstå ved at man for eksempel forveksler x- og y-koordinatene i et kartesisk koordinatsystem. Den andre typen feil er det (Adu-Gyamfi et al., 2012) kaller *tolkningsfeil*. Denne typen feil innebærer at elevene tolker, karakteriserer eller eksemplifiserer egenskapene til start- eller målrepresentasjonen på en ukorrekt måte. En vanlig måte å beskrive tolkningsfeilen på er at eleven ikke forstår hvordan han skal anvende eller tolke egenskapen» som definerer start- eller målrepresentasjonen. Slike typer feil kan oppstå hvor som helst i overgangsprosessen. Ofte bruker elever en overgangsrepresentasjon for å komme fram til løsningen. En tolkningsfeil kan derfor også oppstå ved anvendelsen av denne representasjonen. Den siste typen feil kan oppstå under transformasjonen mellom to matematiske representasjoner er *bevaringsfeil*. Det går ut på at man lykkes i å bevare enkelte egenskaper fra startrepresentasjonen i målrepresentasjon, men feiler i å gjenkjenne andre viktige egenskaper. Dette skjer som oftest ved at viktige egenskaper ikke blir identifisert i startrepresentasjonen. Et eksempel på dette kan være at eleven har klart å transformere et algebraisk funksjonsuttrykk til en graf gjennom å plotte inn enkelte funksjonsverdier for uttrykket og deretter tegnet en korrekt graf imellom dem. Det eleven har feilet på kan da være punkter på grafen der han ikke har regnet ut funksjonsverdien. Grafen kan

[4] Min oversettelse av begrepene implementation error, interpretation error og preservation error

vise at funksjonen skjærer x-aksen i et gitt punkt, mens den ifølge funksjonsuttrykket vil skjære x-aksen i et annet punkt.

## 2.4 Relaterte forskningsresultater

### 2.4.1 Overgang fra tekstoppgaver

Mange elever vil kanskje hevde at tekstoppgaver innenfor algebra og aritmetikk er vanskelige å løse, men det er ikke bare elevene selv som har den oppfatningen (Koedinger & Nathan, 2004). Det er derimot en felles oppfatning som støttes av folk generelt, lærere, lærebokforfattere, forskere innenfor matematisk utdanning osv. (Koedinger & Nathan, 2004). Blant annet har Nathan Long og Alibali (2002) i deres studier om lærebøker i skolen, sett at i de aller fleste tilfeller ved introduksjon av et nytt tema i boken, gis det kun oppgaver med symbolske representasjoner. Tekstoppgaver derimot blir nesten utelukkende gitt i slutten av delkapitlene og blir ofte merket som utfordrende oppgaver. I en annen studie av Nathan og Koedinger (2000) kom det fram at de fleste lærere stiller seg bak samme oppfatningen som lærebokforfattere ved at tekstoppgaver bør undervises etter at elevene mestrer tilsvarende oppgaver som blir presentert som ligninger eller funksjonsuttrykk.

Så hvorfor blir tekstoppgaver sett på som utfordrende? Ifølge Koedinger og Nathan (2004) vil problemløseren ofte sammenfatte en liten bit eller setning av oppgaveteksten og deretter skrive opp en del av oppgaven i den korresponderende målrepresentasjonen, altså på den formen løsningen skal være. Dette kan for eksempel være en aritmetisk operasjon eller et algebraisk uttrykk. Grunnen til at eleven deler opp oppgaveteksten stykkevis mener Koedinger og Nathan (2004) er at det ofte kan være til hjelp for hukommelsen og at man da får med seg alle nøkkelordene i teksten.

Av feil og vanskeligheter som oppstår tilknyttet tekstoppgaver nevner Koedinger og Nathan (2004) spesielt tolkningen av teksten som en viktig faktor. Blant annet har det blitt gjort studier på college-studenter som viste at det ble gjort flere feil ved aritmetiske tekstoppgaver når teksten hadde et «inkonsistent» språk, enn ved et konsistent språk (Koedinger & Nathan, 2004). Et eksempel på inkonsistent språk kan være når det i teksten står «mer enn» men at det egentlig kreves subtraksjon for å løse problemet. Dette tolker jeg som det Duval (2006) karakteriserer som ikke-kongruente overganger, altså at det ikke finnes en én-til-én relasjon mellom oppgaveteksten og den algebraiske målrepresentasjonen.

En annen forklaring på hvorfor elevene gjør feil eller opplever hindringer i slike oppgaver kan ifølge Koedinger og Nathan (2004) knyttes til elevenes anvendte løsningsstrategi av oppgaven. Dette kan gå ut på at elever omgjør problemteksten til for eksempel ligninger ved direkte oversettelse for deretter å løse ligningen. Denne oversett-og-løs strategien er vel utbredt blant elever og har også ifølge (Koedinger & Nathan, 2004) lange tradisjoner for å være en anbefalt tilnærming til å håndtere tekstoppgaver. Andre forskere (Clement Lochhead & Monk, 1981; Duval, 2006) er kritiske til denne måten å løse tekstoppgaver på.

Clement et al. (1981) mener at denne direkte oversettelsesmetoden er noe mange elever gjør, og viste dette gjennom en studie de gjennomførte med elever ved videregående matematikk. Elevene fikk utdelt ulike tekstoppgaver som de skulle gjøre om til algebraiske uttrykk. Undersøkelsen viste at i flere tilfeller leverte over halvparten av studentene gale svar. En av oppgavene der feilprosenten var størst blant elevgruppen var ved en oppgave de kalte «Student-og-Professor Problemet». Den er gitt som følger: «På Universitetet er det seks ganger så mange studenter som professorer». I denne oppgaven var den klart vanligste feilen at elevene vendte om på variablene, altså besvarte oppgaven med 6S = P, i stedet for S = 6P, som er det korrekte svaret. I denne studien trekker Clement et al. (1981) to årsaker til denne omvendelsen av variabler. Den ene kaller de «samsvar i ordrekkefølge»[5] (Rosnick & Clement, 1980), eller som nevnt ovenfor det Duval (2006) klassifiserer som oversettelse, hvilket betyr en direkte oversettelse av skriftspråk til algebraiske symboler. Den andre kilden til galt svar er det Clement et al. (1981) kaller en *statisk sammenligning*[6]. Her har elevene en forståelse av at oppgaven tilsier at bestanddelen studenter er mye høyere enn bestanddelen professorer, men at elevene fortsatt tror at forholdet mellom studenter og professorer bør representeres ved 6S = P. I mange tilfeller har de tegnet opp antall studenter og professorer og derfor vil «6S» bli brukt til å indikere en større gruppe, mens «P» vil indikere en mindre gruppe». I dette tilfellet vil altså ikke «S» bli forstått som en variabel som representerer antall studenter, men heller en enhet som hører til tallet 6. Likhetstegnet betegner i dette tilfellet en sammenligning eller en assosiasjon, og ikke ekvivalens. En slik tolkning av en ligning er altså et forsøk på å symbolisere en statisk sammenligning mellom to mengder (Clement et al., 1981).

[5] Min oversettelse av «word-order matching»
[6] Min oversettelse av static-comparison method

### 2.4.2 Tolkning av grafer

Ifølge Leinhardt Zaslavsky og Stein (1990) er tolkning handlingen elever gjør for å skape mening eller forståelse av en graf, et funksjonsuttrykk eller situasjon. Tolkningen kan enten være *lokal* og spesifikk eller *global* og generell. En lokal tolkning vil si at man tolker de ordnede tallparene hver for seg, og ser hvordan et enkelt tallpar forholder seg til et annet. Med en global tolkning vil man fokusere på et større område eller intervall av funksjonen. Her tolker man trendene i funksjonen endrer seg. Dette kan for eksempel innebære å tolke den generelle formen til en graf, eller på hvilket området eller intervall funksjonen øker eller minker (Leinhardt et al., 1990).

I undersøkelsen knyttet til denne masteroppgaven har jeg laget et oppgavesett, hvor det blant annet er en oppgave der situasjonen i oppgaven kan forårsake en billedlig tolkning av graf. Jeg vil derfor kort presentere teori angående dette fenomenet slik tidligere forskning har beskrevet det (Bell & Janvier, 1981; Leinhardt et al., 1990).

Leinhardt et al. (1990) mener at den feilen som oftest skjer i tolkningen eller ved konstruksjonen av grafer som representerer situasjoner, er såkalte billedlige tolkninger. En rekke funn støtter opp om tanken på at elever ofte tolker en graf av en situasjon som et bilde av situasjonen (Leinhardt et al., 1990). Deres studier antyder at slike tolkninger oftest oppstår ved grafer som representerer strekninger eller distanser over tid. Dette kan være situasjoner som tar for seg turer eller reiser. Når for eksempel elever blir bedt om å tegne en graf som representerer en mann som går på tur rundt et tjern, kan elevene tolke oppgaven slik at dem tegner en runding i koordinatsystemet for å indikere at mannen har gått en runde.

### 2.4.3 Analytiske og geometriske tilnærminger til funksjoner

Tidligere forskning antyder at det er fordelaktig å kunne representere matematiske begreper på ulike måter som for eksempel ved grafiske og algebraiske representasjoner (Janvier, 1987; Lesh Post & Behr, 1987). Krutetskii (1976) har med sin forskning konkludert med at elever kan ha en «forkjærlighet» for ulike tilnærminger til matematiske problemer. Han skiller her mellom analytiske, geometriske og harmoniske tilnærminger. En elev med analytiske tilnærminger vil foretrekke å analysere et matematisk problem ved å benytte seg av algebraiske representasjoner i løsningsprosessen framfor grafiske representasjoner. En elev med en geometrisk tilnærming vil derimot foretrekke å studere problemet grafisk fremfor algebraisk. En elev med en harmonisk tilnærming stoler like mye på sine matematiske evner ved både algebraiske og grafiske representasjoner.

### 2.4.4 Bruk av dynamisk matematisk programvare som hjelpemiddel i overgangsprosessen

I denne studien har elever hatt tilgang til den dynamisk matematiske programvaren, GeoGebra, i arbeidet med overganger mellom matematiske representasjoner. Jeg vil derfor presentere en kortfattet teori om hvordan bruk av disse programvarene kan brukes av elevene i forbindelse med funksjoner. For mange elever kan overgangen mellom matematiske representasjoner være både tidkrevende og utfordrende (Yerushalmy, 2006). Yerushalmy (2006) har forsket på hvordan dynamiske matematiske programvarer kan hjelpe elever i arbeidet med å omgjøre matematiske representasjoner av funksjoner. Hun mener at disse programvarene kan være til stor hjelp for teoretisk svake elever i arbeid med oppgaver som krever mange utregninger. Slike programvarer vil også ifølge Yerushalmy (2006) gjøre det lettere for elever å løse oppgaver som krever bytte av representasjonssystemer.

I arbeid med funksjoner blir ifølge Yerushalmy (2006) en grafisk programvare oftest brukt til å gi tilgang til funksjonsuttrykk, observasjon av grafer for en gitt definisjonsmengde og å lese av input og output-verdier i form av tabeller. Grafiske programvarer vil her kunne gi en interaktiv avbildning mellom funksjonsuttrykket, grafen og tabellen. Derfor vil slike programvarer kunne hjelpe elever med å se sammenhenger mellom de ulike matematiske representasjonene (Yerushalmy, 2006).

## 2.5 Definering av sentrale begreper knyttet til funksjoner

I dette delkapittelet vil jeg gi en presentasjon av hvordan flere av de sentrale vitenskapelige begrepene knyttet til temaet funksjoner er definert. I presentasjonen under følger det en rekke forklaringer og definisjoner av begreper, som vil bli brukt i analysen til å se hvordan elevenes formuleringer av begreper står i sammenheng med de vitenskapelige begrepene. Disse vitenskapelige begrepene er en gjengivelse av hvordan Thompson og Martinsson (1997) definerer begrepene.

**Definisjonsmengde**

Hvis $f$ er en avbildning fra en mengde X til en mengde Y $(f: X \to Y)$ er ifølge en moderne konvensjon hele X definisjonsmengden til *f*. Det vil si at for hver $x \in X$ eksisterer én og bare én $y \in Y$. Det skriver man slik $y = f(x)$.

**Funksjon**

En funksjon er en avbildning fra X til Y, der Y er en tallmengde, for eksempel $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}$ eller $\mathbb{Q}$. En funksjon *f* fra X til Y skrives $f : X \mapsto Y$. Den defineres ved $x \mapsto f(x)$, der $f(x)$ kalles funksjonsverdien til *x*.

**Polynom**

Et polynom i en variabel x er en sum av ledd av formen $ax^k$, der a er en konstant og k er et naturlig tall eller 0. Eksempler på polynomer er $x^3$ og $2x^2 + x - 3$. Graden til polynomet bestemmes av eksponenten i det leddet som har høyest grad. Denne studien omhandler første- og andregradspolynomer. Polynomet x + 2 er et førstegradspolynom fordi det leddet i polynomet av høyest grad, er av grad 1. Polynomet $x^2 + 4x + 4$ er et andregradspolynom siden leddet med høyest grad har grad 2. Konstantleddet er det leddet der en variabel x ikke forekommer.

**Proporsjonalitet**

En direkte proporsjonalitet mellom y og x er en relasjon av formen $y = kx, k \neq 0$. y er da direkte proporsjonal med x og k kalles i denne sammenhengen proporsjonalitetskonstanten eller proporsjonalitetsfaktoren. Hvis y er proporsjonal med x, er x proporsjonal med y, for av y = kx følger det at $x = (1/k)y$. Proporsjonalitet kan beskrives grafisk gjennom en rett linje, som går gjennom origo med stigningstall lik proporsjonalitetskonstanten.

**Stigningstall eller stigningskoeffisient**

For en rett linje $y = ax + b$ i planet er stigningskoeffisienten *a* gitt ved brøken $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, der $(x_1,y_1)$ og $(x_2,y_2)$ er to forskjellige punkter på linjen. Stigningskoeffisienten kan tolkes som endring i y-koordinaten hvis x-koordinaten endres med én enhet. En linje som er parallell med x-aksen vil ha stigningskoeffisient 0, mens en linje som er parallell med y-aksen ikke har en definert stigningskoeffisient.

**Variabel**

En variabel definert til å være en bokstavbetegnelse for et vilkårlig element i en mengde, variabelens grunnmengde. Variabel er et motstykke til konstant, som betegner et bestemt objekt som for eksempel 2 eller $\pi$. I en beskrivelse av en funksjon $y = f(x)$, kalles x iblant den uavhengige variabelen, mens y kalles den avhengige variabelen.

# 3 Metodologi

I undersøkelsen knyttet til denne masteroppgaven har jeg hentet informasjon fra et utvalg på fem elever fra matematikkurset 1T. Jeg har valgt å hente inn både skriftlig og muntlig informasjon ved å gi dem et oppgavehefte for deretter å intervjue hver og en av dem i etterkant av oppgaveløsingen. I dette kapittelet vil jeg først ta for meg forskningsdesignet i studien, før jeg utdyper mine metodevalg og gjennomføringen av undersøkelsen. Til slutt vil jeg forklare mine etiske betraktninger samt diskutere validiteten og reliabiliteten i denne studien.

## 3.1 Forskningsdesign

I denne studien har jeg valgt å plassere meg i et konstruktivistisk verdenssyn. Sentralt i det konstruktivistiske verdenssynet er ifølge Fangen (2004) vektleggingen av hvordan vi subjektivt oppfatter sosiale strukturer eller institusjoner, og ikke deres «objektive», «virkelige» eksistens. Konstruktivister legger dessuten vekt på at vitenskapelig kunnskap er sosialt konstruert, slik som all annen kunnskap. Robson (2002) mener at metoder som tillater mangfoldige perspektiver vil være en god tilnærming i et konstruktivistisk verdenssyn da konstruktivister ofte søker å forstå sammensatte sosiale konstruksjoner av mening og kunnskap. Videre benytter man seg ofte i kvalitative forskningsdesign av flere datakilder. I dette masterprosjektet har jeg valgt et kvalitativt forskningsdesign og jeg har benyttet meg av både observasjon og intervju med henholdsvis video- og lydopptak. Man setter gjerne opp kvalitative metoder som kontrast til kvantitative metoder. Mens man i kvantitativ forskning søker å få svar i form av prosentandeler og antall, er svarene ved kvalitativ forskning av en annen karakter. Man er her for eksempel ute etter å beskrive menneskers handlinger, noe som ikke lar sett lett beskrive med tall.

Selv om observasjon kanskje er den mest utbredte metoden innenfor kvalitative studier, nedtegner forskeren notater fra observasjonen, og derfor blir også teksten grunnlaget for analysearbeidet (Repstad, 1987). Siden jeg brukte video- og lydopptak i forbindelse med datainnsamlingen, vil transkriberingene av opptakene fungere som grunnlag for analyse.

## 3.2 Utarbeiding og presentasjon av oppgaveheftet

I utarbeidingen av oppgaveheftet som la grunnlaget for undersøkelsen tok jeg i hovedsak hensyn til to ting. Det ble utarbeidet i den hensikt at det skulle bidra til å besvare problemstillingen min; *Hvordan gjennomfører 1T-elever overgangen fra situasjon til grafiske og algebraiske representasjoner av polynomer*? For at jeg skulle få de dataene jeg ønsket, vurderte jeg det som et veldig viktig poeng at elevene hadde de nødvendige forkunnskapene som skulle til for å kunne løse oppgavene. Vanskelighetsgraden på oppgave burde derfor ligge på et riktig nivå ut ifra elevenes forutsetninger. Dette anså jeg som utfordrende da jeg ikke kjente til de matematiske ferdighetene til elevene på forhånd. Den eneste retningen jeg hadde å gå etter var at de var elever i matematikk 1T, altså elever ved et studieforberedende programfag på VG1. Jeg valgte derfor å ta utgangspunkt i kompetansemålene fra Kunnskapsløftet etter 10. trinn på ungdomskolen og etter programfaget 1T innenfor temaene tall og algebra, og funksjoner. De kompetansemålene jeg anså som relevante er presentert under.

**Kompetansemål etter 10. årstrinn:**

**Tall og algebra**

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- analysere samansette problemstillingar, identifisere faste og variable storleikar, kople samansette problemstillingar til kjende løysingsmetodar, gjennomføre berekningar og presentere resultata på ein formålstenleg måte.

