NTNU
Det skapende universitet

Elevers beskrivelser av multiplikasjon

En kvalitativ studie av intuitive modeller for multiplikasjon hos elever på femte trinn

Sigrid Iversen

Lektorutdanning med master i realfag
Oppgaven levert: Desember 2010
Hovedveileder: Heidi Dahl, MATH
Biveileder(e): Frode Rønning, HiST ALT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven i matematikkdidaktikk er skrevet som avslutning på femårig lektorutdanning i realfag (LUR) ved NTNU, høsten 2010.

Et femårig studium er en dannelsesreise der man skal gjøre seg kjent med teorier og tilegne seg ferdigheter. Gjennom dette skal man utvikles til å bli en trygg og kreativ profesjonell. Skolen er en av samfunnets aller viktigste funksjoner, og fra alle hold det stilles store krav til læreren. Å få mulighet til å fordype seg i temaer som man selv synes er viktig for undervisningen og på den måten forberede seg for yrkeslivet, er derfor et stort privilegium. Arbeidet med denne oppgaven har vært som en berg-og-dalbane, mellom følelsen av å demonstrere det ypperste intellekt og det stikk motsatte. Uten verdifulle innspill og forståelse fra omgivelsene hadde det sannsynligvis vært umulig. Jeg ønsker derfor å takke de som på ulike måter har hjulpet meg i dette arbeidet.

Først vil jeg takke mine to veiledere. Jeg vil takke Frode Rønning for inspirasjon og grundige tilbakemeldinger, og Heidi Dahl for entusiasme og gode innspill. Jeg vil også takke Anne Dahl for hjelp med den engelske oversettelsen av sammendraget og Elin Ranheim, Marianne Wiik Øberg og Tea Toft for hjelp med korrekturlesing. Jeg vil takke elevene som deltok i undersøkelsen, og spesielt læreren, som delte av tida si og la til rette for at jeg kunne gjennomføre den. Her vil jeg og takke foreldre og skoleledelse for nødvendige tillatelser.

Jeg vil takke alle studievenner som har gjort de siste fem årene til en fantastisk tid.

Til sist vil jeg takke familien min for at dere alltid har hatt tro på meg.

Trondheim, 15. desember 2010,

Sigrid Iversen

Sammendrag

Denne oppgaven tar utgangspunkt i et konstruktivistisk syn på læring. Under forutsetning av at ny kunnskap må bygge på allerede eksisterende kunnskap, er det utført en undersøkelse for å besvare følgende problemstilling: *Hvilke intuitive modeller har elever på femte trinn for multiplikasjon med flersifrede tall?* Denne er utdypet i to forskningsspørsmål: *Hvilke beskrivelser gir elevene av egne løsningsstrategier for multiplikasjon?* og *Hvilke sammenhenger kan sees mellom oppgavene og elevenes valg av løsningsstrategier?*

For å besvare problemstillingen er det utført en kvalitativ undersøkelse i en respondentgruppe med elever fra femte trinn ved en skole i Sør-Trøndelag. Alle elevene på trinnet har først regnet et oppgavesett. Oppgavesettet er designet for å illustrere ulike multiplikative situasjoner som involverer ett eller flere flersifrede tall. Etterpå har elever blitt tatt ut til intervjuer, enten enkeltvis eller i grupper på to eller tre. Datamaterialet inneholder elleve elevers skriftlige utregninger og muntlige beskrivelser av oppgaveløsningen, samt oppgavetekstene. Dette materialet er så blitt analysert med bruk av teori knyttet til kunnskap om multiplikasjon, for å besvare de to forskningsspørsmålene.

Resultatene fra undersøkelsen viser at elevene bruker løsningsstrategier som kan plasseres i fire ulike kategorier; Direkte telling, Gjentatt addisjon, Standardalgoritme eller lignende og Bruk av multiplikasjonsfakta og egenskaper ved multiplikasjon. Valg av løsningsstrategi ser ikke ut til å ha noen direkte sammenheng med oppgavenes semantiske struktur, men det ser ut til at egenskaper ved og størrelse på tallene i oppgaven spiller inn. Elevenes beskrivelser viser at de kan bruke ulike løsningsstrategier både for ulike oppgaver og for enkeltoppgaver, og det kan i noen tilfeller være et misforhold mellom skriftlig løsning og muntlig beskrivelse. I tilfeller der elevene ikke har noen intuitive strategier tilgjengelige for oppgaveløsningen, bruker de algoritmer som minner om standardalgoritmer.

Konsekvensene av disse resultatene er at et fortsatt kritisk blikk må rettes mot bruk av ferdig oppstilte algoritmer i undervisningen. Undervisningen må ta utgangspunkt i elevenes intuitive kunnskap og la elevene selv utvikle skriftlige metoder for denne. Bruk av standardalgoritmer bør fortsatt stå som en effektiv løsningsstrategi, men ikke på bekostning av elevenes forståelse. Fokus på muntlige ferdigheter og mulighet for utvikling av egne algoritmer for å løse problemer knyttet til ulike multiplikative situasjoner vil fremme fleksible og sterke kunnskapskonstruksjoner.

Abstract

This thesis takes a constructivist approach towards teaching and learning in mathematics, and focuses on how students demonstrate mathematical knowledge. Assuming that all new knowledge must build upon already existing knowledge, the study reports an investigation of the following question: *What kinds of intuitive models do fifth grade pupils have for multidigit multiplication?* To answer this question, it is specified in two research questions: *How do the pupils describe their strategies for solving multiplication problems?* and *Which connections can be found between the tasks and the pupils' choice of solution strategies?*

In order to answer the research questions, a qualitative study was conducted using a groups of respondents consisting of pupils at the age of ten from a school in Sør-Trøndelag. The whole class solved a set of tasks designed to illustrate different multiplicative situations using different numbers. Afterwards, a group of pupils were chosen for interviews, either individually or in groups of two or three. The final data include written material and oral descriptions of eleven pupils' task solving, along with the tasks themselves. In order to answer the research questions, the material was analyzed using theory concerning knowledge about multiplication.

The results from this study shows that the pupils demonstrate use of strategies that can be placed in four categories: Direct counting, Repeated addition, Standard algorithms or similar strategies, and Use of multiplication facts and multiplicative properties. The choice of strategy does not seem to be affected by the semantic structure of the task, but the results indicate that number size and number properties are relevant factors. The pupils' descriptions show that they use different strategies both for solving different tasks and in some cases also for individual tasks. There seems to be a mismatch between their written solutions and oral descriptions. In cases where the students have no intuitive strategies available for solution, they attempt to use standard algorithms for multiplication.

The results stress that the use of formal standard algorithms must still be critically evaluated. The use of formal standard algorithms are an effective and elegant solution strategy, but must not come at the expense of the pupils' understanding. The pupils' intuitive knowledge must be used as a basis for teaching, by letting the pupils develop their own written methods and communicate their thinking both in writing and orally. This will promote flexible and strong constructions of knowledge in mathematics.

Innhold

Vedlegg

1 Innledning

Matematikk er anerkjent som et av de viktigste fagene i skolen. Den kanskje største bidragsyteren til teori om læring og utvikling, Jean Piaget, beskriver matematikk, gjennom logisk-matematisk[1] tenking, som elementær i all kunnskapsutvikling (Sinclair, 1990). Matematikkfaget får stor oppmerksomhet innen forskning og media både nasjonalt og internasjonalt, og resultater i matematikk hos barn og unge blir vurdert jevnlig. I Norge har dette skapt debatt etter at vi har gjort det forholdsvis dårlig i disse undersøkelsene. En av konklusjonene er at norske elever ikke behersker grunnleggende ferdigheter i matematikk (Grønmo, Onstad, & Pedersen, 2010). Dette har de norske myndighetene tatt til etterretning, gjennom at resultatene fra undersøkelser som TIMMS[2] og PISA[3] har vært med å danne grunnlaget for vårt gjeldende læreplanverk, Kunnskapsløftet, fra 2006 (Pedlex Norsk Skoleinformasjon, 2008).

I løpet av studietida har jeg reflektert mye over og vært interessert i hvordan elever utvikler kunnskap i matematikk. Jeg har vært så heldig å få være delaktig i matematikkundervisning fra 3. trinn på barneskolen og opp til VG2 i videregående skole, og denne erfaringen har sammen med teoristudier vært inspirerende for denne studien. Jeg vil nevne to erfaringer som har hatt spesiell betydning. For det første er jeg blitt oppmerksom på at elevene ofte mangler forkunnskaper når de møter et nytt tema i undervisningen. Videre synes det for meg som at elever ofte har vanskelig for å utføre standardalgoritmer som de blir instruert i å bruke, og dermed bruker den feil. Det fører til at de ikke får riktig svar når de løser oppgaver, uten at de forstår hvorfor.

Hiebert & Carpenter (1992) skriver at matematikkopplæringens viktigste oppgave er å bidra til å utvikle *forståelse* i faget. Men det alene er ikke nok. For å lære i matematikk må man ha en form for motivasjon, og forskning beskriver mestringsfølelse som en viktig komponent i denne (se f.eks. Wæge, 2007), som nettopp kan oppstå når man føler at man forstår noe.

---

[1] Egen oversettelse fra eng.: logico-mathematical.

[2]TIMMS: Trends in International Mathematics and Science Study. Kilde: TIMMS. (Lastet ned 22. september, 2010, fra www.timms.no)

[3]PISA: Programme for International Student Assessment. Kilde: PISA (Hentet 22. september, 2010, fra www.pisa.no)

Forståelse og motivasjon hører hjemme i henholdsvis det kognitive og det affektive området av den matematikkdidaktiske forskningen, og mitt arbeid hører hjemme i det kognitive feltet.

Forståelse er her forstått som kunnskap som er rik på sammenhenger mellom ulike biter av informasjon (Hiebert & Carpenter, 1992). Jo flere sammenhenger som finnes, jo mer solid er kunnskapsstrukturen. Dette følger samme grunnidé som flere eldre teorier om kognitiv utvikling, for eksempel Piagets teori om skjemabygging (Sinclair, 1990; Woolfolk, 2004). Felles for disse er at de følger det konstruktivistiske synet på læring. Dette bygger på antagelsen om at kunnskap ikke mottas passivt, men utvikles i hver enkelt (von Glasersfeld, 1995a), i kontrast til for eksempel behavioristiske teorier (Woolfolk). Hiebert og Lefevre (1986) utdyper beskrivelsen av matematisk kunnskap, gjennom å se på den som bestående av to komponenter, *begrepskunnskap* og *prosedyrekunnskap*. Begrepskunnskap er essensielt det samme som forståelse (Hiebert & Carpenter), mens prosedyrekunnskap er kunnskap om formelt språk og algoritmer. Ifølge Hiebert og Lefevre er begreps- og prosedyrekunnskap gjensidig avhengige, i det at de støtter opp om hverandres utvikling. Mine erfaringer og studier av aktuell matematikkdidaktisk forskning har ført til at jeg i denne studien fokuserer på elevenes utvikling av kunnskap i matematikk.

I denne undersøkelsen fokuserer jeg på barns kunnskap om multiplikasjon med flersifrede tall. Multiplikasjon er en av de fire grunnleggende regneartene innen aritmetikk[4], og forståelse innen aritmetikk er viet oppmerksomhet av flere innen det matematikkdidaktiske fagfeltet (se for eksempel Anghileri, 1989; Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema, & Empson, 1997; Fuson et al., 1997; Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Thompson, 1999). Forskning viser at undervisningen i for stor grad gjør bruk av ferdigoppstilte algoritmer og regler, og at den ofte kommer på kant med elevenes forståelse (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985; Fuson et al., 1997; Thompson, 1999). I min studie vil jeg på grunnlag av teori om utvikling av forståelse og teori knyttet til multiplikasjon undersøke elevers løsningsstrategier for oppgaver knyttet til multiplikasjon med flersifrede tall.

[4] Aritmetikk: tall-lære, læren om tallenes egenskaper og metoder til tallregning Kilde: Store Norske Leksikon (Lastet ned 01.september, 2010, fra http://snl.no/aritmetikk).

1.1 Problemstilling

I denne studien undersøker jeg, på grunnlag av et konstruktivistisk læringssyn, elevers løsningsstrategier for multiplikasjon med flersifrede tall. Under antagelsen om at all ny kunnskap må utvikles på grunnlag av allerede eksisterende kunnskap, og at elevenes kunnskap kommer til syne når den er i bruk (von Glasersfeld, 1995a), vil jeg i denne studien besvare følgende problemstilling:

Hvilke intuitive modeller har elever på femte trinn for multiplikasjon med flersifrede tall?

Intuitive modeller er definert som elevenes forkunnskaper når de møter et nytt tema i matematikk. For å danne et bilde av disse modellene er det hensiktsmessig å se på elevenes oppgaveløsning, spesielt i sammenhengen med de matematiske situasjonene oppgavene beskriver. Jeg har derfor valgt å utdype problemstillingen over i to forskningsspørsmål:

- *Hvilke beskrivelser gir elevene av egne løsningsstrategier for multiplikasjon?*
- *Hvilke sammenhenger kan sees mellom oppgavene og elevenes valg av løsningsstrategier?*

I studien undersøker jeg hvordan tiåringer løser tekstoppgaver som omhandler multiplikasjon med flersifrede tall før de møter temaet i undervisningen. Med multiplikasjon med flersifrede tall mener jeg tilfeller der ett eller to flersifrede tall skal multipliseres. På bakgrunn av tidligere forskning og egne erfaringer er min hypotese at elever på femte trinn gjør bruk av løsningsstrategier som er svært ulik det vi kaller standardalgoritmer.

For å besvare forskningsspørsmålene bruker jeg et kvalitativt forskningsdesign som bygger på premissene bak det det konstruksjonistiske forskningsparadigmet. Jeg bruker tekstanalyse og intervju som datainnsamlingsmetoder. Teori knyttet til multiplikasjon brukes for å analysere datamaterialet opp mot forskningsspørsmålene.

1.2 Kapitteloppbygging

Denne rapporten er delt inn i seks kapitler. Innledningsvis har jeg presentert bakgrunn for studien, definert problemområde og presentert problemstillingen. I kapittel 2 presenterer jeg først generell teori om kunnskapsutvikling i matematikk, før jeg går nærmere inn på teori knyttet til multiplikasjon og til slutt referer resultater fra relevante studier. Kapittel 3 omhandler beskrivelse og begrunnelse for metoder og utvalg. Undersøkelsens gjennomføring blir her beskrevet og evaluert i forhold til etiske problemstillinger. Datamaterialet fra gjennomføringen blir i kapittel 4 analysert opp mot teorien knyttet til multiplikasjon. I kapittel 5 blir resultatene fra analysen diskutert opp mot den overordnede teorien, i tillegg til at studien vurderes med hensyn til kvalitet. Kapittel 6 avslutter med oppsummering og perspektivering.

2 Teori

I det følgende vil jeg presentere det teoretiske rammeverket som brukes for å analysere studiens datamateriale opp mot forskningsspørsmålet.

2.1 Teoridelens oppbygning

Dette kapittelet omhandler aspekter ved matematisk kunnskap med utgangspunkt i det konstruktivistiske synet på læring ut ifra Piagets teorier (von Glasersfeld, 1995a; Sinclair, 1990; Woolfolk, 2004). Med bakgrunn i dette gir jeg et oversiktsbilde av viktige teorier om kunnskap i matematikk (Fischbein, 1994; Hiebert & Carpenter, 1992; Hiebert & Lefevre, 1986). Videre går jeg nærmere inn på teori rettet mot kunnskap om multiplikasjon, og beskriver hvordan Steffe (1994) beskriver denne gjennom *multiplikative skjema*, og gir Vergnauds (1983, 1988) beskrivelse av *multiplikative strukturer*. Til slutt beskriver jeg undersøkelser som er relevante i forhold til studien (Anghileri, 1989; Fischbein et al., 1985; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Thompson, 1997, 1999).

2.2 Et grunnleggende syn på kunnskap og læring

Jeg har ovenfor introdusert konstruktivismen som det grunnleggende læringssynet som jeg legger til grunn for arbeidet med denne studien. I denne delen vil jeg beskrive konstruktivismen nærmere med tanke på matematikklæring og matematikkundervisning.

> Whereas the trainer focuses only on the trainee's performance, the teacher must be concerned with what goes on in the student's head. The teacher must listen to the student, interpret what the student does and says, and try to build up a ”model” of the student's conceptual structures. (von Glasersfeld, 1995a, s. 14)

Den mest innflytelsesrike personen i utviklingen av konstruktivismen er den sveitsiske psykologen Jean Piaget (1896-1980) (Sinclair, 1990; Woolfolk, 2004). Piaget introduserer en relasjon mellom *den som kan* og *kunnskap*, der disse påvirker hverandre. På den ene siden vil subjektet, altså den som kan, tilpasse objektet, altså kunnskapen, til sitt kognitive system (assimilasjon). Samtidig vil subjektet tilpasse nettopp dette systemet og utvide det for å gi mening til de erfaringene som det får i møte med den nye kunnskapen (akkomodasjon). Piaget hevder at mennesker konstruerer teorier (midlertidige konstruksjoner) for å gi mening til erfaringene sine. Disse teoriene beholder vi så lenge de virker, det vil si så lenge de ikke gir noen logiske brister, også kalt *kognitive konflikter*. Denne kunnskapen organiseres i strukturer kalt *skjemaer*, som er grunnlaget for tenking. Jo lenger vi kan støtte oss til disse teoriene, jo mer permanente blir de. Skjemaer er organiserte handlings- eller tankesystemer som lar oss lage mentale representasjoner av, det vil si tenke på, objektene og hendelsene vi møter i verden (Woolfolk, 2004). Prosessen med å konstruere disse skjemaene vil aldri ta slutt, fordi relasjonen mellom den som kan og kunnskapen er uløselig, og det finnes heller ingen metode for å teste et menneskes (tilegnede) kunnskap opp mot en absolutt virkelighet. Ernst von Glasersfeld (1918-2010) har videreutviklet Piagets teorier, og definerer *radikal konstruktivisme* som en form for konstruktivisme som er underlagt to prinsipper (von Glasersfeld, 1995b, s. 18):

- Knowledge is not passively recieved but built up by the cognizing subject;
- The function of cognition is adaptive and serves the organization of the experiental world, not the discovery of ontological reality

Forskjellen på radikal og *triviell* konstruktivisme er at det siste kun følger det første prinsippet i definisjonen over. Ifølge det siste punktet i definisjonen er det ikke interessant å ta stilling til hvorvidt en absolutt, det vil si en ontologisk, virkelighet eksisterer. Vi kan si at den radikale konstruktivismen ikke har noen ontologi (von Glasersfeld, 1995b).

Samtidig som vi får mer kunnskap om objekter, vil vi få mer kunnskap om egne handlinger og tankeprosesser (Sinclair, 1990). Dette skjer ikke synkront, men før eller senere vil hver opplevelse av verden føre til en omstrukturering av handlinger eller operasjonssystemer. Dette vil igjen gi ny interesse for å undersøke virkeligheten, og vi kan se for oss en spirallignende prosess som konstant forsterker og utvider kunnskapen vår. Kunnskapen om egne handlinger og tankeprosesser kalles logisk-matematisk kunnskap, og er en av kunnskapstypene som denne prosessen resulterer i. I tillegg vil refleksjoner rundt egenskaper og endringer hos konkrete objekter som følge av våre handlinger føre til de naturlige vitenskapene som fysikk og kjemi. Denne kunnskapen om objektverdenen kan ikke konstrueres uten en form for logisk-matematisk rammeverk, der logikk og matematikk er ren, det vil si uten noe bestemt innhold. Dette gir, som nevnt innledningsvis, matematikk en spesiell status for våre generelle kunnskapskonstruksjoner. Piaget er imidlertid nøye med å avvise at logisk-matematisk kunnskap bør betraktes som en separat type kunnskap;

> Objects are only known via the thought of the subject, but the subject only knows himself via his adaption to the object…The world of objects is only known to man via his logic and mathematics which are products of his own thought, but man can only understand how he constructed mathematics and logic by studying himself, i.e., through his psychological and biological functioning in the universe og reality. (Piaget, 1970a, referert i Sinclair, 1990, s. 21)

Konsekvensen av dette at matematikk må læres ved interaksjon. Denne interaksjonen må foregå mellom elevens tanker og handlinger og matematikk i seg selv på den ene siden, og samtidig mellom elevens tanker og handlinger og situasjoner der matematikk brukes som et verktøy. Det siste gjør at eleven kan gjøre bruk av sine erfaringer om reelle objekter og situasjoner til å reflektere over og utvikle egen bruk av matematikken som verktøy. Dette skjer i hovedsak i tilfeller der eleven er bevisst at den logisk-matematiske kunnskapen opptrer, fordi det nettopp er i refleksjonen over egne handlinger og tankeprosesser at ny kunnskap oppstår. Et eksempel på dette kan være et barn som skal kjøpe en bok. Barnets erfaring med at man må betale en tilstrekkelig sum penger for å motta boken gjør at han eller hun vil velge å ha en slik sum tilgjengelig (her må man naturligvis anta at handelen foregår kontant). Dersom den medbrakte summen er større enn prisen på boken, vil barnet få igjen vekslepenger. Men, dersom barnet ikke har spesiell interesse av å vite hvor mye veksel han eller hun fikk, vil det ikke være interessant å reflektere over hvor mye det er og hvordan man eventuelt kan regne det ut. Hvis barnet derimot blir oppfordret til å finne ut hvor mye penger som blir til overs etter handelen, kan han eller hun gjøre nytte av vekslepengene til å utvide sin kunnskap om for eksempel hvordan man subtraherer eller hvordan tallsystemet er bygd opp. Dette kan videre føre til at barnet får ny interesse i å undersøke tallenes egenskaper nærmere, noe som kan støtte opp under videre utvikling av kunnskap om for eksempel subtraksjon og plassverdisystemet. Sinclair (1990) kritiserer skolen for å ha for stort fokus på tall som størrelser og at det innfører ideen om at aritmetikk er fristilt fra alt elevene vet fra før:"'for learning to count with your pencil and doing your sums', as one child expressed it" (Sinclair, 1990, s. 29). Dette undergraver det som er konstruktivismens essens, nemlig at all ny kunnskap må bygge på allerede eksisterende kunnskap, og samtidig at matematikken er uløselig bundet til all annen kunnskap (s. 29).

2.3 Matematisk kunnskap

"The goal of many research and implementation efforts in mathematics education has been to promote learning with understanding. But achieving this goal has been like searching for the Holy Grail. "(Hiebert & Carpenter, 1992, s. 65)

Det er gjort mye forskning som forsøker å definere hva matematisk kunnskap er og hvordan den kan fremmes, og Hiebert, Carpenter og Lefevre er blant de som har gitt viktige bidrag. Hiebert og Lefevre (1986) skiller mellom *begrepskunnskap* og *prosedyrekunnskap*, der begrepskunnskap er karakterisert ved at den er rik på relasjoner mellom ulike biter av informasjon. Relasjonene er her i seg selv like betydningsfulle som den informasjonen de relaterer. Utviklingen av begrepskunnskap foregår ved etablering av nye relasjoner, enten mellom allerede eksisterende enheter av informasjon (eller f.eks. kunnskapsstrukturer), eller ved at ny viten assimileres til, det vil si innpasses i, den kunnskapen man allerede har. Hiebert og Carpenter (1992) beskriver et rammeverk for å forstå forståelse ved å betrakte den som et mentalt nettverk bestående av representasjoner av og relasjoner mellom informasjonsenheter som beskrevet over. Slike enheter kan være for eksempel begreper, prosedyrer eller symboler. Begrepskunnskap er ifølge Hiebert og Carpenter identisk med slike nettverk. Disse kan videre betraktes som *indre* representasjoner og sammenhenger, på den måten at de ikke er observerbare. Denne modellen forutsetter dermed at slike representasjoner og sammenhenger kan eksistere, samt at det finnes en sammenheng mellom indre og ytre, eller eksplisitte, representasjoner. Ytre representasjoner finner vi i form av verbalt og skrevet språk, symboler, bilder og objekter. Sammenhenger mellom disse kan for eksempel konstrueres mellom ulike representasjoner av samme begrep, mellom relaterte begreper innen samme representasjonsform, mellom et begrep og en operasjon eller mellom to operasjoner. Disse kan ha ulik grad av styrke, for eksempel ved at sammenhengen mellom prosent og hundredel er sterk, mens sammenhengen mellom prosent og forholdstall relativt sett er svakere. Hiebert og Carpenter foreslår at sammenhengene kan basere seg på likheter/ulikheter mellom enhetene eller på inklusjon. Det siste vil si at det ene regnes som et spesialtilfelle av det andre, for eksempel at begrepet *kvadrat* er inkludert i begrepet *regulære polygoner*. Dette danner grunnlag for to ulike, men ikke gjensidig utelukkende, betraktninger av det mentale nettverket. I det første tilfellet framstår nettverket som et flatt nett av sammenhenger, mens det i det andre kan betraktes som et hierarki der graden av generalitet øker for hvert ledd oppover. Hvert av disse leddene kan så bestå av et nettverk, slik at de to modellene kan kobles sammen for å danne en ny mulig modell. Det er imidlertid ikke klart hvordan man skal bruke disse modellene utover det faktum at man prøver å etablere så mange sammenhenger som mulig. På grunnlag av antagelsen om at ytre representasjoner og sammenhenger påvirker etableringen av indre representasjoner og sammenhenger er det dermed hensiktsmessig å gjøre ulike representasjoner, og spesielt sammenhenger mellom disse, eksplisitte i undervisningen.

Prosedyrekunnskapen består av to distinkte komponenter. Det ene er det formelle språket vi bruker i matematikk, gjennom representasjonssystemer bestående av tegn, for eksempel tekst, tall og symboler. Det andre er algoritmene vi bruker for å løse matematiske oppgaver. Hiebert og Lefevre (1986) mener at god matematisk kunnskap utvikles når begreps- og prosedyrekunnskapen er relatert på en måte som gjør at de utvikler hverandre. Prosedyrekunnskap drar nytte av begrepskunnskap gjennom at kunnskap om begreper gjør det enklere å bruke dem i oppgaveløsning. I tillegg hevder Hiebert og Lefevre at begrepskunnskap støttes opp av prosedyrekunnskap, og argumenterer for at dette er en like viktig kobling gjennom å vise til eksempler som de følgende; ”matematikkens formelle språk er et viktig verktøy for å behandle komplekse ideer”, og ”prosedyrer tar i bruk ulike begreper for å løse problemer” (s. 15).

Ideen om kunnskap som konstrukt og teoriene om matematisk kunnskap legger føringer for matematikk som fag. For det første må all ny kunnskap være relatert til allerede eksisterende kunnskap, gjennom relasjoner som eleven (eller generelt sett den som kan) selv må etablere. Læreren må være bevisst på forholdet mellom begreps- og prosedyrekunnskap, fordi disse er avhengige av hverandre. Begreper brukes i prosedyrer og prosedyrer avhenger av begreper for at de skal fungere. Å studere elevers prosedyrer i form av løsningsstrategier kan dermed si noe om deres begrepskunnskap. Her vil man kunne avdekke hvilket kunnskapsgrunnlag eleven har, og kunne avdekke mangler som kan være til hinder for videre utvikling. Dette kan gjøres ved å betrakte hvordan elevene løser hverdagslige situasjoner der den logisk-matematiske kunnskapen er virksom, og der elevene bevisst er involvert i matematiske aktiviteter.

