NTNU
Det skapende universitet

Primtallsteoremet og zetafunksjonen

Henrik Sommer

Lektorutdanning med master i realfag
Innlevert: Mai 2013
Hovedveileder: Lars Peter Lindqvist, MATH

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Sammendrag

I denne oppgaven ser jeg på hvordan primtallene er distribuert asymptotisk. Riemanns zetafunksjon er nært knyttet til dette og den defineres først ved hjelp av en Dirichletrekke. Videre utvides definisjonen ved å bruke analytisk fortsettelse fra kompleks analyse, slik at zetafunksjonen blir definert på hele det komplekse planet. Disse resultatene brukes sammen med tallteori og residueregning for å bevise primtallsteoremet.

Summary

In this paper I look at how prime numbers are distributed asymptotically. Riemann zeta function is closely related to this, and it's first defined by a Dirichlet series. Further the definition expands by using analytic continuation from complex analysis, so the zeta function is defined on the entire complex plane. These results are used, along with number theory and residue theory, to prove the prime number theorem.

Forord

Denne oppgaven er skrevet ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet som en avslutning på min lærerutdanning i realfag. Arbeidet med oppgaven har pågått fra august 2012 til mai 2013, hoveddelen av av arbeidet fant sted i vårsemesteret. I oppgaven bevises primtallsteoremet, og oppbyggingen av beviset er hovedsakelig hentet fra Apostol: "Introduction to Analytic Number Theory"[1]. Jeg ønsker å takke professor Peter Lindqvist for hjelp og veiledning i arbeidet med oppgaven.

Innhold

Notasjon

Her presenteres notasjon som er brukt i oppgaven.

- $\log x$ betyr den naturlige logaritmen av x. Dersom det er snakk om andre grunntall for logaritmer skrives det slik $\log_2 x$, der 2 er grunntall.

- $\lfloor x \rfloor$ betyr heltallsdelen av x. Det vil si $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \quad \text{slik at } n \leq x\}$.

- $\binom{n}{k}$ er binomial koeffisienten $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

- $d|n$ betyr at d deler n, det vil si d er en faktor i n.

- $O(f(x)) = g(x)$ betyr at $f(x)$ er dominert av $g(x)$, det vil si det eksisterer en M slik at $|f(x)| \leq Mg(x)$ for alle x.
- $\sum_p$ vil si at summen skal gå over primtall. Dersom summen går over annet enn p, skal det summeres over heltall.
- Med $\int_k^\infty f(t)\,dt$ menes $\lim_{x\to\infty} \int_k^x f(t)\,dt$.

Kapittel 1

Innledning

De fleste av punktene i innledningen nevnes i Ingham: "The Distributuon of Primes"[3]. Alle heltall > 1 kan deles inn i primtall og sammensatte tall. $\pi(x)$ er funksjonen som teller antall primtall $p \leq x$. Aritmetikkens fundamentalteorem sier at alle naturlige tall kan primtallsfaktoriseres på en unik måte.[1] Dette teoremet brukte Euclid til å bevise at det eksisterer uendelig mange primtall i "Elementene", bok 9, prop. 20.

Euler beviste at det finnes uendelig mange primtall med en annen metode i 1737. Han viste at rekken

$$\sum_p \frac{1}{p}$$

divergerer. Euler beviste dette ved å bruke identiteten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{1.1}$$

I 1808 publiserte Legendre en approksimasjon til funksjonen $\pi(x)$. For store x er $\pi(x)$ approksimert

$$\frac{x}{\log x - B},$$

der B er en konstant, senere har det blitt vist at approksimasjonen på denne formen er opptimal når konstanten er 1.[2] Gauss kom med en liknende formel, hans metode gikk ut på å telle antall primtall i blokker på tusen etterfølgende heltall, det vil si han regnet ut verdier for $\pi(k + 1000) - \pi(k)$ for forskjellige k. Fra dette foreslo Gauss $\frac{1}{\log x}$ som en approksimasjon for gjennomsnittstettheten av primtallene i nærheten av en stor x. Det vil si

$$\int_2^x \frac{1}{\log u}\, du$$

[1] Dersom man ser bort i fra rekkefølgen av primtallsfaktorene.

[2] Legendre foreslo 1,08366, denne verdien ble basert på primtallstabeller opp til $x = 400000$.

som en approksimasjon til $\pi(x)$. Dersom man ser på disse formlene asymptotisk er de ekvivalente. De er også ekvivalente med

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1,$$

som er primtallsteoremet. Hverken Legendre eller Gauss beviste at formelene stemte asymtotisk.

Chebyshev kom med det første teoretiske resultatet som knyttet $\pi(x)$ til $\frac{x}{\log x}$. I 1848 beviste Chebyshev at dersom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x}$$

eksisterer så er den lik 1, og i 1850 beviste han at

$$a\frac{x}{\log x} < \pi(x) < A\frac{x}{\log x},$$

der a og A er konstanter, holder for alle tilstrekelig store x.

Mens Euler hadde brukt identiteten 1.1 med $s = 1$ lot Riemann, i et memoir fra 1859, s være en kompleks variabel i summen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

$\zeta(s)$ kalles Riemanns zetafunksjon. Riemanns analyse viste at $\pi(x)$ er knyttet sammen til nullene til zetafunksjoner i det komplekse s-planet. I 1896 beviste Hadamarad og de la Vallée Poussin primtallsteoremet uavhengig av hverandre og nesten samtidig. Begge bevisene gjorde bruk av kompleks funksjonsteori. I tabellen under vises en oversikt over $\pi(x)$ og $\frac{x}{\log x}$ og forholdet mellom dem for x-verdier mellom 10 og 10^{10}. Tabellen er hentet fra Apostol: “Introduction to Analytic Number Theory”[1]

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\log x}$	$\pi(x)/\frac{x}{\log x}$
10	4	4.3	0.93
10^2	25	21.7	1.15
10^3	168	144.8	1.16
10^4	1229	1086	1.13
10^5	9592	8686	1.10
10^6	78498	72382	1.08
10^7	664579	620420	1.07
10^8	5761455	5428681	1.06
10^9	50847534	448254942	1.05
10^{10}	455052511	434294482	1.048

I memoiret til Riemann påstod han at det virket sannsylig at alle ikke-trivielle nuller til $\zeta(s)$ ligger på linja der reelle verdien til s er $\frac{1}{2}$. Dette er kjent som Riemann hypotesen og har ennå ikke blitt bevist. Utregninger har vist at Riemann hypotesen stemmer for de første 3500000 nullene.

Senere, i 1949, oppdaget Atle Selberg og Paul Erdös et elementert bevis av primtallsteoremet. Det vil si et bevis som ikke bruker kompleks funksjonsteori.

Kapittel 2

Grunnleggende tallteori

I dette kapittelet introduseres litt grunnleggende tallteori. Først defineres aritmetiske funksjoner, og det gis noen eksempler. Videre defineres Chebyshev funksjonene, det vises at vi kan bruke disse til å formulere påstander som er ekvivalente med primtallsteoremet. Kapittelet avsluttes med å vise et svakere teorem enn primtallsteoremet.

2.1 Aritmetiske funksjoner

Vi starter med å definere hva en aritmetisk funksjon er deretter ser vi på noen eksempler på aritmetiske funksjoner.

Definisjon 2.1. *En aritmetisk funksjon er en reell funksjon definert for de naturlige tallene.*[1]

Første eksempel på en aritmetisk funksjon er Möbiusfunksjonen μ

Definisjon 2.2. *Möbiusfunksjonen $\mu(n)$ definerers slik*

$$\mu(1) = 1,$$

Hvis $n > 1$ skriver vi

$$n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} \quad \textit{og}$$

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \textit{hvis } a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1, \\ 0 & \textit{ellers.} \end{cases}$$

Eksempler $\mu(31) = 1$ siden 31 er et primtall, $\mu(35) = -1$ siden $35 = 5 \cdot 7$ og $\mu(28) = 0$ siden $28 = 2^2 \cdot 7$.

Det er en aritmetisk funksjon som kalles enhetsfunksjonen, den defineres til å være $e(n) = 1$ for alle n. Et annet eksempel på en aritmetisk funksjon er identitets funksjonen

[1] Det er vanlig at aritmetiske funksjoner kan være komplekse, men vi vil kun trenge reelle her.

I som defineres slik

$$I(n) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{hvis } n = 1, \\ 0 & \text{hvis } n > 1 \end{cases}$$

Vi har en sammenheng mellom μ og I. Dette vises i følgende teorem.

Teorem 2.1. *For $n \geq 1$ har vi*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = I(n)$$

Bevis. For $n = 1$ har vi $\mu(1) = 1 = I(1)$, dersom $n > 1$ skriver vi $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, og merker at leddene i summen som ikke har verdi 0 kommer fra $d = 1$ og divisorene av n som har distinkte primtallsfaktorer. Dermed skrives summen slik

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1)+\mu(p_1)+\cdots+\mu(p_k)+\mu(p_1p_2)+\cdots+\mu(p_{k-1}p_k)+\cdots+\mu(p_1p_2\cdots p_k).$$

Legg merke til at dette er binomisk fordelt, dermed har vi

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 + \binom{k}{1}(-1)^1 + \binom{k}{2}(-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k}(-1)^k = (1-1)^k = 0$$

□

Von Mangoldtfunksjonen $\Lambda(n)$ er også et eksempel på en aritmetisk funksjon.

Definisjon 2.3. *Von Mangoldtfunksjonen $\Lambda(n)$ defineres for alle heltall $n \geq 1$:*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \textit{hvis } n = p^m \textit{ der p er et primtall og } m \geq 1, \\ 0 & \textit{ellers.} \end{cases}$$

Eksempler $\Lambda(81) = \log(3)$ siden $81 = 3^4$, $\lambda(p) = \log(p)$ når p er et primtall, $\lambda(77) = 0$ siden $77 = 11 \cdot 7$.

Når $n \geq 1$ har vi

$$\log(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d). \tag{2.1}$$

Dette stemmer for $n = 1$ siden vi har $\log(1) = 0 = \Lambda(1)$ For $n > 1$ bruker vi den primtallsfaktoriserte formen av n:

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k}.$$

Ved å ta logaritmen her blir produktet til en sum og vi oppnår

$$\log(n) = \sum_{k=1}^{r} a_k \log(p_k).$$

Når d har mer enn en distinkt primtalsfaktor er $\Lambda(d) = 0$. Dermed er det bare d på formen $d = p_k^m$ som vi trenger å summere over, her er $m = 1, 2, \cdots, a_k$ og $k = 1, 2, \cdots, r$. Fra definisjonen av Λ har vi at $\Lambda(p_k^m) = log(p_k)$ dermed får vi

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \Lambda(p_k^m) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \log(p_k) = \sum_{k=1}^{r} a_k \log(p_k) = \log(n).$$

Dermed er 2.1 bevist.

