

Hyperbolsk geometri i et historisk perspektiv

Bjørn-Terje Gylder Smestad

Master i lærerutdanning med realfag
Oppgaven levert: Juni 2009
Hovedveileder: Eldar Straume, MATH

Hyperbolsk geometri i et historisk perspektiv

Bjørn-Terje Smestad

29.juni 2009

Sammendrag

Hilbert (1862 - 1943) fulgte Euklid (rundt år 300 før vanlig tidsregning) i sin oppbygging av den nøytrale, euklidske og hyperbolske geometrien. Hilberts aksiomer representerer i så måte en historisk viktig del av geometri. Birkhoff (1884 - 1944) på sin side dannet grunnlaget for en annen oppbygging knyttet til egenskaper fra den moderne matematikken. De to oppbyggingene er logisk ekvivalente og kan derfor utledes fra hverandre.

Hyperbolsk geometri skiller seg fra euklidsk geometri med ved et essensielt punkt, nemlig parallellpostulatet. Nøytral geometri tar for seg fenomener som opptrer både i hyperbolsk og euklidsk geometri. Oppdagelsen av den hyperbolske geometrien kom som en følge av at man tillot å tenke at det fantes andre muligheter enn det euklidske parallellpostulatet.

I denne oppgaven vil det redegjøres for den historiske bakgrunnen til geometrien ved å se på aksiomett basert på Hilberts og Birkhoffs betraktninger. Vi tar for oss forskjellen mellom disse ulike innfallsvinklene, og det vises at Hilberts aksiomer følger av aksiomsettet tuftet på Birkhoff. Vi redegjør for nøytral geometri og hyperbolsk geometri spesielt. Det utledes dermed resultater vi trenger i for å redegjøre for modeller for den hyperbolske plangeometri.

For den euklidske plan-geometrien har vi spesielt en god modell; det kartesiske planet \mathbb{R}^2 . Dette gjelder derimot ikke for den hyperbolske plan-geometrien. Vi redegjør for flater i \mathbb{R}^3 på jakt etter en modell for det hyperbolske planet. Dermed ser vi på Poincarès modell for det hyperbolske planet og tilslutt hvordan vi kan tolke det hyperbolske planet som flaten til pseudosfæren.

Innhold

1	Historisk innledning	8
1.1	Tidlig geometri	9
1.2	Euklid fra Alexandria	9
1.2.1	Euklids postulater	10
1.2.2	Viktigheten og problemene med Euklids postulater.	16
1.3	Oppdagelsen av hyperbolsk geometri	18
1.4	Modeller	23
1.4.1	Kort om insidensgeometri.	23
1.4.2	Uavhengighet og konsistens?	25
2	Hilberts aksiomer	26
2.1	Insidens-aksiomene	27
2.2	Mellomliggenhets-aksiomene	28
2.3	Kongruens-aksiomene	31
2.4	Kontinuitets-aksiomet	34
2.5	Parallellitets aksiomene	37
2.6	Hilberts aksiomer vs. Euklids postulater.	38
3	Et moderne aksiomsystem	40

3.1	Birkhoffs aksiomer	42
3.2	Birkhoffs aksiomer vs. Hilberts aksiomer	48
3.3	Fordelene med Birkhoffs aksiomer	50
3.3.1	Et segments midtpunkt med Hilberts aksiomer	52
3.3.2	Et segments midtpunkt med Birkhoffs aksiomer	55
4	Nøytral geometri	57
4.1	Krysslinje-teoremet	58
4.2	Ytre vinkel-teorem	60
4.3	Saccheri-Legendre teoremet	61
4.4	Kort om eksistens av parallelle linjer	62
5	Hyperbolsk geometri	64
5.1	„Merkelige” konsekvenser	64
5.2	Det universelle hyperbolske teorem	66
5.3	Saccheris-firkanter og Wallis trekkanter	67
5.4	Modeller for det hyperbolske plan	68
6	Flater i \mathbb{R}^3	70
6.1	Metrikk	73
6.1.1	Riemannsk metrikk	74
6.1.2	Eksempler	76
6.2	Kurver	78
6.2.1	En kurves krumning	79
6.3	En flates krumning	86
6.3.1	Eksempler	93

6.4	Oppsummering	98
7	Poincarès modell for hyperbolsk geometri	99
7.1	Isometrier	101
7.2	Möbius-transformasjoner	106
7.3	Kryssforhold, translasjon, rotasjon og refleksjon	111
7.4	Aksiomene for hyperbolsk geometri.	114
8	Pseudosfærens betydning	117
8.1	Buelengden på pseudosfæren.	117
8.2	Pseudosfærens begrensninger	121

Forord

Denne masteroppgaven danner avslutningen av mitt studie på Lektorutdanning i Realfag (Master of science and education) retning matematikk og fysikk, ved NTNU i Våren 2009. Oppgaven omhandler geometri og da spesielt den hyperbolske plangeometrien. Som tittelen avslører er det hele sett i et historisk perspektiv. Den er skrevet med hovedveileder Eldar Straume ved institutt for matematiske fag ved NTNU. Veiledningen har imidlertid i størst grad blitt gitt av andre knyttet til instituttet. Alle veiledere skal ha stor takk for hjelp og inspirasjon i arbeidet.

