NTNU
Det skapende universitet

"Det handler om å finne vinkler og sånn"

En studie av matematisk kompetanse i
trigonometri blant 1T-elever

Elisabet Midtli

Lektorutdanning med master i realfag
Innlevert: juni 2014
Hovedveileder: Frode Rønning, MATH

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven i matematikkdidaktikk markerer min avslutning på den femårige lektorutdanningen i realfag (LUR) ved NTNU i Trondheim. Arbeidet med oppgaven har vært krevende og lærerikt, og det har gitt meg mye kunnskap innenfor matematikkdidaktikk.

Jeg vil rette en stor takk til min veileder Frode Rønning som har gitt meg god veiledning gjennom hele arbeidet med masteroppgaven. Gjennom denne veiledningen har jeg fått gode innspill til progresjonen med masterarbeidet, og de konstruktive tilbakemeldingene har bidratt til en stadig forbedring av oppgaven. Takk også til læreren som lot meg følge undervisningen og til elevene som deltok i forskningsarbeidet.

Jeg vil også takke mine fantastiske medstudenter på «Matteland» for støtte og motiverende pausesamtaler både om matematikkdidaktikk og om alt annet som har opptatt oss dette semesteret. Jeg vil også takke dere for fem fine år sammen som LUR-studenter.

Til slutt vil jeg takke min kjære mamma og pappa for at dere alltid tror på meg, og for all god støtte gjennom hele utdanningen.

Sammendrag

Hensikten med denne studien er å få bedre innsikt i elevers forståelse av begrep og prosedyrer i trigonometri. Ulike aspekter ved forståelse og matematisk kunnskap belyses, og elevers kompetanse blir analysert i lys av teori om matematisk kompetanse. Studien skal gi svar på følgende forskningsspørsmål: *Hvilke typer matematisk kompetanse forventes av 1T-elever i trigonometri, og hvilke typer er oppnådd av et utvalg elever som er gruppert etter faglig nivå?».*

Studien tar utgangpunkt i et kognitivt læringssyn, og følger et kvalitativt forskningsdesign. Undersøkelsene gjøres ved en videregående skole i Trondheim hvor det praktiseres nivådifferensiering. Flere datainnsamlingsmetoder benyttes i arbeidet. Undervisningen av en 1T-klasse[1] blir observert og det blir foretatt en dokumentinnsamling. I tillegg blir det også utarbeidet et oppgavehefte som blir gjennomført av en gruppe elever. Det endelige datamaterialet som danner grunnlaget for analysen er videoopptak, en prøve som gis i en vurderingssituasjon, elevbesvarelser av prøven, samt besvarelser og utsagn samlet i arbeidet med oppgaveheftet. Datamaterialet analyseres ved hjelp av et teoretisk rammeverk som beskriver ulike typer matematisk kompetanse og knyttes til teorier om matematisk kunnskap.

Resultatene viser at kompetanser tilknyttet begrepsforståelse og prosedyreforståelse er sentralt i trigonometrifeltet i 1T-faget. Analyseverktøyet som benyttes fungerer likevel som et godt redskap til å kunne gi en klassifisering av de ulike elementene som inngår i datamaterialet. Det viktigste funnet som gjøres i denne studien er at ulike matematiske kompetanser ikke kan betraktes adskilt, og at helhetlig matematisk kompetanse krever at flere aspekter ved forståelse er oppnådd. Funnene som gjøres indikerer også at kompetansemål fra læreplanen i stor grad er oppnådd blant elevene i utvalget.

[1] 1T er et teoretisk orientert matematikkfag som tilbys elever på første år ved Studiespesialiserende utdanningsprogram i videregående skole

Summary

The purpose of this study is to gain more insight in students' understanding of concepts and procedures in trigonometry. Different aspects of understanding and mathematical knowledge is touched, and students' proficiency is being analysed in view of theory about mathematical proficiency. The study is going to answer to the following research question: "*Which kind of mathematical proficiency is expected by 1T-students in trigonometry, and which kind is achieved of a selection of students that is grouped after their skills in mathematics*".

The study is based on a cognitive view of learning, and follows a qualitative research design. The studies are done at a upper secondary school (ages sixteen to nineteen) in Trondheim where they are using differentiation in the organisation of classes. Multiple methods of data collection is being used in the research work. The teaching of a class of 1T[2] is being observed and it is performed a gathering of documents. It is also being prepared a collection of exercises that is solved by a student group. The final data material that create the foundation of the analysis is video records, a test that is given in an evaluation situation, student solutions of the test, and also solutions and statements collected during the work of the collection of exercises.

The results shows that proficiency associated to conceptual understanding and procedural understanding is central in the field of trigonometry in the subject 1T. The analysis tool that is being used is anyway working as an adequate tool to classify the elements that is included in the data material. The findings that are done indicates that the students in the selection largely achieve the competence goals from the curriculum. The most important finding that is done in this study is that different mathematical proficiencies not can be seen separately, and that mathematical proficiency in its whole requires that multiple aspects of understanding is achieved.

[2] 1T is a theoretical oriented mathematic subject that is provided to students in their first year in upper secondary school.

Innhold

1. Innledning ... 1

1.1 Bakgrunn ... 1

1.2 Forskningsspørsmål ... 2

1.3 Oppbygging av oppgaven ... 3

2. Teori ... 5

2.1 Kognitiv læringsteori ... 5

2.2 Matematisk kunnskap ... 6

2.2.1 Begrepskunnskap ... 7

2.2.2 Prosedyrekunnskap ... 8

2.2.3 Begrepskunnskap og prosedyrekunnskap i samspill ... 9

2.3 Kunnskapsutvikling og den epistemologiske trekanten ... 10

2.4 Transformasjoner ... 12

2.5 Matematisk kompetanse ... 13

2.5.1 Forståelse ... 16

2.5.2 Beregning ... 17

2.5.3 Anvendelse ... 18

2.5.4 Resonnering ... 19

2.5.5 Engasjement ... 20

2.3 Trigonometri ... 21

2.3.1 Sinus, cosinus og tangens ... 21

2.3.2 Arealsetningen, sinussetningen og cosinussetningen ... 23

3. Metode ... 26

3.1 Bakgrunn ... 26

3.1.1 Skolebeskrivelse ... 26

3.1.2 Forskningsdesign ... 26

3.2 Datainnsamling ... 28

3.2.1 Observasjon 28
3.2.2 Deltakende observasjon 28
3.2.3 Oppgavehefte 29
3.2.4 Utvalg og gjennomføring 33
3.3 Analysemetoder 34
3.3.1 Dokumentanalyse 34
3.3.2 Analyseprosess 35
3.4 Validitet og reliabilitet 35
4. Analyse 37
4.1 Forventet matematisk kompetanse 37
4.2 Oppnådde kompetanser 53
4.2.1 Forståelse 54
4.2.2 Beregning 61
4.2.3 Resonnering 67
5. Diskusjon 72
5.1 Hvilke kompetanser forventes av elevene? 72
5.2 Hvilke kompetanser er oppnådd av elevene? 74
5.3 Diskusjon av metode og muligheter videre arbeid 76
6. Avslutning 78

Vedlegg:

I – Anmodning om tillatelse til videoopptak av undervisning

1. Innledning

1.1 Bakgrunn

Kunnskapsløftet definerer fem grunnleggende ferdigheter som skal gi grunnlag for å læring og utvikling i skole og samfunnsliv. Digitale ferdigheter, muntlige ferdigheter, å kunne lese, å kunne skrive og å kunne regne utgjør disse ferdighetene. Læreplanene for fagene understreker at de grunnleggende ferdighetene skal inngå som en del av kompetansen i hvert av fagene (Utdanningsdirektoratet, 2012). Kompetansen som utvikles gjennom matematikkfaget kan overføres til andre fag og på denne måten bidra til å utvikle regning som grunnleggende ferdighet. «Å kunne regne innebærer å resonnere og bruke matematiske begreper, framgangsmåter, fakta og verktøy for å løse problemer og for å beskrive, forklare og forutse hva som skjer. Det innebærer å gjenkjenne regning i ulike kontekster, stille spørsmål av matematisk karakter, velge holdbare metoder når problemene skal løses, være i stand til å gjennomføre dem og tolke gyldigheten og rekkevidden av resultatene» (Utdanningsdirektoratet, 2012, s. 12).

Regning som grunnleggende ferdighet krever bred kompetanse innenfor flere områder, og matematikkundervisningen er den mest sentrale kilden til god kompetanse i regning. For å beskrive dette har Utdanningsdirektoratet (2014) utarbeidet et teoretisk bakgrunnsdokument som skal gi innsikt i hvordan undervisningen skal inkludere regning som grunnleggende ferdighet. Det blir her presentert hvilke matematiske kompetanser som er nødvendige for å kunne mestre «å regne». De fem kompetansene er utviklet av Kilpatrick, Swafford, og Findell (2001), og disse utgjør et rammeverk som er nyttig i matematikkdidaktisk forskning. Begrepsforståelse og beherskelse av matematiske strategier i problemløsning utgjør grunnlaget for de fem kompetansene som blir presentert.

Kunnskap om begrepsforståelse er noe jeg anser som nødvendig for matematikklærere. Min erfaring fra skoletiden og praksisperioder som student er at matematikkundervisningen i stor grad hviler på oppgaveregning og «innøving» av regler og prosedyrer for å løse en oppgave. Mitt utgangspunkt for dette forskningsarbeidet var derfor å få innsikt i hvordan begrepsforståelsen framstår hos elever i VGS i dag. Ved å kontakte en videregående skole i Trondheim fikk jeg anledning til å følge undervisningen i en 1T-parallell tre uker, og det er datainnsamlingen fra denne perioden som utgjør grunnlaget for analysen i studien. Temaet for undervisningen i denne treukersperioden var trigonometri. Trigonometri og begreper tilknyttet dette utgjør derfor det matematikkfaglige grunnlaget for denne studien. Parallellen som jeg har hentet datamaterialet fra er en av til sammen seks paralleller i 1T ved denne skolen, og parallellene er bestemt ut fra faglig nivå til elevene.

Forskningsarbeidet tar utgangspunkt i kognitiv læringsteori siden jeg vil rette særlig fokus mot begrepsforståelse hos enkeltelever. I denne sammenhengen ser jeg det som relevant å betrakte de kognitive prosessene som foregår i forbindelse med kunnskapsutvikling, og Piaget står bak mange av grunntankene som danner grunnlaget for flere teorier om kunnskap. Piaget innførte begrepene *handlingsskjema, assimilasjon* og *akkomodasjon*, og hans beskrivelse av disse fikk mye oppmerksomhet når de ble kjent på 1930-tallet (von Glaserfeld, 2002). Matematikkdidaktisk teori om begrepskunnskap og prosedyrekunnskap bygger på den kognitive teorien. I denne teorien understrekes det at kunnskap eksisterer som et nettverk av informasjon, hvor det skapes koplinger mellom de ulike delene av fakta (Hiebert & Lefevre, 1986). Begrepsforståelse kan knyttes til flere sentrale felt ved matematikkdidaktikk, som semiotiske representasjoner og begrepsutvikling (Steinbring, 2006), bytte mellom ulike representasjonsformer (Duval, 2006) og relasjonell eller instrumentell forståelse for matematikk (Skemp, 1978).

1.2 Forskningsspørsmål

Denne studien skal gi innsikt i begrepsforståelse hos elever ved 1T VG1. Utgangspunktet er elevers arbeid med trigonometri, og hovedkilden til mine funn er prøven som ble gitt i vurderingssituasjonen til dette temaet. I tillegg blir informasjon hentet fra et oppgavehefte som jeg har laget med bakgrunn i hva som forventes. Læreplanen for 1T – VG1 studieforberedende utdanningsprogram beskriver hva eleven skal være i stand til, og inneholder følgende kompetansemål tilknyttet trigonometri:

Eleven skal kunne gjere greie for definisjonane av sinus, cosinus og tangens og bruke trigonometri til å berekne lengder, vinklar og areal i vilkårlege trekantar.
(Utdanningsdirektoratet, 2013)

Prøven som ble gitt skal gi grunnlag for å vurdere i hvor stor grad kompetansemålet fra læreplanen er oppfylt, og sier dermed noe om hva som *forventes* av matematisk kompetanse fra elevene. I mitt arbeid har jeg valgt å fokusere på hva prøven forventer av kunnskap om tegn og semiotiske representasjoner, samt løsningsprosedyrer. På denne måten vil jeg kunne beskrive hva begrepet «gjere greie for» innebærer i denne sammenhengen. Videre vil jeg analysere elevenes besvarelser for å se hvilke kompetanser som blir framvist gjennom prøven. Besvarelsene fra oppgaveheftet vil ha en støttende funksjon for å klassifisere ulike kompetanser. Undersøkelsen er av kvalitativ art, og på grunnlag av hva jeg ønsker å belyse i denne undersøkelsen vil jeg formulere følgende forskningsspørsmål:

«Hvilke typer matematisk kompetanse forventes av 1T-elever i trigonometri, og hvilke typer er oppnådd av et utvalg elever som er gruppert etter faglig nivå?»

Ved å gi et svar på dette forskningsspørsmålet ønsker jeg å få innsikt i hvilke aspekter ved begrepsforståelse som er sentrale i matematikkundervisningen i skolen, og klargjøre hvilke kompetanser som er framtredende i elevenes matematikkunnskap.

1.3 Oppbygging av oppgaven

Innledningsvis har jeg presentert min bakgrunn for studien i sammenheng med retningslinjer fra Kunnskapsløftet (LK06). I tillegg har jeg redegjort for målet med undersøkelsen og definert et forskningsspørsmål. Videre følger et teorikapittel som består av tre deler. Jeg vil her presentere det læringsteoretiske perspektivet som ligger til grunn for besvarelsen, i tillegg til sentrale matematikkdidaktiske teorier som skal belyse funnene i undersøkelsen. Teorien inneholder et delkapittel som gir en beskrivelse av rammeverket til Kilpatrick et al. (2001) som utgjør det teoretiske verktøyet i analysen av datamaterialet. Avslutningsvis i teorikapittelet blir det gitt en presentasjon de matematiske definisjonene som utgjør den matematikkfaglige teorien i denne studien. Metodekapittelet beskriver hvilke forskningsmetoder denne studien baserer seg på. Jeg vil her gi en beskrivelse av hvordan datainnsamlingen foregikk, samt hvilke analysemetoder som er benyttet for å tolke datamaterialet. Analysekapittelet er inndelt i to hoveddeler, hvor jeg i første del gjør en analyse av oppgavene på prøven som ble hentet under datainnsamlingen, mens andre del analyserer elevbesvarelsene fra prøven. Denne delen av analysen er strukturert etter ulike matematiske kompetanser. Avslutningsvis vil jeg diskutere de viktigste funnene fra analysedelen og relatere dette til forskningsspørsmålet. Diskusjonen inneholder også en drøfting av undersøkelsens validitet og reliabilitet, samt hvilke muligheter denne studien gir for videre forskning.

2. Teori

2.1 Kognitiv læringsteori

Denne studien kan knyttes til kognitivismen som læringsteoretisk perspektiv. Kognitivismen bygger på en rasjonalistisk tradisjon, hvor tenking og mentale aktiviteter ses på som kjernen i læring og menneskelig utvikling. Utbredelsen av det kognitive perspektivet skjedde som en reaksjon på behaviorismen. Hvor det i behaviorismen var den ytre atferden som utgjorde grunnlaget for kunnskap om læring, retter kognitivismen seg inn i våre mentale liv, tankeprosesser og forestillinger om verden (Säljö, 2003).

Konstruktivismen er den retningen innenfor kognitivismen som har hatt mest å si når det gjelder læringssyn. I denne retningen blir det lagt vekt på at individer er aktive i konstruksjonen av sin forståelse av omverdenen (Säljö, 2003). Piaget regnes som en pioner innenfor den konstruktivistiske tilnærmingen til den kognitive teorien. Utviklingen av denne retningen startet på 1930-tallet, og hans innføring av begreper som tidligere ble tatt for gitt gjorde at denne tilnærmingen ble ansett som utradisjonell (von Glasersfeld, 2002).

Begrepet *handlingsskjema* er sentralt innenfor Piagets teori, og beskrives i sammenheng med kunnskapsutvikling. En framstilling av betydningen av dette begrepet er å knytte det til stimuli-respons-handlingene som eksisterer i biologi. Et handlingsskjema kan sies å bestå av tre deler. Første del beskriver gjenkjennelse av en bestemt situasjon, andre del beskriver aktiviteten som er tilknyttet situasjonen og siste del handler om forventningen om at aktiviteten produserer et bestemt resultat (von Glasersfeld, 2002).

Prosessene *assimilasjon* og *akkomodasjon* kan knyttes til strukturen av handlingsskjemaene. Disse prosessene representerer intellektets tilpasning til omgivelsene og regulerer vårt samspill med omgivelsene (Säljö, 2003). I von Glasersfeld (2002) sin tolkning av Piagets teori forstås assimilasjon som behandling av ny kunnskap som et tilfelle av noe som er kjent fra før. Et resultat av assimilasjon er gjenkjenningsprinsippet som utgjør første del av beskrivelsen av handlingsskjema. En erfart situasjon utgjør startpunktet til et skjema dersom den oppfyller betingelsene som tidligere har karakterisert tilsvarende situasjoner.

Akkomodasjon handler om at vår virkelighetsoppfatning gjennomgår en grunnleggende forandring (Säljö, 2003). En forstyrrelse mellom aktiviteten og det forventede resultatet i handlingsskjemamodellen, kan føre til ulike typer reaksjoner. Dersom det uventede resultatet av aktiviteten oppleves som skuffende, kan en eller flere av de nyoppdagede karakteristikkene bidra til en endring i gjenkjennelsesmønstre og dermed i betingelsene som utløser aktiviteten i framtiden. Dersom det uventede utfallet anses som interessant, kan et nytt gjenkjennelsesmønster formes til å inkludere den nye karakteristikken, og på denne måten utvikle et nytt skjema. I begge disse tilfellene kan en snakke om akkomodasjon (von Glasersfeld, 2002).

2.2 Matematisk kunnskap

Matematikkfaget har gitt opphav til flere distinksjoner som beskriver *matematisk kunnskap*, hva dette innebærer og hvordan undervisningen skal legges opp for at elevene skal tilegne seg kunnskap. Begrepskunnskap og prosedyrerettet kunnskap representerer en slik distinksjon, og denne finner vi også i mer generelle spørsmål tilknyttet kunnskapsutvikling. Matematikkfagets klare og veldefinerte innhold åpner særlig for diskusjoner rundt denne distinksjonen. Ved klassifisering av de to ulike kunnskapstypene ble det gjennom 1900-tallet utviklet flere rammeverk for å for å beskrive de to. Flere av disse rammeverkene skiller mellom *ferdigheter* og *forståelse* (Hiebert & Lefevre, 1986). Et eksempel på denne distinksjonen finner vi som *instrumentell* og *relasjonell* forståelse hos Skemp (1978). Kunnskap om *hvordan* en matematisk handling utføres blir av Skemp (1978) ansett som instrumentell forståelse, mens den relasjonelle forståelsen beskriver kunnskap om *hvorfor* handlingen utføres. I følge Skemp (1978) er den relasjonelle forståelsen essensiell for å oppnå dyp matematisk kunnskap, og det blir reist et klart skille mellom de to typene av matematisk forståelse. Den relasjonelle og instrumentelle forståelsen anses å være gjensidig utelukkende av Skemp (1978), noe som senere har høstet kritikk. Pirie og Schwarzenberger (1988) hevder at evnen til å kunne utføre en matematisk oppgave som effekt av noe en har lært utenat, vanskelig kan forstås uten å knytte det til instrumentell forståelse. Handlinger som kan betraktes som instrumentelle kan ikke benyttes til å utelukke eksistensen av dyp matematisk forståelse. Tilsvarende kan heller ikke feilbruk av språk eller notasjon avdekke mangel på forståelse, siden elever utvikler egne begrepsrammer basert på visuell forståelse og sammenhenger som er presentert av læreren.

Hiebert og Lefevre (1986) anser sammenhengen mellom begrepskunnskap og prosedyrerettet kunnskap som viktig, og skiller seg på denne måten fra de historiske tilnærmingene til denne distinksjonen. Jeg vil nå gi en presentasjon av Hiebert og Lefevres (1986) beskrivelse av disse to kunnskapstypene, og disse danner et grunnlag for teorien som blir presentert senere i denne oppgaven.

2.2.1 Begrepskunnskap

Begrepskunnskap kan betraktes som kunnskap som inkluderer forbindelser mellom ulike deler informasjon. Disse forholdene preger individuelle fakta og betingelser og knytter all informasjon sammen til et nettverk. En enhet av informasjon kan ikke eksistere som begrepskunnskap i seg selv. Informasjonen er definert som begrepskunnskap kun når den som besitter kunnskapen kan knytte informasjonen til annen informasjon (Hiebert & Lefevre, 1986).

I følge Hiebert og Lefevre (1986) *utvikles* begrepskunnskap ved at det skapes forbindelser mellom ulike typer informasjon. Forbindelsene kan skapes mellom informasjon som allerede eksisterer i minnet, eller det kan skapes mellom informasjon som allerede eksisterer og ny informasjon. Dette vil innebære en omstrukturering av handlingsskjemaene som er sentrale i Piagets teori, jfr. kap. 2.1 Kognitiv læringsteori. Det vil her enten foregå assimilasjon eller akkomodasjon (Säljö, 2003). Både ved assimilasjon og akkomodasjon vil informasjonsnettverket som Hiebert og Lefevre (1986) beskriver ekspandere og nye elementer vil inngå. Hiebert og Lefevre (1986) skiller mellom to nivåer hvor de matematiske forbindelsene skapes. Det *primære* nivået beskriver tilfelle hvor forbindelsene som konstrueres er på samme abstrakte nivå som informasjonen blir presentert. Det andre nivået blir omtalt som *refleksjonsnivå*, og informasjonen er her i mindre grad knyttet til spesifikke kontekster. Forbindelsene som skapes her er på et mer abstrakt nivå, og kjennetegnes ved gjenkjennelse av like

kjernefunksjoner i informasjon som i utgangspunktet er ulik. Forskjellen på disse to nivåene beskrives med et eksempel fra læring av desimaltall. Tallene som står til høyre for kommaet har verdiene tideler, hundredeler osv. Ved addisjon eller subtraksjon av desimaltall skal kommaene stå under hverandre. Dette er to sentrale fakta som angår desimaltall og det kan skapes en forbindelse mellom disse ved at elevene ser at tideler adderes med tideler, hundredeler med hundredeler osv. En slik forbindelse vil være på det *primære* nivået, fordi begge egenskapene utelukkende handler om desimaltall. Dersom elevene knytter kunnskap om plassering av desimaltall i et addisjonsuttrykk sammen med kunnskap om hvordan *heltallene* plasseres i et addisjonsuttrykk oppstår det en forbindelse på et *refleksjonsnivå*. Ved addisjon av heltall blir enere stilt opp under hverandre, tiere under hverandre osv. Idéen om at desimaltall skal stilles opp under hverandre representerer et spesialtilfelle av den generelle idéen om at elementer som har samme enhetsverdi skal plasseres under hverandre i et addisjonsuttrykk. Dette krever at det skjer en prosess hvor den lærende tar et steg tilbake og reflekterer rundt informasjonen som knyttes sammen.

2.2.2 Prosedyrekunnskap

Den prosedyrerettede kunnskapen kan deles i to deler, hvor den ene omhandler representasjoner, symboler og språk, mens den andre beskriver kjennskap til algoritmer, regler og prosedyrer for å utføre matematiske oppgaver. Førstnevnte inkluderer kjennskap til hvordan symboler benyttes for å uttrykke matematiske idéer, samt hvilke syntaktiske regler som gjelder for å skrive symboler på en akseptert måte. Her pekes det imidlertid på at enkelte algoritmer i seg selv representerer sentrale begreper, så det er ikke alltid mulig å lage et skille mellom de to delene (Hiebert & Lefevre, 1986).

