



## Om Buen

Form, Optimering og Dynamikk

**Karl Kristian Brustad**

Master i matematikk

Innlevert: Juni 2012

Hovedveileder: Lars Peter Lindqvist, MATH

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Institutt for matematiske fag



---

Karl K. Brustad  
Om Buen: Form, Optimering og Dynamikk

---

FROSTA 2012





# Sammendrag

Denne masteroppgaven i analyse undersøker noen interessante matematiske problemer tilknyttet buemaking og bueskyting. Dette inkluderer temaer som form og optimering av en bue. Vi vil beskrive en bues form og hvordan denne formen avhenger av strenglengden, trekkklengden og stivhetsfordelingen langs buen. Deretter finner vi uttrykk for buens elastiske energi og forsøker å optimere buens effektivitet med hensyn på de samme variablene. Dette leder til både diskrete og kontinuerlige optimeringsproblemer der begrensningene, blant annet, er gitt av bueskytterens armlengde og armstyrke.

Vi introduserer også den elastiske pendelen som et redskap for å undersøke den elastiske stangens dynamiske egenskaper. Pendelens bevegelser er styrt av stangens elastiske potensial og vi gir noen numeriske løsninger av denne bevegelsen. I tillegg forsøker vi å finne og klassifisere bifurkasjonslinjene i konfigurasjonsrommet.

Tilslutt inkluderes to kapitler om henholdsvis elliptiske funksjoner og en utledning, fra generell lineær elastisitetsteori, av forholdet mellom en stangs krumning og kreftene som virker på stangen.



# Abstract

This thesis in analysis examines some interesting mathematical problems in connections with archery. This includes subjects such as finding the shape, and how to optimize a bow. We will describe the bow's shape and how it depends on the length of the string, the pulling length and the stiffness distribution along the bow. Next, will give an expression of the elastic energy in the bow and try to optimize the bow's efficiency with respect to the same variables. This leads to both discrete and continuous optimization problems where the constraints are given, among other things, by the strength and arm length of the archer.

We introduce the concept of the elastic pendulum as a tool to examine the dynamic properties of an elastic rod. The motion of the pendulum is govern by the elastic potential of the rod and we give some numerical solutions showing this motion. We also try to find and classify the bifurcation lines in the configuration space.

Finally, two chapters are included which respectively gives a brief discussion on elliptic functions and a derivation, from general linear elastic theory, of the relation between the curvature of a rod and the forces acting on it.





# Innhold

<b>Sammendrag</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Introduksjon</b>	<b>ix</b>
<b>1 Formen av en bue med konstant stivhet</b>	<b>1</b>
1.1 Innledning . . . . .	1
1.2 Formen av en spennet bue . . . . .	2
1.3 Strenglengdefunksjonen $\gamma$ . . . . .	6
1.4 Formen av en trukket bue . . . . .	7
<b>2 Optimering av buer med konstant stivhet</b>	<b>13</b>
2.1 Innledning . . . . .	13
2.2 Kraftfunksjonen ved konstant stivhet . . . . .	13
2.3 Elastisk energi i buen . . . . .	17
2.4 Løsning av problem 1 . . . . .	24
2.5 Omformulering av problem . . . . .	28
2.6 Numerisk Løsning . . . . .	31
<b>3 Bue med varierende stivhet</b>	<b>35</b>
3.1 Innledning . . . . .	35
3.2 Formen av en spennet bue . . . . .	35
3.2.1 Stivhetsfordeling som gir en sirkelsektorformet bue . . . . .	37
3.3 Formen av en trukket bue . . . . .	38
3.3.1 Stivhetsfordeling som gir en sirkelsektorformet bue . . . . .	39
3.4 Optimering av buer med varierende stivhet. . . . .	39
3.5 Andre buemodeller . . . . .	43
3.5.1 Stiv bue med enkelt lineært bøyemoment . . . . .	43
3.5.2 $n$ -leddet bue . . . . .	47
3.6 Optimering via $n$ -leddet bue . . . . .	51

<b>4</b>	<b>Dynamikk: den elastiske pendel</b>	<b>55</b>
4.1	Innledning . . . . .	55
4.2	Oppsett og antagelser. . . . .	55
4.3	Modellering av den elastiske pendel. . . . .	57
4.4	Numerisk løsning når stangen er uten vendepunkter. . . . .	65
4.5	Elastisk stang med vendepunkter . . . . .	70
4.6	Bifurkasjon for den elastiske pendel. . . . .	77
<b>A</b>	<b>Elliptiske funksjoner og integral</b>	<b>85</b>
A.1	Jacobis elliptiske funksjoner . . . . .	85
A.2	Elliptiske integral . . . . .	87
A.3	Deriverte av elliptiske integral . . . . .	88
<b>B</b>	<b>Utledning av modell</b>	<b>93</b>
B.1	Innledning . . . . .	93
B.2	Tøyningstensoren $\mathcal{E}$ . . . . .	94
B.3	Spenningstensorene $\tau$ , $\mathcal{T}$ og $\mathcal{S}$ . . . . .	99
	B.3.1 Cauchys Spenningstensor, $\tau$ . . . . .	99
	B.3.2 Momentligningen. . . . .	101
	B.3.3 Piola-Kirchhoff Spenningstensorer, $\mathcal{T}$ og $\mathcal{S}$ . . . . .	102
B.4	Skalering og konklusjon . . . . .	104
	<b>Konklusjoner</b>	<b>109</b>
	<b>Bibliografi</b>	<b>111</b>

# Introduksjon

Buemaking har lange tradisjoner i mange kulturer og er et håndtverk som har blitt utviklet over århundrer. Tradisjonelt har en bues formål vært å være et effektivt våpen innen jakt eller krigføring, men som vi skal se, kan en bue også være opphav til interessante matematiske spørsmål. Det er nettopp dét som er motivasjonen bak denne masteroppgaven. Denne oppgaven omhandler, grovt sett, tre temaer:

- form
- optimering
- dynamikk

og i hele oppgaven blir det gjennomgående antatt at

- buen er lang og tynn slik at den tilnærmet kan beskrives som en kurve og at denne kurven er begrenset til å ligge i planet
- buen er alltid symmetrisk om normalen ved midten av buen
- buen består av et materiale som er *homogent* og *isotrop*. Dvs. et materiale som er likt over alt og har samme egenskaper i alle retninger
- buestrengen er fleksibel, masseløs og uelastisk.

Når buestrengen er festet til endene på buen, sier vi at buen er *spennt*. Og når midten av buen og punktet midt på strengen er trukket fra hverandre, sier vi at buen er *trukket*. *Trekklengden* er avstanden fra midten av buen til midten av strengen, mens den *effektive trekklengden* er trekklengden minus avstanden fra midten av buen til midten av strengen når buen (bare) er spennt.

Vi begynner med å bestemme formen av en bue med konstant stivhet. Dette gjøres ved å benytte en lovmessighet, som utledes i tillegg B, som relaterer buens krumning i hvert punkt med momentet som virker på dette

punktet. Vi vil se at buens form kan beskrives som en kurve uttrykt ved *elliptiske integral* og *elliptiske funksjoner* og en oversikt over disse funksjonene finnes i tillegg A.

Når buen har varierende stivhet, blir selvsagt formen vanskeligere å bestemme og det er ikke mulig å finne løsninger på lukket form unntatt for spesielle stivhetsfordelinger. Derimot vil vi vise at for en *gitt* bueform, så finnes, under moderate forutsetninger, en stivhetsfordeling som gir akkurat denne bueformen og at denne fordelingen kan uttrykkes eksplisitt ved bueformen. Dette er et viktig prinsipp som vi i stor grad benytter oss av i forbindelse med optimeringsproblemene.

En *optimal* bue kan bety mye forskjellig, men vi har konsentrert oss om hvordan man kan maksimere buens *elastiske energi* i trukket posisjon med tanke på begrensningene satt av bueskytterens armlengde og armstyrke. Selv om dette optimeringsproblemet ikke blir fullstendig løst i den generelle situasjonen, gis eksplisitte numeriske løsninger når buen har konstant stivhet og også et diskret formulert skjema som vil finne den optimale stivhetsfordelingen med vilkårlig stor nøyaktighet.

Av respekt for buemaking som et håndtverk, er det viktig å bemerke at vi *ikke* påstår at disse løsningene behøver å være optimale buer i praktisk forstand. For det første, selv om energien i buen er en viktig størrelse da pilens kinetiske energi ikke kan bli større enn denne, er ikke dette den eneste egenskapen en god bue må ha. For det andre er den matematiske buen bare en modell og gjenspeiler ikke virkeligheten eksakt. F.eks er treverk, som buer tradisjonelt er laget av, ikke et isotropt materiale da det har andre egenskaper på tvers av trefibrene enn på langs. Treverk er heller ikke fullstendig elastisk, hvilket vil bety at noe energi vil gå tapt som varme under bøyning. Og kanskje viktigst av alt, så er alle buene i denne masteroppgaven antatt å være *rette* i uspennt tilstand, noe de færreste buetyper, i praksis, er. Det er derfor riktigere å betrakte denne oppgaven som en undersøkelse av noen interessante matematiske problem *inspirert* av buer og bueskyting, enn som et forsøk på å finne den optimale buen.

I kapittel 4 introduseres *den elastiske pendel*. Den direkte forbindelsen til buer er nå brutt og vi vil undersøke noen dynamiske egenskaper til en elastisk stang med konstant stivhet. I motsetning til den velstuderte matematiske pendel som svinger periodisk under påvirkning av tyngdekraften (og ironisk nok beskrives av samme differensialligning som den elastiske stangen bortsett fra at den frie variabelen er tid og ikke buelengde) vil vi nå ikke inkludere gravitasjon og dermed vil bevegelsen av stangen kun være styrt av dens eget *elastiske potensial*. Selve stangen antas å være masseløs med ene enden fiksért. I den frie enden sitter et massepunkt og det er banen til dette massepunktet som vi vil forsøke å finne.

# Kapittel 1

## Formen av en bue med konstant stivhet

### 1.1 Innledning

Når man forbinder endene av en elastisk stang med en streng som er kortere enn stangen, må nødvendigvis stangen endre sin form, fra å være rett, til å bli en buet kurve. Nå finnes det naturligvis en uendelighet av kurver av en gitt lengde som bare har den egenskapen til felles at deres ender er av samme avstand ifra hverandre, men fra erfaring og intuisjon har vi en klar formening om at denne kurven ikke inntar sin form tilfeldig. Det synes altså å være en lovmessighet som bestemmer kurvens form utover det faktum at endene er av en gitt avstand fra hverandre. Denne lovmessigheten kan finnes enten ved å definere et elastisk potensial og deretter variere over alle mulige kurver og velge den som minimerer energien, eller den kan finnes ved å utlede en sammenheng mellom krumningen og kreftene som virker på stangen, direkte fra *lineær elastisitetsteori*.

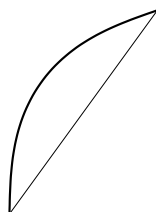
Sistnevnte er mer generell da det elastiske potensialet følger fra denne sammenhengen. Denne Lovmessigheten, som hele denne oppgaven bygger på, blir utledet i tillegg B og lyder som følger:

**Lov 1.** *I et hvert punkt på stangen, er stivheten ganger krumningen lik momentet som virker på dette punktet.*

Strengt tatt, utledes det i tillegg B at krumningen er *proporsjonal* med momentet. Vi *definerer* derfor stivheten til å være denne proporsjonalitetskonstanten.

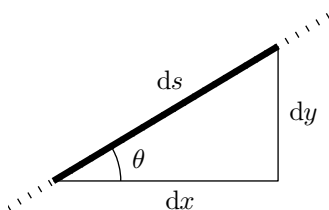
I dette kapittelet vil vi anta at buen er jamstiv og forsøke å finne hvilken form den har; først når buen bare er spennet, og deretter når den er trukket.

## 1.2 Formen av en spennet bue



Figur 1.1: En spennet bue med konstant stivhet.

La oss si vi har en tynn, rett og uniform elastisk stang med lengde  $2L$ . Denne stangen har en bøyestivhet  $\kappa$  med enhet  $\text{N}\cdot\text{m}^2$  som vi antar er konstant langs hele dens lengde. Vi forbinder endene av denne stangen med en ikke-elastisk streng med lengde  $2\gamma L$  og benevner strengkraften med  $T$ . Vi plasserer buen i et koordinatsystem slik at  $(0, 0)$  er midten av buen og slik at strengen ligger i øvre halvplan og er parallell med  $x$ -aksen. Vi parametriserer buen ved buelengden  $s$ , der  $-L \leq s \leq L$ , men ettersom buen er symmetrisk om  $y$ -aksen behøver vi bare å betrakte kurven  $s \mapsto (x(s), y(s))$  for  $s \geq 0$ . Hvis  $\theta(s)$  benevner vinkelen mellom  $x$ -aksen og tangenten ved  $(x(s), y(s))$ , så er krumningen gitt ved den deriverte av  $\theta$  mhp.  $s$  som igjen, ved lovmessigheten ovenfor, er lik  $d \cdot T \cdot \kappa^{-1}$ , der  $d \cdot T$  er momentet om dette punktet.

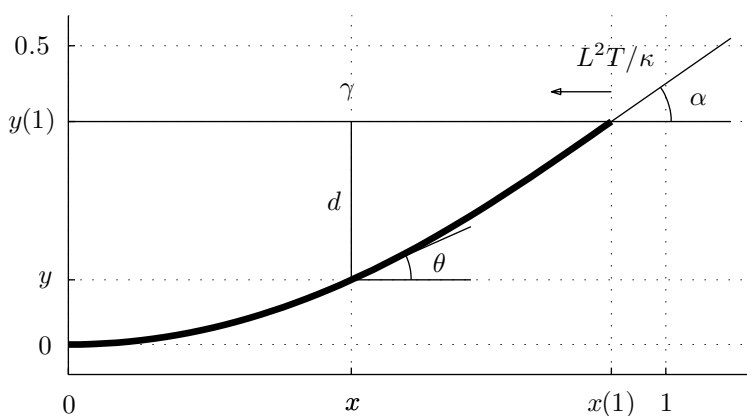


Figur 1.2: Buelengdeparametrisering.

Vi skalerer variablene  $x, y$  og  $s$  med  $L$ , benevner derivasjon mhp.  $s$  med prikk, og oppnår følgende system av differensialligninger:

$$\begin{aligned}
 (1.2.1) \quad & \dot{x} = \cos \theta \\
 (1.2.2) \quad & \dot{y} = \sin \theta \\
 (1.2.3) \quad & \dot{\theta} = \omega^2 (y(1) - y) \\
 (1.2.4) \quad & x(1) = \gamma
 \end{aligned}$$

med initsialbetingelser  $x(0) = y(0) = \theta(0) = 0$ .



Figur 1.3: Høyre halvdel av skalèrt bue.

Vi har at  $\omega^2 = L^2 \frac{T}{\kappa}$  er den dimensjonsløse kraftvariabelen, men vha. den ekstra grensebetingelsen (1.2.4) ønsker vi å uttrykke  $\omega$  ved parameteren  $\gamma$ .

Ligning (1.2.3) gir ved derivering

$$(1.2.5) \quad \ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta.$$

Dette er den velkjente pendelligningen, men det er ikke gitt at  $\theta$  er liten slik at vi kan tilnærme  $\sin \theta$  med  $\theta$ . Vi kan likevel bruke teknikker kjent fra teorien om pendelen til å finne løsninger av (1.2.3). Multiplikasjon av (1.2.5) med  $d\theta$  og integrering gir

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \cos \theta + C &= \int \ddot{\theta} d\theta \\
 &= \int \frac{d\dot{\theta}}{ds} d\theta \\
 &= \int \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} d\theta \\
 &= \int \dot{\theta} d\dot{\theta} \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\theta}^2.
 \end{aligned}$$

#### 4 KAPITTEL 1. FORMEN AV EN BUE MED KONSTANT STIVHET

Da  $\dot{\theta}(1) = 0$  er integrasjonskonstanten  $C$  gitt ved  $C = -\omega^2 \cos \alpha$  der  $\alpha = \theta(1)$ . Dermed kan vi skrive

$$(1.2.6) \quad \dot{\theta} = +\sqrt{2\omega\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = 2\omega\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

der vi har valgt den positive kvadratroten fordi vi ønsker at kurven skal ligge i øvre halvplan. Fordelen med å omskrive til halvvinkler ( $\cos \theta = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$ ) viser seg når vi skal finne en implisitt løsning av ligningen over. Vi innfører variabelskiftet

$$k = \sin \frac{\alpha}{2}$$

og

$$kt = \sin \frac{\theta}{2}.$$

Dette gir  $k \frac{dt}{d\theta} = \frac{dkt}{d\theta} = \frac{1}{2} \cos \theta/2 = \frac{1}{2} \sqrt{1 - k^2 t^2}$ . Eller

$$(1.2.7) \quad d\theta = \frac{2 dt}{\frac{1}{k} \sqrt{1 - k^2 t^2}}$$

som sammen med (1.2.6) gir

$$(1.2.8) \quad \omega ds = \frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{d\theta}{2\sqrt{k^2 - k^2 t^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - k^2 t^2}}.$$

Dermed kan  $s$  kan representeres av  $\theta$  og  $\alpha$  (via  $t$  og  $k$ ) ved det *elliptisk integralet av første type*,  $F(t, k)$  :

$$(1.2.9) \quad \omega s = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - k^2 t^2}} = F(t, k).$$

Legg merke til at når  $s$  er 1, så er  $\theta = \alpha$  og dermed  $t = 1$ . Dette gir ligningen som forbinder  $\omega$  med  $\alpha$ :

$$(1.2.10) \quad \omega = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - k^2 t^2}} = K(k)$$

der  $K(k) := F(1, k)$  er det *komplette* elliptiske integral av første type.

Fra (1.2.1) har vi at

$$dx = \cos \theta ds$$

så ved hjelp av (1.2.8) gir dette

$$\omega dx = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{k^2 - k^2 t^2}} dt.$$



Vi omskriver  $\cos \theta$  til  $1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - 2k^2t^2 = 2(1 - k^2t^2) - 1$ , og vi ser at

$$\begin{aligned}
 (1.2.11) \quad \omega x &= \int_0^t \frac{2(1 - k^2t^2) - 1}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k^2t^2}} dt \\
 &= 2 \int_0^t \frac{\sqrt{1 - k^2t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt - \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k^2t^2}} \\
 &= 2E(t, k) - F(t, k)
 \end{aligned}$$

der  $E(t, k)$  er det *elliptiske integral av andre type*. Ved  $s = 1$  får vi følgende sammenheng mellom  $\gamma$  og  $\alpha$ :

$$(1.2.12) \quad \gamma = 2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1, \quad E(k) := E(1, k).$$

Der  $x$  må representeres av elliptiske integral, kan  $y$ , derimot, beskrives som en *elementær* funksjon av  $t = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$  via  $\theta$ : Fra (1.2.2) har vi  $dy = \sin \theta ds$ , så

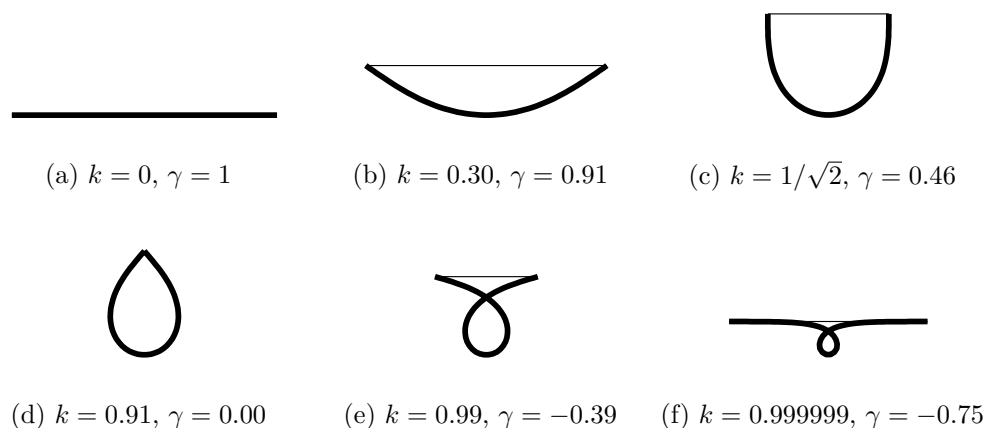
$$\begin{aligned}
 y &= \int_0^s \sin \theta ds \\
 &= \int_0^\theta \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta \\
 &= \int_0^\theta \frac{\sin \theta}{\sqrt{2\omega}\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} d\theta \\
 &= -\frac{2}{\sqrt{2\omega}} \Big|_0^\theta \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\omega} (\sqrt{1 - \cos \alpha} - \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}) \\
 &= \frac{2}{\omega} (\sqrt{\sin^2 \alpha/2} - \sqrt{\sin^2 \alpha/2 - \sin^2 \theta/2}) \\
 &= \frac{2}{\omega} (k - \sqrt{k^2 - k^2t^2}) \\
 &= \frac{2k}{\omega} (1 - \sqrt{1 - t^2}).
 \end{aligned}$$

For en gitt  $\gamma$  har vi nå en kurve

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = \frac{1}{K(k)} (2E(t, k) - F(t, k), \quad 2k(1 - \sqrt{1 - t^2}))$$

for  $t \in [0, 1]$  og der  $k$  er løsningen av ligning (1.2.12).

Ved bruk av Jacobis elliptiske funksjon  $\operatorname{sn}(u; k)$ , definert som inversen til det elliptiske integral av første type,  $F(t, k)$ , oppnår vi en parametrisering i



Figur 1.4

buelengden  $s$ . Av (1.2.9) har vi

$$(1.2.13) \quad t = \operatorname{sn} \omega s$$

og dermed er

$$(1.2.14) \quad \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{K(k)} \begin{pmatrix} 2E(\operatorname{sn} K(k)s, k) - K(k)s \\ 2k(1 - \operatorname{cn}(K(k)s)) \end{pmatrix}$$

Der  $s \in [0, 1]$  og  $\operatorname{cn}(K(k)s) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(K(k)s)}$ . Figur 1.4 viser bueformen for forskjellige verdier av  $k$ .

### 1.3 Strenglengdefunksjonen $\gamma$

Ligning (1.2.12) definerer strenglengden  $\gamma$  som en funksjon av  $k$ ,

$$\gamma(k) = 2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1.$$

Denne funksjonen vil dukke opp senere og vi vil derfor utlede noen av dens egenskaper. For det første, ettersom både  $K$  og  $E$  er jevne funksjoner definert på intervallet  $(-1, 1)$  vil også  $\gamma$  ha disse egenskapene (se tillegg A for en diskusjon om de elliptiske integral). Videre er  $E(0) = K(0) = \pi/2$  så  $\gamma(0) = 1$ . Ved å bruke formlene for de deriverte av  $K$  og  $E$ , finner vi at

$$(1.3.1) \quad \begin{aligned} \frac{d\gamma}{dk} &= \frac{2}{k} \left( 2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 - \frac{E(k)^2}{(1-k^2)K(k)^2} \right) \\ &= \frac{2}{k} \left( \gamma - \frac{(\gamma+1)^2}{4(1-k^2)} \right) \end{aligned}$$

Ved  $k = 0$  er dette et  $\frac{0}{0}$ -uttrykk, men ettersom  $\gamma$  er jevn og glatt ved 0, må  $\gamma'(0) = 0$ .

Når  $k$  går mot 1, vil  $E \rightarrow 1$  og  $K \rightarrow +\infty$  og dermed er  $\gamma(\pm 1) = -1$ .

Å finne den deriverte av  $\gamma$  når  $k$  går mot én er vanskeligere. De to siste figurene i 1.4 indikerer kanskje at  $\gamma'(1) = -\infty$  hvilket, som vi skal se, også er tilfellet. Nevneren i det siste leddet av den første linjen i (1.3.1) skaper problemer, men

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow 1} (1 - k^2) K^2(k) &= \lim_{k \rightarrow 1} \left( \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - k^2 t^2}} dt \right)^2 \\
 (1.3.2) \qquad \qquad \qquad &\leq \lim_{k \rightarrow 1} \left( \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \right)^2 \\
 &= \frac{\pi^2}{4}, \quad \text{ettersom } \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{1 - k^2 t^2}} \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1].
 \end{aligned}$$

Fra det siste leddet av den andre linjen av (1.3.1) får vi ved l'Hôpital at

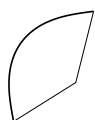
$$(1.3.3) \qquad \lim_{k \rightarrow 1} \frac{\gamma + 1}{\sqrt{1 - k^2}} = \lim_{k \rightarrow 1} -\frac{1}{k} \gamma' \sqrt{1 - k^2}.$$

Så hvis  $\gamma'(1)$  er endelig, gir samme linje at  $\gamma'(1) = 2(-1 - 0) = -2$ , men første linje gir da motsigelsen

$$(1.3.4) \qquad \gamma'(1) \leq 2 \left( -1 - \frac{4}{\pi^2} \right) < -2.$$

Dermed er  $\gamma'(1)$  ikke endelig og mindre enn -2 noe som ikke gir mange andre muligheter enn at  $\gamma'(1) = -\infty$ .

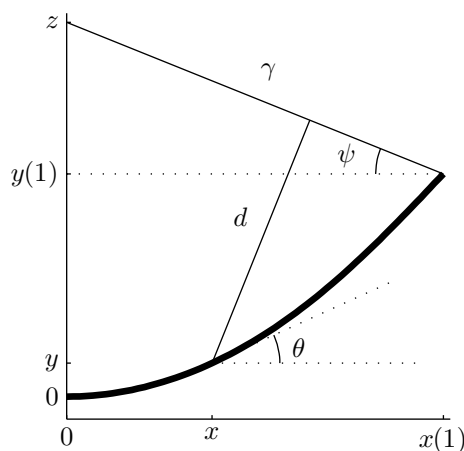
## 1.4 Formen av en trukket bue



Vi skal i dette avsnittet utforske hvordan bueformen avhenger av trekk lengden  $z$  i tillegg til strenglengden  $\gamma$ . Den tenkte linjen mellom endene på buen danner vinkelen  $\psi$  med strengen, og det er denne vinkelen, sammen med  $\gamma$ , som blir de essensielle parametrene i de videre utregningene. Trekk lengden er avstanden mellom midten av buen og midten av strengen og er forbundet med  $\psi$  via  $z = y(1) + \gamma \sin \psi$ .

Vi antar fremdeles at buen har konstant stivhet og at krumningen  $\theta$  er proporsjonal med momentet  $d \cdot T$  der, etter skalering,

$$d = (y(1) - y) \cos \psi + (x(1) - x) \sin \psi.$$



Figur 1.5: Høyre halvdel av en trukket bue

Ligningene som beskriver systemet blir dermed

$$(1.4.1) \quad \dot{x} = \cos \theta$$

$$(1.4.2) \quad \dot{y} = \sin \theta$$

$$(1.4.3) \quad \dot{\theta} = \omega^2 ((y(1) - y) \cos \psi + (x(1) - x) \sin \psi)$$

$$(1.4.4) \quad \gamma \cos \psi = x(1).$$

med initialbetingelser  $x(0) = y(0) = \theta(0) = 0$ .

Det er nå formålstjenelig å rotere koordinatsystemet. Buestrengen er “the line of action” så det er naturlig å legge aksene i henhold til denne linjen. Vi innfører derfor variabelskiftet

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\phi = \theta + \psi$$

og det følgende ligningssystemet er ekvivalent med (1.2.1) - (1.2.4) bortsett fra forholdet til  $\gamma$  og initialbetingelsen for  $\phi$ .

$$(1.4.5) \quad \dot{\tilde{x}} = \cos \phi$$

$$(1.4.6) \quad \dot{\tilde{y}} = \sin \phi$$

$$(1.4.7) \quad \dot{\phi} = \omega^2 (\tilde{y}(1) - \tilde{y})$$

$$(1.4.8) \quad \gamma = \tilde{x}(1) + \tilde{y}(1) \tan \psi$$

der  $\tilde{x}(0) = \tilde{y}(0) = 0$  og  $\phi(0) = \psi$ . Vi følger beregningene i avsnitt 1.2, og oppnår på samme måte

$$\omega ds = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},$$

der

$$k = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha = \phi(1)$$

$$kt = \sin \frac{\phi}{2}.$$

Men på grunn av initsialbetingelsen for  $\phi$ , tar (1.2.9) nå formen

$$(1.4.9) \quad \omega s = \int_a^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = F(t, k) - F(a, k).$$

der

$$a = t(0) = \frac{\sin \frac{\psi}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

og ved  $s = 1$ :

$$(1.4.10) \quad \omega = K(k) - F(a, k).$$

Uttrykkene for  $\omega d\tilde{x}$  og  $\omega d\tilde{y}$  er de samme som i avsnitt 1.2, men fordi  $t(0)$  ikke er 0 får vi ved integrering

$$(1.4.11) \quad \omega \tilde{x} = \int_a^t \frac{2(1-k^2t^2) - 1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} dt$$

$$= 2E(t, k) - F(t, k) - (2E(a, k) - F(a, k)). \quad \text{Og}$$

$$(1.4.12) \quad \omega \tilde{y} = \int_a^t \frac{2kt\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} dt$$

$$= 2k(\sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-t^2}).$$

Innsatt i (1.4.8), skulle dette gi

$$(1.4.13) \quad \gamma = \frac{2}{K(k) - F(a, k)} \left( E(k) - E(a, k) + \frac{2k^2a\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-k^2a^2}}{1-2k^2a^2} \right) - 1$$

der vi har brukt at

$$\tan \psi = \frac{2ka\sqrt{1-k^2a^2}}{1-2k^2a^2}.$$

En parametrisering i  $t$  kan være numerisk uheldig da krumningen mot endene på buen forandrer seg lite og avstanden mellom datapunktene blir lang. Vi prøver derfor å finne en parametrisering i  $s$  slik intensjonen i utgangspunktet var. Av (1.4.9) har vi at

$$F(t, k) = \omega s + F(a, k)$$

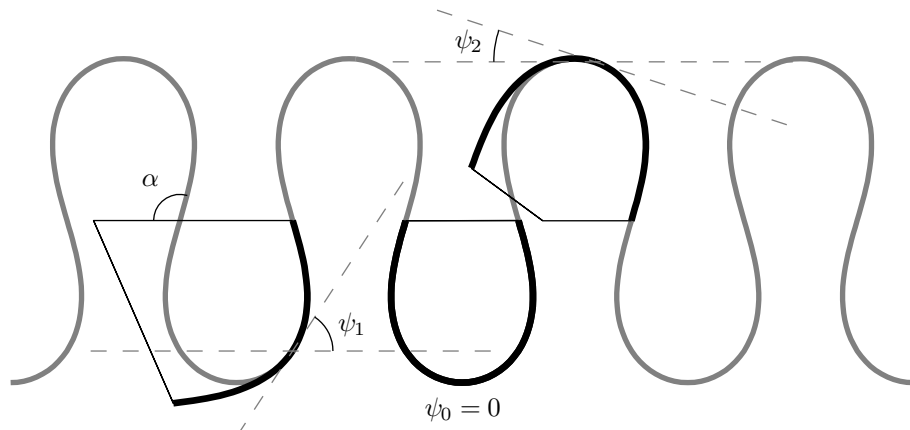
og Jacobis elliptiske funksjon  $\text{sn}$ , definert som inversen av  $F(t, k)$  gir dermed

$$(1.4.14) \quad t = \text{sn}(\omega s + F(a, k)).$$

Dette plugges inn i (1.4.11) og (1.4.12) og vi roterer tilbake til det opprinnelige koordinatsystemet. Dermed, for gitte parametre  $\gamma$  og  $\psi$  og der  $k$  er løsningen av ligning (1.4.13), er

$$(1.4.15) \quad \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2E(\text{sn}(\omega s + F(a, k)), k) - 2E(a, k) - \omega s \\ 2k(\sqrt{1 - a^2} - \text{cn}(\omega s + F(a, k))) \end{pmatrix}$$

for  $0 \leq s \leq 1$ .  $\omega = K(k) - F(a, k)$  og vi har brukt at  $\text{cn} = \sqrt{1 - \text{sn}^2}$ .



Figur 1.6: Buer med samme  $k$  er delmengder av samme *Elastica*. Her er  $k = 0.8$ ,  $\psi_1 = 0.99$  og  $\psi_2 = 0.31$ .

Som vi kanskje kunne mistenke, er ikke (1.4.15) noen “ny” type kurve sammenlignet med (1.2.14) der  $\psi = 0$ . Begge kurver er delmengder av Eulers *Elastica* (se [CTr]) og vi skal se at (1.4.15) kan oppnås ved formbevarende transformasjoner (som reparametrisering, skifte av origo, skalering og rotasjon) av (1.2.14).

La  $k$  være gitt og la  $c_0(s)$  og  $c_\psi(s)$  benevne henholdsvis kurvene (1.2.14) og (1.4.15). La  $l$  være lengden på buestykket av  $c_0(s)$  fra origo til der vinkelen

mellom  $x$ -aksen og tangenten er  $\psi$ , dvs.  $\theta(l) = \psi$ . Gjør en lineær reparametrisering slik at  $c_0$ , for  $0 \leq s \leq 1$ , er resten av buestykket og flytt så kurven slik at den starter i  $(0,0)$ . Skalèr slik at lengden blir 1 og, til slutt, rotèr slik at kurven tangerer  $x$ -aksen.

Ved innsetting i (1.2.14) er det lett å sjekke at sammenhengen mellom  $c_0$  og  $c_\psi$  altså er

$$(1.4.16) \quad c_\psi(s) = \frac{Q(\psi)}{1-l} (c_0(\tilde{s}) - c_0(l)), \quad \tilde{s} = l(1-s) + s.$$

Der

$$Q(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

og der  $l$  er bestemt av (1.2.8) og (1.2.9) til å være

$$l = \frac{F(a, k)}{K(k)}, \quad a = \frac{\sin \psi/2}{k}.$$





# Kapittel 2

## Optimering av buer med konstant stivhet

### 2.1 Innledning

Når en bueskytter trekker buestrengen bakover, tilføres energi til buen. Denne energien frigjøres når strengen slippes og det er dette som gir pilen hastighet. Arbeidet  $\mathcal{E}$  skytteren utfører på buen er gitt av kraften  $\mathcal{F}$  han trekker med og hvor langt han trekker strengen:

$$(2.1.1) \quad \mathcal{E} = \int_{z_0}^{z_m} \mathcal{F} dz.$$

Hvis alt arbeid lagres som elastisk potensiell energi (dvs buen er et konservativt system; ingen termiske effekter osv.) og hvis all energi overføres til en pil med masse  $m$ , vil denne pilen få en utgangshastighet på

$$(2.1.2) \quad v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}}.$$

Vi antar at buen er tilnærmet konservativ, men overførselseffektiviteten til pilen er mer komplisert og kan ikke antas å være 100%. Uansett er  $\mathcal{E}$  en viktig størrelse og vi skal i dette kapitlet forsøke å maksimere dette integralet med hensyn på de forskjellige variablene og parametrene integranden avhenger av.