**Funksjoner**

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- lage funksjonar som beskriv numeriske samanhengar og praktiske situasjonar, med og utan digitale verktøy, beskrive og tolke dei og omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar, som grafar, tabellar, formlar og tekstar
- identifisere og utnytte eigenskapane til proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og kvadratiske funksjonar og gje døme på praktiske situasjonar som kan beskrivast med desse funksjonane

(Utdanningsdirektoratet, 2006b)

**Kompetansemål etter 1T:**

**Tall og algebra**

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- omforme uttrykk og løyse likningar, ulikskapar og likningssystem av første og andre grad og enkle likningar med eksponential- og logaritmefunksjonar, både ved rekning og med digitale verktøy
- omforme ei praktisk problemstilling til ei likning, ein ulikskap eller eit likningssystem, løyse det matematiske problemet både med og utan digitale verktøy, presentere og grunngje løysinga og vurdere gyldigheitsområde og avgrensingar

**Funksjoner**

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- gjere greie for funksjonsomgrepet og kunne omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar
- berekne nullpunkt, ekstremalpunkt, skjeringspunkt og gjennomsnittleg vekstfart, finne tilnærma verdiar for momentan vekstfart og gje nokre praktiske tolkingar av desse aspekta
- lage, tolke og gjere greie for funksjonar som beskriv praktiske problemstillingar, analysere empiriske funksjonar og finne uttrykk for tilnærma lineære samanhengar, med og utan bruk av digitale verktøy
- bruke digitale verktøy til å framstille og analysere kombinasjonar av polynomfunksjonar, rotfunksjonar, rasjonale funksjonar, eksponentialfunksjonar og potensfunksjonar

(Utdanningsdirektoratet, 2006a)

Som man kan se av kompetansemålene i algebra og funksjoner fra 10. trinn og 1T, er det flere mål som omhandler tolkning og regning i de ulike representasjonssystemene av funksjoner, og det å kunne utføre overganger imellom dem. Man kan også se at det å kunne gjenkjenne og utnytte egenskaper ved proporsjonale størrelser blir vurdert etter 10. trinn, men står ikke som et eget kompetansemål etter 1T. Disse punktene dannet grunnlaget for utformingen av oppgaveheftet. Jeg vurderte dessuten oppgaver som omhandlet momentan vekstfart, men dette ble ikke tatt med da jeg fikk vite at elevene i undersøkelsen ikke hadde lært om derivasjon før perioden som undersøkelsen skulle gjennomføres. Til slutt betraktet jeg målene som omhandlet bruk av digitale verktøy. Jeg besluttet derfor at elevene kunne ta i bruk programvaren GeoGebra i arbeidet med oppgavene. Etter utarbeidingen bestod til slutt oppgaveheftet av følgende fire oppgaver. Jeg vil her gi en presentasjon av oppgavene.

### Oppgave 1)

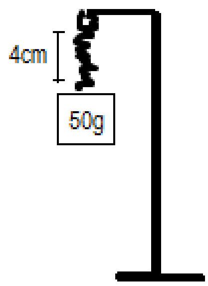
| |
|---|
| En fisker som nettopp har startet med makrellfiske beregner at han vil kunne klare å fiske 100kg makrell den første dagen av makrellsesongen. Sesongen varer i åtte dager og all erfaring tilsier at det vil være en økning på 4kg fisket makrell per dag. Funksjonen M(d) beskriver antall kilo fisket makrell, M, fiskeren kan forvente å få på en vilkårlig dag *d* i makrellsesongen. Tegn grafen til M(*d*) der $d \in [0, 7]$. |

Figur 3.1. Presentasjon av oppgave 1 i undersøkelsen.

Med denne oppgaven hadde jeg som mål å se på hvordan elever løste overgangen fra tekst til graf av et førstegradspolynom. Her mener jeg det er interessant å se om elevene transformerer informasjonen via andre representasjonssystemer i overgangen mellom tekst og graf. Det er også interessant å se om elevene klarer å tolke at funksjonen er lineær og at riktig skjæringspunkt og stigningstall er bevart i grafen. Avslutningsvis vil jeg legge til at jeg har brukt klammeparenteser for mengden hvor *d* er definert. Dette er feil da funksjonen er diskret og dermed bare gir mening når *d* er heltall. Dette har jeg diskutert videre i kapittel 5.5.

**Oppgave 2)**

Under et forsøk i en naturfagstime blir du bedt om å feste ulike lodd til en fjær, som henger på et stativ. Deretter skal du måle utslaget på fjæra (i cm) ut ifra massen til ulike lodd. Under gjennomføringen av forsøket bruker du fire forskjellige lodd med masse 50g, 75g, 100g og 150g. Resultatene av forsøket ble som følger:




Med 50g-loddet målte du utslaget på fjæra til å være 4cm

Med 75g-loddet målte du utslaget på fjæra til å være 6cm

Med 100g-loddet målte du utslaget på fjæra til å være 8cm

Med 150g-loddet målte du utslaget på fjæra til å være 12cm

Her er massen m en uavhengig variabel, mens fjærutslaget f avhenger av m. Lag et funksjonsuttrykk der du kan beregne et tilfeldig fjærutslag f med hensyn på m.

Figur 3.2. Presentasjon av oppgave 2 i undersøkelsen.

Denne oppgaven inneholder en oversikt over fire ordnede tallpar, som errepresentert ved naturlig språk. Videre er variablene f og m, proporsjonale størrelser. Elevene skal i denne oppgavene omgjøre teksten til en algebraisk representasjon. Målet med oppgaven er derfor å hvordan elevene utførte denne overgangen, og hvordan de tolket egenskapen med proporsjonalitet.

**Oppgave 3)**

«I storkiosken til Frederik blir det solgt tre ganger så mange hamburgere som pølser». Bruk H til å representere hamburgere og P til å representere pølser. Kan du lage et funksjonsuttrykk som passer til denne situasjonen?

**Figur 3.3. Presentasjon av oppgave 3 i undersøkelsen.**

Også i denne oppgaven skal elevene omgjøre en tekst til en algebraisk representasjon. En forskjell fra oppgave 2, er at denne overgangen utgjør det Duval (2006) kaller en ikke-kongruent overgang. Et mål med denne oppgaven var derfor å se om elevene brukte en metode der de oversatte direkte fra oppgaveteksten, og hvilken konsekvens dette ville ha for løsningen. Oppgaven er inspirert av Clement et al. (1981) sin student-professor oppgave.

**Oppgave 4)**

Det høyeste stupet som har blitt utført ble målt til en høyde på 54m. Vi antar at stupet kan beregnes matematisk ved formelen $s = 4{,}4t^2$ på intervallet $t \in [0, 3.5]$. Her betegner $s$ avstanden fra stupebrettet etter tiden, t. Tegn en graf som beskriver avstanden fra stupebrettet ved tiden t.

**Figur 3.4. Presentasjon av oppgave 4 i undersøkelsen.**

Denne oppgaven omhandler et andregradspolynom, til forskjell fra de andre oppgavene. Den tar for seg en situasjon som kanskje ligger nært knyttet til elevenes erfaringer med fritt fall. Et mål med denne oppgaven er altså å undersøke hvordan elevene implementerer og tolker grafen til polynomet.

## 3.3 Metode for datainnsamling

Som metode for datainnsamlingen har jeg brukt både observasjon og intervju. Jeg vil i dette delkapittelet presentere hvilken rolle jeg tok som observatør og hvilken struktur jeg brukte i intervjuene. Jeg vil også reflektere over hvilke fordeler og ulemper man står overfor ved bruk av disse metodene for datainnsamling.

### 3.3.1 Observasjon

Observasjon som forskningsmetode blir sett på som en vanlig og naturlig metode for å undersøke menneskets adferd (Robson, 2011). Marshall og Rossman (2006) mener dessuten at observasjon er en fundamental og i høyeste grad en viktig metode i alle kvalitative undersøkelser. Den brukes ofte for å oppdage samhandlinger i naturlige sosiale situasjoner.

Som observatør kan forskeren opptre i tre forskjellige observatørroller i form av lav, middels eller høy grad av nærhet (Ringdal, 2001). I denne studien sto valget mitt mellom å være fullstendig observatør eller en deltakende observatør. Jeg valgte her å ha en deltagende observatørrolle med middels grad av nærhet, hvilket ifølge Ringdal (2001) er den mest vanlige formen for observasjon. Dette innebar at jeg var tilstede i grupperommet sammen med respondentene, jeg stilte spørsmål der jeg fant det naturlig og de kom med spørsmål til meg der det var uklarheter med oppgaver. Jeg fant det dessuten hensiktsmessig til tider å oppmuntre til samarbeid og diskusjon. For å kunne danne et bilde av bregrepsoppfatningen til elevene er jeg avhengig av at det er et muntlig samspill i elevgruppen. Dersom jeg hadde valgt en passiv observatørrolle med ingen eller lav grad av nærhet ville dette innebære at jeg ikke var tilstede i grupperommet og at all observasjon ville gått gjennom videokameraet.

Fordelen med observasjon som metode er ifølge Robson (2011) at den er direkte av natur. Som observatør spør man ikke respondentene om deres følelser, synspunkter og holdninger, men man ser hva de gjør og hører hva de sier. Dessuten mener Robson (2011) at direkte observasjon enten kan stå i kontrast til, eller virke komplementerende til andre metoder for datainnsamling som for eksempel intervju . Men det finnes også ulemper ved observasjon. Robson (2011) trekker særlig frem det at observasjon verken er enkelt eller problemfritt og at man som observatør i en viss grad vil påvirke situasjonen man tar del i, noe man på fagspråket kaller reaktivitet.[7] En måte å redusere reaktiviteten er å etterstrebe det å få situasjonen så normal og reell som mulig. Allikevel vet man som regel ikke hvordan respondentenes oppførsel hadde vært om de ikke hadde blitt observert. En annen ulempe med observasjon er at det i enkelte tilfeller kan være tidskrevende. I mitt tilfelle, hvor jeg observerte elever fra en klasse var tidsrammen min begrenset i og med at observasjonen ble gjennomført parallelt med matematikktimen og respondentene har gjerne andre forpliktelser både før og etter undervisningstiden. Dessuten ville jeg nødig be om å få bruke deres fritid. En måte å begrense tidsbruken kan være å strukturere observasjonen ved hjelp av en tidsplan (Robson, 2011). Siden jeg hadde en dobbeltime til rådighet fordelt på to elevgrupper, delte jeg dobbelttimen i to slik at gruppene fikk like lang tid til arbeidet med oppgavene. Utover det hadde jeg ikke noen konkret tidsplan da tiden elevgruppene ville bruke på de ulike oppgavene kunne variere.

[7] Min oversettelse av reactivity

### 3.3.2 Intervju

I tillegg til å observere elevene ønsket jeg å intervjue dem en og en i etterkant av observasjonen. Hensikten med dette var å få mer informasjon om hvordan elevene forstod oppgavene i oppgavesettet, hvilken fremgangsmåte de brukte, utfordringer underveis i arbeidet og til slutt, informasjon om begreper de brukte eller kom over i deres arbeid med oppgavene. Selv om elevene i stor grad ville kunne samarbeide om oppgavene under observasjonsdelen ønsket jeg å holde individuelle intervjuer. Grunnen til det var at jeg ville at alle elevene skulle være aktive i intervjuene. Elevene kunne dessuten komme med sine egne betraktninger i diskusjonen rundt oppgavene og de leverte egne besvarelser. Derfor mener jeg det var naturlig å gå i dybden med hver enkelt elev. Et av spørsmålene i intervjuguiden var for eksempel hva elevene syntes var utfordrende med de ulike oppgavene. Dette er et individuelt rettet spørsmål som vil gi ulike svar fra elev til elev.

Man skiller gjerne mellom strukturerte, semi-strukturerte og ustrukturerte intervjuer (Robson, 2011). Jeg valgte her å holde semi-strukturerte intervjuer. Med semi-strukturerte intervjuer har intervjueren en intervjuguide man forholder seg til, men rekkefølgen på spørsmålene og formuleringene til intervjueren kan variere i forhold til flyten i intervjuene. Med semi-strukturerte intervjuer har man også mulighet til å følge opp interessante vendinger underveis i intervjuet (Robson, 2011). Jeg mener at denne formen for intervju er ideell for min studie, siden jeg søker å forstå hvordan elevene gjennomfører overgangene mellom representasjoner. Hver elev kan tolke og gjennomføre oppgavene på forskjellig måter. Derfor mener jeg det er naturlig å stille spørsmål ut ifra hvordan elevene har besvart oppgavene og hvordan de har tenkt underveis i overgangsprosessen. Med semi-strukturert intervju hadde jeg da mulighet til å følge opp svarene med andre spørsmål for å kunne få en fullstendig forklaring fra hver enkelt elev.

## 3.4 Utvalg

Utvalget til min undersøkelse består av to elevgrupper på til sammen fem personer. De er alle representanter fra en klasse i programfaget matematikk 1T ved en videregående skole i Midt-Norge. På grunn av studiens tema og problemstilling var det nødvendig for meg å undersøke elever i videregående skole. Jeg var avhengig av at elevene hadde kjennskap til temaene algebra og funksjoner og at de hadde en forståelse av begreper som første- og andregradspolynomer. Fra lærerplanen for fellesfaget matematikk 1T heter det at elevene blant annet kunne gjøre greie for funksjonsbegrepet og omgjøre ulike representasjoner av funksjoner, samt tolke og vurdere det matematiske innholdet i ulike tekster (Utdanningsdirektoratet, 2006a).

Valget av videregående skole kom på grunn av at jeg hadde tidligere kjennskap til en lærer ved skolen. Det var derfor også med klassen til denne læreren jeg gjennomførte undersøkelsen. Utvelgelsen av elevgruppen foregikk slik at læreren informerte klassen om studien min og om gjennomføringen av undersøkelsen. Utvalget meldte seg deretter frivillig med samtykke fra foreldre (se Vedlegg D). Dette er av etiske grunner som jeg vil diskutere videre i kapittel 3.5.

Selv om alle i klassen sto fritt til å delta i undersøkelsen var det kun fem som meldte seg. Kjønnsfordelingen i utvalget var veldig jevn, med tre gutter og to jenter. I samtale med læreren i forkant av undersøkelsen var dette elever med forholdsvis høy grad av måloppnåelse i faget matematikk 1T. Et slikt utvalg kan derfor ikke blitt sett på som representanter for hele populasjonen (Firestone, 1993).

I og med at jeg valgte observasjon som den primære metode for datainnsamlingen overveide jeg mulighetene for enten å dele utvalget i to mindre elevgrupper, eller å gjennomføre observasjonsdelen med hele utvalget samlet. Valget med å dele utvalget i to mindre grupper kom etter samtale med veileder, som mente det var fordelaktig, siden to grupper kan ha ulike tilnærminger og tolkninger av oppgavene i undersøkelsen. En samlet gruppe på fem elever kan også etter min mening være mer utfordrende å observere enn to grupper med respektive to og tre deltakere. En grunn til det er at jeg tror enkelte elever kan melde seg ut av diskusjoner om gruppestørrelsen blir for stor. Med tanke på anonymisering fikk deltakerne i de to gruppene pseudonymer. De fikk selv velge pseudonymer, men avsto fra å velge navn selv. Jeg har derfor valgt pseudonymer for dem. Deltakerne i gruppe 1 fikk navnene Aina og Ola, mens deltakerne i gruppe 2 fikk navnene Ida, Hans og Tom.

I utgangspunktet kunne jeg tenkt meg et utvalg på 6-8 personer for eventuelt å kunne oppnå en større variasjon i løsningsstrategiene til elevene. Jeg mener allikevel at et utvalg på fem personer er tilstrekkelig for å undersøke diversitet. Samtidig tror jeg at et for stort utvalg kunne skapt store utfordringer i analysearbeidet i forhold til tidsrammen som er satt av til studiet.

## 3.5 Gjennomføring

I gjennomføringen av datainnsamlingen hadde jeg totalt fire skoletimer til rådighet fordelt på to dager. Jeg disponerte tiden slik at jeg brukte første dagen til å gjennomføre observasjonen av elevarbeidet og neste dag til å gjennomføre intervjuer med elevene i undersøkelsen. Selv om jeg hadde to skoletimer til rådighet for observasjon av elevarbeidet, opplevde jeg at tiden var begrenset i forhold til omfanget av oppgavene jeg hadde utviklet. Jeg hadde beregnet at selve elevarbeidet ville vare i cirka 30-35 minutter per gruppe. I tillegg hadde jeg satt av cirka femten minutter i starten av undervisningsøkta hvor jeg informerte hele utvalget om hvem jeg var, om masterprosjektet mitt og om gjennomføringen av undersøkelsen. Jeg fortalte elevene at de skulle ta seg god tid til oppgavene og lese oppgaveteksten nøye. Videre ble elevene bedt om å forsøke å tenke høyt og diskutere med de andre på gruppa. Jeg informerte også om hvordan jeg ville bruke lyd- og videoopptakene og at disse opptakene ville bli slettet etter endt studie. Ved siden av å veilede hverandre fikk elevene ta i bruk andre hjelpemidler som kalkulator og GeoGebra. Jeg valgte å ta meg god tid til å informere elevene og etter introduksjonen fikk elevene mulighet til å stille spørsmål. I følge Robson (2011) er det viktig å være åpen om sine hensikter for og å kunne skape trygghet blant respondentene i undersøkelsen. Dette var også viktig for meg, da jeg ønsket en så tilnærmet normal undervisningssituasjon som mulig.

Undersøkelsen ble gjennomført på et grupperom i nær avstand til klasserommet deres for timen. Jeg var avhengig av et lukket grupperom til gjennomføringen av observasjonene og intervjuene siden jeg skulle ta videoopptak av elevene. Jeg ville at videokameraet skulle fange opp samtalene og samhandlingen mellom elevene og ønsket derfor lite støy og andre distraksjonsfaktorer utenifra. Dette var dessuten av praktiske årsaker ideelt da jeg ønsket å bruke minst mulig tid i mellom observasjonene. Videokameraet ble montert på stativ slik at man kunne se ansiktet og armene til respondentene. Dette valgte jeg å gjøre for at kameraet kunne oppfatte eventuelle gester og illustrerende bevegelser. Det ble her gjort unntak der elevene tok i bruk GeoGebra. Da holdt jeg kameraet for å fange opp arbeidet på PC-skjermene deres.

Elevene satt på pulter ved siden av hverandre mens jeg hadde en mer tilbaketrukken rolle til siden for dem. Jeg valgte å posisjonere meg slik for at elevene skulle henvende seg til hverandre i stedet for til meg. Det at elevene satt ved siden av hverandre på pulter fungerte fint med gruppe 1, som besto av to elever. Med gruppe to, som bestod av tre elever, var derimot ikke plasseringen helt ideell. Det at de satt på rekke gjorde avstanden mellom elevene på endene av rekken ble ganske stor. Dette kan være en grunn til at det sjelden forekom noe dialog mellom elevene på endene. Et alternativ kunne derfor være og plassert elevene slik at alle så hverandre.

I undersøkelsens andre fase, altså intervjudelen, tok jeg også i bruk det samme grupperommet. Intervjuene ble gjennomført dagen etter observasjonene noe som gjorde at oppgavene fra elevarbeidet fremdeles var friskt i minnet. Dessuten gjorde det at jeg til en viss grad fikk bearbeidet observasjonene fra dagen før. Intervjuene ble gjort med hver enkelt elev og hadde en varighet på 15-20 minutter og de baserte seg i stor grad på arbeidet og utsagnene til elevene under observasjonen. Derfor ble det noe variasjon i lengden på intervjuene. I denne fasen av undersøkelsen satt jeg og respondentene ovenfor hverandre. Her ble det plassert en lydopptaker på midten av bordet imellom oss slik at den kunne fange opp hva jeg og respondentene sa.

## 3.6 Etikk

Ved observasjon og intervjuer av elever bør man gjøre seg noen etiske betraktninger ved begynnelsen av studiet. Utformingen av problemstillingen har blant annet etiske konsekvenser. Formålet ved studien bør nemlig ikke kun være å utvikle vitenskapelig kunnskap, men også å forbedre situasjonen til menneskene man studerer. På bakgrunn av min problemstilling, altså hvordan elever gjennomfører overgangen mellom spesifikke matematiske representasjoner, har jeg betraktet undersøkelsen min som en kilde for læring hos respondentene. Med det mener jeg at under arbeidet med oppgavene i undersøkelsen får elevene både trening i å utføre overganger mellom matematiske representasjoner, samtidig som diskusjonene mellom elevene underveis i arbeidet krever at elevene formulerer seg matematisk. Jeg mener her at det ligger mye meningsfull læring i det å formulere sin forståelse av matematiske tema og tilhørende begreper.