Prosedyrer som benyttes til å løse matematiske oppgaver anses som steg-for-steg-instruksjoner, hvor prosedyrene som utføres skjer i en forhåndsbestemt kronologisk rekkefølge. Hvert steg i en prosedyre skjer som følge av forrige steg og denne prosessen fortsetter til en står igjen med et tall som kan gjenkjennes som *svaret.* Dette knyttes særlig til prosedyrer hvor objekter uttrykkes symbolsk, som f.eks. «√, +» (Hiebert & Lefevre, 1986). Denne typen prosedyrekunnskap kan knyttes til Skemps (1978) beskrivelse av *instrumentell* forståelse, hvor det også pekes på at prosessen skjer i en bestemt rekkefølge. Jeg vil her understreke at vi ikke kan sette likhetstegn mellom den instrumentelle forståelsen hos Skemp (1978) og prosedyrekunnskapen som Hiebert og Lefevre (1986) beskriver, men at elementer som kjennetegner instrumentell forståelse kan inngå i kunnskap om prosedyrer.

En annen type prosedyre som blir omtalt av Hiebert og Lefevre (1986) er tilfelle hvor prosessen tar utgangspunkt i konkrete objekter, visuelle diagrammer, mentale bilder eller andre objekter som ikke representerer standardsymboler i vårt matematiske system. Slike prosedyrer kjennetegner problemløsningsoppgaver. Dette belyser at ikke alle prosedyrer kan anses å være av samme type.

Den instrumentelle forståelsen bygger på at en er i stand til *å huske* regler og benytte disse i gitte situasjoner, og sammenhengen mellom *å huske* og *å forstå* matematikk representerer et annet sentralt aspekt av matematisk forståelse som er beskrevet hos Byers og Erlwanger (1985). Både det å kunne huske enkle prosesser og mer avanserte bevis blir her belyst som viktig for å beherske matematikk.

2.2.3 Begrepskunnskap og prosedyrekunnskap i samspill

I følge Hiebert og Lefevre (1986) vil god kontakt mellom prosedyrer og begrepene som inngår i dem danne et bedre grunnlag for at prosedyrene huskes og brukes riktig. En viktig årsak til dette er at prosedyrer som knyttes til begrepsforståelse lagres som en del av et informasjonsnettverk. Prosedyrene vil bli gi mening og virke fornuftige dersom de relateres til begrepskunnskapen som er tilgjengelig. På denne måten blir det mulig å forstå hvordan og hvorfor prosedyrene fungerer. En sammenknytting av begrepskunnskap og prosedyrekunnskap vil også bidra til en mer effektiv bruk av prosedyrene. Dette kan foregå ved at begrepskunnskap gir bedre innsikt i representasjonene, og dermed forenkler kravet til prosedyren. Videre vil valg og gjennomføring av prosedyre bli klarere, og det kan bidra til å senke antall nødvendige prosedyrer for å løse et problem.

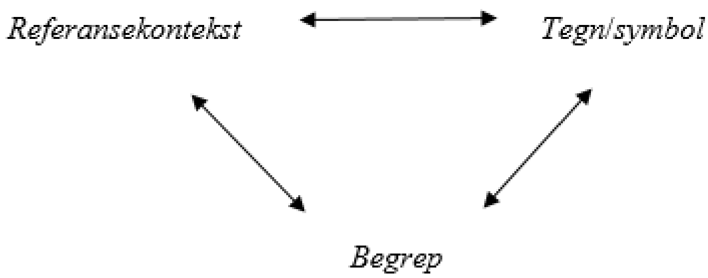
Det formelle språket som eksisterer i matematikken er et nyttig redskap for å takle de komplekse idéene som inngår i faget. Symboler som er blitt knyttet til en bestemt betydning kan benyttes til å betrakte *begrepet* de representerer. Symboler fungerer på denne måten som en kognitiv hjelp som bidrar til å organisere begrepskunnskapen. I tillegg kan symbolene også produsere begrepskunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986).

For at begrepskunnskap skal være nyttig i løsning av matematiske problemer er det nødvendig at den opptrer i en passende form. Hiebert og Lefevre (1986) snakker her om begrepet «betingelse-handlingspar» som grunnlaget for prosedyrene. Dette innebærer at begrepskunnskapen gradvis utvikles til rutiner for problemløsning, etter at de samme begrepene er blitt brukt til å løse like typer problemer. På denne måten kan begrepskunnskap utvikles til å bli prosedyrekunnskap.

2.3 Kunnskapsutvikling og den epistemologiske trekanten

Symboler er sentrale både i forbindelse med begrepskunnskap og prosedyrekunnskap, og jeg vil nå beskrive symbolenes rolle i begrepsutvikling ved å ta i bruk teori om semiotiske representasjoner og den epistemologiske trekanten som vi finner hos Steinbring (2006).

Steinbring (2006) belyser to ulike funksjoner av *matematiske tegn*. Den *semiotiske* funksjonen beskriver matematiske tegn om «*noe som står for noe annet*», mens den *epistemologiske* funksjonen viser til tegnenes rolle innenfor den epistemologiske tilnærmingen av matematisk kunnskap. I begge tilfeller handler det om å skape en relasjon mellom kunnskap om et objekt og det tilhørende matematiske tegnet. I enkelte tilfeller kan objektet kan være gitt som et *konkret* objekt, og relasjonen mellom tegn og objekt vil være gitt på en bestemt måte. I andre tilfeller kan objektet være representert som en beskrivelse av en struktur, og relasjonen mellom tegn og objekt vil ta en annen form. Fordi at objektet ikke alltid er representert som et reelt objekt, vil jeg heretter beskrive objektet som *referansekontekst*. For å beskrive hvordan relasjonen mellom tegn, referansekontekst og begrep skjer har Steinbring (2006) utformet en modell som er kjent som *den epistemologiske trekanten*. Matematikk krever bestemte tegn eller symbolsystemer for å holde orden på kunnskapen. Formen av de matematiske tegnene har utviklet seg historisk og er i stor grad konvensjonelle. Tegnene har ingen betydning i seg selv. Betydningen skapes ved at den lærende utvikler en mediering mellom tegn og referansekontekst. For at tegnene skal utgjøre korrekte matematiske tegn må også kunnskap om de matematiske *begrepene* inngå i denne medieringen. Det er nettopp denne medieringen mellom de tre elementene *referansekontekst, tegn* og *begrep* som utgjør den epistemologiske trekanten:



Figur 1: Den epistemologiske trekanten

Via den epistemologiske trekanten modelleres altså en semiotisk mediering mellom tegn og referansekontekst, og denne medieringen er formet av de epistemologiske betingelsene tilknyttet matematisk kunnskap. Det er også viktig å understreke at innholdet i den matematiske kunnskapen også kan ha innvirkning på konstruksjonen av ny og mer generell matematisk kunnskap via medieringen som foregår mellom tegn og referansekontekst. I tillegg kan modellen heller ikke forstås uavhengig av den som lærer. Modellen fungerer som en tilnærming til å forstå hvordan matematisk kunnskap konstrueres ved hjelp av relasjoner og strukturer og hvordan den lærende oppfatter samspillet mellom disse (Steinbring, 2006).

Et grunnleggende syn som presenteres av Steinbring (2006) er at de matematiske begrepene som teoretiske begrep klassifiseres som selvstendige. Likevel krever alle matematiske begrep at tegn inkluderes i deres utviklingsprosesser. Begrepet må forstås uavhengig av referansekonteksten, men referansekonteksten vil alltid kunne representere et eksempel av en struktur eller relasjon. Dette ser vi også hos Hiebert og Lefevre (1986) som hevder at begrepskunnskap utvikles når ny og/eller gammel informasjon knyttes sammen. I tillegg sier Hiebert og Lefevre (1986) at symboler får mening når de knyttes sammen med begrepskunnskapen de representerer. Steinbring (2006) sier videre at tegn, i likhet med referansekonteksten, representerer strukturer og relasjoner som gjør det mulig å utløse et bytte av posisjonen til tegn og referansekontekst i den epistemologiske trekanten. Dette foregår gjennom den subjektive tolkningen til den som lærer, og er nødvendig i utviklingsprosesser. Et viktig aspekt ved den epistemologiske trekanten er altså at tegn og referansekontekst representerer mentale ideer som skaper strukturer, og ikke skal anses som eksterne og uavhengige.

2.4 Transformasjoner

På tilsvarende måte som Steinbring (2006), peker også Duval (2006) på at de matematiske elementene blir gjort tilgjengelig gjennom tegn og semiotiske representasjoner. Det understrekes at de semiotiske representasjonene ikke må forveksles med elementene de representerer. Representasjoner er ifølge Duval (2006) enten individuelle antagelser, oppfatninger eller misoppfatninger, eller tegn og tilhørende aspekter som framkommer som et resultat av bruk av regler som beskriver et system, prosess eller fenomen.

Enkelte semiotiske representasjonssystem kan kun benyttes i matematisk prosessering, mens andre kan benyttes både til kommunikasjon, forestilling, oppmerksomhet osv. De matematiske prosessene kan foregå i et mono- eller multifunksjonelt semiotisk system. I et monofunksjonelt system tar prosessene form som algoritmer, mens det i et multifunksjonelt system ikke er mulig å konvertere prosessene til algoritmer (Duval, 2006).

Matematiske prosesser innebærer ifølge Duval (2006) alltid å substituere enkelte semiotiske representasjoner med andre, og det snakkes i denne forbindelse om *transformasjoner*. Semiotiske systemer som åpner for en transformasjon av representasjoner blir omtalt som *register*. Hvert register åpner for spesifikk bruk av representasjoner og prosesser for matematisk tenkning. Det eksisterer flere register for ulike representasjoner og flere systemer for visualisering. Duval (1999) hevder at det kun er elever som er i stand til å utføre skifte av register som ikke forveksler et matematisk objekt med representasjonen som benyttes. Elevene som behersker dette vil også kunne overføre sin matematiske kunnskap til sammenhenger som er forskjellige fra de som læres ved et bestemt tidspunkt.

Vi kan skille mellom to typer transformasjoner – *behandling* og *omdannelse. Behandling* viser til transformasjoner som skjer innenfor samme register, som aritmetiske operasjoner eller algebraisk utregning (Duval, 1999). Eksempler på behandling er å løse et likningssett eller gjøre kalkulasjoner innenfor samme notasjonssystem for å uttrykke tall. Resultatet av en behandling er avhengig av hvilke muligheter til semiotiske transformasjoner som finnes innenfor det aktuelle registeret. Et eksempel på dette er at de matematiske prosessene tilknyttet talloperasjoner utføres forskjellig avhengig av om tallene er representert som desimaltall eller som brøk. *Omdannelse* beskriver transformasjon av representasjoner som innebærer et skifte av representasjonsregister. Et eksempel på denne type transformasjon er å gå fra algebraisk notasjon av en likning til en grafisk framstilling av samme likning (Duval, 2006). Et annet eksempel er når et utsagn går fra å uttrykkes språklig til å uttrykkes med algebraisk notasjon (Duval, 1999). Omdannelse foregår ofte implisitt ved at to, eller noen ganger tre, register må benyttes i samhandling med hverandre. Omdannelse ses på som mer komplekst enn behandling fordi objektet som representeres må gjenkjennes mellom registrene. Det er viktig å understreke at transformasjoner *alltid* foregår mellom ulike representasjoner av samme element (Duval, 2006).

2.5 Matematisk kompetanse

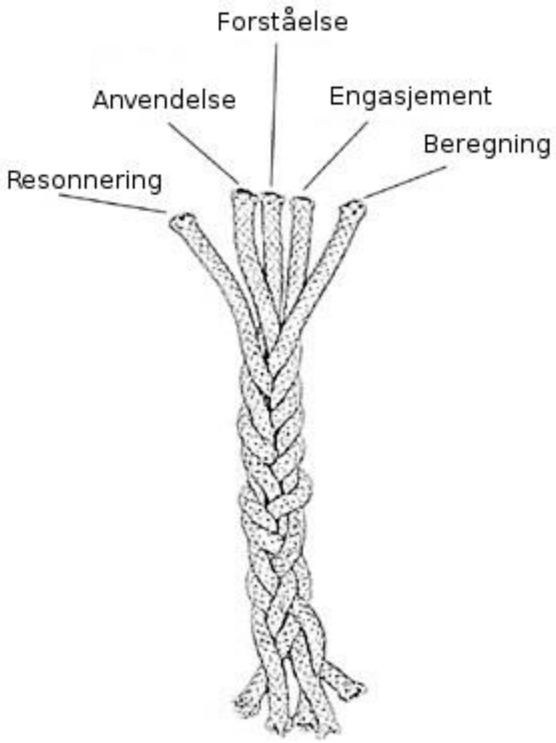
Som jeg har presentert tidligere så beskriver Hiebert og Lefevre (1986) to måter matematisk kunnskap oppnås. Dette skjer ved at det skapes forbindelser mellom deler av informasjon som allerede er kjent, eller ved at det skapes forbindelser mellom noe som er kjent fra før og ny informasjon. Den siste typen kan knyttes til uttrykket «forståelse», og en forklaring til dette begrepet vil jeg belyse med følgende sitat:

> … «understanding» is the term used most often to describe the state of knowledge when new mathematical information is connected appropriately to existing knowledge (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 4)

Matematisk *forståelse* er et sentralt tema innenfor matematikkdidaktikk, og det er utarbeidet flere rammeverk tilknyttet dette. Et annet uttrykk som er benyttet i tilknytning til dette er «meningsfylt læring *(meaningful learning)*», men uansett hvilke uttrykk som benyttes kan tilnærmingen til matematisk forståelse knyttes til Piagets prosesser assimilasjon og akkomodasjon (Hiebert & Lefevre, 1986).

Pirie (1988) hevder at det ikke er mulig å forstå «forståelse» i seg selv, men sier videre at vi kan forsøke å kategorisere, skille og utarbeide ulike aspekter ved forståelse. Disse aspektene kan gi oss innsikt i hvordan elever tenker. Kilpatrick et al. (2001) deler matematiske ferdigheter inn i fem komponenter, eller tråder som sammen representerer en helhet, og er et rammeverk som nettopp kategoriserer ulike aspekter ved forståelse.

Rammeverket består av de fem komponentene[3] f*orståelse* (conceptual understanding), *beregning* (procedural fluency), *anvendelse* (strategic competence), *resonnering* (adaptive reasoning) og *engasjement* (productive disposition) og de kan benyttes til å diskutere kunnskaper, ferdigheter, muligheter og oppfatninger som sammen utgjør matematisk *kompetanse*. Figur 2 illustrerer at de ulike kompetansene må betraktes i sammenheng, og er en oversatt utgave av modellen som Kilpatrick et al. (2001) presenterer. Den oversatte modellen er hentet fra bakgrunnsdokument for arbeid med regning på ungdomstrinnet (Utdanningsdirektoratet, 2014).



Figur 2: Figuren viser hvordan de fem trådene som utgjør matematisk kompetanse er knyttet sammen (Utdanningsdirektoratet, 2014, s. 11)

> The five strands are interwoven and interdependent in the development of proficiency in mathematcs. (Kilpatrick et al., 2001, s. 116)

[3] Oversettelsene er hentet fra Utdanningsdirektoratet (2014) sitt rammeverk om grunnleggende ferdigheter

Det understrekes at matematisk kompetanse ikke kan oppnås ved å fokusere på en eller to av de fem trådene. For at kompetansen skal være tilstrekkelig til å håndtere matematiske utfordringer i dagliglivet, i tillegg til å danne et grunnlag for videre studier av matematikk, må undervisningen legge opp til at alle trådene blir berørt (Kilpatrick et al., 2001). Dette gjenspeiler innholdet i Hiebert og Lefevres (1986) teori, hvor det hevdes at matematisk begrepskunnskap utvikles når ulike deler informasjon knyttes sammen. Kilpatrick et al. (2001) sier videre at slik kontakt er essensielt når det gjelder å benytte kunnskapen til å løse problemer.

Kognitiv forskning og teori støtter ideene som danner de fem trådene som utgjør tauet som illustrerer matematisk kompetanse (Figur 2). Mentale representasjoner ligger til grunn for den teoretiske beskrivelsen av komponentene, og spørsmålet om hvordan elever representerer kunnskap, og hvordan kunnskap kyttes sammen, anses som en nøkkelfaktor for hvor dyp deres matematiske kompetanse er (Kilpatrick et al., 2001).

Rammeverket har enkelte likhetstrekk med et rammeverk fra Danmark som er utarbeidet av Niss og Jensen (2002) for Uddannelsesstyrelsen i samarbeid med Naturvidenskabelig Uddanningsråd. Hensiken med dette rammeverket er å utvikle matematikkundervisning i Danmark. Denne modellen beskriver åtte kompetanser av matematisk kompetanse som er delt i to kategorier. Den ene kategorien beskriver kompetanser tilknyttet matematisk språk og bruk av redskaper og hjelpemidler, mens den andre handler om oppgaveløsning og strategier tilknyttet dette. Kunnskapsløftet (LK06) beskriver fem grunnleggende ferdigheter som skal være integrert i kompetansemålene i alle fag. Regning utgjør en av disse, og handler om å kunne benytte matematikk i ulike kontekster. Utdanningsdirektoratet (2014) har utarbeidet et rammeverk for hvordan dette skal oppnås. Her finner vi modellen til Kilpatrick et al. (2001) som teoretisk bakgrunn for beskrivelsen av *«regning som grunnleggende ferdighet i alle fag»*. Det blir i dette rammeverket vektlagt at matematiske begreper skal knyttes til kontekster fra andre fag, og at matematiske elementer kan inngå i andre fag enn matematikk. Tverrfaglig arbeid anses som gunstig for å fremme regning som grunnleggende ferdighet (Utdanningsdirektoratet, 2014).

Jeg vil nå gi en nærmere beskrivelse av hver av de fem trådene, og knytte innholdet i hver av dem til noe av teorien som jeg har presentert fra før.

2.5.1 Forståelse

Den første av de fem trådene beskriver *forståelse*. Forståelse innebærer ifølge Kilpatrick et al. (2001) et integrert og funksjonelt grep om matematiske ideer. En egenskap som kjennetegner denne kompetansen er at ny kunnskap blir satt i sammenheng med kunnskap som er kjent fra før. Denne kunnskapstypen bidrar også til at kunnskap blir lagret fordi det er enklere å huske fakta og metoder som er relatert til noe kjent. Dersom en elev forstår en metode er det mindre sannsynlig at den blir husket feil. Videre pekes det på at enkelte lærere vurderer grad av forståelse ved å vurdere elevenes evne til å verbalisere sammenhengen mellom begrep og representasjon, mens forståelsen ofte er på plass hos eleven før han eller hun kan verbalisere denne. Graden av elevenes forståelse er relatert til omfanget av sammenhengene de utfører (Kilpatrick et al., 2001). Jeg anser denne kompetansen som nært knyttet til begrepskunnskapen som vi kjenner fra Hiebert og Lefevre (1986) ved at det er essensielt å skape sammenhenger mellom ulike informasjonstyper. Videre ser vi også at Kilpatrick et al. (2001) knytter forståelse til sammenhengen mellom begrep og representasjon, tilsvarende som vi har sett i den epistemologiske trekanten (Steinbring, 2006).

En indikator på forståelse er å være i stand til å representere matematiske situasjoner på ulike måter og å vite når de ulike representasjonene skal benyttes. For å navigere seg rundt i matematikken er det viktig å være oppmerksom på hvordan ulike representasjoner forbindes med hverandre, og må hvilke måter de er like og ulike (Kilpatrick et al., 2001). Dette er også nødvendig kunnskap for å gjøre transformasjoner innenfor ulike registre (Duval, 2006).

Kunnskap som har blitt lært med forståelse gir et godt grunnlag for å generere ny kunnskap og å løse ukjente problemer. Forståelse bidrar til å kunne se sammenhenger mellom begrep og prosedyre, og å kunne forklare hvorfor noe fakta gjelder som konsekvens av noe annet. Sammen vil dette gjøre lærende i stand til å bevege seg til et nytt nivå av forståelse (Kilpatrick et al.,2001).

2.5.2 Beregning

Kilpatrick et al. (2001) hevder at sammenhenger mellom begrep og metode er mest nyttig når disse relatere

s på riktig måte. En annen indikasjon på matematisk forståelse er forståelse for sammenhengen mellom begrep og *prosedyre.* Dette utgjør den andre tråden i rammeverket, *beregning*. Forståelse for beregninger baserer seg på kunnskap tilknyttet prosedyrer, om hvordan prosedyrer benyttes korrekt og om å kunne avgjøre når de ulike prosedyrene er egnet. Videre er kunnskap om beregninger også sentralt for å vurdere likheter og forskjeller mellom ulike metoder for utregning. Dette er metoder som omfatter skrevne prosedyrer, mentale modeller som benyttes for å f.eks. finne summer, eller som innebærer bruk av kalkulator og datamaskiner. Kunnskap om å vurdere resultatene av beregningene hører også til denne tråden.

Det er viktig at utregninger utføres effektivt og nøyaktig, samt at de gir riktig resultat. Nøyaktighet og effektivitet kan forbedres med øving, noe som også kan bidra til å oppnå matematisk kunnskap. I tillegg må elever være i stand til å anvende prosedyrene på en fleksibel måte. Dersom alle regneoperasjoner skal utføres på papir blir prosedyrene lite effektive. Elevene bør derfor beherske ulike mentale strategier i regneprosesser. En del av kunnskap om beregninger handler derfor om å kunne vurdere hvilke verktøy eller hjelpemidler som skal velges i en gitt situasjon (Kilpatrick et al., 2001). Alle prosedyrer er ikke av samme type, og ulike prosedyrer egner seg til forskjellige situasjoner. Enkelte prosedyrer innebærer manipulasjon av matematiske symboler, andre opererer på konkrete objekter, visuelle diagrammer eller andre representasjonsformer (Hiebert & Lefevre, 1986).

Kilpatrick et al. (2001) påpeker også at enkelte algoritmer kan bidra til bedre forståelse for grunnleggende operasjoner og viktige begreper, og utgjør dermed en viktig del av undervisningen. Dette sammenfaller med Hiebert og Lefevres (1986) beskrivelse av kunnskap om prosedyrer. Enkelte algoritmer representerer begrep i seg selv, og bidrar dermed til utvikling av begrepskunnskapen til den lærende. Dette viser at kunnskap om prosedyrer og beregninger må betraktes i sammenheng med forståelse, og understreker dermed at de fem trådene er bundet sammen og avhengige av hverandre.

Kunnskap om matematiske beregninger er nødvendig for at elever skal kunne utdype sin forståelse av matematiske ideer eller å løse matematiske problemer. Fokus på å komme fram til et resultat på en enkel eller kjent måte kan hindre muligheten til å se viktige sammenhenger som går fram av problemet. Faren ved å utføre beregninger uten forståelse er at sannsynligheten for gjøre feil øker, og det blir vanskeligere å lære de korrekte metodene. Dersom elever lærer prosedyrer uten forståelse kreves det omfattende øving for å ikke glemme noen av stegene. Med forståelse vil eventuelt glemte steg bli husket mens prosessen utføres. Elever som har forståelse vil også være i stand til å modifisere eller tilpasse prosedyrene stil situasjonene slik at de blir enklere å bruke (Kilpatrick et al., 2001).

Matematiske ferdigheter som læres uten forståelse vil bli lært som isolerte elementer av kunnskap, noe som vil bidra til at læring av nye emner blir vanskeligere (Kilpatrick et al., 2001). Dette kan forklares med at begrepsutvikling skjer ved at det konstrueres et nettverk mellom ulike typer informasjon som sammen utgjør kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986). Videre blir også anvendelsen av beregninger som læres uten forståelse innsnevret til de prosedyrene som læres ved det aktuelle tidspunktet. Med forståelse for beregningene kan prosedyrer forenkles og anvendes i andre former (Kilpatrick et al., 2001). Dette utgjør tråden *anvendelse* i dette rammeverket, og jeg vil beskrive dette nærmere i et eget delkapittel.

2.5.3 Anvendelse

Anvendelse viser til evnen til å formulere, uttrykke og løse matematiske problemer. I skolen blir elever eksponert for allerede ferdig oppstilte oppgaver, men utenfor skolen ligger mye av vanskeligheten i å finne ut hva som er problemet. Videre må de kunne formulere problemet slik at de kan benytte matematikk for å løse det. Erfaring og øving er nødvendig både i formulering og løsning av oppgaver (Kilpatrick et al., 2001). I tillegg hevder Kilpatrick et al. (2001) at elever også må være i stand til å se at enkelte representasjoner deler en felles matematisk struktur. Nybegynnere er tilbøyelige til å legge merke til likheter i overflatestrukturer i problemer, som tegn og scenarier som er beskrevet i problemet, mens viderekommende problemløsere evner i større grad å fokusere strukturelle forhold innad i problemet, og leter gjerne etter sammenhenger som kan gi ledetråd til hvordan problemet skal løses.