Valget av oppgave er basert på interessen rundt geometri generelt. Spesielt synes jeg geometriens evne til å forklare både matematiske så vel som andre mer eller mindre vitenskapelige relaterte emner er interessant. Hyperbolsk geometri kan i så måte knyttes til en rekke emner innefor for eksempel fysikk. Den knyttes for eksempel til Einsteins spesielle relativitets teori. Vi kan knytte geometriske betraktninger til de fleste av de fenomenene vi ser rundt oss, enten det er kurven en ball har gjennom luften, boarealet av en leilighet eller mengden kaffe i en kaffekopp.

Videre er en forståelse av abstrakt geometrisk tenkning viktig i videre arbeid som lærer. Det å kunne forklare geometriske fenomener på en gjennomtenkt og strukturerte måte er viktig i de fleste aspekter av matematikken. Et eksempel på dette er forståelsen av begrepet som „mellom” som vi tar for oss i denne oppgaven. Som en følge av mitt kommende yrke er det også interessant og kjenne historien bak deler av matematikkens oppbygning. Den fører ikke bare til en knippe inspirerende digresjoner, men kan brukes til å forklare både bakgrunnen og oppbygningen til matematiske konsepter. Gjennom historien får man også tilgang til en forståelse

Geometri er en av hjørnesteinene i matematisk historie. Den var sammen med tallteorien de to hovedområdene innefor matematikk i gammel tid. Euklid fra Aleksandria (rundt år 300 før vanlig tidsregning) formulerte det vi i dag kaller euklidsk geometri ved å systematisere det ved hjelp av aksiomer. Senere har de kommet en rekke forbedringer til det aksiomsettet Euklid presenterte. Studiet av Euklids verker ledet til at man oppdaget

at også andre typer geometrier var mulig. På bakgrunn av dette skiller man i dag mellom blant annet euklidsk, elliptisk, hyperbolsk, nøytral og ikke-euklidsk geometri.

Kapittel 1

Historisk innledning

Siden antikken har det blitt forsøkt på mange forskjellige måter å bevise parallellpostulatet til Euklid, kjent som Euklids V (Euklids femte (postulat)). Oppdagelsen av at et alternativt parallellpostulat var mulig har vært en av de store gjennombruddene i geometri og ledet til utviklingen av hyperbolsk geometri. Det faktum at aksiomene for hyperbolsk geometri er like logisk konsistente som for den euklidske geometri ble oppdaget gjennom studie av modeller for hyperbolsk geometri basert på euklidsk geometri.

I denne oppgaven vil vi gi en deduktiv oppbygning av en geometri. Dette skiller seg fra en eksperimentell eller en empirisk oppbygning ved at påstander blir logisk bevist ut fra allerede aksepterte (etablerte) påstander. En slik deduktiv fremgangsmåte er likevel som regel tuftet på empiriske resonnementer. Det starter som regel med at noen får en mistanke om et bestemt matematisk resultat. Slik gjorde det i alle fall for egypterne som mente fra eksperimentering at en trekant med sidene 3, 4 og 5 ville være rettvinklet. Det deduktive beviset for utsagnet er at en trekant med sidene a , b og c er rettvinklet dersom $a^2 + b^2 = c^2$.

En aksiomatisk oppbygning er en trinnvis deduktiv oppbygning av matematikken. Et utsagn bevises ut i fra tidligere etablerte utsagn, som igjen er bevist fra tidligere utsagn osv.. Denne prosessen må altså starte et sted; i et barns stadige rekke av spørsmål „hvorfors det?” må man til slutt svare „Fordi det er sånn”. I tillegg kommer definisjonene som er forklaringer av begreper vi benytter oss av. Et eksempel på dette er sirkelen: „En sirkel er mengden av alle punkter i planet som har en bestemt avstand fra et fast punkt.” Men også her må vi begynne et sted. Hva mener vi egentlig med „mengde”, „avstand”, „punkt” og „plan”? Også disse begrepene bør vi da definere fra tidligere definerte begreper?

Innenfor et hvert felt av matematikken må vi følgelig starte med noen udefinerte begreper. Vi kaller disse begrepene grunnbegreper og utsagn som vi tar for gitt og synes det er fornuftig å bygge vår teori på kaller vi aksiomer (postulater). Alle andre begreper og

utsagn må dermed bevises logisk ut i fra disse. Vi kaller slike beviste utsagn for teoremer.