I forkant av eventuelle undersøkelser er det ifølge Fangen (2004) viktig med informert samtykke. En forutsetning for informert samtykke er at den som undersøkes deltar på frivillig basis. Dette innebærer også at den som undersøkes vet alt om hvilke farer og gevinster en slik deltakelse kan medføre (Jacobsen, 2000). Før jeg gjennomførte undersøkelsen sendte jeg et samtykkeskjema til skolen hvor undersøkelsen skulle foregå. Samtykkeskjemaet ble deretter underskrevet av elever som ønsket å delta i undersøkelsen. I skjemaet stod det også at elevene sto fritt til når som helst å trekke seg som deltaker.

Rett i forkant av undersøkelsen satt jeg dessuten av tid til å prate med elevene om studiens formål og at jeg ville slette alle data ved studiens slutt. For å opprettholde loven om personvern har alle navn i studien blitt anonymisert. Dette har jeg gjort ved at elevene som deltok fikk pseudonymer. Hensikten med det er å opprettholde prinsippet om konfidensialitet. Ved siden av samtykke er konfidensialitet er et svært viktig etisk team i samfunnsforskning (Fangen, 2004). Av hensyn til prinsippet om konfidensialitet har jeg også meldt inn masterprosjektet til NSD. Her har studien min fått prosjektnummer: 38517.

## 3.7 Analyse av datamaterialet

Etter å ha gjennomført undersøkelsen, transkriberte jeg alle opptakene fra observasjonene og intervjuene, ved hjelp av en transkriberingsnøkkel (se vedlegg C). Dette førte til en relativt stor mengde datamateriale, som skulle bearbeides. Jeg valgte derfor først å gå gjennom lyd- og videoopptakene på nytt for så å lese nøye igjennom alle dataene. Dette gjorde jeg for å bli bedre kjent med datamaterialet. Deretter noterte jeg stikkord i margen etter hvert som jeg kom over sekvenser og ytringer som var interessante med tanke på problemstillingen min. Dette ble da første del i struktureringen av datamaterialet. Nedbryting og strukturering er ifølge (Jacobsen, 2000) noe av det første man foretar seg med datamaterialet etter innsamling. Denne analysemetoden kalles konstant komparativ analysemetode (Nilsen, 2012). Konstant komparativ analysemetode består av *åpen koding*, *aksial koding* og *selektiv koding* (Postholm, 2005). Åpen koding er den delen av analysen hvor forskeren setter navn på og kategoriserer fenomener gjennom intens og nøye gjennomgang av datamaterialet (Postholm, 2005). Under kodingsprosessen blir data delt inn i mindre deler og gitt en kode i form av et navn. Siden jeg hadde et transkribert datamateriale fra både intervjuer og observasjon, første dette til et rikelig antall forskjellige koder. Postholm (2005) mener det er viktig at koder grupperes etter begreper, som omhandler det samme fenomenet, for at datamaterialet skal bli mer håndterlig og oversiktlig. Denne prosessen kalles kategorisering (Postholm, 2005). Som et resultat av arbeidet med kodene som omhandler hvordan elever gjennomfører overgangen fra situasjon til grafiske og algebraiske representasjoner, fant jeg følgende kategorier for videre analysearbeid:

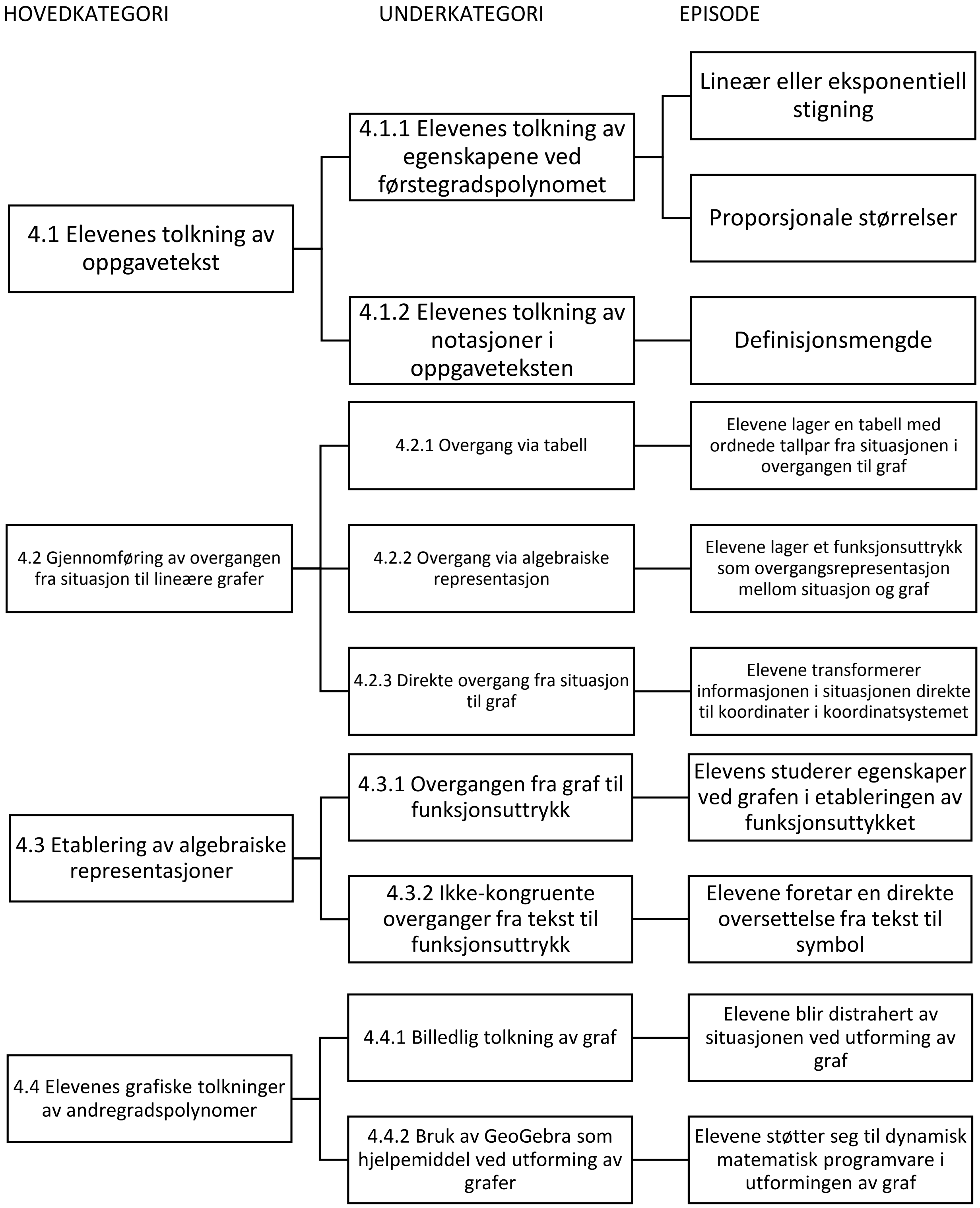
### Elevenes tolkning av oppgaveteksten

### Overgangen fra situasjon til lineære grafer

### Etablering av algebraiske representasjoner

### Elevenes grafiske tolkninger av andregradspolynomer

Etter at jeg hadde utarbeidet de fire kategoriene, begynte jeg arbeidet med den aksiale kodingen. Aksial koding er ifølge Postholm (2005) den delen av analyseprosessen hvor man ser etter sammenhenger mellom ulike fenomener. Her vil forskeren forsøke å se på hvordan kodene forholder seg til kategoriene, og så systematisere dem. Jeg oppdaget etter dette arbeidet at det dannet seg underkategorier av de nevnte kategoriene. Jeg har valgt å la kategoriene stå som titler for kapitlene i analysedelen. Videre vil underkategoriene fordeles under de nevnte kategoriene. For å gi en bedre oversikt over hvordan kategoriene forholder seg til hverandre har jeg valgt å illustrere inndelingen med et flytdiagram (se figur 3.5 under). I flytdiagrammet er kategoriene plassert under spalten; Hovedkategorier, og merket med kapittelnummeret. Ifølge Postholm (2005) har forskeren en viktig oppgave med å bruke de eksemplene fra datamaterialet som best belyser kategoriene. Jeg har derfor valgt ut en til to episoder fra observasjonene og intervjuene jeg mener belyser kategoriene og problemstillingen. Disse er merket som episoder i flytdiagrammet og fordeles under sine respektive underkategorier.




**Figur 3.1. Oversikt og inndelingen av analysekapittelet.**

# 4 Analyse

For å kunne gå i dybden i hvordan elever gjennomfører overgangen fra situasjon til grafiske og algebraiske representasjonssystemer, vil jeg først analysere elevenes tolkning av oppgaveteksten. Dette vil bli presentert i delkapittel 4.1. Videre vil har jeg delt inn overgangene til grafiske og algebraiske representasjoner hver for seg. I kapittel 4.2 vil jeg se nærmere på hvordan elevene gjennomfører overgangen til lineære grafer, mens jeg i kapittel 4.3 studerer elevens overganger til algebraiske representasjoner. Hva jeg legger i disse to delkapitlene er hvilke bekreftelser som blir gjort underveis, og hvordan elever tolker sentrale begreper for å kunne gjennomføre overgangene på en korrekt måte. I det siste delkapittelet vil jeg trekke inn et eksempel på hvordan en situasjon kan påvirke elevenes grafiske løsninger av tekstoppgaver, og hvordan bruk av GeoGebra kan hjelpe dem med å endre tolkningen av grafiske representasjoner av andregradspolynomer.

## 4.1 Elevenes tolkning av oppgavetekst

I dette kapittelet vil jeg se nærmere på elevenes tolkning av begreper i oppgaveteksten og deres tolkning av førstegradspolynomets egenskaper, representert i oppgaveteksten. Disse analysene vil bli presentert i henholdsvis kapittel 4.1.1 og 4.1.2

### 4.1.1 Elevens tolkning av egenskaper ved førstegradspolynomet

I episoden under ser vi et eksempel der Ola og Aina er i ferd med å tolke teksten: «En fisker som nettopp har startet med makrellfiske beregner at han vil kunne klare å fiske 100 kg makrell den første dagen av makrellsesongen. Sesongen varer i åtte dager og all erfaring tilsier at det vil være en økning på 4kg fisket makrell per dag».

[Elevarbeid; Gruppe 1; Sekvens 1]

4. Ola: Altså, den øker med 4 prosent, gjør den ikke det?
5. Aina: med 400%?
6. Ola: 4% hver dag.
7. Aina: 4 ja.
8. Ola: Det blir det i hvert fall den første dagen.

9. Aina: Den andre dagen så har han fiska (...) ja økningen 0,04 (..) økninga er 1,04 hver dag så det blir de 100kg han har første dagen ganger 1, $04^x$ som er (viser på arket), blir det ikke det?

10. Ola: Jo, med er det ikke så at den andre dagen så har han 104kg og da øker den jo ikke med _

11. Aina: Da øker det 4%. Det vil være en økning på 4kg fisket..(leser oppgaveteksten) Da øker det med (..) 4kg hver dag. (…) Åja! Det er ikke prosent nei!

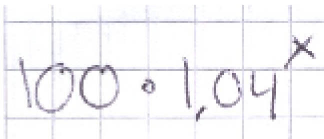
12. Ola: Øker med 4kg ja, gjør det ikke det?

13. Aina: Jo!

(…)

21. Aina: Det er jo kilo fisk (..) Så stigningstallet blir 4 opp også begynner den på 100.

Jeg tolker av ytring 4 at Ola ser på økningen fra 100 kg til 104 kg, og konkluderer med at det er en økning på fire prosent. Dette er korrekt for økningen mellom den første og den andre dagen, men ikke for resten av sesongen. Dette mener jeg kan knyttes til Leinhardt et al. (1990) sin teori om elevenes tolkning av funksjoner. Jeg antyder nemlig her at Aina og Ola har sett på funksjonen *lokalt* ved å kun se på hvordan de to første funksjonsverdiene forholder seg til hverandre. Som vi ser av ytring 9 går Aina videre med denne ideen og lager et funksjonsuttrykk av en eksponentialfunksjon. Dette vises i Figur 5.1 under.




**Figur 4.1: Ainas tolkning av oppgave 1 som en eksponentialfunksjon.**

Dette uttrykket stemmer også overens med antagelsen om at fiskefangsten øker med fire prosent hver dag og at han får 100 kg fisk den første dagen. Deretter oppdager Ola og Aina i henholdsvis ytring 10 og 11 at økningen ikke er i prosent allikevel, men i kilogram.

Selv om både Ola og Aina kommer fram til samme slutning om at økningen er i antall kilogram per dag, og ikke prosent, mener jeg at de har kommet fram til dette ved to forskjellige tolkninger av funksjonen. Aina leste oppgaveteksten på nytt og så at endringen var i kilogram, og at funksjonen dermed ikke kunne ha en eksponentiell vekst, slik de først hadde antatt. Jeg tolker dette som at Aina nå ser *globalt* på funksjonen og forstår med det at det er like stor økning mellom alle dagene i sesongen, altså fire kilogram. Ola, på sin side ser at fiskerens fangst etter dag 2 er 104 kg. Selv om han blir avbrutt i ytring 10, tolker jeg det slik at han ser på endringen fra 104 kg til 108 kg. Denne endringen tilsvarer ikke en økning på 4 prosent, men fire kilo. Han kan dermed bekrefte at deres første antagelse er feil. Jeg vil derfor mene at han fortsatt har en lokal tilnærming til funksjonen ved å sammenligne to funksjonsverdier av variabelen *d*.

Slik jeg ser det, var kilden til denne feilen at de kun sammenlignet de to første verdiene av funksjonen. Siden de kunne knytte endringen mellom de to verdiene til en prosentvis økning. Både Ola og Aina bekreftet deretter selv i ytring 10, 11 og 12 at det måtte være en feil løsning i og med at teksten representerte en lineær økning i kilogram, og ikke en prosentvis økning. For å knytte en slik bekreftelse til Adu-Gyamfi et al. (2012) sine definisjoner av bekreftelser i overgangsprosessen vil jeg tolke dette som en form for attributtbekreftelse. Grunnen til det er at elevene så på teksten igjen fra funksjonsuttrykkets «synsvinkel», og dermed så at en konstant økning i kilogram ikke samsvarte med den eksponentielle veksten i funksjonsuttrykket. Det er altså funksjonens vekst eller stigning som bekreftes, eller i dette tilfelle avkreftes.

I og med at man i denne oppgaven skulle uttrykke polynomet grafisk, og ikke algebraisk, kan det også tenkes at de ville kunne bekrefte denne feilen på et senere tidspunkt i overgangsprosessen. Siden de tidlig i prosessen skrev et slags funksjonsuttrykk for funksjonen, ville de for eksempel kunne se at verdiene for utrykket ikke ville stemt overens med en økning 4 kg per dag for verdiene d = 2 til d = 7. Dette ville imidlertid krevd at de mellom hvert bytte av representasjonssystem bekreftet at representasjonen stemte overens med teksten, altså startrepresentasjonen.

Avslutningsvis vil jeg kommentere at det er naturlig å ha en lokal tolkning til denne funksjonen i og med at den er diskret. Med det mener jeg at funksjonen kun gir mening *etter* en vilkårlig *dag* siden definisjonsmengden er disket. Man kan for eksempel ikke si noe om hvor mye fisk fiskeren har fått etter 3,5 dager.

Et annet eksempel som tar for seg forståelse av oppgaveteksten finner sted når elevgruppe 2 tolker stigningen til et polynom gitt i oppgave 2 (se Vedlegg A). Polynomet i oppgaven er gitt ved fire koordinater, som er representert ved teksten:

Med 50g-loddet målte du utslaget på fjæra til å være 4cm

Med 75g-loddet målte du utslaget på fjæra til å være 6cm

Med 100g-loddet målte du utslaget på fjæra til å være 8cm

Med 150g-loddet målte du utslaget på fjæra til å være 12cm

Målet med oppgaven er å lage et funksjonsuttrykk for fjærutslaget til fjæra med hensyn på massen til loddet som henges på fjæra. I sekvensen under ser vi hvordan Tom, Hans og Ingrid tolker forholdet mellom disse koordinatene.

[Elevarbeid; Gruppe 2; Sekvens 2]

48. Tom: Den dobles vel (..) når det dobles antall kilo så dobles antall cm. Så de går jo likt da(..) De øker i takt, sånn brøksmessig da. altså cm stiger i like stor grad som kiloen. Når kiloen dobles, så dobles cm også

49. Hans: Eh (..) Ja, 50- 4, 75-6 (..) den øker med 2, den øker med 1,5 der og 1,5 der.

50. Tom: Øker med 1,5?

51. Hans: ganger 1,5 da, så de øker likt. 50, 100 så dobles den jo. Og så 3 ganger, 3 ganger, 3 ganger (..) så den[fjærutslaget] øker jo like mye i forhold til hvor mye masse det er.

(…)

52. ST[8]: Ja, dere nevner at de øker i takt. Hvilke egenskaper har funksjonen da?

53. Ida: Det er et konstant tall.

54. Hans: Ja, stigningstallet er likt.

(…)

55. Tom: Det er jo allerede punkt i grafen da, så vi kan jo tegne de opp.

I diskusjonen over beskriver både Tom og Hans en egenskap til polynomet, nemlig at fjærutslaget, *f*, og massen, *m*, er proporsjonale størrelser. Det er imidlertid ingen av elevene som påpeker denne egenskapen eksplisitt. Tom uttrykker denne egenskapen i ytring 48 ved å si at «de øker i takt brøksmessig», mens Hans i ytring 51 utrykker begrepet proporsjonalitet ved å si at fjærutslaget «øker like mye i forhold til hvor mye masse det er». Ytringen om at variablene «øker i takt brøksmessig» ser jeg på som et eksempel det Vygotsky (1987) kaller hverdagsbegrep i og med at der hans egen beskrivelse av situasjonen. Men etter min mening spriker det ikke langt ifra det vitenskapelige begrepet om proporsjonalitet. Setter vi disse ytringene opp imot definisjonen av proporsjonale størrelser, ser vi en sammenheng.

To størrelser y og x blir kalt proporsjonale dersom forholdet mellom dem kan skrives som:

$$y = kx, \text{ der } k = \frac{y}{x} \text{ er konstant} \tag{1}$$

(Thompson & Martinsson, 1997, s. 379)

[8] Jeg bruker ST som initialer til mitt navn, Steinar Thorud

Av uttrukket over (1) ser vi at det er en relasjon til det Tom, Hans og Ida sier. Problemet er at elevene ikke klarer å knytte det de observerer med egenskapene til proporsjonale størrelser. Så i stedet for å dividere en verdi av fjærutslaget med den korresponderende verdien for massen, foreslår Tom i ytring 55 at de kan plotte «koordinatene» inn en graf.