Vi kan skille mellom problemer som kan løses rutinemessig og problemer som ikke kan løses ved kjente rutiner. Rutinemessige løsninger krever en reproduktiv tankegang ved at den som løser oppgaven benytter seg av kjente løsningsprosedyrer. I kontrast til dette står oppgaver som ikke kan løses ved bruk av kjente rutiner. Løsning av denne type oppgaver krever produktiv tenkning fordi den som løser oppgaven må finne opp en måte for å forstå og løse problemet. Å kunne vise fleksibilitet når det gjelder metode er et sentralt kognitivt krav når det gjelder løsning av slike oppgaver. Dette synliggjøres når metoder tilpasses situasjonen som gjelder, som f.eks. å være i stand til å vurdere hva som er et godt kjøpt ved bruk av generell kunnskap om størrelser (Kilpatrick, et al., 2001).

Utvikling av strategier for å løse problemer som ikke kan gjøres rutinemessig avhenger både av forståelse av informasjonen som inngår i problemet, sammenhenger mellom disse, i tillegg til kunnskap om beregninger. Kunnskap om anvendelse av matematikk kan også bidra til økt motivasjon for å lære og løse problemer på en rutinemessig måte, i tillegg til at det kan fremme forståelse for begreper som *gitt*, *ukjent* og *løsning*. Anvendelse av prosedyrer og valg av hvilke som er mest effektive i en gitt situasjon vil også bidra til å utvikle forståelsen for *beregninger* (Kilpatrick et al., 2001). Anvendelse knytter altså sammen både forståelse for begrep og prosedyrer, i tillegg til å virke motiverende for å lære matematikk. Dette er et tydelig eksempel på at de fem trådene har innvirkning på hverandre, og at matematisk kompetanse krever at alle de fem komponentene blir utviklet hos den som lærer.

2.5.4 Resonnering

Kapasiteten til å tenke logisk om forholdet mellom begreper og situasjoner blir av Kilpatrick et al. (2001) beskrevet som *resonnering*. Denne typen resonnement tar utgangspunkt i vurdering av alternativer og inkluderer kunnskap om hvordan konklusjoner kan rettferdiggjøres. Kunnskapen benyttes til å navigere gjennom alle opplysninger, prosedyrer, begreper og løsningsmetoder og til å se at disse stemmer overens med hverandre. Deduktiv tankegang er sentralt i matematikken, og svarene er riktige fordi de framgår fra bestemte antagelser gjennom en serie av logiske steg. En elev som er uenig i et svar skal ikke være avhengig av å sjekke med lærer eller medelever eller andre kilder for å undersøke sin tankegang. I prinsippet er det tilstrekkelig å kun sjekke om hans eller hennes egen tankegang er korrekt. Jeg vil knytte denne tråden til den kognitive læringsteorien og begrepene assimilasjon og akkomodasjon (Säljö, 2003). Stegene som utgjør en prosess vil være logiske for den som lærer avhengig av om de passer med handlingsskjemaene som allerede eksisterer i minnet.

Kilpatrick et al. (2001) sier at tre betingelser må være tilstede for å kunne framvise evne til å resonnere. Disse er at elevene må ha tilstrekkelig basiskunnskap, oppgaven må være forståelig og motiverende og referansekonteksten er kjent. Når det gjelder interaksjonen med de andre trådene er denne mest framtredende ved problemløsningsoppgaver i denne tråden. Ved formulering og representasjon av et problem for så å utvikle en løsningsstrategi er evnen til resonnering sentral. Kompetanse innenfor anvendelse av matematikk må overta når denne løsningsstrategien skal legitimeres. Videre kan kilden til resonneringen som gjøres komme fra metaforer og representasjoner som er knyttet til *forståelsen* av begrep.

2.5.5 Engasjement

Den siste strengen som inngår i Kilpatrick et al. (2001) sin beskrivelse av matematisk kompetanse er *engasjement*. Dette handler om å forstå nødvendigheten av matematikk og hvorfor det er nødvendig å lære det. Evnen til å anse seg selv som en effektiv lærer og bruker av matematikk inngår også i denne strengen. Engasjementet utvikles i samspill med de andre fire strengene, og bidrar også til å videreutvikle disse.

2.3 Trigonometri

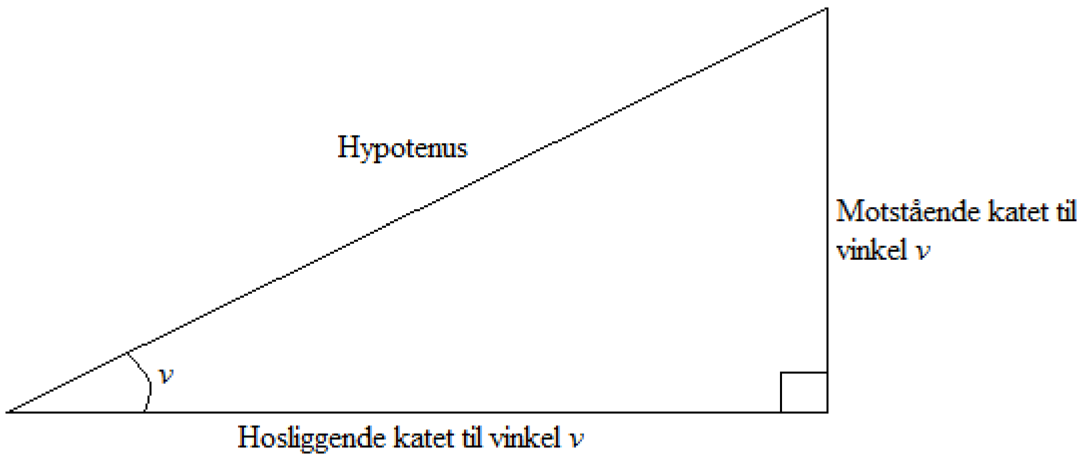
Ordet *trigonometri* viser til studiet av de trigonometriske funksjonene. Utregninger av sider og vinkler i trekanter med tre gitte elementer er sentralt i trigonometrien. Vi skiller mellom rettvinklede trekanter, hvor den ene vinkelen er 90° og ikke-rettvinklede trekanter. Opplysninger om en side og enten en vinkel eller en annen side bestemmer en rettvinklet trekant. En ikke-rettvinklet trekant er bestemt av enten to vinkler og en side, to sider og vinkelen mellom dem, tre sider eller to sider og en motstående vinkel (Thompson, Martinsson, Gunnesdal, & Rian, 2006).

Jeg vil nå presentere de matematiske definisjonene som utgjør det matematikkfaglige rammeverket for denne studien. *Sinus*, *cosinus* og *tangens* er sentrale definisjoner her. I tillegg vil jeg også presentere *sinussetningen, cosinussetningen* og *arealsetningen¸* samt *Pytagoras' setning*. Definisjonene er hentet fra læreboka Sinus 1T (Oldervoll, 2009). Jeg vil i tillegg gi en nærmere beskrivelse av definisjonenes betingelser ved å bruke teori fra Thompson et al. (2006).

2.3.1 Sinus, cosinus og tangens

Definisjonene av *sinus*, *cosinus* og *tangens* tilhører ifølge Thompson et al. (2006) de trigonometriske funksjonene. For en *spiss vinkel* kan de trigonometriske funksjonene defineres som forhold mellom to og to sider i en rettvinklet trekant. De trigonometriske funksjonene begrenser seg imidlertid ikke til vinkler med kan også representeres som funksjoner i det todimensjonale planet.

Oldervoll (2009) tar utgangspunkt i en rettvinklet trekant for å definere de trigonometriske funksjonene *sinus, cosinus* og *tangens*. Figuren som følger viser en rettvinklet trekant og navnene på sidene som benyttes for å uttrykke de trigonometriske størrelsene.



Figur 3: Figuren viser navn på sidene i en rettvinklet trekant

Motstående og *hosliggende* katet viser til de to sidene som danner den rette vinkelen, mens *hypotenus* utgjør den lengste linjen i trekanten. Ved å ta utgangspunkt i vinkel v er motstående og hosliggende katet definert som vist i figuren.

«I en rettvinklet trekant med en spiss vinkel er

$$\sin v = \frac{den\ motstående\ kateten\ til\ vinkelen\ v}{hypotenusen}$$

$$\cos v = \frac{den\ hosliggende\ kateten\ til\ vinkelen\ v}{hypotenusen}$$

(Oldervoll, 2009)»

«I en rettvinklet trekant er

$$\tan v = \frac{den\ motstående\ kateten\ til\ v}{den\ hosliggende\ kateten\ til\ v}$$

Dermed er

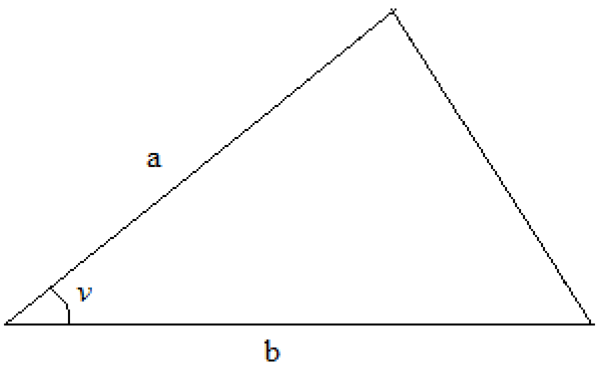
den motstående kateten til v = den hosliggende kateten · tan *v*, (Oldervoll, 2009)»

Verdimengden til en vilkårlig sinusfunksjon $x \to \sin x$ er alle reelle tall i intervallet [-1,1]. Sinusfunksjonen er definert for alle verdier av *x*. Tilsvarende gjelder for cosinusfunksjonen $x \to \cos x$ (Thompson et al., 2006). Sinus- og cosinusverdiene til en spiss vinkel vil likevel ha verdi mellom 0 og 1, fordi lengder av sider alltid vil ha positiv verdi.

Definisjonsmengden til *tangensfunksjonen* er alle verdier av *x* som ikke er odde multipler av $\frac{\pi}{2}$, dvs. at *x* ikke kan uttrykkes som $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$, hvor *n* representerer heltall. Verdimengden av tangensfunksjonen er alle reelle tall (Thompson et al., 2006).

2.3.2 Arealsetningen, sinussetningen og cosinussetningen

Arealsetningen, sinussetningen og cosinussetningen *anvender* de trigonometriske funksjonene for å beskrive sammenhenger i en vilkårlig trekant. Hver av de tre setningene som nå presenteres tar utgangspunkt i en ikke-rettvinklet trekant på samme måte som Oldervoll (2009) framstiller dem (Figur 4). De vil også gjelde for rettvinklede trekanter, selv om dette ikke vektlegges i læreboka som definisjonene er hentet fra.

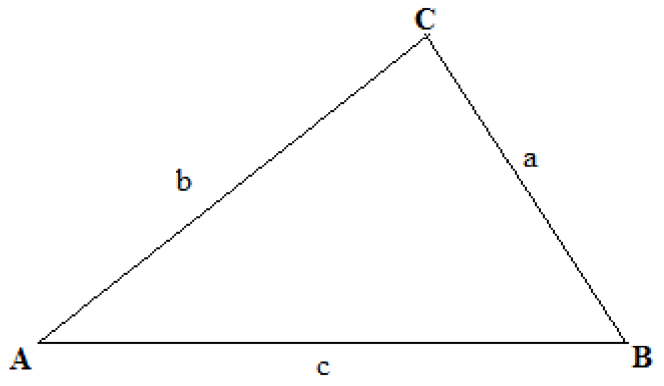


s

Figur 4: Figuren viser en ikke-rettvinklet trekant med to sider a og b som danner en vinkel v

Arealsetningen sier at arealet av en ikke-rettvinklet trekant er gitt ved $\frac{1}{2}ab \sin v$, og kan benyttes til å finne arealet av en trekant hvor to av sidene er kjent og alle vinklene er mellom 0° og 90° (Oldervoll, 2009). Oldervoll (2009) viser at arealsetningen kan benyttes til å finne sider og vinkler i en ikke-rettvinklet trekant. Jeg vil understreke at arealsetningen også gjelder for *rettvinklede* trekanter, da dette gir sinusverdien *1*. Dette vil gi $A = \frac{1}{2}ab$, som vi kjenner som en formel for å regne areal av rettvinklede trekanter.

Sinussetningen beskriver at forholdet mellom sinus til en vinkel og lengden til den motstående siden i en ikke-rettvinklet trekant vil være lik for alle vinklene i trekanten. Oldervoll (2009) tar utgangspunkt i en trekant ABC for å uttrykke dette (Figur 5).



Figur 5: Figuren viser en ikke-rettvinklet trekant trekant ABC med tilhørende motstående sider med lengde a, b og c

Den matematiske beskrivelsen av sinussetningen er som følger:

«I trekanten ABC er

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \qquad (1)$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad (2)$$

(Oldervoll, 2009)»

Under visse betingelser kan sinussetningen gjelde for to forskjellige vinkler – supplementsvinkler. Sinussetningen kan benyttes til å bestemme vinkel A (Figur 5) ved følgende uttrykk:

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b}$$

I dette uttrykket utgjør «$a \sin B$» lengden fra punktet C til linjestykket AB i △ABC. Definisjonen av sinus utgjør argumentet for dette. Thompson et al. (2006) presenterer fire ulike tilfeller for en spiss vinkel B. Jeg vil nå beskrive eksistensen av $\triangle ABC$ ved de ulike tilfellende. Beskrivelsene tar utgangspunkt i $\triangle ABC$ som er vist i Figur 5.

$b \ < a \, sin \, B$:

Dette vil gi $\sin A > 1$, som er utenfor verdimengden til sinusfunksjonen. Det eksisterer dermed ingen $\triangle ABC$ som oppfyller dette. Lengden *b* kan ikke være mindre enn høyden fra punktet C.

$b = a \, sin \, B$:

Dette gjelder for en rettvinklet $\triangle ABC$ hvor $\angle A$ utgjør den rette vinkelen. Lengden *b* utgjør høyden fra punktet C i dette tilfelle.

$a \sin B < b < a$:

Dette vil gjelde for to ulike størrelser av $\angle A$. A_1 utgjør den ene lengden og A_2 utgjør den andre. A_1 finnes direkte ved bruk av kalkulator, mens A_2 finnes ved følgende formel: $180 - A_1$. Det eksisterer altså to ulike varianter av $\triangle ABC$ som oppfyller disse betingelsene.

$b \geq a$:

Dette tilfelle vil gi nøyaktig én $\triangle$ABC.

For en stump $\angle A$ eksisterer det nøyaktig én $\triangle$ABC dersom $a < b$.

Et annet resultat som benyttes for å finne ukjente sider og vinkler i en ikke-rettvinklet trekant er *cosinussetningen*: «Hvis vi i en trekant kjenner lengden *b* og *c* av to sider og vinkelen *v* mellom de to sidene, er lengden av den motstående siden til vinkelen *v* gitt ved $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos v$, (Oldervoll, 2009)». Cosinussetningen blir også kalt *den utvidede pytagorassetningen,* da pytagorassetningen utgjør et spesialtilfelle av cosinussetningen. Dersom vinkelen *v* er 90° vil den tilhørende cosinusverdien til vinkelen bli 0 og det siste leddet i uttrykket vil forsvinne. Vi sitter da igjen med $a^2 = b^2 + c^2$ som altså er kjent som pytagorassetningen (Oldervoll, 2009).

3. Metode
Jeg vil i dette kapittelet redegjøre for hvordan datainnsamlingen har foregått og hvilke forskningsmetoder som er benyttet i studien. Det blir også gitt en innføring av analyseverktøyet som er brukt i analysen av datamaterialet, i tillegg til en beskrivelse av studiens validitet og reliabilitet.

3.1 Bakgrunn

3.1.1 Skolebeskrivelse
Undersøkelsene som er gjort i forbindelse med denne masteroppgaven har funnet sted i en 1T-klasse ved en videregående skole i Trondheim. Ved denne skolen praktiseres organisatorisk nivådifferensiering etter faglig nivå på elevene. 1T-kurset består av i alt 6 paralleller, hvor undervisningen blir lagt opp etter hvilket faglig nivå de ulike klassene er på. Kompetansemål og vurderingskriterier er lik for alle paralleller, og det gis derfor felles prøver gjennom skoleåret. Utgangspunktet for nivåinndelingen er en prøve som gis i starten av skoleåret. Resultatene fra denne prøven, samt elevenes egne ønsker avgjør hvordan inndelingen blir. Det er til enhver tid anledning til å bevege seg mellom de ulike nivåene. Opplæringsloven (Kunnskapsdepartementet, 1998) sier at inndeling av klasser skal skje med hensyn til elevenes sosiale behov, og at det ikke skal være faglig nivå, kjønn eller etnisk tilhørighet som avgjør dette. Det er imidlertid åpnet for at elever kan deles inn i andre grupper for *deler* av opplæringa, noe som er praksis ved denne skolen.

3.1.2 Forskningsdesign
Jeg har valgt å ta utgangspunkt i et kvalitativt forskningsdesign for å besvare mitt forskningsspørsmål. I følge Robson (2011) kjennetegnes et slikt design ved at flere ulike metoder for datainnsamling benyttes og at forskningsdesignet vil kunne utvikle seg under arbeidet med oppgaven. Det endelige designet vil ikke kunne bestemmes i forkant av datainnsamlingen, siden resultater fra datainnsamlingen vil være av betydning for tilnærming til forskningsspørsmål. Etter å ha samlet data vil forskeren ha et større grunnlag for å velge et teoretisk rammeverk for å analysere resultatene. Ved å ta mitt forskningsspørsmål i betraktning kan en også se for seg å benytte kvantitative metoder, men tilgjengeligheten til informanter og tidsavgrensning i arbeidet med denne oppgaven er årsaker til at studien befinner seg innenfor et kvalitativt forskningsdesign.

Undersøkelsene jeg har gjort samler informasjon om hvilke matematiske kompetanser det forventes at elevene innehar innenfor trigonometri, samt hvilke kompetanser de besitter. Informasjon om *forventet* kompetanse fås gjennom oppgavene på prøven som elevene har i tilknytning til dette temaet, og baserer seg dermed på en dokumentstudie av prøven sammen med kompetansemålene fra læreplanen (LK06). Elevenes *oppnådde* kompetanse blir tilgjengeliggjort gjennom elevenes besvarelser på denne prøven, samt et oppgavesett som jeg har utformet på grunnlag av observasjoner fra undervisningen. Kompetansemål fra læreplanen (LK06) og læreboka Sinus 1T (Oldervoll, 2009) har også vært kilder til utforming av dette heftet. Ifølge Robson (2011) kjennetegnes et kvalitativt forskningsdesign ved at forskeren representerer et instrument i seg selv og at det fokuseres på deltakernes syn. Utgangspunktet er ofte at forskeren har en idé om hva som skal undersøkes, mens relasjoner og sammenligninger av undersøkelsene oppstår ved et senere tidspunkt i studien. I mitt tilfelle var utgangspunktet for forskningsarbeid at jeg ønsket å undersøke begrepsforståelse ved en skole hvor det praktiseres nivådeling. Relasjonen til trigonometri som fagområde ble til som følge av at dette temaet var på planen i perioden når jeg gjorde mine datainnsamlinger. Forskningsspørsmålet er dermed et resultat av hvilke forutsetninger som var tilstede mens jeg gjorde datainnsamlingen.

All datainnsamling er gjennomført i en og samme klasse i et tidsrom på tre uker. Disse begrensningene i tid og rom gjør at dette kan betraktes som en kasusstudie. En kasusstudie kjennetegnes ved at det er en situasjon, individ, gruppe eller organisasjon som er av interesse for forskeren. Forskningsarbeidet skal inkludere en empirisk tilnærming av et bestemt fenomen ved å benytte flere ulike kilder som datagrunnlag. Triangulering er et begrep som benyttes om forskning som samler data fra flere ulike kilder (Robson, 2011). Ulike kilder kan skape et krysningspunkt som utgjør en kjerne eller noe som kan forskes på (Postholm, 2005). I mitt forskningsarbeid er denne trianguleringen representert ved at oppgaveheftet til elevene blir utformet på grunnlag av det som undervises i timen, samt hva som forventes på prøven. Læreboka Sinus 1T (Oldervoll, 2009) som benyttes ved skolen og kompetansemålene fra læreplanen Kunnskapsløftet (LK06) utgjør kilden til hva som undervises i timene og hva som forventes i vurderingssituasjonen.

3.2 Datainnsamling

3.2.1 Observasjon

For å få innsikt i det faglige grunnlaget som elevene ble disponert for observerte jeg enkelte undervisningstimer under gjennomgangen av det trigonometriske fagstoffet. Disse observasjonene ble gjort ved et tidlig tidspunkt i masterarbeidet, og inngikk på denne måten i en utforskende fase av studien. I denne fasen er hensikten å finne ut hva som foregår i en situasjon som en forespeiling til videre testing av det observasjonene gir innsikt i (Robson, 2011). Informasjonen som samles i løpet av observasjoner i en kasusstudie vil bidra til å utvikle fokuset for observasjonen, og forskeren kommer nærmere kjernen eller essensen i feltet som undersøkes (Postholm, 2005). Observasjonene ble gjort i en periode på to uker, og alle undervisningstimene omhandlet det matematiske temaet trigonometri. Hensikten med disse observasjonene var å få innsikt i hva som ble undervist, slik at jeg med utgangspunkt i dette kunne lage et oppgavehefte for å få bedre innsikt i elevenes kompetanse. Robson (2011) beskriver observasjoner med et klart fokus som formelle observasjoner, og siden jeg i denne delen av undersøkelsen så etter *hva* som ble undervist vil jeg plassere observasjonen innenfor dette feltet. Min rolle kan forklares som en «observator-som-deltaker». Dette betyr at jeg ikke deltok i aktiviteten, men min rolle som forsker var kjent for alle som var tilstede. En stor fordel med observasjon som metode er at data blir framstilt på en direkte måte. I tillegg er observasjon godt egnet i kombinasjon med andre forskningsmetoder. Jeg dokumenterte undervisningsøktene som jeg observerte med et videokamera. Postholm (2005) omtaler videokamera som et nyttig redskap for å fange opp og bevare situasjonen som skal studeres. Denne dokumentasjonen gjorde det videre arbeidet lettere, og behovet for å ta notater underveis ble mindre. Selve tavleundervisningen var den delen av observasjonen som var mest relevant for meg i etterkant, da det var dette som representerte det som ble undervist.

3.2.2 Deltakende observasjon

I delen av studien hvor elevene arbeidet med oppgaveheftet som jeg hadde utformet, var min forskerrolle en «deltaker-som-forsker». En slik rolle innebærer at gruppen er kjent med at den som observerer faktisk skal observere, i tillegg til at rollen åpner for å delta i aktiviteten. I starten av aktiviteten arbeider den som observerer med å skape nære relasjoner til de deltakende. Videre kan den observerende be deltakerne forklare ulike aspekter av hva som foregår (Robson, 2011). I mitt tilfelle ble det stilt spørsmål knyttet til de matematiske begrepene som ble nevnt i elevgruppen under arbeid med oppgavene. En slik form for observasjon bidrar til at nøkkelinformantene ledes til en mer analytisk refleksjon rundt prosessene som gjennomføres (Robson, 2011). Å stille spørsmål er en vanlig metode i denne type datainnsamling, og dette skiller den deltakende observasjonsformen fra direkte observasjon. Innslag av spørsmål underveis gjør at denne type observasjon har enkelte fellestrekk med intervju som metode. Skillet mellom intervju og deltakende observasjon kan være uklart, men i intervju er det som regel en intervjuguide som skal følges, mens det i en observasjon hvor forskeren er deltagende kan det i større grad oppstå diskusjoner underveis i gjennomføringen. I en slik situasjon kan det også oppstå mindre intervju med individene som deltar i undersøkelsen. Strukturen på gjennomføringen kan derfor minne om et informativt intervju. Dette er en type ustrukturert intervju hvor en benytter mulighetene som oppstår underveis til å prate om noe som er relevant for studien, og er vanligvis benyttet i kombinasjon med andre forskningsmetoder (Robson, 2011). I mitt forskningsarbeid var dette spørsmål som var tilknyttet detaljer i elevenes løsning av oppgavesettet som ble gitt. Det oppstod også diskusjoner innad i fokusgruppa. På denne måten fikk jeg innsikt i hvordan elevene uttrykte sin begrepsforståelse verbalt.