### 2.2 Kraftfunksjonen ved konstant stivhet

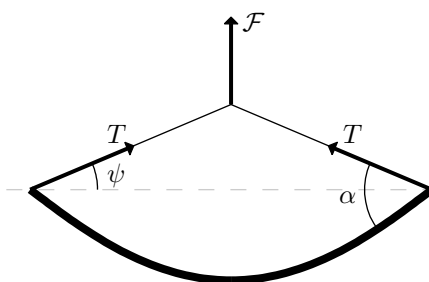
Det er åpenbart at  $\mathcal{F}$  må være begrenset oppad av styrken til skytteren. Man kan tenke seg at denne begrensningen kan beskrives som en funksjon  $\mathcal{F}_m$  av

## 14 KAPITTEL 2. OPTIMERING AV BUER MED KONSTANT STIVHET

$z$  og at denne funksjonen kan finnes ved å måle kraften skytteren klarer å dra mellom en strak venstrearm og høyrearmen, ved forskjellige avstander mellom hendene,  $z_i$ . Den optimale buen hadde derfor vært en bue med kraftfunksjon lik  $\mathcal{F}_m$ , men dette er umulig siden  $\mathcal{F}(z_0) = 0$  og  $\mathcal{F}_m$  antagelig er en synkende funksjon.

Formen av en trukket bue med konstant stivhet ble utledet i kapittel 1 og det er derfor naturlig å begynne med å beskrive kraftfunksjonen i denne forenklete situasjonen. Vi ser av figur 2.1 at trekraften er gitt av

$$(2.2.1) \quad \mathcal{F} = 2T \sin \psi.$$



Figur 2.1

Fra kapittel 1 benevnes

$$(2.2.2) \quad \frac{L^2}{\kappa} T = \omega^2, \quad \text{der} \\ \omega = K(k) - F(p/k, k).$$

$L$  er halve lengden på buen,  $\kappa$  er bøyestivheten,  $F$  er det elliptiske intergal av første type,  $K(k) := F(1, k)$  og

$$(2.2.3) \quad k = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad p = \sin \frac{\psi}{2}.$$

Dette gir kraftfunksjonen -som vi nå benevner med stjerne for å indikere at variabelen har dimensjon- for en bue med konstant stivhet:

$$(2.2.4) \quad \mathcal{F}^* = 4 \frac{\kappa}{L^2} p \sqrt{1 - p^2} \left( K(k) - F(p/k, k) \right)^2$$

Nå er dette en funksjon i  $p$  heller enn  $z$ , men fra figur 1.5 i kapittel 1 ser vi at

$$(2.2.5) \quad z \cos \psi = \tilde{y}(1) = \frac{2}{\omega} \sqrt{k^2 - p^2} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{2\sqrt{k^2 - p^2}}{(K(k) - F(p/k, k))(1 - 2p^2)}.$$

Fra kapittel 1 er  $k$  en funksjon av strenglengden  $\gamma$  og  $p$ , og er implisitt gitt av identiteten

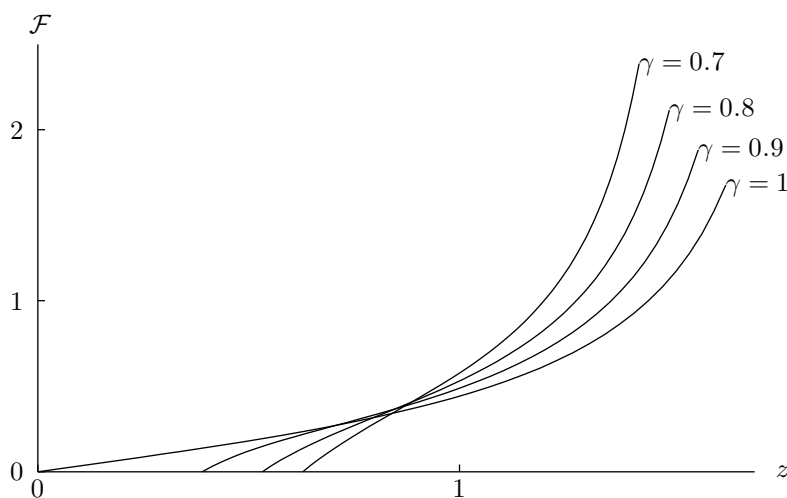
$$(2.2.6) \quad \gamma = \frac{2}{K(k) - F(p/k, k)} \left( E(k) - E(p/k, k) + \frac{2p\sqrt{1 - p^2}\sqrt{k^2 - p^2}}{1 - 2p^2} \right) - 1$$

der  $E(\cdot, \cdot)$  er det elliptiske integral av andre type og  $E(k) := E(1, k)$ .

Vi definerer den dimensjonsløse trekraften  $\mathcal{F}$  som

$$(2.2.7) \quad \mathcal{F}^* = 4 \frac{\kappa}{L^2} \mathcal{F}$$

og, som et første steg, kan vi plote  $\mathcal{F}$  mot  $z$  parametrisert av  $p \in [0, 1/2]$ . Vi kan nå formulere det første optimeringsproblemet:



Figur 2.2: Kraftfunksjoner for buer med konstant stivhet, men varierende strenglengde. Her er  $0 \leq p \leq 0.5$ .

**Problem 1.** Gitt en maksimal trekk lengde  $z_1^* = Lz_1$  og en maksimal trekraftfunksjon  $\mathcal{F}_m^* = 4 \frac{\kappa}{L^2} \mathcal{F}_m$ , hvilke  $L, \gamma$  og  $\kappa$  maksimerer den elastiske energien i buen under begrensningen av at kraften er mindre enn  $\mathcal{F}_m^*$ ?

## 16KAPITTEL 2. OPTIMERING AV BUER MED KONSTANT STIVHET

Ettersom  $k$  er implisitt gitt av  $p$  og  $\gamma$ , og  $p$  er implisitt gitt av  $k(\gamma)$  og  $z$ , kan  $\mathcal{F}$  uttrykkes som en funksjon av  $z$  og  $\gamma$ . Altså

$$(2.2.8) \quad \mathcal{F}^*(L, \gamma, \kappa, z) = 4 \frac{\kappa}{L^2} \mathcal{F}(z, \gamma).$$

Rettferdiggjort av figur 2.2, antar vi at  $\mathcal{F}$  er strengt voksende i  $z$ , og siden  $\mathcal{F}_m$  antagelig er en synkende funksjon, kan  $\kappa$  og  $L$  justeres slik at  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_m$  ved  $z = z_1$ . Så heretter vil  $\mathcal{F}_m$  bety  $\mathcal{F}_m(z_1)$ .

Størrelsen vi ønsker å maksimere er

$$(2.2.9) \quad \mathcal{E}^*(L, \gamma, \kappa) := \int_{z_0^*}^{z_1^*} \mathcal{F}^*(L, \gamma, \kappa, z) dz^* = 4 \frac{\kappa}{L} \int_{z_0(\gamma)}^{z_1(L)} \mathcal{F}(z, \gamma) dz$$

der  $z_1(L) = z_1^*/L$  og der  $z_0$  bare avhenger av  $\gamma$  fordi, (2.2.5) med  $p = 0$  gir,

$$(2.2.10) \quad z_0(\gamma) = \frac{2k(0, \gamma)}{K(k(0, \gamma))}.$$

Begrensningen på  $\mathcal{F}^*$  kan uttrykkes som

$$(2.2.11) \quad G^*(L, \gamma, \kappa) := 4 \frac{\kappa}{L^2} \mathcal{F}(z_1(L), \gamma) - \mathcal{F}_m^* = 0$$

og dette motiverer minimering av følgende Lagrangefunksjon:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(L, \gamma, \kappa, \lambda) &:= -\mathcal{E}^* + \lambda G^* \\ &= -4 \frac{\kappa}{L} \int_{z_0(\gamma)}^{z_1(L)} \mathcal{F}(z, \gamma) dz + \lambda \left( 4 \frac{\kappa}{L^2} \mathcal{F}(z_1(L), \gamma) - \mathcal{F}_m^* \right) \end{aligned}$$

Vi setter de partiellderiverte til null, og de kritiske punktene  $(\hat{L}, \hat{\gamma}, \hat{\kappa}, \hat{\lambda})$  er gitt av følgende ligningssystem:

$$(2.2.12) \quad 0 = \int_{z_0(\gamma)}^{z_1(L)} \mathcal{F}(z, \gamma) dz + \mathcal{F}(z_1, \gamma) \left( z_1 - 2 \frac{\lambda}{L} \right) - z_1 \frac{\lambda}{L} \mathcal{F}_z(z_1, \gamma)$$

$$(2.2.13) \quad 0 = - \int_{z_0(\gamma)}^{z_1(L)} \mathcal{F}_\gamma(z, \gamma) dz + \frac{\lambda}{L} \mathcal{F}_\gamma(z_1, \gamma)$$

$$(2.2.14) \quad 0 = - \int_{z_0(\gamma)}^{z_1(L)} \mathcal{F}(z, \gamma) dz + \frac{\lambda}{L} \mathcal{F}(z_1, \gamma)$$

$$(2.2.15) \quad 0 = 4 \frac{\kappa}{L^2} \mathcal{F}(z_1(L), \gamma) - \mathcal{F}_m^*$$

Det er ikke klart hvordan man kan komme videre her. Problemet ligger mye i at integralet over kraften som en funksjon av  $z$ , vanskelig lar seg evaluere.

Her er  $\gamma$  konstant og  $z$  er en funksjon av  $k$  og  $p$ , men både  $k$  og  $p$  er implisitt gitte variabler, og differensialet

$$dz = \frac{\partial z}{\partial p} dp + \frac{\partial z}{\partial k} dk$$

blir komplisert å beregne. Derimot kan vi utnytte det faktum at vi antar at buen er energibevarende til å finne alternative måter å beregne  $\mathcal{E}^*$ . Denne antagelsen om at buen er et energikonserverende system betyr at når buen er i fullt uttrekt tilstand, er ikke energien i buen avhengig av *hvordan* buen ble deformert, men bare av formen den har i denne tilstanden. Dette prinsippet tillater oss og integrere kraftfunksjoner over andre “veier” enn  $z$ , og vi skal se at vi greier å finne eksakte uttrykk for  $\mathcal{E}^*$ .

## 2.3 Elastisk energi i buen

Det er åpenbart at en elastisk stang krever tilførsel av energi for å bøyes og at det kreves mer energi dess mere stangen bøyes, om ikke proporsjonalt. Integralet over kvadratet av krumningen er et mål på hvor stor den totale bøyningen av en stang er, og det kan være naturlig å tro at denne verdien har en sammenheng med stangens energi. Faktisk, i 1739, i et brev til Euler, foreslår Daniel Bernoulli at formen på *Elastica* kan finnes ved å minimere energiintegralet  $\int \frac{ds}{RR}$  ved hjelp av den nye hjelpemiddelet *methodum isoperimetricorum*, et tidlig navn på det som nå er kjent som variasjonsregning. Med  $R$  mener Bernoulli krumningens radius og er i moderne notasjon gitt ved  $1/\theta$ . Uansett, med denne ideen løste Euler det generelle problemet vedrørende den elastiske stangen, og var den første til å kategorisere hele familien av elastiske kurver. (se [Le]).

Det er ikke helt opplagt hvordan man kan påstå at energien er gitt ved  $\int \frac{ds}{RR}$ , men vi skal nå gi et bevis for at dette er riktig for en spennet bue med konstant stivhet.

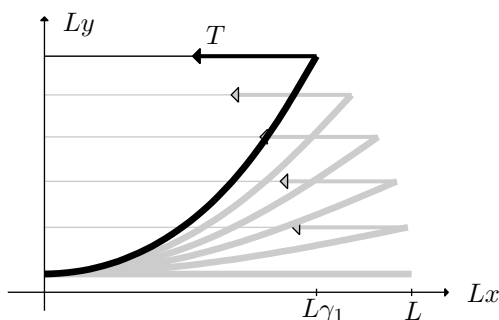
**Teorem 1.** *Anta vi har en spennet bue under de forutsetningene og antagelsene i kapittel 1. Benevn halve strenglengden med  $L\gamma_1$ , men la ellers notasjonen være den samme. Den totale elastiske energien i halve buen er da gitt ved*

$$(2.3.1) \quad U^* = \frac{\kappa}{L} \int_0^1 \frac{1}{2} \theta^2 ds$$

der  $\theta$  benevner vinkelen mellom tangenten ved  $s$  og  $Lx$ -aksen, men avhenger også av parameteren  $\gamma_1$ .

## 18KAPITTEL 2. OPTIMERING AV BUER MED KONSTANT STIVHET

*Bevis.* Fra kapittel 1 har vi uttrykk for  $\dot{\theta}$  som gjør at vi har mulighet til å evaluere (2.3.1). Vi kan også beregne den elastiske energien ved å integrere over strengkraften  $T$  når  $\gamma$  varierer fra 1 til  $\gamma_1$  og vi skal se at begge beregninger gir samme resultat, hvilket beviser teoremet.



Figur 2.3

Når en kraft  $T = T(L\gamma)$  påvirker enden av, den i utgangspunktet strake, buen i negativ  $Lx$ -retning helt til buen er bøyd slik at posisjonen til enden er  $L\gamma_1$ , vil arbeidet tilført buen være gitt ved

$$(2.3.2) \quad W^* := - \int_L^{L\gamma_1} T d(L\gamma) = -L \int_1^{\gamma_1} T d\gamma$$

og ettersom vi antar at systemet er konservativt, må det tilførte arbeidet være lik den elastiske energien som lagres i buen. La nå, som i kapittel 1,  $\alpha$  være (den varierende) vinkelen mellom tangenten ved enden av buen og  $Lx$ -aksen og la  $k = \sin \alpha/2$ . Vi har nå fra (2.2.2), med  $p = 0$ , at

$$(2.3.3) \quad T = \frac{\kappa}{L^2} \omega^2 = \frac{\kappa}{L^2} K^2(k)$$

Nå er  $\gamma$  gitt ved  $k$  som

$$(2.3.4) \quad \gamma = 2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1,$$

og ved bruk av derivasjonsreglene for  $K$  og  $E$ , finner vi et uttrykk for differensialet  $d\gamma$ :

$$(2.3.5) \quad d\gamma = \frac{2}{k} \left( 2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 - \frac{E^2(k)}{(1-k^2)K^2(k)} \right) dk.$$

Insetting i (2.3.2) gir dermed

$$(2.3.6) \quad W^* = -\frac{\kappa}{L} \int_0^{k_1} \frac{2}{k} \left( 2K(k)E(k) - K^2(k) - \frac{E^2(k)}{(1-k^2)} \right) dk$$

der  $k_1$  er verdien for  $k$  ved  $\gamma_1$ .

Vi fokuserer nå på (2.3.1). Vi vet at  $\theta$  tilfredsstiller pendelligningen

$$(2.3.7) \quad \ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0,$$

og ved multiplikasjon med  $d\theta$ , integrering og bruk av grensebetingelsene  $\theta(1) = \alpha$ ,  $\dot{\theta}(1) = 0$ , oppnår vi “energiformen” av (2.3.7).

$$(2.3.8) \quad \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \omega^2 (\cos \theta - \cos \alpha)$$

Nå, ettersom  $s$  er buelengden, er  $\cos \theta = \dot{x}$ , og ettersom  $\omega$  og  $\alpha$  er uavhengige av  $s$ , er (2.3.1) helt enkelt gitt ved

$$(2.3.9) \quad U^* = \left|_{k=k_1} \frac{\kappa}{L} \omega^2 (\gamma - \cos \alpha) \right.$$

Uttrykket som en funksjon av  $k$ , er

$$(2.3.10) \quad U^*(k) = 2 \frac{\kappa}{L} K(k) \left\{ E(k) - (1-k^2)K(k) \right\},$$

hvilket kan deriveres til

$$(2.3.11) \quad \frac{d}{dk} U^*(k) = -\frac{\kappa}{L} \frac{2}{k} \left( 2K(k)E(k) - K^2(k) - \frac{E(k)}{1-k^2} \right),$$

som ved innsetting i (2.3.6) viser at

$$(2.3.12) \quad W^* = \int_0^{k_1} \frac{d}{dk} U^*(k) dk = U^*$$

og vi har bevist at den elastiske energien faktisk er gitt av (2.3.1).  $\square$

Vi ønsker nå å generalisere teorem 1 slik at energien i en *trukket* bue også kan uttrykkes ved integralet over kvadratet av krumningen. For en fiksért  $\psi$ , plassér buen i  $(L\tilde{x}, L\tilde{y})$ -planet som definert i kapittel 1 Dvs. slik at buen i origo danner en vinkel  $\psi$  med den horisontale koordinataksen. Ideén er nå, som i teorem 1, å integrere over kraftfunksjonen  $T$  fra buen er strak til tangenten ved enden av buen har vinkel  $\alpha_1$ .

## 20 KAPITTEL 2. OPTIMERING AV BUER MED KONSTANT STIVHET

**Teorem 2.** Anta vi har en trukket bue med halv strenglengde lik  $L\gamma_1$  under de forutsetningene og antagelsene som i kapittel 1. Buen er trukket slik at vinkelen mellom buestrengen og tangenten ved midten av buen er  $\psi$ . Den totale elastiske energien i halve buen er da gitt ved

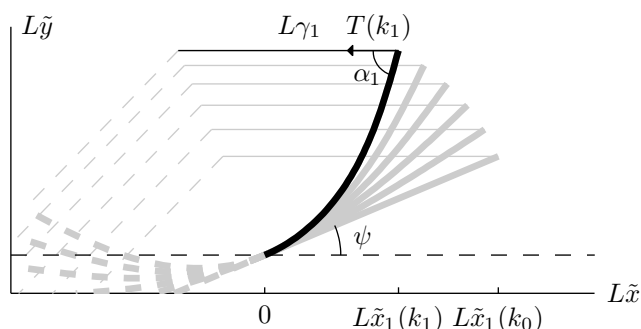
$$(2.3.13) \quad U_\psi^* = \frac{\kappa}{L} \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 ds$$

der  $\phi$  benevner vinkelen mellom tangenten ved  $s$  og horisontalaksen  $\tilde{x}$ , men avhenger også av parametrene  $\psi$  og  $\gamma_1$ .

*Bevis.* La  $\alpha = \phi(1)$  være vinkelen mellom tangenten ved enden av buen og  $L\tilde{x}$ -aksen, og la  $k = \sin \alpha/2$ . La  $p = \sin \psi/2$  og definér de to størrelsene  $\omega$  og  $\tilde{\omega}$  som

$$(2.3.14) \quad \omega = K(k) - F(p/k, k), \quad \tilde{\omega} = E(k) - E(p/k, k).$$

Merk at vi anser  $p$  som fiksért, slik at  $\omega$  og  $\tilde{\omega}$  er funksjoner bare av  $k$ .



Figur 2.4

Definér  $\tilde{x}_1$  som verdien av  $\tilde{x}$  ved enden av buen.  $\tilde{x}_1$  er dermed en funksjon av  $k$  og kapittel 1 gir

$$(2.3.15) \quad \tilde{x}_1 = 2 \frac{\tilde{\omega}}{\omega} - 1$$

Som i teorem 1, tilfører vi en kraft  $T$  i negativ  $L\tilde{x}$ -retning på enden av den strake buen slik at buen bøyes helt til  $k$  har verdi  $k_1$  som tilfredsstillter  $\gamma_1$  og  $p$  innsatt i (2.2.6).

Arbeidet tilført buen er dermed

$$(2.3.16) \quad W_\psi^* = -L \int_{\tilde{x}_1(k_0)}^{\tilde{x}_1(k_1)} T d(\tilde{x}_1(k))$$



og ettersom systemet er konservativt og vi antar at den strake buen har ingen energi, må dette integralet representere den totale elastiske energien i buen.

$k_0$  representerer vinkelen ved enden av den strake buen, og er åpenbart lik  $p$ . Merk at  $\tilde{x}_1(p)$  er et  $\frac{0}{0}$ -uttrykk, men fra figur 2.4 skjønner vi at denne verdien må være  $\cos \psi$ . (Et bevis for dette finnes i kapittel 4)

Som før er  $T = T(k) = \frac{\kappa}{L^2} \omega^2$  og derivering av  $\tilde{x}_1$  gir

$$(2.3.17) \quad d\tilde{x}_1 = 2 \frac{\tilde{\omega}_k \omega - \tilde{\omega} \omega_k}{\omega^2} dk$$

der subskript på  $\omega$ 'ene betegner derivering. Innsatt i (2.3.16) gir dette

$$(2.3.18) \quad W_\psi^* = 2 \frac{\kappa}{L} \int_p^{k_1} (\tilde{\omega} \omega_k - \tilde{\omega}_k \omega) dk$$

Vi fokuserer nå på (2.3.13) og finner på samme måte som i teorem 1 at  $U_\psi^*$ , som en funksjon av  $k$ , er

$$(2.3.19) \quad U_\psi^*(k) = 2 \frac{\kappa}{L} \omega \left\{ \tilde{\omega} - (1 - k^2) \omega \right\}$$

og vi ønsker å vise at den deriverte av dette uttrykket er lik integranden i (2.3.18).

Dette løser seg ikke selv, og vi er tvunget til å finne de eksplisitte uttrykkene for  $\omega_k$  og  $\tilde{\omega}_k$ . Skriv  $a := p/k$  og merk at ved (A.3.16)-(A.3.19) er

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} \left\{ E(k) - E(a, k) \right\} &= \frac{1}{k} (\tilde{\omega} - \omega), \text{ og} \\ \frac{\partial}{\partial k} \left\{ K(k) - F(a, k) \right\} &= \frac{1}{k} \left( \frac{\tilde{\omega}}{1 - k^2} - \omega \right) + \frac{ka}{1 - k^2} \frac{\sqrt{1 - a^2}}{\sqrt{1 - k^2 a^2}} \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{\partial}{\partial k} \left\{ K(k) - F(a, k) \right\} - \frac{\partial}{\partial a} F(a, k) \frac{da}{dk} \\ &= \frac{1}{k} \left( \frac{\tilde{\omega}}{1 - k^2} - \omega \right) + \frac{ka}{1 - k^2} \frac{\sqrt{1 - a^2}}{\sqrt{1 - k^2 a^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - a^2} \sqrt{1 - k^2 a^2}} \left( -\frac{p}{k^2} \right) \\ &= \frac{1}{k} \left( \frac{\tilde{\omega}}{1 - k^2} - \omega + \frac{p \sqrt{1 - p^2}}{(1 - k^2) \sqrt{k^2 - p^2}} \right) \end{aligned}$$

22KAPITTEL 2. OPTIMERING AV BUER MED KONSTANT STIVHET

og

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_k &= \frac{\partial}{\partial k} \left\{ E(k) - E(a, k) \right\} - \frac{\partial}{\partial a} E(a, k) \frac{da}{dk} \\ &= E'(k) - \frac{\partial}{\partial k} E(a, k) - \frac{\sqrt{1 - k^2 a^2}}{\sqrt{1 - a^2}} \left( -\frac{p}{k^2} \right) \\ &= \frac{1}{k} \left( \tilde{\omega} - \omega + \frac{p\sqrt{1 - p^2}}{\sqrt{k^2 - p^2}} \right).\end{aligned}$$

Skriv

$$(2.3.20) \quad A := \frac{1}{k} \left( \tilde{\omega} + \frac{p\sqrt{1 - p^2}}{\sqrt{k^2 - p^2}} \right)$$

slik at

$$(2.3.21) \quad \omega_k = \frac{A}{1 - k^2} - \frac{\omega}{k}, \quad \text{og} \quad \tilde{\omega}_k = A - \frac{\omega}{k}.$$

Dette gjør at vi endelig kan regne ut at

$$\begin{aligned}\frac{d}{dk} U_\psi &= \omega_k \left\{ \tilde{\omega} - (1 - k^2)\omega \right\} + \omega \left\{ \tilde{\omega}_k - (1 - k^2)\omega_k + 2k\omega \right\} \\ &= \omega_k \tilde{\omega} - 2\omega_k \omega (1 - k^2) + \omega (\tilde{\omega}_k + 2k\omega).\end{aligned}$$

Merk at det midterste leddet er

$$(2.3.22) \quad 2 \left( \frac{A}{1 - k^2} - \frac{\omega}{k} \right) \omega (1 - k^2) = 2 \left( A - \frac{\omega}{k} + k\omega \right) \omega = 2(\tilde{\omega}_k + k\omega)\omega,$$

og kanseleres nesten mot det siste leddet slik at vi oppnår, som ønsket,

$$(2.3.23) \quad \frac{d}{dk} U_\psi = \omega_k \tilde{\omega} - \omega \tilde{\omega}_k$$

og vi har bevist at

$$(2.3.24) \quad W_\psi^* = 2 \frac{\kappa}{L} \int_p^{k_1} \frac{d}{dk} U_\psi dk = U_\psi^*.$$

Merk at ved å sette  $\psi = 0$  får vi påstanden og resultatet av teorem 1.  $\square$

Vi er nå i stand til å evaluere integralet (2.1.1). Arbeidet som er blitt tilført buen når den er trukket må være lik den differansen mellom den

elastiske energien i buen i henholdsvis trukket og uttrukket tilstand. Det vil si, ved (2.3.10) og (2.3.19), at

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^* &= 2(U_\psi^* - U_0^*) \\ &= 4\frac{\kappa}{L}\left(\omega_1(\tilde{\omega}_1 - (1 - k_1^2)\omega_1) - \omega_0(\tilde{\omega}_0 - (1 - k_0^2)\omega_0)\right)\end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned}\omega_0 &= K(k_0), & \tilde{\omega}_0 &= E(k_0). \\ \omega_1 &= K(k_1) - F(p/k_1, k_1), & \tilde{\omega}_1 &= E(k_1) - E(p/k_1, k_1)\end{aligned}$$

og  $k_i = \sin \frac{\alpha_i}{2}$  der  $\alpha_i$  er vinkelen mellom tangenten ved enden av buen og strengen i henholdsvis uttrukket, ( $i = 0$ ), og trukket, ( $i = 1$ ), tilstand.  $p = \sin \psi/2$  der  $\psi$  er vinkelen mellom tangenten ved midten av buen og strengen når buen er trukket.

Det er også mulig å uttrykke energien på en mer geometrisk form. Merk at ved (2.3.8) er

$$(2.3.25) \quad U_0^* = \frac{\kappa}{L}\omega_0^2(\gamma - \cos \alpha_0)$$

og

$$(2.3.26) \quad U_\psi^* = \frac{\kappa}{L}\omega_1^2(\tilde{x}_1 - \cos \alpha_1).$$

Nå er  $\tilde{x}_1 = 2\frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1} - 1$  og ved (2.2.4) og (2.2.5) er

$$(2.3.27) \quad \mathcal{F}_m^* = 4\frac{\kappa}{L^2}p\sqrt{1 - p^2}\omega_1^2, \quad \text{og} \quad z_1^* = L\frac{2\sqrt{k_1^2 - p^2}}{\omega_1(1 - 2p^2)}$$

gitte størrelser. Fra (2.2.6) kan  $\gamma$  dermed skrives som

$$\begin{aligned}\gamma &= 2\frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1} - 1 + 4\frac{p\sqrt{1 - p^2}\sqrt{k_1^2 - p^2}}{\omega_1(1 - 2p^2)} \\ &= \tilde{x}_1 + \frac{Lz_1^*\mathcal{F}_m^*}{2\kappa\omega_1^2}\end{aligned}$$

og dersom dette settes inn i (2.3.26), får vi

$$(2.3.28) \quad W^* = 2\frac{\kappa}{L}\left(\omega_1^2(\gamma - \cos \alpha_1) - \omega_0^2(\gamma - \cos \alpha_0)\right) - z^*\mathcal{F}^*$$

## 2.4 Løsning av problem 1

Ettersom vi nå har et uttrykk for energien i en trukket bue, reformulerer vi problem 1 og forsøker å finne en analytisk løsning. De gitte størrelsene  $z_1^*$  og  $\mathcal{F}_m^*$  blir å regne som parametre for problemet, men ved å skalære de andre variablene med passende kombinasjoner av  $z_1^*$  og  $\mathcal{F}_m^*$ , oppnår vi et dimensjonsløst ligningssett uten parametre.

Benevn alle tidligere størrelser som har dimensjon med stjerne, og definér de nye, skalérte variablene  $L, \kappa$  og  $\mathcal{E}$  ved

$$(2.4.1) \quad L^* = z_1^* L, \quad \kappa^* = (z_1^*)^2 \mathcal{F}_m^* \kappa, \quad \mathcal{E}^* = z_1^* \mathcal{F}_m^* \mathcal{E}.$$

Dermed kan optimeringsproblemet formuleres som følgende: Finn  $(L, \gamma, \kappa, k_0, k_1, p)$  som maksimerer

$$(2.4.2) \quad \mathcal{E}(L, \kappa, k_0, k_1, p) = 4 \frac{\kappa}{L} \left\{ \omega_1 (\tilde{\omega}_1 - (1 - k_1^2) \omega_1) - \omega_0 (\tilde{\omega}_0 - (1 - k_0^2) \omega_0) \right\}$$

under følgende begrensninger:

$$\begin{aligned} 0 &= G_1(\gamma, k_0) := 2 \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega_0} - 1 - \gamma \\ 0 &= G_2(L, \gamma, k_1, p) := 2 \frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1} - 1 - \gamma + \frac{1}{L} \sin \psi \\ 0 &= G_3(L, k_1, p) := \frac{2L \sqrt{k_1^2 - p^2}}{\omega_1 \cos \psi} - 1 \\ 0 &= G_4(L, \kappa, k_1, p) := 2 \frac{\kappa}{L^2} \omega_1^2 \sin \psi - 1 \end{aligned}$$

Det er også endel begrensninger beskrevet av ulikheter, men vi fortsetter foreløpig uten tanke på disse. Ved å sette de partiellderiverte av Lagrange-funksjonen

$$(2.4.3) \quad \mathcal{L}(L, \gamma, \kappa, k_0, k_1, p) := -\mathcal{E} + \sum \lambda_i G_i$$

til null, finner vi i første omgang at

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \lambda_2 \frac{1}{L^2} \sin \psi + \lambda_3 \frac{1}{L} - \lambda_4 \frac{2}{L} \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = -\lambda_1 - \lambda_2 \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \kappa} = -\frac{\mathcal{E}}{\kappa} + \lambda_4 \frac{1}{\kappa} \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_0} = 4 \frac{\kappa}{L} (\omega_{k_0} \tilde{\omega} - \omega \tilde{\omega}_{k_0}) + \lambda_1 2 \frac{\tilde{\omega}_{k_0} \omega - \tilde{\omega} \omega_{k_0}}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

som er nok til å bestemme Lagrange-multiplene til

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2\frac{\kappa}{L}\omega_0^2 \\ \lambda_2 &= -2\frac{\kappa}{L}\omega_0^2 \\ \lambda_3 &= \mathcal{E} - \frac{\kappa}{L^2}\omega_0^2 \sin \psi \\ \lambda_4 &= \mathcal{E}.\end{aligned}$$

De partiellderiverte mhp  $k_1$  og  $p$  kan også kalkuleres slik at vi får seks ligninger med seks ukjente. Derimot vil en videre analytisk tilnærming på optimeringsproblemet raskt stoppes i et villniss av beregninger.

Funksjonen som skal maksimeres avhenger av seks variabler, men de fire begrensningene  $G_1 - G_4$  reduserer antall frihetsgrader til to. Dersom  $p$  og  $k_1$  velges som de frie variablene kan de resterende variablene uttrykkes som funksjoner av disse:

$$\begin{aligned}L(p, k_1) &= \frac{\omega(p, k_1) \cos \psi}{2\sqrt{k_1^2 - p^2}} \\ \kappa(p, k_1) &= \frac{\cos^2 \psi}{8(k_1^2 - p^2) \sin \psi} \\ \gamma(p, k_1) &= 2\frac{\tilde{\omega}(p, k_1)}{\omega(p, k_1)} - 1 + 2\frac{\sqrt{k_1^2 - p^2}}{\omega(p, k_1)} \tan \psi\end{aligned}$$

og der  $k_0(p, k_1)$  må løses fra ligningen

$$0 = 2\frac{\tilde{\omega}(k_0)}{\omega(k_0)} - 1 - \gamma(p, k_1).$$

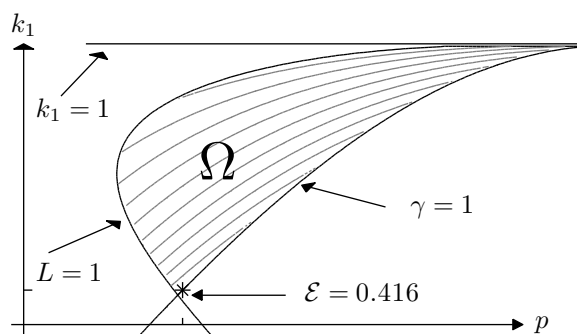
Problem 1 er nå redusert til maksimering av  $\mathcal{E}$  på et domene  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Domenet er gitt av ulikheter som representerer både matematiske nødvendigheter og praktiske begrensninger:

$$(2.4.4) \quad \Omega = \{(p, k_1) \in \mathbb{R}^2 \mid c_i(p, k_1) \geq 0\}$$

der bl.a.

$$\begin{aligned} c_1(p, k_1) &:= p \\ c_2(p, k_1) &:= k_1 \\ c_3(p, k_1) &:= k_1 - p \\ c_4(p, k_1) &:= \gamma(p, k_1) - \gamma_{\min} \\ c_5(p, k_1) &:= 1 - \gamma(p, k_1) \\ c_6(p, k_1) &:= L(p, k_1) - L_{\min} \\ c_7(p, k_1) &:= L_{\max} - L(p, k_1) \end{aligned}$$

Kjedelig nok, viser numerikken at  $\mathcal{E}$  er klart størst langs linjen i  $(p, k_1)$ -planet der  $\gamma = 1$ . Figurene viser at  $\mathcal{E}$  er ganske stabil langs denne linjen, men stiger svakt mot en verdi på ca. 0.5 når  $(p, k_1)$  går mot  $(0, 0)$ .  $L$  og  $\kappa$  stiger ubegrenset nær origo, så løsningen på problem 1 ser ut til å være en bue som er så lang som mulig med en streng på samme lengde. Det virker altså som at den ekstra “konkaviteten” man ser i figur 2.2 på kraftfunksjoner med  $\gamma$  mindre enn én, ikke kompenseres for at den effektive trekk lengden,  $z_1^* - z_0^*$ , blir mindre. Dermed blir ikke energifunksjonen selv konkav og løsningen havner på randen av  $\Omega$ .



Figur 2.5

Et valg av en maksimal buelengde på to armlengder tilsvarer  $L_{\max} = 1$ , og figur 2.5 viser konturene av  $\mathcal{E}$  i  $\Omega$ .  $\mathcal{E}$  oppnår et maksimum på ca. 0.416 i  $(p, k_1) \approx (0.28, 0.62) \in \partial\Omega$  og de aktive begrensningene er  $c_5$  og  $c_7$ .

Vi oppsummerer dette resultatet slik:

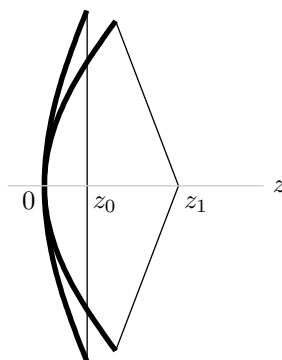
**Løsning 1.** For en bueskytter med armlengde på  $z_1^*$ , i meter, og en maksimal trekkraft på  $\mathcal{F}_m^*$ , i Newton, i fullt uttrekket posisjon, vil en bue med konstant

stivhet som er  $2z_1^*$  lang, maksimere sin potensielle energi til  $z_1^* \mathcal{F}^* \cdot 0.416$  i Joule, når den er fullt uttrekt. Dette oppnås ved å velge  $(p, k_1) \approx (0.28, 0.62)$  slik at strenglenden blir lik buelengden og at bøyestivhet blir  $(z_1^*)^2 \mathcal{F}_m^* \cdot 0.540$ .