2.4 Intuitive modeller i matematikk

Fischbein (1994) beskriver to ulike synspunkter for å betrakte matematikk; matematikk som en formell, deduktiv og rigid konstruksjon av kunnskap slik den fremstilles i teori og i læreverk for avansert matematikk, og matematikk som en menneskelig aktivitet. Matematikk som en menneskelig aktivitet kan betraktes som et samspill mellom tre komponenter (Fischbein, ss. 231-232);

- Det formelle aspektet
- Den algoritmiske komponenten
- Det intuitive aspektet

Det formelle aspektet omfatter matematikk som et formelt konstrukt av for eksempel regler, teoremer, aksiomer og bevis. Fischbein hevder at det formelle aspektet er et uttrykk for et potensial hos elevene som undervisningen må søke å nå gjennom at elevene tilegner seg teorien, bruker den, organiserer den i sin kunnskapsstruktur og er kritisk til den. Den algoritmiske komponenten viser seg gjennom det jeg oppfatter som å være elevenes prosedyrekunnskap, slik den er beskrevet av Hiebert og Lefevre (1986) (se kap. 2.3). Fischbein understreker, i likhet med Hiebert og Lefevre viktigheten av å tilegne seg og aktivt bruke praktiske ferdigheter for å utvikle forståelsen. Likedan er det avgjørende for ferdighetene at man har forståelse og evne til resonnement og kreativ tenking for å kunne bruke disse ferdighetene fleksibelt, det vil si i ulike situasjoner. ”The most complex system of mental skills remains frozen and inactive when having to cope with a nonstandard situation.” (Fischbein, 1994, s. 232)

Det intuitive aspektet ved matematikk består av tre deler; intuitiv kognisjon, intuitiv forståelse og intuitive løsninger. Intuitiv kognisjon er en type mentale aktiviteter som ikke krever noen bekreftelse. Et eksempel på dette er ”det hele er større enn alle dets deler.”, som vi intuitivt aksepterer (Fischbein, 1994, s. 232). Den intuitive kognisjonen medfører intuitiv forståelse, som kan stemme overens med logisk bevisbare sannheter, men ofte oppstår det motsetninger mellom disse. Derfor vil elevenes intuitive forståelse gi intuitive løsninger som enten kan stemme overens med eller motsi den formelle matematikken. I tillegg kan misforhold mellom intuisjonen og den algoritmiske komponenten føre til at eleven i stedet for å bruke intuisjonen (som kan være riktig) ukritisk bruker en algoritme som han eller hun ikke forstår, og dermed får feil svar. Det er derfor viktig å være bevisst på og ta hensyn til elevenes intuitive forståelse når de skal lære algoritmer.

2.5 Multiplikative skjema

Steffe (1994) beskriver hvordan barns løsningsstrategier, eller egne algoritmer[5], for multiplikasjon, kan uttrykkes som *multiplikative skjema*[6]. Denne modellen tar utgangspunkt i von Glasersfelds (1980, referert i Steffe, 1994, s. 7) definisjon av skjema;

- En eksperimentell situasjon, som skal ”trigge” eleven til handling, for eksempel et problem eller en aktivitet som vil ende i en form for resultat.
- Elevens spesifikke aktivitet eller strategi
- Resultatet

Det finnes to typer skjema, *figurative* og *operative*. Et operativt skjema må bestå av mentale operasjoner. Steffe (1994) henviser her til Piaget og beskriver mentale operasjoner som konstruksjoner som er satt sammen av mindre komponenter. Dette kan vi se i sammenheng med Hiebert og Carpenters (1992) definisjon av forståelse. Disse komponentene kan sies å ha en logisk-matematisk natur, som beskrevet av Piaget (1970a, referert i Sinclair, 1990). Mentale operasjoner kan også være komponenter i større konstruksjoner, i dette tilfellet operative skjema. Aritmetisk kunnskap betraktes som en samling av slike operative skjema. Det vil si at kunnskap om multiplikasjon består av operative skjema for å løse oppgaver knyttet til multiplikasjon. Disse skjemaene bør betraktes som en viktig del av elevenes kunnskap i aritmetikk, og bør støttes opp og videreutvikles slik at de blir effektive og avanserte (Steffe). Et figurativt skjema er en løsningsstrategi der eleven bruker en intuitiv oppfatning av situasjonen for å løse en oppgave. Et eksempel på dette er en elev som blir presentert for en mengde bestående av åtte klosser. Eleven blir bedt om å finne ut hvor mange klosser det er, og teller disse ved å starte på ”en, to…”. Det blir så lagt fram fire klosser til, og eleven blir på nytt bedt om å finne ut hvor mange klosser det er. Dersom eleven nå starter på nytt med ”en, to…”, i stedet for å ta utgangspunkt i at det lå åtte klosser på bordet før det ble lagt til fire til, kan det indikere et figurativt skjema.

En elevs skjemakunnskap vil på et gitt tidspunkt gjenspeile de skjemaene for handlinger og operasjoner som eleven har utviklet fram til dette tidspunktet. Å undersøke disse skjemaene er derfor ensbetydende med å undersøke sammensetningen av elevenes matematiske tenking.

[5] Egen oversettelse fra eng.: child generated algorithms.
[6] Egen oversettelse fra eng.: multiplying schemes.

Det har derfor et stort potensial sett fra et konstruktivistisk synspunkt, fordi det vil bidra til å beskrive elevens kunnskapgrunnlag. Steffe (1994) har utført et undervisningseksperiment for å undersøke elevers skjemakunnskap gjennom å studere oppgaveløsning, det vil si det som tilsvarer punkt 2 i von Glasersfelds definisjon som nevnt foran; *Elevens spesifikke aktivitet eller strategi*.

Steffe (1994) undersøker barns multiplikasjon og divisjon med utgangspunkt i at telling, gjennom danning av tallsekvenser, ligger til grunn for disse to operasjonene. Steffe definerer telling som ”the co-occurence of uttering a number word and producing a countable item of one kind or another”. (Steffe, s. 14). Små barn vil for eksempel telle fra en til fem mange ganger før de vil være i stand til å huske hvilke tall som inngår i denne sekvensen. Når barnet har nok erfaring med å danne tallsekvenser, vil det være i stand til å danne *sammensatte enheter*[7]. En slik enhet er et tall som representerer en sekvens av enheter, for eksempel ved at tallet fem representerer tallfølgen fra en til fem, {1, 2, 3, 4, 5}. Dette er hovedforskjellen på et figurativt og et operativt skjema.

Ideen om sammensatte enheter og operative skjema ligger til grunn for Steffes (1994) definisjon av en multiplikativ situasjon: ”For a situation to be established as multiplicative, it is necessary to at least coordinate two composite units in such a way that one of the composite units is distributed over the elements of the other composite unit” (Steffe, 1994, s. 19). Det vil si at for å forstå en situasjon som multiplikativ, må man operere med (minst) to sammensatte enheter. Den ene av disse enhetene betraktes som *fordelt* på elementene i den andre. Jeg vil illustrere dette med et eksempel fra oppgave 1 i min undersøkelse, vist i Figur 1 under:

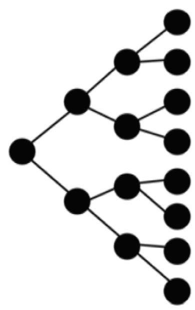
OPPGAVE 1: 17. mai
Skolekorpset har stilt opp foran toget på 17. mai.
De står med 5 musikanter på hver rekke, og det er 12 rekker bakover.
Hvor mange er det i korpset?

Figur 1: Oppgavetekst, oppgave 1

[7] Egen oversettelse fra eng.: composite unit.

For å si at en elev bruker et multiplikativt skjema ved løsning av oppgaven over, må han eller hun betrakte tallene 5 og 12 som sammensatte enheter, og for eksempel forstå situasjonen som "fem musikanter i tolv rekker bakover" eller "tolv musikanter i fem kolonner bortover". I det første tilfellet har da man mengder på 5 (som er den ene sammensatte enheten) som er representert 12 ganger. Når situasjonen er oppfattet som multiplikativ kan man bruke ulike strategier for å finne produktet av 5 og 12, for eksempel ved å bruke gjentatt addisjon og telle {5, 10, 15…} (totalt 12 ganger), eller ved å dele inn den sammensatte enheten fem i enere, og telle dem etter hverandre {1, 2, 3, 4, 5; 6, 7, 8, 9, 10; 11….}. Hvordan man betrakter situasjonen utgjør forskjellen på et multiplikativt skjema og det Steffe (1994) kaller *et premultiplikativt skjema*. En elev som har et premultiplikativt skjema vil alltid telle enkeltenheter suksessivt uten å bruke sammensatte enheter. For tilfellet over vil eleven da starte på 1 og telle oppover uten å betrakte verken 5 (eller 12) som en sammensatt enhet.

Elever som har en viss erfaring med å bruke sammensatte enheter vil ifølge Steffe (1994) kunne utføre det Confrey (1994) kaller en *splitting*. Splitting er en primitiv operasjon der man lager et antall like kopier av en original (Confrey, 1994, s. 300). Denne operasjonen er nyttig både for multiplikasjon og divisjon. Man kan gjøre splittinger i flere omganger, og med ulike antall splittinger hver gang. Resultatet vil da framkomme ved å se på det totale antallet kopier man står igjen med. Confrey (s. 302) illustrerer dette ved hjelp av en splittestruktur[8], som vist i Figur 2 under:



Figur 2: Splittestruktur

I figuren over representerer hver av de sorte prikkene like store mengder, som framkommer ved å splitte enheten til venstre i to kopier tre ganger. Denne typen splitting kalles gjentatt fordobling, og *n* splittinger vil gi 2^n kopier av originalen. I eksempelet over, der det er gjort 3

[8] Egen oversettelse fra eng.: splitting structure.

splittinger, resulterer det altså i 8 kopier. Splitting krever ikke bruk av en splittestruktur, fordi det er en operativ, det vil si mental, aktivitet. Jeg vil illustrere hvordan splitting kan brukes for å løse multiplikasjonsoppgaver ved å bruke oppgave 3 fra oppgavesettet i studien:

OPPGAVE 3: Rundstykker
Mari har bakt rundstykker. Hun fryser dem ned i poser der er plass til 15 rundstykker i hver. Hun får 12 fulle poser med rundstykker. Hvor mange har hun bakt?

Figur 3: Oppgavetekst, oppgave 3.

I denne løsningen er 15 multiplikand og 12 multiplikator. Oppgaven er da å finne ut hvor mange elementer som finnes i 12 kopier av 15. Ved å splitte 15 i tre får man da en tredobling av 15, som i sum er 45. Dersom man så splitter hver av disse tre i to kopier får man det dobbelte av 45, som er 90. Man har nå laget seks kopier. Siden man skal ha 12 kopier totalt, vil man få svaret ved å doble en gang til. Løsningen på oppgaven blir da 180. Dette eksempelet, som ikke bruker en splittestruktur, viser behovet for å bruke en form for representasjon for å holde orden på antall kopier.

Steffe (1994) definerer ulike multiplikative skjema som dreier seg om å kunne koordinere ulike sammensatte enheter på fleksible måter. Når man er i stand til det, viser man bruk av et *enhetskoordinerende skjema*[9]. Dette innbefatter blant annet at man kan lage nye sammensatte enheter av sammensatte enheter, ved for eksempel å samle tre femmere i en ny enhet som blir 15. Senere vil man være i stand til å gjøre dette *reversibelt*, ved at man for eksempel tar 15 tre ganger, som er 45, og sier at det er ni femmere, fordi 15 er tre femmere. En av operasjonene som knyttes til å koordinere ulike enheter, som gjort over, beskrives av Steffe som å lage *generaliserte tallfølger*[10]. Ved å regne tre som en sammensatt enhet, lager man en generalisert tallfølge ved å si at "en er tre, to er seks, tre er ni,…" (Steffe, 1994, s. 29). Å etablere et *iterativt skjema*[11] for multiplikasjon dreier seg da om å huske, eller internalisere, disse tallfølgene. Dette er ifølge Steffe (s. 29) utgangspunktet for å kunne uttrykke multiplikasjon som for eksempel "fire gange tre".

To egenskaper som regnes som tilgjengelige for barn rundt tiårsalderen er *kommutativitet* og *avkorting*[12]. Kommutativitet[13] er en egenskap ved matematikk som man kan dra nytte av i

[9] Egen oversettelse fra eng.: units-coordinating scheme.
[10] Egen oversettelse fra eng.: generalized number sequence.
[11] Egen oversettelse fra eng.: iterative multiplying scheme.
[12] Egen oversettelse fra eng.: curltailment.

oppgaveløsningen, men som Steffe nevner er den gjerne basert på en instrumentell forståelse av multiplikasjon, som beskrevet av Skemp (1987). Å kunne utvikle kjennskap til denne egenskapen ved multiplikasjon krever bruk av en viss logikk, som Steffe mener at gjerne kommer fra erfaring med å dele opp og rekonstruere resultater fra multiplikasjon på kreative måter, noe som i prinsippet betyr å koordinere enheter på en fleksibel måte. Avkorting betyr at man korter av en løsningsprosess, for eksempel et iterativt skjema, ved at man bruker sammenhenger som man vet (for eksempel at $5 \cdot 4 = 20$) til å redusere antallet utregninger i en algoritme. Hvordan disse sammenhengene, og dermed avkortingene, utvikles er ifølge Steffe uvisst, men de vitner om utvikling av matematiske fakta og er dermed en viktig del av elevers kunnskapsutvikling.

Elevers utvikling av operative skjema er på den ene siden svært vanskelig å kartlegge fordi det krever tett og langvarig oppfølging. Samtidig er det en uvurderlig ressurs for å trekke konklusjoner om elevers kunnskapsutvikling som kan bidra til å utvikle matematikkundervisningen: ”I believe that adults can help children learn mathematics; but to do this successfully, teachers must take careful stock of the conceptual ”raw material” that is there to start with.” (Steffe, 1994, s. 33)

[13] Her refereres det til den kommutative egenskapen ved multiplikasjon som binæroperasjon, dvs. at $a \cdot b = b \cdot a$ for alle tall a og b.

2.6 Multiplikative strukturer

> One of the most challenging points in education is probably to use meaningful problems so that knowledge, both in its theoretical and its practical aspects, may be viewed by students as a genuine help in solving real problems. However, this condition, that knowledge be both operational and interesting, cannot easily be satisfied. (Vergnaud, 1983, s. 127)

Vergnaud (1983, 1988) har utviklet et rammeverk for å forstå matematisk kunnskap som en form for begrepsstrukturer, og argumenterer med at dette har bakgrunn i et behov for en bedre forståelse av hvordan spesifikk kunnskap og ferdigheter tilegnes og utvikles i forhold til situasjoner og problemer. Elevenes kunnskap kan være eksplisitt, det vil si formulert i en symbolsk form, som naturlig språk eller ved bruk av tegn, eller den kan være implisitt, på den måten at den kan brukes i operasjoner uten at de kan argumentere for hvorfor kunnskapen kan brukes som den gjør. Vergnaud hevder at å få innsikt i elevenes begrepsutvikling kan gjøres ved å betrakte et begrep (C) som et mengdetrippel, $C = (S, I, \delta)$, der S er en mengde av situasjoner der begrepet gir mening, I er en mengde *invarianter*, og δ er en mengde bestående av symbolske representasjoner. Objekter, egenskaper og relasjoner er eksempler på invarianter, som kan gjenkjennes og brukes for å analysere og mestre situasjonene (S). De symbolske representasjonene kan brukes for å henvise til og representere invariantene (I). Gjennom dette kan symbolene representere situasjonene og prosedyrene som brukes for å mestre dem. Psykologisk sett representerer S virkeligheten, mens (I, δ) er en representasjon av denne. (Vergnaud, 1988, s. 141). Det er umulig, og ifølge Vergnaud heller ikke meningsfylt å knytte en gitt mengde av situasjoner og representasjoner til ett bestemt begrep. Vergnaud definerer derfor et *begrepsdomene*[14] som en mengde problemer og situasjoner som krever bruk av ulike, men nært relaterte begreper, prosedyrer og representasjoner. Rammeverket for begrepsdomener har som mål å sette forskere og lærere bedre i stand til å forstå det følgende (Vergnaud, 1988, s. 142):

- Matematiske begreper er grunnlagt i situasjoner og problemer. Disse situasjonene og problemene må analyseres og klassifiseres sammen med de prosedyrene elevene bruker når de skal behandle dem. Matematikk er et uunnværlig verktøy for denne analysen.
- Elevenes ideer og kompetanser utvikles gradvis over en lengre tidsperiode. Lærere som skal undervise studenter på et bestemt trinn må ha en viss ide om de stegene i utviklingen som

[14] Egen oversettelse fra eng.: conceptual field.

elevene har eller ikke har gått igjennom og om de neste og siste stegene som man kan forvente at de når i løpet av en viss tidsperiode.

- Symboler refererer ikke direkte til virkeligheten men til de kognitive komponentene som er underlagt de prosedyrene elever utfører. Disse komponentene kan kalles *invarianter*[15]. Kategorier, objekter, egenskaper, forhold og bruksteoremer[16] er eksempler på slike invarianter. Det må tas hensyn til distinksjonene mellom situasjoner, invarianter og symboler.

Dette vil si at for å forstå elevenes kunnskapsutvikling må man betrakte både de situasjonene der kunnskapen skal brukes, og samtidig erkjenne og undersøke nærmere de løsningsstrategiene og symbolene elevene bruker når de settes til å mestre ulike situasjoner, det vil si løse oppgaver. Mengden av slike relaterte begreper kalles *strukturer*. Det er kun slik man kan forholde seg til og danne seg modeller av elevenes implisitte kunnskap. For at dette skal være meningsfylt sett i en undervisningssammenheng er det i tillegg nødvendig å kunne definere elevenes ståsted i forhold til videre utvikling. Det gjøres ved at man ikke bare ser på hva elevene kan ventes å oppnå, men også tar i betraktning hvordan de har bygd opp den kunnskapen de allerede har. Det er avgjørende for å avdekke eventuelle mangler som kan være til hinder for deres videre utvikling. Jeg skal i det følgende betrakte begrepsdomenet for *multiplikative strukturer*, og beskrive hvordan man kan gjenkjenne S og I, gjennom bruksteoremer, for dette.

Vergnaud (1983) betrakter multiplikative strukturer som en mengde oppgaver som kan deles inn i tre kategorier; isomorfi av mål, produkt av mål og multiple proporsjoner, som jeg vil beskrive nærmere i det følgende.

Isomorfi av mål

Strukturen *isomorfi av mål* består av et direkte forhold mellom to målrom M_1 og M_2. Denne strukturen inkluderer situasjoner som retterferdig deling og kjøp[17]. Denne kan deles inn i fire underklasser, en for multiplikasjon, to for divisjon og en generell klasse som de tre andre kan betraktes som spesialtilfeller av. Jeg vil kun ta for meg den første av disse, som igjen kan betraktes på to måter i form av hvilke løsningsstrategier som brukes for å løse problemet.

[15] Egen oversettelse fra eng.: invariants.
[16] Egen oversettelse fra eng.: theorems-in-action.
[17] Egen oversettelse fra eng.: equal sharing og constant price.

Vergnaud (1983, ss. 129-130) bruker en figur tilsvarende Figur 4 under for å illustrere isomorfi av mål for multiplikasjon:

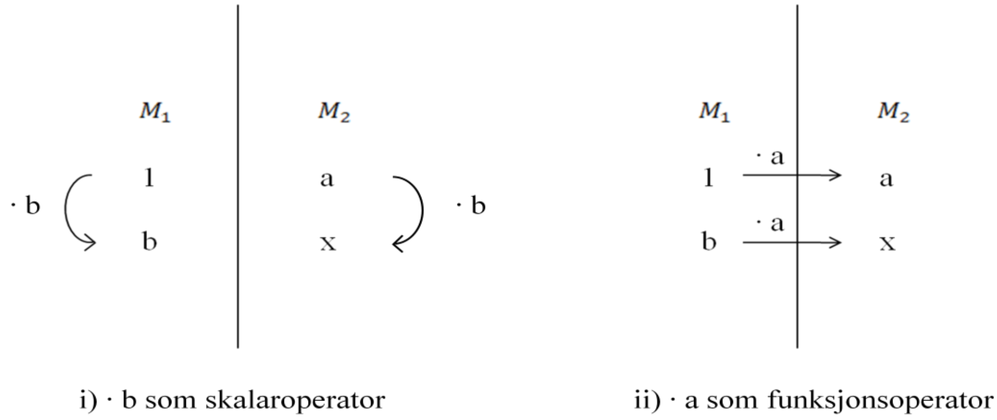
M_1	M_2
1	a
b	x

Figur 4: Isomorfi av mål for multiplikasjon

M_1 og M_2 betegner hvert sitt målrom[18], for eksempel kan M_1 være antall brød og M_2 være pris i kroner. Tallet 1 i M_1 vil da betegne ett brød, og b i M_2 vil representere et visst antall brød. Til ett brød hører verdien a i M_2, som er prisen (antall kroner) for ett brød, og til b hører verdien x som er prisen for b brød. Dersom man betrakter dette eksempelet som en oppgave der man skal finne prisen for b brød, vil to metoder basert på to ulike tenkemåter gi riktig løsning (Vergnaud, 1983);

- *Den binære loven for sammensetning*[19]: Gjenkjennelse av situasjonen som multiplikativ, som definert av Steffe (1994), fører til at man vil ta enten a · b = x eller b · a = x for å finne løsningen. Her må a og b betraktes som dimensjonsløse tall for at det skal gi mening (det gir ikke mening å multiplisere a kroner med b brød og få kroner som svar).
- *Unær operasjon*[20]: Dette er den mest naturlige løsningsstrategien for barn. Denne kan utføres på to måter, der den første går ut på å bruke · a som en *skalaroperator*, og gjenkjenner at 1 · b = b, slik at b antall brød koster b ganger mer enn ett brød, og at prisen for b brød dermed fås ved å ta a (prisen av ett brød) og multiplisere det med b (antall brød). Den andre går ut på å bruke · a som en *funksjonsoperator*, fordi den representerer overgangen fra M_1 til M_2. Ved å betrakte dimensjonen vil a i eksempelet over ha dimensjonen $[\frac{kroner}{antall\ brød}]$. Generelt vil funksjonsoperatoren ha en dimensjon gitt ved [dimensjonen i M_2/dimensjonen i M_1]. Overgangene mellom målrommene i de to unitære operasjonene kan illustreres som i Figur 5 under (Vergnaud, 1983, s. 130), der i) er tilfellet der en av faktorene er en skalaroperator, og ii) er tilfellet der en er funksjonsoperator.

[18] Egen oversettelse fra eng.: measure space.
[19] Egen oversettelse fra eng.: binary law of composition.
[20] Egen oversettelse fra eng.: unary operation.



Figur 5: Unære operasjoner

Løsningen av en oppgave som er en isomorfi av mål vil derfor se ut på to ulike måter; enten ved å bruke i), og få x = a · b, eller ved å bruke ii), og få x = b · a. I begge disse står multiplikanden først og multiplikatoren sist.

Produkt av mål

Denne strukturen bygger på en transformasjon fra to målrom M_1 og M_2 til et nytt rom, M_3, via kartesisk komposisjon (Vergnaud, 1983). Med M_1 og M_2 som uavhengige målrom, så kan vi danne et nytt rom, M_3, slik at $M_3 \propto M_1$ og $M_3 \propto M_2$, det vil si at M_3 er proporsjonalt med hvert av de to andre målrommene. Verdiene i M_3 blir da *funksjonsverdier* av verdiene i M_1 og M_2, for eksempel som $z = f\,(x, y)$, der $x \in M_1$ og $y \in M_2$. Denne multiplikative strukturen omfatter situasjoner som blant annet utregning av areal (høyde · bredde), kartesisk produkt, utregning av arbeid, og andre produkt som tar inn målbare og uavhengige størrelser. Det kartesiske produkt har ofte blitt brukt for å introdusere multiplikasjon for unge elever, men Vergnaud (s. 135) mener at dets aritmetiske struktur, som et produkt av mål, gjør det for komplisert for bruk i introduksjon til multiplikasjon, og at enkle isomorfier (som beskrevet over) bør komme først.

Multiple proporsjoner

Multiple proporsjoner henspeiler på situasjoner som kan minne om produkt av mål, ved at et målrom er proporsjonalt med to andre uavhengige målrom. Den er ofte tidsavhengig, fordi den opptrer i en rekke hverdagslige fenomener som en direkte faktor for proporsjonalitet, slik som i forbruk, produksjon, utgifter, inntekter og lignende (Vergnaud, 1983). Multiple proporsjoner kan deles inn i to klasser for divisjon og en for multiplikasjon, og jeg vil kun beskrive den siste av disse. Forskjellen på multiple proporsjoner for multiplikasjon og produkt av mål er at man i multiple proporsjoner sjelden har enheter som gjør det mulig å finne verdier for x og y slik at $f\ (1, 1) =\ 1$, der f er som i eksempelet over. For eksempel vil det ikke være mulig å finne en realistisk løsning på følgende oppgave:

> Melkeproduksjonen på en bondegård er proporsjonal med antall kyr og antall dager de produserer melk. Hvor mange kyr må melke i hvor mange dager for at man skal få en liter melk?

Her finnes det ikke et bestemt antall kyr og et bestemt antall dager der melkeproduksjonen vil bli 1 liter. På grunn av dette brukes ofte en faktor k slik at $f(1,1) = k$.