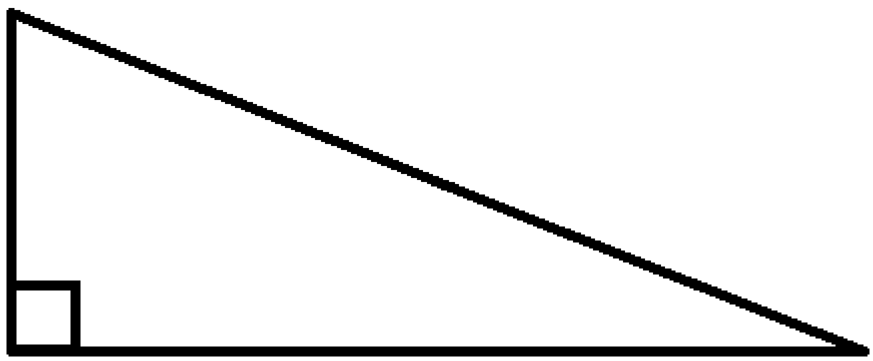
3.2.3 Oppgavehefte

Oppgaveheftet ble utformet med grunnlag i observasjoner av undervisningen og gjennomført i etterkant av prøven. Hensikten med oppgavene var å få innsikt i hvilken forståelse elevene hadde etter endt undervisning og vurdering i form av prøve i trigonometri.

Oppgave 1:

a)

Hva tenker dere når dere ser denne trekanten?



- Egenskaper
- Navn på sidene

b) Forklar hva som menes med disse begrepene?

- trekant

- vinkel

- hypotenus

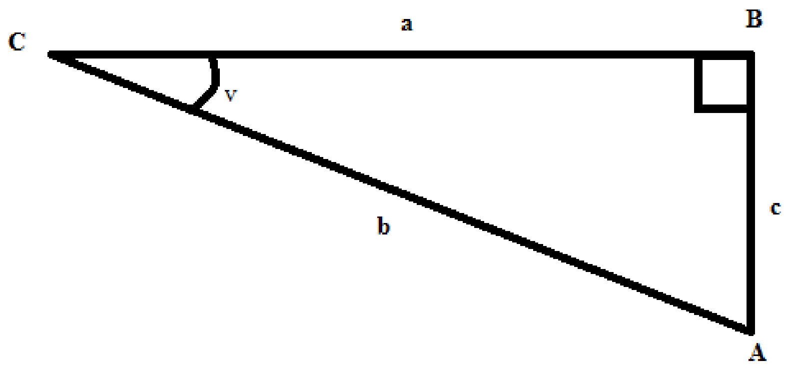
- katet

- sinus

- cosinus

- tangens

Oppgave 2:

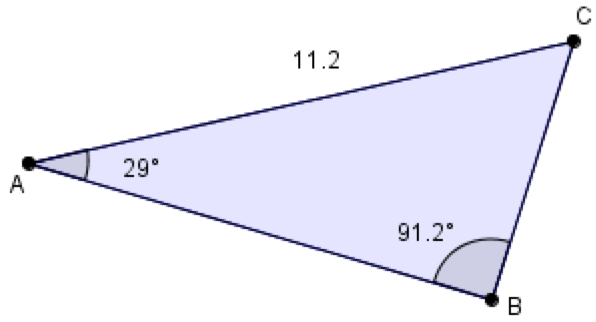


a) Hva er *sin v*?

b) Hva er *cos v*?

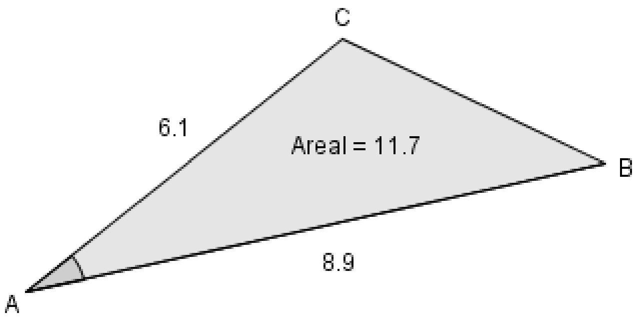
c) Hva er *tan v*?

Oppgave 3



Du skal regne ut siden **BC** i denne trekanten. Hvilken setning kan du bruke?

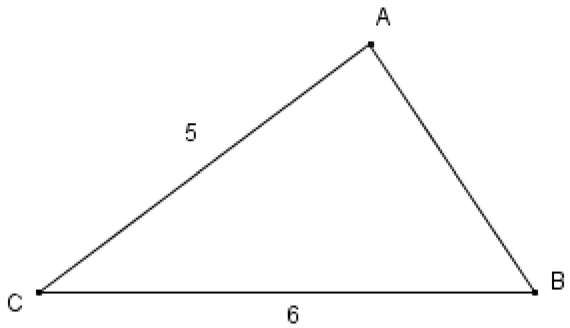
Oppgave 4



a) Finn vinkel A i denne trekanten

Svar:

Oppgave 5:



Du får vite at sin C er 0,8. Hva er avstanden fra punktet A til linja BC i trekanten?

Oppgave 6:

En 8 meter lang stige står mot en husvegg. Vinkelen mellom stigen og bakken er 70 °. Lag en skisse som beskriver situasjonen. Hvor langt opp på veggen når stigen?

Oppgave 7:

a) Tegn en rettvinklet trekant ABC med sin B = $\frac{4}{5}$

b) Tegn en rettvinklet trekant ABC med cos C = $\frac{2}{7}$

c) Tegn en rettvinklet trekant ABC med tan C = $\frac{9}{5}$

3.2.4 Utvalg og gjennomføring

I mitt første møte med klassen som deltok i studien presenterte jeg meg selv og mitt forskningsarbeid. Jeg deltok i en undervisningstime for at elevene skulle bli komfortable med en ekstra person i klasserommet og for at de kunne bli bedre kjent med meg som person. Jeg observerte undervisningen og bidro med hjelp til oppgaveregning i etterkant. På denne måten skaffet jeg meg informasjon om hvilket faglig nivå elevene befant seg på, samtidig som at jeg fikk et inntrykk av hvordan klassemiljøet var. Den ustrukturerte formen kan klassifisere denne sekvensen som observasjon med uformell tilnærming (Robson, 2011). Videre ble det uformet et informasjonsdokument (Vedlegg I) hvor det ble redegjort for mitt forskningsarbeid og hensikt med datainnsamlingene som skulle foregå. I neste steg ble mer utfyllende informasjon om studien og hvordan datainnsamlingen skulle forløpe gitt til elevene. I forkant av videoopptakene som ble gjort i klasserommet ble informasjonsdokumentet sendt med hjem til foreldre/foresatte. Siden ingen av elevene var myndige måtte de returnere en svarslipp hvor foreldre/foresatte ga samtykke til at deres barn kunne delta på dette. Dette kalles et informert samtykke (Postholm, 2005). Elevene som gjennomførte oppgavesettet ble valgt ut blant de 19 elevene i klassen som leverte en underskrevet svarslipp som bekreftet foreldres/foresattes tillatelse. Mine kriterier for valg av elevgruppe var at elevene som skulle delta var muntlig aktive, jevnt antall gutter og jenter, samt at de hadde deltatt på prøven. Antallet elever skulle være fire-fem. Elevene fikk mulighet til å melde seg frivillig til å delta. Med hjelp fra læreren for å velge elever som oppfylte nevnte kriterier ble det valgt en elevgruppe på fire bestående av en jente og tre gutter. Kriteriet for jevnt antall gutter og jenter ble ikke oppfylt, siden det ikke var nok jenter som meldte interesse. Elevene som ble valgt ut utgjorde en fokusgruppe. Arbeidet med oppgavesettet ble dokumentert med et videokamera, i tillegg til at jeg samlet inn de skriftlige besvarelsene av oppgavene. Et aspekt som er viktig å ta i betraktning ved bruk av videokamera er at kan dette virke hemmende både for elevene som deltakere og meg som deltakende observator (Robson, 2011). Jeg valgte å benytte meg av videokamera i denne delen for at informasjonen som kom fram skulle bli så entydig og fullstendig som mulig. Videoopptakene viser elevenes kommunikasjon, og dokumenterer ikke de skriftlige løsningene på oppgavene.

Anonymisering av deltakere i et forskningsarbeid er ansett som god etisk praksis. Det skal heller ikke gis informasjon som gjør det mulig å avsløre deltakernes identitet. Hensikten med anonymisering er først og fremst å ivareta deltakernes personvern. I tillegg er det også ofte enklere å skaffe informanter dersom det klargjøres at deres deltakelse ikke skal kunne spores (Robson, 2011). For å ivareta de etiske retningslinjene i mitt forskningsarbeid informerte jeg elevene om at alt datamateriell skulle bli destruert etter at jeg hadde hentet ut nødvendig informasjon. Gruppen av elever som utgjorde fokusgruppa fikk de fiktive navnene Audun, Sander, Pia og Thomas.

3.3 Analysemetoder

3.3.1 Dokumentanalyse

I dette forskningsarbeidet er det benyttet flere skriftlige kilder i dataanlaysen. De skriftlige kildene er brukt både som bakgrunnsinformasjon og til mer inngående analyse. Dokumentanalyse gjøres ofte i kombinasjon med deltagende observasjon, og utgjør i mange situasjoner bakgrunnsinformasjon til feltet som observeres (Fangen, 2004). Prøveoppgavene gjennomgår i dette forskningsarbeidet en innholdsanalyse, hvor det forsøkes å trekke forbindelser mellom det som er skrevet og sammenhengen det representerer. Hensikten med å analysere prøven er å finne ut hvordan innholdet i oppgavene kan knyttes til teori om begrepsforståelse. Fordelen med dokumentanalyse er at datamaterialet opptrer i en permanent form, og er dermed mulig å re-analysere innholdet ved et senere tidspunkt for å undersøke forskningens reliabilitet eller i forbindelse med replikasjonsstudier. (Robson, 2011). I en dokumentanalyse vil forskeren kunne observere uten å bli observert, noe som Robson (2011) betrakter som en fordel med denne typen analyse. Forskerens forutinntatte meninger vil likevel være av betydning også i denne analysemetoden.

Prøven som ble gitt til klassen er en hovedkilde til hvilke kompetanser som forventes av elevene, og representerer dermed en kilde til bakgrunnsinformasjon i denne studien. Elevbesvarelsene tilhørende denne prøven, samt elevbesvarelsene fra oppgavehefte er også skriftlige kilder som analyseres i studien. Robson (2011) peker på spørsmålene «hvem har produsert, med hvilken hensikt, og i fra hvilket perspektiv?» som viktige i en dokumentanalyse. Analysen av besvarelsene fra oppgaveheftet er en form for dokumentanalyse som inngår i en triangulering. Bevarelsene bygger opp under funnene som er gjort i prøvebesvarelsene, og har dermed en validerende funksjon (Fangen, 2004).

3.3.2 Analyseprosess

Datainnsamling og dataanalyse er ifølge Postholm (2005) gjentatte og dynamiske prosesser. Analysen foregår gjennom selve innsamlingsarbeidet, men kommer enda mer i fokus etter at materialet er samlet inn. Vi kan skille mellom deskriptive og teoretiske analyser. Den deskriptive analysen innebærer analyseprosesser som strukturerer datamaterialet for å gjøre det mer oversiktlig og forståelig. Den teoretiske analysen innebærer at forskeren benytter seg av kjent teori for å analysere deler av et materiale. Jeg vil plassere analysemetoden som er benyttet i dette forskningsarbeidet innenfor den konstant komparative analysemåten. Koding og kategorisering av datamaterialet er en sentral del i analysearbeidet her (Postholm, 2005). Jeg har valgt å benytte de fem trådene av matematisk kompetanse som blir beskrevet av Kilpatrick et al. (2001) som verktøy i analysen av datamaterialet. Innledningsvis i analyseprosessen blir fenomener i datamaterialet kategorisert under gjennomgang av datamaterialet. Ved å analysere prøveoppgavene vil jeg beskrive hvilke matematiske kompetanser som blir belyst i hver oppgave. Denne prosessen kan forstås som en åpen koding (Postholm, 2005), og hensikten er å samle grupper som beskriver det samme fenomenet. Kategoriseringen av kompetansene som kreves for å løse prøveoppgavene danner utgangspunktet for neste del av analysen. Ved å samle hvilke kompetanser som kreves i hver oppgave vil det lette arbeidet med å analysere hvilke kompetanser elevene viser at de har oppnådd gjennom prøvebesvarelsene. Kategoriseringen som gjøres i del én av analysen vil benyttes til å velge ut relevante oppgaver som utgjør analysegrunnlaget i del to.

3.4 Validitet og reliabilitet

Valideten til et forskningsarbeid som følger kvalitativ kan knyttes til sannferdigheten eller nøyaktigheten til studien. Det er ofte vanskelig å kunne si noe om dette, men det er mulig å gjenkjenne situasjoner og ytre forhold som påvirker validiteten. Hvordan datamaterialet blir gjengitt og hvordan forskeren tolker informasjonen er faktorer som vil ha innvirkning på validiteten til studien. For å sikre validiteten til gjengivelsen av datamaterialet kan det være aktuelt å benytte seg av videoopptak dersom det er egnet. Et annet prinsipp er at tolkninger som er gjort av datamaterialet aldri må anses som selvforklarende. For å sikre validiteten til et forskningsarbeid må stegene som har ført til tolkningen kunne redegjøres for og forsvares. Utfordringer tilknyttet forskerens forforståelse (bias) vil være tilstede i all forskning som involverer mennesker. I kvalitativ forskning utgjør forskeren selv et instrument (Robson, 2011). Min forforståelse hadde betydning for min rolle som «deltakende observatør» i forbindelse med oppgavene som ble gjennomført med elevgruppa på fire. Mine oppfølgingsspørsmål til elevenes utsagn var i enkelte tilfeller farget av min forutinntatte antagelse om at beregningskompetanse har størst plass i matematikkundervisning i skolen. Trianguleringsprinsippet som min studie følger bidrar til å motvirke effekten av denne forforståelsen. Robson (2011) peker på at dersom datamaterialet er hentet fra flere kilder vil validiteten bli større. Dokumentstudien som inngår i min triangulering vil dermed være viktig for validiteten til denne studien.

I kvantitativ forskning er det vanlig å kytte reliabiliteten til forskningen til bruken av standardiserte forskningsinstrumenter, som f.eks. formelle tester og skalaer. Reliabiliteten handler om verktøyene og instrumentene som benyttes produserer konsise resultater. Denne tilnærmingen er problematisk i kvalitativ forskning. Metodene som benyttes til å generere kvalitativ data utelukker formell reliabilitetstesting. For å sikre reliabiliteten i et kvalitativt forskningsdesign må forskeren sørge for at forskningsarbeidet utføres nøyaktig, grundig og ærlig. Like viktig er det å også kunne dokumentere at arbeidet har foregått under disse rammene (Robson, 2011). Reliabiliteten til mitt studie vil også påvirkes av mine forutinntatte holdninger, og disse vil gjøres seg gjeldene både i innsamlingsarbeidet og analyseprosessen. For å gjøre reliabiliteten så god som mulig har jeg valgt å framstille både prøveoppgaver og elevbesvarelsene til disse i sin opprinnelige form, slik at leseren av denne oppgaven tydelig kan se hvilket utgangspunkt jeg har i mine tolkninger under analysen.

4. Analyse

Jeg vil nå analysere prøvebesvarelsene og oppgavebesvarelsene i lys av hva som forventes og hva som er oppnådd. Jeg vil forsøke å finne ut hvilke kompetanser som det er forventet at elevene skal kunne, hvilke som er oppnådd og hva som eventuelt er likt/ulikt her.

4.1 Forventet matematisk kompetanse

Dette avsnittet presenterer de relevante prøveoppgavene, samt en fullstendig løsning av disse. Oppgavene belyser hvilke matematiske kompetanser som det forventes at elevene skal inneha. I flere av oppgavene er det nødvendig å ha flere typer matematisk kompetanse, og samme type kompetanse kan dermed bli diskutert i flere oppgaver. Jeg velger likevel å fokusere på den kompetansen som er framtredende i løsningen av oppgaven og som på denne måten skiller seg fra de andre kompetansene som utgjør analyseverktøyet. Jeg velger kun å belyse de fire første kategoriene som inngår i rammeverket til Kilpatrick et al. (2001). Dette er fordi metodene som er benyttet i studien gir lite grunnlag for si noe om elevenes motivasjon og affeksjon av matematikkfaget, eller det som blir omtalt som engasjement i rammeverkets presentasjon. I etterkant av analysen av hver enkelt oppgave følger en kort oppsummering av hvilke kompetanser som blir belyst. Som avslutning i dette delkapittelet vil jeg presentere en tabell som viser hvilke kompetanser som blir belyst i hver enkelt oppgave.

Prøven som ble gitt tok utgangspunkt i to kapitler i læreboka (Oldervoll, 2009), hvor det ene handler om logaritmer og det andre om trigonometri. Oppgavene innenfor trigonometri er de som blir analysert i denne studien. Prøven er todelt, hvor det i første del ikke er tillatt med hjelpemidler. I andre del er det mulig å bruke kalkulator, datamaskin, lærebøker, egne notater og andre hjelpemidler som ikke åpner for kommunikasjon.

Jeg vil nå gjøre en analyse av oppgavene som ble gitt på prøven. Oppgavene blir gjengitt nøyaktig slik som de ble gitt på prøven. Videre følger en analyse av innholdet i oppgavene, og jeg vil gi en beskrivelse av hvilke typer forståelse oppgavene krever. Analysen inneholder også et forslag til framgangsmåte for å løse de aktuelle oppgavene, og det vises til hvilke matematikkfaglige resultater som legges til grunn for løsningene.

I del 1 av prøven finner vi én oppgave som omhandler trigonometri. Oppgaven spør etter to ukjente sider og sinus- og tangensverdien til en av vinklene i en rettvinklet trekant. Lengden på en av sidene og cosinusverdien til en annen vinkel er oppgitt i oppgaveteksten.

Oppgave 4

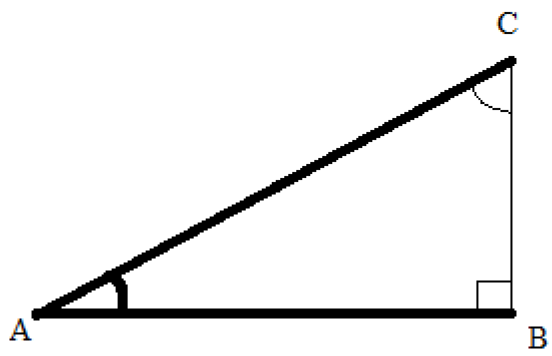
I ΔABC er $AC = 10$ og $\angle B = 90°$. Videre vet vi at $\cos A = 0{,}8$.

a) Finn AB.

b) Finn BC.

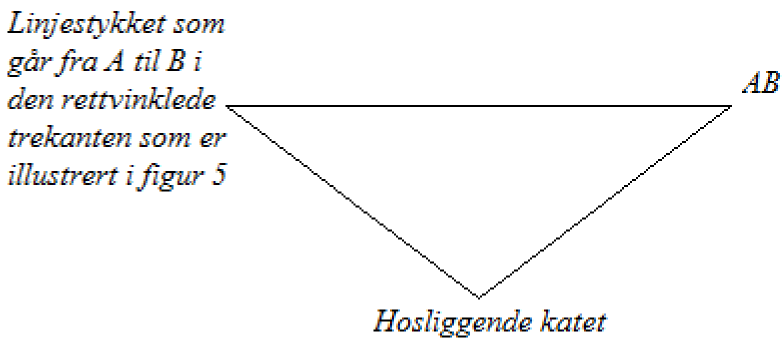
c) Finn $\sin A$ og $\tan A$.

Det er de semiotiske representasjonene som gjør det matematiske innholdet i denne oppgaven tilgjengelig, og det er gjennom de semiotiske representasjonene at jeg kan skaffe informasjon om hvilke kompetanser som er nødvendige for å løse oppgaven. «∆»-tegnet indikerer at det her er snakk om en trekant, og ifølge Steinbrings (2006) teori om semiotiske representasjoner vil jeg betrakte denne opplysningen som utgangspunkt for referansekonteksten til denne oppgaven. «∠B» er en semiotisk representasjon for *vinkelen B*, og størrelsen av denne er satt til å være 90°. Denne vinkelstørrelsen tilsvarer en *rett vinkel*, og det er altså snakk om en rettvinklet trekant. ∠B representerer den *rette* vinkelen i trekanten, og *AB* utgjør dermed den *hosliggende kateten* for ∠*A*. Relasjonen mellom *AB* og ∠*A* utgjør referansekonteksten til begrepet *hosliggende katet* (Steinbring, 2006). En illustrasjon av denne sammenhengen er vist i figur 5. I denne figuren er linjestykkene *AC* og *AB* markert fordi de danner ∠*A*, i tillegg til at linjestykket *AB* også representerer den hosliggende kateten til denne vinkelen.



Figur 6: Figuren viser referansekonteksten til begrepet hosliggende katet til vinkel A i trekant ABC

Sammenhengene mellom disse semiotiske representasjonene kan framstilles i en epistemologisk trekant (Steinbring, 2006), hvor *hosliggende katet* er begrepet som belyses, *AB* utgjør den semiotiske representasjonen til dette begrepet og viser til linjestykket som går mellom ∠*A* og den rette vinkelen ∠B. Det er dette linjestykket som utgjør referansekonteksten i den epistemologiske trekanten som er vist nedenfor.



Figur 7: Figuren viser hvordan en epistemologisk trekant for begrepet hosliggende katet kan uttrykkes med en rettvinklet trekant som referansekontekst

De tre hjørnene i trekanten må forstås i sammenheng med hverandre. Den semiotiske representasjonen *AB* får betydningen «hosliggende katet» *fordi AB* svarer til linjestykket i △*ABC* som oppfyller kriteriene for å være en hosliggende katet for ∠*A*.

AC er hypotenus i den rettvinklede trekanten, og det er oppgitt at lengden av denne er 10. Cosinusverdien til ∠A er 0,8. Definisjonen av cosinus vil løse denne oppgaven. Med de semiotiske representasjonene som er benyttet i oppgaveteksten vil definisjonen av cosinus (Oldervoll, 2009) se slik ut for ∠A i denne trekanten:

$$\cos A = \frac{AB}{AC}$$

For å sette opp dette uttrykket kreves det at elevene har kompetanse innenfor tråden som Kilpatrick et al. (2001) beskriver som forståelse. Elevene må være i stand til å tolke informasjonen i oppgaveteksten, som er gitt gjennom de semiotiske representasjonene, og å transformere opplysningene til et algebraisk uttrykk som gir et utgangspunkt for å løse oppgaven. *AB*, *AC* og *cos A* er alle semiotiske representasjoner, og må forstås i sammenheng med referansekonteksten (Steinbring, 2006).

For å kunne gjenkjenne *AB* som den hosliggende kateten og *AC* som hypotenus, er det nødvendig at de har kjennskap til egenskapene til en rettvinklet trekant og de tilhørende begrpenen, i tillegg til at de må vite hvordan cosinus er definert. Det må også være klart at vinkelstørrelsen 90° representerer en *rett vinkel.* Begrepsforståelsen blir dermed belyst ved at elevene må skape forbindelser mellom informasjonen som er gitt i oppgaven og kunnskapen de innehar fra før (Hiebert & Lefevre, 1986). I tillegg kreves det også at de er i stand til å *huske* selve definisjonen på cosinus, hvor en rettvinklet trekant utgjør referansekonteksten.

Cos *A* og lengden *AB* er kjent, og *AC* er lengden som etterspørres i oppgave *a)*. Med de gitte verdiene innsatt får vi følgende uttrykk:

$$0{,}8 = \frac{AB}{10}$$

Innsetting av de kjente verdiene kan betraktes som et skifte mellom ulike representasjonsformer for cosinus til vinkelen A. Representasjonen «*cos A*» blir byttet ut med *tallet «0,8»*, og dette er en transformasjon som kan tolkes som en *behandling* innenfor et *monofunksjonelt register* (Duval, 2006).