## 2.5 Omformulering av problem

Vi så i forrige avsnitt at, ved en gitt trekk lengde,  $z_1^*$ , og en gitt kraft i fullt uttrekt posisjon,  $\mathcal{F}_m^*$ , vil energien, i en rett bue med konstant stivhet, være maksimal når strengen er like lang som buen. Energien  $\mathcal{E}$  er svakt økende som funksjon av buelengden  $L = \frac{L^*}{z_1^*}$ , og i grensen  $L \rightarrow \infty$  synes kraftfunksjonen  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(z)$  å være lineær -som til en fjær- og følgelig vil  $\mathcal{E} = \int \mathcal{F} dz \rightarrow 0.5$ .

Med tanke på grafene i figur 2.2, er dette resultatet skuffende; bidraget fra konkaviteten til  $\mathcal{F}$  når  $\gamma < 1$  er altså ikke nok til å kompensere for det kortere integrasjonsintervallet,  $[z_0, z_1]$ .



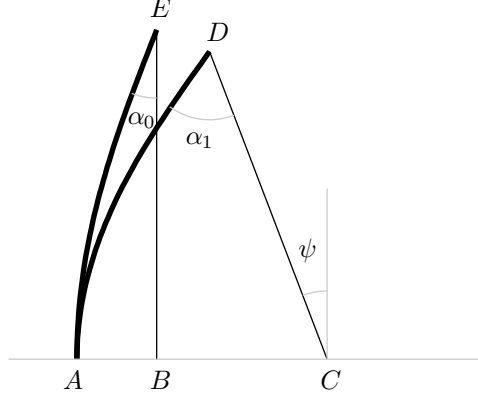
Figur 2.6: Bue med konstant stivhet i spent og trukket tilstand.

Motivert fra dette, forandrer vi problemstillingen og antar at den *effektive* trekk lengden  $z_1^* - z_0^*$  er gitt, istedet for den totale trekk lengden  $z_1^*$ . Denne antagelsen modellerer f.eks situasjonen der et håndtak er montert slik at hånden som holder den spente buen er på linje med strengen selv om  $\gamma < 1$ . Dermed vil  $z_1^* - z_0^*$  være skytterens armlengde, hvilket rettferdiggjør antagelsen også fra praktiske hensyn.

Å anta at  $z_1^* - z_0^*$  er gitt, er den eneste forskjellen fra antagelsene i forrige avsnitt. Men vi skal se at dette er nok til å gi forskjellig svar på samme optimeringsproblem:

**Problem 2.** Gitt en effektiv trekk lengde  $z_1^* - z_0^*$  og en gitt trekkraft i fullt uttrekt posisjon,  $\mathcal{F}_m^*$ . Hvilke  $L^*$ ,  $\kappa^*$  og  $\gamma$  maksimerer den elastiske energien,  $\mathcal{E}^*$ , i den fullt uttrekte buen?





Figur 2.7

Som før, og i henhold til figur 2.7, definerer vi

$$\begin{aligned} z_0^* &= \overline{AB}, & z_1^* &= \overline{AC} & z_1^* - z_0^* &= \overline{BC}, \\ L^* &= \widehat{AE} = \widehat{AD}, & \gamma L^* &= \overline{EB} = \overline{DC}, \\ k_0 &= \sin \frac{\alpha_0}{2}, & k_1 &= \sin \frac{\alpha_1}{2}, & p &= \sin \frac{\psi}{2}. \end{aligned}$$

Definér funksjonene

$$\omega(p, k) = K(k) - F(p/k, k), \quad \tilde{\omega}(p, k) = E(k) - E(p/k, k),$$

og la

$$\omega_0 = \omega(0, k_0), \quad \omega_1 = \omega(p, k_1), \quad \tilde{\omega}_0 = \tilde{\omega}(0, k_0), \quad \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}(p, k_1).$$

Fra forrige avsnitt er energien tilført buen i figur 2.7 gitt ved

$$(2.5.1) \quad \mathcal{E}^* = 4 \frac{\kappa^*}{L^*} \left( \omega_1^2 \left\{ \frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1} - (1 - k_1^2) \right\} - \omega_0^2 \left\{ \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega_0} - (1 - k_0^2) \right\} \right)$$

der  $\kappa^*$  er buens bøyestivhet og tilfredsstiller ligningen

$$(2.5.2) \quad \mathcal{F}_m^* = 2 \frac{\kappa^*}{(L^*)^2} \omega_1^2 \sin \psi.$$

De to uttrykkene for  $\gamma$  reduserer antall frihetsgrader ytterligere:

$$(2.5.3) \quad \gamma = \begin{cases} \frac{2\tilde{\omega}_0}{\omega_0} - 1 \\ \frac{2\tilde{\omega}_1}{\omega_1} - 1 + 2\frac{\sqrt{k_1^2 - p^2}}{\omega_1} \tan \psi \end{cases} \Rightarrow \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega_0} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1} + \frac{\sqrt{k_1^2 - p^2}}{\omega_1} \tan \psi.$$

## 30 KAPITTEL 2. OPTIMERING AV BUER MED KONSTANT STIVHET

Tilslutt merker vi, siden  $z^*$  generelt er gitt ved  $z^* = 2L^* \frac{\sqrt{k^2 - p^2}}{\omega \cos \psi}$ , at

$$(2.5.4) \quad z_1^* - z_0^* = 2L^* \left( \frac{\sqrt{k_1^2 - p^2}}{\omega_1 \cos \psi} - \frac{k_0}{\omega_0} \right).$$

Vi skaléerer

$$L^* = (z_1^* - z_0^*)L, \quad \kappa^* = (z_1^* - z_0^*)^2 \mathcal{F}_m^* \kappa, \quad \mathcal{E}^* = (z_1^* - z_0^*) \mathcal{F}_m^* \mathcal{E},$$

og oppnår dermed følgende maksimeringsproblem i  $\mathbb{R}^3$ : Maksimer

$$(2.5.5) \quad \mathcal{E}(k_0, p, k_1) = \frac{\omega_1^2 \left\{ \frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1} - (1 - k_1^2) \right\} - \omega_0^2 \left\{ \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega_0} - (1 - k_0^2) \right\}}{\left( \frac{\sqrt{k_1^2 - p^2}}{\omega_1 \cos \psi} - \frac{k_0}{\omega_0} \right) \omega_1^2 \sin \psi}$$

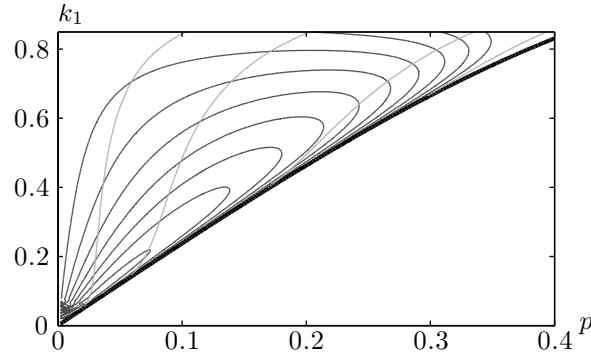
under begrensningen

$$(2.5.6) \quad 0 = G_1(k_0, p, k_1) := \frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1} + \frac{\sqrt{k_1^2 - p^2}}{\omega_1} \tan \psi - \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega_0}.$$

For å få en følelse av hvordan  $\mathcal{E}$  oppfører seg i  $p, k_1$ -planet løses ligning (2.5.6) mhp.  $k_0$  med følgende matlabfunksjon.

```
function res = k0fun(p,k)
n = 100;
k0 = linspace(0,max(max(k)),n);
g = gammafun(0,k0);
g1 = gammafun(p,k);
bol = isnan(p) | isnan(k) | k<0 | k>1 | p>k;
g1(bol)=1;
res = interp1(g,k0,g1,'spline');
res(bol) = NaN;
```

Denne funksjonen finner  $k_0$  som en funksjon av  $p$  og  $k_1$  ved hjelp av invers interpolasjon. Metoden er mindre nøyaktig enn matlabs `fzero`, men kan i gjengjeld håndtere både vektorer og matriser som argumenter, noe som gjør den raskere og mer praktisk å bruke ved plotting av grafer. I figur 2.8 viser de mørkegrå linjene konturer av  $\mathcal{E}$  i  $p, k_1$ -planet for ti uniformt fordelte verdier på intervallet  $[0.47, 0.59]$ . De lyse linjene er konturer for  $L$  for verdier -fra høyre mot venstre-  $L = 1, 1.7, 5.1$  og  $15$ . Den tykke svarte linjen er konturen



Figur 2.8

for  $\gamma = 1$  og vi ser, i motsetning til i forrige avsnitt, at  $\mathcal{E}$  minker når  $\gamma$  går mot 1. Igjen ser det ut til at  $\mathcal{E}$  er svakt stigende når  $p, k_1 \rightarrow 0$ , som i såfall medfører at  $\mathcal{E}$  ikke har et maksimum i området  $k_1, p > 0$ ,  $\gamma < 1$ . Det er derfor nødvendig å innføre flere begrensninger. En måte kan være å kreve at  $L \leq L_{\max}$ , og ved deretter å variere  $L_{\max}$  kan løsningen på optimeringsproblemet representeres ved kurven

$$(2.5.7) \quad L_{\max} \mapsto (p, k_1) = \arg \max \mathcal{E}.$$

## 2.6 Numerisk Løsning

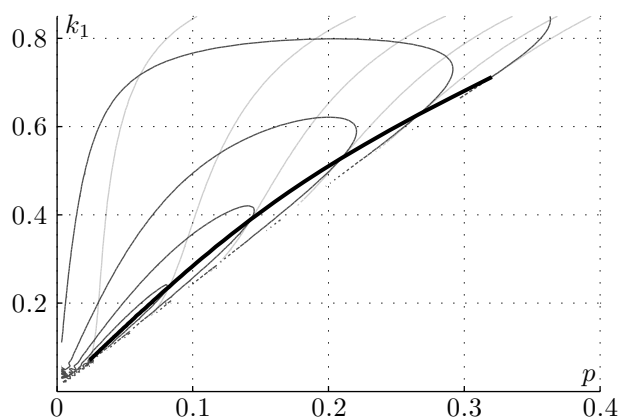
Vi ønsker å finne en løsning, parametrisert av  $L_{\max}$ , på problemet

$$(2.6.1) \quad \begin{cases} \max \mathcal{E}(k_0, p, k_1) &= \frac{\omega_1^2 \left\{ \frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1} - (1 - k_1^2) \right\} - \omega_0^2 \left\{ \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega_0} - (1 - k_0^2) \right\}}{\left( \frac{\sqrt{k_1^2 - p^2}}{\omega_1 \cos \psi} - \frac{k_0}{\omega_0} \right) \omega_1^2 \sin \psi} \\ 0 = G_1(k_0, p, k_1) &:= \frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1} + \frac{\sqrt{k_1^2 - p^2}}{\omega_1} \tan \psi - \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega_0} \\ 0 \leq G_2(k_0, p, k_1) &:= L_{\max} - \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{k_1^2 - p^2}}{\omega_1 \cos \psi} - \frac{k_0}{\omega_0} \right)^{-1}. \end{cases}$$

$G_1 = 0$  løses nå med matlabs `fzero` og definerer funksjonen  $k_0(p, k_1)$ . Problem (2.6.1) løses deretter for 100 noder for  $L_{\max}$  på intervallet  $[1, 15]$  vha. matlabfunksjonen `fminsearch` brukt på objektifunksjonen

$$(2.6.2) \quad \text{obj}(p, k_1) = \begin{cases} \text{NaN}, & \text{hvis } L(p, k_1) > L_{\max} \\ -\mathcal{E}(k_0(p, k_1), p, k_1), & \text{ellers.} \end{cases}$$

Den svarte kurven i figur 2.9 viser løsningen av problem (2.6.1) for  $L_{\max}$  på



Figur 2.9

intervallet  $[1, 15]$ .

Grafene i figur (2.10) gir verdiene av de andre parametrene som funksjoner av  $L_{\max} = L_{\max}^*/(z_1^* - z_0^*)$ .

2.10a: Energien ser ut til å konvergere mot en verdi i underkant av 0.60, men allerede for buer lengre enn  $L = 1.22$  er  $\mathcal{E} > 0.5$  og er dermed mer effektive enn den fysiske idealfjæren. Grafen til  $\mathcal{E}$  flater raskt ut og det er lite ekstra energi å hente ved å la buen være lengre enn  $L = 5$ .

2.10b: Strenglengden nærmer seg buelengden når buelengden er stor, men  $\gamma$  vokser ikke monotont og har et minimum for ca  $L = 1.7$ .

2.10c: Når buelengden øker må buen bli stivere for å kompensere for det økte momentet. Grafen viser at  $\kappa$  vokser omtrent som  $L^3$ .

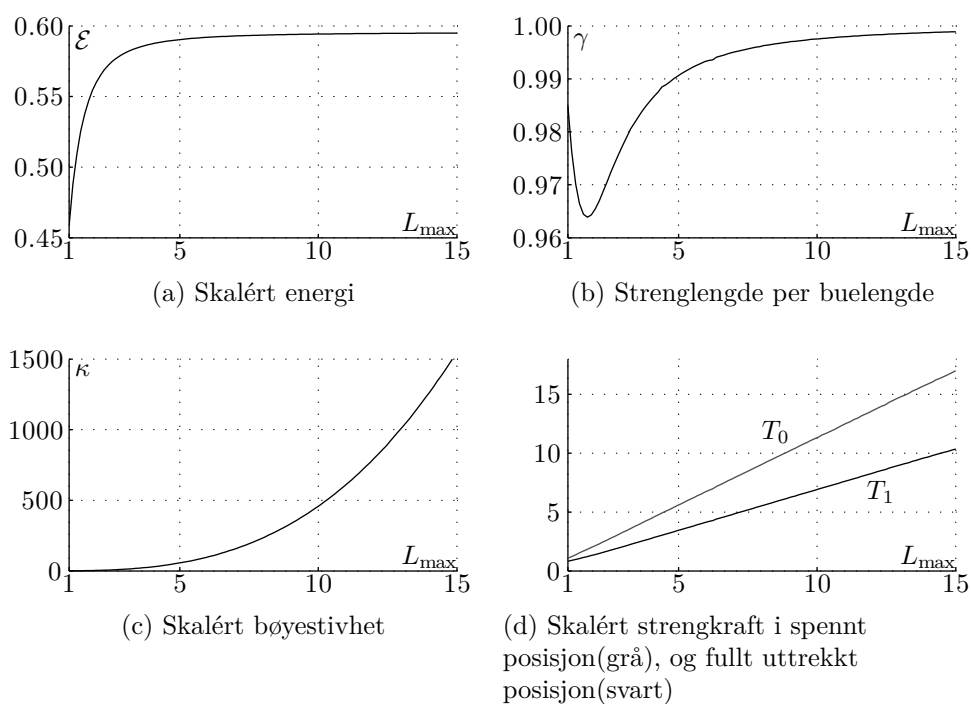
2.10d: Merk at strengkreftene, som i spennet og uttrekkt posisjon henholdsvis er gitt ved

$$T_0 = \frac{\kappa}{L^2} \omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \frac{1}{2 \sin \psi}$$

$$T_1 = \frac{\kappa}{L^2} \omega_1^2 = \frac{1}{2 \sin \psi},$$

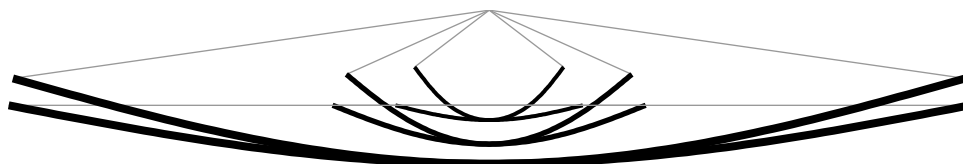
er tilnærmet lineære som funksjoner av  $L_{\max}$ . I tillegg ser vi, kanskje overaskende, at strengkraften alltid er mindre i fullt uttrekkt posisjon enn i spennet posisjon.

Tilslutt viser figur 2.11 tre løsninger representert ved tre buer av lengde 1.0, 1.7 og 5.1, i både spennet og fullt uttrekkt posisjon. Buene er i skala og er plassert slik at trekkklengdene går over samme intervall. Merk at den



Figur 2.10

midterste buen har en lengde som minimerer  $\gamma$ , og er dermed buen som har størst krumning i spenn tilstand.

Figur 2.11: Løsning av (2.6.1) for  $L = 1.0, 1.7$  og  $5.1$ 

Figur 2.12 viser kraftfunksjonene til de samme tre buene som funksjon av trekk lengden minus  $z_0$ . Dvs. vi definerer en ny variabel  $\bar{z}^* := z^* - z_0^*$ , skalerer på vanlig måte og oppnår

$$(2.6.3) \quad \bar{z} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Dersom  $(p_i, k_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  betegner løsningen av problem (2.6.1) for bue nummer  $i$ , er kraftfunksjonene  $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(\bar{z})$  implisitt gitt ved (2.6.3) og iden-

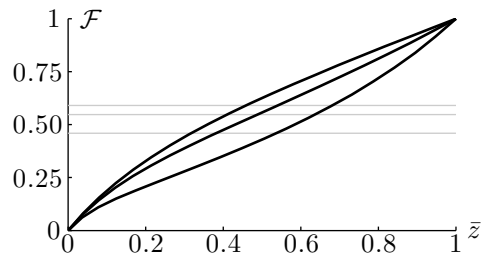
titetene

$$(2.6.4) \quad \mathcal{F}_i(p, k) = \frac{\omega^2(p, k) \sin \psi}{\omega^2(p_i, k_i) \sin \psi_i}$$

$$(2.6.5) \quad z(p, k) = 2 \frac{\sqrt{k^2 - p^2}}{\omega(p, k) \cos \psi}$$

$$(2.6.6) \quad 0 = \gamma(p_i, k_i) - \gamma(p, k).$$

Ligning (2.6.6) definerer funksjonene  $k = k(p; p_i, k_i)$ , hvilket gjør det mulig å parametrisere (2.6.4) og (2.6.5) -og dermed (2.6.3)- i  $p$  på intervallet  $p \in [0, p_i]$ .



Figur 2.12: Kraftfunksjonene til buene i figur 2.11

# Kapittel 3

## Bue med varierende stivhet

### 3.1 Innledning

Alle som en gang forsøkte å lage sin egen pil og bue, visste at einekvisten, selvhugget fra nærmeste skogholdt, måtte spikkes tynnere mot endene slik at buen fikk 'riktig' form og spennst. Hvorfor eller hvordan, var kanskje ikke helt klart, men man erfarte, etter mange forsøk, at buens prestasjon var sterkt avhengig av hvor vellykket denne prepareringen var. Spikkingen var *det* som forandret trevirket fra bare å være en kjepp til å bli en ordentlig bue.

I vår modell er bøyestivheten betegnet med

$$(3.1.1) \quad \kappa := EI.$$

$E$  er det isotrope materialets *Young's Modulus* og  $I$  er *treghtetsmomentet om tverrsnittet* ved  $s$  (se [HKO] side 155) og har dimensjoner henholdsvis kraft per areal og  $m^4$ . Hvis materialet er homogent vil  $E$  være konstant, og stivheten til buen, i et gitt punkt, vil dermed være proporsjonal med kvadratet av tverrsnittarealet i dette punktet. Spikking reduserer tverrsnittet, så i dette kapitlet antas at  $\kappa = \kappa(s)$ , og vi undersøker hvordan dette påvirker buens forskjellige egenskaper.

### 3.2 Formen av en spennst bue

La som før,  $L^*$  betegne buens halve lengde og la buen parametriseres av  $s^* \in [0, L^*]$  der  $s^* = 0$  er midten av buen. Endene forbindes med en ikke-elastisk streng av lengde  $2\gamma L^*$  og buen plasseres i  $(x^*, y^*)$ -planet slik at midten av buen ligger i origo og strengen ligger horisontalt i øvre halvplan. Vinkelen mellom  $x^*$ -aksen og tangenten av buen ved  $s^*$  betegnes med  $\theta(s^*)$ .

Vi antar nå at vi har en gitt stivhetfordelingsfunksjon

$$(3.2.1) \quad \kappa^* : [0, L^*] \rightarrow (0, \infty)$$

som foreløpig antas å være glatt. Hvis strengkraften benevnes ved  $T^*$ , så sier lov 1. at  $\theta$  må være en løsning av differensialligningen

$$(3.2.2) \quad \kappa^*(s^*) \frac{d\theta}{ds^*}(s^*) = T^* \{y^*(L^*) - y(s^*)\}, \quad \theta(0) = 0,$$

der

$$(3.2.3) \quad \frac{dy^*}{ds^*} = \sin \theta, \quad y^*(0) = 0.$$

Merk at dersom  $\theta$  er en løsning av (3.2.2) er  $\theta$  også en løsning av (3.2.2) der  $\kappa^*$  og  $T^*$  erstattes med  $c\kappa^*$  og  $cT^*$  for alle  $c > 0$ . Derfor, hva formen av buen angår, trenger vi bare å undersøke løsninger av (3.2.2) der  $\kappa^*$  er gitt modulo multiplikasjon med en konstant.

Naturlige skaleringer er

$$s^* = L^* s, \quad x^* = L^* x, \quad y^* = L^* y, \quad \kappa^* = \kappa_{\max}^* \kappa, \quad T^* = \frac{\kappa_{\max}^*}{(L^*)^2} T,$$

og ved derivering av (3.2.2) oppnås dermed følgende andreordens ikke-autonome ODE:

$$(3.2.4) \quad \ddot{\theta} = -\frac{1}{\kappa}(\dot{\kappa}\dot{\theta} + T \sin \theta),$$

og vi formulerer derfor grenseverdiproblemet

**Problem 3.** *Gitt en strenglengde  $-1 < \gamma \leq 1$  og gitt en skalært deriverbar stivhetsfordeling*

$$\kappa : [0, 1] \rightarrow (0, 1]$$

finn  $(\theta, x, y, T)$  slik at

$$(3.2.5) \quad \begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{1}{\kappa}(\dot{\kappa}\dot{\theta} + T \sin \theta) & \theta(0) = 0, & \dot{\theta}(1) = 0 \\ \dot{x} = \cos \theta & x(0) = 0, & x(1) = \gamma \\ \dot{y} = \sin \theta & y(0) = 0. \end{cases}$$

Merk at det er fem grensebetingelser på fire funksjoner, men parameteren  $T$  er ukjent og må betraktes som en del av løsningen. Strengt tatt er de to første linjene uavhengig av den siste, men av praktiske hensyn er det greit å



ha med ligningen for  $y$  hvis (3.2.5) skal løses numerisk og løsningen plottes. Man kunne også ha lagt til ligningen og grensebetingelsen

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\kappa\theta^2, \quad \mathcal{E}(0) = 0$$

for å få numeriske verdier av energien i buen.

På grunn av at  $\kappa$  alltid er større enn null, er grenseverdien for  $\dot{\theta}(1)$  i (3.2.5) gitt av (3.2.2). Men så lenge  $\dot{\kappa}(1) \neq 0$  kan stivhetsfordelinger med  $\kappa(1) = 0$  tillates og grenseverdien beregnes da vha. (3.2.2) til å være

$$(3.2.6) \quad \dot{\theta}(1) = \lim_{s \rightarrow 1} T \frac{y(1) - y(s)}{\kappa(s)} = -T \frac{\sin \theta(1)}{\dot{\kappa}(1)}.$$

Vi ser nå på et spesialtilfelle av  $\kappa$  som gir en analytisk løsning av  $\theta$ .

### 3.2.1 Stivhetsfordeling som gir en sirkelsektorformet bue

Gitt en strenglengde  $0 \leq \gamma \leq 1$ , definér  $\alpha \in [0, \pi]$  som løsningen av

$$\gamma = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

og la

$$\kappa(s) = \cos \alpha s - \cos \alpha.$$

Da er  $\theta(s) := \alpha s$ ,  $T := \alpha^2$  en løsning av (3.2.5) fordi

$$\dot{\kappa}\dot{\theta} + T \sin \theta = -\alpha^2 \sin \alpha s + T \sin \alpha s = 0 = \kappa\ddot{\theta}$$

for  $0 \leq s \leq 1$ , og

$$-T \frac{\sin \theta(1)}{\dot{\kappa}(1)} = -\alpha^2 \frac{\sin \alpha}{-\alpha \sin \alpha} = \alpha = \dot{\theta}(1)$$

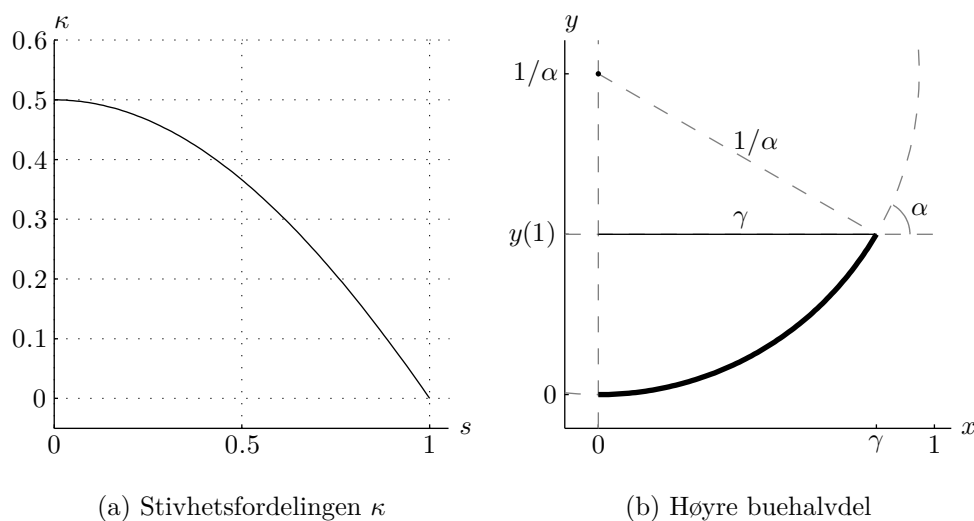
tilfredsstill (3.2.6). Tilslutt ser vi også at

$$x(1) = \int_0^1 \cos \alpha s \, ds = \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \gamma.$$

Figur 3.1 viser situasjonen når  $\alpha = \pi/3$ , dvs.  $\gamma = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = 0.83..$

Dette eksempelet ble funnet ved å stille det omvendte spørsmålet: Gitt en form på buen, hva er den tilhørende stivhetsfordelingen? Altså, hvis  $\theta$  og  $T$  er gitt må  $\kappa$  tilfredsstill den lineære førsteordens ODE'en

$$(3.2.7) \quad \dot{\kappa} + \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\kappa = -T \frac{\sin \theta}{\dot{\theta}}$$



Figur 3.1: Spent bue med varierende stivhet, men konstant krumning

med løsning, som også er gitt av (3.2.2),

$$(3.2.8) \quad \kappa = \frac{T}{\dot{\theta}} \int_s^1 \sin \theta \, ds.$$

Dette viser at for hver bueform, i allefall for glatte bueformer med en ikke-forsvinnende krumning før enden, så finnes en stivhetsfordeling som gir denne bueformen.

### 3.3 Formen av en trukket bue

Formen av en trukket bue med konstant stivhet ble utledet i kapittel 1, og det tilsvarende grenseverdiproblemet for varierende  $\kappa$  er som følger:

Gitt  $-1 < \gamma \leq 1$  og  $\kappa : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ . Anta buen er trukket slik at  $\psi$  er vinkelen mellom strengen og tangenten ved midten av buen. Da er buens form definert av

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{1}{\kappa}(\dot{\kappa}\dot{\theta} + T \sin(\theta + \psi)) & \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(1) = 0 \\ \dot{x} = \cos \theta & x(0) = 0, \quad x(1) = \gamma \cos \psi \\ \dot{y} = \sin \theta & y(0) = 0 \end{cases}$$

Vi vil ikke prøve å utlede egenskaper av løsningen av 3.3.1, men heller, også her, finne en

### 3.3.1 Stivhetsfordeling som gir en sirkelsektorformet bue

For  $0 < \gamma \leq 1$  og en trekkparameter  $\psi$ , la  $\alpha$  være implisitt gitt ved

$$\gamma \cos \psi = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

og la

$$\kappa(s) = \cos(\alpha s + \psi) - \cos(\alpha + \psi).$$

Da er

$$(3.3.2) \quad \theta(s) := \alpha s, \quad T := \alpha^2$$

en løsning av (3.3.1), fordi

$$\begin{aligned} \dot{\kappa} \dot{\theta} + T \sin(\theta + \psi) &= -\alpha^2 \sin(\alpha s + \psi) + \alpha^2 \sin(\alpha s + \psi) \\ &= 0 \\ &= -\kappa(s) \ddot{\theta}, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} -T \frac{\sin(\theta(1) + \psi)}{\dot{\kappa}(1)} &= -\alpha^2 \frac{\sin(\alpha + \psi)}{-\alpha \sin(\alpha + \psi)} \\ &= \alpha \\ &= \dot{\theta}(1) \end{aligned}$$

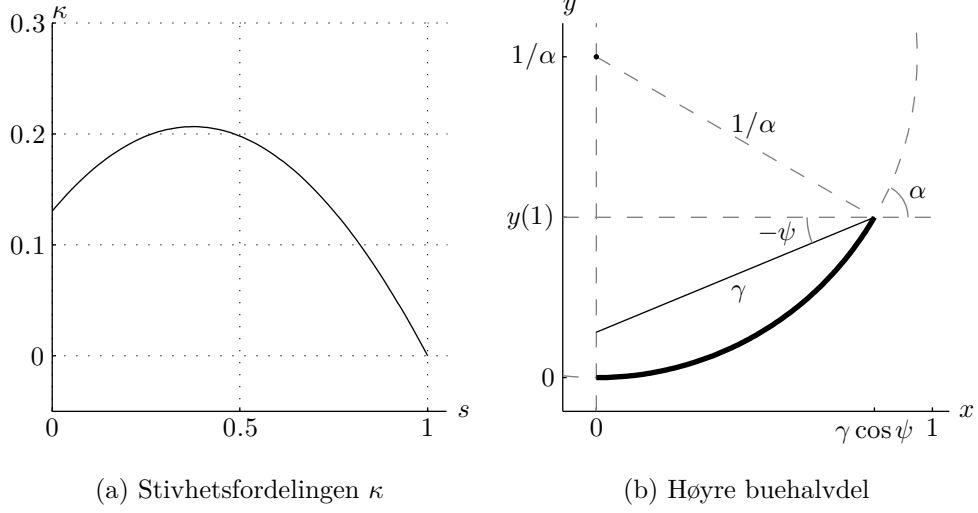
tilfredsstillter grensebetingelsen for  $\dot{\theta}$  i  $s = 1$  når  $\kappa(1) = 0$ . Tilslutt er også

$$\begin{aligned} x(1) &= \int_0^1 \cos \alpha s \, ds \\ &= \frac{\sin \alpha}{\alpha} \\ &= \gamma \cos \psi. \end{aligned}$$

Figur 3.2 viser situasjonen når  $\alpha = \pi/3$  og der vi, for moro skyld, har valgt en negativ  $\psi = -\pi/8$  slik at  $\kappa$  ikke lengre er monoton.  $\gamma$  er ca. 0.90.

## 3.4 Optimering av buer med varierende stivhet.

Vi har sett at buer med konstant stivhet har, ved moderate lengder på buen, en energikoeffisient på 0.55-0.58 hvis man antar at den *effektive* trekk lengden



Figur 3.2: Trukket bue med varierende stivhet, men konstant krumning

er konstant. Derimot, hvis bare trekk lengden er konstant, ligger denne verdien alltid under 0.50 og buen er faktisk mindre effektiv enn den lineære fjæren. Det naturlige spørsmålet er derfor om det er mulig å slå disse verdiene ved å la stivheten variere langs buen.

De to gitte størrelsene for problemet er  $\mathcal{F}_m^*$ , trekkraften i fullt uttrekket posisjon, og enten trekk lengden  $z_1^*$  eller den effektive trekk lengden  $\bar{z}^* := z_1^* - z_0^*$ . Med antatt gitt effektiv trekk lengde, blir skaleringene som følger:

$$(3.4.1) \quad \begin{aligned} L^* &= (z_1^* - z_0^*)L, & (s^*, x^*, y^*) &= L^*(s, x, y), \\ \kappa^* &= \mathcal{F}_m^*(z_1^* - z_0^*)^2 \kappa, \\ T_\psi^* &= \mathcal{F}_m^* T_\psi, & T^* &= \mathcal{F}_m^* T. \end{aligned}$$

Hvis vi benevner funksjonene som beskriver den trukkede og spente buen henholdsvis som  $\theta$  og  $\theta^0$ , så er

$$z_1^* - z_0^* = L^* \left( \int_0^1 \sin \theta \, ds + \gamma \sin \psi - \int_0^1 \sin \theta^0 \, ds \right).$$

Likheten  $\mathcal{F}_m^* = 2T^* \sin \psi$  og de to uttrykkene for  $\gamma$ ,

$$\gamma \cos \psi = \int_0^1 \cos \theta \, ds, \quad \gamma = \int_0^1 \cos \theta^0 \, ds$$

reduserer antall frihetsgrader ytterligere.

Ligningene som beskriver den trukkede og spente buen er dermed

$$\begin{aligned}
 \kappa \dot{\theta} &= L^2 T_\psi \int_s^1 \sin(\theta + \psi) ds, & \theta(0) &= 0, \\
 \kappa \dot{\theta}^0 &= L^2 T \int_s^1 \sin \theta^0 ds, & \theta_0(0) &= 0 \\
 (3.4.2) \quad T_\psi &= \frac{1}{2 \sin \psi}, \\
 \int_0^1 \cos \theta ds &= \cos \psi \int_0^1 \cos \theta^0 ds, \\
 \frac{\cos \psi}{L} &= \int_0^1 \sin(\theta + \psi) ds - \cos \psi \int_0^1 \sin \theta^0 ds.
 \end{aligned}$$

Bortsett fra funksjonen  $\kappa$ , har dette systemet én frihetsgrad, hvilket, i prinsippet, kan velges fritt fra de fire parametrene  $L, T_\psi, T$ , og  $\psi$ .

Målet er nå å finne et uttrykk for den elastiske energien i buen i både spennt og trukket tilstand, for deretter å maksimere differansen mellom disse to verdiene mhp  $\kappa$  og den frie parameteren. Dersom vi velger  $L$  som den frie parameteren, så er problemet vi ønsker å løse på formen

$$(3.4.3) \quad \max_{\kappa, L} (\mathcal{E}[\theta] - \mathcal{E}[\theta_0])$$

for  $\kappa$  i et passende funksjonsrom og  $L$  i et fornuftig intervall. Hvis vi nå ser på den trukkede buen, så er energien på et buelengdeelement gitt ved

$$(3.4.4) \quad d\mathcal{E}^* = \frac{1}{2} \kappa^* \left( \frac{d\theta}{ds^*} \right)^2 ds^*$$

og med skaleringen  $\mathcal{E}^* = \mathcal{F}_m^*(z_1^* - z_0^*) \mathcal{E}$  og multiplikasjon med to (pga. to buehalvdeler), oppnås følgende uttrykk for energien:

$$(3.4.5) \quad \mathcal{E}(s) = \frac{1}{L} \int_0^s \kappa \dot{\theta}^2 d\tilde{s},$$

som ved  $s = 1$  definerer funksjonalen

$$(3.4.6) \quad \mathcal{E}[\kappa; L] = \frac{1}{L} \int_0^1 \kappa(s) \dot{\theta}^2(s, \kappa, L) ds.$$

Det er vanskelig å formulere noen Euler-Lagrange-ligning fra denne funksjonalen fordi  $\theta$ 's avhengighet av  $\kappa$  er for komplisert. Derimot kan  $\kappa$  uttrykkes eksplisitt ved  $\dot{\theta}$  og et integral over en funksjon av  $\theta$ , hvilket indikerer at det

kanskje er en vei ut av dette problemet. Ved å bruke at  $\kappa(1)\dot{\theta}(1) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$  og  $\frac{d}{ds}(\kappa\dot{\theta}) = -L^2T_\psi \sin(\theta + \psi)$  finner vi ved delvis integrasjon at

$$(3.4.7) \quad \begin{aligned} \int_0^1 \kappa\dot{\theta}^2 ds &= \left|_0^1 \kappa\dot{\theta}\theta - \int_0^1 \theta \frac{d}{ds}(\kappa\dot{\theta}) ds \right. \\ &= 0 + L^2T_\psi \int_0^1 \theta \sin(\theta + \psi) ds. \end{aligned}$$

Dette gir funksjonalen

$$(3.4.8) \quad \mathcal{E}[\theta; L, \psi, T_\psi] = LT_\psi \int_0^1 \theta \sin(\theta + \psi) ds$$

og uttrykker energien i buen bare ved buens form og  $L$  og  $\psi$  og *ikke* ved stivhetsfordelingen  $\kappa$ .