Bruksteoremer

Bruksteoremer er ifølge Vergnaud (1988) det beste verktøyet for å beskrive elevers kunnskapsutvikling og for å analysere forholdet mellom implisitt og eksplisitt kunnskap. Jeg velger å bruke bruksteoremer for å si noe om elevenes løsningsstrategier. Et bruksteorem er definert slik: ”Theorems-in-action are defined as mathematical relationships that are taken into account by students when they choose an operation or a sequence of operations to solve a problem”. (Vergnaud, s. 144)

Bruksteoremer er regler som elevene lager og bruker når de skal løse oppgaver. Vergnaud (1988) hevder at elevenes bruksteoremer kan si noe om deres intuitive kunnskap og dens begrensninger. Det kan bidra til å vise hvordan den intuitive kunnskapen kan utnyttes i undervisningen for at man skal utvide bruksområdene for kunnskapen. Samtidig kan dette fokuset bidra til å oppklare misoppfatninger om og framheve ulikheter mellom konkrete og abstrakte situasjoner. Det vil si situasjoner som kan forstås intuitivt og slike som ikke kan det. Dette er nødvendig for at elevene skal kunne forstå og mestre abstrakte situasjoner. I følgende eksempel er en oppgave knyttet til multiplikasjon gitt sammen med fire aktuelle bruksteoremer (som løser oppgaven) (Vergnaud, s. 144):

Kine vil kjøpe 4 lekebiler. De koster 5 kroner hver. Hvor mye må hun betale?

a) $5 + 5 + 5 + 5 = 20$
b) $5 \cdot 4 = 20$
c) $4 \cdot 5 = 20$
d) $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$

Alternativene a) – d) er ulike løsningsstrategier eller utregninger som elevene kan bruke for å løse oppgaven som vil gi et riktig svar. Disse fire alternativene kan uttrykkes som ulike bruksteoremer[21];

a) f (n) = sum å betale for n biler, f (4) = f (1) + f (1) + f (1) + f (1)
b) f (n) = f (1 + 1 + 1 + 1) = f (1) + f (1) + f (1) + f (1), og dermed en meningsfylt sammensetning av elementene fra a). Ved å bruke at multiplikasjon har isomorfe egenskaper, fås da at f (1 · 4) = f (1) · 4
c) Denne prosedyren er teknisk sett ekvivalent med b) på grunn av multiplikasjonens kommutative egenskaper, fordi f (n) = f (1) · 4 = 4 · f (1), men den kan ikke sees i sammenheng med d) på samme måte som b) forholder seg til a).
d) Denne strategien gir ifølge Vergnaud (1988, s. 146) ikke mening i denne konteksten på grunn av dimensjonene. Tjue kroner kan ikke være gitt ved 4 biler + 4 biler + 4 biler + 4 biler + 4 biler.

Bruksteoremene som er aktuelle for en gitt oppgave vil, etter å ha blitt definert, kunne brukes til å betrakte de løsningsstrategiene elevene tar i bruk og si noe om deres oppfatning av den multiplikative strukturen i oppgaveteksten.

Elevers kunnskapsutvikling i matematikk kan, og bør, ifølge Vergnaud (1988, s. 149), studeres ved å betrakte matematikken i form av begrepsdomener, med tilhørende strukturer, invarianter og representasjoner. Det innebærer å analysere de oppgavene som elevene blir introdusert for og sammenligne disse med de strategiene elevene bruker å løse dem, fordi dette kan bidra til å beskrive elevenes implisitte kunnskap og videre være et verktøy for å legge til rette for deres videre kunnskapsutvikling.

[21] I beskrivelsene av bruksteoremene har jeg byttet rekkefølge på multiplikand og multiplikator for bruksteorem b) og c) i forhold til Vergnauds beskrivelse (1988, ss. 144-145). Det har jeg gjort for at multiplikatoren skal stå sist, noe som er konsistent med Vergnauds beskrivelse av multiplikative strukturer (1983) og min egen notasjon. Jeg beskriver min notasjon nærmere i kap. 4.1.

2.5 Relevante studier

I det følgende gjengir jeg eksempler fra studier som er interessante i forhold til min undersøkelse.

Anghileri (1989) har undersøkt hvordan barn i alderen 6-12 år utvikler forståelse for multiplikasjon før den formelle introduksjonen i skolen gjennom å gi elevene oppgaver av ulik semantisk struktur, og betrakte løsningsstrategiene som ble tatt i bruk. Anghileri understreker hvilken rolle informasjonen gitt i oppgaven spiller for elevens løsning. Multiplikasjon involverer et minimum av tre informasjonsenheter; antall elementer i hver mengde (multiplikand), antall slike mengder (multiplikator) og prosedyren for å utarbeide produktet av disse to. Med referanse til Vergnaud (1983) påpeker Anghileri (s. 372) at dersom eleven vet at to tall skal multipliseres, så er det ofte nødvendig å bestemme hva som skal være multiplikanden og hva som skal være multiplikatoren, siden multiplikasjon gjerne betraktes som en unær operasjon (for eksempel som skalar- eller funksjonsoperator), og ikke binær (for eksempel som et kartesisk produkt). Resultatene indikerer en utvikling fra telling av én og én, via rytmisk telling i grupper (rekketelling) og til tallmønster som til slutt blir til multiplikasjonsfakta (som for eksempel kjente produkter i den lille multiplikasjonstabellen). Ifølge Anghileri må videre arbeid gjøres for å undersøke *hvorfor* og *når* elevene kan oppmuntres til å utvikle mer effektive strategier, under forutsetning av at forståelse i multiplikasjon først kommer til syne når eleven er i stand til å gjenkjenne en matematisk operasjon som binær, og løser oppgaver ved hjelp av multiplikasjonsfakta.

> Each fundamental operation of arithmetic generally remains linked to an implicit, unconcious, and primitive intuitive modell. Identification of the operation needed to solve a problem with two items of numerical data takes place not directly but as mediated by the model. The model imposes its own constraints on the search process.(Fischbein et al., 1985, s. 4)

På grunnlag av dette undersøker Fischbein et al. (1985) hvordan elevenes *intuitive modeller* påvirker elevers løsning av tekstoppgaver. Intuitive modeller er primitive oppfatninger av situasjoner som i noen tilfeller er i uoverensstemmelse med bevisbar teori, og er dermed nært knyttet til Fischbeins (1994) beskrivelse av intuitiv kognisjon. Andre faktorer som virker inn på oppgaveløsningen er oppgavens kontekst, det vil si hvilken situasjon oppgaven beskriver, og egenskaper ved tallene, som type og størrelse. Videre sier Fischbein et al. at forholdet mellom situasjonen i oppgaven og riktige løsningsstrategier kan påvirke løsningen. En studie av Hart (1980, gjengitt i Fischbein et al., s. 5) viser for eksempel at oppgaver knyttet til kartesiske produkt er vanskeligere for elever å løse enn oppgaver som kan relateres direkte til gjentatt addisjon. Generelt sett vil en oppgave kunne tolkes slik at den skal løses ved en annen operasjon enn den som faktisk er nødvendig for å få riktig løsning. Slike misoppfatninger kan komme av det Fischbein et al. kaller "certain effects rigidly associated with specific operations" (s. 5). Et eksempel på slike er "multiplikasjon gjør større mens divisjon gjør mindre". Slike misoppfatninger vil kunne hindre elevene i både å kunne løse oppgaver og utvikle videre forståelse for konseptene multiplikasjon og divisjon.

De intuitive modellene oppstår ikke automatisk, men følger av de erfaringene eleven har med et gitt begrep. Et eksempel for multiplikasjon er en elev som har en intuitiv modell om at multiplikasjon dreier seg om gjentatt addisjon. For at eleven skal kunne bruke denne modellen må alle oppgaver som dreier seg om multiplikasjon ha en heltallig multiplikator[22]. Det vil da oppstå problemer idet multiplikatoren viser seg å være et rasjonalt, men ikke helt, tall. Eleven vil ifølge Fischbein et al. (1985) løse dette enten ved å finne indirekte måter å løse oppgaven på gjennom å bruke lignende eksempler, eller å gjette på løsningen. Intuitive modeller er implisitte, det vil si mentale, og kommer først til uttrykk gjennom elevens handlinger: "That is, when trying to discover the intuitive model that a person tacitly associates with a certain operation, one has to consider some practical behaviour that would be the enactive, effectively performable counterpart of the operation". (Fischbein et al., 1985, s. 5)

Mulligan og Mitchelmore (1997) studerer elevers løsningsstrategier for tekstoppgaver med multiplikasjon og divisjon i australsk Grade 2 og 3 (7-9 års alder[23]). Formålet er å se hvilke preinstruksjonelle strategier elever tar i bruk for å kunne si noe om deres intuitive modeller. Her er en intuitiv modell definert som en intern mental struktur som korresponderer til en gruppe løsningsstrategier. Undersøkelsen er utført ved hjelp av oppgavebaserte intervjuer med oppgaver av ulik semantisk struktur, der elevenes ulike løsningsstrategier senere har blitt klassifisert. Mulligan og Mitchelmore hevder at elever tilegner seg et stadig voksende repertoar av intuitive modeller for multiplikasjon. I deres studie, som følger elever i to år, har de identifisert tre kategorier for intuitive modeller for multiplikasjon; Direkte telling, Gjentatt addisjon og Multiplikative operasjoner. De intuitive modellene som brukes for å løse ulike oppgaver reflekterer den matematiske strukturen elevene gjenkjenner i oppgavene. På

[22] Fischbein et al. bruker her *operator*, som jeg oppfatter som å være det samme som multiplikator i denne sammenhengen.

[23] Kilde: Wikipedia.org (Lastet ned 18.oktober, 2010, fra http://en.wikipedia.org/wiki/Education_in_Australia)

grunnlag av dette mener Mulligan og Mitchelmore at undervisningen for det første i større grad bør gjøre bruk av elevenes uformelle forståelse av multiplikative situasjoner, som de utvikler lenge før de blir presentert for slike problemer. Videre bør multiplikasjon og divisjon relateres tettere i undervisningen for å dra nytte av de nære koblingene som finnes mellom disse. For den videre opplæringen mener de i tillegg at man bør innføre tekstoppgaver som involverer rasjonale tall mye tidligere enn før, for å gjøre koblingen mellom rasjonale og hele tall mer eksplisitt og dermed skape grunnlag for intuitive modeller som kan brukes på begge disse talltypene.

Thompson (1997, 1999) ser nærmere på elevenes løsninger i form av skriftlige algoritmer. Disse deles inn i kategorier i forhold til om de regnes som formelle, ikke-formelle, standard eller ikke-standard. ”Criticisms have been made for many years of mathematics teaching that focuses on the aquisition of memorized standard procedures at the expense of the development of understanding and children’s own methods”. (Thompson, 1999, s. 170)

Mentale og skriftlige algoritmer er strukturmessig ulike (Thompson, 1997). Et eksempel på det er at skriftlige algoritmer for å addere to flersifrede tall følger et *vertikalt* oppsett, slik tilfellet er for standardalgoritmen. En mental algoritme vil derimot følge et *horisontalt* oppsett:

> A key idea in distinguishing between mental and written methods concerns the notion of ’direction’. In the case of the standard written algorithm described above, the sum is set out vertically and is tackled from right to left, whereas in the mental version it is usually set out horizontally and the answer is calculated from left to right. (Thompson, 1997, s. 99)

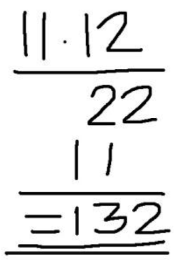
Et eksempel på en mental algoritme som følger et horisontalt oppsett er: ”’47 + 36…Forty and thirty makes seventy…Seen and six makes thirteen…Seventy and thirteen makes eighty-three’” (Thompson, 1997, s. 99).

Thompson (1997) mener at skolen er for opptatt av at man skal *skrive* i matematikk, og at det undergraver det faktum at matematikk er noe som foregår *mentalt*. Skriftlige metoder ifølge Thompson ut til å være noe som forbindes med *skolematematikk*, i motsetning til *hverdagsmatematikk*, som kan foregå mentalt. Studier viser at elever ser ut til å ha liten tiltro til egne mentale strategier, fordi det ikke er ”riktig måte” å arbeide med matematikk på, hvilket skriftlige metoder er. Thompson foreslår at elever ikke bør oppfordres til å bruke symboler for å uttrykke seg skriftlig i matematikk før de er klare for det (s. 98), og at de får anledning til å utvikle egne skriftlige metoder som passer til deres mentale strategier. Dermed vil man unngå et gap mellom elevenes mentale og skriftlige algoritmer.

For å danne et bilde av elevenes egne skriflige algoritmer i tilfellet for flersifret multiplikasjon, har Thompson (1997) undersøkt hvilke skriftlige algoritmer elever bruker når de ikke skal bruke standardalgoritmen. Disse er delt inn i tre kategorier i forhold til kriteriene gitt over[24]; uformelle ikke-standard, formelle standard og formelle ikke-standard algoritmer. Uformelle ikke-standard algoritmer kjennetegnes ved at de er et uttrykk for elevens tenking som ikke nødvendigvis følger et formelt oppsett i form av et regnestykke. Det kan være en skriftlig beskrivelse av elevens tenking, som i dette eksempelet for subtraksjon (Thompson, 1999, s. 172):

> <u>15-8</u> = Først tok jeg bort fem, og fikk ti. Etterpå tok jeg bort de tre siste. Så svaret blir sju.

Formelle standard algoritmer har for multiplikasjon form som utregningen av 11 · 12 vist i Figur 6 under:



Figur 6: Standardalgoritme for multiplikasjon av to tosifrede tall

En slik utregning følges av et argument som dette: ”To ganget med en er to, så da setter vi ett total lengst til høyre. To ganget med en enda en gang, så blir det et totall til ved siden av. Så går vi ei linje under og starter en plass lenger til venstre. En ganget med en er en, så der setter vi et ettall. En ganget med en enda en gang, så setter vi et ettall til venstre for det igjen. Så setter vi en strek under, og plusser sammen. På enerplassen står det bare et totall, så det blir to. På tierplassen står det et totall og et ettall, så det blir tre. På hundrerplassen står det bare et ettall, så det blir en. Svaret blir 132.”

Ikke-standard formelle algoritmer er andre skriftlige oppsett, som ikke har form av en standardalgoritme (Thompson, 1999). En algoritme som vist i Figur 7 under gir riktig svar på utregningen beskrevet over:

[24] Oversatt fra eng.: Informal non-standard written algorithms, formal standard written algorithms og formal non-standard algorithms.

$$
\begin{aligned}
10 \cdot 10 &= 100 \\
1 \cdot 10 &= 10 \\
2 \cdot 10 &= 20 \\
2 \cdot 1 &= 2 \\
\hline
&= 132
\end{aligned}
$$

Figur 7: Formell ikke-standard algoritme for multiplikasjon av to tosifrede tall

Denne kan beskrives slik: ”Vi skal ta elleve tolv ganger, så vi starter med å finne 11 · 10. Først tar vi tierne, og etterpå enerne. Ti ganget med ti er 100, og en ganget med ti er 10. Etterpå må vi finne 11 · 2. Ti ganget med to er 20, og en ganget med to er 2. Når vi legger sammen alle disse delsvarene får vi 132.”

3 Metode

For å undersøke hvilke løsningsstrategier elever tar i bruk for multiplikasjon med flersifrede tall gjennomfører jeg en kvalitativ undersøkelse. Undersøkelsen går ut på at jeg samler informasjon om elevers løsningsstrategier gjennom intervju og analyse av oppgaveløsninger. Først introduserer jeg en gruppe elever for et sett oppgaver som dreier seg om multiplikasjon med flersifrede tall. Elevene i gruppa løser oppgavene individuelt på papir, før et utvalg blir tatt ut til intervju. Intervjuene blir transkribert, og transkripsjonene blir, sammen med elevenes skriftlige oppgaveløsninger, datamaterialet fra undersøkelsen. I det følgende vil jeg begrunne valg av metoder og beskrive teori som ligger til grunn. Jeg vil så beskrive utvalg og gjennomføring av undersøkelsen, før jeg til sist i kapittelet diskuterer metoden i forhold til etiske problemstillinger.

3.1 Valg av metode

Metoden som brukes i en undersøkelse henger nøye sammen med det forskningsparadigmet forskeren assosierer seg og sitt arbeid med, og hvilke forventninger som rettes mot resultatene i forhold til videre bruk (Mertens, 2005). Mertens foreslår tre retningslinjer for valg av metode som jeg vil bruke for å beskrive mitt valg av metode i denne studien. Disse er forskerens verdenssyn, forskningsspørsmålets art og praktiske årsaker knyttet til metoden. I det følgende vil jeg begrunne valg av metode på grunnlag av de to første kriteriene og knytte disse opp mot eksempler på egenskaper ved den valgte metoden som gjør at jeg anser den som velegnet.

Konstruksjonismen[25] som forskningsparadigme er utviklet fra tyske filosofers studie av den *tolkende forståelse*, eller mening, kalt hermeneutikk (Mertens, 2005). Historikere bruker begrepet hermeneutikk i sin diskusjon om tolkning av historiske dokumenter for å forsøke å forstå hva forfatteren hadde til hensikt å kommunisere sett i forhold til den perioden og kulturen han eller hun virket i. Konstruksjonistiske forskere bruker begrepet mer generelt, ved å betrakte hermeneutikk som en måte å tolke meningen av noe i forhold til et gitt standpunkt

[25] Jeg velger å bruke *konstruksjonismen* om forskningsparadigmet for å unngå sammenblanding med *konstruktivismen*, selv om det siste er den direkte oversettelsen av eng.: constructivism, som brukes av Mertens (2005).

eller en gitt situasjon. Betrakter man kunnskap i lys av dette, så vil det si at man tolker den informasjonen man sanser ut ifra sitt eget standpunkt.

Jeg undersøker barns løsningsstrategier for multiplikasjon, og velger å plassere mitt arbeid innen det konstruksjonistiske paradigmet. Det gjør det naturlig for meg å bruke et kvalitativt forskningsdesign (Mertens, 2005). Kvalitativ forskning er en situert aktivitet som plasserer forskeren nært til forskningsobjektet. Det betyr at forskeren studerer objektene i deres naturlige setting, og forsøker å gi mening til eller tolke fenomener i forhold til den meningen hver enkelt person legger i dem. I min undersøkelse vil jeg finne ut noe om hvordan elever tenker og handler i matematikk. Ginsburg (1997) skriver at et område som barns tenking er en kompleks og dynamisk prosess, og det er derfor nødvendig med en fleksibel metode som kan tilpasses kontinuerlig til forskningsobjektet. Konstruksjonismens epistemologi (Mertens, s. 14) betrakter forskeren og forskningsobjektet i et forhold der de har gjensidig innflytelse på hverandre, og henspeiler derfor på personlige og interaktive former for datainnsamling. Kvalitativ forskning involverer en rekke metoder for datainnsamling som alle har til hensikt å komme nært inn på forskningsobjektet, og jeg mener at det derfor er et hensiktsmessig og naturlig valg for å besvare problemstillingen.

I forkant av utarbeidelsen av dette forskningsdesignet har jeg sett på design brukt i lignende studier, som er gjengitt tidligere i oppgaven (se kap. 2.5). Dette er undersøkelser av ulik varighet og tematisk omfang, men felles for alle er at de bruker et design der elever blir tatt ut til et individuelt intervju. Elevene får ulike oppgaver under intervjuet, og datamaterialet fra undersøkelsene hentes fra transkripsjoner av disse intervjuene. Begrep som brukes om disse er oppgavebasert intervju[26] (Goldin, 1997) og klinisk intervju (Ginsburg, 1997). Hovedforskjellen på disse er at det kliniske intervjuet ikke er like rettet mot selve oppgaveløsningen, men mer mot informasjonen eleven gir. Derfor har jeg valgt å bruke dette som rettledning for intervjuene i undersøkelsen. Jeg ønsket at elevene skulle arbeide med like oppgaver og få tid til å løse dem i forkant av et intervju, noe som gir informasjon både om deres skriftlige framstillinger og deres muntlige beskrivelser av disse. Min oppfatning er at dette gir et realistisk bilde av de løsningsstrategiene som elevene tar i bruk, og at det derfor egner seg for å besvare mitt forskningsspørsmål.

[26] Egen oversettelse fra eng.: task-based interviews.

3.2 Det kliniske intervjuet

Det kliniske intervjuet (Ginsburg, 1997) har lang historie innen psykologisk forskning. Det baserer seg på metoder benyttet av Piaget, og senere Vygotsky, og har i de siste årene oppnådd en viss popularitet i forskning og praksis relatert til utviklingspsykologi. Samtidige forskere har utviklet varianter av metoden for å brukes alene eller sammen med andre prosedyrer. Bruken er økende innen matematikkopplæring, og NCTM[27] oppfordrer sine medlemmer til å gjennomføre fleksible intervjuer både i klasserommet og generelt innen forskning. Grunnidéen bak et klinisk intervju er at det skal gi mest mulig informasjon om hvordan subjektet tenker. Ginsburg hevder at et intervju er en tilstand i like stor grad som det er et sett av spørsmål og teknikker, og at det krever en bestemt tilnærming til vitenskap og til praksis. Det kliniske intervjuet bygger på en forståelse av barnet som en autonom konstruktør av kunnskap, og forutsetter en aktiv holdning til teori og vurdering. Dette er betraktninger som knytter det kliniske intervjuet nært opp mot det konstruksjonistiske paradigmet, og samtidig avskriver kvantitative metoder (for eksempel standardisert testing) som hensiktsmessige i denne typen forskning. Ginsburg har utviklet retningslinjer for utførelsen av et klinisk intervju, som i all hovedsak skal sikre at intervjuet blir gjort på en mest mulig fleksibel måte. Dette gjør at intervjuet får en forholdsvis liten grad av struktur utover det at man har et faktisk tema å ta opp i intervjuet. I mitt tilfelle vil intervjuet dreie seg om løsning av tekstoppgaver om multiplikasjon. Et klinisk intervju krever at intervjueren har innsikt i kognitive utviklingsprosesser og har forberedt seg på hva han eller hun skal se etter i intervjuet, der det siste er avgjørende for resultatet: "As Piaget put it, novice interviewers often 'are not on the look-out for anything, in which case, to be sure, they will never find anything'" (Ginsburg, s. 120).

I min undersøkelse baserer jeg meg på Ginsburgs (1997) retningslinjer for det kliniske intervjuet. Jeg har laget retningsgivende spørsmål om temaet, altså oppgaveløsningen, som sees i gjennomføringsplanens punkt 4 (se Vedlegg 2).

[27] NCTM: The National Council for Teachers of Mathematics (Kilde: NCTM. Lastet ned 15.september, 2010, fra www.nctm.org)

3.3 Utvalg

I henhold til forskningsspørsmålet mitt er det hensiktsmessig å bruke respondenter fra en elevgruppe på mellomtrinnet, det vil si 5.-7. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2010). I løpet av denne undersøkelsen har jeg foretatt tre utvalg som jeg skal beskrive i det følgende som *førsteutvalg*, *andreutvalg* og *respondentgruppe*.

3.3.1 Førsteutvalg

Førsteutvalget til min undersøkelse består av en elevgruppe på femte trinn ved en mellomstor skole i Sør-Trøndelag. Gruppa som deltok i undersøkelsen teller 28 elever, og alle elevene deltok i undersøkelsens del en, som var elevarbeider. I forkant av undersøkelsen tok jeg kontakt med rektor og faglærer for å få tillatelse og tid til å gjennomføre undersøkelsen. Elevene har ikke blitt introdusert til algoritmen for multiplikasjon av to flersifrede tall før denne studien.

For førsteutvalget valgte jeg å gjøre et *bekvemmelighetsutvalg*[28] (Mertens, 2005) for å finne en skoleklasse å utføre undersøkelsen i. Det begrunner jeg med at jeg har valgt en klasse som jeg selv har undervist i som vikar både i matematikk og andre fag. Det har klare praktiske fordeler for undersøkelsen min, fordi jeg har en viss kjennskap til både enkeltelevers ferdighetsnivå og personligheter, samt til klassens rutiner og sammensetning. Det er og en fordel at jeg kjenner lærerne og skoleledelsen fra før. Dette gjør det trolig lettere for meg enn for en ukjent å gjøre undersøkelser, noe som ofte er betraktet som et hinder for forskning innen undervisningsmiljøer (Mertens). Samtidig som at det er fordelaktig for gjennomføringen, bringer det med seg problemstillinger knyttet til undersøkelsens kvalitet. Dette vil jeg diskutere nærmere senere.

3.3.2 Andreutvalg

Andreutvalget til undersøkelsen foregikk på grunnlag av fire kriterier, og kan dermed sees på som et *kriteriebasert utvalg*[29]. Det begrunner jeg med at jeg hadde visse kriterier i forhold til elevenes ferdigheter og forutsetninger, samtidig som at jeg var avhengig av at både foreldre

---

[28] Egen oversettelse fra eng.: convenience sampling.
[29] Egen oversettelse fra eng.: criterion sampling.

og elever samtykket til at de deltok, slik at det ble et eget kriterium for utvalget. Siden alle barna er under 15 år sendte jeg, via skolen, ut et samtykkeerklæringsskjema til foreldrene som de kunne fylle ut og levere til skolen for å gi sitt samtykke til at jeg tok lydopptak. Det første kriteriet var altså at de hadde foreldrenes samtykke til å bli intervjuet. For det andre skulle elevene være på ulikt faglig nivå, og for det tredje ha en viss grad av muntlige ferdigheter slik at jeg kunne forvente at de kunne samtale om hvordan de hadde løst oppgavene. Som verktøy for å gjøre denne utvelgelsen hadde jeg for det første en viss kjennskap til elevene fra før, i tillegg til at læreren ga meg råd, og at de løste oppgavene i forkant av utvelgelsen. Det viktigste kriteriet var imidlertid at de hadde produsert noe i oppgaveheftene som kunne fungere som utgangspunkt for intervjuet, og dette ble derfor sterkt vektlagt i sammensetningen av andreutvalget. Når det gjelder størrelsen på andreutvalget var det for min metode hensiktsmessig med en til seks deltakere (Mertens, 2005), både av hensyn til undersøkelsens kvalitetskriterier (som diskuteres i kap. 5.2.2) og for å sikre et hensiktsmessig datamateriale. Som beskrevet under, valgte jeg å legge til flere elever i denne gruppa i løpet av tidsrommet for undersøkelsen.

Elevgruppa i andreutvalget teller tretten elever; sju jenter og seks gutter. Deres sammensetning med hensyn til kjønn har ingen relevans for mitt forskningsspørsmål, men innen kvalitativ forskning er det hensiktsmessig å betrakte ulike faktorer som kan hjelpe til med å beskrive det fenomenet man undersøker, og jeg regner det derfor som relevante data. I løpet av dataanalysen har jeg valgt å se bort fra to elever som deltok i gruppeintervjuene, fordi jeg er usikker på validiteten i den informasjonen de gir til datamaterialet (dette beskrives nærmere i kap. 5.2.1). Til slutt står jeg altså igjen med elleve elever, fem jenter og seks gutter, som jeg i det følgende vil benevne *respondentgruppa*. Elevene i respondentgruppa navngis med fiktive navn i oppgavens analyse- og diskusjonsdeler.

3.4 Gjennomføring

Undersøkelsen ble gjennomført i løpet av til sammen tre dager, og besto av tre deler, forberedelse, oppgaveregning og intervju.

Den første dagen besøkte jeg klassen og fortalte om hvorfor jeg var der og hva studien gikk ut på, og elevene fikk anledning til å stille spørsmål. Ginsburg (1997) argumenterer for at det å være åpen og tydelig om sine hensikter er et godt virkemiddel for å etablere trygghet i forkant av en intervjusituasjon. I tillegg bidrar det til å ivareta det etiske aspektet ved undersøkelsen, som beskrevet til sist i dette kapittelet.

Neste dag utførte jeg oppgavens siste to deler, oppgaveregning og intervju. Jeg hadde til sammen 2,5 timer til rådighet. Elevene er delt i to grupper som regnet oppgavesettene hver for seg, og de individuelle intervjuene ble utført i etterkant av disse (se Vedlegg 2, Gjennomføringsplan). Sentralt i gjennomføringen var oppgaveheftet, som beskrives under. Jeg intervjuet fire elever i det jeg kaller intervjurunde en. En kvalitativ undersøkelse har gjerne fire til seks deltakere (Mertens, 2005), så jeg dro tilbake ei uke etter for intervjurunde to, for å få flere deltakere til undersøkelsen og dermed sikre at jeg hadde brukbart materiale fra minst seks deltakere. I intervjurunde to deltok ni elever. I samråd med veileder valgte jeg å intervjue dem i grupper på to og tre. Alle intervjuene ble tatt opp med diktafon.