Det er allikevel interessant å se hvordan elevene kom fram til disse konklusjonene. Vi ser av sekvensen over at både Tom og Hans sammenligner verdiene parvis. Tom signaliserer at verdiene dobles, noe jeg tolker som at han sammenligner det første «tallparet» med det tredje». Hans, på sin side sammenligner først økningen av fjærutslaget mellom de to første verdiene av $m$, før han sammenligner det første tallparet med den andre ved å si at det ganges med 1,5. Han sammenligner også det første tallparet med det tredje, hvor han sier at verdiene dobles, men også det første med det fjerde, hvor han ser at verdiene tredobles. Så selv om de ikke klarer påpeke at f og m er proporsjonale størrelser, fører denne prosessen til at de skjønner at polynomet vokser lineært, eller at «stigningstallet er likt», som Hans antyder i ytring 54. Dette tolker jeg som en form for attributtbekreftelse, siden de bekrefter at stigningen er konstant, men at de ikke får bekreftet hvor skjæringen med y-aksen er.

I kapittel 4.1.2 vil jeg presentere den andre underkategorien av «Elevenes tolkning av oppgavetekst». Her trekker jeg inn en episode som viser hvordan begrepet definisjonsmengde ble betraktet av utvalget i undersøkelsen.

### 4.1.2 Elevenes tolkning av notasjoner i oppgaveteksten

I to av oppgavene i undersøkelsen hadde jeg latt den uavhengige variabelen til å være definert i et gitt intervall. Et eksempel på notasjonen jeg brukte er: $x \epsilon$ [0,5]. Ved flere tilfeller ble det stilt spørsmål rundt denne notasjonen. Jeg vil her trekke fram en situasjon som dukket opp i elevens arbeid med oppgave 1.

[Elevarbeid; Gruppe 2; Sekvens 1]

7. Tom: Hva er det «d» «e» null komma sju?
8. Hans: Hæ? Hva mener du?
9. Tom: Det d e null komma sju, hva er det? [d element i [0,7]
10. Hans: «d» går fra null til sju, er det ikke det da?
11. Ida: Hva var det du sa nå?
12. Hans: Det der (peker på definisjonsmengden) betyr at du tar alt fra null til sju, altså null til og med sju.

Vi ser av sekvensen over at Tom lurer på hva «d e null komma sju» er for noe. Han uttrykker her altså tegnet $\epsilon$ som bokstaven «e» og mengden eller intervallet [0,7] som desimaltallet 0,7. Det at han uttrykker definisjonsmengden til *d* på denne måten kan tyde på at han ikke har mye kjennskap til denne notasjonen, eller at han ikke har den nødvendige kunnskapen om begrepene definisjonsmengde eller gyldighetsområde. Vi kan derimot se at Hans i ytring 10 og 12 har en forklaring som stemmer godt overens med det vitenskapelige begrepet av definisjonsmengde. Han uttrykker i ytring 10 at d er et elementer i mengden [0,7] og i bruker han ordet «alt», noe jeg tolker som et uttrykk for hele denne mengden Tom sier i intervjuet i etterkant av elevarbeidet at dette med definisjonsmengde var noe han synes var krevende.

[Intervju med Tom]

1. ST: Hva synes du var mest utfordrende med oppgave 1?
2. Tom: Det mest utfordrende var vel at jeg ikke husket hva det «d e null komma sju» var for noe, men det var vel dager det, så det fant vi ut etter en stund.

Selv om man i denne oppgaven kunne lese at fiskesesongen varte i åtte dager og at fiskeren fikk 100kg fisk den første dagen, kan en misoppfattelse av definisjonsmengden føre til feil i løsningen av oppgaven. Slik det står i teksten er det fort gjort å anta at den første dagen er $d$=1, og at siden sesongen varer i åtte dager må d være definert mellom 1 og 8. En slik misoppfattelse vil da kunne føre til feil skjæringspunkt med y-aksen.

Jeg vil legge til at i utformingen av denne oppgaven tok jeg i bruk misvisende parenteser for mengden til variabelen d. Dette vil jeg diskutere videre i diskusjonskapittelet om validiteten til studien (kap. 5.5).

## 4.2 Gjennomføring av overgangen fra situasjon til lineære grafer

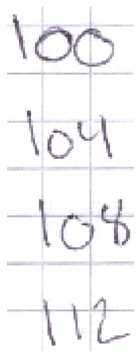
I denne delen av analysen tar jeg for meg elevenes gjennomføringen av overgangen fra situasjon til lineære grafer. I en slik overgang mellom representasjonssystemer vil elevene kunne velge å transformere informasjonen i startrepresentasjonen via en overgangsrepresentasjon som et bindeledd i overgangsprosessen. Jeg har derfor delt kapittelet opp i tre underkapitler som belyser ulike måter å gjennomføre overgangen på. I kapittel 4.2.1 vises en episode der en tabell blir foretrukket som overgangsrepresentasjon. Episoden i kapittel 4.2.2 belyser en fremgangsmåte der eleven går via et funksjonsuttrykk, mens jeg i kapittel 4.2.3 analyserer en episode hvor elevene foretrekker en direkte overgang mellom situasjon og graf.

### 4.2.1 Overgang via tabell

Tidligere forskning har antydet at det å gå fra tabell til graf kanskje er blant de enklere former for transformasjon mellom matematiske representasjoner (Adu-Gyamfi et al., 2012; Duval, 2006; Leinhardt et al., 1990). I denne delen av analysen vil jeg ta for en episode hvor Aina går via en slags tabell i overgangen fra *situasjon* til lineære grafer.

[Elevarbeid 1; Gruppe 1; Sekvens 1]

19. Aina: Den første dagen fisker han 100kg, (..) den andre dagen, 104, den tredje dagen 108, også 112. (..) Det er jo kilo fisk, så stigningstallet blir 4 opp også begynner den på 100.




**Figur 4.2: Ainas tabell i oppgave 1**

Av figuren (Figur 4.2) alene er det kanskje lite som minner om en tabell av ordnede tallpar. Jeg velger allikevel å tolke dette som en egen representasjon i overgangen fra situasjon til graf. Grunnen til det er at Aina i ytring 19 også uttrykker verdiene av d, sammen med de korresponderende funksjonsverdiene ved å si at «Den første dagen får han 100, den andre dagen 104 ...». Men hun unnlater imidlertid å skrive d-verdiene i tabellen ved siden av funksjonsverdiene. I intervjusekvensen forklarer Aina hvorfor hun gjorde det.

[Intervju med Aina]

11. ST: Når du skrev opp disse verdiene i går forstod jeg det som at du lagde en tabell. Kan du si litt hvordan tenkte når gjorde det?

12. Aina: Det er på en måte bare hoderegning. Jeg plusset på fire og tenkte at det liksom går an å bare gjøre det også se det at det blir en graf, fordi det var jo det som var oppgaven. (..) Men jeg skrev jo bare opp kiloene her da. Det er liksom greit å telle dagene utenom.

Aina begrunner fremgangsmåten sin ved å si «at det liksom går an å bare gjøre det også se at det at det blir en graf». Dette kan indikere at hun bruker denne representasjonen for å tydeliggjøre for seg selv hvordan grafen vil se ut. Videre tolker jeg setningen: «Men jeg skrev jo bare opp kiloene da her da. Det er liksom greit å telle dagene utenom», som et tegn på at hun kjenner til prosedyren med å lage tabeller av ordnede tallpar. Men at hun i dette tilfellet ser på det å skrive ned verdiene av *d* som unødvendig arbeid.

I ytring 19 sier Aina dessuten: «Det er jo kilo fisk, så stigningstallet blir 4 opp også begynner den på 100». Dette mener jeg kan knyttes til Adu-Gyamfi et al. (2012) sin teori om bekreftelser i overgangsprosessen. Ytringen kan både indikere attributtbekreftelse og ekvivalensbekreftelse siden hun bekrefter hvor skjæringspunktet med y-aksen er, samtidig som hun bekrefter at stigningen fra oppgaveteksten er bevart i tabellen. Det at hun i ytring 19 også ramser opp verdiene fra mengden sammen med de korresponderende funksjonsverdiene kan være et tegn på implementeringsbekreftelse (Adu-Gyamfi et al., 2012).

Videre i overgangsprosessen plotter Aina verdiene hun skrev opp i tabellen, inn i et kartesisk koordinatsystem. Dette belyses i observasjonssekvensen under.

[Elevarbeid 1, Gruppe 1; Sekvens 1]

20. Aina: Så vi kan bare tegne en graf med de åtte da [koordinatene]. Kan vi gjøre det? Også begynner den på hundre her da (Plotter inn koordinaten (0,100))

Jeg tolker hennes utsagn i ytring 20 om at det «bare er å tegne en graf med de åtte», som et tegn på hun har kjennskap til denne prosedyren. Det at hun indikerer at grafen begynner i m(0) = 100, vil jeg dessuten tolke som et tegn på attributtbekreftelse. Jeg mener hun her bekrefter at strukturen med startverdien; «100kg den første dagen» i teksten er bevart gjennom skjæringspunktet mellom polynomet og y-aksen (se figur 4.3 under). Videre ser vi av ytring 23 under at det oppstår en feil.

[Elevarbeid 1, Gruppe 1; Sekvens 1]

23. Aina: Jeg er så dum. Jeg hoppa opp to på den og en på resten. (Aina oppdager at det blir et «hakk» på grafen). Jeg hoppa opp to der og en på resten her så det blir ikke rett det her. (..) Okey, da blir den litt slakere da.

I ytring 23 er hun i ferd med å tegne grafen, men oppdager at hun ikke får en rett linje. Av figuren under (Figur 4.3) kan vi ser vi at det har blitt en feil med skaleringen av koordinatsystemet, slik at grafen får et «hakk» i koordinaten (1,104).


**Figur 4.3: Ainas tegning av grafen til polynomet i oppgave 1.**

Av figuren (Figur 4.3) kan vi se at Aina har skalert grafen feil. Men ut ifra koordinatene i den grafiske representasjonen kan vi allikevel se at strukturen med stigning i oppgaveteksten er bevart. Hun har etter min mening også riktig skjæring med y-aksen, men det er ikke lett å se av den grafiske representasjonen siden x-aksen skjærer y-aksen ved funksjonsverdien 100. Dessuten har hun plassert y-aksen slik at det ser ut som den skjærer x-aksen i $d$ = -1. Måten hun har satt opp koordinatsystemet på mener jeg kan være et tegn på slurv,

Jeg mener videre at en slik grafisk representasjon kunne ha skapt problemer for hennes videre arbeid med å representere denne funksjonen ved andre representasjoner. Dersom hun for eksempel skulle transformert informasjonen i grafen til et algebraisk uttrykk, ville hun kanskje fått problemer med å se hva konstantleddet til funksjonsuttrykket er, og kanskje også hvilken stigningskoeffisient den lineære funksjonen har.

Det at hun oppdager feilen med skaleringen i arbeidet med å tegne grafen, tolker jeg også som et tegn på bekreftelse i overgangsprosessen. Hun vet at grafen skal representere en lineær stigning,

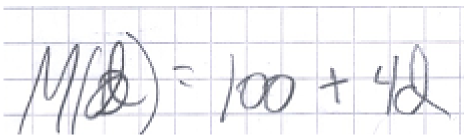
I neste del, som omhandler kategorien «Overgangen fra situasjon til lineære grafer», vil jeg se nærmere på en episode der et funksjonsuttrykk blir brukt som overgangsrepresentasjon mellom situasjon og graf.

## 4.2.2 Overgang via algebraiske representasjoner

Selv om Ola og Aina jobbet sammen med å omgjøre teksten i oppgave 1 til en graf, valgte de vidt forskjellige framgangsmåter. Som vi så i forrige delkapittel valgte Aina å lage en slags tabell før hun tegnet grafen. Ola, på sin side, valgte her å lage et funksjonsuttrykk direkte fra teksten i oppgave 1. Episoden under gir et innblikk i hvordan Ola gikk fram i løsningen av oppgaven.

[Elevarbeid; gruppe 1; sekvens 1]

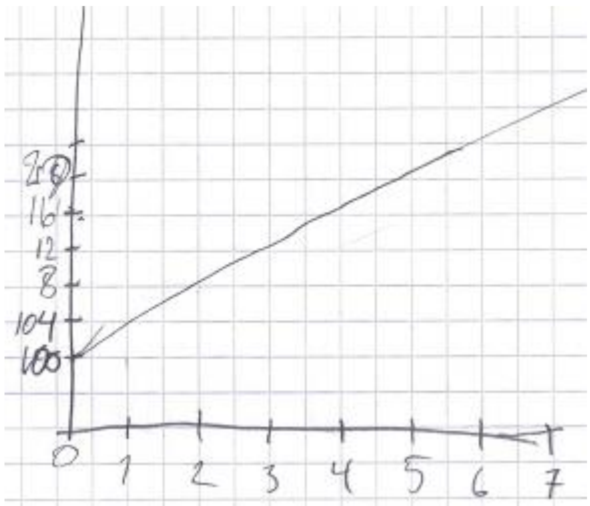
| | | |
|---|---|---|
| 23. | ST: | Kan du si noe om hvordan du gikk fram for å lage funksjonssuttrykket, «Ola»? |
| 24. | Ola: | Altså, (..) i utgangspunktet er den jo hundre da så det må stå 100 her (peker på konstantleddet), men så plusser man hele tiden den med fire i forhold til det forrige tallet dem sa. Så første blir hundre pluss fire ganger null da og andre blir hundre pluss fire ganger en osv. |




**Figur 4.4. Ola sin algebraiske representasjon av oppgave 1**

Av ytring 25 og figuren (Figur 4.4) kan vi se at Ola startet med å få på plass konstantleddet til funksjonsuttrykket. Han sier «i utgangspunktet er det hundre», noe jeg tolker som at fiskeren får 100 kilo fisk ved dag null. Han refererer her altså til konstantleddet ved å si at hundre er utgangspunktet. Dette tolker jeg som et tegn på attributtbekreftelse siden det bekrefter at en sentral «bit» ved teksten har blitt transformert korrekt til funksjonsuttrykket. Videre i ytringen mener jeg Ola gir uttrykk for både implementasjonsbekreftelse og ekvivalensbekreftelse. En implementasjonsbekreftelse fordi han bekrefter at stigningstallet til polynomet er 4 ved å verifisere hver enkelt funksjonsverdi i funksjonsuttrykket. Totalt gir dette Ola en ekvivalensbekreftelse ved å se at all informasjonen i teksten er bevart i funksjonsuttrykket.

Videre tegner Ola grafen ved hjelp av verdiene han setter inn for variabelen *d*. Dette tolker jeg av ytring 23 hvor han sier: «Så første blir hunder pluss fire ganger null da og andre blir hundre pluss fire ganger en osv.». Dette mener jeg illustrerer hvordan han er oppmerksom på stegene i denne prosedyren. Grunnen til det er at han systematisk setter inn en og en verdi i funksjonsuttrykket og får ut en korresponderende funksjonsverdi. Disse tallparene bruker han deretter til å tegne grafen. Som vi kan se av figuren under (Figur 4.5) har ikke Ola plottet inn koordinatene før han tegner den lineære grafen. Dette fører til at grafen blir tegnet litt unøyaktig. Jeg vil allikevel ikke tolke dette som noe implementeringsfeil eller mangel på bekreftelse på at implementeringen har blitt gjort riktig. Dette mener jeg fordi han har skrevet opp de korrekte funksjonsverdiene på y-aksen. Jeg tolker heller den grafiske representasjonen som en skisse.




**Figur 4.5. Ola sin grafiske løsning av oppgave 1**

Siden man i denne oppgaven ble bedt om representere polynomet grafisk synes jeg det er interessant at Ola valgte å først lage et funksjonsuttrykk før han tegnet grafen. På spørsmål om hvordan Ola og Aina ville ha gjennomført oppgaven svarer Ola følgende:

[Elevarbeid; gruppe 1; sekvens 1]

18. Ola: Jeg tenkte kanskje på en ligning

Videre forstår jeg i ytring 24 under at Ola blir usikker i det Aina foreslår at de kan tegne grafen ut ifra det de leser i teksten.

[Elevarbeid; gruppe 1; sekvens 1]

23. Aina: (-) Så vi kan bare tegne en graf bare med de åtte da (-)
24. Ola: (Ola lener seg tilbake) Jeg ble litt blank på den her jeg.

Ut ifra Aspinwall og Shaw (2002) sin teori om ulike tilnærminger til løsningsmetode av funksjoner, tolker jeg det dit hen at Ola har en analytisk tilnærming til løsningsmetoden. For å begrunne denne påstanden vil jeg trekke fram et utdrag fra intervjuet med Ola:

[Intervju med Ola]

11. ST: I går la jeg merke til at du først jobba med å få funksjonsuttrykket på plass. Er det det noen spesiell grunn til at du gjorde det først?
12. Ola: Ja, altså jeg liker å få på plass funksjonsuttrykket først fordi da ser jeg hvordan grafen blir.
13. ST: Så dette er en metode du er fortrolig med i slike type oppgaver?
14. Ola: Ja, eller det kommer litt an på oppgaven. Nå var ikke denne oppgaven så avansert da, men når den er det, liker jeg å regne ut funksjonsuttrykket først. Det blir liksom mer oversiktlig da.

Det at Ola i ytring 12 og 14 sier at problemet blir mer oversiktlig etter han har laget funksjonsuttrykket, tolker jeg som et tegn på at han kanskje synes det er vanskelig å tegne grafen uten å ha et funksjonsuttrykk å forholde seg til. Det at han sier at han foretrekker denne metoden når funksjonene er mer «avanserte», kan tyde på at han også mestrer denne fremgangsmåten i større grad enn det å tegne grafen direkte. Altså kan det tenkes at han er favoriserer den prosedyren det er å regne ut funksjonsverdier først, for så å plotte inn tallparene.

Som avslutning på denne overgangsprosessen blir Ola og Aina spurt om de ser noen sammenheng mellom den grafiske og algebraiske representasjonen. Her gir Aina følgende svar:

[Elevarbeid; gruppe 1; sekvens 1]

32. ST: Flott! Ser dere noen sammenheng mellom uttrykket og grafen?
33. Aina: Ja hvis vi tar for eksempel dag 3 da så ser vi det er 112 her [(3,112)]. Så har vi 100 for det er bunnen og plusser på 4x3 som er 112.

Jeg tolker Ainas utsagn i ytring 33 som en form for ekvivalensbekreftelse ved at hun drar sammenligningen mellom funksjonsverdien i funksjonsuttrykket og grafen, og dessuten bekrefter at stigningstallet i funksjonsuttrykket samsvarer med stigningen i grafen. Måten hun bekrefter overgangen på er allikevel ikke helt optimal, siden hun argumenterer ved å kun bruke ett eksempel. Med denne ene bekreftelsen kan hun dermed ikke være sikker på at alle koordinatene har blitt riktig implementert. I dette tilfelle kunne de ha foreligget implementasjonsfeil eller bevaringsfeil (Adu-Gyamfi et al., 2012)

### 4.2.3 Direkte overgang fra situasjon til graf

Den siste metoden som ble observert i elevarbeidet med å tegne grafer, var en direkte innplotting fra situasjonen i oppgaveteksten til graf. Denne episoden fant sted da gruppe to løste problemet i oppgave 2 (Se vedlegg A) ved først å tegne en graf før de lagde funksjonsuttrykket til polynomet i situasjonen. I oppgave 2 er det, som nevnt tidligere, gitt en oversikt av ordnede tallpar representert ved naturlig språk i oppgaveteksten. Selv om disse tallparene er satt opp systematisk under hverandre i stigende rekkefølge, skiller denne representasjonen seg etter min mening fra en tabell, eller en mengde med koordinater da de er representert i naturlig språk. Duval (2006) mener en overgang er kongruent dersom det er en umiddelbar sammenheng mellom komponentene i start- og målrepresentasjonen. Overgangen mellom denne representasjon og en grafisk representasjon vil derfor etter min mening være kongruent siden det er en direkte sammenheng mellom oversikten i oppgaveteksten og de ordnede tallparene i et koordinatsystem. I sekvensen under kan vi også se at Tom oppfattet teksten som en oversikt av ordnede tallpar.