Ved å multiplisere begge sider av likhetstegnet med *«10»* får vi følgende svar:

$$AB = 0{,}8 \times 10 = 8$$

Det skjer her altså en utregning, noe som av Kilpatrick et al. (2001) blir beskrevet som en vanlig matematisk prosedyre. Utregningen kan tolkes til å være en prosess som består av en rekke handlinger som skjer i en bestemt rekkefølge. Tallet *«8»* utgjør *svaret* i deloppgave *a)*, og en gjenkjennelse av dette som det siste steget i prosessen er en del av prosedyrekunnskap som vi kjenner den fra Hiebert og Lefevre (1986).

BC vil utgjøre den andre kateten i den rettvinklede trekanten, noe som framgår av at ∠B er 90°. Denne lengden er den *motstående kateten* til *∠A*. Klassifiseringen av disse størrelsene er relevante for løsning av oppgave *b)*, og krever som i oppgave *a)* forståelse av begrepene som inngår i en rettvinklet trekant. I denne oppgave *b)* er lengden på kateten *AB* og hypotenus *AC* kjent, mens kateten *BC* utgjør den ukjente siden. Dette muliggjør bruk av *Pytagoras' setning* for å løse oppgaven. Elevene må være i stand til å navigere seg gjennom opplysningene som er gitt, og å gjenkjenne Pytagoras' setning som en prosedyre som stemmer overens med disse (Kilpatrick et al., 2001). I denne sammenhengen anser jeg Pytagoras' setning som en algoritme som representerer sentrale begreper som Kilpatrick et al. (2001) beskriver som et aspekt av beregning. Videre må elevene også her være i stand til å *huske* formuleringen av Pytagoras' setning. En kan også se for seg at det også er et alternativ å benytte seg av definisjonen av *sinus* for å finne den ukjente siden *BC,* siden denne kateteten utgjør den *motstående* kateten til *∠A*, og definisjonen av sinus beskriver forholdet mellom motstående katet og hypotenus (Oldervoll, 2009). En forutsetning for å bruke denne definisjonen er i dette tilfelle at en først finner verdien av *∠A*[4]. *∠A* finner vi ved å invertere cosinusverdien til vinkelen (cos *A*), noe som krever at en har hjelpemidler tilgjengelig. Dette er ikke gjennomførbart i praksis, siden denne oppgaven tilhører del 1 av prøven og det dermed ikke er tillatt å benytte seg av hjelpemidler. Løsning av oppgaven krever altså at elevene navigerer

[4] Et annet alternativ er å benytte det algebraiske resultatet «$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$», men dette inngår ikke i kompetansemålene i 1T på VG1

seg gjennom opplysningene som er gitt og tar i betraktning at hjelpemidler ikke er tilgjengelig i denne delen av prøven. En vurdering av Pyatgoras som en mulig løsningsmetode krever kompetanse innenfor tråden *resonnering* (Kilpatrick et al., 2001).

Løsningen med bruk av Pytagoras' setning vil se slik ut:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$BC^2 = AC^2 - AB^2$$

$$BC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$$

Siden *BC* representerer *lengden* av et linjestykke må dette være et positivt tall. En vurdering av dette krever at elevene har kompetanse i resonnement. En andregradslikning har i utgangspunktet to løsninger, men konteksten her muliggjør bare en løsning:

$$BC = \sqrt{36} = 6$$

Her foregår det et skifte fra bokstaver som semiotiske representasjoner for de ulike sidene i trekanten, til tall som representerer de samme sidene. Transformasjonene skjer også her innenfor samme register, og alle stegene som gjøres bygger på det forrige helt til tallet *«6»* framkommer som en representasjon på lengden av siden *BC.* Det er dette som utgjør *svaret* i oppgaven, og det er altså nødvendig å ha kunnskap om prosedyrer for å løse oppgaven (Hiebert & Lefevre, 1986). Løsningsprosedyren må også betraktes som en *beregning*, og det kreves derfor at elevene har kompetanse i å gjøre korrekte utregninger på en effektiv måte.

Den siste deloppgaven *c)* løses ved å bruke definisjonene av *sinus* og *tangens* (Oldervoll, 2009). Alle sidene i trekanten er nå kjent, og løsningen vil bestå av å sette inn de kjente verdiene i uttrykkene for sinus og tangens. Siden det fortsatt ikke er tillatt med hjelpemidler krever løsningen av denne oppgaven at elevene *husker* definisjonene av sinus og cosinus, og at de gjennomfører prosedyren på en korrekt måte for å finne det riktige svaret. Løsningen er som følger:

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

0,6 og 0,75 utgjør altså henholdsvis sinus- og tangensverdiene til $\angle A$ trekanten som er beskrevet i oppgaveteksten. For å kunne løse denne oppgaven må det skapes forbindelser mellom de semiotiske representasjonene som er benyttet for $\angle A$ (hhv. *sin A* og *cos A)* og konteksten som er beskrevet i oppgaven. Forbindelsene som skapes mellom de semiotiske representasjonene og informasjonen gitt i oppgaven er på samme abstrakte nivå, og kan klassifiseres som matematiske forbindelser på et primært nivå (Hiebert & Lefevre, 1986). Av de matematiske kompetansene som Kilpatrick et al. (2001) presenterer er det *forståelse* som er mest sentralt i løsningen av denne oppgaven. Dette er fordi forståelse krever at en er i stand til å representere matematiske situasjoner på ulike måter, noe som etterspørres i denne oppgaven. Representasjonene må også forstås i sammenheng med referansekonteksten (Steinbring, 2006) som for begge delene av oppgaven er gitt ved sammenhengen mellom $\angle A$ og ulike sider i trekanten. *Sin A* representerer begrepet sinus, og viser til forholdet mellom motstående katet til $\angle A$ og hypotenus i $\triangle ABC$. Tilsvarende er begrepet tangens representert som *tan A*, og beskriver forholdet mellom motstående katet og hosliggende katet til $\angle A$ i $\triangle ABC$.

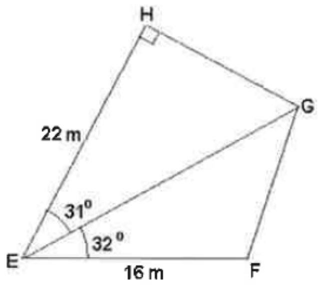
Av sentrale kompetanser som blir belyst i hver deloppgave i oppgave 4 vil jeg nevne *forståelse* og *beregning* i oppgave *a).* Videre vil jeg betrakte forståelse for begreper som nødvendig i løsning av oppgave *b),* men jeg vil i min videre analyse anse kompetanse innenfor *beregning* og *resonnering* som de mest karakteristiske i løsninger av denne oppgaven. I oppgave *c)* vil *forståelse* av begreper igjen være en sentral kompetanse som jeg vil legge til grunn i analyse av elevbesvarelser. Kompetansene som er belyst i hver deloppgave er gjengitt i Tabell 1.

Jeg vil nå analysere de relevante oppgavene fra del 2 av prøven. Det er her mulig å benytte seg av alle hjelpemidler som ikke åpner for kommunikasjon.

Oppgave 5 spør etter tre ukjente lengder i en firkant (EFGH) som er delt i to langs en diagonal. Figuren viser lengden på to av sidene i figuren, at en av vinklene i firkanten er rett, i tillegg til størrelsene på de to vinklene som blir dannet når den diagonale linjen deler et av hjørnene i firkanten. Den ene av de to trekantene som utgjør firkanten er rettvinklet med en kjent katet.

Oppgave 5

a) Finn HG.
b) Finn EG.
c) Finn FG.



HG utgjør en av de ukjente sidene i den rettvinklede trekanten *EGH* og representerer en katet i denne trekanten. ∠*HEG* beskriver den ene av de to vinklene som tilsammen utgjør ∠*E*, og størrelsen på denne vinkelen er satt til å være 31°. *EH* utgjør den hosliggende kateten til ∠*HEG* og lengden av denne er *22 m*. *HG* er motstående katet til ∠HEG. Denne informasjonen gjør det mulig å bruke definisjonen av tangens for å finne siden *HG*. Tangensuttrykket for ∠HEG og løsning av oppgaven blir som følger:

$$\tan HEG = \frac{HG}{EH}$$

$$HG = EH \times \tan GEH = 22 \times \tan 31° = 13{,}2$$

Løsning av deloppgave *a)* krever at en er i stand til å gjenkjenne △*EGH* som en rettvinklet trekant, i tillegg til å kunne klassifisere de ulike katetene og hypotenus. Dette innebærer at kunnskap om egenskaper til rettvinklede trekanter må settes i sammenheng med informasjonen som er gitt i oppgaven, og kan dermed knyttes til begrepsforståelse (Hiebert & Lefevre, 1986; Kilpatrick et al., 2001). Det foregår også en transformasjon i form av det Duval (2006) beskriver som *omdannelse*. I utgangspunktet blir opplysningene gitt i en *figur*, og det skjer et skifte av register når informasjonen blir representert som *algebraiske uttrykk*. Størrelsen av ∠*GEH* og lengden av *EH* kan benyttes direkte i definisjonen for *tangens*, men for å vite at denne kan benyttes er det essensielt å vite at △*EGH* er rettvinklet. Dette ser vi ved at det er avmerket en hake i ∠*EHG*. En slik hake er et eksempel på en matematisk konvensjon som vi finner i Steinbrings (2006) teori om matematiske representasjoner. Selve utregningsprosessen belyser også elevenes kompetanse innenfor *beregning*.

For å finne lengden av siden *EG* er det aktuelt å bruke Pytagoras' setning. Lengdene *HG* og *EH* er kjent, og △*EGH* er fortsatt en rettvinklet trekant. *EG* utgjør hypotenus i den rettvinklede trekanten. Pytagoras' setning blir som følger for △*EGH*:

$$EG^2 = HG^2 + EH^2$$

Med kjente tallverdier innsatt blir løsningen av oppgaven slik:

$$EG^2 = 13{,}2^2 + 22^2 = 174{,}2 + 484 = 658{,}2$$

$$EG = \sqrt{658{,}2} = 25{,}7$$

Prosessen som foregår her er tilsvarende som i løsningen av lengden *BC* i *oppgave 4*¸ bortsett fra at elevene her har mulighet til å benytte seg av hjelpemidler som lærebok og kalkulator. Dette innebærer at det ikke er nødvendig å *huske* selve formuleringen av Pytagoras' setning, da denne kan finnes i læreboka. En viktig del av denne oppgaven er å kunne *vurdere* Pytagoras som et mulig resultat for å komme fram til en løsning. Dette innebærer å gjøre en analyse av hvilken informasjon som er kjent, og det er her sentralt å betrakte svaret fra deloppgave *a)* som viktig informasjon.

Den siste deloppgaven spør etter lengden av siden *FG* som utgjør den motstående siden til ∠*FEG.* Størrelsen av ∠*FEG* er *32*° og lengden av siden *EF* er *16 m*. Lengden av siden *EG* ble funnet til å være *25,7 m* i forrige deloppgave. De to sidene *EG* og *EF* danner ∠*FEG*, og siden alle disse størrelsene er kjent vet vi fra definisjonen av cosinussetningen (Oldervoll, 2009) at lengden av den motstående siden til ∠*FEG* er gitt ved cosinussetningen:

$$FG^2 = EF^2 + EG^2 - 2 \times EF \times EG \times \cos FEG$$

For å løse denne oppgaven er det viktig gjenkjenne siden *FG* som den motstående siden til ∠*FEG*. *Den motstående siden* representerer her et begrep som elevene må ha kjennskap til. Forbindelsen som konstrueres mellom siden *FG* og ∠*FEG* kan tolkes til å være på det som Hiebert og Lefevre (1986) beskriver som det primære nivået på matematiske forbindelser. Videre må det skje et skifte av register. Informasjonen er i utgangspunktet tilgjengelig i figuren, og denne må transformeres slik at det er mulig å benytte cosinussetningen for å løse oppgaven. Dette er et eksempel på *omdannelse*. De semiotiske representasjonene *FG, EF, EG* og ∠*FEG* representerer sider og vinkler som i utgangspunktet er beskrevet i en geometrisk figur. Med de kjente verdiene innsatt blir løsningen på oppgaven som følger:

$$FG^2 = 16^2 + 25{,}1^2 - 2 \times 16 - 25{,}1 \times \cos 32 = 219{,}1$$

$$FG = 14{,}8$$

Kunnskap om prosedyrer er i denne oppgaven representert ved at det må gjøres en vurdering av hvilke algoritmer og regler som er aktuelle for å løse denne oppgaven. Selve uttrykket for cosinussetningen finnes i læreboka, men det er viktig å kunne vurdere at det er denne som skal brukes. Dette beskrives av Kilpatrick et al. (2001) som en del av kompetanse innenfor beregning.

Oppgave 5 belyser altså kompetanse innenfor *forståelse* og *beregning* i deloppgave *a)*. Løsningen av oppgave *b)* benytter resultatet fra oppgave *a)*, og en kan dermed argumentere for at de samme kompetansene også er nødvendige i denne oppgaven. Likevel vil jeg betrakte *resonnering* som en kompetanse som skiller *b)* fra *a)*, men også i oppgave *b)* er det essensielt med kompetanse innenfor *beregning*. Oppgave *c)* handler mest om å kunne avgjøre hvilken prosedyre som skal brukes og å kunne utføre denne riktig, og kan plasseres under tråden *anvendelse*. I tillegg er også beregningskompetanse nødvendig for å kunne gjøre de korrekte utregningene.

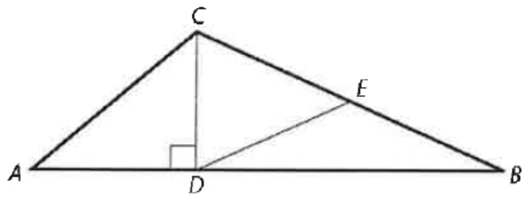
Oppgave 6:

Oppgaven beskriver en trekant *ABC* hvor den ene siden, *AC*, samt arealet er kjent. Et punkt *E* på sidekanten *BC* er avsatt. Bekrivelsen støtter seg på en skisse av trekanten. I skissen er trekanten delt i to, hvor delelinjen fra hjørnet *C* til punktet *D* utgjør en normal til grunnlinja *AB*. Trekanten *ABC* er dermed delt inn i to rettvinklede trekanter $\triangle ACD$ og $\triangle BCD$, som er synliggjort i skissen.

Oppgave 6

I ΔABC er $AC = 58$ og $CD = 42$. Videre er arealet av $\Delta ABC = 2205$. Et punkt E ligger midt på sidekanten BC.

a) Finn $\angle A$.
b) Finn AD.
c) Finn AB og BC.
d) Finn $\angle B$.
e) Finn DE.



Figuren viser altså en semiotisk representasjon av trekanten som er beskrevet i oppgaveteksten, med informasjon om hva de ulike bokstavene representerer. Informasjon om kjente størrelser er oppgitt i oppgaveteksten. *AC* og *CD* er semiotiske representasjoner vi finner i oppgaveteksten, og beskriver lengden av to av linjestykkene i figuren. Videre ser vi at *AC* representerer både en side av $\triangle ABC$ og hypotenus i $\triangle ACD$. *CD* utgjør den ene kateten i $\triangle ABC$, i tillegg til å representere en normal til linjestykket *AB*. Det presiseres ikke i oppgaven at representasjoner som «*AD*», «*BC*» og «*DE*» viser til *lengdene* av hvert av linjestykkene. Læreverket (Oldervoll, 2009) skiller heller ikke mellom representasjoner for linjestykker og lengder av linjestykker. Ulike semiotiske representasjoner for disse to begrepene vil bidra til å tydeliggjøre hva som etterspørres. I denne oppgaven er det likevel rimelig å anta at det er snakk om *lengder* fordi at representasjonene «*AC*» og «*CD*» er presentert med hver sin tallverdi i oppgaveteksten. Gjennom hele denne oppgaven kreves det at elevene er i stand til å skape forbindelse mellom informasjonen som er gitt i teksten med egenskapene som framgår av figuren.

Deloppgave *a)* kan løses ved at en gjenkjenner $\triangle ADC$ som en rettvinklet trekant. På samme måte som i *oppgave 5* er haken som er innfelt i $\angle ADC$ indikasjonen på dette. Denne informasjonen, sammen med at hypotenus *AC* og katet *CD* er kjent, muliggjør bruk av trigonometriske funksjoner for å finne $\angle A$. For å avgjøre hvilken av funksjonene som skal benyttes er det nødvendig at elevene gjenkjenner *CD* som den *motstående kateten* til $\angle A$. Informasjonen om at denne siden utgjør en katet er visualisert gjennom figuren, mens størrelsen av denne framgår gjennom teksten. Dette er altså to typer informasjon som må knyttes sammen for å kunne avgjøre hvordan oppgaven skal løses. Dette bidrar ifølge Hiebert og Lefevre (1986) til å utvikle begrepsforståelsen. Begrepet *motstående katet* gir mening fordi det skapes en forbindelse mellom normalen til linjestykket *AB* og opplysningen om at lengden av dette linjestykket er *«42»*. Normalen til linjestykket *AB* som er visualisert i figuren utgjør referansekonteksten, mens *CD* er den semiotiske representasjonen for lengden av linjestykket. I følge Duval (2006) kan dette betraktes som en *omdannelse*, siden informasjonen om størrelsen av *CD* er gitt i oppgaveteksten, mens det faktum at dette utgjør den motstående kateten til $\angle A$ kun går fram av figuren. Verdien av den motstående kateten *CD* til $\angle A$ og hypotenus *AC* i den rettvinklede trekanten $\triangle ADC$ er altså gitt, og definisjonen av *sinus* kan benyttes for å finne en løsning av oppgaven.

$$\sin A = \frac{CD}{AC} = \frac{42}{58}$$

Inversfunksjonen til *sinus* vil angi vinkelmålet til $\angle A$, og ved å bruke kalkulator finnes verdien av denne til å være *46,4°*. Her blir den prosedyrerettede forståelsen belyst ved at *inversfunksjonen* må finnes. Løsningen skal være i *grader*, og dette innebærer at elevene må ha kjennskap til den prosedyrerettede forståelsen som omhandler representasjoner og symboler (Hiebert & Lefevre, 1986). I tillegg må elevene kunne å bruke kalkulator til å finne inversfunksjonen til sinus, noe som tilhører kompetanse i bruk av hjelpemidler. Dette plasserer Kilpatrick et al. (2001) i tråden som handler om beregningskompetanse.

I deloppgave *b)* er det mulig å benytte seg av både *Pytagoras* og definisjonen av *cosinus*. Jeg vil nå betrakte disse to som to ulike *prosedyrer* som løser oppgaven. Gjenkjennelse av de ulike sidene i den rettvinklede trekanten $\triangle ACD$ innebærer som i deloppgave *a)* en forståelse for de ulike begrepene som inngår i en rettvinklet trekant. Løsning av oppgaven med bruk av *Pytagoras* blir som følger:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$58^2 = AD^2 + 42^2$$

$$AD^2 = 3364 - 1764 = 1600$$

$$AD = \sqrt{1600} = 40$$

Med bruk av definisjonen av *cosinus* blir løsningen slik:

$$\cos A = \frac{AD}{AC}$$

$$AD = AC \times \cos A = 58 \times \cos 46{,}4 = 40$$

Utregning blir beskrevet av Kilpatrick et al. (2001) som en vanlig matematisk prosedyre, og det er viktig at utregningene er både effektive og riktige. I dette tilfelle gir begge de to utregningene *riktig* svar, men utregning med bruk av *cosinusfunksjonen* er mer *effektiv* enn utregningen med bruk av *Pytagoras'* fordi bruk av cosinus krever færre steg i løsningsprosedyren. Det er dermed rimelig å anta at denne prosedyren egner seg best i løsningen av denne oppgaven. For å komme fram til denne konklusjonen kreves det at elevene har kunnskap om de aktuelle matematiske prosedyrene. Jeg vil også i denne deloppgaven nevne at det er nødvendig å vite hva begrepene som inngår i prosedyrene innebærer. Dette beskrives av Kilpatrick et al. (2001) som et sentralt aspekt ved forståelse. Videre er det også sentralt å vurdere hvilken løsningsmetode som skal benyttes. Dette handler om å sette seg inn i informasjonen som er tilgjengelig og resonnere seg fram til mulige framgangsmåter, og er tilknyttet resonneringskompetanse.

Deloppgave *c)* spør først etter lengden av siden *AB* i trekanten som er skissert i oppgaven. Dette linjestykket utgjør en side i *hele* trekanten. Den semiotiske representasjonen $\triangle ABC$ er brukt i oppgaveteksten for å beskrive trekanten. Arealet av $\triangle ABC$ er satt til å være *«2205»*. *Begrepet* areal er sentralt i tilnærmingen til denne oppgaven, sammen med *prosedyren* å finne arealet av en ikke-rettvinklet trekant trekant. Fra teorien vet vi at arealet av en trekant hvor alle vinkler er mellom 0° og 90° kan uttrykkes ved arealsetningen, $A = \frac{1}{2}ab \sin v$, hvor *v* representerer vinkelen som dannes av sidene *a* og *b* og *A* er en representasjon for arealet (Oldervoll, 2009). I dette tilfellet er det aktuelt å ta utgangspunkt i $\angle A$, siden denne ble funnet i deloppgave *a)*. $\angle A$ blir dannet av sidene *AC* og *AB*, og størrelsen av *AC* er oppgitt i oppgaven. Dermed er *AB* den eneste ukjente størrelsen i arealsetningen, og svaret kan finnes ved bruk av denne. Med de semiotiske representasjonene og størrelsen av arealet av trekanten som det er snakk om, vil arealsetningen se slik ut:

$$2205 = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin A$$

Denne prosessen representerer som alle andre matematiske prosesser en substitusjon av enkelte semiotiske representasjoner med andre (Duval, 2006). Det er i dette tilfelle mulig å benytte seg av hjelpemidler, og den generelle formelen for arealsetningen er tilgjengelig. Transformasjonen skjer i form av at de semiotiske representasjonene som benyttes i definisjonen av arealsetningen substitueres med de semiotiske representasjonene som gjelder for *denne* trekanten. Vi befinner oss innenfor samme register I denne prosessen er *figuren* av trekanten som er tegnet i oppgaven en viktig representasjon, fordi det av denne figuren framgår hvilke semiotiske representasjoner som skal inn i det algebraiske uttrykket. Substitusjonene som gjøres er at *a* og *b* som danner vinkelen *v* i det generelle uttrykket, henholdsvis byttes ut med *AB* og *AC* som danner vinkel *A* i trekanten som er representert i figuren. Dette er å betrakte som en behandling, fordi representasjonene hele veien befinner seg innenfor samme register, representert som algebraiske. Selve prosessen går likevel gjennom *figuren*, som tilhører et annet register.

Med å gjøre videre substitusjoner med tallverdiene som er kjent, blir løsningen som følger:

$$2205 = \frac{1}{2} \times AB \times 58 \times \frac{42}{58}$$

$$AB = \frac{2 \times 2205}{42} = 105$$

Selve framgangsmåten i oppgaveløsningen belyser kompetanse innenfor beregning, mens evne til å vurdere hvordan oppgaven skal løses, tatt i betraktning hvilke opplysninger som er gitt, tilhører resonneringstråden (Kilpatrick et al., 2001). Dette handler om å være i stand til å navigere seg gjennom opplysningene som er gitt og ut fra disse velge en passende prosedyre.

I neste del av oppgaven skal lengden av den siste siden *BC* i trekanten *ABC* finnes. For å komme fram til riktig framgangsmåte her er det viktig å være bevisst på at størrelsen til $\angle A$ er kjent. Dette, sammen med at lengdene *AC* og *BC* er kjent, gjør det mulig å benytte *cosinussetningen* (Oldervoll, 2009) for å finne lengden av *BC*. Cosinussetningen vil se slik ut for $\triangle ABC$ med utgangspunkt i $\angle A$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos A$$

Med substitusjon av verdiene som er oppgitt og aritmetiske operasjoner blir løsningen slik:

$$BC^2 = 105^2 + 58^2 - 2 \times 105 \times 58 \times \cos 46{,}4 = 5989{,}4$$

$$BC = \sqrt{5989{,}4} = 77{,}4$$

De matematiske kompetansene som blir belyst i denne deloppgaven er tilsvarende som i forrige del av oppgaven. Transformasjonene som må utføres i løsningen av oppgaven representerer den prosedyrerettede forståelsen, og for å avgjøre at cosinussetningen er korrekt framgangsmåte kreves kompetanse innenfor resonnering.