Andreutvalget var som nevnt basert på at elevene hadde forsøkt å løse de fleste oppgavene, og gjort det på interessante måter. I de 28 papirbesvarelsene var det skrevet lite utregning, og de elleve som deltok i intervjuene var de som hadde skrevet mest utregning. Jeg hadde ikke grunnlag for å si stort om løsningsstrategiene til de elevene jeg ikke intervjuet, og jeg valgte derfor kun å fokusere på besvarelsene fra de elleve som deltok i intervjuene. Datamaterialet etter gjennomføringen besto dermed av elleve papirhefter med elevbesvarelser, fire individuelle intervjuer med varighet fra ti til tjue minutter, og fire gruppeintervjuer med varighet fra tjue til tretti minutter. Dette ble så bearbeidet videre i dataanalysen, som beskrives nærmere i 3.6.

3.5 Oppgavehefte

For å generere et datamateriale som kunne bidra til å besvare mitt forskningsspørsmål trengte jeg å gi respondentene en innfallsvinkel til multiplikasjon med flersifrede tall. Jeg valgte da å bruke et sett med oppgaver som elevene kunne løse og siden snakke om i et intervju. Det er, som tidligere nevnt, blitt gjort flere lignende undersøkelser, men ingen på samme klassetrinn og av helt samme art, og jeg valgte derfor å lage egne oppgaver (se Vedlegg 3). Oppgavene er utelukkende tekstoppgaver, basert på oppgaver fra respondentgruppas læreverk Abakus (Pedersen, Pedersen, & Skoogh, 2003, 2006a, 2006b) og supplert med andre oppgaver i henhold til Greer (1992) og Anghileris (1989) kategorier for semantisk struktur. Oppgavenes semantiske struktur vil si deres språklige utforming, som i følge Hervey (1966, i Anghileri) og Brown (1981, i Anghileri) har sammenheng med hvilke aspekter ved multiplikasjon som belyses, og dermed er relevant for å forstå elevenes forståelse av denne. Jeg har valgt å se på fem aspekter ved multiplikasjon; *ekvivalente grupper*, *rektangulær oppstilling*[30], *kartesisk produkt*, *sammenligning*[31] og *verdirate*[32]. I læreverket som ble brukt er det kun brukt oppgaver av typene ekvivalente grupper og verdirate. Oppgavene er i tillegg til dette satt sammen med tanke på variasjon i vanskelighetsgrad og at de skal illustrere ulike hverdagslige situasjoner. De er sammen med datamaterialet gjenstand for analyse opp mot det teoretiske rammeverket for studien. Oppgavene har ikke gjennomgått en pilotstudie, og ble derfor brukt for første gang i denne undersøkelsen.

3.6 Databehandling og analyse

Datamaterialet fra gjennomføringen er behandlet og analysert gjennom flere trinn. I denne delen vil jeg gi eksempler på datamateriale gjennom prosessen fra rådata til datamaterialet som brukes i analysen, som vist i Tabell 1 under. Materialet fra trinn fem og seks som er satt i kursiv, indikerer det ferdige resultatet, og beskrives i analysedelen.

Tabell 1: Oversikt over databehandling

Trinn	Materiale	Eksempel
1	Transkripsjon av intervju	Utdrag av transkripsjon av intervju med Bente
2	Tolking av transkripsjon til beskrivelse av løsningsstrategier	Beskrivelse av Bentes løsningsstrategi
3	Samling av alle løsningsstrategier for hver oppgave	Tabell for oppgave 3
4	Fargekoding av elementer funnet i beskrivelser av løsningsstrategier	Kodeskjema (se Vedlegg 4)
5	Kategorisering av løsningsstrategier	*Beskrivelse av løsningsstrategier*
6	Strukturering av løsningsstrategier for hver oppgave	*Oversikt over løsningsstrategier for oppgaver*

Alle intervjuene ble transkribert av meg selv i etterkant av intervjuet. Her har jeg brukt I for å betegne Intervjuer, altså meg selv. Elevene betegnes ved forbokstaven i det fiktive navnet sitt, for eksempel B for Bente. Transkripsjonen er gjort direkte av opptaket, og jeg har ikke tatt

[30] Egen oversettelse av eng.: array.
[31] Egen oversettelse av eng.: Scale Factor/Rate 2.
[32] Egen oversettelse av eng.: Allocation/Rate 1.

hensyn til lengde på eventuelle pauser i samtalen som er kortere enn 5 sekunder. I tilfeller der dette har skjedd, skriver jeg (stille) mellom utsagnene for å indikere situasjoner der elevens tenkepause kan være interessant for datamaterialet. Ikke-verbal aktivitet, slik som for eksempel telling på fingrene, peking eller utregning på papir, er beskrevet i parentes. Det samme gjelder når jeg henvender meg til enkeltelever i intervjuer der flere deltar. I disse intervjuene forekom det ofte avbrytelser, men jeg har sett bort fra disse siden jeg ikke oppfattet det som til hinder for elevenes utsagn at de ble avbrutt av noen andre (det vil si at de avsluttet utsagnet senere etter av avbrytelsen var ferdig, eller ved å avbryte den andre på nytt). Jeg henviser til transkripsjonslinjene som #a.bc, der a henviser til intervjuets nummerering og bc er linjenummeret i transkripsjonen. Når to ikke sammenhengende utsagn blir gjengitt etter hverandre, skilles disse med […].

Etter transkriberingen gikk jeg gjennom og skilte ut utsagn som omhandlet enkeltoppgaver. Deretter gjorde jeg det som kanskje er den mest kritiske prosessen i databehandlingen, nemlig at jeg tolket alle utsagnene og forsøkte å danne beskrivelser av de løsningsstrategiene som elevene beskriver. Under følger et eksempel på et slikt utdrag med påfølgende beskrivelse (trinn 1 og 2):

Eksempelet er hentet fra intervjuet med Bente (B). (#1.10-1.29)

1.10 B: Det er jo.. fem på hver rekker er det jo. Det er fem, ei rekke der. En, to, tre, fire, fem, og bakover er det tolv.
1.11 I: Mhm.
1.12 B: Tolv, tolv, tolv, tolv, tolv. (illustrerer med fingrene, peker på bordet)
1.13 I: Kanskje vi kan tegne det sånn som du sa det nå? At det står fem sånn.. (tegner det som B viste med fingrene)
1.14 B: Ja.
1.15 I: ..og så er de tolv..
1.16 B: Bakover der.
1.17 I: En, to, tre, fire, fem, seks, sju, åtte, ni, ti, elleve, tolv.
1.18 B: Alle sammen står bakover.
1.19 I: Mhm.
1.20 B: For å finne ut hvor mange det er til sammen, i stedet for å ta pluss, pluss, pluss, så tok jeg gange!
1.21 I: Ja. Hvordan visste du at, hva var det du ganget sammen da?
1.22 B: Jeg ganget sammen rekkene, jeg ganget sammen det som var foran og det som var bak.
1.23 I: Ja. Så da ble det..
1.24 B: Da ble det seksti.
1.25 I: Så, fem gange tolv er seksti. Hvordan visste du at fem gange tolv ble seksti?
1.26 B: Jeg…satte opp.
1.27 I: Kan du tegne opp hvordan du satte det opp?

1.28 B: Ja, først satte jeg opp sånn: tolv gange fem. To gange fem er jo ti. Null her, og ettallet der. Så har vi en gange fem, og det er jo, en gange fem er fem, og pluss en så blir det seks. Og da ble det seksti.

1.29 I: Ja.

Bente illustrerer med fingrene hvordan hun ser for seg problemet. Når jeg foreslår en måte å illustrere det på, forteller hun meg hvordan det skal gjøres. Hun vet at hun kan addere for å finne løsningen, men velger å multiplisere. Hun setter opp et multiplikasjonsstykke og regner det ut ved hjelp av standardalgoritmen for multiplikasjon, på formen $12 \cdot 5$ (jfr. min notasjon, som beskrives i kapittel 4.1).

Etter å ha beskrevet alle løsningsstrategiene, ble de sortert etter oppgave. Eksempelet i Tabell 2 under viser løsningsstrategiene for oppgave 3 (trinn 3).

Tabell 2: Løsningsstrategier, oppgave 3

Elev	**Løsning**
Bente	Uriktig standardalgoritme; $15 \cdot 12 = 2250$
Stian	Gjentatt addisjon med 15 som multiplikand og 12 som multiplikator.
Monica	Faktoriserer og assosierer; $15 \cdot 12 = (15 \cdot 2) \cdot 12$ Svarer 360
Kasper	Gjentatt addisjon med 15 som multiplikand og 12 som multiplikator
Lars	Hoderegning, med bruk av distribusjon; $15 \cdot 12 = (10 \cdot 12) + (5 \cdot 12)$
Einar	Hoderegning, med bruk av distribusjon; $15 \cdot 12 = (10 \cdot 15) + (2 \cdot 10)$ Svarer 170.
Jens	Egen algoritme; $12 \cdot 15 = 30$.
Håvard	Telling med 15 som multiplikand og 12 som multiplikator. Bruker fingrene for å telle multiplikatoren.
Merethe	Svarer 165, uviss metode.
Nina	Faktoriserer og assosierer; $15 \cdot 12 = (15 \cdot 2) \cdot 7$ (bruker gjentatt addisjon for å finne $30 \cdot 7$. Svarer 210
Tonje	Skisserer alle gruppene og teller direkte. Svarer $15 \cdot 12 = 170$
Astrid	Assosierer; $15 \cdot 12 = (15 \cdot 2) \cdot 6$
Kristin	Ingen forklaring, har skrevet $15 \cdot 12 = 125$

Alle strategiene ble kodet for kjennetegn, som for eksempel bruk av distribusjon og løsninger som ikke gir relevant informasjon (se for eksempel Merethes løsning i Tabell 2 over). Kodeskjemaet (se Vedlegg 4) ble brukt for å kategorisere alle løsningene for å finne alle ulike varianter. Løsningsstrategiene som ble identifisert ved hjelp av kodeskjemaet, ble til slutt samlet i fire hovedkategorier som beskrives i analysekapittelet.

3.7 Etiske problemstillinger

Forskning på enkeltpersoner medfører visse etiske problemstillinger (Mertens, 2005). Mertens har gjengitt tre prinsipper for å ivareta det etiske aspektet ved forskning (The National Commission for the Protection of Human Subjects in Biomedical and Behavioral Research, 1978, i Mertens, ss. 33-34). Spesielt for min studie er at den omhandler barn, noe som gir ytterligere behov for bevissthet rundt det etiske. De tre overordnede prinsippene er *velgjørenhet*, *respekt* og *rettferdighet*. Forskningen skal ha gode hensikter for vitenskap og mennesker, behandle mennesker med respekt og verdighet, og at deltakerne blir utsatt for metoder som er fornuftige, nøye gjennomtenkt og ikke kan utsette dem for noen form for risiko. Oversatt til min studie vil det si at jeg må gjøre nøye planlagte intervjuer der jeg behandler elevene med respekt og ikke utsetter dem for noen form for fare for uthenging. I det hele skal det å delta i prosjektet være en positiv opplevelse for deltakerne, både i løpet av og etter at prosjektet er avsluttet. Å ivareta seks normer for forskning (The National Commission for the Protection of Human Subjects in Biomedical and Behavioral Science, i Mertens, ss. 33-34) kan bidra til dette. I det følgende vil jeg beskrive hvordan jeg mener at jeg har ivaretatt disse i min studie.

Ginsburg (1997) og Mertens (2005) understreker viktigheten av å informere deltakerne om hensikten med undersøkelsen og hva det skal brukes til, slik at de kan gi et *informert samtykke*. I 3.4 gjengir jeg hvordan barna informeres i forkant av undersøkelsen. I tillegg til dette har de fått informasjon gjennom læreren sin og ved at de fikk utdelt samtykkeerklæring (se Vedlegg 1). Samtykkeerklæringen er nødvendig i studier som involverer deltakere under 15 år (Forskningsetiske komiteer, 2009), og skal informere foreldre om studiens innhold og be om deres tillatelse til at barnet deltar, herunder at barnet selv samtykker (som nevnt i Gjennomføringsplanen, se Vedlegg 2), både i forkant og når intervjuet faktisk skal foregå. I tillegg må man, gjennom å *identifisere konsekvenser* for deltakeren, som i dette tilfellet vil si at de kan kunne gjøres til gjenstand for identifikasjon og uthengig i publikasjonen, sikre anonymitet. Dette gjør jeg ved å gi elevene anonyme navn og unngå å navngi skolen de går på. Når det gjelder selve metodikken, framhever Mertens viktigheten av å bruke et *gyldig forskningsdesign*, det vil si at det er utformet slik at det kan besvare forskningsspørsmålet. Mine forutsetninger i form av teoristudier og erfaringer fra skolen, sammen med studier av lignende forskning, gir meg grunn til å mene at jeg har gjort nettopp dette. Da er det større usikkerhet knyttet til normen om at arbeidet skal utføres av en *kompetent forsker*, siden dette arbeidet i prinsippet skal bringe meg nærmere det og faktisk kunne bli en forsker. For at arbeidet skal være gyldig (som jeg skal diskutere senere), er det viktig at jeg gir detaljerte beskrivelser av forskningsmetoden jeg har brukt. Denne må være gjenstand til kritisk vurdering både av meg selv og andre, nettopp for at min egen kompetanse skal styrkes. I studiens diskusjonsdel kommer jeg nærmere tilbake på hvordan jeg, med bakgrunn i overordnede retningslinjer, ivaretar vurderingsaspektet, og blant annet diskuterer den siste av de nevnte normene, *passende utvalgsstørrelse*[33].

[33] Mertens gjengir i tillegg en norm som omhandler kompensasjon for skade, som jeg ikke anser som relevant for denne studien.

4 Analyse

I denne delen tar jeg for meg analysen av undersøkelsens datamateriale opp mot problemstillingen for studien. Analysen er delt inn etter de to forskningsspørsmålene:

- *Hvilke beskrivelser gir elevene av egne løsningsstrategier for multiplikasjon?*
- *Hvilke sammenhenger kan sees mellom oppgavene og elevenes valg av løsningsstrategier?*

Datamaterialet fra denne undersøkelsen består av transkripsjoner fra intervjuer med elleve elever og elevenes skriftlige besvarelser av oppgavene, samt oppgavene som elevene løser i undersøkelsen. Elevene som deltar i intervjuene har fått hvert sitt fiktive navn; Astrid, Bente, Einar, Håvard, Jens, Kasper, Lars, Monica, Nina, Stian og Tonje. Jeg vil omtale enkeltelever ved disse navnene når jeg gir eksempler på beskrivelser av løsningsstrategier. I 4.1 analyserer jeg oppgavetekstene opp mot teori om multiplikative strukturer og bruksteorem (Vergnaud, 1983, 1988). Det første forskningsspørsmålet blir forsøkt besvart i 4.2 ved at elevenes løsningsstrategier blir beskrevet, kategorisert og analysert ved hjelp av teori om multiplikative skjema (Steffe, 1994), samt funn fra andre relevante studier (Anghileri, 1989; Fischbein et al., 1985; Thompson, 1997, 1999). I kapittel 4.3 tar jeg for meg det andre forskningsspørsmålet ved å sammenholde elevenes valg av strategier med oppgavene.

4.1 Oppgaver

Oppgavesettet (se Vedlegg 3) inneholder sju oppgaver der to av disse består av to deler, a) og b), til sammen 9 deloppgaver. Oppgavene er, som nevnt i metodekapittelet, satt opp for å illustrere ulike multiplikative situasjoner. Alle oppgavene skal løses ved å multiplisere to tall der minst ett av tallene er flersifret. I det følgende bruker jeg følgende notasjon; produkt = multiplikand · multiplikator, der multiplikanden er antall elementer i en mengde, og multiplikatoren viser til hvor mange slike mengder som finnes[34]. Oppgavene analyseres etter rekkefølgen i oppgaveheftet.

[34] Denne tolkningen er kun gyldig når multiplikatoren er et heltall noe som er tilfelle i alle oppgavene som er brukt i studien.

Oppgave 1

OPPGAVE 1: 17. mai
Skolekorpset har stilt opp foran toget på 17. mai.
De står med 5 musikanter på hver rekke, og det er 12 rekker bakover.
Hvor mange er det i korpset?

Figur 8: Oppgavetekst, oppgave 1

Oppgave 1 tar for seg en rektangulær oppstilling, som er en variant av den multiplikative strukturen produkt av mål. Antall musikanter er produktet av antall personer i hver rad og antall personer i hver kolonne. Det spiller ingen rolle hvilke av faktorene som er multiplikand og multiplikator i løsningen, fordi situasjonen er kommutativ. Alle de fire bruksteoremene skissert av Vergnaud (1983) er eksempler på meningsfylte løsninger av denne oppgaven;

a) 5 som multiplikand, 12 som multiplikator: $5 + 5 + 5 + \ldots. + 5 = 60$
b) 5 som multiplikand, 12 som multiplikator: $5 \cdot 12 = 60$
c) 12 som multiplikand, 5 som multiplikator: $12 \cdot 5 = 60$
d) 12 som multiplikand, 5 som multiplikator: $12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60$

Oppgave 2

OPPGAVE 2: Ulike antrekk
Tonje skal finne fram klær. Hun har 11 bukser og 12 gensere i skapet. Hvor mange ulike antrekk kan hun sette sammen?

Figur 9: Oppgavetekst, oppgave 2

Oppgave 2 beskriver et kartesisk produkt. Kartesiske produkt er i likhet med oppstilling et produkt av mål, med den forskjell at denne oppgaven spør etter antall kombinasjoner av elementer fra to målrom som begge teller antall. Som over er situasjonen kommutativ, og løsninger i tråd med bruksteoremene beskrevet for oppgave 1 vil også være meningsfylte i denne oppgaven;

a) 12 som multiplikand, 11 som multiplikator: $12 + 12 + \ldots + 12 = 132$
b) 12 som multiplikand, 11 som multiplikator: $12 \cdot 11 = 132$
c) 11 som multiplikand, 12 som multiplikator: $11 \cdot 12 = 132$
d) 11 som multiplikand, 12 som multiplikator: $11 + 11 + \ldots + 11 = 132$

Oppgave 3

OPPGAVE 3: Rundstykker
Mari har bakt rundstykker. Hun fryser dem ned i poser der er plass til 15 rundstykker i hver. Hun får 12 fulle poser med rundstykker. Hvor mange har hun bakt?

Figur 10: Oppgavetekst, oppgave 3

Oppgave 3 tar for seg like grupper, og er et eksempel på isomorfi av mål.

Tabell 3 under viser dimensjonene til de to målrommene M_1 og M_2. Oppgaven kan løses ved å betrakte en av faktorene som en dimensjonsløs skalar, slik at løsningen blir et produkt i M_2. Et eksempel på dette er å betrakte 12 som en dimensjonsløs skalar. Løsningen kan dermed beskrives ved at 12 poser inneholder 12 ganger så mye som 1 pose, og dermed at antall rundstykker i 12 poser er 12 ganger mer enn antall rundstykker i 1 pose. Dette gjør · 12 til en skalaroperator. Et annet alternativ er å betrakte · 15 som en funksjonsoperator fra M_1 til M_2 med dimensjon [rundstykker/poser]. Løsningen kan da beskrives ved at antall rundstykker er antall poser multiplisert med antall rundstykker per pose. Tabell 3 under illustrerer disse to mulighetene;

Tabell 3: Unære operasjoner, oppgave 3

$\boldsymbol{M_1}$	$\boldsymbol{M_2}$
[poser] 1 b = 12	[rundstykker] a = 15 180
Skalaroperasjon (a · b = x) Funksjonsoperasjon (b · a = x)	15 rundstykker · 12 = 180 rundstykker 12 poser · 15 rundstk./poser = 180 rundstykker

Oppsettet i Tabell 3 viser at faktoren b er multiplikator i skalaroperasjonen, mens faktoren a er multiplikator i funksjonsoperasjonen.

Løsninger i forhold til skalaroperasjonen vil ha en av disse formene av produktet av 15 og 12:

a) 15 som multiplikand, 12 som multiplikator: 15 + 15 + … + 15 = 180
b) 15 som multiplikand, 12 som multiplikator: 15 · 12 = 180

Her kan bruksteorem a) ses på som en variant av bruksteorem b), der dette er skrevet ut som gjentatt addisjon. For funksjonsoperasjonen er bruksteorem c) gjeldende:

c) 12 som multiplikand, 15 som multiplikator: 12 · 15 = 180

Teknisk sett forholder bruksteorem d) seg til bruksteorem c) på samme måte som for b) og a), ved at man kan skrive ut bruksteorem c) til gjentatt addisjon og få bruksteorem d). For funksjonsoperator er ikke multiplikasjonen betraktet som gjentatt addisjon, og det følgende vil derfor ikke være gyldig:

d) 12 som multiplikand, 15 som multiplikator: 12 + 12 + … + 12 = 180

For å bruke dette bruksteoremet i denne oppgaven må man se for seg en alternativ unitær situasjon der det ligger ett rundstykke i hver pose, slik at ”15 rundstykker i en pose er 15 ganger mer enn 1 rundstykke i 1 pose, og 15 rundstykker i 12 poser er dermed 15 ganger mer enn 1 rundstykke i hver av 12 poser”. Man kan for eksempel argumentere med at man fordeler rundstykkene i posene ved å legge ett rundstykke i hver av de 12 posene helt til alle rundstykkene er fordelt, altså i 15 ”runder”. En studie av Rønning (2009) viser tilfeller der elever utarbeider slike argumenter for bruk av kommutativitet.

Oppgave 4

OPPGAVE 4: Vedsekker
Det er plass til 25 kubber ved i en vedsekk.
Hvor mange kubber er det plass til i 10 sekker?

Hvor mange kubber er det plass til i 16 sekker?

Figur 11: Oppgavetekst, oppgave 4

Oppgave 4 tar for seg ekvivalente grupper. Den består av to deler, som jeg betegner som 4a og 4b. Begge disse er strukturmessig helt like oppgave 3, og jeg vil derfor bare vise tabellen for de unære operasjonene for oppgave 4a. Oppgave 4b er strukturmessig lik 4a, ved å bytte ut 10 med 16 i Tabell 4 under.

Tabell 4: Unære operasjoner, oppgave 4a

M_1	M_2
[sekker] 1 b = 10	[vedkubber] a = 25 250
Skalaroperasjon (a · b = x) Funksjonsoperasjon (b · a = x)	25 vedkubber · 10 = 250 vedkubber 10 sekker · 25 vedkubber/sekk = 250 vedkubber

Bruksteoremene som er aktuelle for skalaroperasjonen er, som for oppgave 3:

a) 25 som multiplikand, 10 som multiplikator: 25 + 25 + … + 25 = 250
b) 25 som multiplikand, 10 som multiplikator: 25 · 10 = 250

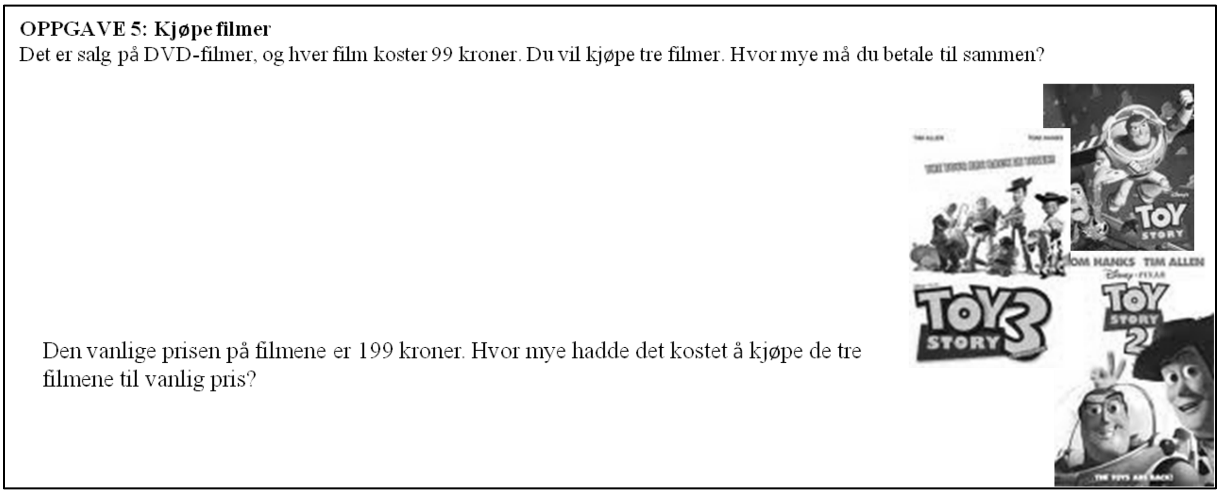
Bruksteoremet som er aktuelt for funksjonsoperasjonen er, på samme måte:

c) 10 som multiplikand, 25 som multiplikator: 10 · 25 = 250

Argumentet for å bruke bruksteorem d) er analogt med tilfellet i oppgave 3, der man her må se for seg at det ligger en vedkubbe i hver sekk, og så fyller i flere kubber i hver av sekkene ved å legge ut en og en kubbe. Da vil man legge ut 10 kubber i 25 omganger, slik at man får en skalaroperasjon som tilsvarer bruksteorem d):

d) 10 som multiplikand, 25 som multiplikator: 10 + 10 + … + 10 = 250

Oppgave 5


OPPGAVE 5: Kjøpe filmer
Det er salg på DVD-filmer, og hver film koster 99 kroner. Du vil kjøpe tre filmer. Hvor mye må du betale til sammen?

Den vanlige prisen på filmene er 199 kroner. Hvor mye hadde det kostet å kjøpe de tre filmene til vanlig pris?

Figur 12: Oppgavetekst, oppgave 5

Oppgave 5 tar for seg den semantiske strukturen verdirate, som er et eksempel på isomorfi av mål. Den består av to deler, som jeg betegner som 5a og 5b.

Oppgave 5b er strukturmessig lik 5a, så jeg vil kun analysere den første av disse. Ved å betrakte · 3 som en skalaroperator kan oppgaven løses ved følgende resonnement: ”3 filmer er 3 ganger mer enn 1 film, og 3 filmer koster dermed 3 ganger mer enn 1 film”. Alternativet er å betrakte · 99 som en funksjonsoperator med dimensjonen [kroner/film]. Disse mulighetene er illustrert i Tabell 5 under;

Tabell 5: Unære operasjoner, oppgave 5a

M_1	M_2
[filmer] 1 b = 3	[pris] a = 99 297
Skalaroperasjon (a · b = x) Funksjonsoperasjon (b · a = x)	99 kroner · 3 = 297 kroner 3 filmer · 99 kr./film = 297 kroner

Analogt med oppgave 3 og 4, vil bruksteorem a) og b) gjelde for skalaroperasjonen;

a) 99 som multiplikand, 3 som multiplikator: 99 + 99 + 99 = 297
b) 99 som multiplikand, 3 som multiplikator: 99 · 3 = 297

Bruksteorem c) vil gjelde for funksjonsoperasjonen:

c) 3 som multiplikand, 99 som multiplikator: 3 · 99 = 297

I motsetning til oppgave 3 og 4, vil ikke bruksteorem d) kunne brukes i oppgave 5, fordi det krever en svært abstrakt tolkning av situasjonen.