[Elevarbeid; gruppe 2; sekvens 2]

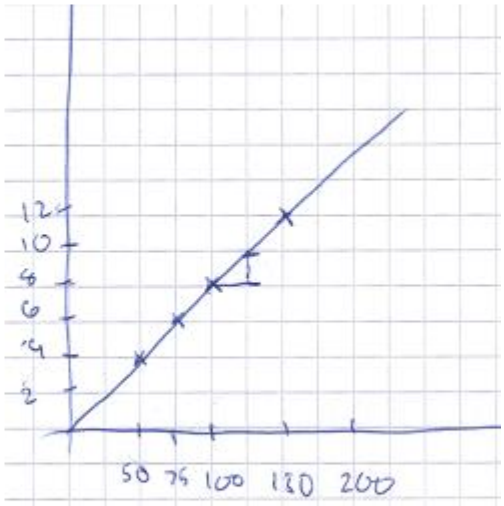
56. Tom: Det er jo allerede punkt i teksten da, så vi kan jo tegne de opp.

57. Ida: Altså fjærutslaget avhenger av massen (..) Så da vil f(m) være her siden den avhenger av m og m vil være langs x-aksen siden den er uavhengig

(…)

58. Ida: Ok, da bare plotter jeg det inn her(i koordinatsystemet) (..) 50 blir på 4…75 blir på 6 (...) 150 på 12. (for hver verdi av massen fører Ida fingeren opp til den korresponderende funksjonsverdien) (..) Da blir grafen slik.

Av episoden over kan vi se at Tom i ytring 56 oppfatter tallparene gitt i oppgaveteksten som punkter og foreslår derfor at de kan tegnes i et koordinatsystem. Videre ser vi i ytring 57 at Ida er i ferd med å tegne opp koordinatsystemet. Hun kontrollerer dessuten hvilke variabler som skal representere de to aksene i koordinatsystemet. Ida forklarer her for seg selv at f(m) må være langs y-aksen, siden den avhenger av m, mens m er uavhengig og derfor må gå langs x-aksen. Av teorien til Adu-Gyamfi et al. (2012) tolker jeg dette som en del av en implementasjonsbekreftelse siden hun her forsikrer seg selv mot å forveksle mellom f(m) og m. Det hun gjør i ytring 58 er også etter min mening et tegn på implikasjonsbekreftelse, både ved at hun bekrefter de korrekte «tallparene» fra oppgaveteksten, men også det at hun fører en finger fra første- og andrekoordinaten og tegner et kryss der de møtes. Slik bekrefter hun at implikasjonen har blitt riktig utført, og dermed forsikrer seg mot implementasjonsfeil (Adu-Gyamfi et al., 2012).




**Figur 4.6. Koordinatene er plottet inn som utgangspunkt for idas sin grafiske løsning av oppgave 2.**

Episoden over viser hvordan Ida systematisk plotter tallparene inn i koordinatsystemet før hun tegner den rette linjen i mellom dem. Vi ser også av figuren over (Figur 4.6) at Ida har gjort en riktig skalering. Hvis man tar hele denne episoden i betrakting vil jeg antyde at Ida både kan prosedyren med å plotte koordinater inn i et koordinatsystem og at hun dessuten gir oppmerksomhet til operasjonene underveis i overgangsprosessen.

## 4.3 Etablering av algebraiske representasjoner

I teorikapittelet presenterte jeg teori som antyder at det å gjennomføre overganger fra tekst, tabeller eller grafer til algebraiske representasjoner kan være utfordrende. Duval (2006) og Clement et al. (1981) viser til såkalte ikke-kongruente overganger mellom tekst og symboler, mens Leinhardt et al. (1990) påpeker at overgangen til algebraiske representasjoner ofte krever en global tolkning til funksjonen. Jeg vil derfor gjøre en analyse av hvordan utvalget mitt gjennomførte overgangen til algebraiske representasjoner fra henholdsvis grafiske representasjoner og tekst. I den første underkategorien av delkapittelet «Etablering av algebraiske representasjoner» vil jeg analysere overgangen fra graf til funksjonsuttrykk, mens jeg i kapittel 4.3.2 ser nærmere på ikke-kongruente overganger mellom tekst og algebraiske representasjoner.

### 4.3.1 Overgangen fra graf til funksjonsuttrykk

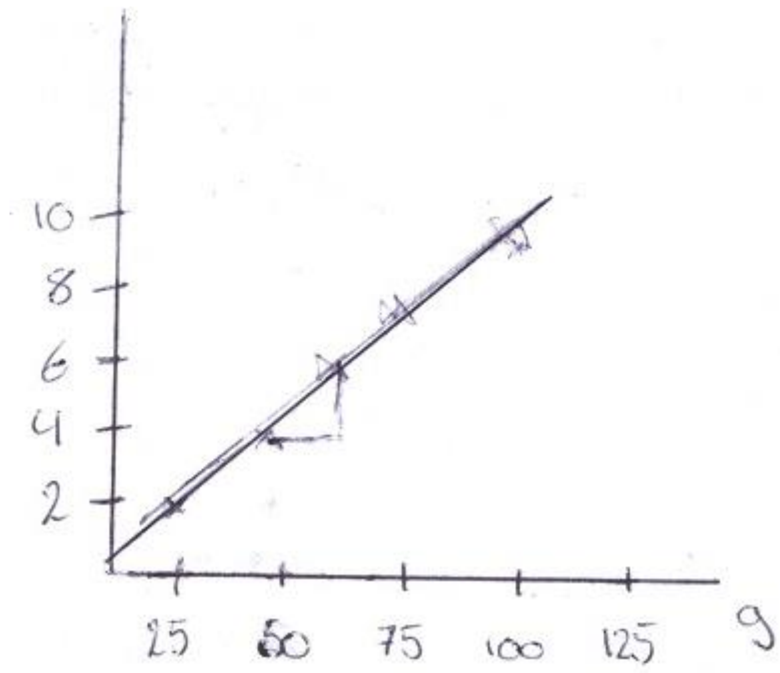
Som jeg nevnte i innledning av denne masteroppgaven vil en overgang fra situasjon til grafiske og algebraiske representasjoner indirekte kunne innebære en omgjøring av graf til et funksjonsuttrykk. Det mener jeg fordi det viser seg at flere elever bruker graf som overgangsrepresentasjon i overgangen mellom situasjon og algebraiske representasjoner. I dette underkapittelet vil jeg derfor fokusere på denne overgangen alene. I sekvensen under har Ola og Aina tegnet en graf av polynomet gitt i oppgave 2, og arbeider med å tolke grafen.

[Elevarbeid; Gruppe 1; Sekvens 2]

54. Aina: Stigningstallet er fire på en måte eller, nei, to (..) nei, nei, jeg veit ikke jeg
55. Ola: Jeg veit ikke om jeg kan si noe mye om stigningstallet for da blir det jo to
56. Aina: Stigningstallet er jo det bakerste
57. Ola: Nei, det er det derre konstantleddet.
58. Aina: Jeg mener det som ganger m'en pluss et konstantledd
59. Ola: Nei, ganger x'en

Ytringene i starten av denne sekvensen kan indikere at det er en del usikkerhet rundt begrepene stigningstall og konstantledd. I denne oppgaven er ikke koordinatene gitt ved hver masseenhet (x-aksen). De er gitt ved (50,4), (75,6), (100,8) og (150,12). Ytring 54 kan derfor tolkes slik at Aina tenker på endringen av andrekoordinat per førstekoordinat av de koordinatene som er gitt i oppgaven. Men hun kanskje blir usikker da endringen av andrekoordinaten både er to og fire i de gitte koordinatene. Det er derfor etter min mening usikkert om Aina i ytring 56 tenker på stigningstallet som endring i andrekoordinat, eller det bakerste leddet i et funksjonsuttrykk.

Videre i sekvensen ser vi at de diskuterer hvordan et generelt utrykk for førstegradspolynomer ser ut. Aina presiserer her at stigningstallet er «det som ganger m'en» og at konstantleddet er «det bakerste». Om man sammenligner Ola og Aina sine utsagn i ytring 58 og 59 med begrepsbeskrivelsene til Thompson og Martinsson (1997) om leddene i polynomer (Kapittel 2.5), vil jeg si at det finnes likheter, men også forskjeller. Førstegradleddet i et polynom kjennetegnes ved at det inneholder produktet av stigningstallet og en variabel, mens konstantleddet er kun gitt ved en konstant (Thompson & Martinsson, 1997). Ainas og Ola sin forklaring om at det er stigningstallet som ganger m'en, kan etter min mening betraktes som et vitenskapelig begrep. Konstantleddet derimot, trenger ikke å være «det bakerste», slik Aina forklarer det. Jeg tror allikevel problemet ligger i at de har vanskeligheter med å knytte informasjonen fra grafen slik at den gir mening i funksjonsuttrykket. I sekvensen under kan vi imidlertid se at de kommer seg videre i arbeidet med litt drahjelp.




**Figur 4.7. Ainas grafiske løsning av polynomet i oppgave 2**

[Elevarbeid, gruppe 1; sekvens 2]

60. ST: Av grafen deres går funksjonen igjennom origo. Hva kan det si om funksjonen?

61. Ola: Hm (..) Nå står det helt stille her.

62. Aina: Hm, (..) da har den ikke noe konstantledd, nei! Eneste plassen den skjærer y-aksen og det er på null så den har ikke noe.

Vi ser altså her av ytring 62 at Aina nå klarer å overføre informasjonen om skjæringspunkt med y-aksen, til at polynomet ikke har et konstantledd. Selv om Aina ikke klarer å relatere informasjonen til proporsjonale størrelser, mener jeg dette er et eksempel på at Aina uttrykker en reflekterende kunnskap om førstegradspolynomer. Dette eksempelet viser også kanskje at interaksjonen mellom elever og mellom «lærer» og elev kan gagne elevens læring og utvikling, hvilket er et sentralt område i den sosiokulturelle læringsteorien (Vygotsky, 1987).

Jeg synes det også er verdt å legge merke til hvordan Aina argumenterer for hvorfor polynomet ikke har noe konstantledd. Ved at hun sier at «den eneste plassen den (grafen) skjærer y-asken er på null, så da har den ikke noe (konstantledd)», tolker jeg som en attributtbekreftelse, og at hun med det bekrefter at egenskapen med skjæringspunktet i den grafiske representasjonen er bevart i målrepresentasjonen. Det at hun sier «eneste plassen» kan allikevel si noe om hennes kunnskap om funksjoner, eller hennes forståelse av funksjonsbegrepet. Jeg antyder her altså at hun ikke viser kjennskap til vilkåret om at funksjoner på må være entydige.

Den siste delen som gjenstår i elevenes arbeid i overgangen fra graf til funksjonsuttrykk, er å representere stigningstallet til førstegradspolynomet algebraisk. Dette var også noe som virket utfordrende for elevene. Som vi kan se av dialogen under virker Ola og Aina litt i villede.

[Elevarbeid; gruppe 1; sekvens 2]

66. Ola: Om vi ganger stigningstallet med m'en, så vil det si.. Går det an å skrive 2m her da?

67. Aina: Blir ikke det rett? To ganger m blir jo 50 (..) det sier jo bare et steg

68. Ola: Nei da blir jo utslaget på fjæra 50, men det skal jo bli 2! Hva er det vi må gange 25 med for å få to da?

69. Aina: Ganger med 25 for å få to? (..) Det blir kvadratroten, nei 25 (..) 12,5 (..) 0,025, nei herregud!

70. ST: Har dere vær borte i en måte dere kan regne ut stigningstallet til lineære grafer?

71. Aina: En opp. Hvor mye det blir opp?

72. Ola: Her har vi jo 25 bort kan vi jo se.

73. Aina: Ja 25 bort blir 2 opp [snakker om x- og y-koordinater] 25/2, ta 25 delt på 2_

74. Ola: Vi får et stigningstall på 0,08

75. Aina: Åja, selvfølgelig! Sett inn det da så ser vi om det stemmer.

76. Ola: 0,08*25 blir 2, så da blir jo stigningstallet 0,08

77. Aina: Så da blir funksjonsuttrykket f(m) = 0,08m

I ytring 66-68 mener Ola at stigningstallet er to, men slår dette fra seg da han ser at fjærutslaget blir alt for stort ved at Aina putter inn verdien 25 for m. Dette kan etter min mening igjen være et tegn på attributtbekreftelse (Adu-Gyamfi et al., 2012). Han skjønner at de må finne en konstant eller en faktor som er slik at når de multipliserer den med en verdi av massen vil man få den korresponderende funksjonsverdien. Selv om de her kun bruker et eksempel med verdien 25, og at de ikke knytter dette til en spesifikk egenskap for proporsjonale størrelser, er det allikevel et tegn på at de forstår egenskapene ved proporsjonalitet. Jeg mener altså at de her uttrykker en multiplikativ relasjon mellom variablene *f* og *m*.

Videre blir Ola og Aina spurt om de vet hvordan de kan regne ut stigningstallet til lineære grafer, hvor Aina svarer i ytring 71 «en opp, hvor mye det blir opp?». Her er jeg usikker på om Aina egentlig mener «en bort». Uansett karakteriserer jeg disse utsagnene med «opp» og «bort» som hverdagsbegreper for endring av x og y. Jeg tror nødvendigvis ikke at slike formuleringer trenger å ha så store konsekvenser for deres gjennomføring av overgangen mellom graf og funksjonsuttrykk. Men jeg tror allikevel det er viktig at elevene er oppmerksomme på at slike beregninger begrenses til å regne ut stigningen for rette linjer som tangenter og førstegradspolynomer.

I utregningene av stigningstallet oppstår det også et hinder. Vi kan se av ytring 72 at Ola observer at det «er 25 bort» og Aina følger opp med å observere at «25 bort blir 2 opp». Dette blir tegnet opp i den grafiske representasjonen som vi kan se av Figur 5.7. Allikevel utrykker verken Ola eller Aina forholdet mellom disse endringene. I dette tilfellet fører det til at Aina antyder feil forhold ved å si «ta 25/2». Dette tolker jeg som en implementasjonsfeil for å følge Adu-Gyamfi et al. (2012) sin teori om vanlige feil i overgangsprosessen, rett og slett fordi jeg tror hun forveksler variablene *f* og *m* idet hun skal regne ut forholdet mellom dem.

Til slutt synes jeg det er verdt å legge merke til hvordan Ola og Aina bekrefter at utregningene deres er riktige. De setter nemlig inn én verdi for *m* og får ut den korresponderende funksjonsverdien. Siden de allerede vet at polynomet ikke har noe konstantledd mener jeg dette kan være et eksempel på både attributt- og ekvivalensbekreftelse. Attributtbekreftelse for de verifiserer at stigningen til polynomet er bevart gjennom overgangsprosessen, men og ekvivalensbekreftelse siden de allerede vet at polynomet kun har et førstegradsledd. Adu-Gyamfi et al. (2012) poengterer at begge disse bekreftelsene kan foregå i en og samme handling, noe jeg mener dette gir et eksempel på. Allikevel tror jeg måten elevene argumenterer på her, altså ved hjelp av et eksempel, ikke sikrer en korrekt utført transformasjon i alle tilfeller. Det at de kun tester for en verdi, sikrer dem ikke mot at andre verdier av *m* har blitt implementert riktig. I andre tilfeller kan dette i mine øyne resultere både i implementasjonsfeil og bevaringsfeil.

### 4.3.2 Ikke-kongruente overganger fra tekst til funksjonsuttrykk

I denne delen av analysen tar jeg for meg gjennomføringen av ikke-kongruente overganger fra tekst til algebraiske representasjoner. Ifølge Duval (2006) kan slike overganger være utfordrende fordi det ikke finnes noen direkte relasjon mellom startrepresentasjonen og målrepresentasjonen. Tidligere forskning antyder dessuten at mange elever har misoppfatninger som forårsaker feil i arbeidet med ikke-kongruente overganger fra tekst til algebraiske representasjoner (Clement, 1982; Clement et al., 1981; Rosnick & Clement, 1980). Jeg vil i dette delkapittelet se nærmere på hvordan utvalget i undersøkelsen min gjennomførte disse overgangene, og hvilke eventuelle misoppfatninger som kan legges til grunn for deres feil i gjennomføringen. I episoden under diskuterer Hans og Ida gjennomføringen av oppgave 3, hvor man skal lage et funksjonsuttrykk som beskriver situasjonen: «I storkiosken til Frederik blir det solgt tre ganger så mange hamburgere som pølser».

[Elevarbeid; gruppe 2; sekvens 4]

161. Hans: Her tenkte jeg med engang på ligningssett da men

162. Ida: ja, man setter vel opp en ligning for det her?

163. Hans: ja, eh (..) Ja, da går det vel tre hamburgere per pølse da. Det vil si at H = p/3, men ja, blir det ikke sånn? Skal vi se.. Tre ganger så mange hamburgere som pølser. Ja, så om det er tre hamburgere da, så er det en pølse, så 3H = P blir det vel da.

$$H = \frac{P}{3} \qquad 3H = P$$

**Figur 4.8. Hans sin løsning av oppgave 3**

Ytring 163 og Figur 4.8 forteller etter min mening noe om Hans sin fremgangsmåte i denne oppgaven. Han skriver opp to forskjellige uttrykk som representerer det samme forholdet mellom variablene H og P. Slike besvarelser tror jeg kan komme av det Duval (2006) kaller oversettelse eller koding av teksten. Altså at man oversetter ord for ord fra oppgaveteksten og gjør dem om til matematiske symboler. Det kan dessuten se ut som det er en sammenheng mellom hva Hans sier i ytring 163 og ligningene han presenterer. Altså da han sier «tre hamburgere per pølse» representerer han ligningen som en brøk, mens utsagnet «tre hamburgere, så er det en pølse ombestemmer han seg og skriver 3H = P. Det kan derfor virke som han også oversetter sin muntlige uttale til matematiske symboler.

Det at han i ytring 163 sier at det er tre hamburgere og en pølse indikerer etter min mening at han er klar over hva oppgaven tilsier. Altså at antall hamburgere som selges er større enn antallet pølser. Allikevel mener han at forholdet mellom hamburgere og pølser bør representeres ved 3H = P. Jeg vil derfor mene at Hans i dette tilfellet har en misoppfattelse av begrepet variabel som et vilkårlig element i en mengde (Thompson & Martinsson, 1997). Besvarelsen til Hans samsvarer også bra med resultater fra tidligere forskning, beskrevet i kapittel 2.4.1 (Clement et al., 1981). Altså ved ikke-kongruente overganger mellom tekst og symboler, kan det med relativt stor hyppighet forekomme tilfeller hvor elevene «vender om» variablene i det algebraiske uttrykket. Tegnene H og P vil ikke i slike tilfeller symbolisere variabler, snarere betegnelser som hører til mengden 3 og 1 (Clement et al., 1981). I slike tilfeller vil likhetstegnet ifølge Clement et al. (1981) kunne betraktes som en statisk sammenligning mellom to ulike mengder, snarere enn et symbol på likhet.