Oppgave *d)* spør etter størrelsen av $\angle B$, og vi vet at $\triangle BCD$ utgjør en rettvinklet trekant, jfr. Oppgave *a)*. *BC* utgjør hypotenus i denne rettvinklede trekanten og *CD* representerer den motstående kateten til $\angle B$. Størrelsen av *CD* er kjent fra oppgaveteksten og *BC* ble funnet i oppgave *c)*. Dette muliggjør bruk av definisjonen til sinus for å løse oppgaven.

$$\sin B = \frac{CD}{BC} = \frac{42}{77{,}4}$$

$$\angle B = 32{,}9\,°$$

Forståelse og prosedyreforståelse i denne oppgaven blir belyst på tilsvarende som i oppgave *a)*, men en løsning av denne krever i større grad kompetanse innenfor det å kunne navigere gjennom opplysningene som finne og gjøre en vurdering av hvilken framgangsmåte som skal benyttes. I dette tilfelle må informasjonen som er gitt i oppgaveteksten settes i sammenheng med opplysninger som framgår av løsninger på tidligere deloppgaver. Jeg vil plassere framvisning av denne typen kunnskap under tråden resonnering (Kilpatrick et al., 2001).

Gjennom hele oppgave 6 er det sentralt med et funksjonelt grep om matematiske ideér og å kunne sette disse i sammenheng med hverandre slik at de gir mening. *Forståelse* er dermed en basis for å kunne løse oppgaven, men det kreves også kompetanse innenfor de andre trådene. Jeg vil i min videre analyse betrakte *forståelse* og *beregningskompetanse* som sentrale i *a)*. Oppgave *b)* vil i hovedsak belyse prosedyrekunnskap og *beregningskompetanse*. I oppgave *c)* kommer i tillegg til kompetanse i *beregning* også *resonneringskompetanse* til syne. Oppgave *d)* krever igjen *forståelse*, i tillegg til *beregningskompetanse* og *resonneringskompetanse*.

Tabell 1 viser en oppsummering av hvilke kompetanser som er meste sentrale i hver av oppgavene på prøven.

Kompetansene er representert med hvert sitt nummer i tabellen:

1: Forståelse

2: Beregning

3: Anvendelse

4: Resonnering

Tabell 1: Tabellen viser hvilke kompetanser som forventes i løsningen av de relevante oppgavene på prøven

	1	**2**	**3**	**4**
Oppgave 4				
a)	X	X		
b)		X		X
c)	X			
Oppgave 5				
a)	X	X		
b)				X
c)	X	X		
Oppgave 6				
a)	X	X		
b)		X		
c)				X
d)				X
e)				

4.2 Oppnådde kompetanser

Dette avsnittet viser hvilke kompetanser elevene har oppnådd innenfor trigonometri. Elevbesvarelsene fra prøven og oppgaveheftet vil være grunnlaget for analysen, og jeg vil analysere besvarelsene i lys av trådene som blir presentert hos Kilpatrick et al. (2001). Analysen vil ta for seg en og en kompetanse og se hvilke funn i elevbesvarelsene som kan plasseres innenfor hver enkelt kategori. Elevbesvarelsene fra prøvene vil utgjøre hovedfokuset av analysene, mens besvarelser og utsagn fra løsningen av oppgavehefte vil bygge opp under funnene som gjøres for hver enkelt elev.

Tabellen som ble presentert i forrige delkapittel viser hvilke oppgaver som er relevante for å belyse kompetanse innenfor hver av de fire trådene. Jeg vil ta utgangspunkt i de relevante oppgavene innenfor hver kompetanse og presentere funn fra besvarelsene fra hver enkelt elev som indikerer besittelse av de aktuelle kompetansene. Utdrag fra besvarelsene blir vist i sin opprinnelige form.

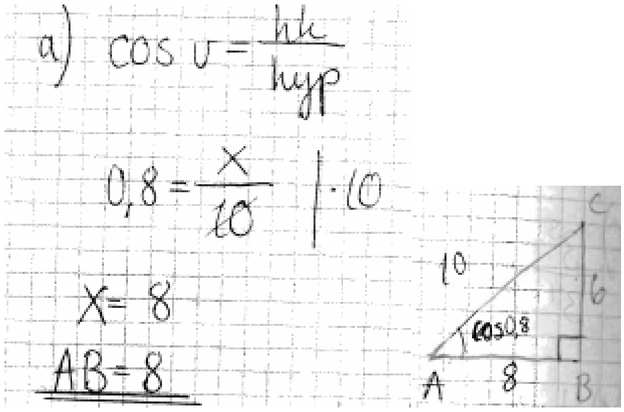
Tabellen som presenteres avslutningsvis i dette delkapittelet oppsummerer hvilke kompetanser hver av elevene framviser gjennom datamaterialet som er samlet i denne studien.

Videre vil jeg se på i hvor stor grad de oppnådde kompetansene stemmer med de forventede som ble presentert i forrige delkapittel.

4.2.1 Forståelse

For å analysere hvordan forståelsen blir framvist i elevenes besvarelser har jeg valgt å fokusere på prøveoppgave *4a), 4c), 5a), 5c)* og *6a)*. Jeg vil også her nevne at forståelse kan belyses i alle oppgavene, men jeg har valgt ut disse fordi de i størst grad framviser forståelse. Funn som er gjort i forbindelse med løsning av oppgaveheftet vi støtte opp under resultatene fra prøvebesvarelsene.

Jeg vil nå presentere Pias løsning av oppgave *4a)* og peke på aspekter ved denne løsningen som kan indikere kompetanse innenfor forståelse.



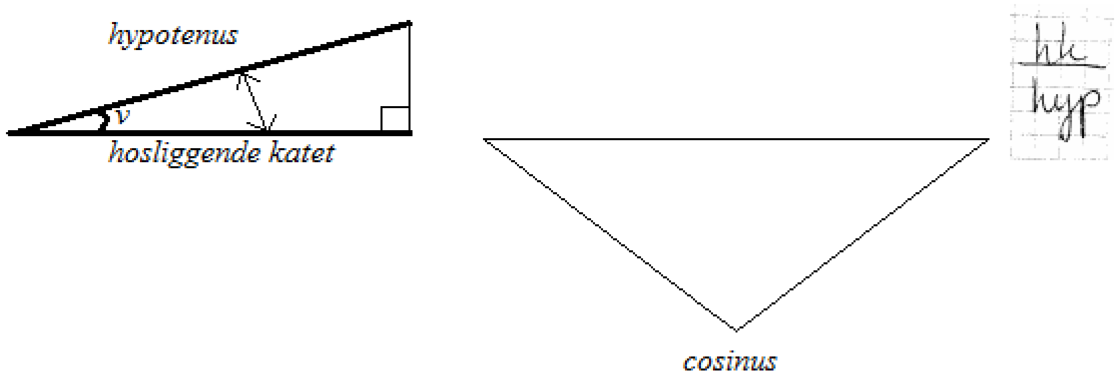
Figur 8: Figuen viser Pias løsning av oppgave 4a)

Som vi ser i Figur 8 har Pia tatt utgangspunkt i definisjonen av cosinus. For å uttrykke denne definisjonen benytter hun seg av semiotiske representasjoner som gjelder for en rettvinklet trekant. *«cos v»* beskriver cosinus til en vinkel *v*, *«hk»* representerer en forkortelse for *hosliggende katet*, mens *«hyp»* må betraktes som en forkortelse av *hypotenus*. Videre ser vi at hun erstatter *«hk»* med «*x*», noe som kan betraktes som behandling innenfor Duvals (2006) teori. Hun benytter altså forkortelser for navnene på elementene som utgjør en generell rettvinklet trekant, og tar ikke i bruk de algebraiske tegnene som blir uttrykt i den aktuelle oppgaven. Hennes representasjon av *AB* kan framstilles i en semiotisk kjede:

Hosliggende katet $\longrightarrow$ hk $\longrightarrow$ x $\longrightarrow$ AB

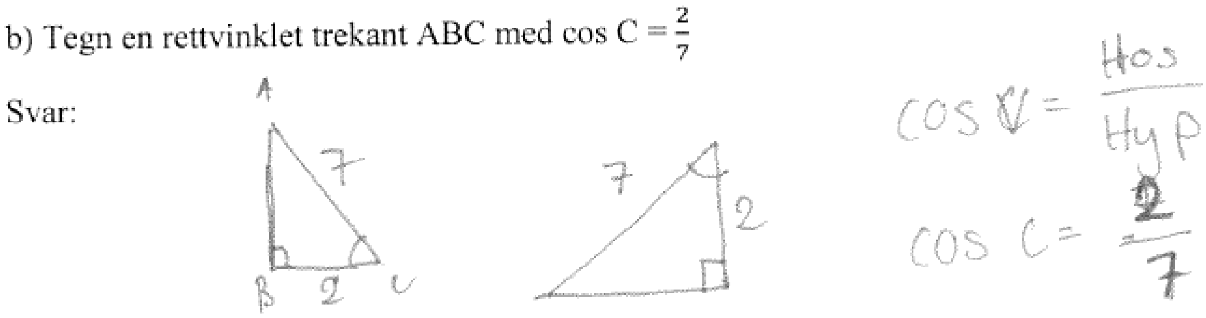
Figur 9: Figuren viser kjeden av hvilke semiotiske representasjoner Pia bruker for linjestykket AB i sin besvarelse

Pias valg av semiotiske representasjoner for de ulike størrelsene tyder på at hun forstår begrepet *cosinus* i nær tilknytning til en generell rettvinklet trekant, og hennes tilnærming til selve cosinusbegrepet kan vises i en epistemologisk trekant:



Figur 10: Figuren viser en epistemologisk trekant over Pias tilnærming til begrepet cosinus

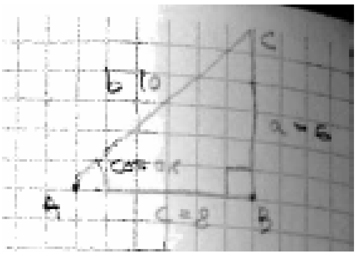
Pia viser altså at hun forstår cosinus i forbindelse med en rettvinklet trekant, og det er denne som utgjør referansekonteksten i den epistemologiske trekanten (Figur 10). Et viktig aspekt som framgår av referansekonteksten er pilen som er markert mellom *hypotenus* og *hosliggende katet*. Dette illustrerer at Pias forståelse for cosinus viser at det handler om en *bestemt* sammenheng mellom disse to størrelsene, som vi ser i hennes egen representasjon av cosinus. Hennes representasjon utgjør *tegnet* i den epistemologiske trekanten og er innfelt øverst til høyre i Figur 10. Selve *brøkstreken* som inngår i denne semiotiske representasjonen knytter de to øverste hjørnene i den epistemologiske trekanten (Figur 10) sammen ved å spesifisere sammenhengen mellom hypotenus og hosliggende katet som er illustrert i referansekonteksten. *Tegnet* og referansekonteksten representerer begge begrepet *cosinus* som begge representerer mentale ideer og som er avhengige av hverandre (Steinbring, 2006). Pias tilnærming til selve begrepet *cosinus* finner vi også i hennes løsning av en av oppgavene i oppgaveheftet.



Figur 11: Figuren viser et utsnitt fra Pias besvarelse av oppgave 7b) i oppgaveheftet som ble gitt til elevgruppa

Pias løsning av oppgave *7b)* støtter resultatet som ble framvist gjennom hennes prøvebesvarelse. Det foregår her en transformasjon i form av *omdannelse* (Duval, 2006), hvor et algebraisk uttrykk blir byttet ut med en figur. Også her ser vi at selve definisjonen av cosinus er inkludert i hennes framgangsmåte. Her benytter hun andre semiotiske representasjoner enn hun gjorde i prøvebesvarelsen. *«hk»* er byttet ut med *«Hos»*, men begge representasjonene viser til den hosliggende kateten i en rettvinklet trekant. En algebraisk representasjon av den hosliggende kateten i referansekonteksten som gjelder, ville vært å brukt to av bokstavene *A*, *B* og *C*, som ifølge oppgaveteksten utgjør en rettvinklet trekant *ABC*. Tilsvarende ble også funnet i prøvebesvarelsen hennes, og dette kan tyde på at hun har god forståelse for hvordan cosinusbegrepet anvendes. I begge tilfeller viser hun at hun er i stand til å relatere informasjonen hun har fra før med den som gis i hver situasjon. Dette er indikasjoner som ifølge Kilpatrick et al. (2001) kan knyttes til *forståelse* av begreper. Videre ser vi i hennes løsning av hun tegner to ulike trekanter som begge representerer en trekant med $\frac{2}{7}$ som cosinusverdi til vinkel *C*. I trekanten til venstre i Figur 11 ser vi at hun har merket hjørnene i trekanten med *A*, *B* og *C*, mens den andre ikke inneholder bokstaver.

Thomas har i sin løsning av *oppgave 4a)* navngitt linjestykkene i trekanten som *a, b* og *c,* som vi ser i Figur 12.



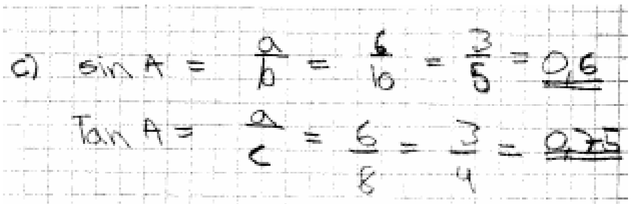
Figur 12: Figuren viser Thomas sin illustrasjon av trekant ABC

a, *b* og *c* representerer henholdsvis motstående side av ∠*A*, ∠*B* og ∠*C*. Dette kan betraktes som en substitusjon av representasjonen *BC*, *AC* og *AB* som angir de samme sidene i oppgaveteksten. De semiotiske representasjonene befinner seg innenfor et algebraisk representasjonsregister og er dermed et eksempel på en transformasjon i form av behandling (Duval, 2006).

Trekantene i besvarelsene til Pia og Thomas representerer en *figur* av den algebraiske beskrivelsen som er gitt i oppgaveteksten. Dette er en type transformasjon som av Duval (2006) blir kalt *omdannelse*, og det foregår dermed et skifte av register. Elevene viser på denne måten at de er i stand til å representere matematiske situasjoner på ulike måter, noe som kan tolkes som en indikasjon på det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som forståelse.

Videre løsning av oppgaven baserer seg på transformasjoner som Duval (2006) klassifiserer som *behandling*, siden operasjonene foregår innenfor samme register. Et resultat av interesse her er de ulike notasjonene elevene benytter for å beskrive den ukjente. Pia innfører notasjonen *x* for lengden *AB*, mens Thomas benytter seg av notasjonen *c* for tilsvarende lengde. Forskjellen på disse to måtene å gjøre skifte av representasjoner på er at Thomas definerer denne størrelsen gjennom sin figur, mens Pia innfører notasjonen «*x*» uten å definere hva denne representerer. Dette kan tyde på at Pia knytter denne delen av oppgaveløsningen til det hun vet om ligningsløsning. «*x*» betegner ofte den ukjente i ei generell ligning, og løsningsprosedyren som gjøres i oppgaven krever nettopp kunnskap om ligningsløsning.

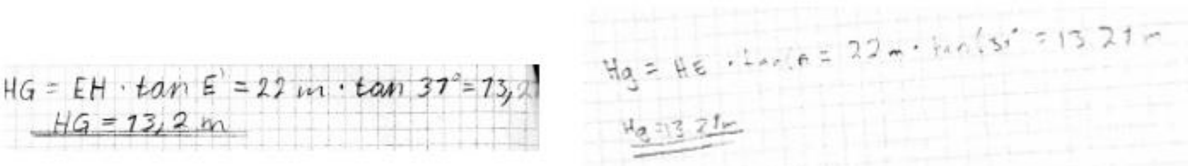
Thomas benytter seg av tilsvarende framgangsmåte også i oppgave *4c)*, hvor definisjonene av *sinus* og *cosinus* kan brukes direkte. Som Figur 13 viser så bruker han de semiotiske representasjonene som han har presentert i sin egen illustrasjon, jfr. Figur 12, også her.



Figur 13: Figuren viser Thomas' løsning av oppgave 4c)

Prosessen kan betraktes som en *omdannelse* som går fra en grafisk framstilling av størrelsene som inngår i løsningen til en algebraisk notasjon. Ifølge Duval (2006) vil elever som behersker et slikt skifte av register også kunne overføre den matematiske kunnskapen til andre sammenhenger. Videre kan en også betrakte transformasjonene som en del av begrepsutviklingen. *a, b* og *c* får mening fordi de benyttes for å uttrykke størrelsene *sinus* og *tangens*. Dette kan tolkes som en del av begrepskunnskap som det er beskrevet hos Hiebert og Lefevre (1986), hvor det påstås at symboler får mening når de knyttes til begrepskunnskapen de representerer. På grunnlag av dette vil jeg tolke kompetansen som Thomas framviser gjennom denne oppgaven som en indikasjon på *forståelse* for begrepene sinus og tangens.

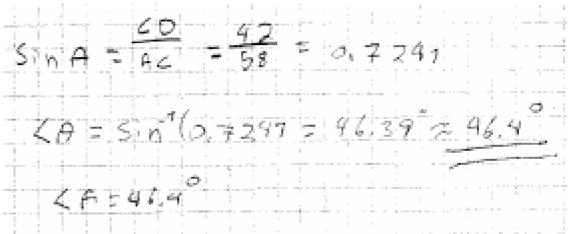
Audun, Thomas og Sander løser oppgave *5a)* på relativt like måter. Løsningene presenteres i Figur 14.



Figur 14: Figuren viser Auduns (venstre) og Sanders (høyre) løsning av oppgave 5a)

Et interessant funn ved disse løsningene er at de viser at Audun og Sander er i stand til å benytte tangensbegrepet selv om referansekonteksten nå er mer kompleks enn det elevene har mest erfaring med fra undervisningen. Den rettvinklede trekanten inngår i en firkant, men tangensbegrepet knytter seg kun til den rettvinklede trekanten. Dette indikerer at *forståelsen* for tangensbegrepet er tilstede hos begge to, og de er i stand til å anvende denne begrepskunnskapen i den gitte konteksten.

Jeg vil nå presentere Thomas og Sander sine løsninger av oppgave *6a)*, og analysere hvordan deres forståelse av begrepet *vinkel* kan forstås i lys av teori om kunnskapsutvikling som Steinbring (2006) beskriver det.

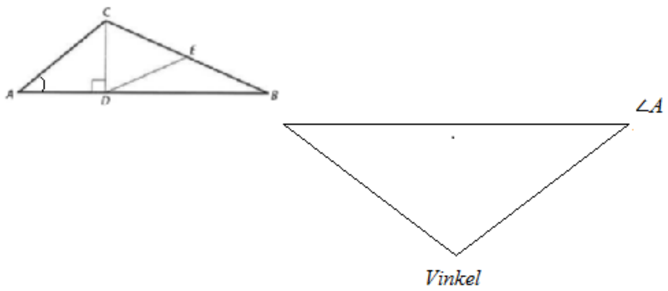


Figur 15: Figuren viser Sanders løsning av oppgave 6a)

Figur 16: Figuren viser Thomas' besvarelse av oppgave 6a)

Jeg vil påstå at det blir vist forståelse for sinusbegrepet i begge besvarelsene, siden de begge viser at de kan overføre den generelle definisjonen av begrepet til referansekonteksten som gjelder her. Et interessant funn her er imidlertid at Thomas setter likhetstegn mellom *«sin A»* og *«46,4°»*. Det er særlig bruken av likhetstegnet som er av interesse her. Likhetstegnets matematiske betydning er ikke ivaretatt, men likhetstegnets rolle kan betraktes som en markering av stegene i prosedyren. Jeg anser dette som en indikasjon på matematisk prosedyrekunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986) hvor steg-for-stegprosedyrer følges helt til en sitter igjen med et tall som representerer *svaret*. Men grunnlag i dette vil jeg klassifisere kompetansen Thomas framviser her som beregningskompetanse (Kilpatrick et al., 2001).

Sanders løsning gir et bedre grunnlag for å kunne analysere hans forståelse av selve vinkelbegrepet. Figur 17 viser hvordan jeg forstår hans tilnærming til begrepet vinkel.



Figur 17: Epistemologisk trekant som viser Sanders tilnærming til vinkelbegrepet

Som Figur 17 viser knytter Sander vinkelbegrepet til *tegnet* «∠A», og mener med dette vinkelen som er avmerket i trekanten øverst til venstre i Figur 17. Det er denne som utgjør *referansekonteksten* i den epistemologiske trekanten. Den semiotiske representasjonen «∠A» blir substituert med *«46,6* °» i løsningen av oppgaven. Jeg kunne derfor også benyttet dette tallet som semiotisk representasjon i den epistemologiske trekanten. Referansekonteksten består av både trekanten og opplysningene som er gitt i oppgaveteksten. Vi kan skaffe informasjon om vinkelen *A* ved å tolke denne informasjonen. På denne måten kan sinusbegrepet betraktes som en medierende faktor mellom referansekonteksten og begrepet som vi er interessert i, altså verdien av vinkelen. Selve vinkelverdien finner Sander ved å bruke inversfunksjonen av sinus. Sander viser at han relaterer begrepet *vinkel* til representasjonen «∠» og videre til måleenheten «°». I arbeidet med elevoppgavene spurte jeg elevene hva de forstod med begrepet *vinkel*, og følgende dialog viser hvordan Sander svarte på dette:

E: *«Hva forstår dere med begrepet vinkel?»*

S: *«Grader»*

E: *«Hva mener du med det?»*

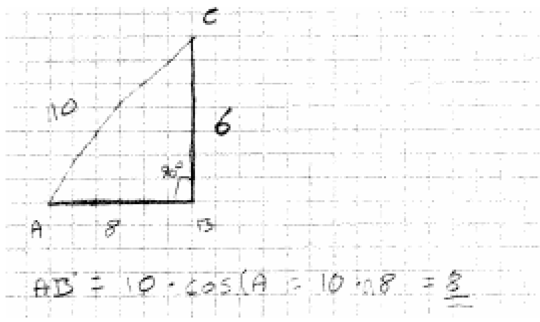
S: *«Hvor mange grader det er i et hjørne på en måte»*

Dette viser at Sanders tilnærming til vinkelbegrepet er knyttet til den måleenheten *grader*, tilsvarende som vi så i hans løsning av oppgaven, jfr. Figur 15. En slik sammenheng mellom begrep og representasjon blir av Kilpatrick et al. (2001) knyttet til *forståelsen*.

4.2.2 Beregning

Dette avsnittet handler om hvordan elevene framviser en prosedyrerette forståelse gjennom oppgaver og utsagn som de har gjennomført i forbindelse med denne studien. Som Tabell 1 viser så er oppgave *4a), 4b), 5a), 5b), 5c), 6a)* og *6b)* aktuelle i denne analysedelen. Jeg vil analysere et utvalg av besvarelsene av disse oppgavene basert på hvilke som best egner seg til å kunne diskutere *beregningskompetanse.* Alle oppgavene blir dermed ikke belyst.

Sanders besvarelse av oppgave *4a)* på prøven blir presentert i Figur 18. Framgangsmåten er preget av en prosedyrerettet tilnærming til cosinusbegrepet. Den aritmetiske prosessen skjer direkte, og det vises ikke til hvordan begrepet *cosinus* er definert. Hypotenus er kun representert med *«10»*, som er den numeriske verdien til lengden *AC*. Sanders framgangsmåte tyder på at hans prosedyrerettede kunnskap om begrepet cosinus handler om kjennskap til algoritmer, regler og prosedyrer for å utføre matematiske oppgaver (Hiebert & Lefevre, 1986).