Oppgave 6

OPPGAVE 6: Kinobesøk
Hele 5.trinn skal på kino sammen. Hvor mye koster det til sammen når en barnebillett på kino koster 70 kroner?

Figur 13: Oppgavetekst, oppgave 6

Oppgave 6 tar i likhet med oppgave 5 for seg verdirate. Siden den er strukturmessig lik oppgave 5, vil jeg her kun gjengi tabellen for de unære operasjonene og de aktuelle bruksteoremene (se Tabell 6 under). Klassen teller 31 elever, så oppgaven går ut på å finne totalprisen for 31 billetter (dette vet elevene når de løser oppgaven).

Tabell 6: Unære operasjoner, oppgave 6

M_1	M_2
[billetter]	[kroner]
1	a = 70
b = 31	2170
Skalaroperasjon (a · b = x)	70 kroner · 31 = 2170 kroner
Funksjonsoperasjon (b · a = x)	31 bill. · 70 kr./bill. = 2170 kroner

Som i oppgavene beskrevet over, vil skalaroperasjonen gi mening ved bruk av bruksteorem a) og b) (under), det vil si med 31 som multiplikator. Bruksteorem c) tar i bruk 70 som multiplikator, mens bruksteorem d) krever en litt annen tolkning av situasjonen, som beskrevet for oppgave 3 og 4. Hvis hvert barn betaler ei krone hver for billetten sin, vil man måtte betale i 70 omganger før alle billettene er betalt.

a) 70 som multiplikand, 31 som multiplikator: 70 + 70 + … + 70 = 2170
b) 70 som multiplikand, 31 som multiplikator: 70 · 31 = 2170
c) 31 som multiplikand, 70 som multiplikator: 31 · 70 = 2170
d) 31 som multiplikand, 70 som multiplikator: 31 + 31 + … + 31 = 2170

Oppgave 7

OPPGAVE 7: Hvor langt er det?
Mattis og Matta snakker om skoleveien sin. Mattis forteller at han bor 175 meter unna skolen. "Da bor jeg fem ganger lenger unna enn deg!" sier Matta. Hvor langt er det fra Matta til skolen?

Figur 14: Oppgavetekst, oppgave 7

Oppgave 7 er ment å ta for seg sammenligning, som også hører inne under strukturen isomorfi av mål. Oppgaveteksten antyder at man skal bruke · 5 som en dimensjonsløs skalaroperator, siden man skal finne en avstand som er "fem ganger lenger". Da er 5 multiplikator, og man kan bruke bruksteorem a) eller b). Siden 5 er gitt som et (dimensjonsløst) forholdstall i oppgaven, gir det ikke mening å bruke · 175 som funksjonsoperator. Det vil for eksempel ikke kunne ha en dimensjon gitt ved $[M_2/M_1]$. Det vil heller ikke gi mening å bruke 175 som multiplikator i en skalaroperasjon, fordi man ikke kan multiplisere et dimensjonsløst tall med en dimensjonsløs faktor og få et svar i meter. Tabell 7 under viser alternativet for unære operasjoner;

Tabell 7: Unære operasjoner, oppgave 7

M_1	M_2
[(tom)]	[meter]
1	a = 175
b = 5	875
Skalaroperasjon (a · b = x)	875 m · 5 = 875 meter

Oppgaven løses ved å finne produktet av 5 og 175 på en av disse formene:

a) 175 som multiplikand, 5 som multiplikator: 175 + 175 + … + 175 = 875
b) 175 som multiplikand, 5 som multiplikator: 175 · 5 = 875

Oppsummering

Oppgavene som brukes i denne undersøkelsen er av fem ulike semantiske strukturer som hører hjemme i de multiplikative strukturene isomorfi av mål og produkt av mål. Alle oppgavene løses ved å finne produktet av to faktorer som er gitt i oppgaven. Meningsfylte løsninger kan finnes ved å betrakte oppgavene i lys av de multiplikative strukturene de hører hjemme i. Oppgavene 1 og 2 er produkt av mål, mens 3, 4, 5, 6 og 7 er isomorfier av mål. Oppgaver som er produkt av mål kan løses ved å bruke alle de fire bruksteoremene, fordi de beskriver kommutative situasjoner. Isomorfier av mål kan også betraktes som kommutative situasjoner, men kun dersom man ser på tallene som dimensjonsløse størrelser, noe som betyr at man går bort fra situasjonen i oppgaveteksten. Meningsfylte løsninger for isomorfier av mål fås ellers ved å bruke unære operasjoner, ved at en av faktorene blir betraktet enten som en skalaroperator eller en funksjonsoperator. Løsningene som bruker skalaroperasjon bruker generelt sett bruksteorem a) og b) som beskrevet av Vergnaud (1988), mens løsninger som bruker funksjonsoperasjonen bruker bruksteorem c). I de situasjonene som ikke er kommutative (i struktur), krever bruk av bruksteorem d) at man tolker situasjonen på en litt annen måte enn hva oppgaveteksten beskriver.

4.2 Løsningsstrategier

I denne delen vil jeg besvare mitt første forskningsspørsmål:

Hvilke beskrivelser gir elevene av egne løsningsstrategier for multiplikasjon?

Her tar jeg utgangspunkt i datamaterialet fra intervjuene med elevene, som beskrevet i 3.6. Elevenes skriftlige løsninger og utdrag av transkripsjonene brukes som eksempler på de ulike strategiene. I det følgende bruker jeg tallsymboler for alle tall der det dreier seg om utregninger.

Som nevnt i kapittel 3 har utvelgelsen av elever til respondentgruppa blant annet tatt utgangspunkt i at de har vist interessante løsninger på oppgavesettet. Det krever naturligvis at de har skrevet en form for utregning. Dermed er elevene i respondentgruppa den delen av klassen som i størst grad har vist utregning i oppgaveheftet. Opptelling viser at 41 av 88 løsninger[35] er beskrevet med utregning i oppgaveheftet, det vil si i ca. 47 % av tilfellene, altså under halvparten.

Løsningsstrategiene som er beskrevet av elevene er samlet i fem hovedkategorier;

- Direkte telling
- Gjentatt addisjon
- Standardalgoritme eller lignende
- Bruk av multiplikasjonsfakta og egenskaper ved multiplikasjon
- Andre løsninger

I det følgende vil jeg beskrive de fem kategoriene med eksempler fra elevenes skriftlige løsninger og muntlige beskrivelser. Tabell 8 under viser antall forekomster av løsningsstrategiene for alle oppgavene unntatt oppgave 2 (denne beskrives nærmere i kap. 4.3.1).

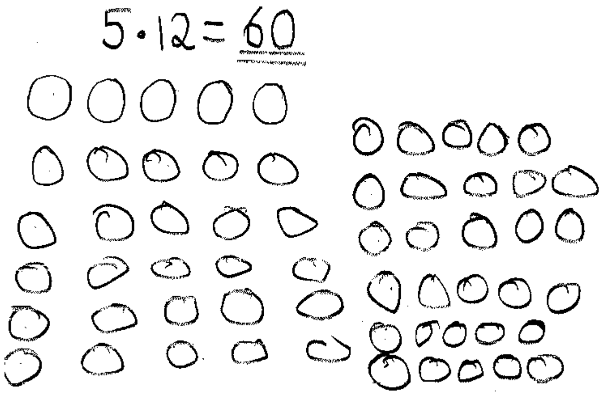
[35]Oppgavesettet inneholder totalt 8 deloppgaver, når oppgave 2 er sett bort ifra. Det gir totalt 88 løsninger fra de 11 respondentene.

Tabell 8: Antall forekomster av hovedkategorier for løsningsstrategier

Løsningsstrategi	**Antall**
Direkte telling	3
Gjentatt addisjon	23
Standardalgoritme	16
Bruk av multiplikasjonsfakta	38
Andre løsninger	8

4.2.1 Direkte telling

Denne kategorien samler strategier der elevene løser oppgaven ved å telle én og én. Figur 15 under viser hvordan Tonje har løst oppgave 1:



Figur 15: Tonjes løsning av oppgave 1

Tonje forklarer denne strategien slik (#7.15-7.19):

7.15 T: Jeg tenkte litt dumt der. Jeg kunne ha tenkt fem, ti, femten, tjue, tjuefem, men… Litt dumt å skrive opp alt sånn da.

7.16 I: Tegne dem opp ja? Det var jo kjempesnedig å gjøre da! Så var du helt sikker på at du fikk med alle.

7.17 T: Hehe, mm.

7.18 I: Hvorfor?

7.19 T: Eh, jeg skulle tenke på en annen måte, men jeg tenkte litt rart der. Og så tenkte jeg at jeg måtte ta med gange da, så jeg skrev fem gange tolv.

Tonje har tegnet opp oppsettet som beskrives i oppgaveteksten, og har telt alle musikantene én og én. Hun beskriver at hun vet at dette dreier seg om multiplikasjon og at tellingen hun har gjort er løsningen på en multiplikasjonsoppgave (#7.19). Etterpå ser hun at hun kunne ha brukt rekketelling i stedet (#7.15).

Slik beskriver Monica hvordan hun løste oppgave 1(#3.28):

3.28 M: Da regnet jeg, tok jeg sånn, holdt inn en for hver gang liksom, så regnet jeg hvor mange som var på ei rekke, så tok jeg neste og regnet hvor mange det var, sånn. (viser med fingrene) Så tenkte jeg tallet inni meg liksom.

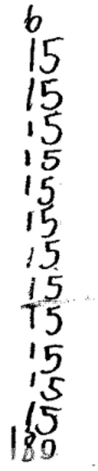
Monica beskriver her hvordan hun bruker fingrene for å telle direkte ved å bruke hendene. Dette gir en strategi jeg vil beskrive ved hjelp av et enklere eksempel, produktet $5 \cdot 4$: Tell multiplikatoren med venstre hånd og høyre hånd til å telle 1 – 2 – 3 – 4 – 5, slik at når alle fingrene på høyre hånd er løftet, har man telt multiplikanden én gang. Da kan én finger på venstre hånd løftes. Eleven teller summen i hodet, og fortsetter med 6 – 7 – 8 – 9 – 10 mens høyre hånd teller opp til fem igjen, og en ny finger løftes på venstre hånd. Dette fortsetter fram til fire fingre er løftet på venstre hånd. Da skal man ha kommet til 20 i tellingen, som blir svaret. Denne strategien er beskrevet i Anghileris (1989) studie som *opptelling av grupper*[36].

Løsningsstrategiene i kategorien Direkte telling er direkte telling av én og én enhet. Det indikerer ifølge Steffe (1994) et figurativt premultiplikativt skjema. Monicas strategi, der hun teller én og én i grupper på fem og fem kan i så måte sees som en mellomting mellom et operativt og et figurativt skjema. Hun teller grupper på fem og fem med fingrene, men holder orden på summen i hodet.

4.2.2 Gjentatt addisjon

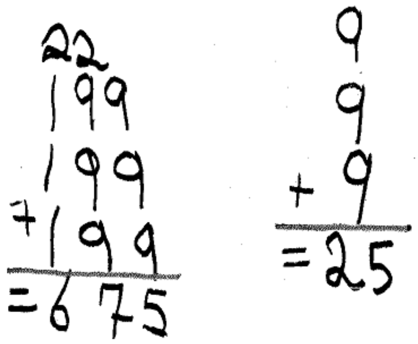
Gjentatt addisjon går ut på at eleven regner ut produktet ved hjelp av gjentatt addisjon der multiplikanden settes opp som addend. Dette gjøres ved skriftlig utregning, eller ved å bruke rekketelling. Antall addender er et tall tilsvarende multiplikatoren. Et eksempel er Kaspers løsningsstrategi, som han bruker for å løse bortimot alle oppgavene. Figur 16 under viser løsningen på oppgave 3, der han bruker standardalgoritmen for addisjon:

[36] Egen oversettelse fra eng.: tallying the groups.



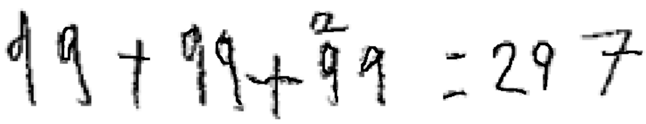
Figur 16: Kaspers løsning av oppgave 3

Et annet eksempel er Tonjes løsning på oppgave 5b:



Figur 17: Tonjes løsning av oppgave 5b

Som utregningen i Figur 17 over viser, bruker Tonje standardalgoritmen for addisjon to ganger for å regne ut produktet av 199 og 3. På grunn av at hun regner ut at 9 + 9 + 9 = 25 i stedet for 27, blir ikke svaret riktig. Regnestykket kan også være satt opp vannrett, som i Jens' løsning av oppgave 5a.

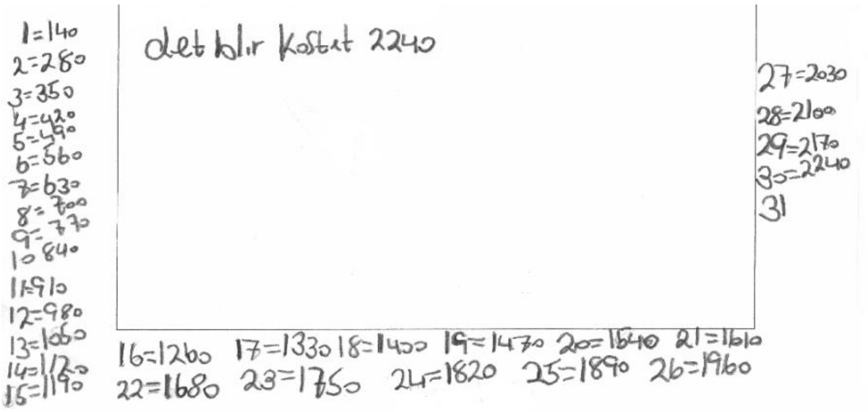


Figur 18: Jens' løsning av oppgave 5a

Jens bruker dette oppsettet for å regne både oppgave 5a og 5b, og får riktig svar begge ganger.

Lars har løst oppgave 6 som vist i Figur 19 under, og beskriver løsningen slik (#5.180):

5.180 L: Jeg tok og rekketelte dem.



Figur 19: Lars' løsning av oppgave 6

Når Lars beskriver at han rekketeller, har han laget et system for å telle multiplikatoren fra 1 og opp til 31, mens han legger til 70 for hvert ledd oppover. Lars' utregning blir ikke riktig, noe som skyldes at han har startet på 1 = 140 = 70 · 2, i stedet for 70 · 1 slik det burde ha vært. Videre dobler han fra 1 = 140 til 2 = 280 i stedet for å legge til 70. Han har dermed et dobbelt så stort tall når han kommer til 2. Det ser ut til at han retter opp en av disse (doblingene) ved å slutte på 30 = 2240 i stedet for 31 (= 2310). Svaret, 2240 blir derfor 70 mer enn riktig svar, 2170. Dette ser ut til å være en hoderegningsstrategi der Lars enten noterer for å holde orden på multiplikatoren når tallene er store, eller bruker fingrene, som når han løser oppgave 4a (#5.103-5.105):

5.103 L: Jeg tror jeg la sammen der og jeg, på akkurat samme måte som jeg gjorde. Sånn tjuefem – femti – syttifem, ikke sant. Åtti…

5.104 I: Bruker hendene da?

5.105 L: Ja, jeg gjorde det, når jeg begynte å komme i mange tall sånn, da begynte jeg med fingrene sånn (illustrerer med hendene)…

Håvard beskriver en lignende løsning, for oppgave 1 (#6.5 og #6.10):

6.5 H: Jeg tror jeg telte til fem tolv ganger eller noe sånt. Eller så var det tolv fem ganger.

[…]

6.10 H: Ja men. Når jeg kom til ti, så husket jeg at det var ti, så lukket jeg (hendene), og så telte jeg en, to.

Håvard rekketeller ved å bruke fingrene for å telle multiplikatoren. Når han skal finne 5 · 12 bruker han hendene til å telle opp til 12. Når han kommer til 10 lukker han hendene og starter på nytt på en for å telle de to siste. Ninas beskrivelse av hvordan hun løste oppgave 1 er et annet eksempel på rekketelling (#7.5):

7.5 N: Jeg tenker at… femgangen, fordi vi har lært oss en sang… (synger "femgange-sangen", som stopper på femti) Den går bare til femti. Men det er jo enkelt å tenke femgangen, for da plusser du bare på fem og fem hele tida.

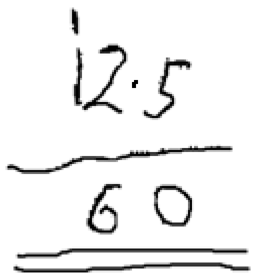
Klassen har lært sanger for å huske gangetabellen, og Nina bruker sangen om femgangen som utgangspunkt for å finne 5 · 12 = 5 · 10 + 5 + 5.

Kategorien Gjentatt addisjon inneholder skriftlige metoder som standardalgoritmen for addisjon og Jens' vannrette oppsett som vist over. I løsningsstrategiene som er plassert i Gjentatt addisjon behandles multiplikanden som en sammensatt enhet, i motsetning til i Direkte telling, der elevene teller elementene enkeltvis. Det viser dermed overgangen fra et premultiplikativt til et multiplikativt skjema, som beskrevet av Steffe (1994). De fleste tilfellene av gjentatt addisjon som vises i elevenes strategier har form av en formell standard algoritme, som beskrevet av Thompson (1999). Dette gjelder i eksemplene fra Kasper og Tonjes løsninger. Jens' metode er imidlertid annerledes. Han regner riktig, men bruker et oppsett som er ulikt alle de andres, ved at han skriver utregningen vannrett. Denne metoden er dermed en formell ikke-standard algoritme (Thompson). Samtidig kan Jens' løsning sees på som en indikasjon på at han her uttrykker en mental algoritme ved at han følger et horisontalt oppsett Thompson (1997), hvis man ser bort ifra at Jens her bruker minnetall som i standardalgoritmen.

4.2.3 Standardalgoritme eller lignende

I denne kategorien har jeg plassert de strategiene som enten viser riktig bruk av standardalgoritmen for multiplikasjon eller som ser ut til å være forsøk på å bruke denne.

Det er kun Bente som har ført hele løsningen av en oppgave som en korrekt standardalgoritme, i to tilfeller. Figur 20 under viser hvordan Bente har ført løsningen av oppgave 1:

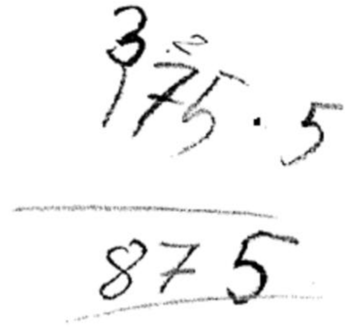


Figur 20: Bentes løsning på oppgave 1

Bente forklarer utregningen slik (#1.28):

1.28 B: Ja, først satte jeg opp sånn: tolv gange fem. To gange fem er jo ti. Null her, og ettallet der. Så har vi en gange fem, og det er jo, en gange fem er fem, og pluss en så blir det seks. Og da ble det seksti.

Figur 21 viser hvordan hun har ført løsningen av oppgave 7:



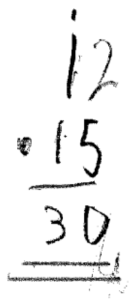
Figur 21: Bentes løsning på oppgave 7

På spørsmål om hvor Bente har lært å bruke standardalgoritmen, svarer hun (#1.123-1.126):

1.123 I: Men..når lærte dere å gange sånn?
1.124 B: I fjerde. Sånn at det skulle være det største først.
1.125 I: Åja.
1.126 B: Men mamma har pleid å ha det minste først, sånn at det skulle bli mindre tall.

Bente har lært denne strategien på skolen, og at hun skal sette det største tallet først. Siden alle elevene i respondentgruppa går i samme klasse er det sannsynlig at alle har blitt introdusert til denne standardalgoritmen. Bente forteller at hun i tillegg har lært den av moren sin, men at hun da blir oppfordret til å sette det minste tallet først for at det skal bli ”mindre tall” (#1.126), noe som trolig betyr at utregningen blir enklere (og ikke nødvendigvis at svaret blir annerledes).

I denne kategorien har jeg også plassert løsningsstrategier som kan sees på som forsøk på å bruke standardalgoritmen. Jeg kaller disse forsøk fordi de ikke følger samme framgangsmåte som standardalgoritmen, og dermed gir feil svar. Sju av elevene løser oppgave 6 med utregninger som ligner på standardalgoritmen for multiplikasjon. Oppgave 7 løses ved å finne produktet av 70 og 31. Eksempler på slike er Jens’ løsning av oppgave 3 (Figur 22 under).

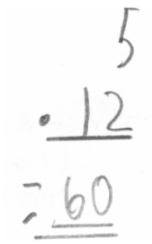


Figur 22: Jens' løsning av opppgave 3

Jens forklarer framgangsmåten slik (#6.74):

6.74 J: Jeg tok bare femten gange tolv. To gange fem blir ti. Da lager jeg tieren der og nulla der. En, to, tre. (peker på svaret, som er tretti)

Jens har satt opp en algoritme som har likhetstrekk med standardalgoritmen for addisjon, og som han bruker for multiplikasjon i flere tilfeller. I denne oppgaven er det klart at det ikke kan gi riktig løsning, fordi Jens for det første ikke forholder seg til plassverdiene (i forhold til multiplikasjon), og for det andre fordi han blander multiplikasjon og addisjon. Når Jens løser oppgave 1 derimot, fungerer denne strategien:



Figur 23: Jens' løsning på oppgave 1

Jens forklarer framgangsmåten slik (#6.4):

6.4 J: Jeg tok fem gange tolv, og så fant jeg ut det. Fem gange to blir ti, og så tok jeg en der. Nei, hvordan var det jeg gjorde dette?

Dersom Jens hadde regnet $5 \cdot 2 = 10$, satt null under og ettallet i mente over ettallet i 12, og deretter funnet $(5 \cdot 1) + 1 = 6$, hadde løsningen blitt riktig. Problemet er at Jens ikke har satt ettallet i mente når han har regnet oppgaven, slik han beskriver etterpå (#6.4). Det ser ut til at han først blir oppmerksom på dette når han skal forklare det. Da går han over til en annen forklaring (#6.6):

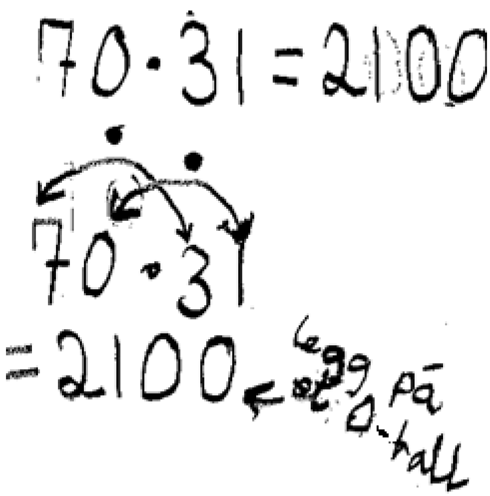
6.6 J: Ja, jeg vet at ti gange fem er femti, så plusset jeg på to femmere til, så ble det seksti.

Denne forklaringen stemmer, men ikke med regnestykket Jens har satt opp (se Figur 23 over). Det ser ut til at Jens, siden svaret blir riktig på oppgave 1, velger å bruke denne strategien på flere oppgaver, som i oppgave 3 (beskrevet over). Problemet er at den kun fungerer når en av faktorene er ensifret, og ikke når begge er tosifret. Etter at Jens har forklart framgangsmåten sin, diskuterer han den med Håvard (#6.74-6.86):

6.74 J: Jeg tok bare femten gange tolv. To gange fem blir ti. Da lager jeg tieren der og nulla der. En, to, tre. (peker på svaret, som er tretti)
6.75 H: Hvis du sier at det der blir hundre...?
6.76 J: Det er ikke hundre.
6.77 H: Det sa du i sted. (henviser til ti gange ti)
6.78 J: Det blir det der. Her er det femten gange tolv.
6.79 H: Åja.
6.80 I: Har du plusset eller ganget, Jens?
6.81 J: Der skulle jeg ha plusset.
6.82 I: Du har plusset de tre ja, men så har du ganget dem (peker på totallet og femtallet)
6.83 H: Fem gange to er jo…
6.84 I: Hvis du prøver å gange dem da?
6.85 H: (regner)
6.86 J: Det blir feil hvis jeg ganger fant jeg ut nå.

Denne diskusjonen foregår i etterkant av en diskusjon rundt oppgave 2 der guttene finner ut at $10 \cdot 10 = 100$. Etter at vi har snakket om løsningsstrategien, der jeg blant annet påpeker at Jens har både addert og multiplisert (#6.82), og Håvard tviler på at $10 \cdot 10 \cdot 10$ kan bli 3 (#6.77), konkluderer Jens med at det ikke går an å "gange" på denne oppgaven (#6.86).

Tonjes løsning på oppgave 6 er et annet eksempel på en egen algoritme:



Figur 24: Tonjes løsning på oppgave 6

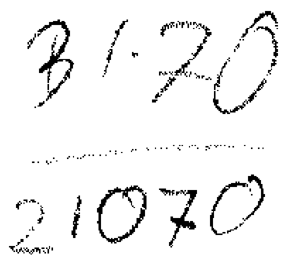
Tonje forklarer (#7.99-7.106):

7.99 I: Hvordan fant du ut det, Tonje?
7.100 T: For å vise det så ganget jeg først en med null. Og det er jo ikke noe vits, å gange med null er bare tull!
7.101 I: Å gange null er bare tull, hva blir det da?
7.102 T: Ja, det blir null. Da setter jeg nulla der, og så tok jeg sju gange tre og det ble tjueen. Så da skrev jeg tjueen, og så husker jeg ikke om jeg skulle legge på en null etterpå.
7.103 I: Ja, hvorfor skulle du legge på en null?
7.104 T: Jeg vet ikke!
7.105 I: Men du syntes du måtte gjøre det?
7.106 T: Ja, for det ble så lite svar!