1.1 Tidlig geometri

Geometri er et gammelt tema, og det er vanskelig å tenke seg et samfunn som ikke tar i bruk en eller annen form for geometriske resonnementer. Dette finnes det flere tusenårs gamle bevis på. Geometri ble for eksempel studert i Mesopotamia, Egypt, India og Kina for mer enn 4000 år siden. Det har opp gjennom tiden vært mange bruksområder for geometri. Egypterne trengte for eksempel geometrien¹ for å måle opp eiendomsgrenser etter at merkestavene ble skylt bort når Nilen gikk over sine bredder med jevne mellomrom. Også i tidligere samfunn var geometri nært knyttet til landmåling. Metoder for å sette eiendomsgrenser og måle opp størrelser i mot andre var viktig i nesten alle siviliserte samfunn. Det fantes derfor mange formler for å beregne lengde, areal og volum. Flere av samfunnene kjente også til tidligere nevnte Pytagoras læresetning selv om det var lenge før Pytagoras selv kom på banen. I mange tilfeller var formlene man brukte ukorrekte i den forstand at de kun ga tilnærminger. Tilnærmingene var imidlertid presise nok for praktiske formål. Landmålerne i disse samfunnene var også klar over „nøyaktighets-problemet” og utviklet mer nøyaktige tilnærminger der dette var nødvendig.

Ca. 500 år før vanlig tidsregning skjedde det en viktig forandring i synet på geometrien. Grekerne innførte abstraksjon, logisk deduksjon og bevis i geometrien. De bygde opp en geometri utledet ved logisk resonnement fra aksiomer. Dette gjorde geometrien eksakt, sikker og ubestridelig i motsetning til bestående av (gode) tilnærminger. Den logiske fremgangsmåten synes derfor som en riktig start for det vi kaller geometri. Euklid fra Alexandria (fl. 300 f. vanlig tid.) var den mest kjente av de greske geometrikerne. Selv om Euklid ikke selv står bak alle resultater vi kjenner fra Euklidsk geometri, var han den første som systematisk presenterte geometrien med en logisk oppbygging.

1.2 Euklid fra Alexandria

Rundt år 300 før vanlig tidsregning skrev Euklid sitt mesterverk "Elementene", en av de mest leste bøkene som er skrevet. Euklid satte opp fem postulater eller aksiomer som han baserte alle sine teoremer på. Euklids "Elementene" er organisert fra logiske regler og hver bok begynner med definisjoner av de logiske termene han vil få bruk for. I Bok 1 legger han frem postulatene. Postulatene er alminnelige forestillinger som må aksepteres uten bevis. Ut i fra dette bygges geometrien. Resten av bøkene består for det meste av

¹Ordet „geometri kommer fra det greske ordet geometrien (geo: jord og metrien: å måle)

påstander med dertil bevis. Hvert bevis bevis blir logisk fremsatt og bygges stegvis på definisjoner, postulater og tidligere beviste påstander. Den versjonen vi skal presentere her er en moderne omskriving og oversettelse av Euklids egne ord. En direkte oversettelse (til engelsk) ble gitt av Sir Thomas Little Heath (1861 - 1940) i 1908 og viser hvordan postulatene ville sett ut i Euklids egne ord:

Postulat I: Å trekke en rett linje fra to vilkårlige punkt.

Postulat II: Å finne en endelig rett linje kontinuerlig i en rett linje.

Postulat III: Å beskrive en sirkel med vilkårlig sentrum og distanse.

Postulat IV: At alle rette vinkler er lik hverandre

Postulat V: At, hvis en rett linje som faller på to rette linjer danner indre vinkler på samme side mindre enn to rette vinkler, vil de to rette linjene, hvis forlenget i det uendelige, møtes på den siden hvor de to vinklene er mindre enn to rette vinkler er.

Her henger en rekke begreper i løse luften og spesielt bruker han ordet „er lik” i flere diffuse betydninger. Det samme gjelder begrepet „mellomliggenhet”, som kommer inn i Postulat II. Vi skal studere dette nærmere i Kapittel 2. Det kan virke som om han går i den fellen han selv advart mot og bruker figurbetrakningen alene. De postulatene vi presenterer i neste avsnitt er derfor en velvillig fortolkning (fra [Gre1994]) av det Euklid mest sannsynlig mente å si.

1.2.1 Euklids postulater

Et postulat (av lat. postulatio) er en forutsetning eller. påstand som fremsettes uten bevis. Det er det samme som et aksiom som er mer brukt i moderne matematisk litteratur.