En slik tolkning av variabler tror jeg kan være spesielt for denne typen oppgaver, men jeg mener det allikevel sier noe om Hans sin begrepsforståelse av variabler. For å begrunne dette vil jeg trekke fram en episode fra elevenes arbeid med oppgave 2, hvor de var i ferd med å tegne aksene til et koordinatsystem.

[Elevarbeid; Gruppe 2; Sekvens 2]

41. Hans: eh (..) m'en, står den for 25 gram eller?
42. Ida: hm nei? Jo, vent!
43. Hans: m'en står liksom alltid for 25 gram ekstra eller?
44. Tom: m'en står for vekta, gjør den ikke det da, eller massen?
45. Hans: Ja, hvordan skal vi skrive inn den da? 25m eller 25g mener jeg?

I denne oppgaven er den uavhengige variabelen massen og er betegnet med bokstaven *m*. Av ytringene til Hans i sekvensen over kan det se ut som han er usikker på hva m'en står for. I ytring 45 lurer han på om han skal skrive verdien 25 som 25m eller 25g. Av denne ytringen kan det dermed se ut som han sidestiller variabelen m og betegnelsen g, og at variabelen er noe søm hører til verdien m, i stedet for at 25 er en verdi i mengden m.

Hans sin besvarelse av oppgave 3, kan være et eksempel på at en slik tolkning av variabler kan føre til feil. Jeg vil til slutt i dette delkapittelet trekke fram en episode som er ganske lik episoden over. Men til forskjell fra episoden over er dette eksempel som viser at man kan unngå denne typen feil ved å gi mer oppmerksomhet til egen besvarelse.

[Elevarbeid; gruppe 1; sekvens 4]

179. Aina: Blir det ikke bare 3H = P
180. Ola: Ja! (..) Nei, vent! Er det det? Er det ikke motsatt?
181. Aina: Men om dem selger to pølser da, så selger dem seks hamburgere. Det blir jo tre ganger så mye hamburgere. (..) Men da blir det ikke likt nei (..) det blir 18 = 2. Ja, da er det H = 3P da eller? 6 = 3*2

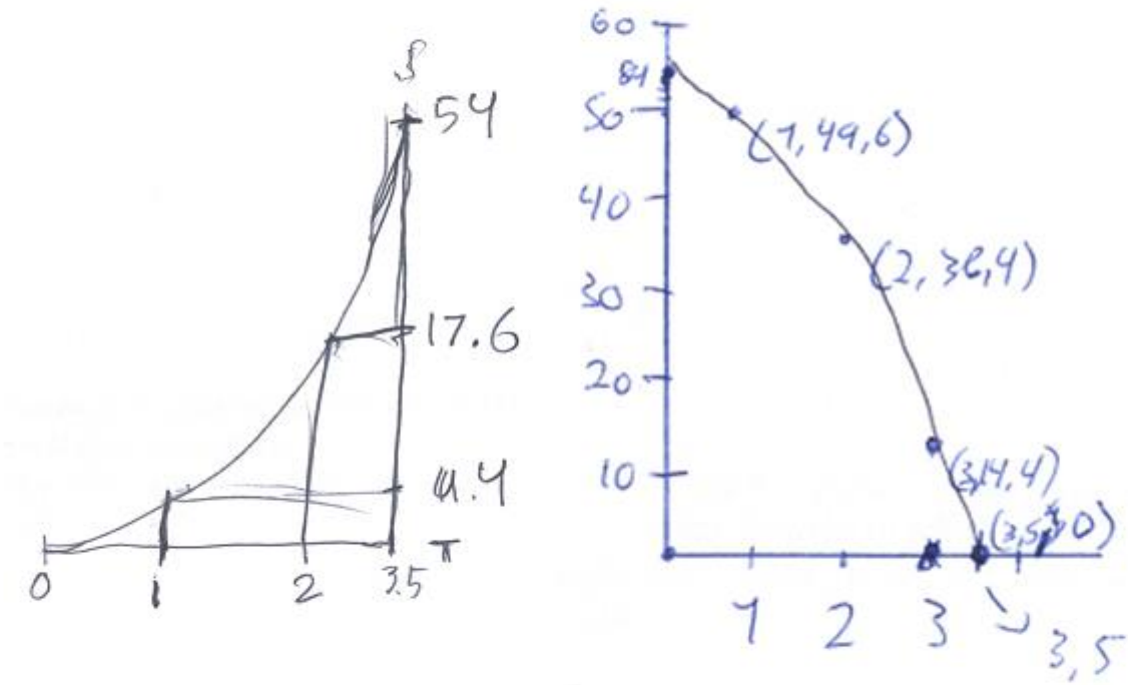
I ytring 181 oppdager Aina at det ikke blir en likhet i ligningen hun opprinnelig hadde satt opp. Dette bekrefter hun ved å sette inn verdiene to og seks for henholdsvis P og H. Dette eksempelet mener jeg illustrerer teorien til Adu-Gyamfi et al. (2012) ved at man bør bekrefte at overgangen har blitt riktig gjennomført gjennom tre typer bekreftelser. Det at hun setter inn verdien 2 for pølser og verdien 6 for hamburgere mener jeg kan være et eksempel på implementeringsbekreftelse da hun bekrefter at seks er tre ganger så mye som to. Dermed oppdager hun også at disse verdiene gir en likhet til ligningen dersom hun bytter variablene H og P. Dette kan etter min mening betraktes som både attributtbekreftelse og ekvivalensbekreftelse.

## 4.4 Elevenes grafiske tolkning av andregradspolynom.

I denne delen av analysen tar jeg for meg elevenes gjennomføring av overgangen fra situasjon til grafisk løsning av andregradspolynomer. I oppgave 4 ble elevene bedt om å tegne en graf som beskrev en stuper sin avstand til stupebrettet som funksjon av tiden (se vedlegg A). Oppgaveteksten inneholder et funksjonsuttrykk som beskrev denne situasjonen, i tillegg til informasjon om utgangshøyden til stupet. I dette kapittelet presenterer jeg to tilfeller hvor det oppstod misoppfatninger hos elevene i arbeidet deres med å tegne grafen til andregradspolynomet. I det første tilfellet, som blir presentert i kapittel 4.4.1, oppstod det en situasjon som jeg karakteriserer som en billedlig tolkning av graf. I kapittelet 4.4.2 tar jeg for meg en situasjon der det oppstod usikkerhet rundt ekstremalverdiene til andregradspolynomet. Her ser jeg også nærmere på hvordan dynamiske matematiske verktøy hjalp elevene til å forandre deres tolkning av grafen.

### 4.4.1 Billedlig tolkning av grafisk representasjon’

Funksjonsuttrykket $s(t) = 4{,}4t^2$ betegner avstanden stuperen har til stupebrettet etter tiden t. Dette skulle tilsi at avstanden øker for enhver positiv t. Allikevel tolket elevene situasjonen slik at verdien av funksjonsuttrykket minket med tiden. I dette kapittelet går jeg nærmere inn på hvordan denne situasjonen oppstod.




**Figur 4.9. Til venstre vises Tom sin løsning av oppgave 4. Hans og Ida sin løsning vises til høyre.**

Jeg tolker Figur 5.9 slik at Hans og Ida (til høyre) har en ulik tolkning enn Tom (til venstre) av den grafiske løsningen i oppgave 4. Tom har tegnet en graf som viser at strekningen øker kvadratisk med tiden. Linjen han har tegnet, som skjærer t i t = 3,5, tolker jeg som en slags hjelpelinje snarere enn Toms tolkning av y-aksen. Hans og Ida har derimot valgt å tegne grafen med skjæringspunkt i s = 54 og en negativ endring i s som funksjon av tiden. I forhold til (Bell & Janvier, 1981; Leinhardt et al., 1990) sine teorier om billedlig tolkning av grafer, mener jeg at Hans og Ida har blitt distrahert av situasjonen i teksten. Jeg antar dermed at de har tolket grafen billedlig i form av at de har tegnet grafen slik situasjonen utarter seg. Her vil altså x-aksen betegne vannoverflaten, mens skjæringspunktet med y-aksen betegner startposisjonen til stuperen. Det er etter min mening interessant å se nærmere på hvordan, og når i overgangsprosessen denne distraksjonen oppsto. Sekvensen under viser Tom, Ida og Hans, som regner ut funksjonsverdiene til funksjonsutrykket i teksten.

[Elevarbeid; Gruppe 2; Sekvens 3]

105 Ida: Så etter et sekund er det 4,4

106 Tom: I andre. Da er det 4,4 da. Én i andre er jo én.

107 Hans: Etter to sekund er det 17,6. for det er 4,4 ganger 4 for det er to i andre

(-)

112 Hans: 12.25 ganger 4,4 er 53,9. Da er han jo i vannet

113 S: Hvor er han etter null sekunder da?

114 Hans: Etter null sekund har han null meter fra stupebrettet da. Da er han jo langt oppå der (viser med fingeren).

(-)

118 Hans: Det er 49,6 etter ett sekund, fordi det er 4,4m fra stupebrettet

(-)

121 Hans 54 – 17,6 (..) sånn og etter 3,5..

Som vi kan se av fra ytring 105 til 112 velger alle deltakerne å bruke funksjonsuttrykket i oppgaveteksten til å regne ut avstanden til stupebrettet etter hvert sekund. Det kan deretter se ut som om Hans i ytring 114 blir distrahert av situasjonen ved at han tenker på at stuperen befinner seg «langt oppe der» etter null sekunder. Det er også interessant å se at selv om han poengterer at avstanden til stupebrettet er null meter idet stupet starter, velger han å «plassere» stupebrettet på 54 meters høyde. Det fører til han heller trekker funksjonsverdiene fra 54m, som var stuperens utgangshøyde. Jeg tolker det derfor slik at Hans velger å endre på funksjonsuttrykket for at det skal passe med situasjonen til stuperen. Dette passer etter min mening bra overens med teorien til (Leinhardt et al. (1990)), som mener at slike billedlige tolkninger i stor grad kan være distraherende faktorer når elever konstruerer grafer av situasjoner. Under diskusjonen rundt grafene i etterkant av arbeidet argumenterer Tom, Ida og Hans for hvilken løsning de synes er riktigst.

[Elevarbeid; Gruppe 2; Sekvens 3]

143 ST: Hvis dere skulle sett på uttrykket da. For dere har litt forskjellig løsning. Kan dere kanskje diskutere hverandres løsning?

144 Tom: Det blir jo den som passer best (Peker på Hans og Ida sin graf)

145 Hans: Han faller jo nedover sånn nå da (Beveger hånden i en buet form, som et fall)

146 Tom: Ja, den blir det som passer best til den ekte verden liksom

147 Ida: Ja, men din er jo også rett da, for det er jo avstand fra stupebrettet. Din er rett hvis man kun tenker matematisk, vi tenker mer på det som et fall.

149 Hans: ja, som posisjonen til stuperen

Av denne diskusjonen synes jeg det er interessant å se at selv Tom, som hadde forstått oppgaven riktig, i ytring 144 og 146 mener at Hans og Ida sin graf er den riktige grafen av hensyn til den «ekte verden». Av ytring 147 kan vi se at Ida synes Tom sin løsning er best om man kun tenker matematisk, men understreker samtidig at de tenkte på et fall da de tegnet grafen. Hun starter dessuten med å si i denne ytringen at Tom «også» hadde rett. Dette tolker jeg slik at hun også mener har hennes og Hans sin graf også er riktig, men på andre betingelser. Hans sier tilslutt at deres graf er riktig med tanke på posisjonen til stuperen. Etter min mening er dette korrekt, men det er allikevel ikke det oppgaven konkret spør om.

Med utgangspunkt i dialogen mellom elevene i etterkant, og utregningene til Hans og Ida, antyder jeg at slike billedlige tolkninger «veier tungt» i elevene framgangsmåte og argumentasjon i forbindelse med grafer som omhandler situasjoner. Jeg mener dette med bakgrunn i at de først bekrefter riktige første- og andrekoordinater i utregningene av funksjonsverdiene, men endrer på disse da de implementerer grafen. Jeg synes egentlig ikke det er så rart, da det å tegne grafen som avstand til stupebrettet kanskje ligger på et høyere abstraksjonsnivå, enn det elevene kanskje er vandt med fra tidligere. Det å tegne posisjonen til stuperen etter tiden t er dessuten noe elevene kan knytte til erfaringer.

### 4.4.2 Bruk av GeoGebra som hjelpemiddel ved utforming av grafer

I likhet med den andre gruppa regnet Ola og Aina ut funksjonsverdiene til funksjonsuttrykket i oppgave 4, før de etter hvert skisserte grafen.

[Elevarbeid; sekvens 3; gruppe 1]

| | | |
|---|---|---|
| 152 | Ola: | Så det blir 17,6, så vi skulle tegne en graf (…) Blir det ikke noe sånt da? (Skisserer grafen) Blir det ikke en sånn eksponentialfunksjon? |
| 153 | Aina: | Det blir et polynom. Det går jo først opp og så ned igjen (skisser grafen på sitt ark) |
| 154 | ST: | Hvorfor mener du med det «Aina»? |
| 155 | Aina: | Fordi, den har et toppunkt når den treffer vann, åh, nå må jeg tenke. (..) Den snur på 54! Den har et toppunkt på 54 for da treffer han vannet. Den gjør jo det (tegner grafen videre fra t=3,5). |
| 156 | Ola: | Men snur den når den treffer vannet? Han kommer vel ikke nærmere stupebrettet igjen? |
| 157 | Aina: | Nei, han gjør jo ikke det! Men en sånn graf (Beveger hånden i en buet bevegelse, som funksjonen $-x^2$), en sånn som har noe i andre, snur seg jo. Den speiler seg jo. (…) Vi kan jo bare gjøre det i GeoGebra da. |

I ytring 152 tolker Ola grafen som en eksponentialfunksjon. Jeg tenker at han har en oppfatning av at grafer som vokser raskere og raskere er eksponentielle. Aina mener derimot i ytring 153 og 155 at det er et polynom. Det begrunner hun med at alle funksjoner som «har noe i andre» speiler eller snur seg. Jeg tolker derfor dette utsagnet som et hverdagsbegrep Aina har for andregradspolynomer. Det kan virke som hun har en oppfatning om at grafen må ha et toppunkt «et eller annet sted», og trekker slutningen om at det er der han treffer vannet som virker mest logisk siden han da mister fart. Dette kan også etter min mening oppfattes som det Bell og

Janvier (1981) kaller en situasjonsdistrahering, altså når erfaringer med situasjonen forstyrrer elevenes oppmerksomhet til egenskapene ved grafen.

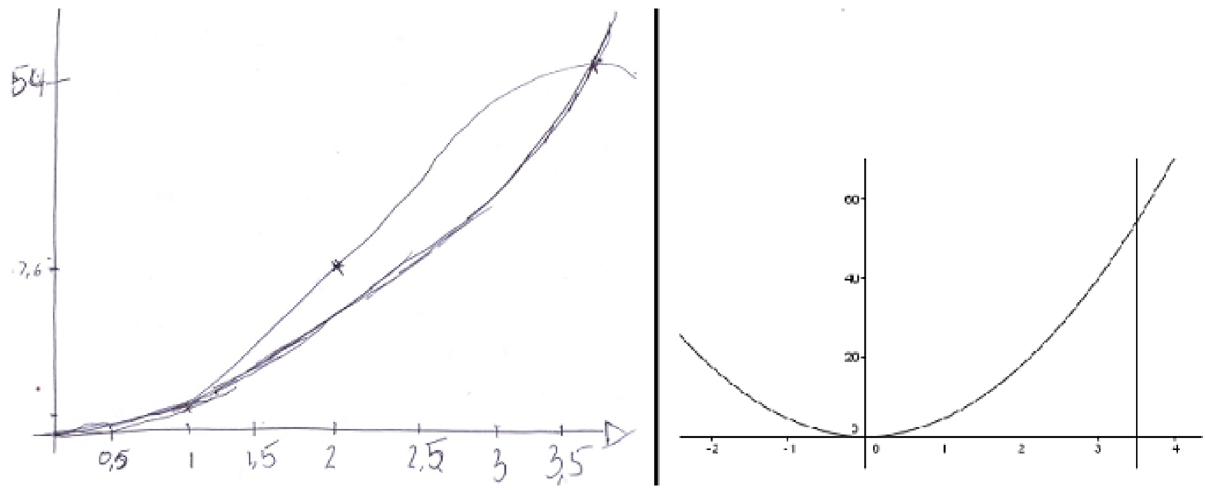
Denne episoden mener jeg også forteller noe om hvordan elevene uttrykker seg om andregradspolynomer. Jeg synes det er usikkert om Ola fokuserer på grafen når han spør om den har en eksponentiell vekst, eller om han sikter til funksjonsuttrykket, og tenker at den kan ha en eksponentiell vekst siden uttrykket er opphøyd i andre. Aina, på sin side, uttrykker en viss forståelse av andregradspolynomer ved at hun sier at den må speile seg om et ekstremalpunkt (toppunkt i dette tilfellet) siden «den har noe i andre». Jeg tror derfor hun ikke hadde hatt denne tvilen dersom hun også hadde sett for seg hele funksjonens definisjonsmengde. Det er kanskje av den grunn hun spør om de skal tegne grafen med GeoGebra.

Av ytring 157 kan det virke som om GeoGebra er noe elevene har gode erfaringer med fra tidligere skolearbeid. Dette viser også dialogen under.

[Elevarbeid; gruppe 1; sekvens 3]

| | | |
|---|---|---|
| 161. | ST: | Har du fått inn grafen «Ola»? |
| 162. | Ola: | Ja, et øyeblikk. s(t) = $4.4t^2$, var det det? |
| 163. | Aina: | Ja. |
| 164. | Ola: | Det blir rart, det ble så mye bortover. |
| 165. | Aina: | Åja, men du må zoome inn på x-aksen der |
| 166. | Ola: | Okey! („,) der ja! Også etter 3,5 sekunder, var det det? |
| 167. | Aina: | ] Ja. Åh, så dum jeg er! Den har jo selvfølgelig bunnpunkt der (peker på origo) |
| 168. | Ola: | ] Skal vi se (..) skjæring med t=3,5 (..) 53.9! |

Som vi kan se av dialogen over, virker det som om elevene har trent inn prosedyrer i hvordan tegne grafer med GeoGebra. For det første viser Ola i ytring 162 hvordan han definerer funksjonsuttrykket i GeoGebra. Da grafen ikke ble synlig på skjermen, viser Aina at han er løsningsorientert ved at hun ber Ola zoome inn på x-aksen da hun oppdager at koordinatsystemet er skalert med veldig høye verdier i x-aksen. Til slutt avgrenser Ola grafen ved å lage en linje som skjærer funksjonen etter 3,5 sekunder (se Figur 4.10). De avgrenser riktignok ikke funksjonen til kun positive t-verdier, men dette resulterer samtidig i at Aina oppdager at funksjonen ikke har noe toppunkt ved t=3,5, men et bunnpunkt i t=0.