Tonje har en egen algoritme som hun tilpasser for å få et rimelig svar. Hun kan ikke forklare hvorfor hun må sette på en null til slutt, men hun syns at svaret blir for lite hvis hun ikke gjør det. Tonje har trolig sett en lignende algoritme i bruk og kan kanskje, som tidligere nevnt, standardalgoritmen for multiplikasjon med et ensifret tall. Bente, som bruker standardalgoritmen for å finne $12 \cdot 5$ og $175 \cdot 5$ i hhv. oppgave 1 og 7, forklarer hvordan hun har løst oppgave 6 (#1.114-1.120):

1.114 B: Jeg tok gange. Sytti gange trettien. (mumler)
1.115 I: Kan du tegne det opp en gang til, så jeg får se hvordan du regnet?
1.116 B: Da skriver jeg akkurat sånn her jeg.
1.117 I: Skriv det sånn som du regnet du, eller sånn som du vil regne det.
1.118 B: Dette er bare noe som jeg gjorde da.
1.119 I: Ja.
1.120 B: Da tar vi en gange null, det er null. En gange sju er sju. Så har vi tre gange null, det er null. Tre gange sju, det blir tjueen. Og så ble det sånn da.

Dette er beskrivelsen av følgende løsning:



Figur 25: Bentes løsning på oppgave 6

Her har Bente regnet ut at $31 \cdot 70 = 21070$, ved å regne $1 \cdot 0 = \underline{0}$, $1 \cdot 7 = \underline{7}$, $3 \cdot 0 = \underline{0}$, og $3 \cdot 7 = \underline{21}$. Hun setter så disse etter hverandre, og får 21070. Dette kunne ha blitt riktig svar hvis Bente hadde tatt hensyn til plassverdiene, for eksempel ved å tolke utregningen slik: $1 \cdot 0 = 0$

(enere), $1 \cdot 7 = 7$ (tiere), $3 \cdot 0 = 0$ (tiere) og $3 \cdot 7 = 21$ (hundrere). Da hadde hun stått igjen med $0 + 70 + 0 + 2100 = 2170$.

Denne kategorien inneholder noen få tilfeller av bruk av en formell standard algoritme (Thompson, 1999). Videre inneholder den en rekke forsøk på bruk av disse. Tonje og Bente beskriver hvordan de bruker algoritmene, men begge forteller at de gjetter (se #7.102, #7.104 og #1.118). De representerer dermed det jeg vil kalle en mellomting mellom formell standard algoritme og formell ikke-standard algoritme (Thompson, 1999). Jens' løsningsstrategi, som han bruker både i oppgave 1 og 3, viser at han bruker oppsettet for standardalgoritmen for addisjon. Det gjør han imidlertid ikke når han skal addere (se Figur 18, kap. 4.2.2 over), for oppgave 5a. Som Jens forklarer for oppgave 1, så vet han løsningen på oppgaven uten å regne det ut skriftlig. Det er et eksempel på det Thompson (1997) kaller et gap mellom mentale løsningsstrategier og skriftlige algoritmer. Jens' skriftlige algoritme gir riktig løsning kun i bestemte tilfeller (oppgave 1). Når han i oppgave 3 ser at svaret ikke kan bli riktig, velger Jens å se bort fra denne metoden. Ikke-standard algoritmer (Thompson, 1999) forekommer i to tilfeller. Bente og Jens mener at de kan den og bruker den ofte, mens flere av de andre prøver på lignende utregninger i oppgave 6, uten at de har brukt den i noen av de andre oppgavene.

4.2.4 Bruk av multiplikasjonsfakta og egenskaper ved multiplikasjon

I denne kategorien har jeg plassert de løsningsstrategiene der eleven enten har brukt multiplikasjonsfakta eller egenskaper ved multiplikasjon for å løse oppgaven. Et eksempel på multiplikasjonsfakta er for eksempel at $10 \cdot 25 = 250$ fordi man skal legge til en null når man multipliserer med 10. Slik forklarer Kasper sin løsning av oppgave 4a (#4.50-4.52):

4.50 K: For ti gange tjuefem er tohundreogfemti, er det ikke det?
4.51 I: Ja, hvorfor det?
4.52 K: For at når jeg ganger med ti da blir det, med tall over ti, da blir det hundre, og så blir det tjuefem da. Jeg vet ikke hvordan jeg fikk det, jeg bare får det oppi hodet på meg.

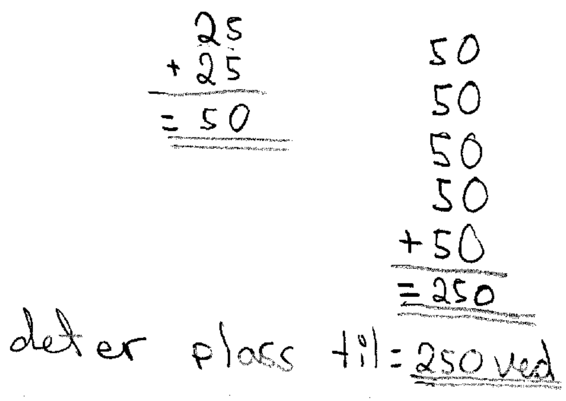
Slik forklarer Jens og Thomas hvordan de har løst samme oppgave (#6.168-6.170):

6.168 I: Hvordan visste dere at tjuefem gange ti var tohundreogfemti?
6.169 T: Fordi jeg kjenner det igjen på tigangen!
6.170 J: Tigangen ja. Ti gange tjuefem.

Flere av elevene beskriver lignende løsninger, så det ser ut til at de har lært en regel som sier at man skal legge til en null når man multipliserer med 10. Kasper gir en beskrivelse som antyder at han forstår sammenhengen bak denne regelen (#4.52).

Denne kategorien inneholder også løsningsstrategiene der elevene bruker enten den assosiative eller den distributive egenskapen ved multiplikasjon, eller begge. Jeg tolker det slik at disse er brukt før utregningen for å gjøre den enklere eller mindre tidkrevende. Produktet blir regnet ut etterpå, enten ved bruk av addisjon eller multiplikasjonsfakta.

Nina har løst oppgave 4a ved å bruke den assosiative egenskapen ved multiplikasjon sammen med addisjon:



Figur 26: Ninas løsning av oppgave 4b

Slik forklarer Nina framgangsmåten (#7.55-7.56):

7.55 I: Du har tatt femti pluss femti der du (til N). Hvordan tenkte du da?
7.56 N: Det var to pluss to, jeg mener, en pluss en er jo to og ti delt på to er jo fem.

Nina har delt inn de 10 sekkene i fem like store deler, og dermed doblet multiplikanden. Som følge av det ser Nina at hun må halvere multiplikatoren. Forklaringen beskriver denne sammenhengen: $10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot \frac{10}{2} = 2 \cdot 5$. Nina faktoriserer ut totallet fra multiplikatoren. Hun reduserer da antall addender i den repeterte addisjonen slik at utregningen blir enklere (det vil si med færre addender). Nina har skrevet utregningen som en ikke-formell ikke-standard algoritme (Thompson, 1999).

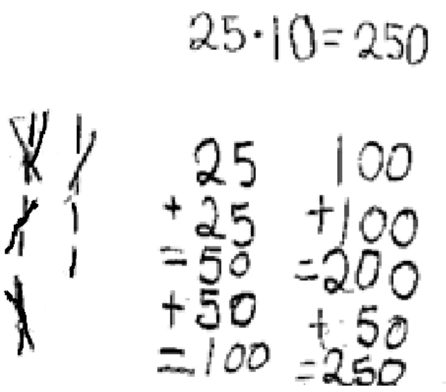
Monica beskriver en lignende metode i hennes løsning av oppgave 3 (#3.20-3.24):

3.20 M: Jeg tok sånn, ti pluss ti er liksom. Tok og doblet det der oppover da, på en måte.
3.21 I: Åja.
3.22 M: (mumler) Det det…dobler det liksom oppover, (mumler og teller på fingrene) det er ikke så lett å forklare det .
3.23 I: Kan du tegne hvordan du gjorde det? Eller skrive det?
3.24 M: Ja, femten pluss femten, det er tretti, ikke sant. Så tok jeg fra tretti til nitti og doblet sånn, og så holdt jeg inn fingrene og tenkte.

Monica kaller denne strategien ”å doble”, og er en teknikk hun bruker på flere oppgaver. Hun forklarer den slik (#3.44 under):

3.44 M: Det står jo der, men jeg vet ikke om det er rett. Men jeg bruker ikke gange. Jeg bruker med fingrene, for det er det jeg liksom har lært når mamma skulle vise meg hvordan jeg skulle gjøre oppgavene. Litt kjekt sånn! (ler)

I papirbesvarelsen har hun skrevet svaret 360, som er det dobbelte av riktig løsning på oppgave 3 (som er 180). I motsetning til Nina halverer hun ikke multiplikatoren når hun dobler multiplikanden, og derfor får Monica et svar som er dobbelt så stort. Dette skjer hver gang hun bruker denne strategien. På grunn av at strategien alltid gir feil løsning kan den også regnes som et eksempel på Ugyldig løsning, men Monica bruker den konsekvent og bevisst og jeg velger derfor å plassere den i denne kategorien. Felles for Monica og Ninas løsninger som beskrives over er at de dobler multiplikanden, noe som er et eksempel på en enkel splitting (Confrey, 1994). Når Tonje løser oppgave 4a, gjennomfører hun flere splittinger:



Figur 27: Tonjes løsning på oppgave 4a

Slik forklarer Tonje løsningen av oppgave 4a (#7.58-7.60):

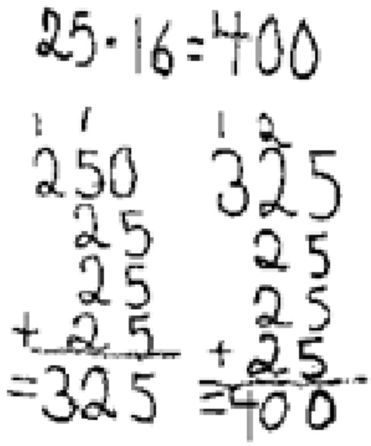
7.58 T: Jeg tenker litt annerledes. Jeg tenker tjuefem pluss tjuefem er lik femti, femti pluss femti er lik hundre, så hundre pluss hundre er lik tohundre pluss femti er lik…

7.59 I: Men du har tegnet de strekene her, er det for å passe på hvor mange du har?

7.60 T: Mm. Det gjorde jeg ja.

Tonjes løsningsstrategi har form av gjentatt fordobling, der hun dobler multiplikanden flere ganger, og bruker et streksystem for å holde regnskap over multiplikatoren. I utregningen over har hun doblet 25 opp til 200, og etterpå lagt til 50 fordi hun ser at hun mangler 2 (25-ere) for å få brukt opp multiplikatoren. Dette kan uttrykkes som utregningen $25 \cdot 10 = 25 \cdot (8 + 2)$. Dette er dermed en form for bruk av distribusjon sammen med addisjon. Gjentatt fordobling er imidlertid en form for assosiasjon som kan uttrykkes slik: $10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2$. Hun dobler multiplikanden helt til hun nærmer seg et antall tilsvarende multiplikatoren, og legger til det antallet som mangler. Dette kan dermed sees i sammenheng med splitting (Confrey, 1994). I stedet for å bruke en splittestruktur som representasjon, bruker Tonje et strekregnskap, som sees til venstre i Figur 27 over.

Tonjes løsning av oppgave 4b er derimot litt annerledes:



Figur 28: Tonjes løsning av oppgave 4b

Her har Tonje tatt utgangspunkt i løsningen på forrige oppgave, og så lagt til de resterende seks i to omganger. Utregningen kan beskrives som $25 \cdot 16 = 250 + 25 \cdot (1 + 1 + 1) + 25 \cdot (1 + 1 + 1)$. Dette er dermed bruk av distribusjon kombinert med addisjon.

Astrid beskriver slik hvordan hun har løst oppgave 4b (#8.58-8.60):

8.58 A: Ehm, da tok jeg halve, nei. Eh, tjuefem, gange fire, blir hundre. Og fire gange fire er seksten, så det ble… Hvis vi ordnet hundrere av tjuefemmerne, så blir det fire der eller noe sånt! Nei, jo, det blir sånn!

8.59 I: Ja, først tok du fire gange tjuefem, det blir hundre ja, og så tok du det fire ganger etterpå?

8.60 A: Ja. og så enda en gang fire gange tjuefem til, så ble det to hundre, og så fire gange tjuefem en gang til, og så fire gange tjuefem igjen, og så ble det tomt der, og så ble det fire hundre!

Astrid har ikke ført noen utregning på oppgaven, så hun må ha løst den ved hoderegning. I den første beskrivelsen (#8.58) oppfatter jeg forklaringen som at den beskriver følgende utregning: $25 \cdot 16 = 25 \cdot (4 \cdot 4) = 100 \cdot 4 = 400$. Jeg tolker den siste forklaringen (#8.60) slik: $25 \cdot 16 = 25 \cdot (4 \cdot 4) = (25 \cdot 4) \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot (1 + 1 + 1 + 1) = 100 + (25 \cdot 4) \cdot (1 + 1 + 1) = 200 + (25 \cdot 4) \cdot (1 + 1) = 300 + (25 \cdot 4) \cdot 1 = 400$. I den første ser det ut til at hun bruker assosiativitet og multiplikasjonsfakta for å løse oppgaven, mens det i den siste virker som at hun i tillegg har brukt distribusjon, ved at hun ”tar ut” en og en hundrer slik at det blir ”tomt” (#8.60). Den siste forklaringen kan sees i sammenheng med hvordan jeg stiller spørsmål til strategien (#8.59), men Astrid viser at hun behersker begge strategiene og kan operere fleksibelt med dem.

I oppgave 5a beskriver Stian følgende løsning (#2.68):

> 2.68 S: Ja, først regnet jeg med hundre, og så tok jeg bort tre bare.

Stian har, uten å skrive noe, forenklet utregningen ved å regne med 100 i stedet for 99. Løsningsstrategien som Stian beskriver kan føres som $99 \cdot 3 = (100 - 1) \cdot 3 = 100 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 300 - 3 = 297$, og tar i bruk distribusjon og addisjon. Denne strategien er brukt av flere elever på oppgave 5a, og også på oppgave 5b, som forklart av Monica (#3.70):

> 3.70 M: Tohundre pluss tohundre pluss to hundre minus tre. Svaret er lik (mumle). Så må jeg regne det ut.

For oppgave 5b forklarer Einar følgende løsning (#5.163-5.165):

> 5.163 E: Eh, det koster femhundreognittisju.
> 5.164 I: Ja, hvordan tenkte du da?
> 5.165 E: Jeg tok bare det tallet og plusset på trehundre.

Her har Einar tatt utgangspunkt i løsningen på forrige oppgave og lagt til 100 kroner per film. Jeg tolker Einars løsning som $199 \cdot 3 = (100 + 99) \cdot 3 = 300 + (99 \cdot 3) = 300 + 297$, altså distribusjon av multiplikatoren over multiplikanden, som han har delt opp. Dette har han trolig gjort fordi han vet svaret på $99 \cdot 3$ og vil bruke det videre i løsningen. Lignende løsninger er gjort av flere av elevene på denne oppgaven.

Einar er og en av få som viser bruk av kommutativitet (i forhold til framstillingen i oppgaveteksten), i oppgave 1(#5.10):

> 5.10 E: Eh..fem musikanter.. Jeg telte tolv fem ganger, eller..blir det riktig? Ja, sikkert. (mumler) Jeg tror jeg telte tolv fem ganger ja.

Einar ser ikke ut til å ha noen betenkeligheter med å bytte om på rekkefølgen på multiplikand og multiplikator, som i dette tilfellet har samme funksjon, siden situasjonen er kommutativ.

I denne kategorien har jeg også plassert løsninger der elevene har brukt distribusjon på en slik måte at utregningen i prinsippet er lik standardalgoritmen for multiplikasjon. Den skriftlige utregingen er imidlertid ikke lik standardalgoritmen. Jeg har tatt med både de tilfellene der eleven har lykkes med dette og fått riktig svar, og der løsningen ikke er riktig. Et eksempel på det siste er Stians løsning av oppgave 7, der han har svart ”Det er 360 m”, og notert tallene 300 35 25 ved siden av[37]. Stian har etter min oppfatning vært i ferd med å multiplisere hundrere, tiere og enere med fem hver for seg. Riktig utregning på denne oppgaven er: $175 \cdot 5 = 100 \cdot 5 + 70 \cdot 5 + 5 \cdot 5$, men Stian har funnet ut at $100 \cdot 5 = 300$ i stedet for 500. Videre tar han ikke hensyn til at sjutallet representerer tiere, slik at han får $70 \cdot 5 = 35$ i stedet for 350. For $5 \cdot 5$ blir det imidlertid riktig. Stian tar altså hensyn til plassverdier for hundreren (og naturligvis også eneren), men ikke for tieren. Einar gjør noe lignende, men er usikker når han forklarer (#5.222-5.228):

5.222 E: Først femhundre.
5.223 I: Er det fem gange hundreogsyttifem du regner?
5.224 E: Jeg tar hundre, og så den, og så den.
5.225 I: Åja, så da fikk du femhundre pluss trehundreogfemti pluss tjuefem.
5.226 E: Ja, den, og den (peker og illustrerer at han bruker plassverdiene)
5.227 I: Du tar hundreren først, og så tierne og så enerne?
5.228 E: Ja, det der ja, og det der… (peker på løsningen på arket)

Einar har svart 875, og notert 25 + 500 + 350 ved siden av. Astrid har ikke skrevet utregning, men har også svart 875. Hun prøver å forklare hvordan hun har løst oppgaven flere ganger, først uten hell (#8.229-8233):

8.229 A: Jeg tok, først tok jeg fem gange fem.
8.230 I: Hm.
8.231 A: Det ble, tjuefem. Så tok jeg sju gange fem, det ble nå trettifem. Jeg gjorde ikke sånn, gjorde jeg det da? Så tok jeg fem gange en da… Nei, jeg husker ikke hvordan jeg regnet det?! Kanskje jeg tok etthundreogsyttifem fem ganger.
8.232 I: Hm. Men, uten å skrive det?
8.233 A: Jeg gjorde..fem hundre. Og så sju gange fem er trettifem. Det blir femhundreogtrettifem pluss tjuefem. Nei, det ble feil!

Jeg tolker denne forklaringen slik: $175 \cdot 5 = 500 + 35 + 25 = 535 + 25$. Dette stemmer ikke med svaret hun har skrevet, fordi hun her ikke har tatt hensyn til at det er 35 tiere, og regnet dem som enere i stedet (slik som hos Stian over). Litt senere forklarer hun følgende løsning (#8.261-8.263):

8.261 A: Det er fem hundre. Og så tror jeg at jeg tok syttifem gange fem.
8.262 I: Ja.
8.263 A: Og det…det vet jeg ikke hva ble! Det kan jeg regne ut nå! Syttifem gange fem, det

[37] Transkripsjonen gir ingen informasjon om Stians løsningsstrategi utover det han har notert, og er derfor ikke tatt med.

blir tjuefem, og fem gange sju blir trettifem, pluss... Blir det pluss tjue eller to? Trettisju. Pluss femhundre da, så det blir…det BLIR åttehundreogsyttifem det!

Her forklarer Astrid at hun finner $75 \cdot 5$, og hun regner ut ved hjelp av standardalgoritmen for multiplikasjon. Dermed får hun nå riktig løsning. Når hun tidligere fikk feil svar på grunn av at hun ikke tok hensyn til tierne, unngår hun nå dette problemet ved å bruke standardalgoritmen.

Einar beskriver løsningen av oppgave 5a slik (#5.154):

5.154 E: Hm, det blir… Jeg tar tierne først jeg. Nitti og tohundreogsytti og så… tohundreogåttiåtte, og så blir det… Tohundreogåttiåtte, og så tohundreognittisju.

Einar har ikke skrevet utregning, men beskriver (først) en løsning som kan beskrives slik: $99 \cdot 9 = (90 + 9) \cdot 3 = (90 \cdot 3) + (9 \cdot 3) = 270 + 18 + 9 = 288 + 9 = 297$. Her har Einar distribuert multiplikanden over plassverdiene og regnet ut ifølge dette.

Denne kategorien inneholder et stort spekter av strategier, der mange er eksempler på formelle ikke-standard algoritmer (Thompson, 1999). Astrid forklarer hvordan hun bruker distributivitet og assosiativitet på en fleksibel måte, noe som er direkte eksempler på det Steffe (1994) kaller et enhetskoordinerende skjema, der hun bruker kjente sammenhenger, det vil si multiplikasjonsfakta, for å forkorte utregningen. Det er en form for avkorting, som beskrevet av Steffe. Andre former for avkorting finner vi der elevene bruker at $25 \cdot 10 = 250$ for å forenkle/unngå utregning. Noen av strategiene i denne kategorien er eksempler på det Thompson kaller uformelle ikke-standard algoritmer. Når Einar i oppgave 7 noterer 25 + 500 + 350 er det som en støtte til den mentale løsningsstrategien, for at han skal holde orden på delsummene i utregningen. Den viser hvordan Einar har tenkt for å løse oppgaven, og at han ser ut til å være fortrolig med plassverdier. Tonjes løser oppgave 4a ved å bruke splitting (Confrey, 1994), men bruker distributivitet i oppgave 4b for å bygge på denne løsningen. Løsningene i denne kategorien viser et stort spenn av løsningsstrategier, fra ren hoderegning til rene skriftlige utregninger. Elevene viser at de behersker egenskaper ved multiplikasjon og at de er i ferd med å bygge et repertoar av multiplikasjonsfakta, der det siste i praksis er et resultat av avkorting av utregninger, som beskrevet av Steffe.

4.2.5 Andre løsninger

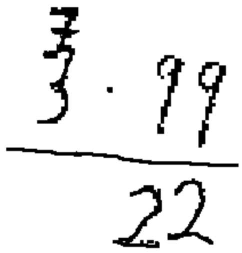
Løsningene jeg velger å plassere i denne kategorien er løsninger der eleven enten ikke har løst oppgaven ferdig (slik at det framkommer et svar), eller der strategien er så uklar at det er vanskelig å plassere den innen noen av de andre kategoriene. Det siste gjelder Bentes løsning av oppgave 5a og Monicas løsning av oppgave 7. Bente forklarer i oppgave 5a at hun vil bruke standardalgoritmen (#1.78-1.80):

1.78 B: Jeg tok gange da, så ble det ikke akkurat sånn. Det ble jo nesten over det tallet, så jeg ikke fikk til å skrive akkurat det, akkurat det. Jeg mener kanskje at jeg skulle ta det minste først,

1.79 I: Det minste først, hva mener du da?

1.80 B: Eh…her er det. Nittini kroner er det jo. (mumler) Og så er det tre, du kan, du skal kjøpe deg tre filmer, da tok jeg jo, da kunne man gjøre sånn (skriver tre gange nittini på arket). Tre gange ni er tjuesju, så setter jeg totallet der og sjutallet der, så blir det ni gange tre, det blir også tjuesju, men jeg har ikke noe sted å sette sjua mi!

Dette er Bentes forklaring på følgende utregning:



Figur 29: Bentes løsning på oppgave 5b.

Bente vil gjerne multiplisere, men hun blir usikker på hvilket tall som skal stå først og får ikke til å regne ut produktet. Min tolkning er at Bente nesten husker hvordan hun skal utføre standardalgoritmen, men at hun ikke har noen forståelse for at denne algoritmen bygger på bruk av plassverdier. Når hun ser at gjentatt addisjon blir for mye jobb og at standardalgoritmen ikke fungerer, løser hun problemet ved å ta utgangspunkt i situasjonen beskrevet i oppgaven (#1.84-192):

1.84 B: Ja, det var fordi at, da begynte jeg å tenke at. Nitti ni kroner, det blir jo ca. hundre.

1.85 I: Mhm.

1.86 B: Da kjøper jeg tre filmer.

1.87 I: Så hvis du går og skal kjøpe tre filmer, og betaler tre hundre kroner, da har du betalt nok?

1.88 B: Ja, tre hundre kroner.

1.89 I: Tror du at du får igjen noen vekslepenger?
(stille)

1.90 I: Kanskje ikke?

1.91 B: Jeg tenkte at, siden nittini, det er bare en unna, så det blir jo ca. nesten hundre blir det jo.

Bente har tidligere vist at hun kan multiplisere et ensifret og et tosifret tall ved hjelp av standardalgoritmen. Denne gangen får hun den ikke til å fungere, og hun velger derfor en annen strategi som gir et svar som ikke er riktig, men som Bente er fornøyd med.

Monica beskriver løsningen på oppgave 7 slik (#3.88-3.98):

3.88 M: Jeg var litt usikker på den og, men da ganget jeg, eller jeg tok fem gange hundre da på en måte, og så ble det sekshundreogsyttifem da.
3.89 I: Ja, for du ganget fem med hundre ja.
3.90 M: Ja, for jeg visste ikke hvordan, om jeg skulle bruke fem og gange, så jeg tok hundre og ganget med fem.
3.91 I: Fordi det var fem ganger lenger?
3.92 M: Ja. Ja.
3.93 I: Da tok du og ganget fem.
3.94 M: For jeg visste ikke helt hvilket tall jeg skulle...doble det med.
3.95 I: Hva mener du når du dobler det?
3.96 M: Nei, jeg skulle jo. Det, fem ganger dobbelt, og jeg visste ikke hvordan jeg skulle..få det til å bli fem mer.
3.97 I: Nei…
3.98 M: Jeg tok den hundreren da. Det var den.

Monica forklarer at hun ikke kan doble her (som hun har gjort i de andre oppgavene, se for eksempel Monicas beskrivelse av løsningen på oppgave 3 i 4.2.4). I stedet finner hun $100 \cdot 5$ og legger det til 175, slik at hun får 675.

I oppgave 2 oppfatter jeg det sånn at Jens og Einar har forstått oppgaven, mens kun Kasper har fått riktig løsning. Einar har trolig brukt en egen algoritme for multiplikasjon som han beskriver slik (#5.246-5.248):

5.246 E: Oi, tøft! Enerne, og så tierne, og det der er.
5.247 I: Enerne med...
5.248 E: Det der blir tre, og det der og det der, det blir to. Nå har jeg funnet en ny måte å regne på!

Einar har ikke skrevet ned hvordan han har løst oppgaven, men skrevet 32 på arket. Foran står det et ettall som er visket ut, men som jeg tror skal være med, slik at Einar har løst oppgaven riktig. I intervjuet svarer han derimot 32, og beskriver løsningsstrategien som at han har addert enerne først og så tierne, og så satt summen av enerne på tierplassen i svaret og motsatt, slik at han har fått $11 \cdot 12 = (1 + 2) \cdot 10 + (1 + 1) = 30 + 2 = 32$. Jeg velger å se bort fra denne forklaringen, på grunn av Einars svar når jeg spør om det var sånn han gjorde det (#5.249-5.250):

5.249 I: Hehe, ja. Med den pluss den og den pluss den?
5.250 E: Jeg tror ikke jeg gjorde det sånn.

Jeg har dermed ikke grunnlag for å si at Einar har løst oppgaven på denne måten. Forklaringen ser snarere ut som gjetting. Kasper har også gjettet på løsningsstrategi, og forklarer det slik (#4.20-4.30);

4.20 K: Så skrev jeg tolv elleve ganger. Så tok jeg og regnet det sånn (peker på regnestykket)
4.21 I: Ja. Ok.
4.22 K: Så fant jeg ut svaret. Så kom jeg opp til etthundreogtjue forskjellige.
4.23 I: Men hvorfor tok du tolv gange elleve?
4.24 K: Eh… Fordi jeg mente at det, nei, jeg vet ikke. Jeg syntes det hørtes ut som at jeg måtte gange.
4.25 I: Det hørtes ut som at du måtte gange ja. Fordi du skulle ha tolv gensere og elleve bukser…
4.26 K: Ja, det gikk ikke an å dele, og ikke…
4.27 I: Du syntes ikke du kunne ta minus heller?
4.28 K: Neei.
4.29 I: Eller pluss?
4.30 K: Så jeg tippet, jeg tok gange. (ler)

Løsningene som beskrives her ser ut til å være basert på gjetting eller på andre måter ikke vise en tydelig strategi. Jeg ser derfor bort fra disse i det følgende.