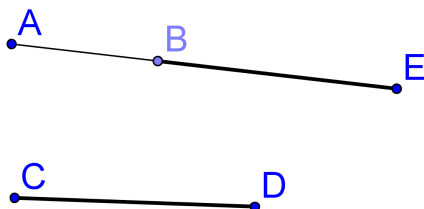
Aksiom 1.2.1. *For hvert par av distinkte punkter P og Q finnes der eksakt én linje l som går gjennom både P og Q .*



Figur 1.1: Punktene P og Q og den unike linjen l gjennom de.

Definisjon 1.2.2. Gitt to punkter A og B . Da vil **segmentet** eller **linjestykket** AB være mengden av alle punkter på \overleftrightarrow{AB} som ligger mellom A og B , samt punktene A og B . De to gitte punktene A og B kalles **endepunkter** til segmentet AB .

Aksiom 1.2.3. For hvert segment AB og hvert segment CD finnes det et entydig bestemt punkt E , slik at B ligger mellom A og E , og segment CD er kongruent med BE .

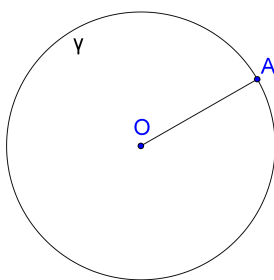


Figur 1.2: Segmentet CD er likt segmentet BE .

Her kommer problemet med begrepene „kongruent” og „mellomliggenhet” klarere frem. Hva mener man egentlig med at B ligger mellom A og E , og hva betyr kongruent med? I dag blir alle elever i matematikk trent i å identifisere punkter på en linje med reelle tall, og punkter i planet med par av reelle tall. Dette konseptet var ukjent for Euklid; han blandet ikke notasjonen av punkter med tall slik som vi gjør. Det var først med Descartes (1596 - 1650) på 1600-tallet at tall ble knyttet til punkter, og vi må helt til 1900-tallet før reelle tall ble bundet sammen med aksiomene for geometri.

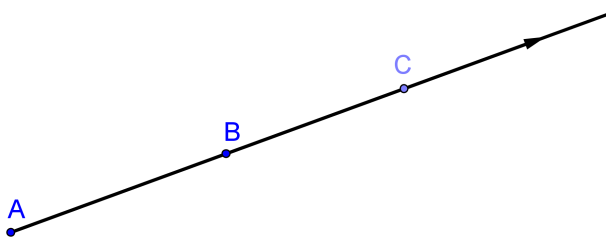
Definisjon 1.2.4. Gitt to punkter O og A . Mengden av alle punkter P som er slik at $OP \cong OA$ kalles en **sirkel** med sentrum i O , og hvert av segmentene OP kalles **radius** til sirkelen.

Aksiom 1.2.5. For hvert par av distinkte punkter O og A finnes det en sirkel γ med O som sentrum og radius OA .



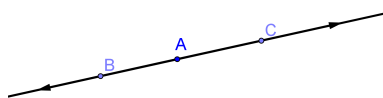
Figur 1.3: Sirkelen γ med sentrum i O og radius OA .

Definisjon 1.2.6. Strålen \overrightarrow{AB} er mengden punkter som ligger på segmentet AB samt alle punktene C slik at B ligger mellom A og C på \overleftrightarrow{AB} . Vi sier at strålen \overrightarrow{AB} **springer ut** fra A og er en del av \overleftrightarrow{AB} .



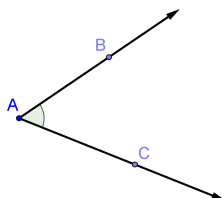
Figur 1.4: Strålen \overrightarrow{AB}

Definisjon 1.2.7. Vi sier at \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AC} er **motsatte stråler** hvis de er distinkte, springer ut i fra samme punkt A og de er deler av samme linje $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$.



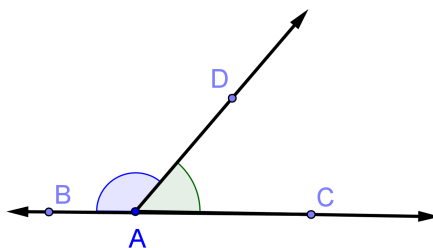
Figur 1.5: \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AC} er motsatte stråler.

Definisjon 1.2.8. En **vinkel** med hjørne A er et punkt A sammen med to (ikke motsatte) stråler \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AC} som springer ut fra punktet A . Vi skriver $\angle A$, $\angle BAC$ eller $\angle CAB$.



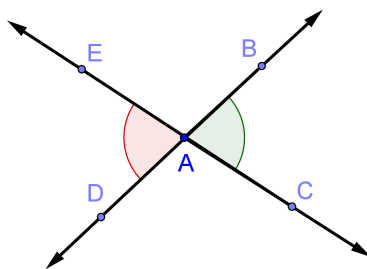
Figur 1.6: Vinkelen $\angle A \equiv \angle ABC \equiv \angle CAB$.