Optimeringsproblemet kan nå formuleres som

$$(3.4.9) \quad \begin{aligned} I[\theta, \theta^0; L, \psi, T_\psi, T] &:= \mathcal{E}[\theta; L, \psi, T_\psi] - \mathcal{E}[\theta^0; L, T] \\ &= L \int_0^1 (T_\psi\theta \sin(\theta + \psi) - T\theta_0 \sin\theta_0) ds \\ &= \max! \end{aligned}$$

for  $\theta$  og  $\theta^0$  i et passende funksjonsrom,  $(L, \psi, T_\psi, T) \in \Omega$  i et passende domene i  $\mathbb{R}^4$  og under begrensningene

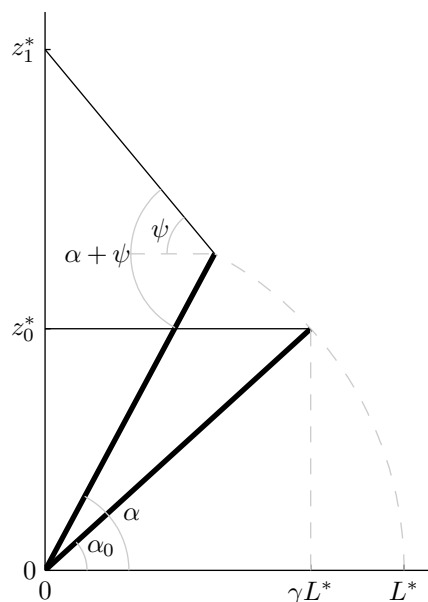
$$(3.4.10) \quad \begin{aligned} T\dot{\theta} \int_s^1 \sin\theta^0 ds &= T_\psi\dot{\theta}^0 \int_s^1 \sin(\theta + \psi) ds, \quad \forall s \in [0, 1] \\ T_\psi &= \frac{1}{2 \sin\psi}, \\ \int_0^1 \cos\theta ds &= \cos\psi \int_0^1 \cos\theta^0 ds, \\ \frac{\cos\psi}{L} &= \int_0^1 \sin(\theta + \psi) ds - \cos\psi \int_0^1 \sin\theta^0 ds. \end{aligned}$$

Vi maksimerer altså over selve bueformene,  $\theta$ , istedet for over stivhetsfunksjonene,  $\kappa$ , og hvis  $\{\theta^*, L^*, \psi^*\}$  er en løsning av (3.4.9)/ (3.4.10) kan stivhetsfunksjonen som gir denne bueformen kalkuleres ved

$$(3.4.11) \quad \kappa^* = \frac{(L^*)^2 T_{\psi^*}}{\dot{\theta}^*} \int_s^1 \sin(\theta^* + \psi^*) ds.$$

Merk at den første ligningen i (3.4.10) ikke er en vanlig begrensning, men heller er en implisitt ODE som definerer  $\theta^0$  uttrykt ved  $\theta$ , eller vice versa. Dette gjør det vanskelig å anvende standard teori innen variasjonsregning på systemet (3.4.9)/ (3.4.10).

## 3.5 Andre buemodeller



Figur 3.3: Høyre halvdel av en en-leddet bue

Energikoeffisienten til buer med konstant stivhet med fiksert effektiv trekk lengde er funnet til å ligge i området 0.55-0.58 og vi ønsker nå å sammenligne disse verdiene med energikoeffisienter til enklere modeller.

### 3.5.1 Stiv bue med enkelt lineært bøyemoment

Anta buen er rett og stiv, men kan knekkes på midten i et ledd som yter en lineær bøyemomentmotstand

$$(3.5.1) \quad B^*(\theta) = K^*\theta, \quad K^* \text{ konstant [Nm]}$$

der  $\theta$  måler vinkelen mellom buearmen og den horisontale koordinataksen.

Situasjonen er skissert i figur 3.3 og hvis det antas at den effektive trekk lengden  $z_1^* - z_0^*$ , og trekraften i fullt uttrekt posisjon  $\mathcal{F}_m^*$ , er gitte størrelser, så har systemet to frihetsgrader. Vi velger  $\psi$  og  $\gamma$  som de frie variablene, og sammenhengene med de andre størrelsene er eksplisitt gitt ved

$$(3.5.2) \quad \alpha = \arccos(\gamma \cos \psi)$$

$$(3.5.3) \quad \alpha_0 = \arccos \gamma.$$

Under skaleringen  $L^* = (z_1^* - z_0^*)L$  får vi også

$$\begin{aligned} L &= (\gamma \sin \psi + \sin \alpha - \sin \alpha_0)^{-1} \\ &= \left( \gamma \sin \psi + \sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2 \psi} - \sqrt{1 - \gamma^2} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Med identiteten  $\mathcal{F}_m^* = 2T_\psi^* \sin \psi$ , der  $T_\psi^*$  er kraften på strengen i uttrekt posisjon, kan bøyemomentkonstanten  $K^*$  bestemmes vha. identiteten  $T_\psi^* r^* = K^* \alpha$ , der  $r^* = L^* \sin(\alpha + \psi)$  er avstanden fra origo til strengen. Dette gir

$$\begin{aligned} K^* &= T_\psi^* L^* \frac{\sin(\alpha + \psi)}{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{F}_m^*(z_1^* - z_0^*) L \frac{\sin(\alpha + \psi)}{\alpha \sin \psi} \end{aligned}$$

der  $\sin(\alpha + \psi)$  kan omskrives til  $\cos \psi (\gamma \sin \psi + \sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2 \psi})$ . Vi er nå istand til å finne et uttrykk for energien i systemet som en funksjon av  $\psi$  og  $\gamma$ . Igjen er systemet konservativt og tilført energi er derfor lik differansen mellom den potensielle energien i buens to posisjoner. Vi kalkulerer energien i de to buehalvdelene:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^* &= 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} B^*(\theta) d\theta \\ (3.5.4) \quad &= K^* \Big|_{\alpha_0}^{\alpha} \theta^2 \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{F}_m^*(z_1^* - z_0^*) L \frac{\sin(\alpha + \psi)}{\alpha \sin \psi} (\alpha^2 - \alpha_0^2). \end{aligned}$$

Nå skaleres dette selvfølgelig med  $\mathcal{F}_m^*(z_1^* - z_0^*)$  og det endelige uttrykket for energien er

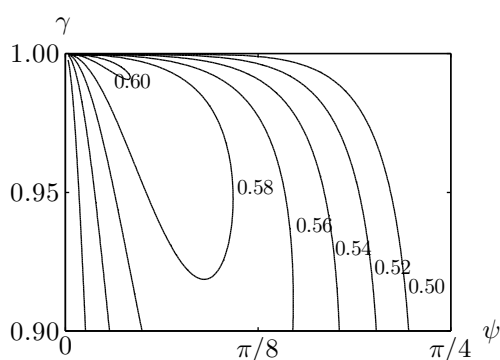
$$(3.5.5) \quad \mathcal{E}(\psi, \gamma) = \frac{(\gamma \sin \psi + \sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2 \psi}) (\arccos^2(\gamma \cos \psi) - \arccos^2 \gamma)}{2 \tan \psi (\gamma \sin \psi + \sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2 \psi} - \sqrt{1 - \gamma^2}) \arccos(\gamma \cos \psi)}.$$

Figur 3.4 viser konturene for  $\mathcal{E}$  i  $\psi, \gamma$ -planet med verdier for  $\mathcal{E}$  opp mot 0.6 for store  $\gamma$  og små  $\psi$ . Igjen ser det ut til at  $\mathcal{E}$  ikke oppnår en maksverdi i det åpne området  $\{\gamma < 1, \psi > 0\}$ , så det er naturlig, også her, å la løsningen av  $\arg \max \mathcal{E}$  parametriseres av  $L$ .

Figuren antyder at punktet  $(0,1)$  kunne ha vært et maksimum for  $\mathcal{E}$ , men selv om  $\gamma = 1$  er en fysisk mulig strenglengde vil  $\psi = 0$  tilsvare uendelig buelengde. Nå er

$$(3.5.6) \quad \begin{aligned} \lim_{\psi \rightarrow 0} \lim_{\gamma \rightarrow 1} \mathcal{E}(\psi, \gamma) &= \lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\psi}{\tan \psi} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$



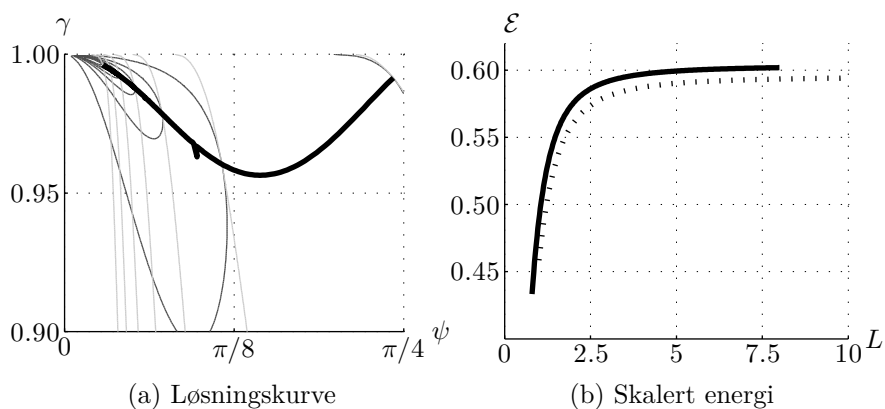


Figur 3.4

men dersom vi går til grensen langs kurven  $\gamma^2 = 1 - \tan^2 \psi$ , viser en mapleberegning at

$$(3.5.7) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \mathcal{E} \left( \arccos \frac{1}{\sqrt{2-s}}, \sqrt{s} \right) = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2}) \approx 0.6036$$

hvilket antyder at grensen  $\lim_{(\psi, \gamma) \rightarrow (0, 1)} \mathcal{E}$  ikke eksisterer.



Figur 3.5

Figur 3.5a viser løsningskurven  $L \mapsto (\psi, \gamma)$  som er funnet vha matlabkoden `fminsearch` brukt på objektivfunksjonen

$$(3.5.8) \quad \text{obj}(\psi, \gamma) = \begin{cases} -\mathcal{E}(\psi, \gamma) & \text{hvis } L(\psi, \gamma) \leq L_{\max} \text{ og } \gamma \leq 1, \\ \text{Inf} & \text{ellers.} \end{cases}$$

Koden kjøres 300 ganger med  $L_{\max}$  stigende uniformt på intervallet  $[0.8, 8]$ . Kurven har retning fra høyre mot venstre og de mørke- og lysegrå linjene viser henholdsvis konturene for  $\mathcal{E}$  og  $L$  som krysser løsningskurven for hver femtiende node.

Under arbeidet med numerikken ble det klart at løsningskurven var lite glatt i enkelte områder. Dette fenomenet bedret seg når toleransen på `fminsearch` ble justert fra standard  $10^{-3}$  ned til  $10^{-8}$ , men som vi ser, har kurven fremdeles noe støy.

Videre viser figur 3.5b den maksimale energien, en bue av denne modellen kan ha, som funksjon av den skalerte buelengden (dvs. forholdet mellom buelengden og den effektive trekk lengden). Den stiplelte linjen er tilsvarende energigraf av en bue med konstant stivhet fra kapittel 2. Vi ser at selv om grafene er oppsiktsvekkende like, har buetypen som er modellert i dette avsnittet større energikoeffisient for alle  $L$ .

Tilslutt vil vi nå sammenligne denne buetypen med de glatte buene med glatte stivhetsfordelinger. Intuitivt burde formen av denne knekkte enleddede buen kunne tilnærmes som løsningen av (3.2.2) der  $\kappa$  er veldig liten rundt  $s = 0$  og veldig stor for resten av intervallet. Altså at den stive buen er en slags svak løsning av (3.2.2) med  $\kappa$  gitt som en distribusjon med  $\infty$  i  $s = 0$  og null på resten av intervallet. Energien i den knekkte enleddede buen ble kalkulert direkte vha. den enkle geometrien til buens stive og rette lemmer og som vi skal se, vil uttrykket som beregner energien i glatte buer med glatte stivhetsfordelinger gi samme resultat, hvilket er nokså bemerkelsesverdig og antyder at funksjonale  $I$  har stor generalitet og at den enleddede buen faktisk er en energibevarende svak løsning.

På samme måte som det ble utledet at strengkraften i uttrekkt posisjon var

$$T_{\psi}^* = \frac{K^* \alpha}{L^* \sin(\alpha + \psi)},$$

finner vi at strengkraften i spennet posisjon er

$$T^* = \frac{K^* \alpha_0}{L^* \sin \alpha_0}.$$

Ettersom  $T_{\psi}^*$  og  $T^*$  skaleres likt, så vil

$$\frac{T}{T_{\psi}} = \frac{T^*}{T_{\psi}^*} = \frac{\alpha_0 \sin(\alpha + \psi)}{\alpha \sin \alpha_0}.$$

Formen av den enleddede buen beskrives, i henholdsvis spennet og uttrekkt posisjon, beskrives som

$$(3.5.9) \quad \theta_0(s) = \alpha_0, \quad \theta(s) = \alpha$$

og energien, kalkulert med funksjonale  $I$ , blir da

$$\begin{aligned}
 I[\theta] &= LT_\psi \int_0^1 \theta \sin(\theta + \psi) \, ds - LT \int_0^1 \theta_0 \sin \theta_0 \, ds \\
 (3.5.10) \quad &= LT_\psi \left( \alpha \sin(\alpha + \psi) - \frac{\alpha_0 \sin(\alpha + \psi)}{\alpha \sin \alpha_0} \alpha_0 \sin \alpha_0 \right) \\
 &= L \frac{\sin(\alpha + \psi)}{2\alpha \sin \psi} (\alpha^2 - \alpha_0^2)
 \end{aligned}$$

hvilket er akkurat det samme uttrykket som i (3.5.4).

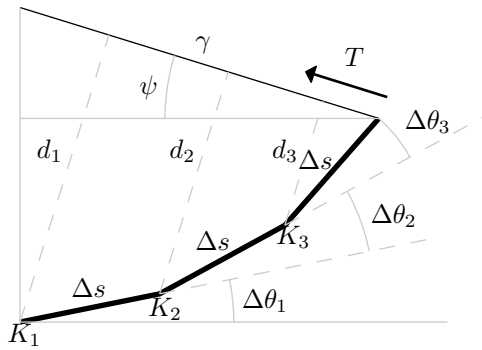
### 3.5.2 $n$ -leddet bue

Vi skal i dette avsnittet vise hvordan formen til en trukket bue med varierende stivhet kan tilnærmes av  $n$ -leddede buer ved passende valg av bøyemotstander,  $K_i$ .

En  $n$ -leddet bue er to symmetriske halvdeler, hver bestående av  $n$  rigide stenger av skalért lengde  $\Delta s = 1/n$ . Stengene er forbundet med hverandre i ledd, der hvert ledd yter en lineær motstand mot å bøyes. Dvs. dersom ledd nummer  $i$ , talt fra midten og ut, utsettes for et bøyemoment  $M$ , så vil vinkelen,  $\Delta\theta_i$ , mellom stang  $i - 1$  og  $i$  være gitt ved

$$(3.5.11) \quad K_i \Delta\theta_i = M.$$

De to endene av buen er forbundet med en streng av lengde  $2\gamma \leq 2$  og er trukket slik at strengen danner en vinkel  $\psi$  med linjen mellom endene på buen. Figur 3.6 skisserer situasjonen for  $n = 3$ .



Figur 3.6: Høyre halvdel av en 3-leddet bue.

Nå, ved å anta at systemet er i likevekt, vil balansering av momenter kreve at

$$(3.5.12) \quad K_i \Delta\theta_i = T d_i, \quad i = 1, \dots, n$$

der  $T$  er strengkraften og  $d_i$  er avstanden fra ledd nummer  $i$  til strengen. Som vi skal se, kan hver  $d_i$  uttrykkes ved  $\{\Delta\theta_i\}$ , så dersom  $\{K_i\}$  er gitt, er (3.5.12) et ligningssett av  $n$  ligninger med  $n + 1$  ukjente. En siste ligning vil relatere  $\gamma$ ,  $\psi$  og  $\{\Delta\theta_i\}$ , hvilket, i prinsippet, er nok til å bestemme den siste ukjente,  $T$ .

Vi ønsker nå å finne ut hvordan man skal velge  $\{K_i\}$  slik at løsningen av (3.5.12) tilnærmer en bue gitt av grenseverdiproblemet

$$(3.5.13) \quad \begin{aligned} \kappa(s)\dot{\theta}(s) &= T \int_s^1 \sin(\theta + \psi) ds, \\ \theta(0) &= 0, \\ \int_0^1 \cos \theta ds &= \gamma \cos \psi. \end{aligned}$$

La oss først undersøke bøyemotstandene for underfølgen gitt av

$$(3.5.14) \quad n = 3 \cdot 2^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Definer  $K_i^m$ ,  $\Delta\theta_i^m$  og  $d_i^m$  som henholdsvis bøyemotstanden, vinkelen og avstanden til strengen i leddet ved punktet

$$(3.5.15) \quad (i - 1)\Delta s_m = \frac{i - 1}{3 \cdot 2^m}.$$

Nå tilsvarener en økning av  $m$  med én, dobbelt så mange ledd der hvert nye ledd er plassert mellom to eksisterende. Punktet  $(i - 1)\Delta s_m$  vil være det samme som punktet  $2(i - 1)\Delta s_{m+1}$ , noe som sees klart fra

$$(3.5.16) \quad 2(i - 1)\Delta s_{m+1} = \frac{2(i - 1)}{3 \cdot 2^{m+1}} = \frac{i - 1}{3 \cdot 2^m} = (i - 1)\Delta s_m.$$

Vi ønsker, når  $m \rightarrow \infty$ , at bueformen beskrevet av (3.5.12), konvergerer. Dvs. mer presist, at krumningen (forandring av buens vinkel mot horisontalaksen per buelengde), og avstanden til strengen, i hvert punkt konvergerer. Altså at

$$(3.5.17) \quad \begin{aligned} d_i^m &\rightarrow d_{2i}^{m+1} \text{ og} \\ \frac{\Delta\theta_i^m}{\Delta s_m} &\rightarrow \frac{\Delta\theta_{2i}^{m+1}}{\Delta s_{m+1}} \text{ når} \\ m &\rightarrow \infty, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 3 \cdot 2^m. \end{aligned}$$

Ved multiplisering av (3.5.12) med  $\Delta s_m$ , gir en omarrangering at

$$\begin{aligned}
 (3.5.18) \quad K_i^m \Delta s_m &= T d_i^m \frac{\Delta s_m}{\Delta \theta_i^m} \\
 &\rightarrow T d_{2i}^{m+1} \frac{\Delta s_{m+1}}{\Delta \theta_{2i}^{m+1}} \\
 &= K_{2i}^{m+1} \Delta s_{m+1}
 \end{aligned}$$

eller

$$(3.5.19) \quad K_{2i}^{m+1} \rightarrow 2K_i^m$$

som viser at bøyemotstanden i hvert ledd må gå som  $\mathcal{O}(n)$  for å oppnå konvergens. Nå, ved å droppe underfølgen, gir det derfor mening, for alle  $n$ , å definere bøyestivheter

$$(3.5.20) \quad \kappa_i := K_i \Delta s, \quad i = 1, \dots, n$$

der multiplikasjonen med  $\Delta s$  opphever avhengigheten av  $n$  og verdiene  $\kappa_i$  kan dermed velges uavhengig av antall ledd buen består av.

La nå  $\theta_i := \sum_{j=1}^i \Delta \theta_j$  betegne vinkelen til stang nummer  $i$  mot horisontalaksen. En liten trigonometrisk øvelse overbeviser oss om at lengden fra leddene til strengen er

$$(3.5.21) \quad d_i = \sum_{j=i}^n \sin(\theta_j + \psi) \Delta s$$

og at den  $(n+1)$ 'te ligningen som forbinder  $\gamma$ ,  $\psi$  og  $\{\Delta \theta_i\}$  er

$$(3.5.22) \quad \gamma \cos \psi = \sum_{i=1}^n \cos \theta_i \Delta s.$$

De fire følgene  $\Delta \theta_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\kappa_i$  og  $d_i$  trenger nå å transformeres til funksjoner på intervallet  $[0, 1]$ . Dette kan gjøres ved å innføre en indeksfunksjon

$$\begin{aligned}
 (3.5.23) \quad i &: [0, 1] \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \\
 i(s) &= \lceil \frac{s}{\Delta s} \rceil, \quad \text{for } 0 < s \leq 1, \\
 i(0) &= 1,
 \end{aligned}$$

der takfunksjonen  $\lceil \cdot \rceil$  gir det minste heltallet større eller lik argumentet, og deretter definere trappefunksjonene  $\theta^{\Delta s}$ ,  $\Delta \theta^{\Delta s}$ ,  $\kappa^{\Delta s}$  og  $d^{\Delta s}$ , med parameter  $\Delta s$ , som  $\theta^{\Delta s}(s) := \theta_{i(s)}$  osv. Dersom vi nå lar  $\Delta s$  gå mot null, er det

nærliggende å benevne grensen av  $\frac{\Delta\theta^{\Delta s}}{\Delta s}$  med  $\dot{\theta}$  og grensen av  $\theta^{\Delta s}$  med  $\theta$  og dette rettferdiggjøres ved å innse at

$$\begin{aligned}
 \theta(s) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \theta^{\Delta s}(s) \\
 &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\lceil \frac{s}{\Delta s} \rceil} \Delta\theta_j \\
 (3.5.24) \quad &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\lceil \frac{s}{\Delta s} \rceil} \frac{\Delta\theta^{\Delta s}(j\Delta s)}{\Delta s} \Delta s \\
 &= \int_0^s \dot{\theta} \, ds.
 \end{aligned}$$

Vi oppsummerer dette avsnittet i en proposisjon.

**Proposisjon 1.** *Gitt  $\Delta s = 1/n$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$  og  $\kappa : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$  og der  $\{\Delta\theta_1, \dots, \Delta\theta_n, T\}$  er løsningen av ligningssettet*

$$\begin{aligned}
 K_i \Delta\theta_i &= T \sum_{j=i}^n \sin(\theta_j + \psi) \Delta s, \quad i = 1, \dots, n \\
 (3.5.25) \quad \gamma \cos \psi &= \sum_{j=1}^n \cos \theta_j \Delta s,
 \end{aligned}$$

der  $K_i = \frac{\kappa((i-1)\Delta s)}{\Delta s}$  og  $\theta_i = \sum_{j=1}^i \Delta\theta_j$ , så vil  $\theta^{\Delta s}(s) = \theta_{\lceil \frac{s}{\Delta s} \rceil}$  tilnærme løsningen av (3.5.13) i betydningen  $\{\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \theta^{\Delta s}, T\}$  er en løsning av (3.5.13).

*Bevis.* Merk at  $\kappa^{\Delta s} = K_{i(s)} \Delta s$  faktisk konvergerer til  $\kappa$  fordi, ved å skrive  $\lceil \frac{s}{\Delta s} \rceil = \frac{s}{\Delta s} + \delta$  for en  $\delta \in [0, 1)$ , så er

$$\begin{aligned}
 K_{i(s)} \Delta s &= \kappa \left( \left( \lceil \frac{s}{\Delta s} \rceil - 1 \right) \Delta s \right) \\
 (3.5.26) \quad &= \kappa \left( \left( \frac{s}{\Delta s} + \delta - 1 \right) \Delta s \right) \\
 &\rightarrow \kappa(s).
 \end{aligned}$$

Da gjenstår det bare å samle trådene og observere at

$$\begin{aligned}
 (3.5.27) \quad K_i \Delta\theta_i &= T d_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \iff \\
 K_{i(s)} \Delta s \frac{\Delta\theta^{\Delta s}(s)}{\Delta s} &= T \sum_{j=\lceil \frac{s}{\Delta s} \rceil}^n \sin \{ \theta^{\Delta s}(j\Delta s) + \psi \} \Delta s \quad \forall s \in [0, 1].
 \end{aligned}$$

La  $\Delta s \rightarrow 0$  på begge sider, og vi har

$$(3.5.28) \quad \kappa \dot{\theta} = T \int_s^1 \sin(\theta + \psi) ds$$

ved å gjennkjenne det siste leddet i (3.5.27) som en Riemannsum. Av samme grunn er integralbegrensningen oppfylt fordi

$$(3.5.29) \quad \begin{aligned} \gamma \cos \psi &= \sum_{i=1}^n \cos \theta_i \Delta s \\ &\rightarrow \int_0^1 \cos \theta ds. \end{aligned}$$

□

At løsningen av (3.5.25) tilnærmer løsningen av (3.5.13) er ingen overaskelse, da (3.5.25) essensielt er et differanseskjema som kan utledes direkte fra (3.5.13). Det som er overaskende er heller det faktum at en diskretisering av (3.5.13) har en fysisk manifestasjon i  $n$ -leddede buer og at denne diskretiseringen modellerer disse buene eksakt.

### 3.6 Optimering via $n$ -leddet bue

I forrige avsnitt så vi at vi kunne finne formen,  $\{\theta_i\}$ , og strengkraften,  $T_\psi$ , av en bue med varierende stivhet,  $\kappa$ , strenglengde  $\gamma$  og trekkparameter  $\psi$  med vilkårlig stor nøyaktighet, ved å løse ligningssettet

$$(3.6.1) \quad \begin{aligned} \frac{\kappa((i-1)\Delta s)}{\Delta s} \Delta \theta_i &= T_\psi \sum_{j=i}^n \sin(\theta_j + \psi) \Delta s, & i = 1, \dots, n \\ \gamma \cos \psi &= \sum_{i=1}^n \cos \theta_i \Delta s, & \theta_i = \sum_{j=1}^i \Delta \theta_j \end{aligned}$$

for tilstrekkelig stor  $n = \frac{1}{\Delta s}$ . Det er derfor naturlig å forsøke å *optimere* buer med varierende stivhet med samme metode.

Først må vi bekrefte at energien i den  $n$ -leddede buen faktisk er gitt ved funksjonale  $I$ . Vi reskalerer i henhold til (3.4.1) slik at systemet blir tilpasset energiberegning, og finner at  $\{\Delta \theta_i\}$  må tilfredsstill

$$(3.6.2) \quad K_i \Delta \theta_i = T_\psi L \sum_{j=i}^n \sin(\theta_j + \psi) \Delta s, \quad i = 1, \dots, n$$

og at den skalerte energien i begge buahalvdelene er

$$\begin{aligned}
 (3.6.3) \quad U(\{\Delta\theta_i\}) &= 2 \sum_{i=1}^n \int_0^{\Delta\theta_i} K_i \theta \, d\theta \\
 &= \sum_{i=1}^n K_i \Delta\theta_i^2.
 \end{aligned}$$

Merk at vi fra (3.6.2) kan skrive

$$\begin{aligned}
 (3.6.4) \quad \sin(\theta_i + \psi)\Delta s &= \frac{K_i \Delta\theta_i - K_{i+1} \Delta\theta_{i+1}}{T_\psi L}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\
 \sin(\theta_n + \psi)\Delta s &= \frac{K_n \Delta\theta_n}{T_\psi L}
 \end{aligned}$$

og vi kan da bekrefte at

$$\begin{aligned}
 (3.6.5) \quad I[\{\Delta\theta_i\}] &= LT_\psi \int_0^1 \theta_{i(s)} \sin(\theta_{i(s)} + \psi) \, ds \\
 &= LT_\psi \sum_{i=1}^n \theta_i \sin(\theta_i + \psi) \Delta s \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i (K_i \Delta\theta_i - K_{i+1} \Delta\theta_{i+1}) + \theta_n K_n \Delta\theta_n \\
 &= \theta_1 K_1 \Delta\theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) K_2 \Delta\theta_2 + \dots + (\theta_n - \theta_{n-1}) K_n \Delta\theta_n \\
 &= \sum_{i=1}^n K_i \Delta\theta_i^2 = U(\{\Delta\theta_i\}).
 \end{aligned}$$

Energien i en *spennt*  $n$ -leddet bue kan utledes på tilsvarende måte og ved å diskretisere begrensningene i (3.4.10) kan variasjonsproblemet (3.4.9) reduseres til et optimeringsproblem på et domene  $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+4}$ :

Finn  $(\{\Delta\theta_i\}, \{\Delta\theta_i^0\}, L, T_\psi, T, \psi) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{2n+4}$  som maksiméerer objektiv-



funksjonen

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= LT_\psi \sum_{i=1}^n \theta_i \sin(\theta_i + \psi) \Delta s - LT \sum_{i=1}^n \theta_i^0 \sin \theta_i^0 \Delta s \\ &\text{under de } n+3 \text{ begrensningene} \\ 0 &= G_i = T_\psi \Delta \theta_i^0 \sum_{j=i}^n \sin(\theta_j + \psi) - T \Delta \theta_i \sum_{j=i}^n \sin \theta_j^0, \quad i = 1, \dots, n \\ (3.6.6) \quad 0 &= G_{n+1} = T_\psi - \frac{1}{2 \sin \psi} \\ 0 &= G_{n+2} = \cos \psi \sum_{i=1}^n \cos \theta_i^0 - \sum_{i=1}^n \cos \theta_i \\ 0 &= G_{n+3} = \sum_{i=1}^n \left( \sin(\theta_i + \psi) - \cos \psi \sin \theta_i^0 \right) \Delta s - \frac{\cos \psi}{L}. \end{aligned}$$

Dette er et veldefinert standard optimeringsproblem og bør kunne løses vha. veletablerte numeriske skjemaer. Merk at for  $n = 1$  så er systemet (3.6.6) ekvivalent med optimeringsproblemet diskutert i avsnitt 3.5.1. Domenet  $\Omega$  beskrives av ulikheter som bla. krever at alle de  $2n + 4$  variablene må være ikke-negative i tillegg til fornuftige øvre skranke for  $L$  og  $\psi$ . Når en løsning er funnet, kan  $K_i$ 'ene beregnes f.eks. ved

$$K_i = \frac{T_\psi L}{\Delta \theta_i} \sum_{j=i}^n \sin(\theta_j + \psi) \Delta s$$

og en kontinuerlig og ferdig dimensjonert  $\kappa^*(s^*)$ , klar for anvendelse innen bueproduksjon, kan finnes ved å interpolere

$$\kappa^* \left( \frac{i-1}{n} L^* \right) = \mathcal{F}_m^*(z_1^* - z_0^*)^2 \frac{K_i}{n}.$$



# Kapittel 4

## Dynamikk: den elastiske pendel

### 4.1 Innledning

Frem til nå har vi bare utforsket statiske egenskaper til forskjellige buer. Selv om buestrengens akselerasjon av en pil i høyeste grad er en dynamisk prosess, vil antagelsen om bevaring av energi gi en meget enkel formel for pilens utgangshastighet og dermed gjøre et kapittel som bare omhandler dette temaet veldig kort. Nå er i praksis overførselen fra buens elastiske potensielle energi til pilens kinetiske energi ikke 100%, da noe av problemet er at pilen kan forlate strengen før buen har slått helt ut. Buestrengens lille, men unngåelige, forlengning under akselerasjonen av pilen kan også ha betydning for en bues overføringseffektivitet. Vi skal ikke utforske dette nærmere, men heller illustrere noen dynamiske egenskaper ved å introdusere *den elastiske pendel*.

### 4.2 Oppsett og antagelser.

Plassér en masseløs elastisk stang av lengde 1 i  $xy$ -planet slik at venstre ende er forankret horisontalt i origo. Stangen har konstant skalært bøyestivhet  $\kappa = 1$  og vil i ustresset tilstand være rett og dermed ligge på linjen mellom  $(0,0)$  og  $(1,0)$ . I den frie enden sitter en punktmasse med masse  $m$ . Ta tak i denne massen og dra den fra  $(1,0)$  til et punkt  $\mathbf{x} := (x, y)^T$  i planet. Stangen vil da beskrive en kurve fra origo til  $\mathbf{x}$  som tilfredsstillere grenseverdi problemet

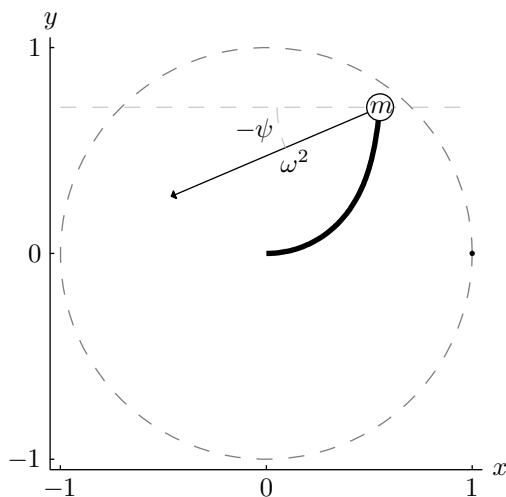
$$(4.2.1) \quad \begin{aligned} \kappa\theta'' &= -\omega^2 \sin(\theta + \psi), & \theta(0) &= 0, & \theta'(1) &= 0 \\ x &= \int_0^1 \cos \theta \, ds \\ y &= \int_0^1 \sin \theta \, ds, \end{aligned}$$

der  $\theta$ , som måler vinkelen mellom tangenten av stangen og horisontalaksen, er buelengdeparametrisert av  $s \in [0, 1]$ . Parametrene  $\omega^2$  og  $\psi$ , som er konstante mhp  $s$ , representerer henholdsvis styrken på kraften man holder massen i ro med og retningen av kraften målt i positiv klokkeretning med  $\psi = 0$  når retningen er mot venstre (se figur 4.1).  $\omega^2$  og  $\psi$  er ukjente, men man kan tenke seg at begrensningene gitt av  $x$  og  $y$  opphever disse to frihetsgradene. Vi kan likevel ikke anta at dette systemet definerer en unik  $\theta$  for hver  $\mathbf{x}$ , men at  $\theta$  også avhenger av hvilken vei man drar massen fra  $(1, 0)$  til  $\mathbf{x}$ .