2.2 Dirichlet konvolusjon

For aritmetiske funksjoner har vi en operasjon som kalles Dirichlet konvolusjon. Den defineres slik

Definisjon 2.4. *Dirichlet konvolusjonen mellom to aritmetiske funksjoner, f og g, skrives $f * g$, er den aritmetiske funksjonen gitt ved likningen*

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Dirichlet konvolusjon er en kommutativ operasjon, det vil si $f * g = g * f$. Dette vises ved

$$(f * g)(n) = \sum_{ab=n} f(a)g(b) = \sum_{ab=n} g(b)f(a) = (g * f)(n)$$

Dirichlet konvolusjon er en assosiativ operasjon, det vil si $(f * g) * h = f * (g * h)$. Dette vises ved

$$\begin{aligned}
\{(f * g) * h\}(n) &= \sum_{ab=n} (f * g)(a)h(b) = \sum_{ab=n} \sum_{cd=a} f(c)g(d)h(b) \\
&= \sum_{cdb=n} f(c)g(d)h(b) = \sum_{ce=n} \sum_{bd=e} f(c)g(d)h(b) \\
&= \sum_{ce=n} f(c)(g * h)(e) = \{f * (g * h)\}(n)
\end{aligned}$$

Teorem 2.2. *For alle aritmetiske funksjoner f har vi $I * f = f * I = f$*

Bevis. Dette ser man av

$$(f * I)(n) = \sum_{d|n} f(d) I\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d) g\left\lfloor \frac{d}{n} \right\rfloor = f(n)$$

□

Videre har vi at dersom f er en aritmetisk funksjon med $f(1) \neq 0$ eksisterer det en aritmetisk funksjon f^{-1}, som kalles Dirichlet inversen til f, slik at

$$(f^{-1} * f)(n) = (f * f^{-1})(n) = I(n).$$

Funksjonen f^{-1} bestemmes ved likningen $(f * f^{-1})(n) = I(n)$, det vil si

$$\sum_{d|n} f\Big(\frac{n}{d}\Big) f^{-1}(d) = 0.$$

Ved å bruke egenskapen til den aritmetiske enhetsfunksjonen og teorem 2.1 har vi

$$(\mu * e)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) e\Big(\frac{n}{d}\Big) = \sum_{d|n} \mu(d) = I(n),$$

det vil si at μ og e er Dirichlet inverser. Dette bruker vi til å bevise det neste teoremet

Teorem 2.3.
$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} f(d) g\Big(\frac{n}{d}\Big)$$

Bevis. Vi viser implikasjon mot høyre først. Dermed starter vi med at $f = g * e$. Ved å ta konvolusjonen med μ får vi

$$f * \mu = (g * e) * \mu = g * (e * \mu) = g * I = g$$

For å vise implikasjonen mot venstre tar man konvolusjonen med e i $f * \mu = g$. Dette gir

$$g * e = (f * \mu) * e = f * (\mu * e) = f * I = f$$

□

Fra dette og likning 2.1 får vi

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} \tag{2.2}$$

2.3 Abels identitet og Eulers summasjonsformel

Abels identitet og Eulers summasjonsformel er to resultater som har med aritmetiske funksjoner å gjøre. Vi vil bruke Abels identitet for å vise ekvivalente former av primtallsteoremet. Vi starter med å bevise Abels identitet og bruker videre dette til å bevise Eulers summasjonsformel.

Teorem 2.4. ***Abels identitet.*** *La $a(n)$ være en aritmetisk funksjon og la $A(x) = \sum_{n \le x} a(n)$ og $A(x) = 0$ når $x < 1$. Anta at f er en funksjon slik at f' er kontinuerlig på intervallet $[y, x]$, der $0 < y < x$. Da har vi*

$$\sum_{y<n\le x} a(n) f(n) = A(x) f(x) - A(y) f(y) - \int_y^x A(t) f'(t)\, dx.$$

Bevis. La $k = \lfloor x \rfloor$ og $m = \lfloor y \rfloor$, da har vi $A(x) = A(k)$ og $A(y) = A(m)$. Legg merke til at $a(n) = A(n) - A(n-1)$.

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^{k} a(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^{k} (A(n) - A(n-1))f(n)$$

Videre benytter vi at $\sum_{n=m+1}^{k} A(n-1)f(n) = \sum_{n=m}^{k-1} A(n)f(n+1)$ og deretter samler de leddene vi kan i en sum

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= \sum_{n=m+1}^{k} A(n)f(n) - \sum_{n=m}^{k-1} A(n)f(n+1) \\ &= \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)(f(n) - f(n+1)) + A(k)f(k) - A(m)f(m+1).\end{aligned}$$

Ved å bruke analysens fundamentalteorem får vi

$$f(n) - f(n+1) = -(f(n+1) + f(n)) = -\int_n^{n+1} f'(t)\,dt.$$

Dette gir

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= -\sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)\int_n^{n+1} f'(t)\,dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\ &= -\sum_{n=m+1}^{k-1} \int_n^{n+1} A(t)f'(t)\,dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1)\end{aligned}$$

siden $A(t)$ er konstant for $n \leq t < n+1$ for alle heltall n. Videre har vi at

$$\begin{aligned}A(k)f(k) &= A(x)f(x) - \int_k^x A(t)f'(t)\,dt, \text{ og} \\ A(m)f(m+1) &= A(y)f(y) + \int_y^{m+1} A(t)f'(t)\,dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= -\int_{m+1}^{k} A(t)f'(t)\,dt + A(x)f(x) - \int_k^x A(t)f'(t)\,dt \\ &\quad - A(y)f(y) - \int_y^{m+1} A(t)f'(t)\,dt \\ &= A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'\,dt.\end{aligned}$$

□

Eulers summasjonsformel er et spesialtilfelle av Abels identitet.

Teorem 2.5. ***Eulers summasjonsformel.*** *Hvis f har en kontinuerlig derivert f' på intervallet $[y, x]$, der $0 < y < x$, så*

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t)\,dt + \int_y^x (t - \lfloor t \rfloor) f'(t)\,dt + f(x)(\lfloor x \rfloor - x) - f(y)(\lfloor y \rfloor - y)$$

Bevis. La $a(n) = 1$ for alle $n \geq 1$, dette fører til at $A(x) = \lfloor x \rfloor$. Nå gir Abels identitet oss

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = \sum_{y<n\leq x} f(n) &= f(x)\lfloor x \rfloor - f(y)\lfloor y \rfloor - \int_y^x \lfloor t \rfloor f'(t)\,dt \\ &= f(x)\lfloor x \rfloor - f(y)\lfloor y \rfloor + \int_y^x (t - \lfloor t \rfloor) f'(t)\,dt - \int_y^x t f'(t)\,dt\end{aligned}$$

Vi kan bruke delvis integrasjon på det siste intergralet

$$\int_y^x t f'(t)\,dt = x f(x) - y f(y) - \int_y^x t f(t)\,dt$$

Ved å sette inn dette har vi

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x t f(t)\,dt + \int_y^x (t - \lfloor t \rfloor) f'(t)\,dt + f(x)(\lfloor x \rfloor - x) - f(y)(\lfloor y \rfloor - y)$$

□

Eksempel
Senere vil vi ha bruk for verdien av

$$O\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{\log n}{n}\Big).$$

Vi kan beregne denne ved å benytte Eulers summasjonsformel. Vi lar $f(n) = \frac{\log n}{n}$, $y = \frac{1}{2}$ og $x = N$, der N er et heltall. Ved å bruke dette i Eulers summasjonsformel får vi

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\log n}{n} = \int_{\frac{1}{2}}^{N} \frac{\log t}{t}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{N} (t - \lfloor t \rfloor) \frac{1 - \log t}{t^2}\,dt + 0 + \frac{2}{2} \cdot \log \frac{1}{2}$$

Vi kan regne ut store O av et ledd av gangen. For det andre leddet bruker vi at $(t - \lfloor t \rfloor) \leq 1$ før vi integrerer

$$O\Big(\int_{\frac{1}{2}}^{N} \frac{\log t}{t}\,dt\Big) = O\Big(\frac{\log^2 N}{2} - \frac{\log^2 \frac{1}{2}}{2}\Big) = O(\log^2 N)$$

$$O\Big(\int_{\frac{1}{2}}^{N} (t - \lfloor t \rfloor) \frac{1 - \log t}{t^2}\,dt\Big) \leq O\Big(-\frac{\log N}{N} - \frac{1}{N} + 2 \cdot \log \frac{1}{2} + 2\Big) = O\Big(\frac{\log N}{N}\Big)$$

$$O\Big(\log \frac{1}{2}\Big) = O(1)$$

Dermed har vi

$$O\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{\log n}{n}\Big) = \log^2 N \tag{2.3}$$

2.4 Chebyshevfunksjonene

Chebyshevfunksjonene er ikke aritmetiske funksjoner. Begge er definert for positive reelle tall.

Definisjon 2.5. *Chebyshevs ψ-funksjon defineres for $x > 0$ ved formelen*

$$\psi(x) = \sum_{n\le x}\Lambda(n).$$

Eksempel

$$\begin{aligned}\psi(32) = \sum_{n\le 32}\Lambda(n) &= \log(2)+\log(3)+\log(2)+\log(5)+\cdots+\log(31)+\log(2)\\ &= 5\log(2)+3\log(3)+2\log(5)+\cdots+\log(31).\end{aligned}$$

Her får vi $5\cdot\log(2)$ siden vi skal legge sammen verdiene $\Lambda(2^n)$ for alle n slik at $2^n \le 32$.

Definisjon 2.6. *For $x > 0$ defineres Chebyshevs $\theta(x)$ ved formelen*

$$\theta(x) = \sum_{p\le x}\log(p).$$

Summen går over alle primtall $\le x$.

Eksempel

$$\theta(32) = \log(2)+\log(3)+\log(5)+\cdots+\log(31)$$

Vi har følgende sammenheng mellom ψ og θ

$$\psi(x) = \sum_{m\le\log_2(x)}\theta\big(x^{\frac{1}{m}}\big)$$

Bevis. Dersom ikke n kan skrives på formen $n = p^m$ der p er et primtall er $\Lambda(n) = 0$. Dermed har vi

$$\psi(x) = \sum_{n\le x}\Lambda(n) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p^m\le x}\Lambda(p^m) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p\le x^{\frac{1}{m}}}\log(p)$$

Summen over m er egentlig endelig. For å finne den maksimale m vi skal ha med i summen, ser vi at dersom $x^{\frac{1}{m}} < 2$ blir summen over primtallene tom, siden 2 er det minste primtallet. Fra denne betingelsen finner vi hvilke m-verdier vi må summere over.

$$x^{\frac{1}{m}} < 2 \implies \frac{1}{m}\log(x) < \log(2) \implies m > \frac{\log(x)}{\log(2)} = \log_2(x).$$

Dette gir resultatet

$$\psi(x) = \sum_{m \leq \log_2(x)} \sum_{p \leq x^{\frac{1}{m}}} \log(p) = \sum_{m \leq \log_2(x)} \theta(x^{\frac{1}{m}})$$

ved å bruke definisjonen av $\theta(x)$. $\square$

Videre skal vi undersøke forholde mellom hvordan $\psi(x)$ og $\theta(x)$ vokser når x vokser.

Teorem 2.6.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} \right) = 0$$

Bevis. For å bevise dette teoremet, vises først ulikheten

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} \leq \frac{\log^2(x)}{2\sqrt{x}\log(2)} \tag{2.4}$$

for $x > 0$.
Fra definisjonen av $\theta(x)$ følger ulikheten

$$\theta(x) \leq \sum_{p \leq x} \log x \leq x \log x$$

Ved å kombinere dette med det vi vet om forholdet mellom $\psi(x)$ og $\theta(x)$ får vi

$$\begin{aligned} 0 \leq \psi(x) - \theta(x) = \sum_{m=1}^{\log_2 x} \theta\big(x^{\frac{1}{m}}\big) - \theta(x) = \sum_{m=2}^{\log_2 x} \theta\big(x^{\frac{1}{m}}\big) \leq \sum_{m=2}^{\log_2 x} x^{\frac{1}{m}} \log x^{\frac{1}{m}} \\ \leq \log_2 x \sqrt{x} \log \sqrt{x} = \frac{\log x}{\log 2} \sqrt{x} \frac{\log x}{2} = \frac{\sqrt{x}\log^2 x}{2\log(2)} \end{aligned}$$

Dersom man dividerer med x får man ulikhet 2.4. Videre kan vi la $x \to \infty$, dette gir

$$0 \leq \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} \right) \leq \lim_{x \to \infty} \frac{\log^2 x}{2\sqrt{x}\log 2} = 0$$

$\square$

Fra dette teoremet følger det at dersom en av $\frac{\psi(x)}{x}$ og $\frac{\theta(x)}{x}$ går mot en grense når $x \to \infty$ så gjør også den andre det, og da grenseverdiene er like.