Definisjon 1.2.9. Vi sier at $\angle BAD$ og $\angle CAD$ er **supplementvinkler** hvis de består av en felles stråle \overrightarrow{AD} og strålene \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AC} er motsatte stråler.



Figur 1.7: Vinklene $\angle BAD$ og $\angle CAD$ er supplementvinkler

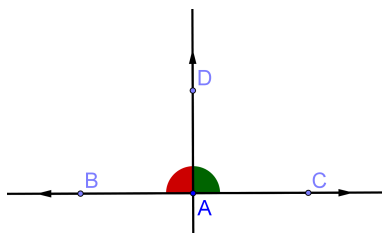
Definisjon 1.2.10. To vinkler kalles **toppvinkler** dersom de har samme hjørne og sidene til den ene vinkelen er motsatte stråler til sidene til den andre vinkelen.



Figur 1.8: Vinklene $\angle BAC$ og $\angle EAD$ er toppvinkler

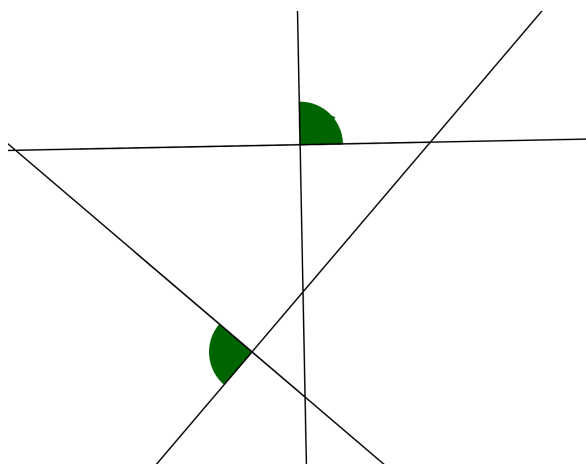
En gitt vinkel har alltid to supplementvinkler som er toppvinkler til hverandre.

Definisjon 1.2.11. En vinkel $\angle BAD$ er en **rett vinkel** hvis den har en kongruent supplementvinkel. Vi skriver $\angle BAD \cong \angle CAD$ når de to vinklene er kongruente.



Figur 1.9: Vinklene $\angle BAD$ og $\angle CAD$ er rette (kongruente supplementvinkler).

Aksiom 1.2.12. *Alle rette vinkler er kongruente.*



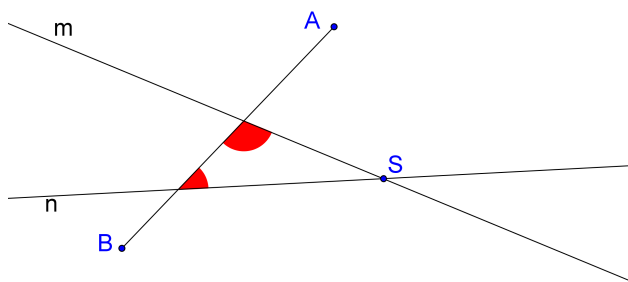
Figur 1.10: Rette vinkler er kongruente uavhengige av plassering.

Definisjonene av vinkel innebærer ikke noen form for vinkelmål (f.eks. grader eller radianer). Vi har snarere brukt begrepet kongruent eller (nøyaktig) lik. Dermed etableres en likhet i størrelse mellom to vinkler. Rette vinkler gir oss dermed en naturlig standard for et mål på vinkelen.

De fire aksiomene vi har listet opp så langt må vi nok anta at var kjent også før Euklid, og dermed akseptert av samtidens matematikere. Det 5. aksiomet skal vi se at skiller seg fra de andre og at dette skapte kontrovers helt frem til 1800-tallet. Mange mente at dette aksiomet kunne bevises på grunnlag av de øvrige og som vi skal se førte forsøkene på et bevis til utviklingen av ikke-euklidsk geometri.

Definisjon 1.2.13. To linjer l og m sies å være **parallelle** dersom de ikke skjærer hverandre, eller med andre ord ikke har noen felles punkt. Vi skriver $l \parallel m$.

Aksiom 1.2.14 (Euklids V). *Hvis et linjestykke AB skjærer to linjer m og n , slik at de danner to indre vinkler på hver side, som tilsammen er mindre enn to rette vinkler, så vil de to linjene m og n , hvis de forlenges uendelig, møtes på den siden (i S) hvor de to vinkler er mindre enn to rette vinkler.*