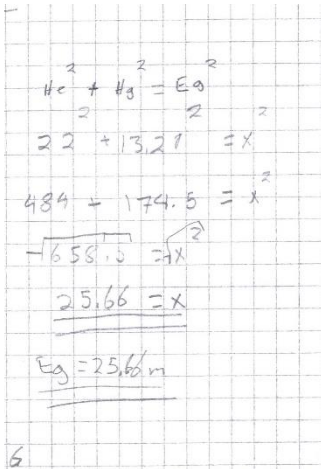
Figur 18: Figuren viser Sanders besvarelse av oppgave 4a) på prøven

Den prosedyrerettede forståelsen som Sander framviser her kan også støttes av et av hans utsagn i elevsamtalene som ble gjort i forbindelse med oppgaveløsningen. Et utdrag fra denne sekvensen er presentert nedenfor, og det handler her om hvordan elevene tolker begrepet *sinus*.

Elisabet:	Hva forstår dere med begrepet sinus?
Pia:	Da tenker jeg motstående katet og hypotenus
Sander:	Jeg tenker på å finne i vinkler og forskjellige sider.

Jeg tolker her bruken av ordet *finne* som en indikasjon på den prosedyrerettede forståelsen hos Sander. Hans tilnærming er på denne måten knyttet til prosedyrene som sinusbegrepet inngår i. Dette ser vi også i oppgavene som er gitt på prøven, hvor sinus- og cosinusdefinisjonene er sentrale i løsningsprosedyrene i alle de trigonometriske oppgavene. Det er nettopp den prosedyrerettede begrepsforståelsen som ligger til grunn for vurderingssituasjonen, og denne sammenhengen vil bidra til å utvikle elevenes begrepsramme (Pirie & Schwarzenberger, 1988). Pias forklaring har en annen tilnærming til begrepet. Hun nevner i sitt utsagn *begreper* som inngår i den matematiske definisjonen (Oldervoll, 2009) uten å gjengi definisjonen i sin helhet. De ulike forståelsene som framgår av elevintervjuet kan ha sammenheng med sinus- og cosinusbegrepenes framstilling i læreboka (Oldervoll, 2009). Begrepene framstilles her i sammenheng med en *prosedyre* for å finne vinkler og sider i en rettvinklet trekant. Prosedyrene kan dermed tolkes som en representasjon av selve begrepene, noe som Hiebert og Lefevre (1986) knytter til den prosedyrerettede begrepsforståelsen. Ved å ta Sanders besvarelse og hans tilnærming til sinusbegrepet i betraktning vil jeg påstå at han viser kompetanse innenfor *beregning*.

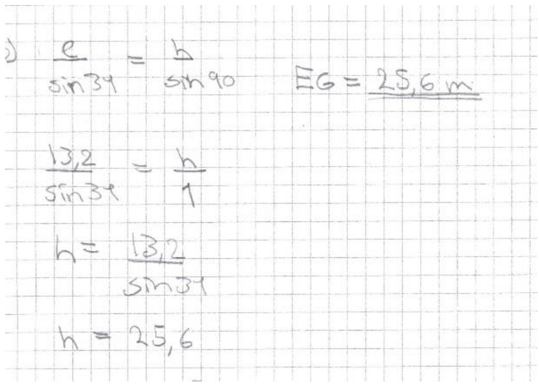
Elevenes besvarelse av oppgave *5b)* er særlig interessant fordi elevene benytter seg av forskjellige prosedyrer for å løse oppgaven. Jeg vil analysere tre av besvarelsene, og tolke løsningsmetodene i lys av teori om prosedyrekunnskap og prosedyreforståelse. I min analyse av prøveoppgavene og hva som forventes av kompetanse i løsning av disse har jeg foreslått Pytagoras' som en mulig framgangsmåte. Jeg anser Pytagoras som en prosedyre i denne konteksten. Sander har brukt denne prosedyren for å løse oppgaven, som vist i Figur 19.



Figur 19; Figuren viser Sanders løsning av oppgave 5b)

Sanders løsning ved bruk av Pytagoras er et eksempel på en prosedyre hvor det foregår en manipulasjon av matematiske symboler, i tillegg til at det tar utgangspunkt i et objekt (Hiebert & Lefevre, 1986). Utgangspunktet for de semiotiske representasjonene «*Hg*», «*He*» og «*Eg*» finner vi i figuren som er presentert i selve oppgaveteksten, men oppgaveteksten benytter kun store bokstaver. Videre skjer det en transformasjon fra de algebraiske representasjonene til tallverdiene som beskriver lengden av hver av sidene som inngår i uttrykket. «*He*» substitueres med «*22*» og «*Hg*» substitueres med «*13,2*». Dette vil jeg betrakte som en behandling ifølge Duvals (2006) teori om transformasjoner. De ulike semiotiske representasjonene for lengdene i trekanten befinner seg innenfor samme representasjonsregister. Jeg vil knytte denne behandlingen av de semiotiske representasjonene til utregningsprosedyren som Kilpatrick et al. (2001) beskriver. Sander substituerer «*Eg*» med «*x*» i sin løsning. Det gis ikke en eksplisitt definisjon av «*x*» i prosessen, med det er rimelig å anta at denne representerer lengden av *Eg* i denne framstillingen, ved å ta steg-for-stegformen til løsningen i betraktning. Avslutningsvis i oppgaven blir «x» byttet med «*Eg*» på nytt, og jeg vil på grunnlag av dette drøfte effektiviteten av denne prosedyren. Jeg anser innføring av *x* som en ukjent variabel som unødvendig for å komme fram til korrekt løsning. Dette samsvarer dermed ikke med det Kilpatrick et al. (2001) sier om at prosedyrer bør utføres på en effektiv måte. Likevel ser vi at prosedyren fører til korrekt svar, noe som også anses som en viktig komponent i beregningskompetanse. En annen årsak til at Sander velger å innføre *x* kan være at denne notasjonen skaper en trygghet i løsningsprosedyren. *x* representerer den ukjent i en ligning, og det er rimelig å anta at Sanders tidligere erfaringer med ligningsløsning opererer med denne representasjonen av den ukjente. Med grunnlag i det jeg har belyst vil jeg betrakte kompetansen innenfor beregning som Sander framviser i denne oppgaven som mangelfull når det gjelder effektivitet, men tilstrekkelig når det gjelder å komme fram til riktig svar.

Thomas løser oppgave *5b)* ved å bruke *sinussetningen* som vi ser i Figur 20.



Figur 20: Figuren viser Thomas' løsning av oppgave 5b)

Thomas benytter representasjonene «*e*» og «*h*» for hhv. lengden av sidene «*HG*» og «*EG*» i $\triangle EHG$. Transformasjonene som skjer her blir ikke forklart med en tilhørende figur eller på annen måte, men ved å bruke kunnskap om matematiske konvensjoner er det tydelig for leseren hvilke lengder det her er snakk om. Det er vanlig å betegne motstående side til en vinkel med liten bokstav av selve vinkelens tegn. Dette betyr her at «*e*» er motstående til ∠E og «*h*» er motstående til ∠H. Selve utregningen skjer gjennom aritmetiske operasjoner og er et eksempel på behandling.

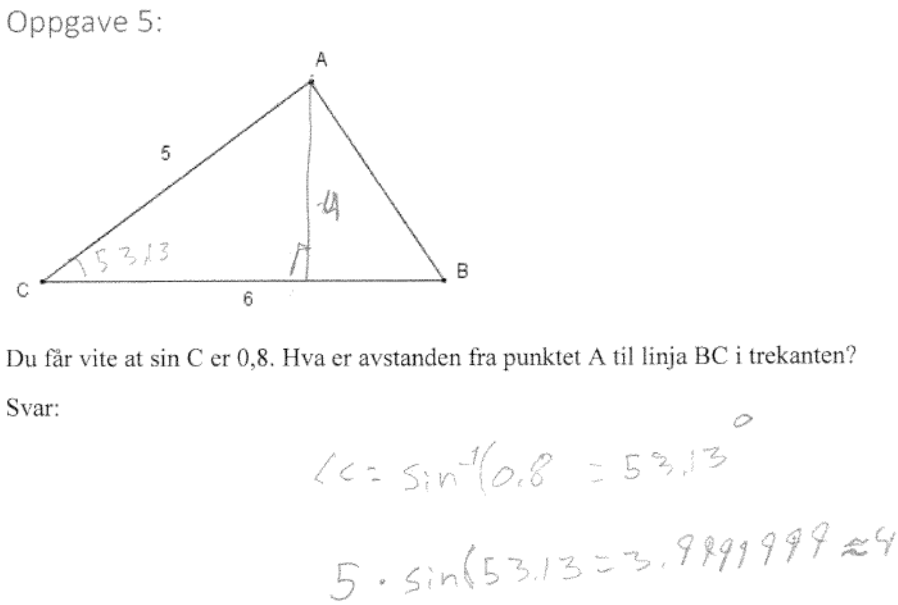
Ved bruk av sinussetningen for å finne vinkler og sider kreves det at man har god kjennskap til innholdet i denne. Jeg viser her til teorien om trigonometriske resultater hvor det pekes på at bruk av sinussetningen under visse forhold kan resultere i to ulike trekanter. Denne oppgaven betrakter en rettvinklet trekant $\triangle EHG$, og bruk av sinussetningen vil her gi kun én mulig verdi av lengden av «*e*». Sinussetningen fører altså fram til riktig svar, og en vurdering av dette som mulig framgangsmåte indikerer kunnskap om prosedyrer som Hiebert og Lefevre (1986) beskriver.

I tilknytning til Thomas sin løsning av denne oppgaven vil jeg også presentere en sekvens fra elevoppgavene som ble utført med elevgruppa. Samtalesekvensen handler om hvordan de forstår bruk av sinussetningen, og ble gjennomført i tilknytning til løsning av *oppgave 3* i oppgavesettet som jeg har laget. Elevene diskuterer seg imellom hvordan de kan gå fram for å løse oppgaven, og sekvensen under viser et utdrag av denne diskusjonen.

Thomas:	*«Men hvis vi tar sinus til A, også tar vi den ukjente over og deler på hypotenusen, så ganger vi bare med hypotenus på begge sider»*
Elisabet:	*«Har du en hypotenus i denne trekanten?»*
Pia:	*«Nei, den er ikke rettvinkla»*
Thomas:	*«Åååh.. Ja, men da må vi bruke sinussetningen»*

Selv om dette ikke kun dreier seg om Thomas og hans tilnærming til sinussetningen vil jeg benytte dette til å drøfte hvordan begrepsforståelsen for *sinus* blir utviklet ved å knytte begrepet til en prosedyre. Kilpatrick et al. (2001) påpeker at enkelte algoritmer kan bidra til bedre forståelse for grunnleggende operasjoner og viktige begreper, og jeg anser sinussetningen som en avklarende prosedyre i denne situasjonen. Thomas ønsker i utgangspunktet å bruke definisjonen av sinus for å løse oppgaven, og snakker om hypotenus til trekanten. Siden trekanten ikke er rettvinklet eksisterer det ingen hypotenus. Bevisstgjøringen av dette bidrar til at Thomas forstår at denne prosedyren ikke kan benyttes, men at sinussetningen er en mulig framgangsmåte. Jeg vil med utgangspunkt i Thomas løsning av *oppgave 5b)* på prøven, sammen med hans utsagn i forbindelse med elevoppgavene påstå at han framviser prosedyrekunnskap og dermed har kompetanse innenfor *beregning* når det gjelder sinussetningen.

Thomas viser også kompetanse innenfor beregning i sin løsning av oppgave *5* i oppgaveheftet. Figur 21 viser innholdet i denne oppgaven, samt hvordan Thomas har gått fram for å løse den.



Figur 21: Figuren viser Thomas' løsning av oppgave 5 i oppgaveheftet

Oppgaven gir informasjon om sinusverdien til ∠*C*, samt lengden av linjestykket *AC* som utgjør hypotenus i trekanten som dannes når linjestykket fra punktet *A* til linja *BC* trekkes. Disse opplysningene muliggjør å benytte definisjonen av sinus direkte, hvor linjestykket fra punktet *A* til linjestykket *BC* utgjør den motstående kateten til ∠*C*. Dette linjestykket vil representere en ukjent i uttrykket for definisjonen av sinus. Jeg vil først vise hvordan oppgaven kan løses ved bruk av dette, før jeg diskuterer Thomas’ løsning av oppgaven. Jeg velger å kalle punktet hvor linjestykket fra *C* skjærer linjestykket *AB* for *D.*

$$\sin C = \frac{AD}{AC}$$

$$AD = AC \times \sin C$$

$$AD = 5 \times 0{,}8$$

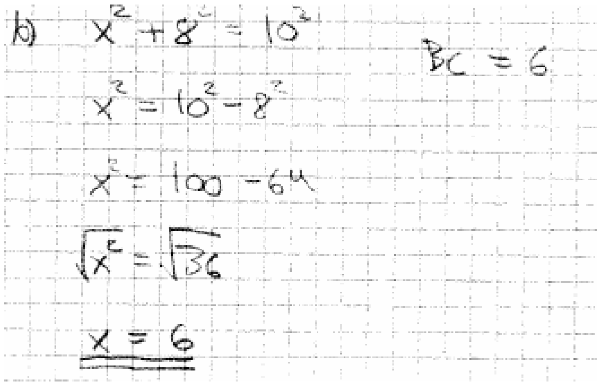
$$AD = 4$$

Som det går fram av Figur 21 så har Thomas først funnet inversverdien til den oppgitte sinusverdien, og finner på denne måten størrelsen av $\angle C$ i grader. Videre tyder hans løsning på at han benyttet definisjonen av sinus for å komme fram til riktig svar. At han velger å først finne vinkelen er et unødvendig steg, og jeg anser dette som en indikasjon på at samspillet mellom begrepskunnskap og prosedyrekunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986) ikke er godt nok til å kunne løse denne oppgaven på den mest effektive måten. Ved å knytte forståelsen av sinusbegrepet sammen med prosedyren som benyttes, ville Thomas hatt et bedre grunnlag for å løse oppgaven uten å finne selve vinkelverdien først. Jeg vil likevel betrakte dette som kompetanse innenfor beregning, fordi det er tydelig at han viser at han kan utføre en steg-for-stegprosedyre for å komme fram til riktig svar.

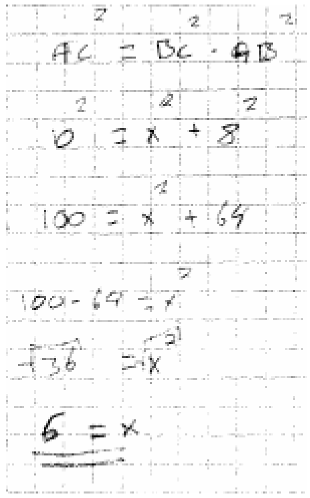
4.2.3 Resonnering

Jeg vil nå gjøre en analyse av et utvalg oppgaver som viser kompetanse i *resonnering*. I følge resultatene (Tabell 1) fra første del av analysen er *oppgave 4b), oppgave 5b), oppgave 6c)* og *oppgave 6d)* aktuelle å ta i betraktning her.

I deloppgave *4b)* viser elevene at de er i stand til å anvende tidligere svar i ny utregning. I besvarelsene til Pia, Sander og Thomas er Pytagoras' setning benyttet for å løse oppgaven, og elevene viser evne til å relatere dette resultatet til det trigonometriske fagfeltet som er temaet for prøven. Dette representerer det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som resonnering, hvor løsningsmetoden bestemmes fra hvilke opplysninger som finnes. Framgangsmåten er lik i alle besvarelsene, men elevene benytter seg av ulike representasjonsformer for å uttrykke de samme matematiske objektene.



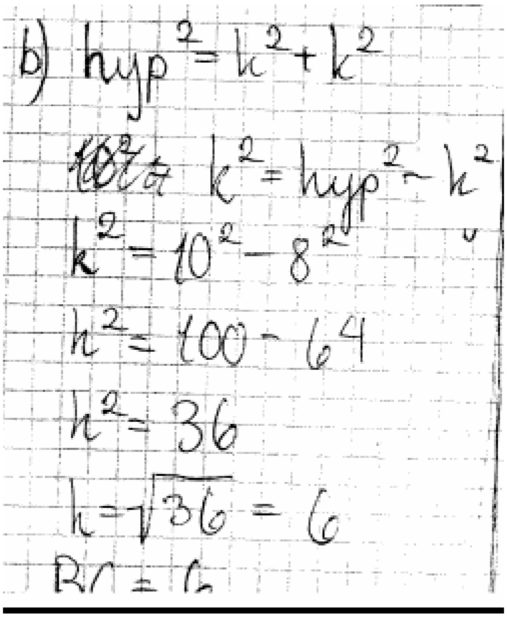
Figur 23: Figuren viser hvordan Thomas har løst oppgave 4b) i sin prøvebesvarelse



Figur 22: Figuren viser hvordan Sander har løst oppgave 4b) på prøven

Thomas har i sin besvarelse innført *x* som den ukjente størrelsen *BC*, men dette er ikke definert eksplisitt. Det er tydelig at den instrumentelle forståelsen er på plass hos Thomas, men som Pirie og Schwarzenberger (1988) påpeker kan ikke den relasjonelle forståelsen utelukkes på basis av tilstedeværelse av den instrumentelle. Tilsvarende ser vi i løsningen til Sander, som innfører den ukjente størrelsen *x* uten å gi en forklaring på at det foregår et skifte mellom ulike semiotiske representasjoner i løsningen.

Pia viser i sin besvarelse at hun *husker* definisjonen av Pytagoras' setning, og benytter seg av navnene på sidene i en generell rettvinklet trekant. Figur 24 viser hvordan Pia har gått fram for å løse oppgaven.

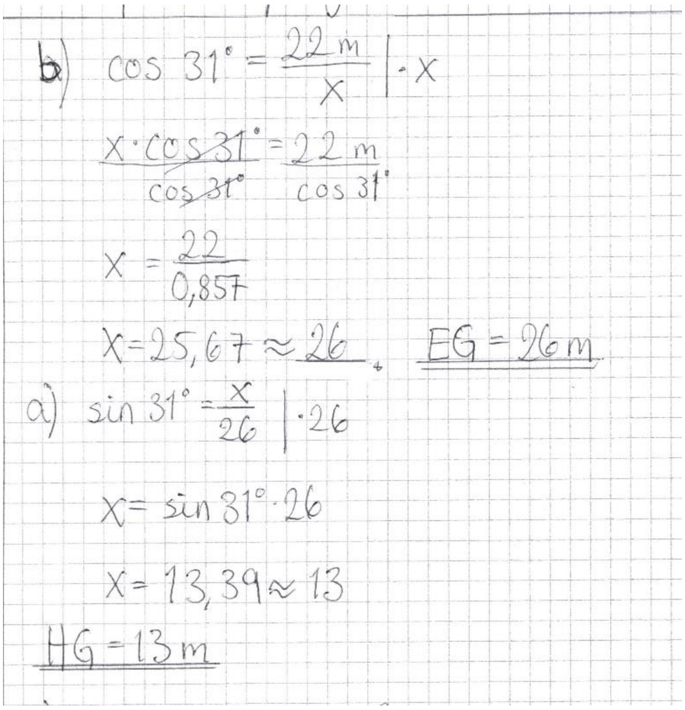


Figur 24: Pias løsning av oppgave 4b)

Hypotenus er forkortet til «hyp», mens katetene beskrives som «k». Også her foregår det et bytte mellom semiotiske representasjoner uten at det forklares nærmere. Vi ser at Pia benytter den semiotiske representasjonen «*k*» for begge de to katetene i $\triangle ABC$. Tegnet «*k*» beskriver objektet katet, noe som er en vanlig matematisk konvensjon. Dette kan imidlertid føre til mistolkninger, siden lengden av to kateter i en rettvinklet trekant ikke nødvendigvis er den samme. I følge algebraiske konvensjoner kan dette altså betraktes som to *like* størrelser, men i Pias utregning ser vi at de har ulik verdi. Pias beregninger er utført korrekt, og denne prosedyren gir rett svar på oppgaven. Videre ser vi at hun kun presenterer én løsning av «$k = \sqrt{36}$». Ifølge aritmetiske regneregler har denne ligningen to løsninger, men siden «*k*» representerer *lengden* av en side vil løsningen være den *positive* rota av «36».

Prosessen som utføres tar i alle disse tre tilfellene form som en algoritme, og tilhører dermed transformasjoner innenfor det Duval (2006) omtaler som et monofunksjonelt register. Løsningene som Pia, Sander og Thomas har gitt kan knyttes til begge de to typene prosedyrekunnskap som Kilpatrick et al. (2001) presenterer. Som vi har sett har de valgt å kalle de ukjente størrelsene ulike ting, noe som tilhører representasjonsaspektet i den prosedyrerettede begrepsforståelsen. Videre krever en fullstendig løsning av både oppgave *a)* og *b)* kjennskap til algoritmer og regler for å løse matematiske problemer. Både definisjonen av cosinus og Pytagoras' setning som en regel er nødvendig å *huske*, siden det ikke er tillatt med hjelpemidler i denne delen av prøven. Det å *huske* prosedyrer er ifølge Byers og Erlwanger (1985) en viktig del av en dyp matematisk forståelse, og selv om denne egenskapen kan knyttes direkte til den instrumentelle forståelsen vi finner hos Skemp (1978) kan ikke dette benyttes til å utelukke tilstedeværelse av den relasjonelle forståelsen.

Pias besvarelse av oppgave *5* er også et eksempel på hvordan resonnementskompetanse benyttes for å løse en oppgave. Jeg vil her se løsningen av deloppgave *a)* og deloppgave *b)* i sammenheng. Figur 25 viser hvordan Pia har løst disse oppgavene.



Figur 25: Figuren viser Pias besvarelse av oppgave 5a) og 5b)

Som Figur 25 antyder har Pia valgt å løse deloppgave *b)* før hun løser deloppgave *a)*. Dette viser at Pia er i stand til å anvende informasjonen som er gitt i oppgaven på en deduktiv måte. I min analyse av prøveoppgavene blir definisjonen av tangens foreslått som en mulig framgangsmåte for å løse oppgave *a)*. Pias viser i sin løsning at hun gjenkjenner linjestykket *EH* som hosliggende katet til $\angle GEH$, linjestykket *HG* som motstående katet til $\angle GEH$ og linjestykket *EG* som hypotenus i den rettvinklede trekanten *EGH*. Dette indikerer forståelse for begrepene som inngår i en rettvinklet trekant. I tillegg viser hun også god forståelse for begrepene sinus og cosinus. Hennes løsning tyder på at informasjonen som er gitt i figuren som tilhører oppgaven ikke er tilstrekkelig for at hun skal kunne løse den i kronologisk rekkefølge. For å skaffe seg nok informasjon til å finne lengden av *HG* som etterspørres i oppgave *a)*, ser vi at hun henter informasjon fra en annen deloppgave. Informasjonen som er gitt i figuren benyttes til å først finne lengden av *EG* ved å benytte cosinusfunksjonen for $\angle GEH$. Dette resultatet benyttes videre for å finne lengden av *HG* ved hjelp av definisjonen av sinus. Tangensbegrepet er ikke tilstede i løsningsprosedyren, og jeg tolker dette som at Pia i denne referansekonteksten ikke husker denne definisjonen. Likevel ser vi at hun kommer fram til riktig svar i begge deloppgaver. Pia viser på denne måten at hun er i stand til å navigere seg gjennom opplysningene som er gitt, og å velge seg løsningsstrategier som hun kan benytte for å løse oppgaven. Dette er elementer som ifølge Kilpatrick et al. (2001) kjennetegner kompetanse innenfor resonnering. Resonneringskompetansen er nært knyttet til beregningskompetanse i Pias løsning. For å kunne løse oppgave *a)* kreves det at hun utfører beregningen i oppgave *b)* korrekt. Videre vil også beregningskompetansen være avgjørende for korrekt svar også i oppgave *a)*. Jeg ønsker å trekke fram dette for å understreke at de fem kompetansene som inngår i rammeverket til Kilpatrick et al. (2001) er avhengig av hverandre.