En antagelse om at stangen ikke er tøyelig i lengderetningen vil, i tillegg til glattheten av  $\theta$ , åpenbart måtte begrense  $\mathbf{x}$  til området

$$(4.2.2) \quad \mathbb{B} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| < 1\} \cup \{(1, 0)\}.$$

Når vi nå slipper massen fra punktet  $\mathbf{x} \in \mathbb{B}$ , eller kanskje gir den et dytt i tillegg, så er det naturlige spørsmålet: hva blir den fremtidige banen til massen? Av Newtons tredje lov, og ettersom selve stangen er masseløs, er det naturlig å anta, ved hvert tidspunkt, at stangens form er beskrevet av (4.2.1) der  $(x, y)$  er massens posisjon i dette tidspunktet, og at denne formen kan bestemmes *unikt* ut ifra hvilken vei massen kommer fra.



Figur 4.1: Området  $\mathbb{B}$  og den elastiske stangen. Pilen er kraftvektoren som trengs for å holde massen  $m$  i ro i punktet  $\mathbf{x}$ . Av grafiske hensyn er pilen forkortet med en faktor fire.

### 4.3 Modellering av den elastiske pendel.

Vi er altså ute etter å finne kurven  $[0, \infty) \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{B}$  når utgangspunktet er  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  og utgangshastigheten er  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ , der  $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{x}}(t)$ . Den potensielle energien i stangen kan beskrives som

$$(4.3.1) \quad U = \frac{1}{2} \kappa \int_0^1 (\theta')^2 ds,$$

men ettersom  $\theta$  ikke er entydig bestemt av  $\mathbf{x}(t)$  kan man bare forvente at det finnes en implisitt sammenheng mellom  $U$  og  $\mathbf{x}$ , altså en funksjon  $f$  slik at

$$(4.3.2) \quad f(U, \mathbf{x}) = 0$$

og at flaten beskrevet av  $f$  over  $\mathbb{B}$  kan folde over seg selv. Disse kurvene i  $\mathbb{B}$ , der flaten folder seg, kjennetegnes ved  $\frac{\partial f}{\partial U} = 0$  og er bifurkasjonspunkter i den forstand at dersom banen til massen krysser disse linjene, så vil stangen gjøre et diskontinuerlig hopp fra en form til en annen. Den nye stangformen vil ha lavere potensiell energi og det dynamiske systemet er derfor ikke generelt konservativt.

Baner som ikke krysser bifurkasjonslinjene vil derimot kunne beskrives av det konservative firedimensjonale førsteordens dynamiske systemet

$$(4.3.3) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{1}{m} \nabla_{\mathbf{x}} U^T(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \end{aligned}$$

der  $U$  bestemmes fra (4.3.2) slik at  $U(\mathbf{x}(t))$  er kontinuerlig mhp.  $t$ .

Som før, kan differensialligningen i (4.2.1) skrives på den ekvivalente formen

$$(4.3.4) \quad \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{\omega^2}{\kappa} \{ \cos(\theta + \psi) - \cos(\alpha + \psi) \}$$

der  $\alpha = \theta(1)$  er vinkelen mot horisontalaksen av den frie enden. Merk at det a priori gir mening å la  $\alpha$  ta verdier på hele  $\mathbb{R}$  slik at antall hele multipler av  $2\pi$  i  $\alpha$  dermed betegner antallet av stangens looper. Derimot representerer  $\psi$  bare retningen på kraften og har ingen mening utover sin verdi modulo  $2\pi$ . Vi kan derfor velge å begrense  $\psi$  til å ligge i intervallet  $(-\pi, \pi]$ .

Ligning (4.3.4) er åpenbart en ikke-negativ størrelse og vi undersøker hvilke begrensninger dette setter på  $\theta$  og på forholdet mellom  $\psi$  og  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \cos(\theta + \psi) - \cos(\alpha + \psi) \\ &= 2 \sin \frac{\alpha - \theta}{2} \sin \left( \frac{\alpha + \theta}{2} + \psi \right), \quad \forall \theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]. \end{aligned}$$

$$\iff$$

$\exists n, m \in \mathbb{Z}$  slik at

$$(i) : \quad 2n\pi \leq \frac{\alpha - \theta}{2} \leq (2n + 1)\pi \quad \text{og} \quad (ii) : \quad 2m\pi \leq \frac{\alpha + \theta}{2} + \psi \leq (2m + 1)\pi$$

eller

$$(iii) : \quad (2n - 1)\pi \leq \frac{\alpha - \theta}{2} \leq 2n\pi \quad \text{og} \quad (iv) : \quad (2m - 1)\pi \leq \frac{\alpha + \theta}{2} + \psi \leq 2m\pi,$$

$$\forall \theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}].$$

Påstand (i) er ekvivalent med følgende:  $\exists n \in \mathbb{Z}$  slik at

$$2n\pi \leq -\frac{\theta_{\max} - \alpha}{2} \leq 0 \leq \frac{\alpha - \theta_{\min}}{2} \leq (2n + 1)\pi$$

som holder hvis, og bare hvis  $n = 0$  og

$$0 \leq -(\theta_{\max} - \alpha) \leq 0 \leq \alpha - \theta_{\min} \leq 2\pi,$$

dvs.

$$\alpha = \theta_{\max} \quad \text{og} \quad \theta_{\max} - \theta_{\min} \leq 2\pi.$$

Ved å bruke dette resultatet i (ii), ser vi at  $\psi$  modulo  $2\pi$  må tilfredsstille

$$-\frac{\theta_{\min} + \alpha}{2} \leq \psi \leq \pi - \alpha.$$

På samme måte er (iii) ekvivalent med

$$\alpha = \theta_{\min} \quad \text{og} \quad \theta_{\max} - \theta_{\min} \leq 2\pi,$$

og sammen med (iv) gir dette

$$-\pi - \alpha \leq \psi \leq -\frac{\theta_{\max} + \alpha}{2}.$$

Dermed vil  $\alpha$  alltid være en ekstremalverdi for  $\theta$  og siden  $\theta_{\min} \leq 0 \leq \theta_{\max}$ , er  $|\alpha| \leq 2\pi$ , noe som betyr at stangen ikke kan ha spiraler.

Vi vil nå først forsøke å finne en potensialfunksjon når stangen er uten vendepunkter. Dvs. når  $\theta$  er strengt monoton, eller sagt på en annen måte,  $\theta' \neq 0$  for  $s \in (0, 1)$ . Vi trenger bare å undersøke tilfellet  $\theta' > 0$  ettersom (4.2.1) har en symmetri om  $x$ -aksen i den forstand at dersom  $\{\theta, \omega, \psi\}$  er en løsning av (4.2.1) med input  $(x, y)$ , så er det lett å sjekke at  $\{-\theta, \omega, -\psi\}$  er en løsning med input  $(x, -y)$ .

Ettersom  $\theta'$  er positiv må nødvendigvis  $\theta_{\min} = 0 < \alpha = \theta_{\max}$ , og mengden i planet som  $(\psi, \alpha)$  kan, og må, være et element i, er

$$(4.3.5) \quad \Psi := \left\{ (\psi, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \alpha < 2\pi, -\frac{\alpha}{2} < \psi < \pi - \alpha \right\}.$$

Ved, som vanlig, å skrive

$$p := \sin \frac{\psi}{2},$$

$$k := \sin \frac{\alpha + \psi}{2},$$

med de veldefinerte inverse  $\psi = 2 \arcsin p$  og  $\alpha = 2 \arcsin k - 2 \arcsin p$ , danner dette en bijeksjon

$$(4.3.6) \quad \mathbf{p} := \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} : \Psi \rightarrow \mathbb{P}$$

der

$$\mathbb{P} := \left\{ (p, k) \in \mathbb{R}^2 : 0 < k < 1, |p| < k \right\}.$$

Hvis vi lar

$$t := \frac{1}{k} \sin \frac{\theta + \psi}{2}$$

så vet vi at løsningen av

$$\dot{\theta} = \sqrt{2}\omega \sqrt{\cos(\theta + \psi) - \cos(\alpha + \psi)}, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta(1) = \alpha$$

er implisitt gitt ved

$$\omega s = F(t, k) - F(p/k, k),$$

som igjen er inverterbar for  $s \in [0, 1]$  til

$$t = \operatorname{sn}(\omega s + F(p/k, k)).$$

Dermed er funksjonen  $\theta$  unikt bestemt av  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$  som

$$(4.3.7) \quad \theta(s; \mathbf{p}) = 2 \arcsin \{k \operatorname{sn}(\omega s + F)\} - 2 \arcsin p$$

der

$$F = F(\mathbf{p}) = F(p/k, k) \quad \text{og} \quad \omega = \omega(\mathbf{p}) = K(k) - F(p/k, k).$$

Potensialet  $U$  kan nå beregnes vha. forskjellige egenskaper ved de elliptiske funksjoner og -integraler:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\theta')^2 ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ 2 \frac{k\omega \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}} \right\}^2 ds, \quad u = \omega s + F \\
&= 2\omega^2 \int_0^1 k^2 \operatorname{cn}^2 u ds \\
&= 2\omega^2 \int_0^1 \{ \operatorname{dn}^2 u - (1 - k^2) \} ds \\
&= 2\omega \int_{F(p/k, k)}^{K(k)} \{ \operatorname{dn}^2 u - (1 - k^2) \} du \\
&= 2\omega \{ E(k) - E(p/k, k) - (1 - k^2)(K(k) - F(p/k, k)) \}
\end{aligned}$$

La nå  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\mathbf{p}) := E(k) - E(p/k, k)$ , og det er dermed etablert et potensial som funksjon av  $\mathbf{p}$

$$(4.3.8) \quad U(\mathbf{p}) = 2\omega(\mathbf{p}) \{ (\tilde{\omega}(\mathbf{p}) - (1 - k^2)\omega(\mathbf{p})) \}.$$

Vi trenger nå å finne relasjonen mellom  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{p}$ . Ved å definere

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &:= \int_0^1 \cos(\theta + \psi) ds \\
\tilde{y} &:= \int_0^1 \sin(\theta + \psi) ds
\end{aligned}$$

vet vi fra tidligere at  $\tilde{x} = 2\frac{\tilde{\omega}}{\omega} - 1$  og at  $\tilde{y} = \frac{2}{\omega}\sqrt{k^2 - p^2}$ . Dermed, hvis vi lar  $Q$  være rotasjonsmatrisen

$$(4.3.9) \quad Q(p) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2p^2 & 2p\sqrt{1 - p^2} \\ -2p\sqrt{1 - p^2} & 1 - 2p^2 \end{pmatrix}.$$

er det lett å se at funksjonen  $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}$ ,  $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{p})$  er gitt ved

$$(4.3.10) \quad \mathbf{x}(\mathbf{p}) = Q(p) \begin{pmatrix} 2\frac{\tilde{\omega}}{\omega} - 1 \\ \frac{2}{\omega}\sqrt{k^2 - p^2} \end{pmatrix}.$$

Vi forsøker nå å bestemme mengden  $\mathbf{x}(\mathbb{P}) \subset \mathbb{B}$ . Først finner vi bildet av sidene i trekanten  $\mathbb{P}$  under  $\mathbf{x}$ , og deretter, hvis  $\mathbf{x}$  er 1-1, kan man ved et kontinuitetsargument hevde at  $\mathbf{x}(\mathbb{P})$  må ligge på, og fylle, innsiden av bildet av randen til  $\mathbb{P}$ .



På linjen  $l_1 = \{k = 1, -1 < p < 1\}$ , er  $\tilde{x} = -1$  og  $\tilde{y} = 0$  fordi  $\omega(p, 1) = \infty$  og  $\tilde{\omega}(p, 1) = 1 - p$ , så

$$\mathbf{x}(l_1) = \left\{ \begin{pmatrix} -\cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} : -\pi < \psi < \pi \right\}$$

dvs. enhetssirkelen minus punktet  $(1, 0)$ .

På linjen  $l_2 = \{0 < p = k < 1\}$  er både  $\tilde{x}$  og  $\tilde{y}$   $\frac{0}{0}$ -uttrykk, men ved å sette  $a = p/k$  og bruk av l'Hôpital finner vi at

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k, k) &= \lim_{a \rightarrow 1} 2 \frac{\tilde{\omega}(ak, k)}{\omega(ak, k)} - 1 \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} 2 \frac{E(k) - E(a, k)}{K(k) - F(a, k)} - 1 \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} 2 \frac{(1 - k^2 a^2)^{1/2} (1 - a^2)^{-1/2}}{(1 - k^2 a^2)^{-1/2} (1 - a^2)^{-1/2}} - 1 \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} 2(1 - k^2 a^2) - 1 \\ &= 1 - 2k^2 = 1 - 2p^2 = \cos \psi, \\ \tilde{y}(k, k) &= \lim_{a \rightarrow 1} 2k \frac{\sqrt{1 - a^2}}{K(k) - F(a, k)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} 2k \frac{-1}{\sqrt{1 - a^2}} \left( -\sqrt{1 - a^2} \sqrt{1 - k^2 a^2} \right) \\ &= 2k \sqrt{1 - k^2} = 2p \sqrt{1 - p^2} = \sin \psi \end{aligned}$$

og dermed er

$$\mathbf{x}(l_2) = \{Q\tilde{\mathbf{x}}(l_2) : 0 < p < 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

og vi ser at hele linjen  $l_2$  kollapser til punktet  $(1, 0)$ .

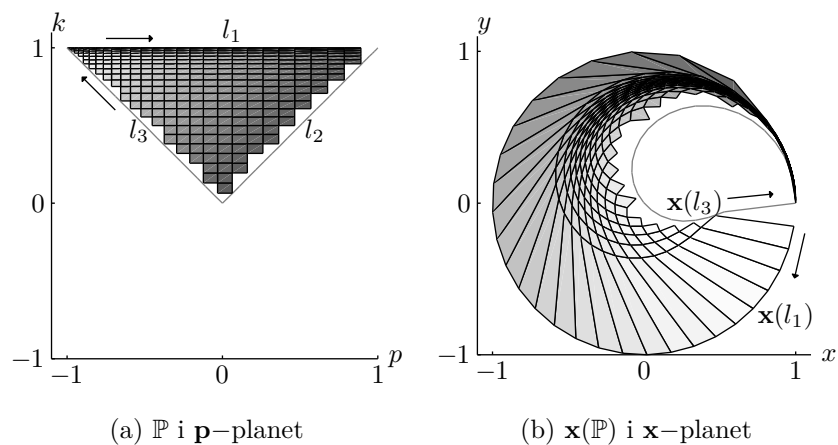
På grunn av at funksjonene  $F(a, k)$  og  $E(a, k)$  er odde mhp variabelen  $a$ , vil vi på den siste linjen,  $l_3 = \{-1 < p = -k < 0\}$ , få

$$\tilde{x}(-k, k) = 2 \frac{E(k) - E(-1, k)}{K(k) - F(-1, k)} - 1 = 2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 =: \gamma(k).$$

Og siden  $\tilde{y}(-k, k) = 0$ , gir dette

$$\mathbf{x}(l_3) = \left\{ \gamma(-p) \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \end{pmatrix} : -\pi < \psi < 0 \right\} = \left\{ \gamma(p) \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} : 0 < \psi < \pi \right\}.$$

Vi vet fra tiligere analyser at  $\gamma$  er monoton med  $\gamma(0) = 1$ ,  $\gamma'(0) = 0$  og  $\gamma(1) = -1$ ,  $\gamma'(1) = -\infty$ . Dette forteller oss at kurven  $\mathbf{x}(l_3)$  starter oppover



Figur 4.2: En visualisering av  $\mathbf{x} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}_+^0$ .

fra  $(1, 0)$  initsielt tangent med enhets sirkelen, bøyer av og passerer origo når  $\gamma$  er null, for deretter å returnere til  $(1, 0)$  terminalt parallelt med  $x$ -aksen.

Dette området i  $\mathbb{B}$  innenfor  $\mathbf{x}(l_1)$  og utenfor  $\mathbf{x}(l_3)$  døper vi  $\mathbb{B}_+^0$ . 0 står for antallet av stangens vendepunkter og + betegner fortegnet til  $\alpha$ . Figur 4.2 indikerer at  $\mathbf{x}(\mathbb{P}) = \mathbb{B}_+^0$  hvilket må være tilfellet hvis  $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}_+^0$ , er en bijeksjon.

Jacobimatrisen til  $\mathbf{x}$  benevnes som

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_p & x_k \\ y_p & y_k \end{pmatrix},$$

og spørsmålet er om denne er singulær på  $\mathbb{P}$ . Ved produktregelen skriver vi, i mangel av annen notasjon,

$$d\mathbf{x} = d(Q\tilde{\mathbf{x}}) = (dQ)\tilde{\mathbf{x}} + Q d\tilde{\mathbf{x}}$$

der  $dQ$  er den tre-dimensjonale strukturen  $\left(\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \mathbf{p}}\right)$  og kan skrives som to sammensatte matriser som

$$dQ = \left[ \frac{\partial Q_{ij}}{\partial p} \mid \frac{\partial Q_{ij}}{\partial k} \right] = \left[ Q_p \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Nå er

$$Q_p = \psi_p Q_\psi = \psi_p \begin{pmatrix} -\sin \psi & \cos \psi \\ -\cos \psi & -\sin \psi \end{pmatrix} = \psi_p Q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

og dermed kan vi skrive

$$\begin{aligned}
d\mathbf{x} &= \left[ Q_p \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \tilde{\mathbf{x}} + Q d\tilde{\mathbf{x}} \\
&= \left[ \psi_p Q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \tilde{\mathbf{x}} + Q d\tilde{\mathbf{x}} \\
&= Q \left\{ \left[ \psi_p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \tilde{\mathbf{x}} + d\tilde{\mathbf{x}} \right\} \\
&= Q \left\{ \psi_p \begin{pmatrix} \tilde{y} & 0 \\ -\tilde{x} & 0 \end{pmatrix} + d\tilde{\mathbf{x}} \right\} \\
&= Q \begin{pmatrix} \psi_p \tilde{y} + \tilde{x}_p & \tilde{x}_k \\ -\psi_p \tilde{x} + \tilde{y}_p & \tilde{y}_k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

med determinant

$$\begin{aligned}
|d\mathbf{x}| &= 1 \cdot \{(\psi_p \tilde{y} + \tilde{x}_p) \tilde{y}_k - (\tilde{y}_p - \psi_p \tilde{x}) \tilde{x}_k\} \\
&= |d\tilde{\mathbf{x}}| + \psi_p \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}}_k
\end{aligned}$$

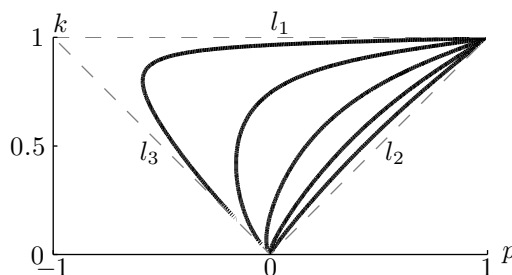
der  $\psi_p = \frac{2}{\sqrt{1-p^2}}$ . Vi må nå beregne de fire partiellderiverte av  $\tilde{x}$  og  $\tilde{y}$ , og resultatet er som følger:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_p &= 2 \frac{\tilde{\omega} - \omega(1-p^2)}{\omega^2 \sqrt{k^2 - p^2} \sqrt{1-p^2}} \\
\tilde{x}_k &= \frac{2}{\omega^2} \{ \tilde{\omega}_k \omega - \tilde{\omega} \omega_k \} \\
\tilde{y}_p &= 2 \frac{\sqrt{k^2 - p^2} - \omega p \sqrt{1-p^2}}{\omega^2 \sqrt{k^2 - p^2} \sqrt{1-p^2}} \\
\tilde{y}_k &= 2 \frac{k\omega - \omega_k(k^2 - p^2)}{\omega^2 \sqrt{k^2 - p^2}}
\end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned}
\omega_k &= \frac{1}{k(1-k^2)} \left\{ \tilde{\omega} - (1-k^2)\omega + \frac{p\sqrt{1-p^2}}{\sqrt{k^2-p^2}} \right\} \\
\tilde{\omega}_k &= \frac{1}{k} \left\{ \tilde{\omega} - \omega + \frac{p\sqrt{1-p^2}}{\sqrt{k^2-p^2}} \right\}.
\end{aligned}$$

Å avgjøre analytisk om  $|d\mathbf{x}|$  er null på  $\mathbb{P}$  synes uoverkommelig arbeidsomt, så vi setter lit til figur 4.3 som viser fem konturer til  $|d\mathbf{x}|$  ved verdier, henholdsvis fra høyre mot venstre,  $10^{-4}, \dots, 10^0$ . Da  $\mathbf{x}(l_2)$  er et enkelt punkt,

Figur 4.3: Konturer av  $|\mathbf{dx}|$  på  $\mathbb{P}$ .

viser figuren, som forventet, at  $|\mathbf{dx}|$  går mot null på randen  $p = k$ , og ettersom alle punkter nær  $l_2$  blir sendt til den veldig smale korridoren mellom  $\mathbf{x}(l_3)$  og  $\mathbf{x}(l_1)$  rett over  $(1,0)$ , er det naturlig at  $|\mathbf{dx}|$ , i absoluttverdi, er veldig liten. Likevel synes  $|\mathbf{dx}|$  å være positiv der, og siden alle partiellderiverte av  $\omega, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{y}$  og  $\psi$  er kontinuerlige på  $\mathbb{P}$ , stoler vi på figuren og godtar at  $\mathbf{dx}$  er kontinuerlig og inverterbar på  $\mathbb{P}$ .

Dermed eksisterer en funksjon  $\mathbf{p} : \mathbb{B}_+^0 \rightarrow \mathbb{P}$  og potensialet  $U$  kan defineres som en funksjon på  $\mathbb{B}_+^0$  ved å skrive

$$U(\mathbf{x}) := U(\mathbf{p}(\mathbf{x})).$$

Ettersom vi ikke har noen eksplisitt formel for  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ , vil vi trekke det dynamiske systemet

$$(4.3.11) \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = -\frac{1}{m} \nabla_{\mathbf{x}} U^T(\mathbf{x}(t))$$

tilbake til  $\mathbb{P}$ . Dvs. finne kurven  $t \mapsto \mathbf{p}(t) \in \mathbb{P}$  slik at  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{p}(t))$  tilfredsstiller (4.3.11). Nå er

$$d\mathbf{p} := \begin{pmatrix} p_x & p_y \\ k_x & k_y \end{pmatrix}$$

inversen til  $\mathbf{dx}$  og dermed er

$$(4.3.12) \quad \nabla_{\mathbf{x}} U = \nabla_{\mathbf{p}} U d\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{p}} U d\mathbf{x}^{-1}.$$

Vi finner også at

$$\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}\dot{\mathbf{p}}$$

og

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} (d\mathbf{x}\dot{\mathbf{p}}) = \frac{d}{dt} (d\mathbf{x}) \dot{\mathbf{p}} + d\mathbf{x}\ddot{\mathbf{p}}$$

der  $\frac{d}{dt}(\mathbf{dx})$  er  $2 \times 2$ -matrisen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_p & x_k \\ y_p & y_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{pp}\dot{p} + x_{pk}\dot{k} & x_{pk}\dot{p} + x_{kk}\dot{k} \\ y_{pp}\dot{p} + y_{pk}\dot{k} & y_{pk}\dot{p} + y_{kk}\dot{k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}^T H_x \\ - \\ \dot{\mathbf{p}}^T H_y \end{pmatrix} \\ &= \dot{\mathbf{p}}^T \begin{pmatrix} H_x \\ - \\ H_y \end{pmatrix} =: \dot{\mathbf{p}}^T H \end{aligned}$$

der  $H_x$  og  $H_y$  benevner Hessmatrisene til henholdsvis  $x = x(p, k)$  og  $y = y(p, k)$ . Altså er

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{dx}\ddot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}}^T H \dot{\mathbf{p}}$$

og ved å bruke (4.3.11) og (4.3.12) kan dermed  $\ddot{\mathbf{p}}$  uttrykkes som en funksjon av  $\mathbf{p}$  og  $\dot{\mathbf{p}}$  som

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}} &= \mathbf{dx}^{-1} (\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{p}}^T H \dot{\mathbf{p}}) \\ (4.3.13) \quad &= \mathbf{dx}^{-1} \left( -\frac{1}{m} (\nabla_{\mathbf{p}} U \mathbf{dx}^{-1})^T - \dot{\mathbf{p}}^T H \dot{\mathbf{p}} \right) \\ &= -\frac{1}{m} (\mathbf{dx}^T \mathbf{dx})^{-1} \nabla_{\mathbf{p}} U^T - \mathbf{dx}^{-1} \dot{\mathbf{p}}^T H \dot{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

der

$$\nabla_{\mathbf{p}} U^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial p} \\ \frac{\partial U}{\partial k} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{(p^2+1-2k^2)\omega-\tilde{\omega}}{\sqrt{k^2-p^2}\sqrt{1-p^2}} \\ \omega_k \tilde{\omega} - \omega \tilde{\omega}_k \end{pmatrix}$$

## 4.4 Numerisk løsning når stangen er uten vendepunkter.

Vi ønsker altså å løse det fire-dimensjonale førsteordens autonome initialproblemet

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{q} \\ (4.4.1) \quad \dot{\mathbf{q}} &= -\mathbf{dx}^{-1} \left( \frac{1}{m} \mathbf{dx}^{-T} \nabla_{\mathbf{p}} U^T + \mathbf{q}^T H \mathbf{q} \right) \\ \mathbf{p}(0) &= \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \end{aligned}$$

på

$$(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) \in \mathbb{P} \times \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, \infty).$$

Først av alt: En tidsskaléring  $t \mapsto \sqrt{m}t$  viser at en løsning av (4.4.1) er essensielt uavhengig av massen og vi kan dermed velge  $m$  slik at tidsintervallet for en numerisk løsning er av orden 1. Systemet implementeres i matlab og blir forsøkt løst med forskjellige ode-løserer. Bortsett fra  $H$  har vi analytiske uttrykk for alle funksjoner på høyre side av (4.4.1), og selv om det er mulig, vil en analytisk  $H$  kreve beregninger av tilsammen 12 forskjellige andreordens partiellderiverte av  $\tilde{x}, \tilde{y}, \omega$  og  $\tilde{\omega}$  samt transformasjoner fra  $H_{\tilde{x}}$  og  $H_{\tilde{y}}$  til  $H_x$  og  $H_y$ . Vi vil ikke gå denne veien og tyr derfor til numeriske beregninger av  $H$ . Ved å legge et  $n \times m$ -grid over rektangelet  $[-1, 1] \times [0, 1] \supset \mathbb{P}$  kan en førsteordens tilnærming av f.eks.  $x_{pp}$  og  $x_{pk}$  finnes vha. matlabfunksjonen `gradient` som

$$[X_{pp}, X_{pk}] = \text{gradient}(X_p, \bar{p}, \bar{k})$$

der  $\bar{p}$  og  $\bar{k}$  er nodevektorer av lengde henholdsvis  $n$  og  $m$  og  $X_p$  er  $m \times n$ -matrisen analytisk beregnet for hvert nodepar der  $p^2 \leq k^2$ . Nå er  $X_{pp}$  og  $X_{pk}$  selv  $m \times n$ -matriser så for verdier av  $(p, k)$  mellom nodene gis f.eks.  $x_{pp}$  ved lineær interpolasjon som ved

$$x_{pp} = \text{interp2}(P, K, X_{pp}, p, k)$$

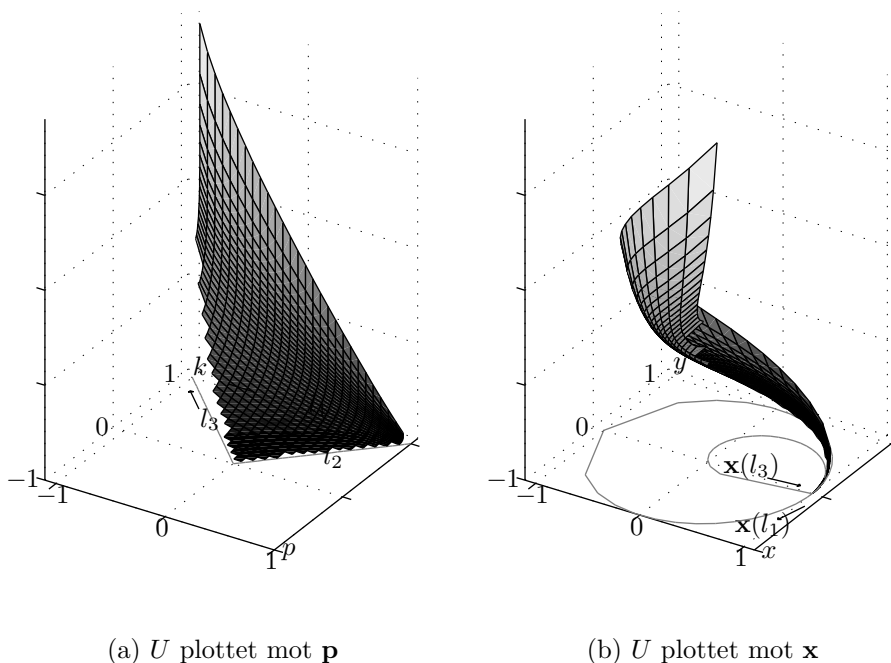
der  $P$  og  $K$  er  $m \times n$ -matrisene hvor hver rad i  $P$  er  $\bar{p}$  og hvor hver kollonne i  $K$  er  $\bar{k}$ .

Som vi ser fra figurene 4.2 og 4.3, er det mye action ved  $l_1$  hvor  $|\mathbf{dx}| \rightarrow \infty$ . Nodene bør ligge tett nær  $k = 1$  hvis man skal ha håp om gode tilnærminger av  $H$  og vi bruker derfor en bijeksjon på  $(0, 1)$  som transformerer opprinnelig uniformt fordelte noder,  $\bar{k}$ , til noder hvis inbyrdes avstand går mot null når  $k$  går mot 1. Funksjonen  $f$  gitt ved

$$f(k) = \sin \frac{\pi k}{2}$$

tilfredsstiller disse kravene, men under eksperimentering med `ode45` viser det seg at dette ikke er nok. Vi prøver derfor med funksjonen  $f \circ f$  og vi ser at løsningen oppfører seg mye bedre nær  $k = 1$ .

Figurene i 4.4 viser flaten  $z = U$  plottet henholdsvis mot  $\mathbf{p}$  og  $\mathbf{x}$  med 30 noder i  $p$ -retning og 40 noder i  $k$ -retning. Vi ser, som forventet, at  $U = 0$  både ved linjen  $l_2$  og ved det korresponderende punktet  $(1, 0) \in \mathbb{B}_+^0$ . Høyden på disse figurene er omlag 38, men den siste noderekken med  $k = 1$  er selvsagt ikke plottet fordi  $U(p, 1) = \infty$ . Figurene gir et inntrykk av hvor utrolig raskt  $U$  vokser når  $k$  går mot 1, særlig med tanke på at vi har brukt transformasjonen  $f \circ f$  som er ekstremt flat nær 1 da  $\frac{d^n}{dk^n}(f \circ f)(1) = 0$  for  $n = 1, 2, 3$ .



Figur 4.4: Potensialet for en stang uten vendepunkter

Formen av flaten i figur 4.4b er sammenlignbar med en spiralformet vannsklie i et badeland og vi kan forvente at en løsningskurve  $\mathbf{x}(\mathbf{p}(t))$  av (4.4.1) vil følge en bane lik den en badegjest vil ha ned denne sklien: Kanskje vil banen ligge stabilt litt opp i ytterveggen slik at doseringen kompensere akkurat for sentrifugalkraften, eller kanskje vil banen oscillere mellom inner- og ytterveggen hele veien ned. Hvis ossilasjonen er kraftig nok, er det kanskje en mulighet for at badegjesten faktisk faller utenfor innerveggen og inn i, det ennå utforskede,  $\mathbb{B}_+^1$  eller  $\mathbb{B}_-^1$ . Ytterveggen er derimot trygg da den er uendelig høy.

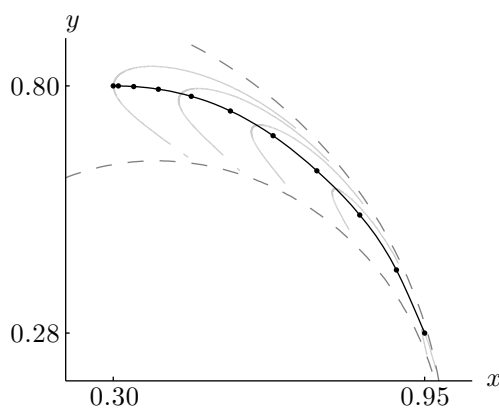
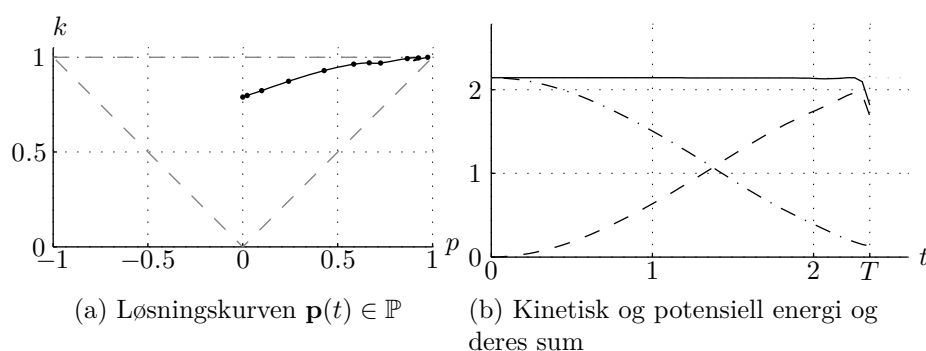
Et viktig avvik fra analogien mellom vannsklien og flaten  $z = U(\mathbf{x})$  er at sistnevnte blir uendelig smal og har uendelig krumning i  $x$ -retning når flaten nærmer seg  $(1,0)$ . Dette forhindrer oss, antagelig, i å løse systemet (4.4.1) numerisk, i dets nåværende form, globalt på  $t \in [0, \infty)$  med  $\mathbf{x}$  alternerende i  $\mathbb{B}_+^0$  og  $\mathbb{B}_-^0$ .

Når vi nå kjører en implementasjon av (4.4.1) med en av matlabs ode-løserer for  $t \in [0, T]$ , vil et plot av systemets totale energi mot  $t$  gi en god indikasjon på om løsningen er valid. Hvis  $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$  er en numersik løsning,

så er energien til massepunktet

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^T(t) \dot{\mathbf{x}}(t) + U(\mathbf{p}(t)) \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{q}^T(t) d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} \mathbf{q}(t) + U(\mathbf{p}(t)), \quad d\mathbf{x} = d\mathbf{x}(\mathbf{p}(t)). \end{aligned}$$

og forventes å være konstant. At  $E$  er konstant, garanterer selvfølgelig ikke at løsningen er korrekt, men dersom  $E$  ikke er konstant, er vi sikre på at løsningen er gal.

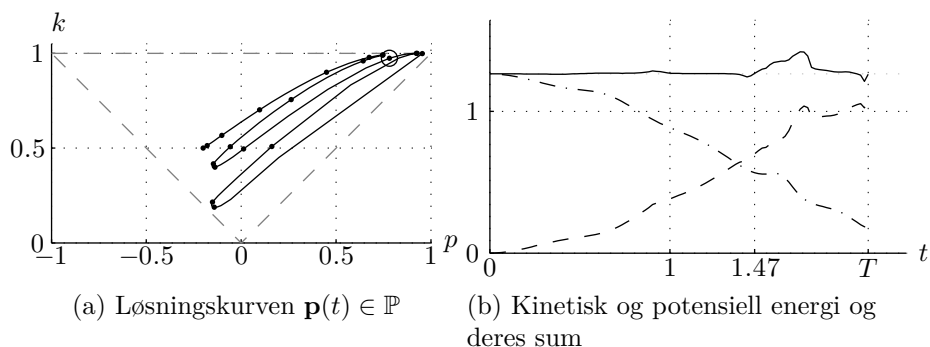


Figur 4.5: ode45-løsning på  $t \in [0, 2.35]$  med initialbetingelser  $[\mathbf{p}_0 \ \mathbf{q}_0] = [0, 0.79, 0, 0]$ .