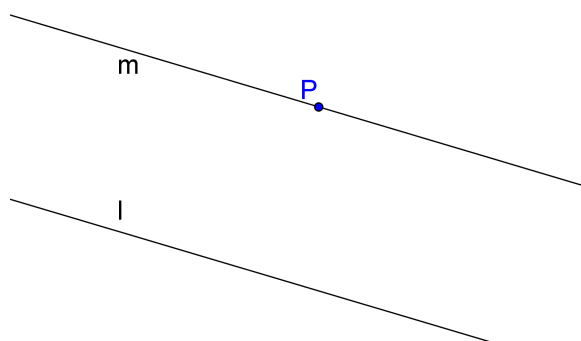


Figur 1.11: Euklids parallellpostulat

Aksiomet over er Euklids parallellpostulat, og inneholder en rekke begreper vi ennå ikke har definert (f.eks. „indre vinkel”, „samme side” og „vinkelsum”). Av den grunn presenteres også Playfairs aksiom som er ekvivalent med til Euklids parallellpostulat. Mye tyder på at Euklid ville unngå det 5 aksiomet ved å bruke de øvrige og muligens også innså at en geometri kunne bygges også uten parallellpostulatet. Blant annet beviser han de 28 første proposisjonene i "Elementene" uten bruk av parallellpostulatet.

Proklus (410 - 485) skrev en kommentar til "Elementene" hvor han kommenterte et forsøk på å utlede det femte postulatet fra de andre fire. Spesielt biter han seg merke i at Ptolemus tidligere hadde produsert et galt bevis. Proklus gir dermed et galt bevis selv, men utleder følgende postulat som er ekvivalent med Euklids 5. postulat.

Aksiom (Playfairs aksiom). *Gitt en linje l og et punkt P som ikke ligger på denne linjen. Det er da mulig å finne eksakt en linje m gjennom punktet P , slik at linjen m er parallell med linjen l .*



Figur 1.12: Playfairs aksiom

Selv om det altså var kjent på Proklus tid, ble det anerkjent som „Playfairs aksiom” etter at den skotske matematikeren John Playfair (1748 - 1819) skrev en kjent kommentar til Euklid i 1795, hvor han foreslo å bytte ut Euklids femte postulat med dette aksiomet. Dette er gjerne det aksiomet vi kjenner fra grunnskolen.

1.2.2 Viktigheten og problemene med Euklids postulater.

Som vi har gjentatt mange ganger var ikke Euklids „Elementene” uten feil, likevel er det nesten umulig å overdrive viktigheten av hans arbeid. Ikke bare innen matematikken, men spesielt her satte Euklid en standard for hvordan tankerekker bør organiseres. Den logiske deduktive oppbygningen som danner grunnlaget for hvordan vi bygger opp alle filosofiske og vitenskapelige teorier. Helt frem til i dag gjennomsyrrer Euklids måte å betrakte geometri lærebøker i matematikk (se f.eks kapittel. 7 i [San2007]), og mesterverket „Elementene” ble brukt helt frem til 1800-tallet som lærebok i geometri. Under hele denne perioden ble Euklids arbeid nøye studert. Spesielt var fokuset på Euklids V og dette førte til en rekke forbedringer og forenklinger.

Studiet av Euklids postulater viste etterhvert at det var mangler i flere ledd av „Elementene”. Når vi studerer definisjonene, postulatene og følgene fra disse med moderne

matematikk blir det innlysende at Euklid ikke nådde helt i mål med å formulere et perfekt aksiomatisk system. Euklids hensikt var å definere alle tekniske begreper han ville benytte. Et eksempel er Euklids definisjon av et punkt „*Det som ikke har noen ende*²”. Dette gir en intuitiv forklaring, men er i virkeligheten ingen god definisjon. Den gir ingen forklaring på hva „*det*” er for noe. Hvilke objekter snakker Euklid om? Svaret kommer ut i fra konteksten det er skrevet i. „*Det*” er geometriske objekter som ikke kan deles, men heller ikke dette er en fullgod definisjon. Punkter ser ut til å være rene posisjoner uten noen form for utbredelse. Ingen fysiske objekter har denne beskrivelsen og punkter må derfor forstås som ideelle abstrakte selvstendige enheter. Den eksakte naturen til et punkt kan med andre ord defineres, men må forbli et udefinert begrep. På samme måte er det mulig å kritisere Euklids forsøk på definisjon av linjer (det vi i moderne matematikk kaller kurver), rette linjer og plan.

Et annet eksempel på et feilsteg er Euklids måte og definere stumpe og spisse vinkler. Han sier at stumpe vinkler er „*de som er større enn en rett vinkel*” og likt at spisse vinkler er „*de som er mindre enn en rett vinkel*”. Dette gjør han uten å gi noen forklaring på hva „*større enn*” og „*mindre enn*” skal bety. Forskjellen fra definisjonen av punkter, kurver og linjer er at definisjonen av stumpe og spisse vinkler kunne blitt gjort stringente ved å først definere hva begrepene „*kongruent*”, „*større*” og „*mindre*” betydde.

Også Euklids bevis inneholder feilsteg. Her kan Euklids bevis av Proposisjon 1 tjene som et eksempel.