2.5 Ekvivalente former av primtallsteoremet

$\pi(x)$ er en funksjon som teller alle primtall $p \leq x$. Her skal vi vise at det er sammenhenger med Chebyshevfunksjonene som er ekvivalente med primtallsdistribusjonsteoremet. Først trenger vi å etablere to sammenhenger mellom $\pi(x)$ og $\theta(x)$. Dette gjør vi ved å bruke Abels identitet.

Teorem 2.7. *For $x \geq 2$ gjelder*

$$\theta(x) = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt, \tag{2.5}$$

og

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}. \tag{2.6}$$

Bevis. Vi definerer

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{hvis n er et primtall,} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da er $a(n)$ den karakteristiske primtalsfunksjonen. Vi har

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{1<n\leq x} a(n) \quad \text{og} \\ \theta(x) &= \sum_{1<n\leq x} a(n)\log n. \end{aligned}$$

Ved å la $f(x) = \log x$ og sette $y = 1$ gir Abels identitet

$$\begin{aligned} \theta(x) = \sum_{1<n\leq x} a(n)\log n &= \pi(x)\log x - \pi(1)\log 1 - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt \\ &= \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt \end{aligned}$$

siden det minste primtallet er 2. For å vise den andre sammenhengen lar vi $b(n) = a(n)\log n$. Dette gir

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{1<n\leq x} \frac{b(n)}{\log n} \quad \text{og} \\ \theta(x) &= \sum_{1<n\leq x} b(n). \end{aligned}$$

La $f(x) = \frac{1}{\log x}$, nå må vi velge en $1 < y < 2$ for å unngå 0 i nevneren og for at summen skal gå fra $n = 2$. Igjen bruker vi Abels identitet

$$\begin{aligned} \pi(x) = \sum_{y<n\leq x} \frac{b(n)}{\log n} &= \frac{\theta(x)}{\log x} - \frac{\theta(y)}{\log y} + \int_y^x \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}\,dt \\ &= \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}\,dt \end{aligned}$$

Siden $\theta(t) = 0$ når $t < 2$ $\square$

Nå kan vi vise at vi har ekvivalente versjoner av primtallsteoremet.

Teorem 2.8. *Følgende sammenhenger er ekvivalente:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}$$

Fra teorem 2.6 har vi at grenseverdiene med Chebyshevfunksjonene er ekvivalente. Derfor trenger vi bare å bevise at $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x}$

Bevis. Vi viser først implikasjonen mot høyre. Anta at $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$ holder, det fører til at

$$\frac{\pi(x)}{x} = O\Big(\frac{1}{\log x}\Big), \quad \text{for } t \geq 2$$

Ved å dividere likning 2.5 med x får vi

$$\frac{\theta(x)}{x} = \frac{\pi(x)\log x}{x} - \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt,$$

Videre må vi vise at siste leddet her går mot 0 når $x \to \infty$. Siden $t \geq 2$ i integralet har vi

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt = O\Big(\frac{1}{x}\int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt\Big)$$

På intervallet $[2, \sqrt{x}]$ har vi $\frac{1}{\log t} \leq \frac{1}{\log 2}$ og på intervallet $[\sqrt{x}, x]$ har vi $\frac{1}{\log t} \leq \frac{1}{\log \sqrt{x}.}$ Dette gir

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt &= \int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\log t}\,dt + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{\log t}\,dt \leq \int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\log 2}\,dt + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{\log \sqrt{x}}\,dt \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\log 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{\log \sqrt{x}.}\end{aligned}$$

Dermed har vi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-2}{x\log 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{x\log\sqrt{x}} = 0$$

Med andre ord er implikasjonen mot høyre vist. Videre vises implikasjonen mot venstre. Vi tar utgansgspunkt i likning 2.6 og antar at $\lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 0$. Først multipliserer vi likning 2.6 med $\frac{\log x}{x}$, det gir

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} = \frac{\theta(x)}{x} + \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}\,dt.$$

For å vise implikasjonen mot venstre må vi vise at integralleddet går mot 0 når $x \to \infty$. Ved å bruke $\theta(t) = O(t)$ får vi

$$\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}\,dt = O\Big(\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{1}{\log^2 t}\,dt\Big)$$

Ved å dele integralet opp og maksimere integranden i hvert integral og regne ut grenseverdien får vi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{1}{\log^2 t}\,dt \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-2}{x\log^2 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{x\log^2\sqrt{x}} = 0$$

$\square$

Vi vet ikke om de tre påstandene holder, men dersom vi klarer å vise at en av de holder så holder de to andre også. Når vi skal bevise primtallsteoremet beviser vi at $lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$ og dermed holder også primtallsteoremet.

2.6 Et svakere teorem enn primtallsteoremet

Dette kapittelet avsluttes med et teorem som er svakere enn primtallsteoremet. Dette teoremet viser at $\pi(n)$ vokser omtrendt som $\frac{\log n}{n}$. Dette vises ved at vi etablerer ulikheter med $\pi(n)$ og faktorer av $\frac{\log n}{n}$, men før vi kan gjøre dette trenger vi å vite om Legendres identitet, den introduseres ved hjelp av et eksempel.
Eksempel
Vi skal faktorisere 100!.
Først vil vi finne antallet ganger faktoren 2 forekommer. Vi har faktoren 2 i tallene $2, 4, 6, 8, \cdots, 100$

$$\Longrightarrow \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50 \text{ ganger.}$$

Men vi mangler fortsatt de ekstra faktorene 2 fra tall med faktor $2^2 = 4$. Så vi må telle med en ekstra faktor tallene $4, 8, 12, 16 \cdots$.

$$\Longrightarrow \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor = 25 \text{ ganger.}$$

Videre fortsetter vi med tallene med faktor $2^3 = 8$

$$\Longrightarrow \left\lfloor \frac{100}{8} \right\rfloor = 12 \text{ ganger.}$$

Når vi fortsetter finner vi

$$\left\lfloor \frac{100}{16} \right\rfloor = 6$$
$$\left\lfloor \frac{100}{32} \right\rfloor = 3$$
$$\left\lfloor \frac{100}{64} \right\rfloor = 1$$

Faktoren 2 opptrer altså $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ ganger. For å faktorisere 100! kan man bruke samme metode for alle primtall ≤ 100. Denne metoden oppsummeres i

Legendres identitet som sier: For alle $n \geq 1$ har vi

$$n! = \prod_{p \leq x} p^{\alpha(p)} \quad \text{der } \alpha(p) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor.$$

Legg merke til at $\left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor = 0$ når $m > \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor$. Ved å ta logaritmen på begge sider får vi

$$\log n! = \sum_{p \leq n} \alpha(p) \log p. \tag{2.7}$$

Videre vil vi trenge følgende lemma.

Lemma 2.1.

$$2^n \leq \binom{2n}{n} < 4^n, \quad \textit{for } n \geq 2$$

Bevis. Vi har

$$4^n = 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} > \binom{2n}{n}.$$

Den andre ulikheten viser vi ved hjelp av et induksjonsbevis. For $n = 2$ har vi

$$2^n = 4 \leq 6 = \frac{4!}{2!2!}.$$

Som induksjonshyppotese antar vi at

$$2^k \leq \binom{2k}{k}, \quad \text{for } n = k \geq 2.$$

For $n = k + 1$ får vi

$$\begin{aligned} 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \leq 2 \cdot \binom{2k}{k} &< 2\frac{(k+1)(2k+1)}{(k+1)(k+1)} \binom{2k}{k} \\ &= \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)(k+1)} \binom{2k}{k} \\ &= \binom{2(k+1)}{k+1} \end{aligned}$$

□

Nå kan vi bevise følgende teorem.

Teorem 2.9. ***Chebyshevs teorem.*** *For alle heltall $n \geq 2$ gjelder ulikhetene*

$$\frac{1}{6} \frac{n}{\log n} < \pi(n) < 6 \frac{n}{\log n}$$

Bevis. Ved å ta logaritmer i ulikheten fra lemmaet får vi

$$n \log 2 \leq \log(2n)! - 2\log n! < n \log 4$$

Vi benytter oss av likning 2.7 og får

$$\log(2n)! - 2\log n! = \sum_{p \leq 2n} \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{\log 2n}{\log p^m} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^m} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor\right) \log p$$

Ved å benytte at $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ er enten 0 eller 1 får vi

$$n \log 2 \leq \sum_{p \leq 2n} \Big(\sum_{m=1}^{\left\lfloor \frac{\log 2n}{\log p} \right\rfloor} 1\Big) \log p \leq \sum_{p \leq 2n} \frac{\log 2n}{\log p} \log p = \sum_{p \leq 2n} \log 2n = \pi(2n) \log 2n$$

Dermed får vi

$$\pi(2n) \geq \frac{n \log 2}{\log 2n} = \frac{2n \log 2}{2 \log 2n} > \frac{1}{4} \frac{2n}{\log 2n}$$

ved å bruke at $\log 2 > \frac{1}{2}$. Nå har vi vist den venstre ulikheten for partall. For oddetall har vi

$$\pi(2n+1) \geq \pi(2n) > \frac{1}{4} \frac{2n}{\log 2n} > \frac{1}{4} \frac{2n}{2n+1} \frac{2n+1}{\log 2n+1} \geq \frac{1}{6} \frac{2n+1}{\log 2n+1}$$

siden $\frac{2n}{2n+1} \geq \frac{2}{3}$. Dermed ha vi vist

$$\pi(n) > \frac{1}{6} \frac{n}{\log n}.$$

Videre vil vi vise den andre ulikheten. Ved å la summen gå over $m = 1$ får vi fra Legendres identitet at

$$\log(2n)! - 2\log n! \geq \sum_{p \leq 2n} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^m} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor\right) \log p$$

For primtallene p, $n < p \leq 2n$ har vi $\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 1$. Dermed får vi

$$n \log 4 > \log(2n)! - 2\log n! \geq \sum_{n < p \leq 2n} \log p = \theta(2n) - \theta(n).$$

For n-verdier på formen $n = 2^m$ har vi

$$\theta(2^{m+1}) - \theta(2^m) < 2^m \log 4 = 2^{m+1} \log 2.$$

Ved å summere over m-verdiene $m = 1, 2, 3, \cdots, k$ får vi

$$\theta(2^{k+1}) = \theta(2^{k+1}) - \theta(2^k) + \theta(2^k) - \cdots = \left(2^{m+1} + 2^m + 2^{m-1} + \cdots + 2^1\right) \log 2 < 2^{m+2} \log 2.$$

Videre velger vi k slik at $2^k \leq n < 2^{k+1}$ og får

$$\theta(n) \leq \theta(2^{k+1}) < 2^{k+2} \log 2 \leq 4n \log 2.$$

Nå velger vi $0 < \alpha < 1$, dette gir

$$(\pi(n) - \pi(n^\alpha)) \log n^\alpha = \sum_{n^\alpha < p \leq n} \log n^\alpha < \sum_{n^\alpha < p \leq n} \log p \leq \theta(n) < 4n \log 2.$$