Ettersom (4.4.1) er autonomt og da spesielt  $H$  er uavhengig av  $t$ , trenger matrisene  $X_{pp}$ ,  $X_{pk}$ ,  $X_{kk}$ ,  $Y_{pp}$ ,  $Y_{pk}$  og  $Y_{kk}$  bare å beregnes én gang. Og ettersom syntaksen til matlabs `gradient` er slik at matrisene beregnes i par, får vi også beregnet  $X_{kp}$  og  $Y_{kp}$ . Dette er like greit fordi litt eksperimentering viser at energien holder seg konstant lengre dersom vi bruker gjennomsnittet av  $X_{pk}$

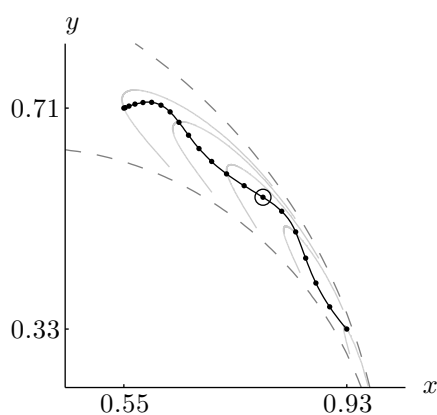


#### 4.4. NUMERISK LØSNING NÅR STANGEN ER UTEN VENDEPUNKTER.69



(a) Løsningskurven  $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{P}$

(b) Kinetisk og potensiell energi og deres sum



(c) Løsningskurven  $\mathbf{x}(\mathbf{p}(t)) \in \mathbb{B}_+^0$  og fem uniformt fordelte konturer av  $U$

Figur 4.6: ode23s-løsning på  $t \in [0, 2.1]$  med initsialbetingelser  $[\mathbf{p}_0 \ \mathbf{q}_0] = [-0.2, 0.5, 0, 0]$ .

og  $X_{kp}$  som tilnærming til den blandaderiverte til  $x$ - og likeledes for  $y$ - enn om vi bare velger en av dem.

Figurene 4.5 og 4.6 viser løsninger som er representanter for de to scenariene beskrevet ovenfor. Vi har beregnet  $H$  vha. et  $300 \times 400$ -grid der  $k$  er fordelt etter  $f \circ f$  i begge løsningene, mens  $p$  er uniformt fordelt i den første løsningen og fordelt under transformasjonen  $\sin \frac{\pi p}{2}$  i den andre løsningen. Den første løsningen er beregnet med ode45 på 51 jevnt fordelte tidspunkter mellom  $t = 0$  og  $t = 2.35$  der hver femte tidsnode er indikert med et punkt. Selv om disse punktene synes å ligge uregelmessig langs løsningskurven i  $\mathbb{P}$ , indikerer de transformerte punktene i figur 4.5c, som forventet, en jevn akselerasjon når løsningen går mot  $(1,0)$ . Figur 4.5b viser utviklingen av den kinetiske og potensielle energien og vi ser at deres sum holder seg konstant i store deler av tidsintervallet. Det plutselige fallet i hastigheten mot slutten, må tolkes som et sammenbrudd av løsningen.

Den andre løsningen er beregnet på 101 jevnt fordelte tidspunkter mellom  $t = 0$  og  $t = 2.10$  der hver femte tidsnode er indikert med et punkt. Vi fant at `ode23s`, som er beregnet på stive problemer, bevarte energien bedre enn `ode45`. Likevel ser vi en signifikant forandring i energien etter ca.  $t = 1.47$  og vi kan ikke stole på løsningen etter dette. Sirkelen på løsningskurvene i 4.6a og 4.6c markerer dette tidspunktet. I motsetning til den første løsningen der badegjesten holder en jevn og fin kurve, ser vi her effekten av å komme skeivt ut; å starte turen fra oppe i veggen på innsiden av sklien gjør at han initsielt får en retning mer på tvers, heller enn på langs, av sklien. Dermed havner han opp i ytterveggen og prosessen gjentar seg. Det er denne effekten som gjør det vanskelig å beregne løsninger for initsialbetingelser som tilsvarer  $\mathbf{x}_0$  i tredje eller fjerde kvadrant; massepunktet vil, fra slike startbetingelser, etterhvert treffe ytterveggen så hardt at  $k$  blir så nærme 1 at løsningen bryter sammen. I figur 4.6c treffer massen ytterveggen første gang ved  $t = 0.672$  med  $k = 0.9922$  og andre gang ved  $t = 1.617$  med  $k = 0.99992$  som åpenbart er for høyt for dette skjemaet å håndtere.

## 4.5 Elastisk stang med vendepunkter

Det er nå naturlig å finne mengden  $\mathbb{B}_+^1 \subset \mathbb{B}$ . Dvs. alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{B}$  slik at det eksisterer en stang med *ett* vendepunkt og der enden har vinkel  $\alpha > 0$  og ligger ved  $\mathbf{x}$ . Vi søker derfor en løsning av (4.3.4) der det eksisterer en unik  $s^* \in [0, 1]$  slik at  $\theta'(s^*) = 0$  og  $\alpha = \theta(1) > 0$ . Ettersom  $\alpha$  er positiv, vet vi at  $\alpha = \theta_{\max}$  og ved unikhets av  $s^*$ , må  $\theta' > 0$  for  $s \in (s^*, 1)$  og  $\theta' < 0$  for  $s \in [0, s^*)$ . Sammen med det faktum at  $\theta(0) = 0$ , forteller dette oss at  $\theta(s^*) = \theta_{\min} < 0$ .

$\theta$  må tilfredsstille (4.3.4) på hele  $[0, 1]$ , så ved  $s = s^*$  er dette uttrykket null og hvis ikke kraften  $\omega^2$  er null, så må

$$\cos(\theta_{\min} + \psi) = \cos(\alpha + \psi).$$

Det kan nå vises rigorøst, ettersom  $\theta_{\min} < 0 < \alpha$  og  $\alpha - \theta_{\min} \leq 2\pi$ , at

$$\theta_{\min} = -\alpha - 2\psi$$

og der  $\alpha$  og  $\psi$  tilhører det samme parameterrommet  $\Psi$ .

Siden  $\theta$  ikke er monoton, finnes ikke lenger et 1-1-forhold mellom  $s$  og  $\theta$ , og vi må søke etter individuelle implisitte løsninger på de to intervallene  $[0, s^*)$  og  $(s^*, 1]$ . Vi lar som vanlig

$$k = \sin \frac{\alpha + \psi}{2}, \quad p = \sin \frac{\psi}{2}, \quad t = \frac{1}{k} \sin \frac{\theta + \psi}{2}$$

og på det første intervallet må

$$\omega ds = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}, \quad s = 0 \Rightarrow t = p/k, \quad s = s^* \Rightarrow t = -1,$$

så

$$\omega s = -F(t, k) + F(p/k, k), \quad \omega s^* = K(k) + F(p/k, k)$$

der den siste likheten følger av at  $F(\cdot, k)$  er en odde funksjon.

På det andre intervallet er

$$\omega ds = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}, \quad s = s^* \Rightarrow t = -1, \quad s = 1 \Rightarrow t = 1,$$

så

$$\omega(s - s^*) = F(t, k) + K(k), \quad \omega(1 - s^*) = 2K(k).$$

Vi forventer at disse to løsningene sammenfaller ved  $s = s^*$  så vi kan beregne  $\omega$  til

$$\omega = \omega s^* + \omega(1 - s^*) = 3K(k) + F(p/k, k)$$

og  $s^*$  til

$$s^* = \frac{K(k) + F(p/k, k)}{3K(k) + F(p/k, k)}.$$

Dette kan settes sammen til en full implisitt løsning på  $[0,1]$ :

$$(4.5.1) \quad \omega s = \begin{cases} -F(t, k) + F(p/k, k), & s \in [0, s^*] \\ F(t, k) + F(p/k, k) + 2K(k), & s \in [s^*, 1] \end{cases}$$

og pga. symmetriske og periodiske egenskaper ved sn, kan løsningen skrives eksplisitt på  $[0,1]$  som

$$(4.5.2) \quad \theta(s) = -2 \arcsin \{k \operatorname{sn}(\omega s - F(p/k, k))\} - \psi.$$

Hvis vi nå skriver  $\cos(\theta + \psi) = 1 - 2k^2t^2 = -1 + 2(1 - k^2t^2)$  og  $\sin(\theta + \psi) = 2kt\sqrt{1 - k^2t^2}$ , kan vi beregne

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \int_0^1 \cos(\theta + \psi) ds \\ &= -1 + 2 \left( \int_0^{s^*} + \int_{s^*}^1 \right) (1 - k^2t^2) ds \\ &= -1 + 2 \left( -\frac{1}{\omega} \int_{p/k}^{-1} + \frac{1}{\omega} \int_{-1}^1 \right) \frac{\sqrt{1 - k^2t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt \\ &= -1 + \frac{2}{\omega} \left( -\{E(-1, k) - E(p/k, k)\} + E(k) - E(-1, k) \right) \\ &= 2\frac{\tilde{\omega}}{\omega} - 1 \end{aligned}$$

der vi definerer  $\tilde{\omega} := 3E(k) + E(p/k, k)$ .

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= \int_0^1 \sin(\theta + \psi) \, ds \\ &= 2k \left( \int_0^{s^*} + \int_{s^*}^1 \right) t \sqrt{1 - k^2 t^2} \, ds \\ &= 2k \left( -\frac{1}{\omega} \int_{p/k}^{-1} + \frac{1}{\omega} \int_{-1}^1 \right) \frac{t \, dt}{\sqrt{1 - t^2}} \\ &= \frac{2k}{\omega} \left( -\left[ \begin{array}{c} -1 \\ p/k \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right] \right) (-\sqrt{1 - t^2}) \\ &= -\frac{2}{\omega} \sqrt{k^2 - p^2}.\end{aligned}$$

(For å unngå unødvendig notasjon, vil vi ikke betegne disse nye funksjonene med superskript, som f.eks.  $\tilde{x}^1$ , dersom vi ikke er ute etter en spesiell distingsjon fra de gamle, som da vil ha superskript  $\cdot^0$ . Vi må bare huske at i dette avsnittet så betyr  $\omega, \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{y}$  osv. noe annet enn tidligere.)

Potensialet tar sin vanlige form

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\theta')^2 \, ds \\ &= \omega^2 \int_0^1 (\cos(\theta + \psi) - \cos(\alpha + \psi)) \, ds \\ &= \omega^2 (\tilde{x} - (1 - 2k^2)) \\ &= 2\omega (\tilde{\omega} - (1 - k^2)\omega).\end{aligned}$$

Vi vil igjen prøve å finne  $\mathbf{x}(\mathbb{P}) = \mathbb{B}_+^1$  ved først å finne bildet av randen til  $\mathbb{P}$ . Som før er  $\omega$  uendelig på  $l_1 = \{k = 1, -1 < p < 1\}$  så  $\tilde{x} = -1$  og  $\tilde{y} = 0$  og

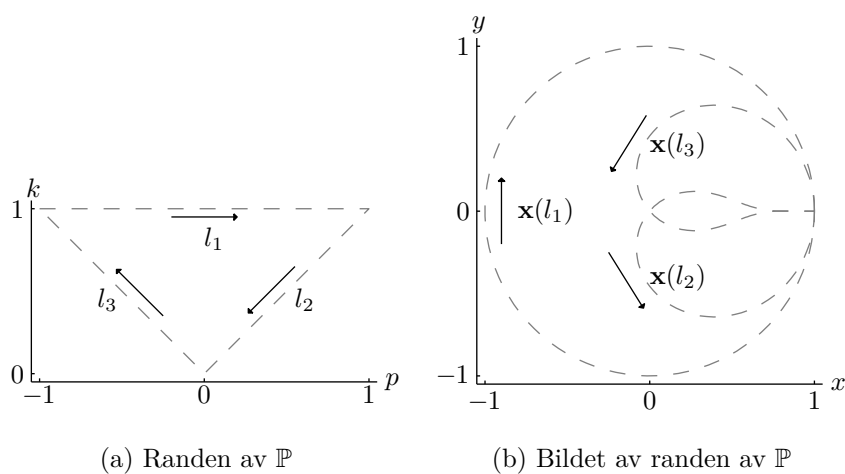
$$\mathbf{x}(l_1) = \left\{ \begin{pmatrix} -\cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} : -\pi < \psi < \pi \right\}.$$

På  $l_2 = \{0 < p = k < 1\}$  derimot, vil nå  $\omega = 4K(k)$  og  $\tilde{\omega} = 4E(k)$ , så  $\tilde{x}(k, k) = \gamma(k)$  og  $\tilde{y}(k, k) = 0$  og dermed er

$$\mathbf{x}(l_2) = \left\{ \gamma(p) \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \end{pmatrix} : 0 < \psi < \pi \right\}$$

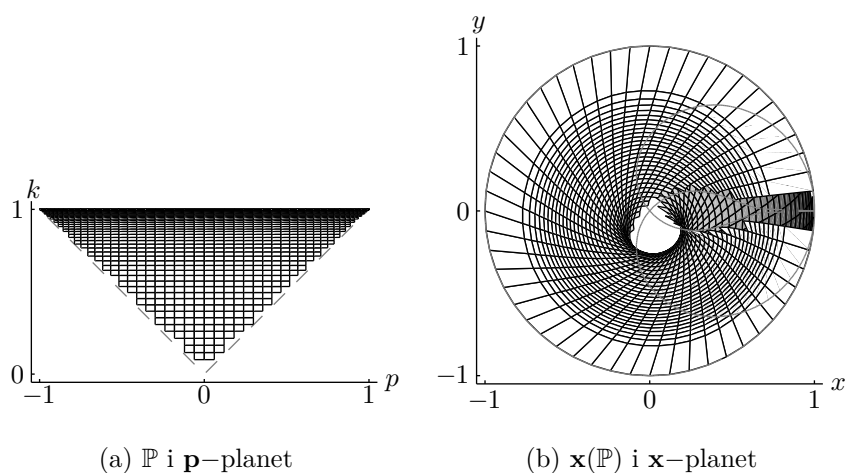
som er speilbildet om  $x$ -aksen av kurven  $\mathbf{x}^0(l_3)$ . På linjen  $l_3 = \{0 < k = -p < 1\}$  får vi  $\omega = 2K(k)$  og  $\tilde{\omega} = 2E(k)$  med  $\tilde{x}(-k, k) = \gamma(k)$  og  $\tilde{y}(-k, k) = 0$ . Dermed er

$$\mathbf{x}(l_3) = \left\{ \gamma(p) \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} : 0 < \psi < \pi \right\}$$

Figur 4.7: En visualisering av  $\mathbf{x}(\partial\mathbb{P})$  med orientering.

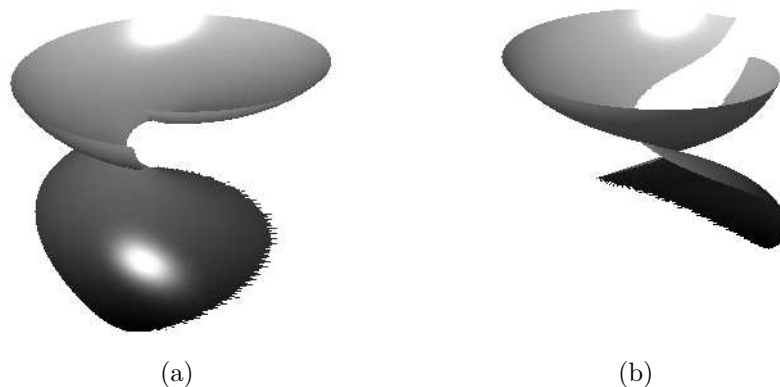
som sammenfaller med  $\mathbf{x}^0(l_3)$ .

Når vi skisserer bildet av linjene  $l_1, l_2$  og  $l_3$ , som i figur 4.7, blir det raskt klart at denne funksjonen må være mer komplisert enn  $\mathbf{x}^0$ . For det første er det opplagt at man ikke kan ha håp om at dette er en bijeksjon da bildet av linjene krysser hverandre. I tillegg, hvis man forsøker å følge bildet av randen hele veien rundt, blir det fort forvirrende om hva som er inn- og utsiden av bildet av domenet.

Figur 4.8: En visualisering av  $\mathbf{x} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}_+^1$ .

Et plot av noen gridlinjer, i figur 4.8, gir et bedre inntrykk av hvordan

$\mathbf{x}$  oppfører seg. Men det er potensialet vi er interesserte i, og det er først når vi plotter  $U$  mot  $\mathbf{x}$  at vi får innsikt i hvordan eventuelle løsningskurver av (4.4.1) vil gå. Figur 4.9 viser potensialet over  $\mathbb{B}_+^1$  fra to forskjellige vinkler. Ettersom verdier av  $U$  spenner over store intervaller, går  $z$ -aksen i 4.9a og 4.9b som  $\log(U + 1)$ , noe som gir oss bedre mulighet til å oppfatte flatens topografi.



Figur 4.9

I håp om å løse (4.4.1) på  $\mathbb{B}_+^1$  må vi først isolere områdene i  $\mathbb{P}$  der  $|\mathbf{dx}|$  er av samme fortegn, og deretter finne løsninger på hvert enkelt område der  $\mathbf{x}$  er 1-1. Vi må igjen beregne de partiellderiverte av  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\omega$  og  $\tilde{\omega}$ , og resultatet er

$$\begin{aligned}\tilde{x}_p &= 2 \frac{\omega(1-p^2) - \tilde{\omega}}{\omega^2 \sqrt{k^2 - p^2} \sqrt{1-p^2}} \\ \tilde{x}_k &= \frac{2}{\omega^2} \{ \tilde{\omega}_k \omega - \tilde{\omega} \omega_k \} \\ \tilde{y}_p &= 2 \frac{\sqrt{k^2 - p^2} + \omega p \sqrt{1-p^2}}{\omega^2 \sqrt{k^2 - p^2} \sqrt{1-p^2}} \\ \tilde{y}_k &= -2 \frac{k\omega - \omega_k(k^2 - p^2)}{\omega^2 \sqrt{k^2 - p^2}}\end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned}\omega_k &= \frac{1}{k(1-k^2)} \left\{ \tilde{\omega} - (1-k^2)\omega - \frac{p\sqrt{1-p^2}}{\sqrt{k^2-p^2}} \right\} \\ \tilde{\omega}_k &= \frac{1}{k} \left\{ \tilde{\omega} - \omega - \frac{p\sqrt{1-p^2}}{\sqrt{k^2-p^2}} \right\}.\end{aligned}$$

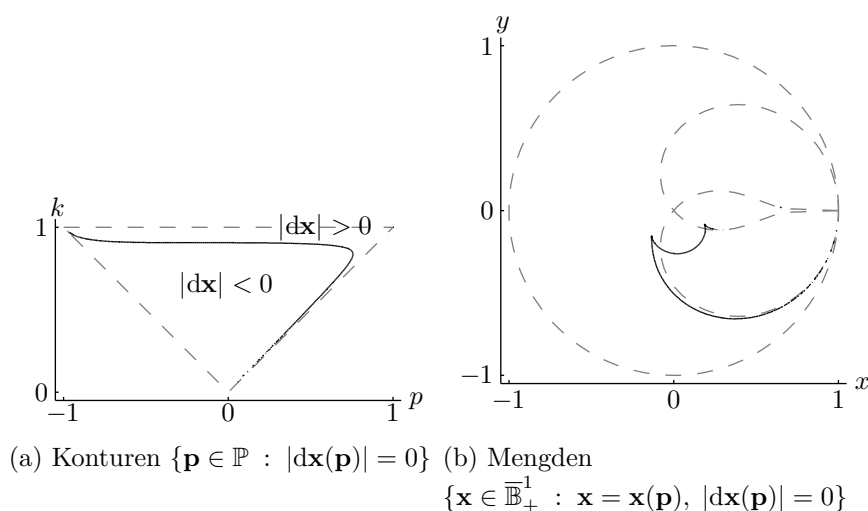
Jacobimatrisen tar samme form som tidligere og er gitt ved

$$d\mathbf{x} = Q \begin{pmatrix} \psi_p \tilde{y} + \tilde{x}_p & \tilde{x}_k \\ -\psi_p \tilde{x} + \tilde{y}_p & \tilde{y}_k \end{pmatrix}$$

med determinant

$$\begin{aligned} |d\mathbf{x}| &= 1 \cdot \{(\psi_p \tilde{y} + \tilde{x}_p)\tilde{y}_k - (\tilde{y}_p - \psi_p \tilde{x})\tilde{x}_k\} \\ &= |d\tilde{\mathbf{x}}| + \psi_p \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}}_k \end{aligned}$$

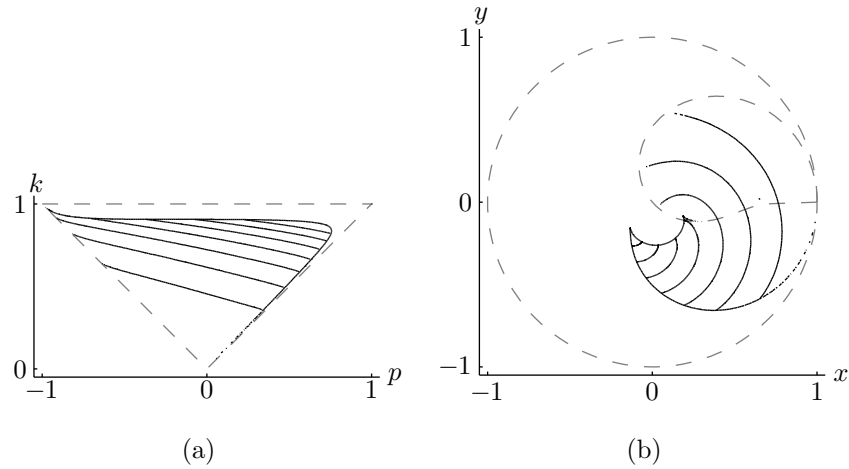
der  $\psi_p = \frac{2}{\sqrt{1-p^2}}$ .



Figur 4.10: Null-konturen av  $|d\mathbf{x}|$ .

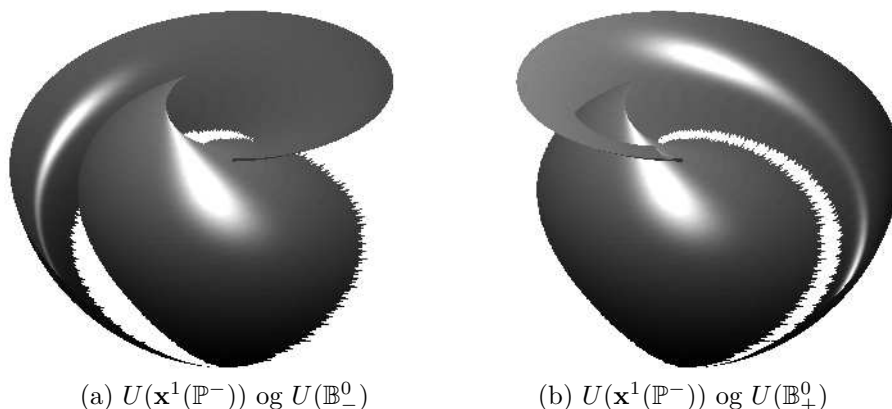
Figur 4.10 viser null-konturen av  $|d\mathbf{x}|$  i  $\mathbb{P}$  og dens bilde i  $\mathbb{B}_+^1$ . Konturen synes å dele  $\mathbb{P}$  inn i to sammenhengende områder, la oss si  $\mathbb{P}^+$  og  $\mathbb{P}^-$ , og figur 4.11 viser konturer av  $U$  i  $\mathbb{P}^-$  sammen med deres tilsvarende konturer på  $\mathbf{x}(\mathbb{P}^-)$ .

Konturene ligger ved  $U = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$  i stigende rekkefølge, oppover i 4.11a og mot venstre i 4.11b. Fra figur 4.11b kan vi forutsi at dersom massen initsielt ligger i ro på  $\mathbf{x}^1(\mathbb{P}^-)$ , så vil den enten begynne å gå oppover i mot  $\mathbf{x}^1(l_3)$  eller nedover mot den nedre delen av  $|d\mathbf{x}^1| = 0$ -konturen. På segmentet av  $\mathbf{x}^1(l_3)$  fra  $(1,0)$  til der  $|d\mathbf{x}^1| = 0$ , synes  $\mathbf{x}^1$  å være 1-1 så  $U^1(l_3) = U^0(l_3)$  på dette segmentet. Så, dersom vi limer denne flaten sammen med den tidligere nevnte vannsklien,  $U^0(\mathbb{B}_+^0)$ , får vi, i allefall i første og andre kvadrant, en kontinuerlig potensialflate som ikke folder over seg selv.

Figur 4.11: Konturer av  $U$ .

Figur 4.12b viser sammenlimingen av disse to flatene der det tilsynelatende glippet mellom dem bare skyldes grovheten i gridet. Den andre figuren, 4.12a, indikerer hva som vil skje dersom massen går mot, og passerer, den nedre delen av  $|\mathbf{dx}^1| = 0$ -konturen. Merk, at fra figur 4.10b så synes denne linjen *ikke* å sammenfalle med  $\mathbf{x}(l_2)$ , men ligge litt nedenfor. Hvis så er tilfellet, må dette bety at potensialflaten krummer over seg selv ved denne linjen for så å gå et lite stykke tilbake mot randen  $\mathbf{x}^1(l_3)$ . Denne lille sømnen langs  $\mathbf{x}^1(l_3)$  vil ha motsatt orientering i forhold til resten av flaten og må dermed være i bildet av  $\mathbb{P}^+$ . Hvis nå massen passerer denne linjen, må den falle ned på en potensialflate med mindre energi og den eneste flaten i dette området som ligger under  $U(\mathbf{x}(\mathbb{P}^-))$  er  $U^0(\mathbb{B}_-^0)$ . Dvs. potensialet for en stang uten vendepunkter og der  $\theta(1) = \alpha < 0$  som, ved tidligere nevnte symmetri av differensialligningen, er speilbildet av vannsklien om flaten  $y = 0$ .





Figur 4.12

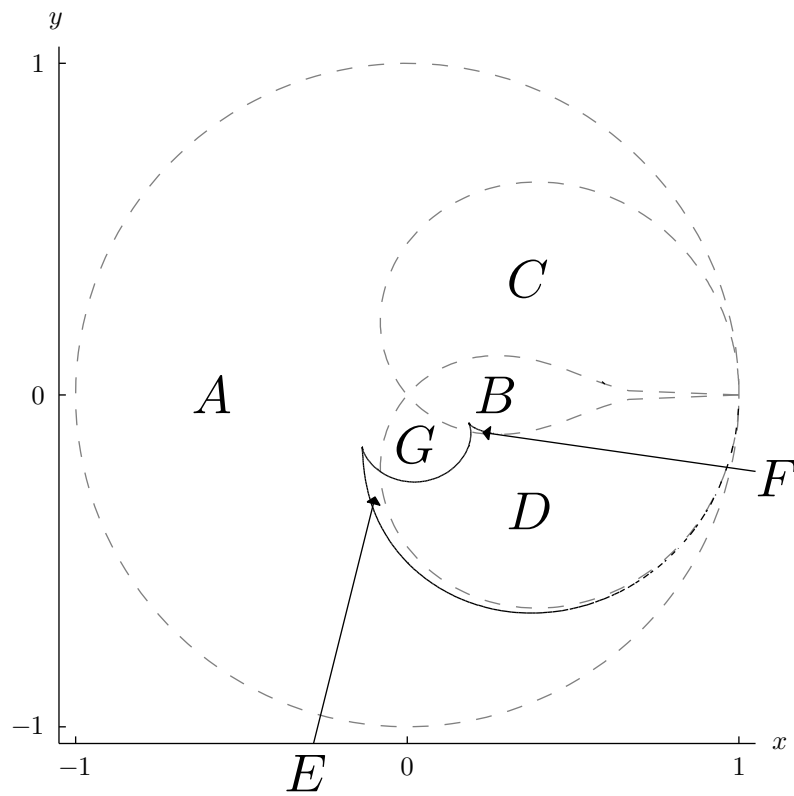
## 4.6 Bifurkasjon for den elastiske pendel.

Som vi har sett, er potensialflaten for den elastiske pendel en nokså komplisert affære. Allerede når stangen er uten vendepunkter er potensialet såpass irregulært at numeriske løsninger av banen til massepunktet bare er mulige for små tidsintervall. Når vi undersøker potensialet for en stang *med* vendepunkt blir situasjonen enda værre; funksjonen fra  $\mathbb{P}$ , som er rommet der vi løser differensialligningen, til  $\mathbb{B}_+^0$ , det fysiske konfigurasjonsrommet, er ikke lengre 1-1 og dermed vil potensialet folde over seg selv og et punkt i  $\mathbb{B}_+^0$  kan ha flere forbilder i  $\mathbb{P}$ . Globale numeriske løsninger for banen til en stang med et vendepunkt blir dermed svært utfordrende. Ikke bare vil  $\nabla U$  ha singulariteter der  $|\mathbf{dx}| = 0$ , men man må også holde styr på eventuelle bifurkasoner, dvs. diskontinuerlige hopp i potensialet, både der  $|\mathbf{dx}| = 0$  og på enkelte steder av randen til  $\mathbb{B}_+^0$ ,  $\mathbb{B}_-^0$ ,  $\mathbb{B}_+^1$  og  $\mathbb{B}_-^1$ , og da har vi ennå ikke vurdert muligheten for at det finnes konfigurasjonsrom for en stang med *flere* enn ett vendepunkt, dvs.  $\mathbb{B}_+^n$  og  $\mathbb{B}_-^n$  for  $n \geq 2$ .

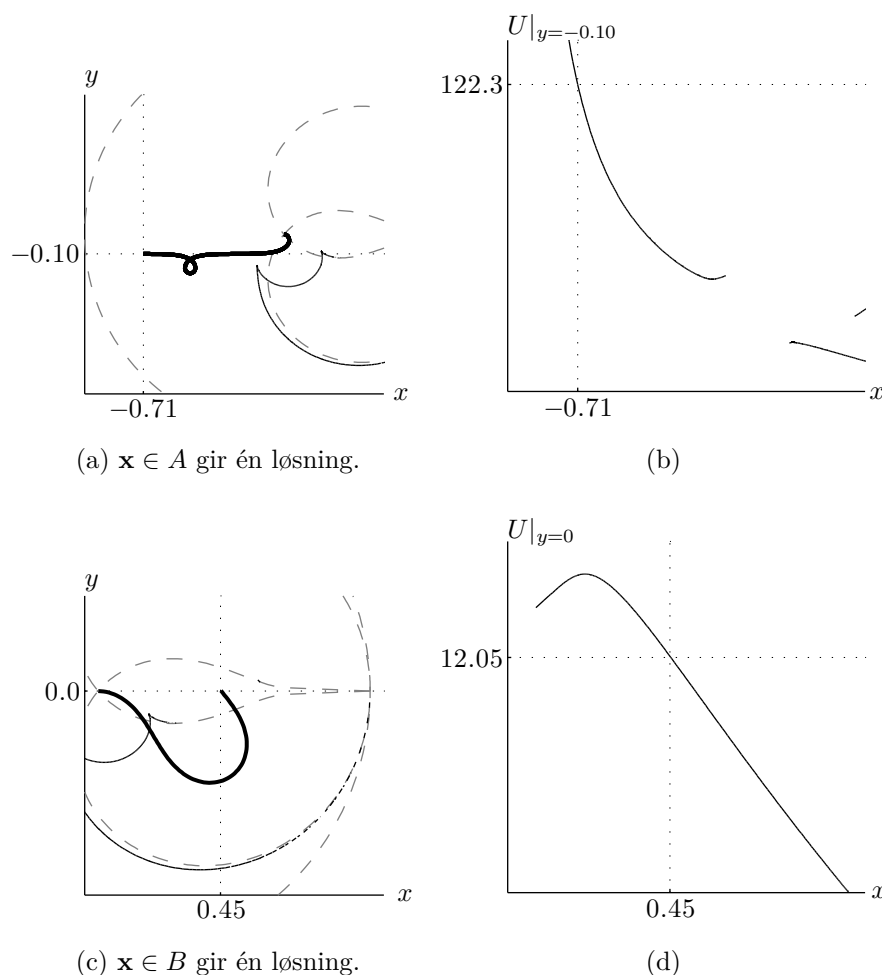
Istedet for å prøve å løse (4.4.1) på disse komplekse potensialflatene, avslutter vi heller med å skissere noen *kvalitative* egenskaper ved den elastiske stangen når massepunktet beveger seg i  $\mathbb{B}$ . Først tegner vi opp enhets sirkelen med de tre kurvene

$$|\mathbf{dx}| = 0 \quad \text{og} \quad \left\{ \gamma(p) \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \pm \sin \psi \end{pmatrix} : 0 < \psi < \pi \right\},$$

se figur 4.13. (Merk at vi ikke har noen parametrisk beskrivelse av linjen  $|\mathbf{dx}| = 0$  og må derfor stole på matlabs evne til å plotte den riktig). Disse kurvene synes å dele  $\mathbb{B}$  inn i sju disjunkte områder, og vi gir dem navn fra  $A$

Figur 4.13: De syv essensielle områdene i  $\mathbb{B}$

til  $G$ .



Figur 4.14: Områder med én løsning

Vi har bevist at konfigurasjonsrommet til en stang uten vendepunkt med  $\alpha > 0$  er  $\mathbf{x}^0(\mathbb{P}) = \mathbb{B}_+^0$ , og kan nå beskrives som

$$\mathbb{B}_+^0 = A \cup D \cup E \cup G.$$

Konfigurasjonsrommet til en stang med ett vendepunkt og  $\alpha > 0$ , dvs.  $\mathbf{x}^1(\mathbb{P}) = \mathbb{B}_+^1$ , kan finnes ved å følge bildet av randen av  $\mathbb{P}$  under  $\mathbf{x}^1$  og samtidig holde styr på fortegnet til  $|\mathbf{dx}|$  slik at  $\mathbb{B}_+^1$  ligger på samme side av randen når  $|\mathbf{dx}|$  er positiv, og på motsatt side når  $|\mathbf{dx}|$  er negativ. Denne øvelsen vil gi oss

$$\mathbb{B}_+^1 = A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F,$$

altså, hele sirkelen unntatt  $G$ .