Proposisjon (I). *Gitt to punkter A og B så er det mulig å konstruere et tredje punkt C slik at $\triangle ABC$ er en likesidet trekant.*

Beviset begynner med segmentet fra A til B og bruker dermed Postulat III til å konstruere to sirkler med radius AB , en med sentrum i A og en med sentrum i B . Han lar så C være et av skjæringspunktene til de to sirklene, og avslutter med å vise at $\triangle ABC$ må være likesidet. Beviset følges av en figur som forklarer konstruksjonene.

Beviset kan ved øyekast virke troverdig, men i virkeligheten har Euklid antatt mer enn han har postulert. For eksempel kan han ikke med sikkerhet vite at de to sirklene i det hele tatt har noen skjæringspunkter. Det kan virke som om eksistensen av et punkt C er tatt for gitt ut i fra figurbetraktningen. Han bruker dermed en antagelse omkring punkter og kurver som er intuitive for de fleste. Antagelsen er i virkeligheten feilaktig da man kan konstruere slike situasjoner hvor det ikke finnes skjæringspunkter på grunnlag av de postulatene han benytter i beviset.

²Oversettelse av Euklids egne ord

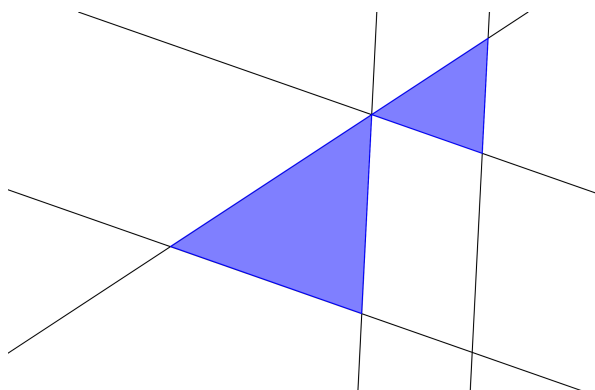
Euklid benytter seg også av superponering når han omtaler kongruens. Det vil si, han sier at dersom for eksempel to trekanter er kongruente vil man kunne flytte og rotere på den ene trekanten slik at den sammenfaller oppå den andre. Forflytningen av en slik trekant er igjen en egenskap som Euklid tar for gitt. Århundrer med studering har overbevist geometrikere med at slik forflytning ikke kan tas for gitt, men må postuleres på samme måte som eksistensen av punkter.

Merk at de problemene vi her har pekt ut og omtalt (de finnes flere eksempler) ikke viser at noen av Euklids slutninger var feil (i euklidsk geometri). Problemene var at utgangspunktet hans ikke var nok til å gjøre geometrien stringent. Begrepet „stringent” har også blitt utviklet og må den dag i dag leve opp til høyere standarder enn de som fantes på Euklids tid.

1.3 Oppdagelsen av hyperbolsk geometri

Det ble gjort en rekke forsøk på å bevise Euklids 5. postulat ved bruk av de fire andre. Noen av disse forsøkene ble til og med akseptert som bevis i lengre perioder inntil det ble funnet feil. Som regel var feilen at de antok en "selvfølgelig" egenskap som i virkeligheten baserte seg på eller var ekvivalent med Euklids femte postulat. Et slikt „bevis” ble gitt av Wallis i 1663 da han trodde han hadde utledet Euklids V, men i virkeligheten hadde visst at det var ekvivalent med:

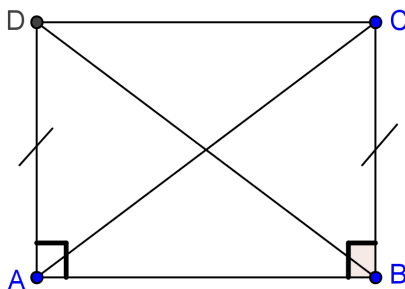
Aksiom. *Til en hver trekant eksisterer det en formlik trekant med vilkårlig størrelse.*



Figur 1.13: Wallis aksiom

Et av disse ukorrekte bevisene viste seg å være av større betydning enn de andre. Det ble produsert i 1697 av den italienske jesuittpresten og matematikeren Giovanni Girolamo

Saccheri (1667 - 1733). Betydningen av Saccheris arbeid lå i at han antok at Euklids 5. postulat var feil og på den måten ville vise at dette ga en motsigelse (RAA; Reductio ad absurdum).



Figur 1.14: Saccheris firkant, $\square ABCD$.

I figur 1.14 ser vi Saccheris firkant. Den er konstruert med utgangspunktet at $\angle DAB$ og $\angle ABC$ begge er rette vinkler (altså kongruente) og at $AD = BC$. Ved bruk av en slik firkant beviste Saccheri at vinkelmålene til $\angle ADC$ og $\angle BCD$ var like. Dette beviset benytter seg av egenskapene til kongruente trekner, egenskaper (Euklids proposisjon 4 og 8, se f.eks s. 395 [Ven2006]) som Euklid hadde bevist uten bruk av det 5. postulatet.