Dette gir følgende uttrykk for $\pi(n)$

$$\pi(n) < \frac{4n \log 2}{\alpha \log n} + \pi(n^\alpha) < \frac{4n \log 2}{\alpha \log n} + n^\alpha = \frac{n}{\log n}\left(\frac{4 \log 2}{\alpha} + \frac{\log n}{n^{1-\alpha}}\right)$$

Videre vil vi finne en maksimal verdi av $f(n) = \frac{\log n}{n^{1-\alpha}}$. Her vet vi at $0 < \alpha < 1$ og $n \geq 1$, ved å la $\beta = 1 - \alpha$ har vi $\beta > 0$. Nå har vi

$$\frac{\log n}{n^{1-\alpha}} = \frac{\log n}{n^\beta},$$

for å finne maksimal verdi deriverer vi med hensyn på n og løser $f'(n) = 0$

$$\begin{aligned} f'(n) &= \frac{1}{n^{\beta+1}} - \frac{\beta \log n}{n^{\beta+1}}, \\ f'(n) = 0 \implies \frac{1}{n^{\beta+1}} = \frac{\beta \log n}{n^{\beta+1}} \implies n &= e^{\frac{1}{\beta}}, \\ f(e^{\frac{1}{\beta}}) &= \frac{1}{e\beta}. \end{aligned}$$

Dette er en maksimalverdi. Ved å la $\alpha = \frac{2}{3}$ og dermed $\beta = \frac{1}{3}$ får vi

$$\pi(n) < \frac{n}{\log n}\left(\frac{2 \log 2}{\alpha} + \frac{\log n}{n^{1-\alpha}}\right) = \frac{n}{\log n}\left(\frac{12 \log 2}{2} + \frac{3}{e}\right) = \frac{n}{\log n}\left(6 \log 2 + \frac{3}{e}\right).$$

Utregning gir

$$6 \log 2 + \frac{3}{e} < 6,$$

dermed har vi

$$\pi(n) < 6\frac{n}{\log n}.$$

□

Det går ann å forbedre konstantene i ulikheten slik at de blir nærmere 1. Dette blir gjort i A.E.Ingham: "The Distribution of Primes"[3], men det viktigste fra dette resultatet er at vi kan vite at $\frac{n}{\log n}$ er et riktig forhold å sammenlikne $\pi(n)$ med.

Kapittel 3

Dirichletrekker

I dette kapittelet introduseres Riemanns zetafunksjon $\zeta(s)$, som er et eksempel på en Dirichletrekke. ved å bruke teori fra Dirichletrekker for å undersøkes zetafunksjonen. Her defineres zetafunksjonen i et halvplan i det komplekse planet. I neste kapittel vil zetafunksjonen defineres for hele det komplekse planet ved å bruke analytisk fortsettelse.

3.1 Dirichletrekker og zetafunksjonen

Definisjon 3.1. *For reelle $s > 1$ defineres zetafunksjonen ved formelen*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Vi kan vise at rekken konvergerer ved å bruke integraltesten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^s}\, dx = 1 + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx = 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Videre definerer vi Dirichletrekker.

Definisjon 3.2. *Dersom $f(n)$ er en aritmetisk funksjon definerer vi Dirichletrekken med koeffisienter $f(n)$ til å være*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Her er s-verdiene komplekse.

Vi følger her Riemanns notasjon og skriver $s = \sigma + it$, der σ og t er reelle. Videre vil vi definere $\zeta(s)$ for komplekse s-verdier. Legg merke til at

$$n^s = e^{s \log n} = e^{(\sigma + it) \log n} = n^{\sigma} e^{it \log n}$$

Dette medfører at $|n^s| = n^\sigma$. Det vil si at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergerer for alle s med $\sigma > 1$. Vi utvider definisjonen av ζ til å gjelde for alle slike s-verdier. Dermed er zetafunksjonen definert for det komplekse halvplanen $\sigma > 1$.

Teorem 3.1. *Anta at rekken*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right|$$

hverken konvergerer for alle s eller divergerer for alle s. Da finnes det et reellt tall σ_a, kalt absolutt konvergens abscissen, slik at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

konvergerer absolutt for $\sigma > \sigma_a$ og konvergerer ikke absolutt for $\sigma < \sigma_a$.

Bevis. Legg merke til at for $\sigma \geq a$ så er

$$\left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \frac{|f(n)|}{n^a}$$

Det vil si at dersom en Dirichlet rekke konvergerer absolutt for $s = a + it$ så konvergerer den absolutt for s med $\sigma \geq a$. La videre A være mengden av reelle σ der

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right|$$

divergerer. Da er A en ikke-tom mengde. Siden rekken ikke divergerer for alle σ har A en øvre skranke. Derfor har A en minste øvre skranke, σ_a. Dette er absolutt konvergens abscissen. $\square$

For

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

har vi $\sigma_a = 1$, at rekken divergerer for $\sigma = 1$ kan for eksempel vises ved

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots\right) + \cdots \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots\right) + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty
\end{aligned}$$

3.2 Funkjonen definert ved en Dirichletrekke

Videre defineres en funksjon, fra absolutt konvergens halvplanet, ved hjelp av Dirichlet-rekker.

Definisjon 3.3.

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad \textit{for } \sigma > \sigma_a$$

Videre vises noen egenskaper for slike funksjoner.

Lemma 3.1. *For $N \geq 1$ og $\sigma \geq c > \sigma_a$ har vi*

$$\Big|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\Big| \leq \frac{1}{N^{\sigma-c}} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c}.$$

Dette bevises slik

Bevis.

$$\Big|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\Big| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^{\sigma}} = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c n^{\sigma-c}} \leq \frac{1}{N^{\sigma-c}} \sum_{N}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c}.$$

□

Det neste teoremet viser hva som skjer med $F(s)$ dersom vi lar $\sigma \to \infty$.

Teorem 3.2.

$$\lim_{\sigma \to \infty} F(\sigma + it) = f(1) \quad \textit{uniformt for } -\infty < t < \infty.$$

Bevis.

$$F(s) = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

For å bevise teoremet må det vises at summen over går mot 0 når $\sigma \to \infty$. Velg en $c > \sigma_a$, da kan lemmaet brukes for $\sigma \geq c$. Dette gir

$$\Big|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\Big| \leq \frac{1}{2^{\sigma}} \frac{1}{2^{-c}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c} = \frac{M}{2^{\sigma}}$$

Her er M uavhengig av σ og t. Når $\sigma \to \infty$ har vi $\frac{M}{2^{\sigma}} \to 0$. □

Dette teoremet gir at $\zeta(s) \to 1$ når $\sigma \to 1$. Det neste teoremet viser en unikhetegen-skap for Dirichletrekker.

Teorem 3.3. *Gitt to Dirichletrekker*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad \text{og } G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s},$$

som begge er absoluttkonvergente for $\sigma > \sigma_a$. Dersom $F(s) = G(s)$ for alle s i en uendelig sekvens $\{s_k\}$ slik at $\sigma_k \to \infty$ når $k \to \infty$, da er $f(n) = g(n)$ for alle n.

Bevis. For å vise dette lar vi $h(n) = f(n) - g(n)$ og $H(s) = F(s) - G(s)$ Da er $H(s_k) = 0$ for hver k. For å bevise teoremet må det vises at $h(n) = 0$ for alle n. Anta at $h(n) \neq 0$ for noen n, dersom dette fører til en motsigelse er teoremt bevist. La $n = N$ være det minste tallet $h(n) \neq 0$. Da er

$$H(s) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \frac{h(N)}{N^s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Fra dette får vi

$$h(N) = N^s H(s) - N^s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(s)}{n^s}.$$

La $s = s_k$, siden $H(s_k) = 0$ blir

$$h(N) = -N^{s_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(s)}{n_k^s}.$$

Videre velges k slik at $\sigma_k > c$ der $c > \sigma_a$. Dermed gir lemma

$$|h(N)| \leq \frac{N^{\sigma_k}}{(N+1)^{\sigma_k - c}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|h(s)|}{n^c} = \left(\frac{N}{N+1}\right)^{\sigma_k} M.$$

Her er M uavhengig av k. Ved å la $k \to \infty$ vil $\sigma_k \to \infty$ og

$$\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\sigma_k} \to 0$$

Det vil si $h(N) = 0$, men dette er en motsigelse, og teoremet er bevist. □

Teorem 3.4. *La $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ og anta at $F(s) \neq 0$ for en s med $\sigma > \sigma_a$. Da er det et halvplan $\sigma > c \geq \sigma_a$ der $F(s)$ aldri er null.*

Bevis. Dette vises ved en motsigelse. Anta at det ikke finnes noe slikt halvplan. Da finnes det for hver $k = 1, 2, \cdots$ et punkt s_k med $\sigma_k > k$ slik at $F(s) = 0$. Siden $\sigma_k \to \infty$ når $k \to \infty$ fører unikhetteoremet til at $f(n) = 0$ for alle n, men siden $F(s) \neq 0$ for en s er dette en motsigelse. □

I områdedet der to Dirichletrekker konvergerer absolutt kan man multiplisere dem. For å gjøre det brukes Dirichlet konvolusjon.

Teorem 3.5. *Gitt to funksjoner $F(s)$ og $G(s)$ representert ved Dirichletrekkene*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad \textit{for alle } \sigma > a, \textit{ og } G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \quad \textit{for alle } \sigma > b.$$

I halvplanet der begge rekkene konvergerer absolutt er produktet gitt ved

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

der $h = f * g$, det vil si Dirichletkonvolusjonen av f og g:

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\Big(\frac{n}{d}\Big).$$

Bevis. For s i halvplanet der begge rekkene konvergerer absolutt har vi

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)g(m)}{(nm)^s}.$$

Siden begge rekkene konvergerer absolutt kan vi multiplisere de og endre rekkefølgen på leddene uten at det endrer på summen. Ved å samle alle leddene med nm konstant får vi

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{nm=k}^{\infty} \frac{f(n)g(m)}{k^s} \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(k)}{k^s},$$

der $h(k) = (f * g)(k)$. □

Eksempel
La

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{og } G(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s}.$$

Begge rekkene konvergerer absolutt for $\sigma > 1$. Her er $f(n) = 1$ og $g(m) = \mu(m)$, så $h(k) = \lfloor \frac{1}{k} \rfloor$. Dette gir

$$\zeta(s) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s} = 1$$

for $\sigma > 1$. Dette viser at for $\sigma > 1$ har vi $\zeta(s) \neq 0$ og

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s} = \frac{1}{\zeta(s)}. \tag{3.1}$$

3.3 Eulerprodukter

Dirichletrekker kan uttrykkes som produkter over primtallene. Det neste teoremt viser hvordan absolutt konvergente rekker kan uttrykkes som uendelige produkter derson f er multiplikativ. Disse produktene kalles Eulerprodukter siden det var Euler som oppdaget denne sammenhengen. Dette anvendes senere på Dirichletrekker.