Tabell 2: Tabellen viser hvilke kompetanser hver av elevene framviser i prøvebesvarelsene

Oppgave	**1**				**2**				**4**			
	P	**S**	**T**	**A**	**P**	**S**	**T**	**A**	**P**	**S**	**T**	**A**
4a	X					X						
4b									X	X	X	
4c			X									
5a		X		X					X			
5b						X	X		X			
5c												
6a		X	X				X					
6b												
6c												
6d												

5. Diskusjon

I dette kapittelet vil jeg diskutere studiens resultater og funn som er presentert i forrige delkapittel. Jeg vil gi en oppsummering av hvilke resultater analysen av datamaterialet har gitt og tolke disse opp mot det teoretiske grunnlaget for denne oppgaven. Her vil jeg ta utgangspunkt i studiens forskningsspørsmål. Inndelingen av dette kapittelet vil derfor ta utgangspunkt i forskningsspørsmålet. Jeg vil diskutere de to komponentene i forskningsspørsmålet hver for seg og drøfte de i tilknytning til teoriene som jeg har benyttet i analysedelen. Videre vil jeg drøfte studiens validitet og reliabilitet ved å diskutere metode og analyseverktøy som er benyttet i arbeidet. Avslutningsvis vil jeg betrakte hvilke muligheter som finnes for videre forskning med utgangspunkt i denne studiens struktur.

5.1 Hvilke kompetanser forventes av elevene?

På samme måte som at de matematiske objektene blir tilgjengeliggjort gjennom semiotiske representasjoner (Steinbring, 2006), vil bruk av semiotiske representasjoner i oppgavene på prøven si noe om hva som forventes. Dokumentanalysen som er foretatt av oppgavene i prøven tyder på at det er viktig å ha god kjennskap til betydningen av de semiotiske representasjonene i den aktuelle referansekonteksten. Et moment som framkommer gjennom strukturen av oppgavene er at informasjonen i stor grad gis gjennom tegnene. Det forventes dermed at elevene er i stand til å kunne skaffe seg informasjon om de ulike trekantens egenskaper ved å betrakte de semiotiske representasjonene i sammenheng med hverandre. Analysen viser at disse sammenhengene i noen tilfeller skapes mellom de semiotiske representasjonene som er gitt i teksten, mens de i andre sammenhenger også inkluderer tolkning av figurer. Kunnskap om trigonometriske begreper må settes i sammenheng med ny informasjon som blir tilgjengeliggjort gjennom oppgavene. Dette klassifiseres av Hiebert og Lefevre (1986) som et sentral aspekt ved begrepskunnskap. Analysen av *oppgave 4* og *oppgave 5* viser hvordan informasjon blir tilgjengeliggjort gjennom to ulike representasjoner. I *oppgave 4* er det kun mulig å få informasjon om trekanten gjennom de semiotiske representasjonene som gis i teksten, mens informasjonen om trekanten som er grunnlaget for *oppgave 5* blir tilgjengeliggjort gjennom en figur. *Oppgave 6* gir igjen informasjon gjennom tekst, men her er trekanten også visualisert uten at den gir informasjon utover det som er beskrevet i oppgaveteksten. *Forståelse* for de trigonometriske begrepene er i alle oppgavene en sentral kompetanse for å løse oppgavene og for å tolke de semiotiske representasjonene som er benyttet. Det er denne forståelsen som gjør det mulig å anvende prosedyrekunnskapen til å løse oppgavene. Jeg viser her til Hiebert og Lefevre (1986) som sier at en viktig del av prosedyrekunnskap er å kunne

Selve løsningsprosedyrene som jeg har vist i første del av analysen forutsetter kjennskap til matematiske regler og algoritmer som Hiebert og Lefevre (1986) knytter til prosedyrekunnskap. Som det går fram av løsningene jeg har presentert er det i denne prøven særlig snakk om prosedyrer tilknyttet ligningsløsning. Dette har sammenheng med at oppgavene omhandler trigonometri. Utregning av ukjente vinkler og sider er en sentral del av trigonometrien (Thompson et al., 2006), og som vi ser i analysen vil en steg-for-steg-prosedyre til slutt gi et tall som gjenkjennes som *svaret.* Analysen viser at prosedyrene omhandler manipulering av de semiotiske representasjonene og aritmetiske operasjoner er sentralt her.

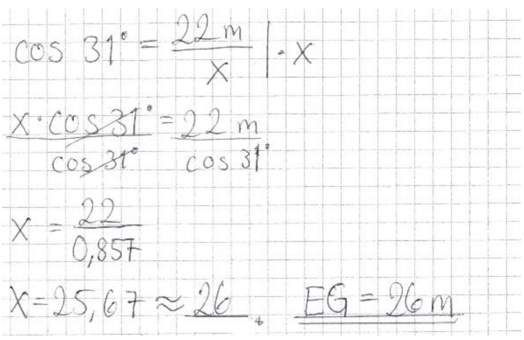
Som jeg anser det vil forståelsen være sentral for å kunne løse oppgavene, mens selve løsningsprosessene i større grad krever *beregningskompetanse*. Et viktig resultat som framgår av analysen er at *forståelse* og *beregning* i stor grad avhenger av hverandre. Tabell 1 illustrerer dette ved at vi ser at de to kompetansene for det meste opptrer sammen. Dette kan også knyttes til at trigonometri i stor grad handler om å finne ukjente størrelser. I løsningsprosedyrene vil definisjonene av sinus, cosinus og tangens ta form som ligninger med en eller flere ukjente størrelser. Begrepsforståelsen vil dermed være avgjørende for å kunne *sette* opp ligningene, mens beregningskompetansen er nødvendig for å kunne utføre de riktige aritmetiske operasjonene som til slutt gir *svaret*. Steg-for-stedprosedyrene som ligningsløsningene representerer vil jeg betrakte som transformasjoner (Duval, 2006). Funnene i analysen tyder på at det er særlig transformasjoner i form av *behandling* som må uføres i løsningen av oppgavene. Analysefunnene indikerer også at løsningsprosedyrene tar form som kjente algoritmer som foregår innenfor en monofunksjonelt register (Duval, 2006). Jeg vil særlig trekke fram Pytagoras' setning som et eksempel her. Flere av oppgavene krever at denne benyttes i løsningsprosedyrene.

Kompetansemålet som jeg presenterte innledningsvis er det eneste kompetansemålet i læreplanen for 1T (Utdanningsdirektoratet, 2013) som direkte omhandler trigonometri. Jeg oppfatter kompetansemålet som nært knyttet til den prosedyrerettede kunnskapen, og viser her særlig til hvordan kompetansemålet er formulert. Kompetansemålet sier at elevene skal kunne *berekne* vinkler og sider i en vilkårlig trekant, og jeg anser dermed beregningskompetanse som sentralt for å oppnå denne delen av kompetanasmålet. Innledningsvis sier kompetansemålet at elevene skal *gjere greie for* definisjonene av sinus, cosinus og tangens, og denne formuleringen kan i større grad knyttes til begrepskunnskap. Dette er en noe upresis formulering, men slik jeg tolker læreplanen Kunnskapsløftet for øvrig vil jeg påstå at *å gjere greie for* viser til mer enn å kunne huske og gjengi, men at analytiske elementer og vurderingsevne også inngår dette begrepet. Elevene skal dermed vise at de har *forståelse* for sinus, cosinus og tangens.

5.2 Hvilke kompetanser er oppnådd av elevene?

Elevenes besvarelser viser at kompetansemålet fra læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2013) i stor grad er oppnådd hos elevene i utvalget. Pia, Sander og Thomas viser at de behersker det trigonometriske fagfeltet godt, og har vist at de har kompetanse både innenfor forståelse og beregning. Når det gjelder Audun gir hans besvarelse lite grunnlag for å si noe om oppnåelsen, da han kun har svart på én av oppgavene om trigonometri.

Mine tolkninger av elevbesvarelsene tyder på at begrepskunnskapen til elevene i utvalget er nært knyttet til prosedyrekunnskapen. Dette kommer særlig til syne i deres bruk av semiotiske representasjoner i løsningsprosedyrene. Innføring av *x* som ukjent variabel er vanlig i løsninger av matematiske ligninger, og dette er en gjennomgående trend særlig i Pias løsninger av oppgavene. Figur 26 viser hennes løsning av oppgave *5b*) og representerer et eksempel på dette.



Figur 26: Figuren viser Pias besvarelse av oppgave 5b)

Den ukjente siden får betegnelsen *x* uten videre forklaring, og det er nærliggende å anta at prosedyrekunnskap er sentral i Pias tilnærming til cosinusbegrepet. Som det går fram av Figur 26 velger Pia å først gjøre de nødvendige aritmetiske operasjonene som gir svaret, før hun knytter tallverdien til linjestykket *EG* som etterspørres i oppgaven. Innføring av *x* som den ukjente ser vi også i andre besvarelse, og årsaken til at flere velger å gjøre dette kan være at det skaper en trygghet i prosessen, siden *x* benyttes som representasjon av den ukjente i tradisjonell ligningsløsning. Indikasjon på prosedyrekunnskap finner vi også i utsagn som elevene kommer med under løsningen av oppgaveheftet. Sander sier her at han forstår sinusbegrepet slik: «*Jeg tenker på å finne i vinkler og forskjellige sider*». Det framgår tydelig fra dette utsagnet at forståelsen av sinusbegrepet er nært knyttet til anvendelsen av begrepet. Relasjonen mellom begrepskunnskap og prosedyrekunnskap er sentral i Hiebert og Lefevres (1986) beskrivelse av disse to kunnskapstypene. De må sees i sammenheng, og det er vanskelig og enkelte ganger umulig å skille de to fra hverandre. Dette er noe jeg har erfart i min analyse av prøvebesvarelsene. Elevenes løsningsmetoder kan ha sammenheng med hvordan undervisningen har vært i tilknytning til dette temaet, og det er rimelig å anta at begrepsforståelsen har blitt utviklet gjennom prosedyrene som er blitt vist i undervisningssammenheng.

Et annet funn fra analysen er at enkelte oppgaver åpner for flere mulige løsningsprosedyrer. Besvarelsene fra prøven viser at elevene i enkelte tilfeller velger forskjellige framgangsmåter for å komme fram til et svar. Sander og Thomas sine løsninger av oppgave *5b)* er et eksempel på dette. Det å benytte andre løsningsmetoder enn de som er «mest vanlig» i en bestemt situasjon indikerer kompetanse innenfor tråden som Kilpatrick et al. (2001) kaller resonnering. For å avgjøre hvilke løsningsprosedyrer som kan benyttes er det også nødvendig å forstå begrepene som inngår i den aktuelle referansekonteksten og hvilken betydning de semiotiske representasjonene har. *Forståelse* er dermed en kompetanse som også gjelder her, i tillegg til beregningskompetansen som trengs for å komme fram til svaret.

For å kunne utføre prosedyrene på en korrekt måte er det nødvendig å ha beregningskompetanse, men å sette opp uttrykkene som utgjør utgangspunktet til prosedyrene er umulig uten å vite hva de trigonometriske begrepene innebærer. I tillegg vil valg av prosedyre kreve kompetanse innenfor resonnering. Disse aspektene er gjennomgående i hele analysen. De tre trådene som jeg har hatt hovedfokus på i analysen har vist seg å være nært knyttet til hverandre, og det er i mange tilfeller umulig å skille de fra hverandre og utkrystallisere én bestemt kompetanse for løsningen av en oppgave. Dette har også sammenheng med at prøveoppgavene er formet slik at det er nødvendig å være i besittelse av flere kompetanser for å løse oppgavene. De fem trådene som Kilpatrick et al. (2001) har utformet må dermed betraktes i sammenheng, og det kreves kompetanse innenfor alle trådene for å få tilstrekkelig matematisk kompetanse.

5.3 Diskusjon av metode og muligheter videre arbeid

Metodene som er benyttet i denne studien har gitt meg et godt grunnlag for å kunne besvare forskningsspørsmålet mitt. Det er de skriftlige kildene som har utgjort det største grunnlaget for å kunne si noe om hvilke matematiske kompetanser som blir belyst. Dokumentanalysen av prøveoppgavene ga god innsikt i forventet kompetanse. Elevbesvarelsene ga indikasjoner på hvilke kompetanser som er oppnådd, men denne delen av analysen kunne blitt forbedret ved nærmere undersøkelse av dette. For å øke validiteten til denne delen av studien kunne det vært aktuelt og gjennomført intervju med de fire elevene som prøvebesvarelsene er hentet fra. Ved å intervjue elevene i etterkant av prøven kunne jeg stilt spørsmål direkte knyttet til hver av oppgavene og hvordan de har valgt å besvare dem. Dette ville ha gitt et enda bedre utgangspunkt til å klassifisere kompetansene innenfor hver av trådene i analyseverktøyet, og det ville vært mulig å belyse hvordan elevene forholder seg til matematikkfaget og deres engasjement i faget. Slik som studien er formet nå gir den ingen innsikt i tråden engasjement, som utgjør en av de fem trådene i rammeverket som er benyttet. En annen innfallsvinkel til å se på hvilke kompetanser elevene har kunne vært å benyttet elevbesvarelsene fra oppgaveheftet mer aktivt. I denne studien har disse først og fremst en støttende funksjon til besvarelsene til prøveoppgavene. Jeg vil her nevne at få av besvarelsene av oppgaveheftet gjorde sin nytte, og utgjorde et mindre datagrunnlag enn først antatt. Utformingen av oppgaveheftet kunne også vært mer i tråd med hvordan prøven er utformet, og utgjort en egen del av analysekapittelet. Dette ville gitt en større validitet til funnene som er gjort i analysen. Dette ville også bidratt til å øke reliabiliteten til undersøkelsen ved at jeg min forforståelse ville fått mindre betydning for tolkningene som er gjort. Likevel vil jeg påstå at tolkningene som er gjort med grunnlag i det eksisterende datamaterialet har gitt innsikt i hvilke kompetanser som er forventet og oppnådd innenfor trigonometri hos 1T-elever.

Utvalget av respondenter var en elevgruppe på fire. Disse ble valgt ut med bakgrunn i tillatelse til videoopptak, egen interesse til å delta og ved hjelp fra læreren. Gjennom analysen av prøvebesvarelsene viste det seg at en av respondentene, Audun, kun hadde besvart én av oppgavene som omhandlet trigonometri. Dette gjorde det vanskelig for meg som forsker å si noe om hvilken kompetanse han var i besittelse av innenfor trigonometri som tema. Enkelte av de andre besvarelsene var også noe mangelfulle, noe som er medvirkende årsak til at jeg har valgt å kun fokusere på et utvalg av besvarelsene. Forskningsarbeidets tidsrammer bidro også til dette, og Tabell 2 er derfor noe ufullstendig. Videre arbeid innenfor denne studiens rammer kan derfor være å gjøre en mer fullstendig analyse av oppnådde kompetanser blant respondentene. Det kan også være aktuelt å ta de to trådene *engasjment* og *anvendelse* i betrakting, og gjennomføre undersøkelser som gir innsikt i disse. En kan også se for seg å utvikle studien til et kvantitativt forskningsdesign ved å se på en stor gruppe elever og plassere kompetansene som framvises i en tabell på samme form som Tabell 2.

Med datagrunnlaget som er samlet i denne studien kan videre forskningsarbeid knyttes nærmere til kompetansemålene fra læreplanen. Jeg har valgt å belyse det ene kompetansemålet fra læreplanen i 1T som omhandler trigonometri, men datagrunnlaget som er samlet i studien åpner for å gjøre tolkninger i lys av andre kompetansemål fra læreplanen. Videre kan det også være aktuelt å se på hvilke vurderingskriterier som ligger til grunn for vurdering av denne prøven, samt å få innsikt i hvilke aspekter lærerne vektlegger under utformingen av prøven. I framtidig arbeid innenfor denne studiens rammer kunne det også vært aktuelt å gitt nivådelingsprinsippet en større plass. Det hadde vært interessant å sett på hvilke kompetanser som er oppnådd innenfor de ulike nivåene og gjort en sammenligning av disse. En slik undersøkelse vil kreve et større datagrunnlag og dermed også kreve mer tid til å gjennomføre datainnsamling.

6. Avslutning

Hovedfokuset til denne oppgaven har vært å belyse elever forståelse av trigonometriske begrep og prosedyrer tilknyttet dette. Under arbeidet med oppgaven viste det seg at forståelse er et komplekst begrep som knytter sammen flere deler av det matematikkdidaktiske fagfeltet. Det teoretiske grunnlaget i denne oppgaven knytter derfor sammen flere teorier som kan benyttes til å få innsikt i den matematiske forståelsen blant elever. Forskningsspørsmålet ble til etter at jeg hadde fått kjennskap til de sentrale teoriene som er presentert i teorikapittelet, og jeg har med grunnlag i dette valgt å fokusere på *matematisk kompetanse* gjennom hele studien. For å besvare forskningsspørsmålet: *«Hvilke typer matematisk kompetanse forventes av 1T-elever i trigonometri, og hvilke typer er oppnådd av et utvalg elever som er gruppert etter faglig nivå?»*, ble det samlet data fra både lærere og elever. Prøven som utgjør grunnlaget for dokumentanalysen er utarbeidet av lærerne ved den aktuelle skolen, mens prøvebesvarelsene som er analysert er gjennomført av elevene. Distinksjonen mellom forventet og oppnådd kompetanse har vært gjennomgående i studien. Dette skillet knytter studien både til læreres praksis ved å betrakte prøven i forhold til læreplan og kompetansemål, samt til elevers tilnærming til begrepene som er tilknyttet trigonometri.

Analysen er strukturert etter hvilke kompetanser som forventes og hvilke som er oppnådd, og benytter fire av de fem trådene som Kilpatrick et al. (2001) har utformet for å beskrive matematisk kompetanse. Det viste seg gjennom analysen at datamaterialet ga mest innsikt de tre trådene *forståelse*, *beregning* og *resonnement*. Datamaterialet ga lite grunnlag for å si noe om kompetanse innenfor *anvendelse*, da denne tråden først og fremst retter seg mot problemer som eksisterer utenfor skolen. Tråden som handler om *engasjement* er ikke berørt i denne studien.

Funnene fra analysen indikerer at beregningskompetanse er sentralt i tilknytning til det trigonometriske fagfeltet, og denne kompetansen viser seg å være framtredende i analysen som er foretatt av prøveoppgavene. Prøveoppgavenes form og innhold kan ha sammenheng med hvordan læreverket presenterer stoffet, hvordan undervisning av trigonometri foregår og ikke minst hva kompetansemål fra læreplanen sier at elevene skal kunne. Sammenhengen mellom innholdet i prøveoppgavene og kompetansemålet som er tilknyttet trigonometri er belyst i denne oppgaven, og forventning innenfor beregningskompetanse er i tråd med innholdet i læreplanen. Videre viser studien også at beregningskompetanse og forståelse ofte opptrer sammen, både i forventet kompetanse og oppnådd kompetanse. Analysen viser også at det ikke alltid er mulig å skille de te kompetansene fra hverandre, og dette støtter teorien som er presentert innledningsvis om at de fem trådene som sammen utgjør matematisk kompetanse ikke kan betraktes uavhengig av hverandre og at full matematisk kompetanse krever kompetanse innenfor alle trådene (Kilpatrick et al., 2001).

Et annen konklusjon som kan trekkes fra de analyserte dataene er at forventet og oppnådd kompetanse i stor grad stemmer med hverandre. Dette kan indikere at undervisningen som er gjort forbereder elevene på det som blir testet i vurderingssituasjonen. En annen årsak til dette kan være at prøven blir laget med utgangspunkt i læreverket. På denne måten vil oppgavene og strukturen av disse være kjent for elevene i vurderingssituasjonen, og dermed vil god prosedyrekunnskap gi mulighet for å besvare oppgavene korrekt.

Arbeidet med denne oppgaven har gitt meg god innsikt i elevers begreps- og prosedyreforståelse, samt hva som kjennetegner matematisk kompetanse. Studien har også gitt innsikt i hvordan kompetansemål fra læreplanen gjenspeiles i en vurderingssituasjon, samt hvilke ulike løsningsprosedyrer elever benytter seg av. Dette er erfaringer som jeg anser som relevante i mitt framtidige læreryrke, og jeg har gjennom denne studien utviklet min matematikkdidaktiske kompetanse.

Referanseliste

Byers, V., & Erlwanger, S. (1985). Memory in Mathematical Understanding. *Educational Studies in Mathematics, 16*(3), 259-281. doi: 10.2307/3482620

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning (ss. 25).

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1/2), 103-131. doi: 10.2307/25472062

Fangen, K. (2004). *Deltagende observasjon*. Bergen: Fagbokforl.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (red.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (s. 1-27). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). Kompetencer og matematikklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. *Utdannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18 - 2002*.

Oldervoll, T. (2009). *Sinus 1T: matematikk for Vg1 : studieforberedende program*. Oslo: Cappelen Damm.

Pirie, E. S. (1988). Understanding: Instrumental, Relational, Intuitive, Constructed, Formalised...? How Can We Know? *For the Learning of Mathematics, 8*(3), 2-6.

Pirie, S. E. B., & Schwarzenberger, R. L. E. (1988). Mathematical Discussion and Mathematical Understanding. *Educational Studies in Mathematics, 19*(4), 459-470. doi: 10.2307/3482272

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforl.

Robson, C. (2011). *Real world research: a resource for users of social research methods in applied settings*. Chichester: Wiley.

Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher, 26*(3), 9-15. doi: 10.2307/41187667

Steinbring, H. (2006). What Makes a Sign a "Mathematical Sign?"--An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 133-162.

Säljö, R. (2003). *Læring i praksis: et sociokulturelt perspektiv*. København: Hans Reitzels Forlag.

Thompson, J., Martinsson, T., Gunnesdal, W., & Rian, J. (2006). *Matematikkleksikon*. [Oslo]: Kunnskapsforl.

Utdanningsdirektoratet. (2012). RAMMEVERK for grunnleggende ferdigheter. Lastet ned 6. juni, 2014, fra http://www.udir.no/Upload/larerplaner/lareplangrupper/RAMMEVERK_grf_2012.pdf?epslanguage=no

Utdanningsdirektoratet. (2013). Læreplan i matematikk fellesfag - kompetansemål. Lastet ned 6. juni, 2014, fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal/?arst=1858830316&kmsn=2088314978

Utdanningsdirektoratet. (2014). Teoretisk bakgrunnsdokument for arbeid med regning på ungdomstrinnet - revidert våren 2014. Lastet ned 6. juni, 2014, fra http://www.udir.no/Upload/Ungdomstrinnet/Rammeverk/Ungdomstrinnet_Bakgrunnsdokument_regning_vedlegg_2.pdf

von Glasersfeld, E. (2002). *Radical constructivism: a way of knowing and learning*. London: RoutledgeFalmer.

Trondheim, 27.01.14

Navn: Elisabet Midtli

Telefon: xxx

E-post: xxx

Til foreldre/foresatte for elever på 1T, VG1 ved XXX Videregående Skole
Anmodning om tillatelse til videoopptak av undervisning.

Jeg er masterstudent i Lektorutdanning i realfag ved NTNU i Trondheim. Jeg skal i løpet av vårsemestret 2014 gjennomføre min masteroppgave i matematikkdidaktikk.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, har jeg i samråd med min veileder Frode Rønning ved NTNU kommet til at det vil være ønskelig å gjøre videoopptak av undervisningssekvenser med elever. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å kunne gjøre videoopptak av elever i 1T ved Strinda Videregående Skole. Det er snakk om å gjøre opptak i matematikktimer i løpet av uke 6 og 7. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert så langt råd er, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er naturligvis helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Videoopptakene vil dokumentere elevenes arbeid og samtale om det matematiske temaet trigonometri, og det er ønskelig at undervisningen skal gå mest mulig som normalt. Opptakene vil kun bli sett av meg og min veileder. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil det ikke være mulig å spore tilbake til enkeltindivider ettersom involverte personer vil bli anonymisert. Etter at oppgavene (undersøkelser og presentasjoner) er gjennomførte vil innsamlede data bli slettet. Etter planen skal masterarbeidet være ferdig i løpet av juni 2014.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer).

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å la deres barn være med på det. Jeg ber foreldre/foresatte om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til videoopptak i klassen.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen

Elisabet Midtli

SVARSLIPP (stryk det som ikke passer)

Vi / jeg har mottatt skriftlig informasjon og er villig til at det kan bli foretatt videoopptak av matematikkundervisning i klassen der ________________________________(elevens navn) er elev.

Jeg/vi har snakket med jenta/gutten vår om dette, og hun/han har også gitt sitt samtykke.

____

(Sted og dato)

____

(underskrift fra foresatte/foreldre)

Vennligst returner svarslippen til læreren i klassen så snart som mulig.