Vi vil nå konsentrere oss om  $\mathbb{B}_+^1$  og tegne representanter av stangen for  $\mathbf{x}$  i hvert område,  $A, \dots, F$ . Fra uttrykkene for  $\tilde{x}$  og  $\tilde{y}$  kan man utlede at stangen kan parametriseres av  $s \in [0, 1]$  som

$$\mathbf{x}(s, \mathbf{p}) = Q(p) \begin{pmatrix} \tilde{x}(s, \mathbf{p}) \\ \tilde{y}(s, \mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

der

$$\tilde{x}(s, \mathbf{p}) = \begin{cases} \frac{2}{\omega} \{E(\operatorname{sn} u, k) + E(p/k, k)\} - s, & \text{for } 0 \leq s \leq s^* \\ \frac{2}{\omega} \{2E(k) - E(\operatorname{sn} u, k) + E(p/k, k)\} - s, & \text{for } s^* \leq s \leq 1 \end{cases}$$

og

$$\tilde{y}(s, \mathbf{p}) = -\frac{2}{\omega} \{k \operatorname{cn} u + \sqrt{k^2 - p^2}\}$$

der

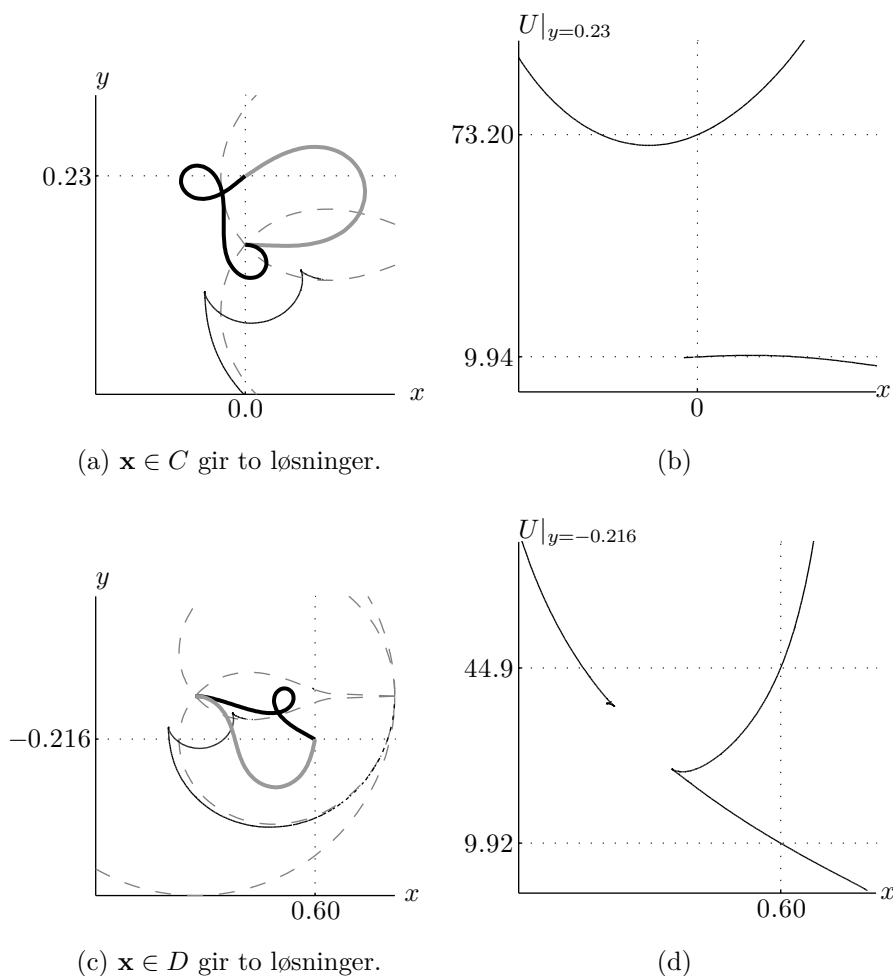
$$u = u(s, \mathbf{p}) = \omega s - F(p/k, k).$$

Ved å undersøke potensialflaten finner vi at hver  $\mathbf{x}$  i  $A$  eller  $B$  har nøyaktig ett forbilde i  $\mathbb{P}$ , hver  $\mathbf{x}$  i  $C$  eller  $D$  har nøyaktig to forbilder og for de to små områdene  $E$  og  $F$  så har  $\mathbf{x}$  nøyaktig tre forbilder i  $\mathbb{P}$ . De følgende figurene viser formen av stangen, eller stengene, i hver av de seks områdene og mørkere stang indikerer høyere energi. På høyre side i hver figur vises et snitt av potensialflaten ved  $y$  plottet langs samme  $x$ -akse.

Det er nå en rekke situasjoner der man må undersøke hva som skjer når forskjellige løsninger fra forskjellige områder krysser grensene til de nærliggende områdene. F.eks. som vi ser fra figur 4.15, vil den høyeste løsningen i  $C$  gå kontinuerlig over grensen til  $A$ , mens den svakeste vil gå over i  $\mathbb{B}_+^0$  som vi vet fra tidligere analyser er en kontinuerlig overgang. Dermed kan vi fastslå at grensen mellom  $A$  og  $C$  *ikke* er en bifurkasjonslinje. Derimot er grensen mellom  $C$  og  $B$  en bifurkasjonslinje fordi, mens den svakeste løsningen også her vil gå kontinuerlig inn i  $B$ , vil den sterke løsningen hoppe ned i energi og sammenfalle med den svake.

Vi skal ikke diskutere alle situasjonene, men det er interessant å merke seg at det å krysse en bifurkasjonslinje kan skje mye mer subtile enn i eksempelet ovenfor. Disse subtile hoppene finner vi i  $E$  og  $F$  og vi vil forøke å klassifisere alle bifurkasjonslinjene rundt disse områdene.  $E$  synes av figur 4.13 å bestå av tre glatte kurver. Toppen og venstre side grenser mot  $A$  og vi døper disse linjene henholdsvis  $E_1$  og  $E_2$ . Høyre side, som grenser mot  $D$ , kaller vi  $E_3$ .

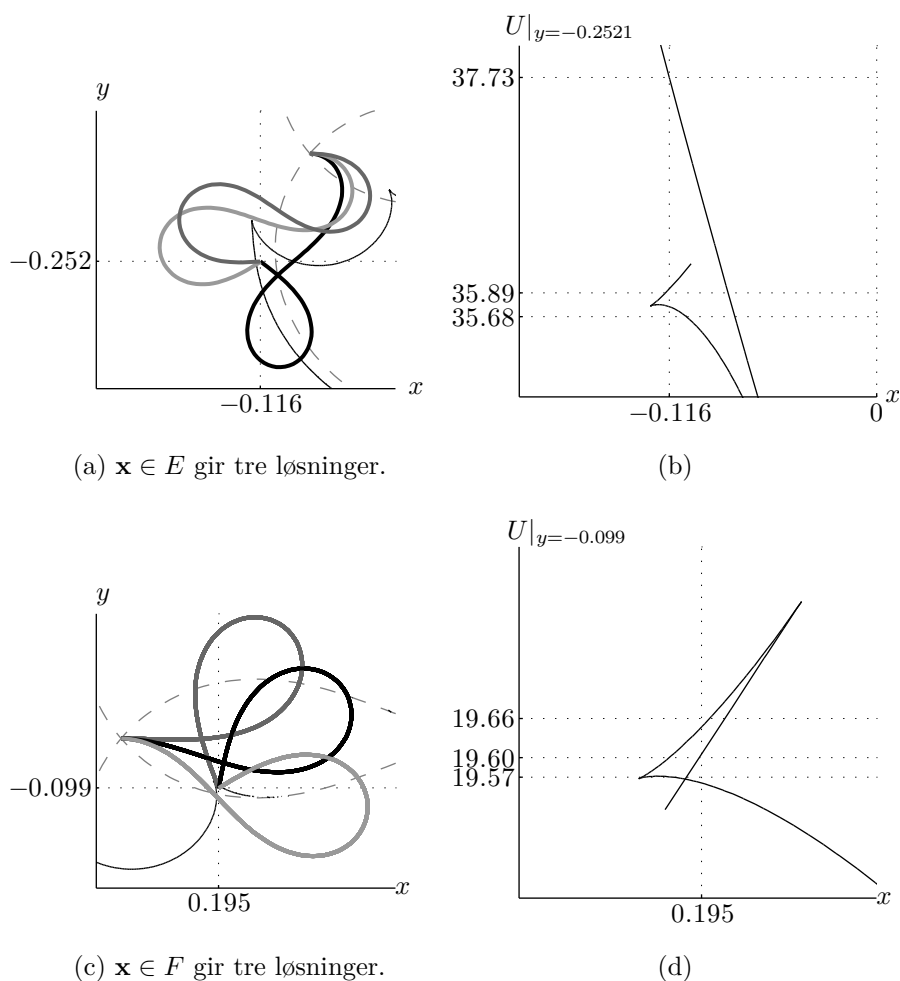
Fra figur 4.16b ser vi at både den høyeste og laveste løsningen er kontinuerlig over  $E_3$ , men denne kurven er likevel en bifurkasjonslinje ettersom den



Figur 4.15: Områder med to løsninger

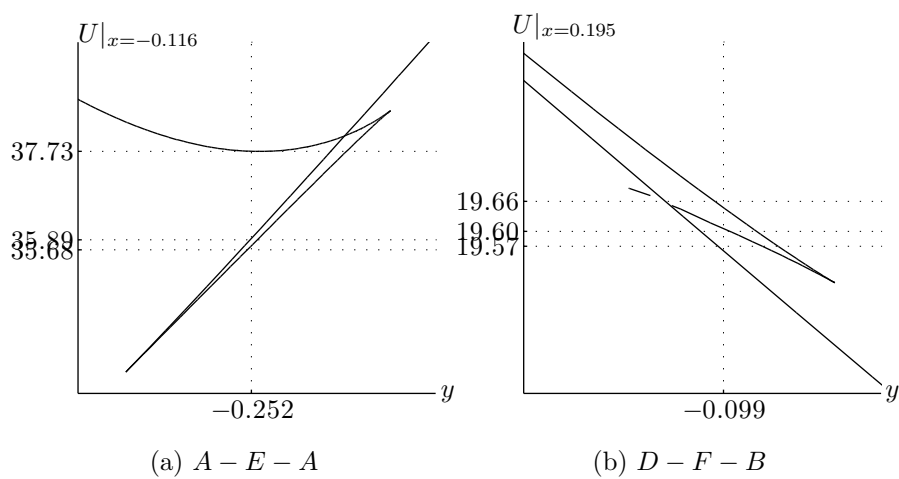
midterste løsningen vil oppleve et hopp der. Dette hoppet tilsvarer en relativ forandring i den potensielle energien bare på, i størelsesorden hundre deler og stangens form vil heller ikke forandre seg drastisk. Den høyeste løsningen er også kontinuerlig over  $E_2$ . Fra figur 4.17a ser vi at den høyeste og laveste løsningen forsvinner ved  $E_1$  (til  $\mathbb{B}_+^0$  eller  $\mathbb{B}_-^0$ ), mens det er den midterste som går kontinuerlig over i  $A$ .

De to sidene i trekanten  $F$  som grenser mot  $D$  kaller vi, fra venstre mot høyre,  $F_1$  og  $F_2$  og siden mot  $D$  kaller vi  $F_3$ . Figurene 4.16d og 4.17b viser at den laveste løsningen er kontinuerlig både over  $F_2$  inn i  $B$  og over  $F_3$  inn i  $D$ . Den høyeste er kontinuerlig bare inn i  $D$ . Den midterste løsningen burde være kontinuerlig over  $F_1$  ettersom stenger langs  $\mathbf{x}(l_3)$  har akkurat denne formen.



Figur 4.16: Områder med tre løsninger

Vi misstenker derfor 4.16d å være unøyaktig hvilket sannsynligvis er fordi griddet, som  $U$  er beregnet på, er for grovt akkurat i dette området. (samme grunn som at de to flatene i figur 4.12b ikke synes å være sammenhengende). 4.17b viser i såfall at  $F_1$  er den eneste siden i  $F$  hvis denne løsningen er kontinuerlig over.



Figur 4.17: Snitt i  $y$ -retning av potensialflaten der det eksisterer tre løsninger.





# Tillegg A

## Elliptiske funksjoner og integral

### A.1 Jacobis elliptiske funksjoner

De komplekse dobbeltperiodiske elliptiske funksjonene har mange forskjellige egenskaper og er blitt nøye studert gjennom tidene. Jacobis elliptiske funksjoner,  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  og  $\operatorname{dn}$ , defineres vanligvis vha. *theta-funksjoner*, men ettersom vi bare har behov for de reelle variantene vil vi ta en annen tilnærming og definere  $(\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn})$  som den unike løsningen av systemet

$$(A.1.1) \quad \begin{aligned} x' &= yz \\ y' &= -xz \\ z' &= -k^2 xy \\ x(0) &= 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1 \end{aligned}$$

der  $0 \leq k^2 < 1$  er en reell parameter og  $'$  betegner derivasjon mhp. variabelen  $u$ . Denne definisjonen har fordelen av at vi raskt kan utlede de egenskapene vi er ute etter. F.eks. vil et valg av parameter  $k = 0$  gi  $z \equiv 1$  og vi sitter igjen med systemet som definerer de trigonometriske funksjonene  $x = \sin u$  og  $y = \cos u$ .

Å dele  $y'$  med  $x'$  gir likheten

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

som, ved integrering og bruk av initialbetingelsene, forteller at

$$(A.1.2) \quad \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1.$$

Da dette er en lukket kurve i faseplanet og ettersom systemet er autonomt, beviser dette at både  $\operatorname{sn}$  og  $\operatorname{cn}$  er *periodiske* funksjoner  $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  med

samme periode, la oss si  $T = T(k)$ . Å dele  $x'$  med  $z'$  og  $y'$  med  $z'$  gir på samme måte identitetene

$$(A.1.3) \quad \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1$$

$$(A.1.4) \quad \operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{cn}^2 u = 1 - k^2.$$

Vi må nå finne denne perioden  $T$ . Ved å bruke (A.1.2) og (A.1.3) kan vi uttrykke  $x'$  ved  $x$  som

$$\begin{aligned} (x')^2 &= y^2 z^2 \\ &= (1 - x^2)(1 - k^2 x^2) \end{aligned}$$

og dermed kan 'tiden' løsningen av (A.1.1) bruker på en kvart runde fra initialverdien  $(x, y) = (0, 1)$  til  $(x, y) = (1, 0)$ , beregnes til

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^{T_1} du \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x'} \\ &= + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}. \end{aligned}$$

Dette er *det komplette elliptiske integral av første type* og benevnes ved  $K(k)$ . De tre andre kvartrundene har også lengde  $u = K(k)$  og systemet (A.1.1) vil derfor returnere til sin initsielle konfigurasjon ved  $u = 4K(k)$ . Dette, sammen med autonomitet av (A.1.1), beviser at  $\operatorname{sn}$  og  $\operatorname{cn}$  har periode  $4K$ , altså

$$(A.1.5) \quad \operatorname{sn}(u + 4K) = \operatorname{sn} u$$

$$(A.1.6) \quad \operatorname{cn}(u + 4K) = \operatorname{cn} u$$

for alle  $u \in \mathbb{R}$ .

Merk, at siden  $k < 1$  så er

$$0 < 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \leq 1$$

Med (A.1.3) betyr dette at  $\operatorname{dn}^2 u$  aldri er null og når  $\operatorname{dn}(0) = 1 > 0$ , og vi antar kontinuitet, må  $\operatorname{dn} u$  ligge i intervallet  $(0, 1]$  for alle  $u$ . Dermed er  $\operatorname{dn} u = +\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}$  og vi kan lage en tabell over verdiene til de tre funksjonene for  $u = 0, K, 2K, 3K$ :

$u = 0 :$	$\operatorname{sn} = 0$	$\operatorname{cn} = 1$	$\operatorname{dn} = 1$
$u = K :$	$\operatorname{sn} = 1$	$\operatorname{cn} = 0$	$\operatorname{dn} = \sqrt{1 - k^2}$
$u = 2K :$	$\operatorname{sn} = 0$	$\operatorname{cn} = -1$	$\operatorname{dn} = 1$
$u = 3K :$	$\operatorname{sn} = -1$	$\operatorname{cn} = 0$	$\operatorname{dn} = \sqrt{1 - k^2}$

Som for de trigonometriske funksjonene, har også sn, cn og dn symmetriske egenskaper. Dersom vi definerer tre nye funksjoner  $\tilde{x}(u) = -x(-u)$ ,  $\tilde{y}(u) = y(-u)$  og  $\tilde{z}(u) = z(-u)$  tilfredsstillende disse også (A.1.1) fordi

$$\begin{aligned}\tilde{x}' &= x'(-u) = y(-u)z(-u) \\ &= \tilde{y}\tilde{z}, \\ \tilde{y}' &= -y'(-u) = x(-u)z(-u) \\ &= -\tilde{x}\tilde{z}, \\ \tilde{z}' &= -z'(-u) = x(-u)y(-u) \\ &= -\tilde{x}\tilde{y}, \\ \tilde{x}(0) &= 0, \quad \tilde{y}(0) = 1, \quad \tilde{z}(0) = 1.\end{aligned}$$

Så ved unikhethet av løsning må derfor

$$(A.1.7) \quad \operatorname{sn}(u) = -\operatorname{sn}(-u), \quad \operatorname{cn}(u) = \operatorname{cn}(-u), \quad \operatorname{dn}(u) = \operatorname{dn}(-u)$$

for alle  $u \in \mathbb{R}$ . Altså, sn er en odde funksjon og cn og dn er jevne funksjoner.

Vi gjentar samme øvelsen, nå ved i tillegg å bruke tabellen ovenfor, og finner at funksjonene  $\tilde{x}(u) = -x(u + 2K)$ ,  $\tilde{y}(u) = -y(u + 2K)$  og  $\tilde{z}(u) = z(u + 2K)$  også tilfredsstillende (A.1.1). Hvilket beviser at

$$(A.1.8) \quad \operatorname{sn}(u + 2K) = -\operatorname{sn} u$$

$$(A.1.9) \quad \operatorname{cn}(u + 2K) = -\operatorname{cn} u$$

$$(A.1.10) \quad \operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u$$

som spesielt viser at dn har periode  $2K$ .

## A.2 Elliptiske integral

Den elliptiske funksjonen sn må nødvendigvis ha en flerverdighet invers da den er periodisk. Begrenset til  $[-K, K]$  er derimot sn monotont stigende, fra  $\operatorname{sn}(-K) = -1$  til  $\operatorname{sn} K = 1$ , og har dermed en veldefinert invers på dette intervallet. For  $u \in [-K, K]$  og  $x = \operatorname{sn} u$  ønsker vi derfor å finne funksjonen

$$\operatorname{sn}^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-K, K]$$

slik at  $\operatorname{sn}^{-1} x = u$ .

For  $u \in [-K, K]$  er  $\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}$  så

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}}$$

og ved å bruke  $\operatorname{sn}(0) = 0$  så er  $\operatorname{sn}^{-1} x$  dermed gitt ved

$$(A.2.1) \quad F(x, k) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},$$

det elliptiske integral av første type.

En annen funksjon vi bruker mye er *det elliptiske integral av andre type*, definert som

$$(A.2.2) \quad E(x, k) := \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Nå er dette ikke en invers av  $\operatorname{cn}$  eller  $\operatorname{dn}$ , men er forbundet med de elliptiske funksjonene bla. via

$$(A.2.3) \quad \int_0^u \operatorname{dn}^2 v \, dv = E(\operatorname{sn} u, k), \quad u \in [-K, K],$$

noe som sees ved å gjøre substitusjonen  $t = \operatorname{sn} v$ , som gir

$$dt = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \, dv = +\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2} \, dv.$$

### A.3 Deriverte av elliptiske integral

De elliptiske integral av første og andre type er definert henholdsvis som

$$(A.3.1) \quad F(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}, \quad E(x, k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

der  $x \in [-1, 1]$ , og ved integrering opp til  $x = 1$ , får vi de *komplette* elliptiske integral med notasjon

$$(A.3.2) \quad K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}, \quad E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

For alle funksjonene antar vi at  $k \in (-1, 1)$ . Vi vil ha behov for de  $k$ -deriverte av disse uttrykkene. For det komplette integralet av andre type, deriverer vi

under integraltegnet som med en gang gir

$$\begin{aligned}
 \text{(A.3.3)} \quad \frac{d}{dk} E(k) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial k} \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{-kt^2}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} dt \\
 &= \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{(1-k^2t^2) - 1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} dt \\
 &= \frac{1}{k} \left\{ E(k) - K(k) \right\}.
 \end{aligned}$$

Den deriverte av  $K$  kan også uttrykkes ved  $K$  og  $E$ , men utledningen er mer omfattende. Først deriverer vi under integralet og oppnår

$$\text{(A.3.4)} \quad \frac{d}{dk} K(k) = \int_0^1 \frac{kt^2}{\sqrt{1-t^2}(1-k^2t^2)^{3/2}} dt.$$

Vi foretar nå substitusjonen

$$\text{(A.3.5)} \quad t^2 = \frac{1-u^2}{1-k^2u^2}$$

som gir

$$\text{(A.3.6)} \quad t dt = -(1-k^2) \frac{u du}{(1-k^2u^2)^2}.$$

Merk at når  $t = 0$  er  $u = 1$  og vice versa. Vi har også identitetene

$$\text{(A.3.7)} \quad 1 - k^2t^2 = \frac{1-k^2}{1-k^2u^2}, \quad \frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1}{1-k^2} \frac{1-u^2}{u^2}$$

og innsatt i (A.3.4) gir dette

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dk} K(k) &= -\frac{k}{1-k^2} \int_1^0 \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-k^2u^2}} du \\
 &= \frac{k}{k^2(1-k^2)} \int_0^1 \frac{k^2(1-u^2)}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2u^2}} du \\
 &= \frac{1}{k(1-k^2)} \int_0^1 \frac{(1-k^2u^2) - (1-k^2)}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2u^2}} du \\
 &= \frac{1}{k} \left\{ \frac{E(k)}{1-k^2} - K(k) \right\}.
 \end{aligned}$$

Når det gjelder de  $k$ -deriverte av de ufullstendige elliptiske integralene, ser vi umiddelbart av (A.3.3) at

$$(A.3.8) \quad \frac{\partial}{\partial k} E(a, k) = \frac{1}{k} \left\{ E(a, k) - F(a, k) \right\}.$$

men ved derivering av  $F(a, k)$ , på grunn av substitusjonen (A.3.5), får vi ved  $t = a$ ,

$$(A.3.9) \quad u(a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-k^2a^2}} =: \beta,$$

og dermed er

$$(A.3.10) \quad \frac{\partial}{\partial k} F(a, k) = \frac{1}{k} \left\{ \frac{E(k)}{1-k^2} - K(k) \right\} - \frac{1}{k} \left\{ \frac{E(\beta, k)}{1-k^2} - F(\beta, k) \right\}.$$

Ved samme substitusjon som (A.3.5), er det greit å vise at

$$(A.3.11) \quad F(a, k) = \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = \int_\beta^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2u^2}} = K(k) - F(\beta, k),$$

men å finne et uttrykk for  $E(\beta, k)$  i  $E(a, k)$  og  $E(k)$  er vanskeligere. Vi påstår likevel at

**Påstand 1.**

$$(A.3.12) \quad E(k) - E(\beta, k) = E(a, k) - k^2a\beta, \quad \text{der } \beta = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-k^2a^2}}.$$

*Bevis.* Dersom vi definerer  $\beta$  som en funksjon

$$(A.3.13) \quad \beta(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-k^2t^2}}$$

ser vi at substitusjonen (A.3.5) er gitt ved  $\beta(t) = u$ , og vi ser av den første identiteten i (A.3.7) at forholdet mellom  $u$  og  $t$  er symmetrisk, slik at vi har også  $\beta(u) = t$ . Vi kalkulerer at

$$(A.3.14) \quad \beta'(t) = \frac{-t\frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} + k^2t\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-k^2t^2}}}{1-k^2t^2} = -\frac{t}{\beta(t)} \frac{1-k^2\beta^2(t)}{1-k^2t^2}$$

og ettersom  $\beta$  er sin egen invers, har vi at

$$(A.3.15) \quad \beta'(u) = \frac{1}{\beta'(t)}.$$

Ved å bruke dette, får vi

$$\begin{aligned}
E(a, k) - k^2 a \beta(a) &= \int_0^a \left\{ \frac{1}{\beta(t)} - \frac{d}{dt}(k^2 t \beta(t)) \right\} dt \\
&= \int_1^{\beta(a)} \left\{ \frac{1}{u} - k^2 \frac{d}{du}(\beta(u)u) \frac{1}{\beta'(u)} \right\} \beta'(u) du \\
&= \int_{\beta(a)}^1 \left\{ k^2 \beta'(u)u + k^2 \beta(u) - \frac{\beta'(u)}{u} \right\} du \\
&= \int_{\beta(a)}^1 \frac{1}{u} \left\{ k^2 u \beta(u) - \beta'(u)(1 - k^2 u^2) \right\} du \\
&= \int_{\beta(a)}^1 \frac{1}{u} \left\{ k^2 u \beta(u) + \frac{u}{\beta(u)}(1 - k^2 \beta^2(u)) \right\} du, \text{ ved (A.3.14)} \\
&= \int_{\beta(a)}^1 \frac{1}{\beta(u)} du \\
&= E(k) - E(\beta, k)
\end{aligned}$$

og dette resultatet, sammen med (A.3.11) gir ved innsetting i (A.3.10) den  $k$ -deriverte av  $F(a, k)$  uttrykt ved  $F$  og  $E$ .  $\square$

Vi har utledet uttrykk for de  $k$ -deriverte av alle fire varianter av komplette og ufullstendige elliptiske integral av første og andre type. Vi sammenfatter nå resultatene nedenfor.

$$(A.3.16) \quad K'(k) = \frac{1}{k} \left\{ \frac{E(k)}{1 - k^2} - K(k) \right\}$$

$$(A.3.17) \quad \frac{\partial}{\partial k} F(a, k) = \frac{1}{k} \left\{ \frac{E(a, k)}{1 - k^2} - F(a, k) \right\} - \frac{ka}{1 - k^2} \frac{\sqrt{1 - a^2}}{\sqrt{1 - k^2 a^2}}$$

$$(A.3.18) \quad E'(k) = \frac{1}{k} \left\{ E(k) - K(k) \right\}$$

$$(A.3.19) \quad \frac{\partial}{\partial k} E(a, k) = \frac{1}{k} \left\{ E(a, k) - F(a, k) \right\}$$





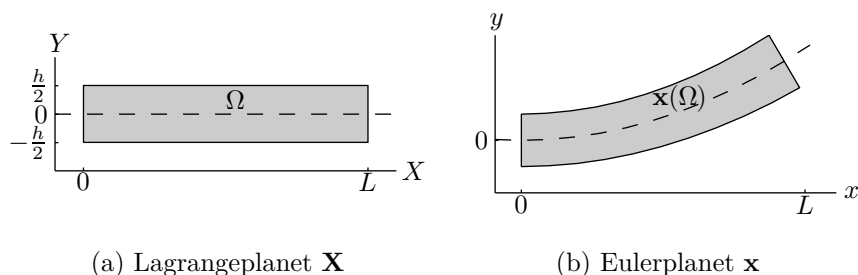
# Tillegg B

## Utledning av modell

### B.1 Innledning

Dette kapittelet er basert i stor grad på [HKO].

Vi modellerer buen som en tynn plate der tykkelsen  $h$  er mye mindre enn lengden  $L$  og vi antar at all *tøyning* foregår i  $(x, y)$ -planet. Platen er beskrevet ved *Lagrangekoordinatene*  $(X, Y)$ , dvs. koordinater som følger den enkelte materialpartikkel, der  $0 \leq X \leq L$  og  $-h/2 \leq Y \leq h/2$ . Vi antar at materialet er *homogent* og *isotrop*, dvs. materialet har samme egenskaper overalt og i alle retninger. Etter at buen er bøyd, vil en materialpartikkel opprinnelig ved  $(X, Y)$  oppta posisjonen  $(x(X, Y), y(X, Y))$  i  $(x, y)$ -planet. Dette definerer derfor vektorfeltet



Figur B.1: Buen før og etter bøyning. Tykkelsen  $h$  er overdrevet.

$$\mathbf{x} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Omega = [0, L] \times [-h/2, h/2]$$
$$\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} x(X, Y) \\ y(X, Y) \end{pmatrix}.$$

## B.2 Tøyningstensoren $\mathcal{E}$

Vi krever at bøyingen er såpass jevn at buen ikke har brudd eller knekk, altså at  $\mathbf{x}$  er kontinuerlig deriverbar. Ved kjerneregelen er

$$(B.2.1) \quad d\mathbf{x} = F d\mathbf{X}, \quad F = \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right)$$

og et volumelement  $dX dY$  (eller arealelement i denne to-dimensjonale settingen) vil etter transformeringen ha areal

$$(B.2.2) \quad dx dy = \det(F) dX dY$$

og for å unngå den ikke-fysiske situasjonen der materialet går inn i seg selv, krever vi derfor at  $\det(F) > 0$ .

Merk at vi her bruker en annen notasjon. I kapittel 4 betydde  $d\mathbf{x}$  Jacobimatrisen til  $\mathbf{x}$ , mens her betyr  $d\mathbf{x}$  differensialet  $(dx, dy)^T$ .

Lengden til et transformert linjeelement er gitt ved

$$(B.2.3) \quad |d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{X}^T \mathcal{C} d\mathbf{X}$$

der

$$(B.2.4) \quad \mathcal{C} = F^T F$$

er kjent som *Greens deformasjonstensor*.

Dersom forflytningen fra  $\mathbf{X}$  til  $\mathbf{x}$  er uten tøyning, dvs. alle lengder er bevart, så er  $F$  ortogonal og dermed er  $\mathcal{C}$  identitetsmatrisen. Vi definerer derfor *tøyningstensoren*  $\mathcal{E}$  som

$$(B.2.5) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}(\mathcal{C} - \mathcal{I}).$$

Det absolutte strekket et linjestykke  $d\mathbf{X}$  opplever, kan dermed uttrykkes som

$$(B.2.6) \quad |d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2 = 2 d\mathbf{X}^T \mathcal{E} d\mathbf{X}.$$

For å kunne benytte *lineær elastisk teori* er vi avhengige av å kunne vise at tøyningen er liten. Når buen blir moderat bøyd er det rimelig å anta at det finnes en kurve  $c_0$  omtrent midt i materialet hvis lengde er uforandret, og at det største strekket og den største komprimeringen er henholdsvis på ut- og innsiden av buen der krumningen er sterkest. Hvis  $\theta = \theta(\mathbf{x}(X, 0))$  benevner

vinkelen mellom tangenten av denne invariante kurven og  $x$ -aksen, og  $X_m$  er Lagrangkoordinaten der  $\dot{\theta} = \max \dot{\theta}$ , så burde det derfor være greit å anta at

$$(B.2.7) \quad |\delta \mathbf{x}_I|^2 - \delta X^2 = \min \{ |\delta \mathbf{x}|^2 - |\delta \mathbf{X}|^2 : \mathbf{X} \in \Omega, |\delta \mathbf{X}| = \Delta \}$$

$$(B.2.8) \quad |\delta \mathbf{x}_U|^2 - \delta X^2 = \max \{ |\delta \mathbf{x}|^2 - |\delta \mathbf{X}|^2 : \mathbf{X} \in \Omega, |\delta \mathbf{X}| = \Delta \}$$

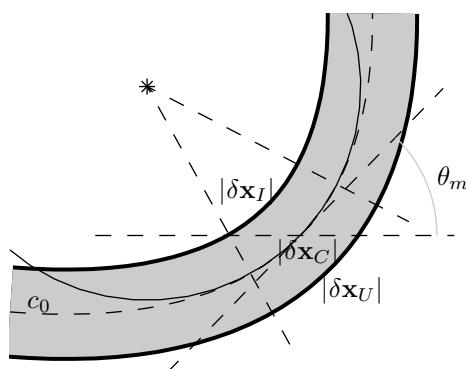
der  $\Delta = \delta X > 0$  er en fiksèrt liten lengdeenhet og der

$$(B.2.9) \quad \mathbf{x}_I = \mathbf{x}(X_m, h/2), \quad \mathbf{x}_U = \mathbf{x}(X_m, -h/2)$$

er henholdsvis inn- og utsiden av tverrsnittet med sterkest krumning. Videre betyr

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} &= \mathbf{x}(\mathbf{X} + \delta \mathbf{X}) - \mathbf{x}(\mathbf{X}) \\ \delta \mathbf{x}_I &= \mathbf{x}(X_m + \delta X, h/2) - \mathbf{x}(X_m, h/2) \\ \delta \mathbf{x}_U &= \mathbf{x}(X_m + \delta X, -h/2) - \mathbf{x}(X_m, -h/2) \end{aligned}$$

og lendeelementet  $\delta \mathbf{x}_C := \mathbf{x}(X_m + \delta X, 0) - \mathbf{x}(X_m, 0)$  vil ha lengde  $\delta X$  fordi  $\mathbf{x}$  er invariant langs denne kurven. Sirkelen som tangerer senterlinjen  $\mathbf{x}(c_0)$  ved  $\mathbf{x}(X_m, 0)$  har radius  $R = 1/\dot{\theta}_m$  og ved kongruente trekanter ser vi av figur B.2 at



Figur B.2: Lengdeelementer i Eulerplanet  $\mathbf{x}$

$$(B.2.10) \quad \frac{|\delta \mathbf{x}_I|}{R - h/2} \approx \frac{\delta X}{R} \approx \frac{|\delta \mathbf{x}_U|}{R + h/2}$$

Dersom vi begrenser oss til bøyning av størrelsesorden  $R \sim L/2$ , gir (B.2.10)

$$\begin{aligned} |\delta \mathbf{x}_U|^2 &\approx (1 + \epsilon)^2 \delta X^2 \approx (1 + 2\epsilon) \delta X^2 \\ |\delta \mathbf{x}_I|^2 &\approx (1 - \epsilon)^2 \delta X^2 \approx (1 - 2\epsilon) \delta X^2 \\ &\Rightarrow \\ |\delta \mathbf{x}_U|^2 - \delta X^2 &\approx 2\epsilon \delta X^2 \\ &= 2\epsilon |\delta \mathbf{X}|^2 \\ |\delta \mathbf{x}_I|^2 - \delta X^2 &\approx -2\epsilon \delta X^2 \\ &= -2\epsilon |\delta \mathbf{X}|^2 \end{aligned}$$

der  $\epsilon = h/L \ll 1$  er den essensielle litenhetsparameteren. Resultatet ovenfor innsatt i (B.2.7) og (B.2.8) gir

$$(B.2.11) \quad -2\epsilon |\delta \mathbf{X}|^2 \leq |\delta \mathbf{x}|^2 - |\delta \mathbf{X}|^2 \leq 2\epsilon |\delta \mathbf{X}|^2$$

og ved deling på  $2|\delta \mathbf{X}|^2$ , og deretter la  $|\delta \mathbf{X}|$  gå mot null, slik at  $\delta$  byttes med  $d$ , får vi den nødvendige begrensningen på tøyningstensoren  $\mathcal{E}$ :

$$(B.2.12) \quad \frac{|\mathbf{dX}^T \mathcal{E} \mathbf{dX}|}{\mathbf{dX}^T \mathbf{dX}} \leq \epsilon.$$

Dette gjelder for alle  $\mathbf{X} \in \Omega$  og alle retninger  $\mathbf{dX}$ , og spesielt for  $\mathbf{dX}$  i enhetsretningene, viser (B.2.12) at både  $\mathcal{E}_{11}$  og  $\mathcal{E}_{22}$  er av orden  $\epsilon$ . Ettersom  $\mathcal{E}$  er symmetrisk, er egenverdiene  $\eta_1, \eta_2$  reelle, og for  $\mathbf{dX}$  i retning av egenvektorene, reduseres (B.2.12) til

$$(B.2.13) \quad -\epsilon \leq \eta_1 \leq \eta_2 \leq \epsilon.$$

Dermed kan vi også konkludere at

$$(B.2.14) \quad \mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_{21} = \sqrt{\mathcal{E}_{11}\mathcal{E}_{22} - \det \mathcal{E}} = \sqrt{\mathcal{O}(\epsilon^2) - \eta_1 \eta_2} = \mathcal{O}(\epsilon)$$

og

**Konklusjon 1.** *alle elementer av  $\mathcal{E}$  er høyst av orden  $\epsilon$ .*

Vi skalerer nå variablene slik at de blir dimensjonsløse og av orden 1. Vi benevner de opprinnelige variablene med stjerne og naturlige skaleringer er som følger:

$$(B.2.15) \quad X^* = LX, \quad Y^* = hY, \quad x^* = Lx, \quad y^* = Ly.$$

Dette gir

$$(B.2.16) \quad F = \left( \frac{\partial x_i^*}{\partial X_j^*} \right) = \begin{pmatrix} x_X & \epsilon^{-1} x_Y \\ y_X & \epsilon^{-1} y_Y \end{pmatrix}$$

der subskript betegner partiellderivert. Tøyningstensoren er derfor

$$(B.2.17) \quad \begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2}(F^T F - \mathcal{I}) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_X^2 + y_X^2 - 1 & \epsilon^{-1}(x_X x_Y + y_X y_Y) \\ \epsilon^{-1}(x_X x_Y + y_X y_Y) & \epsilon^{-2}(x_Y^2 + y_Y^2) - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi antar nå at  $x$  og  $y$  kan skrives som potensrekker i  $\epsilon$ . Dvs

$$(B.2.18) \quad x(X, Y) = x^{(0)}(X, Y) + \epsilon x^{(1)}(X, Y) + \epsilon^2 x^{(2)}(X, Y) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

$$(B.2.19) \quad y(X, Y) = y^{(0)}(X, Y) + \epsilon y^{(1)}(X, Y) + \epsilon^2 y^{(2)}(X, Y) + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Ettersom vi vet at  $\epsilon^{-2}(x_Y^2 + y_Y^2) - 1 = 2\mathcal{E}_{22} = \mathcal{O}(\epsilon)$ , ser vi umiddelbart at

$$(B.2.20) \quad (x_Y^{(0)})^2 + (y_Y^{(0)})^2 = 0$$

og ved videre sammenligning av leddene i  $\mathcal{E}_{22}$  finner vi at

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\epsilon) &= \epsilon^{-2} \{(\epsilon x_Y^{(1)} + \epsilon^2 x_Y^{(2)} + \dots)^2 + (\epsilon y_Y^{(1)} + \epsilon^2 y_Y^{(2)} + \dots)^2\} - 1 \\ &= (x_Y^{(1)} + \epsilon x_Y^{(2)} + \dots)^2 + (y_Y^{(1)} + \epsilon y_Y^{(2)} + \dots)^2 - 1 \\ &= (x_Y^{(1)})^2 + (y_Y^{(1)})^2 - 1 + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned}$$

som betyr at

$$(B.2.21) \quad (x_Y^{(1)})^2 + (y_Y^{(1)})^2 = 1.$$

Videre er

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_{11} &= x_X^2 + y_X^2 - 1 \\ &= (x_X^{(0)} + \epsilon x_X^{(1)} + \dots)^2 + (y_X^{(0)} + \epsilon y_X^{(1)} + \dots)^2 - 1 \\ &= (x_X^{(0)})^2 + (y_X^{(0)})^2 - 1 + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned}$$

og vi må ha

$$(B.2.22) \quad (x_X^{(0)})^2 + (y_X^{(0)})^2 = 1.$$

Og til slutt finner vi at

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{12} &= \epsilon^{-1}(x_X x_Y + y_X y_Y) \\ &= \epsilon^{-1} \{ (x_X^{(0)} + \epsilon x_X^{(1)} + \dots)(\epsilon x_Y^{(1)} + \epsilon^2 x_Y^{(2)} + \dots) + (y_X^{(0)} + \epsilon y_X^{(1)} + \dots)(\epsilon y_Y^{(1)} + \epsilon^2 y_Y^{(2)} + \dots) \} \\ &= x_X^{(0)} x_Y^{(1)} + y_X^{(0)} y_Y^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned}$$

og derfor er

$$(B.2.23) \quad x_X^{(0)} x_Y^{(1)} + y_X^{(0)} y_Y^{(1)} = 0.$$

Ligning (B.2.20) sier ingenting annet enn det intuitivt forståelige at  $\mathbf{x}$  er uavhengig av  $Y$  til første orden. Dersom  $\theta = \theta(X)$  er vinkelen mellom senterlinjen og  $x$ -aksen, gir (B.2.22)

$$(B.2.24) \quad x_X^{(0)} = \cos \theta, \quad y_X^{(0)} = \sin \theta.$$

Dette innsatt i (B.2.23) viser at

$$(B.2.25) \quad \frac{dx^{(1)}}{dy^{(1)}} = \frac{x_Y^{(1)}}{y_Y^{(1)}} = -\tan \theta$$

som pga. (B.2.22) må bety at  $x_Y^{(1)} = -\sin \theta$  og  $y_Y^{(1)} = \cos \theta$ . Etterom  $\theta$  er uavhengig av  $Y$ , integreres dette enkelt til

$$(B.2.26) \quad x^{(1)} = -Y \sin \theta, \quad y^{(1)} = Y \cos \theta$$

Den praktiske betydningen av disse resultatene er at  $\mathbf{x}$  til første orden er buelengdeparametrisert av  $X$  og at hvert tverrsnitt av buen, til ledende orden i  $Y$ , bare er rotert med vinkel  $\theta$ . Merk at (B.2.26) med minustegnet på  $y$ -variabelen istedet for på  $x$ -variabelen også løser (B.2.25), men (B.2.26) er nødvendig for at det  $F > 0$ .