Teorem 3.6. *La f være en multiplikativ aritmetisk funksjon slik at rekken* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *er absolutt konvergent. Da kan summen av rekken uttrykkes som et absolutt konvergent uendelig produkt,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} (1 + f(p) + f(p^2) + \cdots) \tag{3.2}$$

over alle primtall. Hvis f er fullstendig multiplikativ forenkles uttrykket til

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} \frac{1}{1 - f(p)} \tag{3.3}$$

Bevis. Vi begynner beviset med å se på det endelige produktet

$$P(x) = \prod_{p \leq x} (1 + f(p) + f(p^2) + \cdots)$$

over alle primtall $p \leq x$. Dette er et produkt over endelig mange absolutt konvergente rekker, og dermed kan vi multipisere sammen rekkene og endre rekkefølgen på leddene uten å endre på summen. Siden f er multiplikativ kan vi skrive leddene på formen

$$f(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}).$$

Ved å bruke aritmetikkens fundamentalteorem får vi

$$P(x) = \sum_{n \in A} f(n),$$

der A er består av alle positive heltall n som har alle primtallsfaktorer $\leq x$. Dermed

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x) = \sum_{n \in B} f(n),$$

der B består av alle positive heltall n med en eller flere primtallsfaktorer $\geq x$. Dermed har vi

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x) \right| \leq \sum_{n \in B} |f(n)| \leq \sum_{n > x} |f(n)|.$$

Når $x \to \infty$ vil $\sum_{n>x} |f(n)| \to 0$ siden summen er konvergent. Dermed vil $P(x) \to \sum f(n)$ når $x \to \infty$. Videre vises at produktet i likning 3.2 er absolutt konvergent. Et uendelig produkt $\prod(1+a_n)$ konvergerer absolutt når den korresponderernde summen $\sum a_n$ konvergerer absolutt. Her blir

$$\sum_{p\le x}|f(p)+f(p^2)+\cdots| \le \sum_{p\le x}(|f(p)|+|f(p^2)|+\cdots) \le \sum_{n=2}^{\infty}|f(n)|.$$

Dermed er alle delsummene bundet og dermed vil

$$\sum_{p\le x}|f(p)+f(p^2)+\cdots|$$

konvergere, dette fører fil at det uendelige produktet også konvergerer absolutt. Til slutt har vi dersom f er fullstendig multiplikativ at $f(p^n)=f(p)^n$. Dermed blir hver faktor en geometrisk rekke

$$1+f(p)+f(p^2)+\cdots = 1+f(p)+f(p)^2+\cdots = \frac{1}{1-f(p)},$$

og produktet er lik det i likning 3.3. □

Ved å bruke dette for absolutt konvergente Dirichletrekker får vi det neste teoremet.

Teorem 3.7. *Anta at*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$

konvergerer absolutt for $\sigma>\sigma_a$. Hvis f er multiplikativ har vi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p)^2}{p^{2s}}+\cdots\right),$$

dersom f er fullstendig multiplikativ blir dette

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-f(p)p^{-s}},$$

for $\sigma>\sigma_a$.

Dermed kan zetafunksjonen uttrykkes som et uendelig produkt

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}} \quad \text{for } \sigma > 1.$$

Dette brukes videre for å knytte sammen zetafunksjonen og von Mangoldtfunksjonen. Denne metoden blir brukt i Stein og Shakarchi: “Complex Analysis”[5]. Ved å ta logaritmen på begge sider blir produktet til en sum

$$\log\zeta(s)=-\sum_p\log(1-p^{-s}).$$

Ved å dervivere med hensyn på s får vi

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{\log(p)p^{-s}}{1-p^{-s}} = -\sum_p \log(p)\Big(\frac{1}{1-p^{-s}} - 1\Big)$$
$$= -\sum_p \log(p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

Med andre ord for $\sigma > 1$ så gjelder

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \tag{3.4}$$

Denne sammenhengen vil vi få bruk for senere.

3.4 Dirichletrekker uttrykt som eksponentialer av Dirichletrekker

Videre presenteres et teorem som gjelder funksjonen definert ved en Dirichletrekke i halvplanet der den er absolutt konvergent[1]. Dette teoremet blir ikke bevist, det bygger på to andre resultater som kan leses i Apostol: "Introduction to Analytic Number theory"[1].

Teorem 3.8. *Sumfunksjonen*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

til en Dirichletrekke er analytisk i halvplanet med absolutt konvergens $\sigma > \sigma_a$, og dens deriverte i dette halvplanet uttrykkes ved Dirichletrekken

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\log n}{n^s},$$

som man får ved å derivere ledd for ledd.

Dette teoremet brukes for å vise at noen Dirichletrekker kan uttrykkes som eksponenter av andre Dirichletrekke. Det neste teoremet viser når dette er mulig, og hvilken Dirichletrekke som er i eksponenten.

Teorem 3.9. *La*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

være absolutt konvergent for $\sigma > \sigma_a$ og anta at $f(1) \neq 0$. Hvis $F(s) \neq 0$ for $\sigma > \sigma_0 \geq \sigma_a$, så har vi $F(s) = e^G(s)$, for $\sigma > \sigma_0$, der

$$G(s) = \log f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{n^s \log n},$$

[1] Det kan vises at dette gjelder for halvplanet en Dirichletrekke konvergerer, dette halvplanet kan ha med verdier for σ som er mindre enn σ_a.

her er f^{-1} Dirichlet inversen av f og $'(n) = f(n)\log n$.

Bevis. Siden $F(s) \neq 0$ finnes det en funksjon $G(s)$ som er analytisk slik at $F(s) = e^G(s)$. Ved å derivere dette finner vi $F'(s) = e^G(s)G'(s) = F(s)G'(s)$ slik at $G'(s) = F'(s)/F(s)$. Videre finner vi et uttrykk for $G'(s)$ ved å se på $F'(s)$ og $1/F(s)$. Fra teoremet over har vi

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\log n}{n^s} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{n^s}.$$

Vi har

$$\frac{1}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^s}.$$

Dermed blir

$$G'(s) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{n^s}$$

Summen går fra 2 siden $\log 1 = 0$. Ved å integrere dette får vi

$$G(s) = C + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{n^s \log n},$$

C er integreringskonstanten. Denne kan vi finne ved å la $\sigma \to \infty$, det gir

$$\lim_{\sigma\to\infty} G(\sigma + it) = C.$$

Sammen med teorem 3.2 gir dette

$$f(1) = \lim_{\sigma\to\infty} F(\sigma + it) = e^C.$$

Dermed er $C = \log f(1)$. □

Dette kan vi bruke til å uttrykke $\zeta(s) = e^{G(s)}$ for $\sigma > 1$. Når $f(n) = 1$ får vi $f'(n) = \log n$ og $f^{-1}(n) = \mu(n)$. Dirichletkonvolusjon gir sammen med likning 2.2 at

$$(f' * f^{-1})(n) = \sum_{d|n} \log d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \Lambda(n).$$

Det vil si

$$G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s \log n}. \tag{3.5}$$

Kapittel 4

Analytisk fortsettelse av zeta

I dette kapittelet er målet å definere zetafunksjonen for hele det komplekse s-planet. Dette gjøres ved analytisk fortsettelse, som man kan lese om i Gamelin: "Complex analysis"[4]. Først må vi vite litt om gammafunksjonen

4.1 Gammafunksjonen

Her presenteres egenskaper ved gammafunksjonen uten bevis. Man kan lese mer om gammafunksjonen i Gamelin: "Complex analysis"[4]. For $\sigma > 0$ har vi følgende integralrepresentasjon for gammafunksjonen

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Den funksjonen kan fortsettes utover linja $\sigma = 0$ til en funksjon som er analytisk over hele s-planet utenom enkle poler i punktene $s = 0, 1, 2, \cdots$ med residue

$$\frac{(-1)^n}{n!} \quad \text{for } s = -n.$$

For gamma funksjonen holder

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \tag{4.1}$$

4.2 Integralrepresentasjon for zetafunksjonen

Vi har sett at Dirichletrekken for zetafunksjonen konvergerer absolutt for $\sigma > 1$. I alle halvplan $\sigma \geq 1 + \delta$ med $\delta > 0$ er denne konvergensen uniform. Dette kan man se av

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

Dette fører videre til at $\zeta(s)$ er analytisk i halvplannet $\sigma > 1$.

Teorem 4.1. *For $\sigma > 1$ har vi integralrepresentasjonen*

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx.$$

For å bevise dette brukes Levis konvergens teorem, og litt om Lebesgue integraler. Dette blir ikke gjennomgått her men kan leses mer om i Apostol: Mathematical Analysis [2].

Bevis. Dette vises først for reelle s, og deretter for komplekse s ved å bruke analytisk fortsettelse. La $x = (n+1)t$, der $n \geq 0$, dette gir

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx = (n+1)^s \int_0^\infty e^{-(n+1)t}t^{s-1}\,dt,$$

det vil si

$$(n+1)^{-s}\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-nt}e^{-t}t^{s-1}\,dt.$$

Ved å summere over alle $n \geq 0$ gir dette

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-nt}e^{-t}t^{s-1}\,dt.$$

Rekken til høyre er konvergent for $\sigma > 1$. Ved å se på integralet som et Lebesgue integral, og se at integranden er ikkenegativ kan man bruke Levis konvergens teorem, som sier at

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-nt}e^{-t}t^{s-1}$$

konvergerer nesten overalt til en funksjon som er Lebesgue integrerbar på intervallet $[0,\infty)$, og at vi kan bytte plass på integralet og summen. Dermed har vi

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-nt}e^{-t}t^{s-1}\,dt = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-nt}e^{-t}t^{s-1}\,dt$$

For $t > 0$ har vi $0 < e^{-t} < 1$ og dermed har vi en geometrisk rekke der summen blir

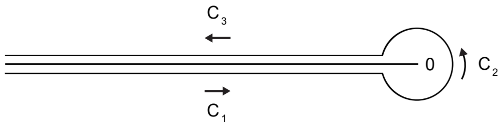
$$\sum_{n=0}^\infty e^{-nt} = \frac{1}{1-e^{-t}}$$

Dermed har vi

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-nt}e^{-t}t^{s-1} = \frac{e^{-t}t^{s-1}}{1-e^{-t}}$$

nesten overalt på $[0,\infty)$ og dermed har vi

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}t^{s-1}}{1-e^{-t}}\,dt$$



Figur 4.1: Konturen C

for reelle $s > 1$. For å utvide dette til alle s med $\sigma > 1$ må det vises at dette er analytisk, fra før vet vi at både $\zeta(s)$ og $\Gamma(s)$ er analytiske. For å vise at integralet på høyre side er analytisk, vil vi vise at integralet konvergerer uniformt på alle striper $1 + \delta \leq \sigma \leq c$, der $c > 1$ og $\delta > 0$. På en slik stripe har vi

$$\int_0^\infty \left|\frac{e^{-t}t^{s-1}}{1-e^{-t}}\right| dt \leq \int_0^\infty \frac{e^{-t}t^{\sigma-1}}{1-e^{-t}}\, dt = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right)\frac{e^{-t}t^{\sigma-1}}{1-e^{-t}}\, dt$$

Merk at for $t \geq 0$ er $e^t - 1 \geq t$ og for $0 \leq t \leq 1$ er $t^{\sigma-1} \leq t^\delta$. Dette gir

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}t^{\sigma-1}}{1-e^{-t}}\, dt \leq \int_0^1 \frac{e^0 t^\delta}{e^{-t}-1}\, dt \leq \int_0^1 t^{\delta-1}\, dt = \frac{1}{\delta}.$$

For $t \geq 1$ er $t^{\sigma-1} \leq t^{c-1}$, dette gir

$$\int_1^\infty \frac{e^{-t}t^{\sigma-1}}{1-e^{-t}}\, dt \leq \int_1^\infty \frac{e^{-t}t^{c-1}}{1-e^{-t}}\, dt \leq \Gamma(s)\zeta(s).$$

Det vil si at integralet konvergerer uniformt i alle striper $1 + \delta \leq \sigma \leq c$ der $\delta > 0$, og representerer dermed en analytisk funksjon i alle slike striper og dermed ved analytisk fortsetteles for alle s i halvplanet $\sigma > 1$. □

I det neste teoremet skal vi undersøke et konturintegral. Konturen er som på figur 4.1. C er veien langs C_1, C_2 og C_3. C_2 er veien rundt en sirkel som har radius $c < 2\pi$.