**Figur 4.10. Ainas grafiske løsning (Til venstre) og en gjengivelse av Ola og Ainas løsning med GeoGebra (Til høyre)**

Av Figur 4.10 kan vi se at kan vi se at Aina endret sin tolkning av grafen etter at de hadde løst oppgaven gjennom programvaren GeoGebra. Jeg støtter med derfor bak teorien til Yerushalmy (2006) om at dynamiske matematiske programvarer i flere tilfeller kan hjelpe elevene i å forstå egenskapene til funksjoner fremfor å gjøre det med penn og papir.

# 5 Diskusjon

Diskusjonskapittelet i denne oppgaven har jeg valgt å dele inn i fem delkapitler med utgangspunkt i inndelingen av analysekapittelet mitt. Jeg vil derfor først, i delkapittel 5.1, diskutere elevenes tolkning av innholdet i oppgaveteksten. I delkapittel 5.2 av vil jeg diskutere elevenes gjennomføringer av overgangen fra situasjon til grafer, mens jeg i kapittel 5.3 diskuterer elevenes arbeid med å etablere algebraiske representasjoner ut ifra tekst og grafer. I disse delkapitlene mener jeg det er nærliggende å trekke inn Adu-Gyamfi et al. (2012) sin teori om bekreftelser som bør finne sted underveis i overgangsprosessen. Grunnen til det er for å kunne diskutere elevenes evner til å bekrefte at overgangene utføres korrekt. Jeg vil deretter diskutere hvordan eventuelle feil kan oppstå. Disse feilene vil jeg betrakte ut ifra Adu-Gyamfi et al. (2012) kategorisering av vanlige feil som oppstår i overgangen mellom representasjoner av funksjoner. Videre vil jeg i kapittel 5.4 diskutere elevenes grafiske tolkning av andregradspolynomer. Diskusjonen av dette området er kun basert på elevarbeidet av én oppgave. Det er kanskje et for tynt grunnlag til at man kan trekke konklusjoner og generalisere, men jeg mener allikevel oppgaven danner grunnlag for å kunne danne enkle antagelser. Her vil jeg diskutere elevenes tolkninger ut ifra Bell og Janvier (1981) og Leinhardt et al. (1990). I del

5.5 av diskusjonen vil jeg komme med mine egne betraktninger rundt gjennomføringen av studien. Her vil jeg diskutere studiens validitet og reliabilitet.

## 5.1 Diskusjon av elevenes tolkning av oppgavetekstens innhold

I analysekapittel 4.1 presenterte jeg noen episoder der elevene tolket egenskaper til polynomer gitt i oppgaveteksten. Enkelte funn fra studien gir her en indikasjon på at elevenes tolkning av oppgavens innhold kan ha til dels store konsekvenser for om overgangen blir riktig utført. Av analysen vil jeg også antyde at naturlig språk som startrepresentasjon kan være utfordrende for elever å tolke fordi det kan være vanskelig å se hvilke egenskaper ved funksjonene som medieres gjennom teksten. Et eksempel på dette var da Aina og Ola først påstod at økningen til funksjonen i oppgave 1 hadde var eksponentiell. Dette skiller etter min mening tekster fra grafer, tabeller og funksjonsuttrykk som startrepresentasjon. Med grafer kan man for eksempel fysisk se når en funksjon øker eller minker. Det samme gjelder funksjonsuttrykk og tabeller der egenskapene til funksjonen kan være lettere å kjenne igjen gjennom f. eks. leddene i funksjonsutrykket eller endring av verdiene i tabeller. Jeg synes derfor det ikke er så overaskende at elevene ved denne studien hadde vanskeligheter med å tolke egenskapene til polynomene gjennom oppgaveteksten.

En annen grunn til at det kan være utfordrende å tolke egenskaper til polynomer ut ifra en tekst, er det Adu-Gyamfi et al. (2012) kaller attributt-tetthet.[9] Attributt-tetthet handler om forholdet mellom relevante verdier, ord eller begreper i representasjonen, og ikke-relavante verdier, ord eller begreper (Adu-Gyamfi et al., 2012). Tekstoppgaver, eller situasjon i form av naturlig språk, vil kunne ha lav attributt-tetthet fordi det kan være mange ord i teksten som ikke er relevante for løsningen av oppgaven i forhold til hvor mange som er det. Dette kan også være en årsak til at tekstoppgaver generelt blir oppfattet som utfordrende (Koedinger & Nathan, 2004).

Videre ble det analysen trukket fram hvor viktig det kan være å gi oppmerksomhet til sine egne tolkninger og utregninger, selv i en tidlig fase av overgangsprosessen. Dette mener jeg begge episodene fra kapittel 4.1.1 gir eksempel på. Ola og Aina fikk bekreftet at funksjonen ikke kunne ha eksponentiell vekst ved å sammenligne verdiene til funksjonsuttrykket. Mens Hans, Ida og Tom bekreftet at polynomet i oppgave 2 var lineær ved å sammenligne verdiene i

[9] Attributt-tetthet er min oversettelse av begrepet Attribute density

oversikten av de ordnede tallparene. I begge tilfellene tror jeg det kunne ha oppstått feil i besvarelsene om det ikke ble gjort slike bekreftelser.

Til slutt vil jeg kommentere elevenes tolkning av notasjoner i oppgaveteksten. Denne studien avdekket ikke mange tilfeller hvor elevene mistolket begreper eller notasjoner, men enkelte elever hadde allikevel problemer med å tolke en notasjon for definisjonsmengde. En konsekvens av elever mistolker eller ikke bryr seg om viktigheten til definisjonsmengden kan for eksempel være at man tegner en graf for områder der variabler ikke definert.

## 5.2 Diskusjon av elevenes gjennomføring av overgangen fra situasjon til graf

Resultatene fra undersøkelsen viser tegn til at elever mestrer overgangen fra situasjon til grafer og at det er en variasjon blant elevenes foretrukne fremgangsmåter ved denne overgangen. Enkelte elever går via en form for tabell, mens andre velger å transformere informasjonen direkte fra situasjonen til graf, uten bruk av overgangsrepresentasjoner. Undersøkelsen viser også et tilfelle hvor funksjonsuttrykk blir foretrukket som en overgangsrepresentasjon.

Jeg tror valg av fremgangsmåte i gjennomføringen av overgangen fra situasjon til graf kan avhenge av situasjonen (oppgaven), og relasjonen mellom i start- og målrepresentasjonen. Duval (2006) uttrykker at kongruente overganger kan oppfattes som relativt enkle, altså når det er en direkte relasjon mellom komponentene i start- og målrepresentasjonen. I oppgave 2 i undersøkelsen dette etter min mening tilfellet, siden oversikten i oppgaveteksten korresponderte med ordnede tallpar i en grafisk representasjon. Dette kan være grunnen til at elevene i gruppe 2 valgte å transformere informasjonen direkte fra situasjon til graf.

Av analysen kan det også tyde på at elever transformerer informasjon via en overgangsrepresentasjon fordi det gir dem en bedre oversikt over hvordan polynomet «ser ut». Dette ga både Ola og Aina uttrykk for i undersøkelsen, selv om de hadde en ulik tilnærming til overgangen. Ola valgte å gjøre en transformasjon via et funksjonsuttrykk, mens Aina gikk via en tabell i overgangen til grafen. Det at Ola valgte å gå via et funksjonsuttrykk mener jeg kan være et tegn på han har en analytisk tilnærming til overgangene (Aspinwall & Shaw, 2002).

Selv om elevene i denne studien i stor grad mestret overgangen fra situasjon til grafiske representasjoner, kan man ikke utelukke at det kan oppstå feil ved slike overganger. Adu-Gyamfi et al. (2012) beskriver implementasjonsbekreftelse som en verifikasjon på at en steg-for-steg metode eller prosedyren med i overgangsprosessen har blitt riktig utført. Implementasjonsfeil eller utregningsfeil kan derfor kan derfor oppstå dersom man utfører overgangen uten å gi oppmerksomhet til stegene i prosedyren.

## 5.3 Diskusjon rundt elevenes etablering av algebraiske representasjoner

I fjærutslag-oppgaven valgte samtlige elever i undersøkelsen først å gjøre om teksten til en grafisk representasjon. Som jeg nevnte i kapittel 5.1 kan det være et resultat av at elevene opplevde vanskeligheter med å tolke egenskapen om proporsjonalitet ut ifra hva som står i teksten. En grunn til at de valgte å tegne grafen til polynomet, kan være at de har erfaring med lese av grafer. Altså kan det å lage et funksjonsuttrykk ut i fra en graf være noe de har gjort før og dermed kjenner prosedyren til. I tillegg kan det å tegne en graf gjøre at de for en bedre oversikt over hvordan polynomet ser ut i og med at de fysisk kan se grafen for seg. I analysedelen ble det antydet at elevene klarer å gjenkjenne egenskaper ved polynomer gjennom en grafisk representasjon, og dessuten knytte denne informasjonen til et funksjonsuttrykk. Et eksempel på det kan være da Aina og Ola så at grafen gikk gjennom origo og at polynomet dermed ikke hadde noe konstantledd.

Studien signaliserer allikevel at enkelte elever kan ha vanskeligheter med å utrykke stigningstallet i en algebraisk representasjon ut i fra deres tolkning av grafer. Elevene ga uttrykk for at de visste at stigningstallet er representert som en faktor i førstegradleddet i et funksjonsuttrykk. Men de hadde problemer med finne hva denne faktoren var. En grunn til det kan være at polynomets stigningstall ikke er like «tilgjengelig» for elevene som det konstantleddleddet er. Det krever en kunnskap om hvordan man skal regne ut stigningstallet for en rett linje. I dette tilfellet ble det forsøkt å dividere førstekoordinat med andrekoordinat. En konsekvens av dette kan være det Adu-Gyamfi et al. (2012) kategoriserer som tolkningsfeil.

Av pølser og hamburger-oppgaven, som omhandlet en ikke-kongruent overgang fra tekst til algebraisk representasjonen var det flere elever som mente at den korrekte løsningen var 3H = P. Ut ifra teorien til Clement et al. (1981) og Duval (2006) kan dette være et tegn på at elevene har oversatt de matematiske symbolene direkte fra teksten. Clement et al. (1981) antyder også at feilen kan skyldes at elevene ser på variablene (i dette tilfellet H og P) som enheter snarere enn vilkårlige elementer i en mengde. For eksempel at H hører til tallet 3. Denne studien viser at dette kan være tilfellet for enkelte elever, men at selv elever med korrekt en forståelse variabler kan bruke fremgangsmåten med direkte oversettelse av teksten. Denne oppgaven var også et godt eksempel på det Adu-Gyamfi et al. (2012) mener er viktige aktiviteter i overgangsprosessen. Altså det å være oppmerksom på sine egne utregninger og tolkninger i form av bekreftelser. I tilfellet hvor svaret ble kontrollert fikk, ble eleven oppmerksom på at hun hadde gjort en feil, hva hun måtte endre ved uttrykket for å få riktig svar. Dette krever riktignok at man ser på bokstavene H og P som variabler.

## 5.4 Diskusjon av elevenes grafiske tolkning av andregradspolynomer

I elevenes arbeid med stuper-oppgaven, ble det oppdaget et par interessante funn rundt elevenes grafiske tolkning av andregradspolynomer. I undersøkelsen ble det riktignok kun gitt en oppgave som tar for seg andregradspolynomer, så omfanget av denne studien er etter min mening for snever til at man kan si så mye om elevenes forståelse av andregradspolynomer på et generelt grunnlag. Fra den første episoden som omhandler stuper-oppgaven, kan man allikevel se tegn til at det forekommer billedlige tolkninger av grafer blant 1T-elever. Altså at man ved konstruksjon eller observasjon av grafer, tolker grafen av en situasjon som et bilde av selve situasjonen (Bell & Janvier, 1981; Leinhardt et al., 1990). Det er også et interessant funn at selv Tom, som ikke hadde tolket grafen billedlig, ikke var overbevist om at hans tolkning var mer korrekt enn dem som hadde tolket grafen billedlig. Hans og Ida, som hadde tolket grafen billedlig, var dessuten heller ikke overbevist om at deres tolkning var ukorrekt. Dette kan være et tegn på at billedlige tolkninger er vanskelig for elever å kvitte seg med. En grunn til det tror jeg kan være at disse tolkningene er så nært knyttet til elevenes intuisjon og erfaringer fra lignende situasjoner at det kan være vanskelig å «se på situasjonen» på en ny og kanskje mer abstrakt måte.

I episoden med den andre gruppen oppfattet elevene oppgaven korrekt ved at de forstod at stuperens avstand til stupebrettet øker med tiden. Et interessant funn her var da Aina mente at det burde være et toppunkt der stuperen traff vannet. Denne påstanden knytter jeg til Ainas kunnskap om andregradspolynomer i og med at hun forstår at polynomer av grad to må ha et ekstremalpunkt. Det at hun antok at dette måtte være et toppunkt, og at toppunktet var der stuperen traff vannet, tolker jeg som et tegn på situasjonsdistrahering. Altså at erfaringer den gitte situasjonen forstyrrer elevenes oppmerksomhet til egenskapene ved grafen (Bell &

Janvier, 1981). Selv om denne episoden har noen fellestrekk med situasjonen over, mener jeg også at de er forskjellige ved at påstanden eller argumentasjonen til Aina er matematisk forankret, og ikke forankret i situasjonen. Det er forskjell på at grafen minker fordi stuperen faller, og påstanden om det må være et toppunkt der stuperen treffer vannet, siden det ifølge Aina er et kjennetegn ved polynomer.

Til slutt vil er det verdt å legge til hvordan arbeid med programvaren GeoGebra kan endre elevenes tolkning av grafer. Aina fikk bekreftet at polynomet hadde et ekstremalpunkt, men i form av et bunnpunkt og ikke et toppunkt, som hun først antok. Det virker derfor som om elever ved 1T har god kjennskap til bruksområdene til GeoGebra og at dette er et hjelpemiddel de kan støtte seg til.

## 5.5 Diskusjon av studiens validitet og reliabilitet

Enkelte tilhengere av kvalitativ forskning har ønsket å forkaste begreper som validitet (gyldighet) og reliabilitet (pålitelighet). Grunnen til det er at de mener at slike begreper er basert i en kvantitativ logikk og er tilpasset kvantitative metoder (Thagaard, 1998, som sitert i Jacobsen, 2000). Jacobsen (2000) mener imidlertid at det er viktig å kritisk drøfte gyldigheten og påliteligheten til studien siden det bidrar til å kvalitetssikre de dataene man har samlet inn. I dette delkapittelet vil jeg i kapittel 5.5.1 diskutere denne studiens validitet. I Kapittel 5.5.2 diskuterer jeg svakheter ved oppgaveheftet til undersøkelsen. Dette faller også under studiens validitet, men jeg har valgt å la denne delen stå for seg selv. Til slutt vil jeg i kapittel 5.5.3 diskutere studiens reliabilitet.

### 5.5.1 Studiens validitet

I følge Jacobsen (2000) kan man skille forskningens validitet ved to aspekter, nemlig indre og ytre validitet. Indre validitet handler om i hvilken grad forskerens funn virkelig kartlegger det fenomenet man forsker på (Ringdal, 2001). Ytre validitet derimot, går ut på i hvilken grad studiens funn kan generaliseres (Ringdal, 2001).

Siden jeg i dette masterprosjektet forsket på et lite utvalg elever, med et lite antall oppgaver, mener jeg at denne studien er lite egnet til å gjelde for alle 1T-elever. Dette er heller ikke så unaturlig da jeg har forsket med en kvalitativ tilnærming. Ifølge Fangen (2004) står nemlig ikke generalisering så sterkt i kvalitative forskning. I utformingen av elevundersøkelsen min ble jeg riktignok inspirert av oppgaver ved tidligere studier. Dette gjelder professor og student-oppgaven til Clement et al. (1981). Deler av resultatene fra min undersøkelse viste seg å samsvare med disse tidligere forskningsresultatene. Dette mener jeg kan styrke generaliserbarheten til funnene ved disse oppgavene. Allikevel mener jeg dette også kan svekke validiteten til studien. Grunnen til det er at jeg hadde fordypet meg i de tidligere forskningene på forhånd av undersøkelsen min slik at jeg hadde viss innlevelse da jeg tolket datamaterialet mitt. Dette kan dermed ha ført til at jeg tolket resultatene mine i forhold til de tidligere forskningsresultatene i for stor grad. Fangen (2004) mener at forskeren bør stille seg spørsmålet, «hva betyr dette?» i stedet for «hva tilsvarer dette?».

En strategi jeg brukte som jeg mener kan opprettholde validiteten til studien er det Robson (2011) kaller triangulering. Triangulering innebærer å se på den aktuelle situasjonen fra flere synsvinkler. I undersøkelsen min benyttet jeg meg av forskningsmetoder som observasjon og intervju. Observasjonen ga meg innblikk i hvordan elevene gjennomførte overgangene mellom representasjonene, mens intervjuene i etterkant bidro til å forsterke eller avkrefte de funnene som ble observert under elevarbeidet. I tillegg til min egen tilstedeværelse under observasjonen og intervjuene benyttet jeg meg av video- og lydopptak. Dette ga meg muligheten til å gå igjennom elevenes arbeid og forklaringer på nytt. Dette mener jeg bidrar til at jeg foretar riktige tolkninger av situasjoner og dermed styrker validiteten til studien.

Det at jeg gjennomførte intervjuene dagen etter observasjonen av elevarbeidet, førte til at jeg hadde anledning til å gå gjennom datamaterialet i forkant av intervjuene. Jeg tror allikevel det hadde vært mer optimalt og ventet yttligere noen dager før jeg gjennomførte intervjuene. Det hadde gitt meg muligheten til å gå grundigere igjennom datamaterialet fra observasjonen, slik at jeg kunne stilt enda bedre forberedt til intervjuene av deltakerne.

Jacobsen (2000) uttrykker at validiteten til studiens data kan avhenge av hvilken fase av undersøkelsen datainnsamlingen fant sted. Gjennomføringen av datainnsamling min foregikk relativt sent i prosjektperioden. Jeg brukte derfor mye av tiden i forkant av datainnsamlingen til å lese meg opp på interessant teori. Mye av teorien var nært knyttet til problemstillingen min, mens annen teori ikke kunne knyttes til studien min i like stor grad. Jacobsen (2000) mener at det kan være en fordel å samle inn data i en sen fase av undersøkelsesprosessen da man kan tilegne seg mye kunnskap om det fenomenet man undersøker. Blant annet kan det føre til at forskeren blir mer fokusert, og at man får en klarhet i hva man vil lete etter (Jacobsen, 2000). Da jeg utarbeidet elevundersøkelsen min hadde jeg tilegnet meg mye kunnskap om overganger mellom matematiske representasjoner, men mye av kunnskapen jeg hadde tilegnet meg omhandlet flere ulike aspekter av overgangene. Dette tror jeg påvirket hvordan oppgavene ble utformet, og hvilke spørsmål som ble stilt i intervjuene. Et resultat av dette kan være at jeg fikk en del data som kanskje var lite egnet for formålet med min studie. På en annen side tror jeg det er vanskelig å predikere hvilke data man vil få ut av observasjoner og intervjuer. Jacobsen (2000) nevner at en svakhet med å gjennomføre datainnsamlingen sent i prosessen, er at man kan se seg blind på eventuelt nye forhold og momenter, og at man bare leter etter informasjon som støtter opp om de antakelsene man har dannet seg tidligere i forskningsprosessen. Både spørsmål jeg har stilt i intervjuene og oppgavene i elevundersøkelsen kan derfor ha blitt utviklet for å underbygge mine antakelser.