Dermed er deformasjonsgradienttensoren gitt ved

$$(B.2.27) \quad \begin{aligned} F &= \left( \frac{\partial x_i^*}{\partial X_j^*} \right) \\ &= \begin{pmatrix} x_X & \epsilon^{-1} x_Y \\ y_X & \epsilon^{-1} y_Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} -Y \theta_X \cos \theta & x_Y^{(2)} \\ -Y \theta_X \sin \theta & y_Y^{(2)} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

og er ortogonal til ledende orden. Tøyningstensoren er ved dette eller (B.2.17) gitt ved

$$(B.2.28) \quad \begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2}(F^T F - \mathcal{I}) \\ &= \frac{\epsilon}{2} \begin{pmatrix} -2Y \theta_X & x_Y^{(2)} \cos \theta + y_Y^{(2)} \sin \theta \\ x_Y^{(2)} \cos \theta + y_Y^{(2)} \sin \theta & -2x_Y^{(2)} \sin \theta + 2y_Y^{(2)} \cos \theta \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

## B.3 Spenningstensorene $\tau$ , $\mathcal{T}$ og $\mathcal{S}$

For å komme videre er vi nå avhengige av å kunne relatere tøyningen med de elastiske kreftene inne i materialet. La  $da$  være et lite arealelement med normalvektor  $\mathbf{n}$ . Dersom denne flaten ligger inne i et fast stoff med spenninger, vil materialet på, la oss si, siden der  $\mathbf{n}$  peker mot, påvirke flaten med en kraft  $d\mathbf{f}$ . Vi forventer at kraften er proporsjonal med arealet, og skriver

$$(B.3.1) \quad d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} da$$

der  $\boldsymbol{\sigma}$  er *spenningen* som virker på  $da$ . Merk, i motsetning til i hydrodynamikken, at spenningen kan virke både normalt og tangensielt, og at styrken kan variere med orientering av flatelementet.

Ettersom modellen av buen er to-dimensjonal og alle spenninger foregår i  $(x, y)$ -planet, har alle relevante arealelementer en normalvektor i dette planet og er rektangler som strekker seg langs hele platens “dybde” i  $z$ -retning, så å si. Det er derfor naturlig å identifisere disse arealelementene med siden i rektangelet som ligger i  $(x, y)$ -planet, altså av et *lengdeelement*  $dl$ . For å være konsistent med enhetene, må et uttrykk, f.eks av typen  $d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} dl$ , betegne kraften *per lengdeenhet i  $z$ -retning*. Dette vil gjøre de følgende utregningene mindre omfattende.

### B.3.1 Cauchys Spenningstensor, $\tau$

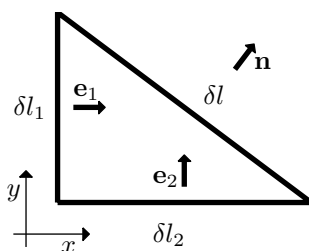
Betrakt først et linjeelement med normalvektor i  $x$ -retningen,  $\mathbf{e}_1$ , og benevn spenningen som virker på dette elementet med  $\boldsymbol{\tau}_1 = (\tau_{11}, \tau_{21})^T$ . La på samme måte  $\boldsymbol{\tau}_2 = (\tau_{12}, \tau_{22})^T$  benevne spenningen som virker på et linjeelement med normalvektor i  $y$ -retning,  $\mathbf{e}_2$ , og la  $\tau$  være matrisen

$$(B.3.2) \quad \tau = (\tau_{ij}) = [\boldsymbol{\tau}_1 \ \boldsymbol{\tau}_2] = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix}.$$

Vi skal nå vise at  $\tau$  er tilstrekkelig til å bestemme spenningen som virker på et vilkårlig lengdeelement. La  $\delta l$  være hypotenusen i en liten rettvinklet trekant, der katetene  $\delta l_1$  og  $\delta l_2$  har normalvektorer henholdsvis  $\mathbf{e}_1$  og  $\mathbf{e}_2$ . La normalvektoren til  $\delta l$  være  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$  pekende ut av trekanten, og ved enkel geometri er

$$(B.3.3) \quad \delta l_i = \delta l n_i, \quad i = 1, 2.$$

Kraften på katetene er tilnærmet  $\mathbf{f}_1 = \delta l_1 \boldsymbol{\tau}_1$  og  $\mathbf{f}_2 = \delta l_2 \boldsymbol{\tau}_2$  og dersom  $\boldsymbol{\sigma}$  benevner spenningen fra materialet utenfor trekanten *på* hypotenusen, så er



Figur B.3

kraften der  $\mathbf{f}_3 = -\delta l \boldsymbol{\sigma}$ . Den samlede kraften på hele trekanten er derfor

$$\begin{aligned}
 \text{(B.3.4)} \quad \mathbf{f} &= \sum \mathbf{f}_i \\
 &= \delta l_1 \boldsymbol{\tau}_1 + \delta l_2 \boldsymbol{\tau}_2 - l \boldsymbol{\sigma} \\
 &= \delta l (n_1 \boldsymbol{\tau}_1 + n_2 \boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\sigma}) \\
 &= \delta l (\boldsymbol{\tau} \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma})
 \end{aligned}$$

Nå, ved Newtons andre, er dette lik massen til trekanten ganger akselerasjonen. Massen (per  $z$ ) er proporsjonal med  $\delta l^2$ ,

$$\text{(B.3.5)} \quad \delta l (\boldsymbol{\tau} \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}) = m \mathbf{a} = C \delta l^2 \mathbf{a},$$

så ved å dele på  $\delta l$  og forvente at akselerasjonen  $\mathbf{a}$  er endelig, følger det at

$$\text{(B.3.6)} \quad \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma} = C \delta l \mathbf{a} \rightarrow 0, \quad \text{som} \quad \delta l \rightarrow 0.$$

Altså  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}$ , og vi kan skrive

$$\text{(B.3.7)} \quad d\mathbf{f} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} dl.$$

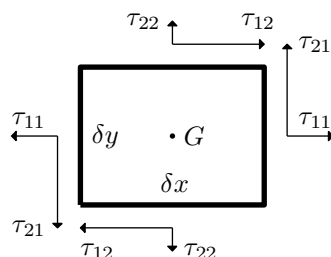
Dette gjør det mulig å finne kraften på et vilkårlig lengdeelement i  $\mathbf{x}(\Omega)$  uttrykt ved de fire størrelsene  $\tau_{ij}$ . Ved å betrakte et lite rektangel om et massesenter  $G$ , kan vi få mer informasjon om  $\tau_{ij}$ . Fra figur B.4 ser vi at dreiemomentet mot klokka om  $G$  er,

$$\begin{aligned}
 \text{(B.3.8)} \quad d &= 2(\tau_{21} \delta y) \frac{\delta x}{2} - 2(\tau_{12} \delta x) \frac{\delta y}{2} \\
 &= (\tau_{21} - \tau_{12}) \delta x \delta y.
 \end{aligned}$$

På samme måte som ovenfor, når arealet går mot null og vinkelakselerasjonen er endelig, gir dette

$$\text{(B.3.9)} \quad \tau_{21} = \tau_{12}.$$





Figur B.4

Detaljene er som følger:

$$\begin{aligned}
 (\tau_{21} - \tau_{12})\delta x\delta y &= I\alpha \\
 &= \frac{1}{12}m(\delta x^2 + \delta y^2)\alpha, \quad \text{gitt av treghetsmomentet for et prisme} \\
 &= \frac{1}{12}C\delta x\delta y(\delta x^2 + \delta y^2)\alpha, \quad \text{massen per } z \text{ er proporsjonal med arealet} \\
 &\Rightarrow \\
 \tau_{21} - \tau_{12} &= \frac{1}{12}C(\delta x^2 + \delta y^2)\alpha \rightarrow 0, \quad \text{som } \delta x^2 + \delta y^2 \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Den symmetriske matrisen  $\tau$  er kjent som *Cauchys spenningstensor*.

### B.3.2 Momentligningen.

Anta nå at den spente buen er i likevekt. Dvs. summen av krefter langs kanten av hvert arealelement i  $\mathbf{x}(\Omega)$  er null. Eller

$$(B.3.10) \quad \mathbf{0} = \int_{\partial A} d\mathbf{f} = \int_{\partial A} \tau \mathbf{n} dl$$

der  $\mathbf{n}$  er normalen til  $\delta A$  pekende utover. Så ved å anta at integranden er kontinuerlig, gir divergensteoremet

$$(B.3.11) \quad 0 = \int_{\partial A} (\tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2) dl = \iint_A \left( \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} \right) dA$$

$$(B.3.12) \quad 0 = \int_{\partial A} (\tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2) dl = \iint_A \left( \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} \right) dA$$

og når  $A \subset \mathbf{x}(\Omega)$  er vilkårlig, betyr dette at

$$(B.3.13) \quad 0 = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y}$$

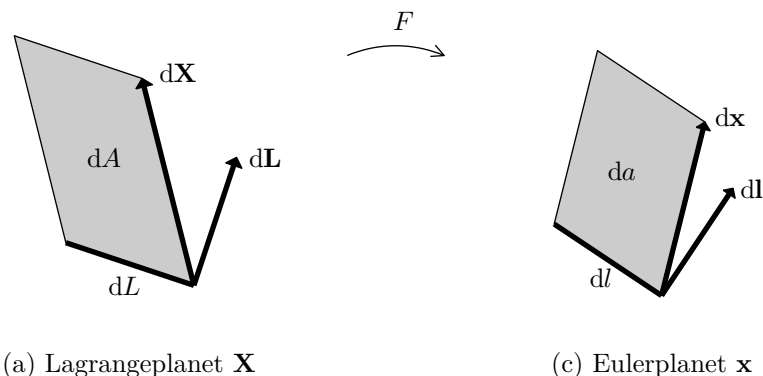
$$(B.3.14) \quad 0 = \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y}$$

eller, på en mer kompakt form, og siden  $\tau$  er symmetrisk,

$$(B.3.15) \quad \mathbf{0} = \nabla (\tau^T) = \nabla \tau.$$

### B.3.3 Piola-Kirchhoff Spenningstensorer, $\mathcal{T}$ og $\mathcal{S}$

For å kunne finne en sammenheng mellom tøyningstensoren  $\mathcal{E}$  og spenningstensoren, er det nødvendig å uttrykke  $\tau$  som en funksjon av  $\mathbf{X}$  heller enn  $\mathbf{x}$ . Vi begynner med å finne ut hvordan et lengdeelement  $d\mathbf{l} := d\mathbf{l}\mathbf{n}$  i det spente materialet forholder seg til lengdeelementet  $d\mathbf{L} := d\mathbf{L}\mathbf{N}$  i Lagrangekoordinatene. Betrakt et lite parallelogram i  $\Omega$  definert av grunnflaten med lengde



Figur B.5: Transformasjonen av arealelementer fra  $\Omega$  til  $\mathbf{x}(\Omega)$

$dL$  og normalvektor  $\mathbf{N}$ , og av vektoren  $d\mathbf{X}$ . Arealet er  $dA = d\mathbf{X}^T d\mathbf{L}$ . Dette arealelementet transformeres til et parallelogram i  $\mathbf{x}(\Omega)$  med grunnflate  $dl$ , sidekant  $d\mathbf{x}$  og areal  $da = d\mathbf{x}^T dl$ . Ved å bruke at  $d\mathbf{x} = F d\mathbf{X}$  og  $da = J dA$  der  $J = \det(F)$  måler den lokale arealforandringen, kan vi skrive

$$\begin{aligned} J d\mathbf{X}^T d\mathbf{L} &= J dA \\ &= da \\ &= d\mathbf{x}^T dl \\ &= d\mathbf{X}^T F^T dl. \end{aligned}$$

Multipliser fra venstre med  $\frac{d\mathbf{X}}{|d\mathbf{X}|^2}$ , omarrangør, og vi oppnår

$$(B.3.16) \quad d\mathbf{l} = J(F^T)^{-1} d\mathbf{L}.$$

Fra (B.3.7) har vi nå

$$(B.3.17) \quad d\mathbf{f} = \tau d\mathbf{l} = J\tau(F^T)^{-1} d\mathbf{L}$$

og vi definerer

$$(B.3.18) \quad \mathcal{T} := J\tau(F^T)^{-1}$$

som den *første Piola-Kirchhoff Stresstensor*.

Vi viser nå at momentligningen uttrykket ved  $\mathcal{T}$  og  $\mathbf{X}$  tar samme form som (B.3.13) og (B.3.14). Nemlig

$$(B.3.19) \quad 0 = \frac{\partial \mathcal{T}_{11}}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{T}_{12}}{\partial Y}$$

$$(B.3.20) \quad 0 = \frac{\partial \mathcal{T}_{21}}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{T}_{22}}{\partial Y}$$

*Bevis.* Resultatet følger ved en direkte utregning og bruk av kjerneregelen. Vi beviser bare (B.3.19), da beviset for (B.3.20) er helt tilsvarende. Merk at

$$(B.3.21) \quad (F^T)^{-1} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial Y} & -\frac{\partial y}{\partial X} \\ -\frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial X} \end{pmatrix}$$

så

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{11} &= J \left( \tau_{11}(F_{11}^T)^{-1} + \tau_{12}(F_{21}^T)^{-1} \right) \\ &= \tau_{11} \frac{\partial y}{\partial Y} - \tau_{12} \frac{\partial x}{\partial Y} \end{aligned}$$

og dermed er

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{T}_{11}}{\partial X} &= \left( \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X} \right) \frac{\partial y}{\partial Y} + \tau_{11} \frac{\partial y}{\partial X \partial Y} \\ &\quad - \left( \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X} \right) \frac{\partial x}{\partial Y} - \tau_{12} \frac{\partial x}{\partial X \partial Y}. \end{aligned}$$

På samme måte er

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{12} &= J \left( \tau_{11}(F_{12}^T)^{-1} + \tau_{12}(F_{22}^T)^{-1} \right) \\ &= -\tau_{11} \frac{\partial y}{\partial X} + \tau_{12} \frac{\partial x}{\partial X} \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{T}_{12}}{\partial Y} &= - \left( \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial Y} \right) \frac{\partial y}{\partial X} - \tau_{11} \frac{\partial y}{\partial X \partial Y} \\ &\quad + \left( \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial Y} \right) \frac{\partial x}{\partial X} + \tau_{12} \frac{\partial x}{\partial X \partial Y}. \end{aligned}$$

Ved summering og bruk av (B.3.13) får vi

$$(B.3.22) \quad \frac{\partial \mathcal{T}_{11}}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{T}_{12}}{\partial Y} = \left( \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial y}{\partial X} \right) = 0.$$

□

Der Cauchys spenningstensor  $\tau$  gir sammenhengen mellom krefter og lengdeelementer i  $\mathbf{x}$ -planet, relaterer den første Piola-Kirchhoff-spenningstensoren krefter i  $\mathbf{x}$ -planet med lengdeelementer i  $\mathbf{X}$ -planet. En transformasjon av kraftvektoren tilbake til  $\mathbf{X}$ -planet,

$$F^{-1} d\mathbf{f} = F^{-1} \mathcal{T} d\mathbf{L}$$

gir dermed sammenhengen mellom lengder og krefter der alle størrelser er gitt i Lagrangekoordinater. Dette er motivasjonen til å definere den *andre Piola-Kirchhoff Spenningstensor* gitt ved

$$(B.3.23) \quad \mathcal{S} := F^{-1} \mathcal{T} = J F^{-1} \tau (F^T)^{-1}.$$

Merk at  $\mathcal{S}$ , i motsetning til  $\mathcal{T}$ , er symmetrisk.

## B.4 Skalering og konklusjon

$F$  og  $\mathcal{E}$  er gitt av (B.2.27) og (B.2.28), og kan skrives på formen

$$\begin{aligned} F &= Q + \epsilon M + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \mathcal{E} &= \epsilon \mathcal{E}^{(0)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -Y \theta_X \cos \theta & x_Y^{(2)} \\ -Y \theta_X \sin \theta & y_Y^{(2)} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{E}^{(0)} &= \frac{1}{2} (Q^T M + M^T Q) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2Y \theta_X & x_Y^{(2)} \cos \theta + y_Y^{(2)} \sin \theta \\ x_Y^{(2)} \cos \theta + y_Y^{(2)} \sin \theta & -2x_Y^{(2)} \sin \theta + 2y_Y^{(2)} \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ettersom tøyningen er liten, postulerer vi en lineær sammenheng mellom elementene av  $\mathcal{S}$  og elementene av  $\mathcal{E}$ . Hookes lov for et elastisk isotropt materiale gir

$$(B.4.1) \quad \mathcal{S} = \lambda \operatorname{tr}(\mathcal{E})\mathcal{I} + 2\mu\mathcal{E}$$

der  $\lambda, \mu$  er *Lamé-parametrene*; skalare størrelser med enhet kraft per areal og er spesifikke for et material. (F.eks stål har verdiene  $\lambda = 100 \cdot 10^9 \text{Nm}^{-2}$  og  $\mu = 78 \cdot 10^9 \text{Nm}^{-2}$ , [HKO] side 13.)

Vi ønsker nå å finne passende skaleringer til elementene i  $\mathcal{T}$ . Av (B.3.23) og (B.4.1) følger det at

$$(B.4.2) \quad \mathcal{T} = F\mathcal{S} = \lambda \operatorname{tr}(\mathcal{E})F + 2\mu F\mathcal{E}$$

og siden  $F = \mathcal{O}(1)$  og  $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\epsilon)$  følger det at elementene i  $\mathcal{T}$  er høyst av orden  $\epsilon E$ , der  $E$  er Youngs Modulus som er forbundet med Lamé-parametrene via

$$(B.4.3) \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

([HKO] side 32.)

Dersom vi benevner de opprinnelige variablene med  $*$  og lar  $\mathcal{T}_{11}^* = \epsilon E \mathcal{T}_{11}$  og  $\mathcal{T}_{12}^* = \mathcal{T}_{12}^* \mathcal{T}_{12}$  viser (B.3.19) at  $\mathcal{T}_{12}^*$  faktisk er én størrelsesorden mindre enn  $\mathcal{T}_{11}^*$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{T}_{11}^*}{\partial X^*} + \frac{\partial \mathcal{T}_{12}^*}{\partial Y^*} \\ &= \frac{\epsilon E}{L} \frac{\partial \mathcal{T}_{11}}{\partial X} + \frac{\mathcal{T}_{12}^*}{h} \frac{\partial \mathcal{T}_{12}}{\partial Y} \\ &\Rightarrow \\ \mathcal{T}_{12}^* &= \epsilon^2 E. \end{aligned}$$

Det samme gjelder for forholdet mellom  $\mathcal{T}_{21}$  og  $\mathcal{T}_{22}$ , og  $\mathcal{T}$  skaléres dermed på følgende måte:

$$(B.4.4) \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{11}^* & \mathcal{T}_{12}^* \\ \mathcal{T}_{21}^* & \mathcal{T}_{22}^* \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \epsilon \mathcal{T}_{11} & \epsilon^2 \mathcal{T}_{12} \\ \epsilon \mathcal{T}_{21} & \epsilon^2 \mathcal{T}_{22} \end{pmatrix}$$

Ettersom elementene av  $F^{-1}$  er  $\mathcal{O}(1)$  og  $\mathcal{T}$  skaléres som (B.4.4), er elementene av  $\mathcal{S}$  av størrelsesorden

$$(B.4.5) \quad \mathcal{S}_{11}^*, \mathcal{S}_{21}^* = \mathcal{O}(\epsilon E), \quad \mathcal{S}_{12}^*, \mathcal{S}_{22}^* = \mathcal{O}(\epsilon^2 E),$$

som må bety at

$$\begin{aligned}
 0 &= 2\mu\mathcal{E}_{12}^{(0)}, \quad \text{og} \\
 0 &= \lambda(\mathcal{E}_{11}^{(0)} + \mathcal{E}_{22}^{(0)}) + 2\mu\mathcal{E}_{22}^{(0)} \\
 &= (\lambda + 2\mu)\mathcal{E}_{22}^{(0)} + \lambda\mathcal{E}_{11}^{(0)} \\
 &\Rightarrow \\
 \mathcal{E}_{22}^{(0)} &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\mathcal{E}_{11}^{(0)}.
 \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
 \text{(B.4.6)} \quad \epsilon E (\mathcal{S}_{11}^{(0)} + \epsilon\mathcal{S}_{11}^{(1)} + \dots) &:= \mathcal{S}_{11}^* \\
 &= \lambda(\mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{22}) + 2\mu\mathcal{E}_{11} \\
 &= \epsilon \left( (\lambda + 2\mu)\mathcal{E}_{11}^{(0)} - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\mathcal{E}_{11}^{(0)} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2 E) \\
 &= \epsilon 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \mathcal{E}_{11}^{(0)} + \mathcal{O}(\epsilon^2 E) \\
 &= -\epsilon 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} Y\theta_X + \mathcal{O}(\epsilon^2 E).
 \end{aligned}$$

Når et material komprimeres langs en akse, har det vanligvis en tendens til å utvide seg langs de to andre aksene. Størrelsen  $\nu$  er kjent som et materials *Poisson-ratio* og er et mål på dette fenomenet.  $\nu$  defineres som forholdet mellom utvidelse og kompresjon, og sammenhengen med Lamé-parametrene er gitt ved

$$\text{(B.4.7)} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Ved bruk av dette og (B.4.3) utledes

$$\text{(B.4.8)} \quad 4\frac{\mu}{E} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{1 - \nu^2}$$

slik at uttrykket for (B.4.6), til ledende orden, kan reduseres fra tre til en materialparameter:

$$\text{(B.4.9)} \quad \mathcal{S}_{11}^{(0)} = -\frac{Y\theta_X}{1 - \nu^2}.$$

Nå, ved å definere et *tverrsnitt* av buen som, i skalerte Lagrangkoordinater, er linjen ved  $X$  fra  $Y = -1/2$  til  $Y = 1/2$ , kan bøyemomentet om et tverrsnitt

beregnes som summen av momenter som virker på dette tversnittet. Dvs. Summen av krefter vinkelrett på tversnittet ganger avstanden til der kraften virker. Eller, til ledende orden

$$(B.4.10) \quad M(X) = \int_{-1/2}^{1/2} Y \mathcal{S}_{11}^{(0)}(X, Y) dY$$

$$(B.4.11) \quad = -\frac{\theta_X}{12(1-\nu^2)}$$

Vi har tidligere vist at senterlinjen  $c_0$  er bevart opp til orden  $\epsilon$ , (den er faktisk bevart opp til orden  $\epsilon^2$ , men vi skal ikke vise det her) så linjen fra 0 til  $X$  i Lagrangplanet er tilnærmet like lang som kurven fra  $\mathbf{x}(0, 0)$  til  $\mathbf{x}(X, 0)$  i Eulerplanet langs senterlinjen. Så, dersom vi buelengdeparametriserer senterlinjen i Eulerplanet med variabelen  $s$ , får vi at

$$\frac{d}{ds}\theta := \dot{\theta} \approx \theta_X$$

og B.4.11 sier da at

$$M(s) \propto \dot{\theta}(s)$$

til første orden. Det vil si

**Konklusjon 2.** *Krumningen er proporsjonal med momentet.*





# Konklusjoner

Formen av en spennt bue med konstant stivhet kan beskrives vha. elliptiske funksjoner og er delmengder av Eulers *Elastica*. For trukkede buer er formen essensielt den samme, hvilket vises av den formbevarende transformasjonen (1.4.16) på side 11 i kapittel 1.

Den elastiske energien for denne type buer blir bevist, i teorem 2 i kapittel 2, til å være integralet over kvadratet av krumningen. Dette er forventet, men det viser at å utlede modellen fra lineær elastisitetsteori gjør at vi unngår å måtte *postulere* dette energipotensialet. Etersom energien kun er avhengig av formen av buen, tillater dette at buen kan optimeres ved kun å betrakte buens form i henholdsvis trukket og spennt posisjon, og vi slipper dermed å evaluere et komplisert integral over kraftfunksjonen.

Ved optimering av buer med konstant stivhet, vil en antagelse om gitt trekk lengde gi et skuffende resultat (se side 26). Energikoeffisienten vil aldri komme over 0.5 og en lineær fjær hadde dermed vært å foretrekke. Det er først når vi omformulerer problemstillingen og antar gitt *effektiv* trekk lengde at energikoeffisienten blir større enn en fjærs.

For buer med en gitt varierende stivhet, blir formen mye vanskeligere å beregne. På den andre siden er stivhetsfordelingen som tilsvarer en gitt bueform, enkel å beregne. Dette illustreres av eksemplene på side 37 og side 39 som viser at sirkelsektorformede buer gir en cosinus-formet stivhetsfordeling. Dette prinsippet er til hjelp når buer med varierende stivhet skal optimeres ettersom vi bare behøver å maksimere mhp. bueformene istedet for stivhetsfordelingene. Likevel vil EULER-LAGRANGE-ligningene bli for kompliserte for at standard variasjonsmetoder kan benyttes. Vi forsøker derfor å omgå dette ved å diskretisere problemet. I avsnitt 3.5 undersøker vi alternative modeller og finner at disse  $n$ -leddede buene kan ses på som energibevarende *svake* løsninger av differensialligningen som beskriver formen av buer med varierende stivhet. I avsnitt 3.6 formulerer vi et optimeringsproblem i  $\mathbb{R}^{2n+4}$  som vil gi en diskret versjon av den optimale bueformen, og dermed også den optimale stivhetsfordelingen. Buer med varierende stivhet vil garantert ha energikoeffisienter som vil slå energikoeffisienten til jamstive buer fordi, som vi

ser i avsnitt 3.5.1, allerede for  $n = 1$  er denne type bue mer effektiv enn buer med konstant stivhet. Hvis vi løser optimeringsproblemet (3.6.6) for stadig større  $n$ , må vi kunne forvente at løsningen konvergerer mot løsningen av det tilsvarende variasjonsproblemet. Problemet er at denne grenseløsningen godt kan være en bue med en eller flere knekk og buen kan også være *rett* på enkelte steder. Tilhørende stivhetsfordeling blir i såfall en distribusjon med verdi null og uendelig på henholdsvis de stedene buen har knekk og der buen er rett. Dette blir selvsagt vanskelig å etterligne i praksis da stivheten av et homogent materiale må reguleres med tverrsnittarealet av buen. Hvis denne typer løsninger skal unngås, må det legges ekstra begrensninger på variablene i (3.6.6) for å forhindre at buen krummer så mye at materialet mister sine elastiske egenskaper.

I kapittel 4 viser vi at formen av en positivt kurvet og jamstiv elastisk stang er unikt bestemt av de to parametrene  $p$  og  $k$  og vi beskriver også området,  $\mathbb{P}$ , disse parametrene kan, og må tilhøre. Ettersom potensialet  $U$  er eksplisitt gitt ved  $\mathbf{p} = (p, k)$  og ettersom posisjonen til massepunktet,  $\mathbf{x}^0$  har en 1-1-relasjon med  $\mathbf{p}$ , kan potensialflaten beskrives som en funksjon av  $\mathbf{x}^0$  i dette tilfellet. Likevel er flaten såpass irregulær at numeriske løsninger for banen til massepunktet, bare kunne finnes for små tidsintervall. Konfigurasjonsrommets eneste likevektspunkt er åpenbart  $(1, 0) \in \mathbf{x}^0(\mathbb{P})$  der potensialet er null, men dette ligger også i den delen av området der flaten er mest irregulær da vi kan finne vilkårlige store verdier for  $U$  vilkårlig nært  $(1, 0)$ . En jakt på eventuelle periodiske løsninger vil derfor kreve mer sofistikerte metoder enn det vi har klart å komme opp med.

For en stang *med* vendepunkter, dvs. når kraftvektoren krysser stangen, er stangens form og potensial fremdeles unikt bestemt av  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$ , men  $\mathbf{x}^1$  er ikke lengre i et 1-1-forhold med  $\mathbf{p}$  så den parametriserte potensialflaten  $(x^1(\mathbf{p}), y^1(\mathbf{p}), U(\mathbf{p}))$  folder over seg selv, hvilket bidrar til å komplisere den dynamiske situasjonen ytterligere.

Ved å tegne  $\mathbf{x}^1(\partial\mathbb{P})$  og bildet av nullkonturen til determinanten av Jacobimatrisen til  $\mathbf{x}^1$ , (se figur 4.13 side 78) får vi enhetssirkelen inndelt i syv områder. Hvert av disse områdene representerer kvalitativt forskjellige typer stenger som har fra ingen, til tre førbilder i  $\mathbb{P}$ . Vi undersøker hvordan stangen vil bifurkere over grensene mellom disse områdene og finner spesielt interessant de subtile bifurkasjonene rundt de to små områdene der  $\mathbf{x}^1$  har tre førbilder.

# Bibliografi

- [La] Derek F. Lawden, “Elliptic Functions and Applications”, Springer 1989.
- [Tr] John L. Troutman, “Variational Calculus and Optimal Control: Optimization with Elementary Convexity” 2nd ed., Springer 1995.
- [Ad] Robert A. Adams, “Calculus: a complete course” 6th ed., Pearson Addison Wesley, 2006.
- [JS] D. W. Jordan, P. Smith, “Nonlinear Differential Equations: an introduction for scientists and engineers”, 4th ed., Oxford 2007.
- [Ge] Eckart W. Gekeler, “Mathematical Methods for Mechanics”, Springer 2008.
- [NW] J. Nocedal, S. J. Wright, “Numerical Optimization” 2nd ed., Springer 2006.
- [HKO] P. Howell, G. Kozyreff, J. Ockendon, “Applied Solid Mechanics”, Cambridge 2009.
- [CK] W. Cheney, D. Kincaid, “Numerical Mathematics and Computing” 6th ed., Thomson Brooks/Cole 2008.
- [CTr] C. Truesdell, “The Influence of Elasticity on Analysis: The Classical Heritage”, Bulletin of the American Mathematical Society, Volum 9, Number 3, November 1983.
- [Le] Raph Levien, “The Elastica: a Mathematical History”, <http://www.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2008/EECS-2008-103.html>, 2008.
- [Sn] Snorre Sturluson, “Heimskringla” 1899-utgave, J.M. Stenersen & Co 1899.
- [Forsidebilde] Christian Krohg, “For veik, for veik er kongens boge!”, Illustrasjon for Olav Tryggvasons saga, Heimskringla 1899-utgave.