Teorem 4.2. *Funksjonen definert ved konturintegralet*

$$I(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}\, dz$$

er en analytisk i hele s-planet. Videre har vi $\zeta(s) = \Gamma(1-s)I(s)$ *for* $\sigma > 1$.

Bevis. På C_1 er $z^s = r^s e^{-\pi i s}$ og på C_3 er $z^s = r^s e^{\pi i s}$. Integranden er en analytisk funksjon for alle s. For å vise at $I(s)$ er analytisk i hele s-planet må vi vise at integralene langs C_1 og C_3 konvergerer uniformt for alle disker $|s| \leq M$. Langs C_1 har vi, for $r \geq 1$

$$\left|z^{s-1}\right| = r^{\sigma-1}\left|e^{-\pi i(\sigma-1+it)}\right| = r^{\sigma-1}e^{\pi t} \leq r^{M-1}e^{\pi M}$$

siden $|s| \leq M$. Langs C_3 har vi for $r \geq 1$

$$\left|z^{s-1}\right| = r^{\sigma-1}\left|e^{\pi i(\sigma-1+it)}\right| = r^{\sigma-1}e^{-\pi t} \leq r^{M-1}e^{\pi M}.$$

Dermed har vi følgende uttrykk for absoluttverdien av integranden langs både C_1 og C_3 for $r \geq 1$.

$$\left|\frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}\right| \leq \frac{r^{M-1}e^{\pi M}e^{-r}}{1-e^{-r}} = \frac{r^{M-1}e^{\pi M}}{e^{r-1}}.$$

For $r \geq 1$ har vi $e^r - 1 > e^r/2$. Dermed blir integranden bundet av $Ar^{M-1}e^{-r}$, der $A = e^{\pi M}/2$ det vil si A er ikke avhengig av r. Siden integralet

$$\int_c^\infty r^{M-1}e^{-r}\,dr,$$

konvergerer når $c > 0$, konvergerer integralene langs C_1 og C_3 uniformt på alle kompakte disker $|s| \leq M$. Dermed er $I(s)$ analytisk på hele s-planet.

For å vise sammenhengen mellom zetafunksjonen og $I(s)$ skriver vi

$$2\pi i I(s) = \Big(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}\Big) z^{s-1}g(z)\,dz,$$

der

$$g(z) = \frac{e^z}{1-e^z}.$$

På C_1 og C_3 har vi $g(z) = g(-r)$, og på C_2 kan vi skrive $z = ce^{i\theta}$, der $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Dermed blir

$$\begin{aligned}2\pi i I(s) &= \int_\infty^c r^{s-1}e^{-\pi is}g(-r)\,dr + i\int_{-\pi}^{\pi} c^{s-1}e^{(s-1)i\theta}ce^{i\theta}g(ce^{i\theta})\,d\theta \\ &+ \int_c^\infty r^{s-1}e^{\pi is}g(-r)\,dr \\ &= 2i\sin(\pi s)\int_c^\infty r^{s-1}g(-r)\,dr + ic^s\int_{-\pi}^{\pi} e^{is\theta}g(ce^{i\theta})\,d\theta.\end{aligned}$$

Vi deler på $2i$ og forenkler uttrykket ved å gi intergralleddene navnene $I_1(s,c)$ og $I_2(s,c)$

$$\pi I(s) = \sin(\pi s)I_1(s,c) + I_2(s,c).$$

Videre vil vi undersøke disse uttrykkene når $c \to 0$. Ved å bruke teorem 4.1 får vi

$$\lim_{c\to 0} I_1(s,c) = \int_0^\infty \frac{r^{s-1}e^{-r}}{1-e^{-r}}\,dr = \Gamma(s)\zeta(s)$$

hvis $\sigma > 1$. Videre ser vi på $I_2(s,c)$ når $c \to 0$. Legg merke til at $g(z)$ er har en førsteordens pol i $z = 0$, men ellers er analytisk for $|z| < 2\pi$. Dermed er $zg(z)$ analytisk overalt i disken $|z| < 2\pi$, da er den også bundet. Så det eksisterer en konstant A slik at vi har

$$|g(z)| \leq \frac{A}{|z|},$$

der $|z| < 2\pi$. Dette fører til at

$$|I_2(s,c)| \leq \frac{c^\sigma}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-t\theta}\frac{A}{c}d\theta \leq Ae^{\pi|t|}c^{\sigma-1}.$$

Hvis $\sigma > 1$ og $c \to 0$ får vi $I_2(s,c) \to 0$. Dermed har vi

$$\pi I(s) = \sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s)$$

Ved å kombinere dette med likning 4.1 får vi $\zeta(s) = \Gamma(1-s)I(s)$. □

4.3 Utvidet definisjon av zetafunksjonen

Vi har altså $\zeta(s) = \Gamma(1-s)I(s)$ for $\sigma > 1$. Siden funksjonen $\Gamma(1-s)$ og $I(s)$ er definert for alle s i det komplekse planet bruker vi dette til å definere $\zeta(s)$ for $\sigma \leq 1$.

Definisjon 4.1. *Hvis $\sigma \leq 1$ defineres $\zeta(s)$ ved likningen*

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s)I(s).$$

Denne likningen gir oss den analytiske fortsettelsen av zetafunksjonen slik at den er definert på hele det komplekse planet. Videre har vi følgene teorem for zeta.

Teorem 4.3. *$\zeta(s)$ er analytisk for alle s untatt en enkel pol i $s = 1$ med residue 1.*

Bevis. De eneste s-verdiene som kan gi poler for $\zeta(s)$ er polene i $\Gamma(1-s)$ det vil si for $s = 1, 2, 3, \cdots$. Fra før har vi at $\zeta(s)$ er analytisk i alle disse untatt i $s = 1$. Dermed trenger vi bare å undersøke denne. Dersom s er et heltall, $s = n$, vil integranden i konturintegralet for $I(s)$ ta samme verdier for C_1 og C_3 og integralet langs C_1 og C_3 kanselerer hverandre. Dermed blir

$$I(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{z^{n-1}e^z}{1-e^z}\,dz = \underset{z=0}{Res}\,\frac{z^{n-1}e^z}{1-e^z}$$

Dermed gir $s = 1$

$$I(1) = \underset{z=0}{Res}\,\frac{e^z}{1-e^z} = \lim_{z\to 0}\frac{ze^z}{1-e^z} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{1-e^z} = \lim_{z\to 0}\frac{-1}{e^z} = -1$$

Ved å bruke dette regnes residuen av $\zeta(s)$ i $s = 1$

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = -\lim_{s\to 1}(1-s)\Gamma(1-s)I(s) = -I(1)\lim_{s\to 1}\Gamma(2-s) = \Gamma(1) = 1.$$

Det vil si $\zeta(s)$ har en enkel pol i $s = 1$. □

Videre bevises en formel for zetafunksjonen ved å bruke Eulers summasjonsformel.

Teorem 4.4. *For et hvilket som helst heltall $N \geq 1$ og $\sigma > 0$ har vi*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{s+1}}dt. \tag{4.2}$$

Bevis. Teoremet vises først for $\sigma > 1$ ved å bruker Eulers summasjonsformel med $f(t) = \frac{1}{t^s}$ og heltall x og y slik at $0 < y < x$. Dette gir

$$\sum_{y<n\leq x} \frac{1}{n^s} = \int_y^x \frac{1}{t^s} dt - s \int_y^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt.$$

La $y = N$ og $x \to \infty$:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_N^{\infty} \frac{1}{t^s} dt - s \int_N^{\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt. \tag{4.3}$$

Ved å bruke

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

får vi

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \int_N^{\infty} \frac{1}{t^s} dt - s \int_N^{\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_N^{\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt.
\end{aligned}$$

Nå er teoremet bevis for $\sigma > 1$. Dersom $\sigma \geq \delta > 0$ så er integtalet dominert av

$$\int_N^{\infty} \frac{1}{t^{\delta+1}} dt.$$

Så for $\sigma \geq \delta$ konvergerer integralet uniformt. Dette fører fil at integralet representerer en analytisk funksjon i halvplanet $\sigma > 0$. Ved analytisk fortsettelse holder teoremet for $\sigma > 0$. $\square$

Kapittel 5

Bevis for primtallsteoremet

I dette kapittelet bevises primtallsteoremet. Planen i beviset er først å uttrykke en ekvivalent påstand til $\psi(x) \sim x$ når $x \to \infty$, som dermed også er ekvivalent med primtallsteoremet. Denne påstanden handler om funksjonen $\psi_1(x)$, som vi videre uttrykker som et konturintegral der vi har zetafunksjonen i integranden. Det vises at vi kan undersøke integralet langs linja $\sigma = 1$, for å vise dette trenger vi å undersøke $\zeta(s)$ på linja $\sigma = 1$. Til slutt brukes Riemann-Lebesgue lemma, som er bevist i Appendix, til å bevise påstanden som er ekvivalent med primtallsteoremet holder.

5.1 $\psi(x)$ og $\psi_1(x)$

Vi definerer $\psi_1(x) = \int_1^x \psi(x)\,dt$. I dette delkapittelet vil vi finne et annet uttrykk for $\psi_1(x)$ og vise at

$$\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2 \implies \psi(x) \sim x$$

Lemma 5.1. *For en hvilken som helst aritmetisk funksjon $a(n)$, der $A(x) = \sum_{n\leq x} a(n)$ og $A(x) = 0$ for $x < 1$, så gjelder*

$$\sum_{n=1}^{x}(x-n)a(n) = \int_1^x A(t)\,dt.$$

Bevis. For å vise dette tar vi utgangspunkt i Abels identitet, teorem 2.4, med $y < 1$ slik at vi har $A(y) = 0$. Itillegg lar vi $f(t) = t$ slik at f' er kontinuerlig

$$\sum_{n=1}^{x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'\,dt = x\sum_{n=1}^{x} a(n) - \int_1^x A(t)\,dt.$$

Dermed har vi

$$\sum_{n=1}^{x}(x-n)a(n) = \int_1^x A(t)\,dt,$$

og lemmaet er bevist. □

Vi kan nå finne et uttrykk for $\psi_1(x)$. La $a(n) = \Lambda(n)$ i lemmaet, dette valget gir $A(x) = \psi(x)$ og siden $\psi(x) = 0$ når $x < 1$ har vi

$$\sum_{n=1}^{x}(x-n)\Lambda(n) = \int_1^x \psi(t)\,dt = \psi_1(x) \tag{5.1}$$

Teorem 5.1.

$$\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2 \implies \psi(x) \sim x$$

Bevis. Ved å anta at den asymptotiske formelen

$$\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2 \quad \text{når } x \to \infty$$

stemmer. Skal vi finne verdien av $\frac{\psi(x)}{x}$. Vi begynner med å finne

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}.$$

Fra før har vi at

$$\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) \quad \text{og} \quad \psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)\,dt,$$

og at $\Lambda(n) \geq 0$ for alle n. Dermed er $\psi(x)$ en stigende funksjon. Vi velger en $\alpha > 1$ og får

$$\psi_1(\alpha x) - \psi_1(x) = \int_x^{\alpha x} \psi(t)\,dt \geq \int_x^{\alpha x} \psi(x)\,dt = x\psi(x)(\alpha - 1)$$

$$\implies x\psi(x) \leq \frac{\psi_1(\alpha x) - \psi_1(x)}{\alpha - 1} \implies \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{\psi_1(\alpha x)}{(\alpha x)^2}\alpha^2 - \frac{\psi_1(x)}{x^2}\right)$$