4.3 Sammenhenger mellom løsningsstrategier og oppgaver

I denne delen vil jeg drøfte hvilke funn jeg har gjort i undersøkelsen i forhold til mitt andre forskningsspørsmål;

Hvilke sammenhenger kan sees mellom oppgavene og elevenes valg av løsningsstrategier?

Analysen av oppgavetekster i forhold til multiplikative strukturer ligger til grunn for å sammenligne hvilke løsningsstrategier elevene i respondentgruppa har valgt i de ulike oppgavene. Drøftingen tar utgangspunkt i de ulike oppgavetypene og sammenholdingen av resultater som vist i Tabell 9 under.

Tabell 9: Løsningsstrategier brukt på hver oppgave

Oppgave	Direkte telling	Gjentatt addisjon	Standardalg. el.l.	Fakta eller egensk.	Andre løsninger
1	2	5	2	2	
3	1	3	3	4	
4a		1		9	1
4b				10	1
5a		6		5	
5b		4	1	5	1
6		1	7	1	2
7		3	3	2	3

4.3.1 Produkt av mål

Oppgave 1 og 2 beskriver hver sin kommutative situasjon, rektangulær oppstilling og kartesisk produkt. Oppgave 1 er løst ved bruk av løsningsstrategier fra alle de fire kategoriene, noe som tyder på at elevene i gruppa har mange strategier å velge blant. Den beskriver en kommutativ situasjon som kan løses ved bruk av alle de fire bruksteoremene, og elevenes løsningsstrategier for denne oppgaven tyder på at de har brukt alle fire. Den er den eneste oppgaven der noen har brukt bruksteorem d), som for oppgave 1 har følgende form:

> d) 12 som multiplikand og 5 som multiplikator: 12 + 12 + 12 + 12 +12 = 50

Oppgave 2 er som nevnt ikke løst av flere enn tre elever. Dette gjelder for øvrig totalt for alle elevene som løste oppgavene, ikke bare de som er med i respondentgruppa til intervjuene. Oppgaven beskriver en kommutativ situasjon som i utgangspunktet kan løses ved hjelp av alle fire bruksteoremer på samme måte som oppgave 1, og dette resultatet tyder dermed på at rektangulær oppstilling er en situasjon som denne elevgruppa behersker bedre enn kartesisk produkt. Dette kan ha flere årsaker, men det ser ut til å være situasjonen som beskrives i oppgaven som er hinderet. Dette bekreftes for eksempel av Nina når jeg forklarer oppgaven nærmere (#7.34-7.37):

7.34 N: Åja, var det sånn. Jeg trodde det var hvor mange ulike klær det var.
7.35 I: Hvor mange klesplagg ja.
7.36 N: Mm.
7.37 N: Jeg syntes det var litt rart at det var enkelt.

Nina har svart 23. De andre elevene har tolket oppgaven enten på lignende måte eller ved å finne hvor mange plagg som kunne være med i et antrekk. Det har for eksempel Håvard gjort (#6.55), og svart 2.

6.55 H: Jeg trodde du mente sånn forskjellige antrekk, en bukse og en genser.

På grunnlag av dette vil jeg hevde at datamaterialet ikke gir grunn til å trekke slutninger om kartesisk produkt. Elevenes beskrivelser indikerer at ordlyden i oppgaven kan være en av årsakene til at de ikke kan løsningen. Dersom eleven ikke vet at et antrekk består av en overdel og en underdel, blir det i praksis umulig å løse oppgaven. Jens har forstått oppgaven, og forklarer den slik for Håvard (#6.20):

6.20 J: At, hun har jo elleve bukser og tolv gensere, og hvor mye forskjellig kan hun ha på seg uten at noe blir likedan? Du ser, du kan ha blå bukse og den, svart bukse og den og grønn bukse og den…

På grunn av at det ser ut til å være flere årsaker til at elevene ikke har greid å løse oppgave 2, velger jeg derfor å se bort ifra den.

4.3.2 Isomorfi av mål

Like grupper

Oppgave 3 og 4 beskriver like grupper, som løses ved bruk av unære operasjoner. Elevene har løst oppgave 3 ved bruk av strategier i alle fire kategorier, men felles for alle er at de bruker bruksteorem a) eller b), det vil si at de bruker 15 som multiplikand i utregningen. Selve utregningen har form av direkte telling, gjentatt addisjon og bruk av plassverdier, men de fleste (4 stykker) har gjort en form for forenkling ved å regne med ulike multiplum av femten. Oppgave 3 og 4 dreier seg begge om multiplikasjon av to tosifrede tall, noe som elevene i utgangspunktet ikke har noen erfaring med. Alle unntatt Kasper, som har brukt Gjentatt addisjon, har løst oppgave 4a ved hjelp av strategier i kategorien Fakta eller egenskaper. Bruksteorem a) og b) er de eneste som er brukt, det vil si at oppgaven er løst ved skalaroperasjoner.

I oppgave 4b er alle gyldige løsninger av typen som beskrevet i kategorien Fakta eller egenskaper. Det kommer av at alle elevene enten tar utgangspunkt i forrige løsning når de skal finne antall vedkubber i 16 sekker, eller bruker andre avanserte metoder for å regne ut produktet på nytt. Også her er oppgaven løst kun ved bruk av bruksteorem a) og b), det vil si skalaroperasjoner.

Verdirate

Oppgave 5 og 6 dreier seg om verdirate. Det dreier seg i begge tilfellene om å betale noe, selv om det foregår i to ulike kontekster. En vesentlig ulikhet er at oppgave 6 skal løses ved å multiplisere to tosifrede tall mens en av faktorene er ensifret i oppgave 5. Ved å se på fordelingen av løsningsstrategier i disse oppgavene, ser vi tydelige forskjeller.

Oppgave 5a og 5b er hovedsakelig løst på to ulike måter, og kun ved å betrakte 99 og 199 som multiplikander, altså ved bruk av bruksteorem a) og b), som er skalaroperasjoner. Flere av elevene har løst oppgaven ved å tilnærme opp til hundre eller tohundre og få løsninger på formen $3 \cdot 99 = 3 \cdot (100 - 1) = 3 \cdot 100 - 3 \cdot 1 = 300 - 3 = 297$ for oppgave 5a (og tilsvarende for 5b). Resten av elevene har brukt Gjentatt addisjon, med unntak av Einar. Han beskriver en metode der han uten å skrive ned noe har multiplisert tiere og enere hver for seg i oppgave 5b, og som jeg derfor regner som Bruk av multiplikasjonsfakta og egenskaper ved multiplikasjon.

I oppgave 6 ser fordelingen annerledes ut. Her har de aller fleste elevene forsøkt å regne ut produktet ved hjelp av standardalgoritmen, uten å lykkes. Det er vanskelig å avgjøre hvilke bruksteoremer som brukes, fordi de ikke ser ut til å ha gjort noe bevisst valg i forhold til hva skal stå først og sist av faktorene i produktet. Dermed er det ikke synlig i utregningen hva eleven tolker som multiplikand og multiplikator. Elevene forklarer flere ulike framgangsmåter for å bruke standardalgoritmen, og Tonje bruker for eksempel det jeg oppfatter som tallfølelse når hun velger å legge til en null i løsningen ”fordi svaret så for lite ut” (se beskrivelse i kapittel 4.2.3 over). Noen av elevene, som for eksempel Lars (se kapittel 4.2.1) har skrevet ut alle multiplumene av 70 for å finne løsningen, mens Håvard er den eneste som løser oppgaven helt riktig, ved å bruke addisjon på ulike multiplum av 70. Alle løsningene ser ut til å være i form av skalaroperasjoner, det vil si med 70 som multiplikand og 31 som multiplikator.

Sammenligning

Oppgave 7 er den eneste oppgaven som tar for seg multiplikativ sammenligning. Alle elevene har brukt 175 som multiplikand i løsningen, noe som peker på skalaroperasjon. Løsningene er derimot av ulik art. Noen av elevene har brukt Gjentatt addisjon, enten ved å regne ut summen direkte eller ved å bruke ulike multiplum av 175 som forenklinger, altså ulike variasjoner med utgangspunkt i bruksteorem a). Andre har brukt strategier som minner om standardalgoritmen, det vil si bruksteorem b).

5 Diskusjon

I denne delen diskuterer jeg resultatene fra undersøkelsen opp mot teori om begreps- og prosedyrekunnskap og om intuitive modeller. Videre drøfter jeg resultatene opp mot en lignende studie, før jeg til slutt gjør en vurdering av studiens validitet og reliabilitet, samt foreslår videre arbeid med den.

5.1 Resultater

Resultatene fra undersøkelsen viser følgende:

- Valg av løsningsstrategi ser ikke ut til å påvirkes av oppgavens semantiske struktur, med unntak av for kartesisk produkt
- Tallenes størrelse og egenskaper påvirker valg av løsningsstrategi
- Elevene konstruerer egne algoritmer i tilfeller der de ikke har andre strategier tilgjengelige
- Enkeltelever gjør bruk av ulike typer intuitive modeller

I denne undersøkelsen har elevene blitt bedt om å vise og forklare de strategiene de bruker for å løse oppgaver. De har dermed beskrevet bruk av egen prosedyrekunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986). Som Hiebert og Lefevre understreker, er prosedyre- og begrepskunnskap to komponenter av kunnskap som er avhengige av hverandre. Resultatene viser at elevenes løsningsstrategier ofte involverer bruk av matematiske fakta og egenskaper. Matematiske fakta finnes i form av multiplikasjonsfakta, og egenskaper i form av distributivitet, assosiativitet og i noen tilfeller kommutativitet. Bruk av multiplikasjonsfakta eller en av de tre egenskapene ved multiplikasjon er to ulike eksempler på sammenhengen mellom prosedyre- og begrepskunnskap. Når Kasper og Håvard forteller at de vet at $25 \cdot 10 = 250$ er det enten et eksempel på at de har oppdaget sammenhengen gjennom regning, eller at de har blitt gitt en regel av læreren (eller begge deler). Dersom det første er tilfelle er denne sammenhengen allerede del av deres begrepskunnskap. Det kan da regnes som et resultat av *avkorting*, slik det beskrives av Steffe (1994). Hvis det derimot er en regel de har blitt instruert i, vil de enten måtte verifisere sammenhengen selv eller få et bevis for at det stemmer for at det skal bli en del av begrepskunnskapen.

Bruk av egenskaper ved multiplikasjon i løsningen av oppgaver antyder og at elevene har utviklet begrepskunnskapen gjennom bruk av prosedyrekunnskap. Elevene har ikke blitt instruert i den distributive egenskapen ved multiplikasjon, men flere av dem viser at de kan bruke den. Dette skjer for eksempel i oppgave 4b, der elevene bruker at det blir det samme om man finner $25 \cdot 16$ direkte eller om man finner $(25 \cdot 10) + (25 \cdot 6)$. Et annet eksempel er i oppgave 5a, der nesten samtlige bruker at $99 \cdot 3 = (3 \cdot 100) - (3 \cdot 1)$. Distribusjon, assosiativitet og kommutativitet er begreper disse elevene kanskje aldri blir introdusert til, men som de viser at de behersker. Kommutativitet brukes kun i oppgave 1. På grunn av tallene som brukes i oppgaven er det, som jeg beskriver nærmere under, ikke grunnlag for å slå fast at oppgave 1 og 2 er de eneste der elevene vil kunne velge å bruke kommutativitet. Elevene i undersøkelsen viser at de behersker assosiativitet i oppgaveløsningen, enten ved å kombinere det med addisjon eller ved å bruke multiplikasjonsfakta. Astrid viser at hun behersker både assosiativitet og distribusjon i sine beskrivelser av løsningen på oppgave 4b (for nærmere beskrivelse, se kapittel 4.2.4). Disse eksemplene illustrerer hvordan prosedyrekunnskap bidrar til å fremme begrepskunnskap. I tillegg viser elevene at de intuitive modellene deres inneholder spor av formelle regler, noe som viser hvordan man kan gå fra intuitiv til formell kunnskap i matematikk uten nødvendigvis å berøre den algoritmiske komponenten Fischbein (1994).

En gjennomgående tendens er at elevene, som ikke i utgangspunktet har blitt undervist i hvordan de bruker standardalgoritmen for å multiplisere to flersifrede tall, forsøker å gjette seg fram til denne algoritmen når de ikke har noen andre strategier tilgjengelige. Siden de ikke vet hvordan denne algoritmen er, forsøker de ulike metoder som de tilpasser for å få et svar som de synes er rimelig. Dette er et eksempel på interaksjonen mellom den intuitive og den algoritmiske komponenten ved matematikk, som beskrevet av Fischbein (1994). Disse algoritmene ser ut til å være et produkt av elevenes erfaring med lignende algoritmer sammen med deres intuitive kunnskap om hvilken størrelse et produkt av to tosifrede tall vil kunne ha. Et eksempel på dette er Tonjes strategi for å løse oppgave 6 (beskrevet i kapittel 4.2.3), der hun forklarer hvordan hun mener at tallene skal multiplisere, og at man i tillegg skal legge på en null, det siste ”for at svaret skal bli stort nok”. Et annet eksempel er Jens’ egen algoritme for multiplikasjon av to tall (beskrevet i kapittel 4.2.3), som i noen tilfeller gir riktig svar og i noen tilfeller ikke. Det fører til at Jens unngår å bruke den når han ser at svaret ikke kan stemme. Dette støtter Fischbein et al.’s (1985) teori om at de intuitive modellene er nært knyttet til elevens erfaringer med et gitt begrep.

Min studie har flere likhetstrekk med Mulligan & Mitchelmores (1997) studie, og jeg vil derfor sammenligne resultatene fra disse to studiene. Tabell 10 under viser en sammenligning av ulike metodiske aspekter ved studiene:

Tabell 10: Sammenligning av studier

Aspekt	**Min studie**	**Mulligan & Mitchelmore**
Omfang	11 respondenter (6 gutter og 5 jenter) Ett intervju	60 jenter Fire intervjuer over en toårsperiode
Oppgaver	Like grupper, verdirate, multiplikativ sammenligning, rektanglær oppstilling og kartesisk produkt	
Datainnsamlingsmetode	Oppgavene løst før intervju	Oppgavene løses under intervju
Datamateriale	Skriftlige besvarelser og elevenes muntlige beskrivelser	Forskerens beskrivelse av elevenes løsninger
Datakoding	Ser kun på strategier som eleven bruker bevisst, ikke om svaret er riktig	Forkaster alle uriktige løsninger

Mulligan og Mitchelmore (1997) finner i likhet med meg ingen direkte sammenhenger mellom løsningsstrategier og oppgavenes semantiske struktur, bortsett fra for kartesisk produkt, som også i deres studie har vært vanskelig for elevene å løse. I min undersøkelse har jeg delt inn elevenes løsningsstrategier i fire hovedkategorier; Direkte telling, Gjentatt addisjon, Standardalgoritme og Bruk av multiplikasjonsfakta og egenskaper ved multiplikasjon. Disse kan sees i sammenheng med Mulligan og Mitchelmores tre kategorier for intuitive modeller; Direct counting, Repeated addition og Multiplicative operation. De to første er etter min oppfatning essensielt like med mine kategorier Direkte telling og Gjentatt addisjon. Forskjellen oppstår i de siste kategoriene, der jeg har kategoriene Standardalgoritme og Bruk av multiplikasjonsfakta eller egenskaper. Mulligan og Mitchelmore (1997) har i stedet en kategori som heter Multiplikative operasjoner[38]. Multiplikative operasjoner er en intuitiv modell som kjennetegnes slik: ”In this operation model, the final term is extracted from the implicit sequence of multiples and treated as a single entity” (Mulligan &

[38] Egen oversettelse fra eng.: multiplicative operation.

Mitchelmore, 1997, s. 317). Den kan dermed sees i sammenheng med det Steffe (1994) kaller avkorting.

I Mulligan og Mitchelmores (1997) kategorisering er Multiplikativ operasjon kjennetegnet ved at eleven bruker kjente eller utledede multiplikasjonsfakta i løsningene sine. De kaller dette, som nevnt i utdraget over, en *operasjonell modell*[39], og forklarer dette med at dette er den første gangen multiplikasjon opptrer eksplisitt som en binær operasjon (s. 317). Denne oppfatningen samsvarer med Vergnaud, som skriver at å oppfatte situasjonen som multiplikativ betyr å bruke multiplikasjon som en binær operasjon (som for eksempel er kommutativ) (1983, s. 129). Eksempler på utsagn som bekrefter bruk av modellen Multiplikativ operasjon, er av denne typen: ”'I just thought of using the numbers and the multiplying sign in my head, I didn't need to count.'” (Mulligan & Mitchelmore, 1997, s. 318) I resultatene fra min undersøkelse har jeg, i kategorien Bruk av fakta og egenskaper gjengitt Kaspers forklaring på hvorfor $25 \cdot 10 = 250$: ”For at når jeg ganger med ti da blir det, med tall over ti, da blir det hundre, og så blir det tjuefem da. Jeg vet ikke hvordan jeg fikk det, jeg bare får det oppi hodet på meg.” Forskjellen på disse to utsagnene er at det første beskriver en metode for å løse oppgaven på, mens det siste er en forklaring på at det er mulig. Likheten ligger i at elevene henviser til at det foregår en form for mental aktivitet som gjør dette mulig, og som tydelig er noe de ikke kan, eller behøver, å skrive ned for å utføre.

Kaspers løsning vil etter min mening passe inn i den modellen Mulligan og Mitchelmore (1997) kaller Multiplikativ operasjon. Kasper har løst oppgaven 4a ved hjelp av gjentatt addisjon, selv om han tydelig viser kjennskap til multiplikasjonsfakta. Jens har løst oppgave 1 ved en egen algoritme som minner om en standardalgoritme, men beskriver løsningen ved hjelp av distribusjon og hoderegning. Dette illustrerer hvordan elever har ulike modeller for multiplikasjon som de bruker fleksibelt for samme oppgave. Det gjør at jeg, i min undersøkelse, får problemer med å plassere elevenes løsningsstrategier i distinkte kategorier, fordi de passer inn i to. Dette problemet unngår Mulligan og Mitchelmore, fordi det er de som forskere som lager beskrivelsen av elevenes løsningsstrategier. I min undersøkelse gir jeg elevene to anledninger til å løse oppgaven, som i noen tilfeller gir opphav til to beskrivelser.

[39] Egen oversettelse fra eng.: operation modell.

Dette viser at elevene, dersom løsningsstrategiene betraktes som uttrykk for intuitive modeller, har flere ulike modeller i bruk samtidig.

Mulligan og Mitchelmore konkluderer med at undervisningen i større grad må forsøke å utvide elevenes repertoar av løsningsstrategier (1997, s. 328), og dermed lede dem fra Direct counting, som regnes som den mest primitive intuitive modellen, via Repetert addisjon og til Multiplicative operation. Jeg mener, på bakgrunn av mine resultater, at det i tillegg til dette er nødvendig å ta hensyn til at enkeltelever bruker flere intuitive modeller i oppgaveløsningen. Det er derfor nødvendig at de gjøres bevisst på sammenhengene mellom ulike modeller, eller ulike løsningsstrategier. Dette kan gjøres ved at elevene gis anledning til å uttrykke seg om de ulike modellene. Her vil jeg igjen nevne Kaspers løsningsstrategier. Dersom Kasper ikke hadde blitt oppfordret til å beskrive hvordan han løser oppgavene, ville det ha sett ut som at han hadde en modell tilsvarende Gjentatt addisjon som han brukte konsekvent. Kasper viser seg imidlertid å ha mer avanserte modeller tilgjengelig, uten at han det framkommer av selve løsningen. Et annet argument er det faktum at ingen av elevene, til tross for at de har lite erfaring med multiplikasjon, løser nesten alle oppgavene. Noen gjør det ved hjelp av metoder som gir riktig svar, mens andre bruker algoritmer som enten kun delvis eller ikke i hele tatt stemmer overens med standardalgoritmen. Det viser hvor mangfoldig elevenes intuitive kunnskap er, og hvor viktig det er å ta hensyn til denne i undervisningen.

I min studie har jeg, i motsetning til Anghileri (1989) og Mulligan og Mitchelmore (1997), ikke lagt vekt på å rangere de ulike intuitive modellene i forhold til hvor avanserte de er. Som resultatene viser, er det ingen tvil om at Fakta og egenskaper er en mer avansert modell enn Direkte telling. Jeg vil hevde at en slik rangering derfor er mulig også for mine resultater. Min studie viser imidlertid at enkeltelever viser bruk av ulike modeller i ulike tilfeller. Det kan derfor være misvisende å rangere enkeltløsninger, fordi det kan gi et uriktig bilde av elevens tenking. I en studie som søker å avdekke elevers intuitive kunnskap for å se på muligheter og utfordringer i undervisningen, er det på den ene siden interessant å se på de ulike aspektene ved disse modellene og hvordan de opptrer i elevenes skriftlige og muntlige beskrivelser. Samtidig er målet for undervisningen å skulle utvikle disse modellene, noe som krever en klar retning og et tydelig mål for aktivitetene som det legges opp til i undervisningen. Derfor synes det for meg naturlig at man prøver å utvikle elevenes kunnskap om multiplikasjonsfakta og lar de møte ulike situasjoner der multiplikasjon opptrer.

Min studie gir ingen informasjon om hvordan elevene forholder seg til den semantiske strukturen kartesisk produkt (som nevnt i kap. 4.3.1). Ifølge flere andre studier (Fischbein et al., 1985; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Vergnaud, 1988) er kartesisk produkt en problematisk struktur for elever med lite erfaring med multiplikasjon. Fischbein et al. mener at det skyldes at det kartesiske produktet ikke er lett overførbart til gjentatt addisjon. Min studie viser at i det tilfellet der en elev har forstått oppgaven, skyldes det at han er i stand til å forenkle situasjonen med mindre tall (i stedet for elleve og tolv, som er gitt i oppgaveteksten). Videre viser elevene at de ikke er kjent med alle ordene som brukes i oppgaven (som for eksempel antrekk). Dermed vil jeg hevde at kartesiske produkt, i en enklere form, er mulige for disse elevene å forstå, og videre at det har en naturlig plass i innlæringen av multiplikasjon. Begrunnelsen for det siste er ikke at elevene skal mestre mest mulig komplekse situasjoner (med mindre de er klare for det), men her kan man se til Vergnauds (1983) teori om begrepsdomener som framholder at ulike områder i matematikken henger sammen. Kartesisk produkt er en form for kombinatorikk, som hører hjemme under sannsynlighetsregning, mens multiplikasjon i seg selv er en aritmetisk operasjon som brukes som et verktøy i de ulike områdene av matematikken. Piaget (Sinclair, 1990, beskrevet i kap. 2.2) framholder at matematikken læres gjennom at man bruker den bevisst i ulike situasjoner. Kartesisk produkt, som kombinerer sannsynlighet og aritmetikk er dermed en slik kobling mellom ulike begrepsdomener som vil være svært fruktbar for elevenes videre kunnskapsutvikling dersom det er forstått.

5.2 Studiens validitet og reliabilitet

For at en forskningsaktivitet skal kunne regnes som et seriøst bidrag til feltet, er det avgjørende at arbeidet har en tilfredsstillende kvalitet. En vurdering av studiens *validitet* og *reliabilitet* er en egnet måte å vurdere denne på for kvalitativ forskning (Gunnarsson, 2002; Mertens, 2005).

5.2.1 Validitet

Validitet vurderes på to måter, som *indre* og *ytre* validitet, og handler om å vurdere om og for hvem resultatene kan regnes som gyldige. Den indre validiteten dreier seg om studiens troverdighet. Jeg har forsøkt å ivareta denne gjennom studien gjennom å gi detaljerte beskrivelser av studiens utvalg, gjennomføring og analyse. For å øke troverdigheten til studien har jeg for det første forsøkt å gi detaljerte beskrivelser av datainnsamling og analyse.

I beskrivelsene og analysene har jeg forsøkt å være eksplisitt i forhold til hva som er mine tolkninger og hva som er elevenes utsagn ved at jeg gjengir uttalelser fra elevene og legger disse til grunn for tolkningene. For det andre forsøker jeg å troverdiggjøre studien ved at jeg holder meg tett opp mot andre lignende studier og kan vise likheter mellom resultatene.

Underveis i databehandlingen valgte jeg å se bort fra to av elevene som opptrer i datamaterialet, fordi de etter min oppfatning enten ikke husket løsningsstrategiene sine, eller fordi de i for stor grad så ut til å bli påvirket av uttalelsene fra de andre elevene som deltok i intervjuet. Disse to elevene deltok i datainnsamlingens del to, og det faktum at det nå var ei uke siden de løste oppgavene og at de var flere sammen så ut til å ha negativ innvirkning på informasjonen disse to ga. Dette kunne dermed ha bidratt til å redusere troverdigheten.

Den ytre validiteten angår studiens *overførbarhet*. Dette er det i utgangspunktet ikke forskerens oppgave å definere, men det er forskerens oppgave og gjøre dette mulig, gjennom å gi grundige beskrivelser av hvordan studiens resultater har oppstått.

5.2.2 Reliabilitet

I tillegg til validiteten må det tas hensyn til *reliabiliteten*. Denne angår studiens pålitelighet i forhold til hvordan den er utformet for å besvare forskningsspørsmålet. I en kvalitativ undersøkelse som min er det flere faktorer som kan være med å true reliabiliteten. Her er det sentralt å se på min rolle som forsker, både med tanke på datainnsamling og dataanalyse, siden jeg gjør alt på egen hånd. Elevene som deltar i undersøkelsen er, som beskrevet i Metode, elever jeg tidligere har hatt kontakt med i undervisningssammenheng. Dette kan på den ene siden gjøre at jeg kan ha forutinntatte meninger om for eksempel elevenes ferdigheter, og på den andre siden at de kan vegre seg for å gi meg informasjon (det kan imidlertid og være en fordel, som nevnt i kap. 3.3.1). Videre kan min deltakelse i datainnsamlingen som samtalepartner gjøre at jeg stiller ledende spørsmål eller på andre måter opptrer på måter som påvirker elevene. I et klinisk intervju er det avgjørende at den som intervjuer kontinuerlig vurderer situasjonen i forhold til hvilke spørsmål som skal stilles. Jeg regner meg selv som en forholdsvis uerfaren intervjuer, og i den forbindelse har jeg valgt et vanskelig verktøy. Et mer strukturert intervju med faste spørsmål i tillegg til oppgavene kunne ha gjort det lettere å gjøre intervjusituasjonen lik i de åtte intervjuene, og dermed lettere å generalisere. Dersom jeg misforstår eleven, kan det for eksempel føre til at jeg går glipp av interessant informasjon. Et eksempel på det er i intervjuet med Kasper. Jeg har flere ganger tidligere nevnt hvordan Kasper viser at han behersker multiplikasjonsfakta samtidig som han løser oppgaven ved gjentatt addisjon. Når vi snakker om oppgave 4b, (#4.55-4.62):

4.55 I: Ja, det er vel en regel dere har lært det tror jeg. Men det var lurt tenkt det. Og så, med seksten sekker da, i stedet for ti?
4.56 K: Da tok jeg bare og visket ut svaret og skrev på flere.
4.57 I: Åja?
4.58 K: (ler)
4.59 I: Så skrev du på seks sekker til?
4.60 K: Ja, da fikk jeg…
4.61 I: Da ble det firehundre og fem.
4.62 K: Ja.