Til slutt vil jeg legge til en siste element som kan være en trussel for stuiens validitet. Dette gjelder informasjonen utvalget fikk i forkant av elevarbeidet. Som jeg forklarte i metodekapittelet ga jeg beskjed til elevene at jeg ville at fremgangsmåten i oppgavene ble dokumentert skriftlig. Her ser jeg i etterkant at jeg kunne ha vært enda tydeligere. Et resultat av dette var at jeg i større grad måtte tolke fremgangsmåtene deres ut i fra hva de ga utrykk for under elevarbeidet og i intervjuene. Dette kan være en feilkilde ved at jeg kan ha tolket deres utsagn feil. Et tiltak som kunne ha redusert denne feilkilden hadde vært å skrevet ned noen punkter i starten av oppgavene slik at elevene ville være klar over at de skulle skrive ned alle utregningene på ark.

I neste underkapittel av diskusjonen vil jeg evaluere oppgavene oppgavesettet som ble utarbeidet som grunnlag for observasjonen av elevarbeidet.

### 5.5.2 Evaluering av oppgaveheftet

I dette delkapittelet diskuterer jeg validitet i forhold til utformingen av selve oppgavene i elevundersøkelsen. Noen av oppgavene inneholder elementer som kunne ha blitt framstilt annerledes, mens andre oppgaver mener jeg er gode for å beskrive elevenes gjennomføring av overganger mellom matematiske representasjoner. Jeg vil i denne evalueringen kun trekke inn oppgavene jeg synes kunne vært fremstilt annerledes.

**Oppgave 1**

> En fisker som nettopp har startet med makrellfiske beregner at han vil kunne klare å fiske 100kg makrell den første dagen av makrellsesongen. Sesongen varer i åtte dager og all erfaring tilsier at det vil være en økning på 4kg fisket makrell per dag. Funksjonen M(d)

beskriver antall kilo fisket makrell, M, fiskeren kan forvente å få på en vilkårlig dag *d* i makrellsesongen. Tegn grafen til M(*d*) der $d \in [0, 7]$.

Med denne oppgaven hadde jeg som mål og se på hvordan elever gjennomførte overgangen fra tekst til graf av et førstegradspolynom. Altså hvordan elevene klarte å tolke at funksjonen var lineær og at riktig skjæringspunkt og stigningstall var bevart i grafen.

Et viktig punkt i forhold til denne oppgaven er notasjonen jeg har valgt for definisjonsmengden. Siden denne funksjonen er diskre gir funksjonen kun mening ved hele tall. Det at jeg har brukt klammeparenteser indikerer imidlertid at variabelen $d$ er et vilkårlig element i mengden av naturlige tall. En riktig notasjon i dette tilfellet vil altså være $d \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$.

Selv om variabelen d var satt til å eksistere mellom 0 og 7, sammen med oppgaveteksten som sa at «makrellsesongen varer i åtte dager», ble det en uklarhet i oppgaven da den første dagen i makrellsesongen ikke ble merket med $d_0$. Jeg poengterte imidlertid dette underveis i elevenes arbeid med oppgavene, men det resulterte allikevel i at enkelte elever betraktet «den første» dagen som d=1. De som satte m(1) = 100 fikk et skjæringspunkt i origo, hvilket for meg virker fornuftig da man ikke har noen fangst før man starter å fiske. Dette argumenterte også enkelte elever med under arbeidet.

**Oppgave 3**

«I storkiosken til Frederik blir det solgt tre ganger så mange hamburgere som pølser». Bruk H til å representere hamburgere og P til å representere pølser. Kan du lage en ligning som passer til denne situasjonen?

I utformingen av denne oppgaven ble jeg inspirert av Clement et al. (1981) sin student- og professor oppgave. Jeg endret imidlertid variablene til hamburgere og pølser. Det gjør at elevene ikke har et forhold eller intuisjon om hvilken mengde som er størst. Med det mener jeg at det like godt kan bli solgt flest pølser som hamburgere på en bensinstasjon, mens på et universitet eller en skole, vil det som regel være flere elever enn lærere. Jeg mener allikevel at oppgaven gir meg mulighet til å måle om elevene oversatte direkte fra oppgaveteksten og dessuten deres forståelse av variabler.

Ellers ville jeg komme med en bemerkning om oppgave 2, der elevene valgte å transformere informasjonen via en grafisk representasjon. Elevene jeg gjennomførte undersøkelsen med hadde ikke fått opplæring i derivasjon. I derivasjonskapittelet i læreboken, som elevene i undersøkelsen brukte, blir forskjellen på momentan og gjennomsnittlig vekstfart gjennomgått.

1T-elever generelt vil antageligvis være bedre rustet til å gjennomføre slike overganger etter en repetisjon av gjennomsnittlig vekstfart. Dette mener jeg altså spiller inn på den ytre gyldigheten (generaliserbarheten) til studien.

### 5.5.3 Reliabilitet

Reliabilitet omhandler studiens pålitelighet er et sentralt begrep i kvalitetssikringen av vitenskapelige undersøkelser (Ringdal, 2001). I følge Ringdal (2001) reliabiliteten til studien ut på om gjentatte målinger med standardiserte måleinstrument gir samme resultat. I kvalitative forskningsmetoder i form av observasjon, mener Robson (2011) at observatøren er det standardiserte måleinstrumentet. I den sammenhengen kan det være tilknyttet flere feilkilder som blant annet miljømessige distraksjoner, avbrytelser eller feil i transkripsjonene (Robson, 2011). På et mer generelt plan innenfor kvalitative studier mener (Robson (2011)) det er viktig at forskeren ikke bare er forsiktig og ærlig gjennom hele forskningsprosessen, men også at man kan vise til at man har vært det. For mitt vedkommende er det da viktig at jeg har kunnet dokumentere forskningen min på en helhetlig måte. Jeg har valgt å løse dette ved å være ærlig og åpen i utarbeidingen av undersøkelsen, om datamaterialet mitt og om valg av analyseverktøy. I analysen har jeg brukt elevenes skriftlige arbeider i tillegg til transkripsjoner fra både observasjonen og intervjuene. Dette vil da bidra til å styrke reliabiliteten i studien min.

# 6 Avslutning og perspektivering

Denne studien har bygget på et sosiokulturelt syn på læring og jeg har fokusert på å besvare problemstillingen: *Hvordan gjennomfører 1T-elever overgangen fra situasjon til grafiske og algebraiske representasjoner av polynomer.*

For å kunne besvare denne problemstillingen har jeg basert studien på kvalitative forskningsmetoder. Datamaterialet ble samlet inn gjennom videoopptak av 1T-elevers arbeid med et oppgavehefte, i tillegg til lydopptak av intervjuer med hver enkelt elev. Etter anvendelse av en konstant komparativ analysemetode ble datamaterialet kategorisert til firekategorier som har bidratt til å besvare problemstillingen.

Resultatene i studien viser at 1T-elever kan oppleve utfordringer med tolke oppgaver som omhandler situasjoner i form av naturlig språk. Disse utfordringene er i stor grad knyttet til tolkningen av egenskaper ved polynomene.

Videre viser denne studien at elever kan ha ulik tilnærming til overgangen fra situasjon til grafiske representasjoner av førstegradspolynomer. Enkelte elever kan foretrekke å transformere informasjon via en tabell, mens andre kan foretrekke å gå via et funksjonsuttrykk. Dessuten kan noen elever velge å overføre informasjonen i oppgaveteksten direkte til en graf. Elevenes valg av fremgangsmåte kan riktignok avhenge av informasjonen i oppgaven og målrepresentasjonen.

Studien indikerer også at elever kan oppleve overgangen fra situasjon til algebraiske representasjoner som utfordrende. Årsaken til det kan ligge i både start- og målrepresentasjonens natur, men det kan også skyldes at elever kan ha vanskeligheter med å se en klar relasjon mellom komponentene i et naturlig språk og komponentene i et funksjonsuttrykk.

Et aspekt ved besvarelsen av problemstillingen min var å se på hvordan elever bekrefter at overgangene deres har blitt korrekt utført. Studien viser at elevene i stor grad gir oppmerksomhet til deres utregninger ved de ulike fasene i overgangsprosessen, og kan de bekrefte om omgjøringen er korrekt utført ellet ikke. Dette kan også være en årsak til at det ble avdekket få feil i elevenes besvarelser. Allikevel har studien, som nevnt over, vist at det kan ligge utfordringer i overgangen mellom de matematiske representasjonen. Det er derfor etter min mening grunn til å tro at de ulike feilene, som Adu-Gyamfi et al. (2012) kategoriserer, kan oppstå. Videre forskning innenfor dette temaet kunne derfor innebære å inkludere et større utvalg, med en større variasjon av mulige overganger. Dette tror jeg kan bidra til å avdekke hvor i overgangsprosessen elevene ofte gjør feil og hvilke tiltak man kan gjøre som lærer for å redusere slike feil.

Et siste funn ved studien er at elever kan ha en billedlig tolkning av grafiske representasjoner, og at slike tolkninger kan veie tungt i elevenes argumentasjon om hva som er en korrekt grafisk representasjon av situasjonen. Det antydes også at bruk av programvaren GeoGebra kan hjelpe elevene med å forandre deres grafiske tolkning av andregradspolynomer.

I elevarbeidet knyttet til denne studien hadde elevene anledning til å bruke GeoGebra, men det var kun ved en episode at de benyttet muligheten. Denne studien gir derfor i svært liten grad dekning for å si noe om hvordan bruk av GeoGebra kan påvirke elevenes gjennomføring av overganger mellom matematiske representasjoner. I den moderne skole har data-teknologi etter min mening fått en sterk posisjon i undervisningen. Videre forskning kan derfor innebære å se nærmere på hvordan GeoGebra påvirker elevenes gjennomføringer av slike overganger. Dette ville ikke naturligvis kun innebære å forske på overganger mellom representasjoner av polynomer, men også kanskje andre typer funksjoner.

# Bibliografi


Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V. & Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. *School science and mathematics, 112*(3), 159-170.

Aspinwall, L. & Shaw, K. L. (2002). Representations in Calculus: Two Contrasting Cases. *Mathematics Teacher, 95*(6), 434-439.

Bell, A. & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the learning of mathematics*, 34-42.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16-30.

Clement, J., Lochhead, J. & Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *American Mathematical Monthly*, 286-290.

Daniels, H. (2001). *Vygotsky and pedagogy*. London, UK: Routledge Falmer.

Daniels, H. (2007). Pedagogy *The Cambridge companion to Vygotsky*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Dubinsky, E. (1993). Advanced educational technologies for mathematics in science. I D. L. Furgeson (Red.), *Computers in teaching and learning discrete mathematics and abstract algebra* (s. 525-583). New York: Springer-Verlag.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Fangen, K. (2004). *Deltagende observasjon*: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Firestone, W. A. (1993). Alternative arguments for generalizing from data as applied to qualitative research. *Educational researcher, 22*(4), 16-23.

Gagatsis, A. & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657.

Jacobsen, D. I. (2000). *Hvordan gjennomføre undersøkelser?* : Høyskoleforlaget AS.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 27*, 32.

Koedinger, K. R. & Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *The Journal of the Learning Sciences, 13*(2), 129-164.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*. Chicago: University of Chicago Press.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research, 60*(1), 1-64.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 33-40.

Marshall, C. & Rossman, G. B. (2006). *Designing Qualitative Research* (4th utg.): Sage Publications.

Nathan, M. J. & Koedinger, K. R. (2000). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 168-190.

Nathan, M. J., Long, S. D. & Alibali, M. W. (2002). The symbol precedence view of mathematical development: A corpus analysis of the rhetorical structure of textbooks. *Discourse Processes, 33*(1), 1-21.

Nilsen, V. (2012). *Analyse i kvaltitative studier: Den skrivende forskeren*: Universitetsforlaget.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode - En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2 utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Repstad, P. (1987). *Mellom Nærhet og distanse*: Universitetsforlaget AS.

Ringdal, K. (2001). *Enhet og Mangfold* (Vol. 1): Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Robson, C. (2011). *Real World Research* (3rd utg.): John Wiley & Sons Ltd.

Rosnick, P. & Clement, J. (1980). Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. *The Journal of mathematical behavior*.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign?–An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 133-162.

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: Et sosiokulturelt perspektiv*.

Thompson, J. & Martinsson, T. (1997). *Kunnskapsforlagets matematikkleksikon*: Kunnskapsforlaget.

Utdanningsdirektoratet. (2006a). *Læreplan i matematikk fellesfag - kompetansemål etter 1T*. Lastet ned 26.04.2014 fra: http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal/?arst=1858830316&kmsn=2088314978

Utdanningsdirektoratet. (2006b). *Læreplan i matematikk fellesfag - kompetansemål etter 10. årstrinn*. Lastet ned 26.04.2014 fra: http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal/?arst=98844765&kmsn=583858936

Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech *The collected works of L. S. Vygotsky: Vol. 1. Problems of general psychology*. Ney York: Plenum Press.

Yerushalmy, M. (2006). Slower algebra students meet faster tools: Solving algebra word problems with graphing software. *Journal for Research in Mathematics Education*, 356-387.

## Vedlegg A: Oppgavehefte til elevundersøkelsen

**Oppgave 1)**

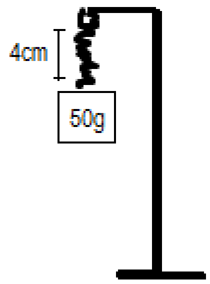
En fisker som nettopp har startet med makrellfiske beregner at han vil kunne klare å fiske 100kg makrell den første dagen av makrellsesongen. Sesongen varer i åtte dager og all erfaring tilsier at det vil være en økning på 4kg fisket makrell per dag. Funksjonen M(d) beskriver antall kilo fisket makrell, M, fiskeren kan forvente å få på en vilkårlig dag d i makrellsesongen. Tegn grafen til M(*d*) der

Grafen kan tegnes på eget ruteark

b) Beskriv kort med ord hvordan du gikk fram da du løste oppgaven.

**Oppgave 2)**

Under et forsøk i en naturfagstime blir du bedt om å feste ulike lodd til en fjær, som henger på et stativ. Deretter skal du måle utslaget på fjæra (i cm) ut ifra massen til ulike lodd. Under gjennomføringen av forsøket bruker du fire forskjellige lodd med masse 50g, 75g, 100g og 150g. Resultatene av forsøket ble som følger:




Med 50g-loddet målte du utslaget på fjæra til å være 4cm

Med 75g-loddet målte du utslaget på fjæra til å være 6cm

Med 100g-loddet målte du utslaget på fjæra til å være 8cm

Med 150g-loddet målte du utslaget på fjæra til å være 12cm

Her er massen m en uavhengig variabel, mens fjærutslaget f avhenger av m. Lag et funksjonsuttrykk der du kan beregne et tilfeldig fjærutslag f med hensyn på m.

| Svar: |
| --- |
| |

**Oppgave 3)**

«I storkiosken til Frederik blir det solgt tre ganger så mange hamburgere som pølser». Bruk H til å representere hamburgere og P til å representere pølser. Kan du lage en ligning som passer til denne situasjonen?

| Svar: |
|---|

**Oppgave 4)**

Det høyeste stupet som har blitt utført ble målt til en høyde på 54m. Vi antar at stupet kan beregnes matematisk ved formelen $s = 4{,}4t^2$ på intervallet . Her betegner $s$ avstanden fra stupebrettet etter tiden, t. Tegn en graf som beskriver avstanden fra stupebrettet ved tiden t.

| |
|---|
| Svar: |

## Vedlegg B: Generell Intervjuguide

**Semi-strukturert intervju**

Hva synes du var utfordrende/lett med denne oppgaven (stilles til hver oppgave)?

Var det begreper ved denne i oppgaven du hadde vanskeligheter med å forstå?

Hvordan går du fram når du leser en tekstoppgave som dette?

Hva synes du er viktig å tenke over når du skal omgjøre oppgaveteksten til et funksjonsuttrykk eller graf?

Til hvilken representasjon (graf, tabell, ligning, funksjonsuttrykk etc.) synes du det er vanskeligst/enklest å omgjøre fra en tekst. Hvorfor?

Kan du si noe om hvor ofte du, og når du jobber med slike typer tekstoppgaver(lærebok, prøver, ellers)?

## Vedlegg C: Transkriberingsnøkkel

**Transkripsjon av lyd- og videopptak:**

**]** B snakker samtidig med A:

A: ] Skal vi se (..) skjæring med t=3,5. 53.9!

B: ] Den har jo selvfølgelig bunnpunkt der

[] Uartikulert eller ytring som ikke er hørbar

(..) Nøling

(…) Pause inntil 10 sekunder

(-) Har hoppet over irrelevante utsagn.

«» Uttale av en bokstav

A: Hva er «d» «e» null komma sju

_ Avbrytelse
(understrek) A avbrytes av B:
A: Stigningstallet er jo på en måte_

B: det om ganger x

(tekst) Henvisning til et fenomen eller en bevegelse som blir gjort av deltakerne.

[tekst] Min tolkning av elevenes beskrivelse av matematiske begrepet

Transkripsjonskodene er inspirert av kodene til Heidi Strømskag Måsøval.

## Vedlegg D: Anmodning om tillatelse til lyd- og videoopptak

## Til foreldre/foresatte for elever på _______ ved __________ skole

### Anmodning om tillatelse til lyd- og videoopptak av intervju og observasjon

Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved NTNU i Trondheim. Jeg skal i løpet av vårsemestret 2014 gjennomføre en masteroppgave i matematikkdidaktikk der jeg vil se på hvordan elever gjør om tekstoppgaver til grafiske og algebraiske uttrykk av polynomer.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, har jeg i samråd med min veileder kommet til at det vil være ønskelig å gjøre lydopptak av intervju med elever. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å kunne gjøre lydopptak og videoopptak av elever i faget matematikk ved __________ skole. Det er snakk om omlag 30 minutter for enkelte av elevene. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert så langt råd er, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er naturligvis helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Intervjuene vil skje i etterkant av at de har svart på utvalgte oppgaver innenfor temaet funksjoner slik at jeg kan få informasjon om hvordan elevene tenker når de har løst oppgavene. Opptakene vil kun bli hørt av meg og min veileder. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil det ikke være mulig å spore tilbake til enkeltindivider ettersom involverte personer vil bli anonymisert. Etter at oppgavene (undersøkelser og presentasjoner) er gjennomførte vil innsamlede data bli slettet.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer).

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å la deres barn være med på det. Jeg ber foreldre/foresatte om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til lydopptak i klassen.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen

Steinar Thorud

**SVARSLIPP (stryk det som ikke passer)**

Vi / jeg har mottatt skriftlig informasjon og er villig til at det kan bli foretatt lyd- og videoopptak av elever i klassen der _________________________________(elevens navn) er elev.

Jeg/vi har snakket med jenta/gutten vår om dette, og hun/han har også gitt sitt samtykke.

________________________

(Sted og dato)

__________________________________________________

(underskrift fra foresatte/foreldre)

Vennligst returner svarslippen til læreren i klassen så snart som mulig.