Nå bruker vi antagelsen $\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2$ når $x \to \infty$, og lar α være fiksert. Dette gir

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha - 1}$$

Til slutt lar vi $\alpha \to 1^+$

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{1}{2} \cdot \lim_{\alpha\to 1^+} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha - 1}.$$

Dette er et 0 over 0 uttrykk, ved å bruke L'Hôpitals regel får vi

$$\lim_{\alpha\to 1^+} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha - 1} = \lim_{\alpha\to 1^+} \frac{2\alpha}{1} = 2.$$

Dermed har vi

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Videre vil vi finne
$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}.$$
Metoden er liknende. Vi lar $0 < \beta < 1$ og får
$$\psi_1(x) - \psi_1(\beta x) = \int_{\beta x}^{x} \psi(t)\,dt \leq \int_{\beta x}^{x} \psi(x)\,dt = x\psi(x)(1-\beta)$$
Dermed har vi
$$x\psi(x) \geq \frac{1}{1-\beta}(\psi_1(x) - \psi_1(\beta x)) \implies \frac{\psi(x)}{x} \geq \frac{1}{1-\beta}\Big(\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \beta^2\frac{\psi_1(\alpha x)}{(\alpha x)^2}\Big)$$
Ved å bruke antagelsen og la β være fiksert får vi
$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq \frac{1}{1-\beta}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta^2\Big) = \frac{1}{2}\frac{1-\beta^2}{1-\beta}$$
Nå lar vi $\beta \to 1^-$, videre bruker vi igjen L'Hôpitals regel og får
$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq \frac{1}{2}\lim_{\beta\to 1^-} \frac{1-\beta^2}{1-\beta} = \frac{1}{2}\lim_{\beta\to 1^-} \frac{-2\beta}{-1} = \frac{1}{2}2 = 1$$
Nå har vi
$$1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq 1$$
Dermed må
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$
dette er ekvivalen med det påstanden i teoremet. □

Med dette teoremet og videre ekvivalens til primtallsteoremet trenger vi å vise at $\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2$ når $x \to \infty$ for å bevise primtallsteoremet. Dette skal vi gjøre. Vi begynner med å uttrykke $\frac{\psi_1(x)}{x^2}$ som et konturintegral.

5.2 $\frac{\psi_1(x)}{x^2}$ uttrykt som et konturintegral

Vi vil trenge følgende resultater som gjelder for $c > 0$ og $u > 0$:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{u^{-z}}{z(z+1)}\,dz = \begin{cases} 1-u & \text{hvis } 0 < u \leq 1, \\ 0 & \text{hvis } u > 1 \end{cases}$$
og
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{u^{-z}}{z(z+1)(z+2)}\,dz = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-u)^2 & \text{hvis } 0 < u \leq 1, \\ 0 & \text{hvis } u > 1 \end{cases}$$
Disse resultatene kan man vise ved residuregning, men de bevises ikke her.

Teorem 5.2. *Hvis $c > 1$ og $x \geq 1$ har vi*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \Big(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \Big) \, ds$$

Bevis. Fra likning 5.1 følger

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n=1}^{x} \Big(1 - \frac{n}{x}\Big) \Lambda(n).$$

Fra resultatet over har vi med $u = n/x$, der $n \leq x$ har vi

$$1 - \frac{n}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} \, ds.$$

Ved sette inn dette får vi

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} \, ds \cdot \Lambda(n)$$

Siden integralet $= 0$ for $u > 1$ kan vi summere over alle n-verdier, dette gir

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} \, ds.$$

Nå ønsker vi å bytte om rekkefølgen på summen og integralet, for å vise at vi kan gjøre dette definerer vi $f_n(s)$ slik at

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} f_n(s) \, ds,$$

det vil si

$$f_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)}.$$

Dersom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} |f_n(s)| \, ds \tag{5.2}$$

er konvergent, kan vi nå bytte om rekkefølgen på summen og integralet. For alle delsummer har vi

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^c}{2\pi |s||s+1|} \, ds = \sum_{n=1}^{N} \frac{\Lambda(n)}{n^c} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^c}{2\pi |s||s+1|} \, ds \leq A \sum_{n=1}^{N} \frac{\Lambda(n)}{n^c}$$

Her konvergerer integralet, vi har kalt verdien integralet konvergerer mot A. Dermed konvergerer summen i likning 5.2, og man kan endre rekkefølgen på summen og integralet.

Dette gir

$$\begin{aligned}\frac{\psi_1(x)}{x} &= \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \Big(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \Big)\, ds\end{aligned}$$

ved å bruke likning 3.4. Til slutt dividerer man med x og teoremet er bevist. □

Teorem 5.3. *Hvis $c > 1$ og $x \geq 1$ har vi*

$$\frac{\psi(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{x}\Big)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s)\, ds,$$

her er

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)} \Big(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \Big).$$

For $k = 2$ kan vi kreve at $c > 1$ og derfor bytte ut s med $s - 1$. Dette gir

$$\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{x}\Big)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{(s-1)s(s+1)}\, ds.$$

Ved å trekke fra dette i teorem 5.2 får vi

$$\begin{aligned}\frac{\psi(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{x}\Big)^2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \Big(\frac{1}{s-1} \Big)\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} \Big(\frac{1}{s(s+1)} \Big(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \Big)\Big)\, ds\end{aligned}$$

Her ser vi at den ytre parantesen i integranden er h(s).

5.3 Zetafunksjonen på linja $\sigma = 1$

Teorem 5.4. *For alle $A > 0$ eksisterer en konstant M avhengig av A slik at $|\zeta(s)| \leq M \log t$ og $|\zeta'(s)| \leq M \log^2 t$ for alle s med $\sigma \geq \frac{1}{2}$ og $t \geq e$ og $\sigma > 1 - \frac{A}{\log t}$.*

Bevis. Det kan vises at $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ og at $|\zeta'(2)| < \infty$ derfor holder teoremet for $\sigma > 2$. For $\frac{1}{2} \leq \sigma < 2$ og $t \geq e$ har vi sammenhengene

$$|s| \leq \sigma + t \leq 2 + t < 2t$$

og

$$|s - 1| \geq |1 + t - 1| = t \implies \frac{1}{|s-1|} \leq \frac{1}{t}$$

Ved å bruke dette i teorem 4.4 får vi

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{n^{1-\sigma}}{t} + 2t \int_N^\infty \frac{1}{x^{\sigma+1}}\, dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{n^{1-\sigma}}{t} + \frac{2t}{\sigma N^\sigma}.$$

Videre lar vi $N = \lfloor t \rfloor$. Dermed får vi $N \leq t < N+1$ og $\log n < \log t$ når $n \leq N$.

$$\frac{1}{n^\sigma} = \frac{n^{1-\sigma}}{n} = \frac{1}{n} e^{(1-\sigma)\log n} < \frac{1}{n} e^{A \frac{\log n}{\log t}} \leq \frac{1}{n} e^A = O\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

Her har vi brukt $1 - \sigma < \frac{A}{\log t}$ som følger av betingelsen til σ. Valget av N fører til at de at de andre leddene blir $O(1)$. Dermed har vi

$$|\zeta(s)| = O\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\Big) + O(1) = O(\log t).$$

Det vil si at $|\zeta(s)| \leq M \log t$ for en konstant M. For å finne ulikheten med $\zeta'(s)$ starter vi med å derviere uttrykket for $\zeta(s)$ i teorem 4.4 og får

$$\begin{aligned}\zeta'(s) = &-\sum_{n=1} N \frac{\log n}{n^s} - \frac{N^{1-s}\log N}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{(s-1)^2} \\ &+ s\int_N^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor \log x}{x^{s+1}}\, dx - \int_N^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\, dx\end{aligned}$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned}|\zeta'(s)| &\leq \sum_{n=1} N \frac{\log n}{n^\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}\log N}{t} + \frac{N^{1-\sigma}}{t^2} + 2t\int_N^\infty \frac{\log x}{x^{\sigma+1}}\, dx + \int_N^\infty \frac{1}{x^{\sigma+1}}\, dx \\ &\leq \sum_{n=1} N \frac{\log n}{n^\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}\log N}{t} + \frac{N^{1-\sigma}}{t^2} + \frac{2t}{(N+1)^2 N^\sigma} + \frac{2t \log N}{(N+1)N^\sigma}\end{aligned}$$

Her er det bare den første summen som ikke er $O(1)$. Fra eksempelet på Eulers summasjonsformel får vi at

$$|\zeta'(s)| \leq O(\log^2 t)$$

Dette betyr at $|\zeta'(s)| \leq M \log^2 t$ for en konstant M. □

Lemma 5.2. $3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geq 0$

Ved å bruke den trigonometriske identiteten $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, får vi

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 3 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0.$$

Nå kan vi bevise det neste teoremet.

Teorem 5.5. *Hvis $\sigma > 1$ har vi*

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma + it)|^4|\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1$$

Bevis. Vi har ifølge likning 3.5 identiteten $\zeta(s) = e^{G(s)}$ for $\sigma > 1$ der

$$G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^s}.$$

Legg merke til at

$$\frac{\Lambda(n)}{\log n} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{hvis } n = p^m \text{ der p er et primtall og } m \geq 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Dermed får vi sammenhengen

$$G(s) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}} = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-imt \log p}}{mp^{m\sigma}}.$$

Dette gir

$$\zeta(s) = e^{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mt \log p}{mp^{m\sigma}}}.$$

Ved å regne ut $\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma + it)|^4|\zeta(\sigma + 2it)|$ blir eksponenten

$$\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 + 4\cos mt \log p + \cos 2mt \log p}{mp^{m\sigma}},$$

men i følge lemmaet er telleren i summen alltid ≥ 0, så ekponenten er alltid ≥ 0 og derfor holder teoremet. □

Teorem 5.6. $\zeta(1 + it) \neq 0$ *for alle reelle tall t.*

Bevis. For $t = 0$ har zetafunksjonen en pol, det vil si den er ikke lik 0. For å bevise dette for $t \neq 0$ brukes sammenhengen fra forrige teorem, den gir

$$((\sigma - 1)\zeta(\sigma))^3 \left| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} \right|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq \frac{1}{\sigma - 1} \tag{5.3}$$

Dette gjelder for $\sigma > 1$. La videre $\sigma \to 1^+$. Dette gir $((\sigma - 1)\zeta(\sigma))^3 \to 1$ siden $\zeta(s)$ har residue 1 i polen $s = 1$. $|\zeta(\sigma + 2it)| \to |\zeta(1 + 2it)|$. Anta at det eksisterer en $t_0 \neq 0$ slik at $\zeta(1 + it_0) = 0$. Dette gir

$$\lim_{\sigma \to 1+} \left| \frac{\zeta(\sigma - it_0)}{\sigma - 1} \right|^4 = \lim_{\sigma \to 1+} \left| \frac{\zeta(\sigma + it_0) - \zeta(1 + it_0)}{\sigma - 1} \right|^4 = |\zeta'(1 + it_0)|^4.$$

Dermed reduseres venstre side i likning 5.3 med $t = t_0$ til

$$|\zeta'(1 + it_0)|^4 |\zeta(1 + 2it_0)|$$

Ifølge teorem går dette mot en endelig grense mens $\frac{1}{\sigma - 1} \to \infty$ for $\sigma \to 1+$. Dette er en motsigelse. Dermed kan det ikke finnes noen t slik at $\zeta(1 + it) = 0$ □

Teorem 5.7. *Det eksisterer en konstant $M > 0$ slik at*

$$\Big|\frac{1}{\zeta(s)}\Big| < M\log^7 t \quad \textit{og} \; \Big|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\Big| < M\log^9 t$$

når $\sigma \geq 1$ og $t \geq t_0$, der t_0 er en konstant som er $\geq e$.