Her kan det også hende at Kasper har andre forklaringer på lager, som jeg kunne ha fått tilgang til hvis jeg har spurt nærmere. Siden jeg allerede har sett at hans tilsynelatende primitive modeller kan erstattes med mer avanserte modeller, bør jeg være observant på dette videre i intervjuet. I andre tilfeller er spørsmålene mine for ledende og offensive, slik at eleven bare svarer bekreftende, slik som i dette eksempelet fra intervjuet med Nina, Merethe og Tonje, der jeg spør Merethe etter løsningen på oppgave 4b (#7.91-7.102):

7.91 I: Merethe, når du tegnet opp sekkene, hvordan fant du ut at det ble tohundreogfemti til sammen?
7.92 M: Jeg tok, jeg tok tjuefem og ganget med ti.
7.93 I: Men visste du at tjuefem gange ti ble tohundreogfemti? Hvordan fant du ut det?
7.94 M: Eh…
7.95 T: Kanskje du tenkte…
7.96 I: Regnet med fingrene?
7.97 M: Ja.
7.98 I: Hva gjorde du når det ble firehundre da?
7.99 M: Eh…
7.100 I: Du har skrevet noe, men du har visket det ut. Der står det seksten gange tjuefem, det ble firehundre.
7.100 M: Ja.
7.101 I: Du har visst plusset dem sammen tror jeg, så fikk du firehundre.
7.102 M: Mm.

Her gir jeg og T (Tonje) innspill for å hjelpe Merethe med å huske framgangsmåten før hun selv har fått tenkt seg om. Dermed er det vanskelig å si hva Merethe egentlig har tenkt, siden hun ikke bidrar med annen informasjon enn at hun finner $25 \cdot 10$, uten at hun får anledning til å forklare utregningen selv. Det finnes flere eksempler på slike situasjoner i dette intervjuet, der jeg i etterkant ser at Nina og Tonje, som nok er mer pratsomme, og samtidig har skrevet mer til oppgavene, bidrar med mer informasjon enn Merethe. En lignende situasjon gjelder for Kristin, og jeg har derfor valgt å se bort fra Merethe og Kristin i respondentgruppa.

Et siste punkt jeg vil nevne med tanke på til studiens reliabilitet, og som har sammenheng med beskrivelsene gitt over, er studiens utvalgsstørrelse (som nevnt i kap. 3.7). I min studie har jeg elleve respondenter. I en kvalitativ studie anbefales det å ha 4-6 respondenter (Mertens, 2005). Som nevnt over har jeg tatt ut to elever fra respondentgruppa, slik at jeg står igjen med elleve respondenter. Som beskrevet over er det situasjoner der jeg ikke opplever at intervjuene gir tilstrekkelig informasjon. I dataanalysen har jeg lagt vekt på skriftlige eksempler og eksempler på elevenes muntlige beskrivelser for å illustrere de ulike løsningsstrategiene som går fram av studien. Nettopp for å kunne gi et bredest mulig bilde av disse har jeg valgt å ta med alle elleve respondenter til dataanalysen. Dette er et valg jeg har tatt for å øke reliabiliteten til studien.

5.3 Videre arbeid

Jeg har ikke foretatt en pilotundersøkelse foran denne studien[40], noe som gjør at jeg nå ser potensiell forbedringer ved metoden som jeg mener vil kunne heve kvaliteten. Som nevnt i forbindelse med Reliabilitet (over), ser utformingen av tallene i oppgavesettet ut til å påvirke elevenes løsningsstrategier. En studie som hadde brukt tall med like egenskaper kunne derfor ha vært bedre egnet for å skaffe et datamateriale som lettere kunne ha besvart spørsmål vedrørende den semantiske strukturen på oppgavene. Med like egenskaper mener jeg at alle oppgavene for eksempel hadde hatt to tosifrede faktorer, der ingen av faktorene hadde vært multiplum av 10. Et annet alternativ er at oppgavesettet hadde vært større, det vil si med flere varianter av hver semantiske struktur. Her er det spesielt relevant å se for seg en annen utforming av oppgaven med kartesisk produkt. Det vil naturligvis gi et mer omfattende datamateriale. Færre respondenter ville da ha vært aktuelt¸ men med tydeligere fokus på at elevene skal løse alle oppgavene skriftlig..

Datamaterialet i denne undersøkelsen er etter min oppfatning, som tidligere nevnt, ikke egnet til å kunne trekke noen konklusjoner vedrørende elevenes oppfatning av de ulike semantiske strukturene, det vil si *hvilken* av de unære tolkningene de bruker. I de fleste tilfellene ser det ut til at de bruker skalaroperasjon, men jeg vet ikke årsaken til at de bruker det. Ifølge

[40] Dette skyldes at jeg skiftet problemstilling i forkant av mastersemesteret, slik at jeg ikke kunne bruke pilotundersøkelsen som jeg gjorde høsten 2009.

Vergnaud (1983) er en funksjonsoperator i større grad en multiplikativ operasjon enn en skalaroperasjon, og i lys av tidligere forskning vil jeg framsette en hypotese som sier at elever som kan bruke funksjonsoperasjoner i større grad vil forstå multiplikasjon med rasjonale tall. Et videre arbeid med denne studien kunne derfor ha besvart følgende spørsmål:

Hvilken oppfatning har elever på femte trinn av unære operasjoner for multiplikasjon?

6 Avslutning

I denne studien undersøker jeg intuitive modeller for multiplikasjon med flersifrede tall gjennom å betrakte elevers løsningsstrategier. Resultatene fra studien tyder på at valg av løsningsstrategier påvirkes av egenskaper ved tallene i oppgaven, og at det er en klar forbindelse mellom elevenes begreps- og prosedyrekunnskap. Elever har ulike intuitive modeller tilgjengelige for multiplikasjon med flersifrede tall, men bruker i de fleste tilfellene enten gjentatt addisjon eller multiplikasjonsfakta, eller en kombinasjon av disse sammen med en form for forenkling ved bruk av egenskaper ved multiplikasjon som assosiativitet og distributivitet.

Elevers beskrivelser av egne løsningsstrategier avhenger av at elevene kan kommunisere om matematikk. I denne undersøkelsen ser det for det første ut til at mange elever ikke skriver ned hvordan de regner ut svar, men at de kun bruker hoderegning. I tillegg er det naturligvis variasjon i gruppen i forhold til hvor muntlig sterke de er. Det er ikke innenfor denne undersøkelsen å se på deres muntlige ferdigheter, men for elevenes kommunikasjon av matematikk må det tas i betraktning hvor erfarne de er med å snakke om matematikk. Min oppfatning etter denne undersøkelsen er at elevene ikke ser ut til å være særlig vant med å snakke om hvordan de løser oppgaver, men at det er en svært viktig kilde til informasjon om elevenes kunnskap, spesielt i tilfeller der de ikke har ført utregning. I intervjuene der flere elever deltar, opplever jeg at diskusjonene som oppstår mellom elevene gir dem mulighet til å argumentere og lære av hverandre. Å la elever forklare løsningene sine for hverandre ser dermed ut til å være en fruktbar måte å organisere undervisningen på, både for å trene den muntlige kompetansen og for å bidra til kunnskapsutviklingen.

Jeg undersøker hvilke løsningsstrategier elever har for multiplikasjon med flersifrede tall gjennom at de beskriver sine skriftlige løsninger for meg i intervjuer. Det inneholder ikke føringer ut over å forsøke å få mest mulig grundige beskrivelser av elevenes tenking. I datamaterialet til denne undersøkelsen er det mulig å identifisere ulike kategorier for elevenes løsningsstrategier basert på deres beskrivelser. Denne kunnskapen er verdifull for lærere som ønsker å ta utgangspunkt i elevenes forkunnskaper når de planlegger undervisning, og å gjøre undersøkelser etter modell av denne kan være en egnet måte å skaffe slik kunnskap på.

Studien viser at skriftlige algoritmer og elevenes intuitive kunnskap kan komme på kant med hverandre. Dette bekrefter en rekke resultater fra tidligere forskning, der man argumenterer for å gå bort fra fokuset på å instruere elevene i bruk av standardalgoritmer og heller lar elevene selv oppdage sammenhenger. Dette kan sees i sammenheng med det Gravemeijer og van Galen (2003) beskriver som *guided reinvention*. Guided reinvention er et begrep som bygger på teoriene til den nederlandske matematikeren og didaktikeren Hans Freudenthal (1905-1990) om at elevene selv skal erfare matematikken, gjennom deres egen matematiske aktivitet. Gravemeijer og van Galen beskriver hovedideen bak dette slik:

> The core idea is that the students develop mathematical tools when solving problems. In such a process, informal algorithms may come to the fore as forms of well-organices routines for solcing certain types of problems. With guidance from the teacher, these informal algorithms can be debeloped into conventional algorithms. The teacher, however, may also opt for fostering the informal algorithms as valuable ends and goals in and of themselves. (Gravemeijer & van Galen, 2003, s. 117)

Freudenthal legger vekt på at undervisningen må organiseres for å gi rom for *matematisering*, en prosess som i praksis går ut på å betrakte ulike situasjoner via matematikk (Gravemeijer & van Galen). Matematisering er en todimensjonal prosess bestående av *horisontal* og *vertikal matematisering.* Horisontal matematisering vil si å gjøre om en problemsituasjon til et matematisk problem slik at det kan løses ved hjelp av matematikk, mens vertikal matematisering foregår når elevene kan ta egen matematisk aktivitet opp på et mer abstrakt nivå. Disse prinsippene ligger til grunn for det som kalles *Realistic Mathematics Education in the Netherlands* (RME). RME følger seks prinsipper for undervisningen. To av disse er aktivitetsprinsippet og veiledningsprinsippet (van den Heuvel-Panhuizen, 2001, ss. 51-55, egen oversettelse):

- Aktivitetsprinsippet: Elevene er aktive deltakere gjennom å utvikle egne verktøy og egen innsikt.
- Veiledningsprinsippet: Elevene skal få en guidet mulighet til å gjenskape matematikken. Læreren må derfor være bevisst hver enkelt elevs læringsbane.

Disse prinsippene forutsetter for det første at læreren har god kunnskap om elevenes forståelse. Videre setter de store krav til organiseringen av undervisningen. Nederland har betraktelig høyere andel av lærere med matematikkdidaktisk bakgrunn enn Norge (Grønmo, et al., 2010), og gjør det i tillegg betraktelig bedre enn Norge i TIMSS Advanced 2008[41]. Det er ikke dermed sagt at den nederlandske løsningen vil være optimal i den norske skolen, men

[41] TIMSS Advanced er TIMSS-undersøkelsen for videregående skole, og testet i 2008 elever i matematikk, på nivå med de som i Norge tok 3MX.

med tanke på blant annet resultatene fra min studie mener jeg at matematikkfaget i Norge vil tjene på å lære av prinsippene bak RME.

Elevenes intuitive kunnskap bør ha en sentral plass i undervisningen nettopp fordi den er så mangfoldig. Å la elevene diskutere løsninger og utvikle egne metoder som de selv kan verifisere, gir mulighet til 1) få tilgang til elevenes misoppfatninger, slik at man kan stimulere til akkomodasjon, det vil si endring i kunnskapsstrukturen slik at den stemmer overens med ny kunnskap, 2) illustrere og vise sammenhenger mellom ulike løsningsstrategier som gir riktig svar, slik at kunnskapsstrukturen styrkes og blir mer fleksibel, og 3) la elevene delta aktivt og bidra i undervisningen, slik at de føler mestring.

I innledningen til teoridelen (se kap. 2.2) siterer jeg von Glasersfeld:

> Whereas the trainer focuses only on the trainee’s performance, the teacher must be concerned with what goes on in the student’s head. The teacher must listen to the student, interpret what the student does and says, and try to build up a”model” of the student’s conceptual structures. (von Glasersfeld, 1995a, s. 14)

Denne studien viser at elevenes intuitive kunnskap både er omfattende og mangfoldig, og at den både representerer muligheter og begrensninger for undervisningen. Avslutningsvis passer det å ta med siste del av von Glasersfelds betraktning.

> This is, of course, a fallible enterprise. But without it, any attempt to change the student’s conceptual structures can be no more than a hit or miss affair. (von Glasersfeld, 1995a, s. 14-15)

7 Litteraturliste

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 20*(4), 367-385.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. (1997). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 3-30.

Confrey, J. (1994). Splitting, similarity and rate of change: A new approach to multiplication and exponential functions. I G. Harel & J. Confrey (Red.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (ss. 291-330). Albany, NY: State University of New York Press.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. I R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Red.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (ss. 231-245). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Forskningsetiske komiteer. (2009). Barn. Lastet ned 26.oktober, 2010, fra http://www.etikkom.no/no/FBIB/Temaer/Forskning-pa-bestemte-grupper/Barn/#_Toc225585180

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., . . . Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 130-162.

Ginsburg, H. P. (1997). *Entering the child's mind*. Cambridge: Cambridge University Press.

Glasersfeld, E. v. (1995a). A constructivist approach to teaching. I L. P. Steffe & S. Gale (Red.), *Constructivism in education* (ss. 3-15). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Glasersfeld, E. v. (1995b). *Radical constructivism: A way of knowing and learning* London: RoutledgeFalmer.

Goldin, G. A. (1997). Observing mathematical problem solving through task-based interviews I A. R. Teppo (Red.), *Qualitative research methods in mathematics education [Monografi]*. Journal for Research in Mathematics Education (Vol. 9, ss. 40-62, 164-177). Reston, VA: National Council of Teachers in Mathematics.

Gravemeijer, K., & Galen, F. v. (2003). Facts and algorithms as product of students' own mathematical activity. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (ss. 114-122). Reston, VA: National Council of Teachers in Mathematics.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (ss. 276-295). New York: Macmillan.

Grønmo, L. S., Onstad, T., & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind: TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*. Oslo: Unipub.

Gunnarsson, R. (2002). Validitet och reliabilitet. Lastet ned 10.november, 2010, fra http://infovoice.se/fou

Heuvel-Panhuizen, M. v. d. (2001). Realistic mathematics education in the Netherlands. I J. Anghileri (Red.), *Principles and practices in arithmetic teaching: Innovative approaches for the primary classroom* (ss. 49-63). Philadelphia: Open University Press.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (ss. 65-92). New York: Macmillan.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge : The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 147-158.

Mertens, D. M. (2005). *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

Pedersen, B. B., Pedersen, P. I., & Skoogh, L. (2003). *Abakus: Grunnbok 5B*. Oslo: H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard).

Pedersen, B. B., Pedersen, P. I., & Skoogh, L. (2006a). *Abakus: Grunnbok 6A*. Oslo: H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard).

Pedersen, B. B., Pedersen, P. I., & Skoogh, L. (2006b). *Abakus: Grunnbok 6B*. Oslo: H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard).

Pedlex Norsk Skoleinformasjon. (2008). *Kunnskapsløftet: Fag og læreplaner i grunnskolen*. Oslo: Forfatteren.

Rønning, F. (2009). Children's early work with multiplication and division. I C. Bergsten, B. Grevholm, & T. Lingefjärd (Red.), *Perspectives on mathematical knowledge. Proceedings of MADIF6, The 6th Swedish Mathematics Education Research Seminar, Stockholm, January 29-30* (ss. 85-96). Linköping: SMDF.

Sinclair, H. (1990). Learning: The interactive recreation of knowledge. I L. P. Steffe & T. Wood (Red.), *Transforming children's mathematics education: International perspectives* (ss. 19-29). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Assocates, Publishers.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Steffe, L. P. (1983). Children's algorithms as schemes. *Educational Studies in Mathematics, 14*(2), 109-125.

Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. I G. Harel & J. Confrey (Red.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (ss. 3-38). Albany: State University of New York Press.

Thompson, I. (1997). Mental and written algorithms: Can the gap be bridged? I I. Thompson (Red.), *Teaching and learning early number* (ss. 97-109). Buckingham: Open University Press.

Thompson, I. (1999). Written methods of calculation. I I. Thompson (Red.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (ss. 169-183). Philadelphia: Open University Press.

Utdanningsdirektoratet. (2010). Grunnleggende ferdigheter for grunnskolen: Å kunne regne. Lastet ned 27. august, 2010, fra http://www.udir.no/grep/Grunnleggende-ferdigheter/?visning=4

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. I R. Lesh & M. Landau (Red.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (ss. 127-174). Orlando: Academic Press, Inc.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. I J. Hiebert & M. Behr (Red.), *Number concepts and operations in the middle grades* (ss. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers in Mathematics.

Woolfolk, A. (2004). *Pedagogisk psykologi*. Trondheim: Tapir Akademisk Forlag.

Wæge, K. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning.* Doktoravhandling, Institutt for matematiske fag, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, Trondheim.

Vedlegg 1: Samtykkeerklæring

Til foresatte på femte trinn

Trondheim, 06.09. 2010

Om elevintervju i uke 37

I forbindelse med min masteroppgave i matematikk fagdidaktikk ved NTNU, ønsker jeg å intervjue elevene på 5. trinn. Oppgaven min dreier seg om hvordan barn utvikler forståelse i matematikk, og spesielt innen multiplikasjon. I forbindelse med dette ønsker jeg å gjøre intervjuer i klassen som skal brukes som datamateriale til oppgaven.

Intervjuet kommer til å være en samtale, enten i grupper eller alene, om elevens løsning av matematikkoppgaver. Det vil bli tatt opp på bånd, og siden nedskrevet og brukt i masteroppgaven. I oppgaven kommer eleven til å bli anonymisert. Både elevens og skolens navn kommer til å bli endret, og det eneste som vil fremgå er kjønn og klassetrinn.

Jeg håper at dere vil godkjenne at jeg intervjuer eleven og bruker intervjuet i masteroppgaven. Samtykkeerklæringen returneres til skolen **innen fredag 10. september**.

For spørsmål, vær vennlig å ta kontakt på telefon (97 10 80 49) eller mail (sigridiv@stud.ntnu.no). På forhånd takk!

Med vennlig hilsen

Sigrid Iversen

Samtykkeerklæring
Jeg godkjenner at ______________________ blir intervjuet, og at intervjuet blir benyttet i Sigrid Iversens masteroppgave.

Dato og sted: ________________________________

Underskrift foresatte: ________________________________

Vedlegg 2: Gjennomføringsplan

GJENNOMFØRINGSPLAN FOR DATAINNSAMLING

1. Samtale med elevene i samlet klasse om prosjektet/hva som skal skje. (mandag 20.09)
2. Elevene får utdelt oppgavesett som skal løses i løpet av ei skoleøkt (30 minutter), mer tid hvis nødvendig.
3. Oppgavesettet med løsning samles inn og vurderes i forhold til hvem som skal tas ut til samtale.
4. Elever tas ut av klassen til samtale, ca. 6 samtaler, maks. 20 minutter. Spør eleven om det er greit først.
5. Gjenta punkt 2.-3. for neste gruppe.
6. Gå inn i samlet klasse (hvis mulig, ellers delt) og si noe generelt om dagen og takke for hjelpa.

PUNKT 1
HVA ER DETTE?
Forklar:

Dette er et opplegg som jeg skal bruke for å samle inn informasjon til masteroppgaven min i matematikk fagdidaktikk. Hva er fagdidaktikk? Fagdidaktikk er læren om hva, hvordan og hvorfor man skal undervise. Jeg skal bli lærer, så jeg vil lære mer om hvordan man underviser. En masteroppgave er en stor oppgave på over femti sider som man jobber med i et halvt år. Oppgaven min skal være ferdig før jul.

HVORDAN SKAL DET GJØRES?

Forklar (Ikke si noe om at det dreier seg om multiplikasjon med mindre noen spør om det):

Dere skal jobbe med oppgaver som jeg har laget, og etterpå skal noen ut av klassen og snakke med meg og forklare hvordan dere har jobbet for å løse oppgavene. Jeg kommer til å bruke en diktafon, en liten båndopptaker, og ta opp det vi sier. Vis fram diktafonen. *Det er bare jeg som skal høre på opptaket. Jeg kommer til å skrive ned alt vi sier, det kalles å transkribere. og alle vil få et falskt navn slik at ingen som leser det kan vite hvem dere er. De som blir tatt ut kan få høre lydopptaket senere eller lese transkripsjonen, det vil si det jeg har skrevet ned.*

Oppgavene dere skal jobbe med er noe jeg laget, og alle skal gjøre de samme oppgavene. Vis fram heftet. *Dette er ikke en prøve, så det gjør ikke noe hvis dere ikke får til å løse dem, men jeg vil at dere skal prøve så godt dere kan. Øverst i hjørnet står det nummer. Det er bare jeg som skal vite hvem som har hvilket nummer.*

Etter at vi er ferdige her i dag skal jeg ta med meg oppgavearkene og lydopptakene og skrive masteroppgaven min om det. Det er mye jobb, og derfor er jeg kjempeglad for at dere har sagt ja til å være med og hjelpe til!

Er det noen som har noen spørsmål? Hvis ikke så sees vi i morgen.

Svar på eventuelle spørsmål.

PUNKT 2
Oppgavesettet deles ut.
(La elevene jobbe alene, men svar på spørsmål dersom de rekker opp hånda. Unngå å forklare løsning.)
Gi instrukser på forhånd:

Dere skal løse oppgavene på arket. Gjerne tegn og kladd på arket mens dere jobber. Spør om hjelp hvis dere ikke skjønner oppgaven, men ikke spør om hvordan dere skal løse den, jeg vil at dere skal prøve dere fram selv. Dere løser oppgavene akkurat som dere vil.
Si ifra når dere er ferdige med oppgavene, så skal jeg samle dem inn. Dere kan holde på i en halvtime, mer hvis dere trenger det.

Er det noen som har noen spørsmål? Hvis ikke så deler jeg ut oppgavene, så kan dere begynne med en gang.

Svar på eventuelle spørsmål.

PUNKT 3
Se over oppgavene, se etter løsninger der det er tydelig at eleven har tenkt og prøvd seg fram. Velg ut elever som er muntlig sterke, men ikke nødvendigvis de som har fått til mest. Prøv og finn tre elever i hver gruppe for samtale, spør eleven først om det er greit. Ta de ut når det passer for klassen, antageligvis med en gang oppgavene er sett over.

PUNKT 4

- Ta ut en og en.
- Ha blanke A3-ark tilgjengelige sammen med blyant (minst to), forklar at det kan brukes for å tegne mens de forklarer.
- Si ifra når opptaket starter.
- Start på første oppgave dersom denne er forsøkt løst, og spør hvordan eleven har tenkt for å løse den.
- Oppfordre til skissering eller ta initiativ til skisse.
- Spør om eleven er sikker på løsningen dersom den oppfattes som ferdig, og eventuelt hvorfor han eller hun mener at det er riktig.
- Gå videre til neste oppgave når oppgaven er forklart. Hopp over dersom den ikke er forsøkt løst, evt. spør om den til slutt hvis tid.
- Si ifra når alle oppgavene som er løst/forsøkt løst er blitt gjennomgått.
- Spør eleven hvilke oppgaver han/hun syntes var vanskeligst og hvilke oppgaver han/hun likte best.
- Spør om eleven har lyst til å si noe mer om oppgavene.
- Takk for hjelpa og si ifra om at lydopptakeren blir slått av nå.

PUNKT 5

Gå inn i samlet klasse neste gang de er sammen. Takk alle for at de var med på prosjektet mitt.

Vedlegg 3: Oppgavehefte

OPPGAVESETT
Nummer:_____

Oppgavene skal løses i heftet. Gjerne skriv, tegn og forklar på arket! Hvis det blir lite plass kan du bruke ekstra ark.

OPPGAVE 1: 17. mai
Skolekorpset har stilt opp foran toget på 17. mai.
De står med 5 musikanter på hver rekke, og det er 12 rekker bakover. Hvor mange er det i korpset?

OPPGAVE 2: Ulike antrekk
Tonje skal finne fram klær. Hun har 11 bukser og 12 gensere i skapet. Hvor mange ulike antrekk kan hun sette sammen?

OPPGAVE 3: Rundstykker
Mari har bakt rundstykker. Hun fryser dem ned i poser der er plass til 15 rundstykker i hver. Hun får 12 fulle poser med rundstykker. Hvor mange har hun bakt?

OPPGAVE 4: Vedsekker
Det er plass til 25 kubber ved i en vedsekk. Hvor mange kubber er det plass til i 10 sekker?

Hvor mange kubber er det plass til i 16 sekker?

OPPGAVE 5: Kjøpe filmer
Det er salg på DVD-filmer, og hver film koster 99 kroner. Du vil kjøpe tre filmer. Hvor mye må du betale til sammen?

Den vanlige prisen på filmene er 199 kroner. Hvor mye hadde det kostet å kjøpe de tre filmene til vanlig pris?

OPPGAVE 6: Kinobesøk
Hele 5.trinn skal på kino sammen. Hvor mye koster det til sammen når en barnebillett på kino koster 70 kroner?

OPPGAVE 7: Hvor langt er det?
Mattis og Matta snakker om skoleveien sin. Mattis forteller at han bor 175 meter unna skolen. "Da bor jeg fem ganger lenger unna enn deg!" sier Matta. Hvor langt er det fra Matta til skolen?

Vedlegg 4: Kodeskjema

Kodekategorier

Kategori	Farge
Direkte telling	Blå
Distribusjon	Rosa
Egen algoritme	Brun
Kommutativitet	Lys grønn
Multiplikasjonsfakta	Grønn
Repetert addisjon	Lilla
Standardalgoritme	Gul
Uklar	Svart

Koder for løsningsstrategier

Løsningsstrategi	Kode
Direkte telling med bruk av fingrene	Blå
Direkte telling ved skissering	Blå
Repetert addisjon, $a \cdot b$	Lilla
Repetert addisjon, $a \cdot b$	Lilla Lys grønn
Standardalgoritme	Gul
Egen algoritme (forsøk på std.alg.)	Brun
Bruk av multiplikasjonsfakta	Grønn
Sammensatte metoder, distribusjon og repetert addisjon	Rosa Lilla
Sammensatte metoder, distribusjon og bruk av multiplikasjonsfakta	Rosa Grønn
Uklar strategi	Svart