Bevis. Ved å bevise den første av disse ulikhetene følger den andre umiddelbart fra teorem 5.4. For $\sigma \geq 2$ holder teoremet siden vi har fra likning 3.1 at

$$\Big|\frac{1}{\zeta(s)}\Big| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq \zeta(2).$$

Dermed gir teorem 5.4 at det holder for den andre ulikheten også når $\sigma \geq 2$. Videre anta at $1 \leq \sigma \leq 2$ og $t \geq e$. For disse σ-verdiene er $(\sigma-1)\zeta(\sigma)$ bundet. Det vil si at det eksisterer en konstant M slik at $(\sigma-1)\zeta(\sigma) \leq M$. Dermed er

$$\zeta(\sigma) \leq \frac{M}{\sigma-1}$$

for $1 < \sigma \leq 2$. Videre gir teorem 5.4 at $\zeta(\sigma+2it) = O(\log t)$. Dermed får vi fra teorem 5.5 at

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|} \leq \frac{M^{\frac{3}{4}}(\log t)^{\frac{1}{4}}}{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}$$

Så det finnes en konstant $B > 0$ slik at

$$|\zeta(\sigma+it)| > \frac{B(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}{(\log t)^{\frac{1}{4}}}, \tag{5.4}$$

for $1 < \sigma \leq 2$ og $t \geq e$, det er opplagt at dette også holder for $\sigma = 1$. Videre la $1 < \alpha < 2$, dersom $1 \leq \sigma \leq \alpha$ og $t \geq e$ så får vi ved å bruke teorem 5.4

$$|\zeta(\sigma+it) - \zeta(\alpha+it)| \leq \int_{\sigma}^{\alpha}|\zeta'(u+it)|\,du \leq (\alpha-\sigma)M\log^2 t \leq (\alpha-1)M\log^2 t.$$

Videre gir trekantulikheten

$$\begin{aligned}|\zeta(\sigma+it)| &\geq |\zeta(\alpha+it)| - |\zeta(\sigma+it)-\zeta(\alpha+it)| \\ &\geq |\zeta(\alpha+it)| - (\alpha-1)M\log^2 t \\ &\geq \frac{B(\alpha-1)^{\frac{3}{4}}}{(\log t)^{\frac{1}{4}}} - (\alpha-1)M\log^2 t\end{aligned}$$

Dette holder for $1 \leq \sigma \leq \alpha$ og siden $(\sigma-1)^{3/4} \geq (\alpha-1)^{3/4}$ gir 5.4 at det også holder for $\alpha \leq \sigma \leq 2$. Videre lar vi α avhenge av t, og gjøre det første leddet dobbelt så stort som det andre ved å la

$$\alpha = 1 + \Big(\frac{B}{2M}\Big)^4 \frac{1}{\log^9 t}.$$

Her er $1 < \alpha < 2$ for $t \geq t_0$. Dermed har vi for $1 \leq \sigma \leq 2$ og $t \geq t_0$

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq (\alpha - 1)M \log^2 t = \frac{M'}{\log^7 t}$$

Dermed er den første ulikheten i teoremet bevist, ved å bruke teorem 5.4 ser vi at den andre ulikheten også holder.

□

5.4 Fullføring av primtallsteoremet

Her vises det at funksjonen

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

er analytisk i $s = 1$. Deretter fullføres bevise av primtallsteoremet. Først trengs et lemma.

Lemma 5.3. *Hvis funksjonen $f(s)$ har en pol av orden k i $s = \alpha$ så har $f'(s)/f(s)$ en første ordens pol i $s = \alpha$ med residue $-k$.*

Bevis. Vi kan skrive $f(s)$ på formen

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s-\alpha)^k},$$

der $g(s)$ er analytisk i α og $g(\alpha) \neq 0$. Videre deriveres $f(s)$ i nærhetem av α det gir

$$f'(s) = \frac{g'(s)}{(s-\alpha)^k} - \frac{kg(s)}{(s-\alpha)^{k+1}} = \frac{g(s)}{(s-\alpha)^k}\Big(\frac{-k}{s-\alpha} + \frac{g'(s)}{g(s)}\Big).$$

Dermed får vi

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{-k}{s-\alpha} + \frac{g'(s)}{g(s)}$$

Siden $g(s)$ er analytisk i $s = \alpha$ er også $g'(s)/g(s)$ analytisk $s = \alpha$, og derfor er lemmaet bevist. □

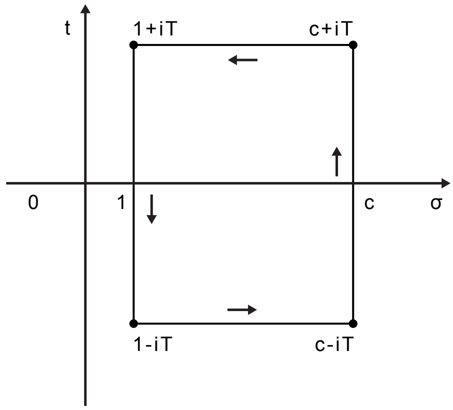
Teorem 5.8. *Funksjonen*

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

er analytisk i $s = 1$.

Bevis. Fra før vet vi at $\zeta(s)$ har en førsteordens pol i $s = 1$, dermed gir lemmaet at $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ har en førsteordens pol i $s = 1$ med residue 1. Siden $1/(s-1)$ også har en førsteordens pol der med residue 1 er differansen analytisk i $s = 1$. □

Videre vises det at teorem 5.3 også gjelder for $c = 1$.



Figur 5.1: Rektangelet R

Teorem 5.9. *For $x \geq 1$ har vi*

$$\frac{\psi(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{x}\Big)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} h(1+it)e^{it\log x}\,dt,$$

der $h(1+it)$ er som i teorem 5.3.

Bevis. Vi starter med å undersøke integralet

$$\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1}h(s)\,ds,$$

i rektangelet, R, vist på figur 5.1. Siden integranden er analytisk i hele R, er integralet rundt R lik 0. Videre vises det at integralet langs de horisontale linjene $\to 0$ når $T \to \infty$. Integranden har samme absoluttverdi for like absoluttverdier av t. Vi trenger altså bare å undersøke for $t = T$. Vi har

$$\Big|\frac{1}{s(s+1)}\Big| \leq \frac{1}{T^2}$$

og

$$\Big|\frac{1}{s(s+1)(s-1)}\Big| \leq \frac{1}{T^2}.$$

Fra teorem 5.7 har vi også at det eksisterer en konstant M slik at

$$\Big|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\Big| \leq M\log^9 t,$$

for $\sigma \geq 1$ og $t \geq t_0$. For $T \geq t_0$ gir dette

$$|h(s)| \leq \frac{M\log^9 T}{T^2}$$

Dermed har vi

$$\Big|\int_{1+iT}^{c+iT} x^{s-1}h(s)\,ds\Big| \leq \int_1^c x^{c-1}\frac{M\log^9 T}{T^2}\,d\sigma = Mx^{c-1}\frac{\log^9 T}{T^2}(c-1).$$

Dette $\to 0$ når $T \to \infty$. Dermed har vi

$$\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1}h(s)\,ds = \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1}h(s)\,ds$$

For $\sigma = 1$ skriver vi $s = 1 + it$, dette gir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1}h(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty i}^{\infty i} h(1+it)e^{it\log x}\,dt$$

Dermed er teoremet bevist. □

Videre vil vi vise at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|\,dt$$

konvergerer. Dersom dette stemmer kan vi bruke Riemann-Lebesgue lemma[1] til å vise at integralet $\to 0$ når $x \to \infty$.

Teorem 5.10. *Integralet*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|\,dt,$$

konvergerer.

Bevis. Vi kan dele opp integralet i 3 deler

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|\,dt = \Big(\int_{-\infty}^{-t_0} + \int_{-t_0}^{t_0} + \int_{t_0}^{\infty}\Big)|h(1+it)|\,dt$$

Integralet fra $-t_0$ til t_0 er endelig, siden t_0 er endelig og $|h(1+it)|$ ikke har noen poler. For integralet fra t_0 til ∞ har vi

$$|h(1+it)| \leq \frac{M\log^9 t}{t^2}$$

som fører til at integralet konvergerer. På samme måte har vi at integralet fra $-\infty$ til $-t_0$ konvergerer. Dermed konvergerer integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|\,dt.$$

□

[1] Se Appendix

Siden $\log x \to \infty$ når $x \to \infty$ gir Riemann-Lebesgue lemma nå at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} h(1+it)e^{it\log x}\,dt \to 0 \quad \text{når } x \to \infty.$$

Dette fører videre til at

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \to 0$$

når $x \to \infty$. Med andre ord $\psi_1(x) \sim x^2/2$ når $x \to \infty$. Dette er ekvivalent med $\psi(x) \sim x$ når $x \to \infty$ som igjen er ekvivalent med primtallsteoremet.

Bibliografi

[1] T. M. Apostol (1976) Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag.
[2] T. M. Apostol (1974) Mathematical Analysis. Addison-Wesley.
[3] A. E. Ingham (1932) The Distribution of Primes. Cambridge University Press.
[4] T. W. Gamelin (2001) Complex Analysis. Springer-Verlag.
[5] E. Stein og R. Shakarchi (2003) Complex Analysis. Princeton University Press.

Appendix

Riemann-Lebesgue lemma
La f være en kontinuerlig funksjon og la integralet over f konvergere absolutt. Da har vi

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt \to 0 \quad \text{når } |\omega| \to \infty.$$

Bevis. Anta at $|\omega| >> 1$ og la $\tau = t + \frac{\pi}{\omega}$. Da får vi

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \frac{\pi}{\omega}) e^{-i\omega t} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega(\tau - \frac{\pi}{\omega})} \, d\tau = e^{i\pi} \hat{f}(\omega) = -\hat{f}(\omega)$$

Dermed har vi

$$2\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f(t + \frac{\pi}{\omega})) e^{-i\omega t} \, dt.$$

Videre kan vi ta absoluttverdi og dele opp integralet, her lar vi $L >> 1$ og få

$$|2\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} \left| f(t + \frac{\pi}{\omega}) - f(t) \right| \cdot 1 \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq L-1} |f(t)| \, dt$$

Grunnen til at grensen er $|t| \geq L - 1$ er for at $|t + \frac{\pi}{\omega}| \geq L$. Siden integralet konvergerer absolutt kan vi gitt $\epsilon > 0$ fiksere en L_ϵ så stor at

$$\frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq L_\epsilon - 1} |f(t)| \, dt < \epsilon$$

Siden f er uniformt kontinuerlig på intervallet $[-L - 1, L + 1]$ eksisterer en c_ϵ slik at

$$\max_{|t| \leq L_\epsilon} \left| f(t + \frac{\pi}{\omega}) - f(t) \right| < \frac{\epsilon}{\pi 2 L_\epsilon}$$

når $|\omega| > c_\epsilon$. Dermed har vi

$$|2\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} \left| f(t + \frac{\pi}{\omega}) - f(t) \right| \cdot 1 \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq L-1} |f(t)| \, dt < \frac{\pi 2 L_\epsilon \epsilon}{\pi 2 L_\epsilon} + \epsilon = 2\epsilon,$$

når $|\omega| > c_\epsilon$. Dermed er Riemann-Lebesgue lemmaet bevist. $\square$