Saccheri så at det så var tre mulige tilfellene:

- a) Vinklene $\angle ADC = \angle BCD$ er rette.
- b) Vinklene $\angle ADC = \angle BCD$ er stumpe.
- c) Vinklene $\angle ADC = \angle BCD$ er spisse.

Saccheri ville vise at Euklids 5. postulat som fører til alternativ a) var det eneste mulige, og dermed ha bevist Euklids 5. Han antar derfor først at vinklene er stumpe b). Dermed fører han et bevis for at dette ikke kan inntreffe ettersom det medfører at det finnes flere rette linjer gjennom to unike punkt. Videre konsentrerer Saccheri seg om tilfellet der vinklene er spisse c) og utleder en rekke teoremer i hyperbolsk geometri uten å innse at det er nettopp det han gjør. Saccheri avslutter tilslutt feilaktig „bevist” for at Euklids V er det eneste mulige med at en spiss vinkel leder til motsigelse med de fire foregående postulatene.

Også den tyske matematikeren Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) forsøkte å bevise Euklids parallellpostulat ut i fra de øvrige aksiomene, men han fant etter hvert forsøk

at han hadde benyttet „opplagte” egenskaper, som hver gang viste seg å være ekvivalent med parallellpostulatet innenfor nøytral geometri. I 1766 følger Lambert en liknende fremgangsmåte som Saccheri, men faller ikke i den samme fallgruven. Lambert studerte tilfellet med spiss vinkel nærmere uten å lete etter en motsigelse. Lambert oppdager da at i en slik geometri vil vinkelsummen i en trekant øke når arealet av trekanten synker.

Adrien-Marie Legendre (1752 -1833) vier nærmere 40 år av sitt liv til å arbeide med parallellpostulatet og ett av hans viktigste resultat er at han beviste at Euklids 5. element er ekvivalent med:

Aksiom. *Summen av vinklene i en triangel er lik to rette vinkler.*

Legendre viste, som Saccheri oppdaget 100 år tidligere, at summen av vinklene i en trekant ikke kunne være større enn to rette vinkler. Dette baserte seg igjen på at rette linjer var uendelige. Ved å prøve å bevise at vinkelsummen i en trekant ikke kunne være ekte større enn 180° antok Legendre at gjennom ethvert indre punkt i en vinkel er det mulig å trekke en linje som skjærer begge sidene i vinkelen. Dette viser seg å være ennå et utsagn som er ekvivalent med Euklids 5. postulat uten at Legendre selv innså denne feilen.

Man omtalte på denne tiden problemet med parallellpostulatet som "elementærgeometriens skandale". Den første personen som virkelig skulle forstå problemet var Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Han begynte sitt arbeid med postulatet i 1792, da han bare var 15 år gammel. Først ville også han bevise det femte postulatet baserte seg på de fire første, men innen 1813 hadde han gjort liten framgang og erklærte: "*I teorien som omhandler paralleller er vi ikke engang nå kommet lengre enn Euklid. Dette er en skandale innenfor matematikken*". Gauss ble i 1817 overbevist om at Euklids 5. postulat var uavhengig av de andre fire postulatene. Han begynte å studere hvilke følger en geometri hvor flere parallelle linjer gjennom et punkt hadde. Gauss gjorde store fremskritt, men publiserte ikke dette arbeidet i redsel for kontrovers med datidens store tenkere og da spesielt Emanuel Kant (1724 - 1804). Kant hadde uttalt at euklidsk geometri var en „...*unngåelig nødvendighet til tanken*”.

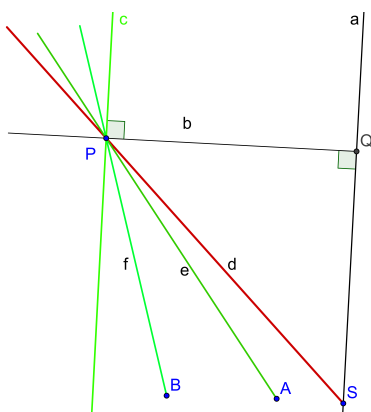
Gauss diskuterte sine teorier blant andre med hans venn og matematiker Farkas Bolyai (1775 - 1856), som selv ga flere gale bevis av Euklids 5. postulat. Farkas underviste sin sønn, János Bolyai (1802 - 1860), i matematikk. Han ba sønnen styre klar fra fristelsen til å „...*bruke så mye som en time på problemet med det femte postulat*”. János Bolyai fulgte heldigvis ikke farens råd og i 1823 skrev Bolyai til sin far: "*Jeg har oppdaget ting så vidunderlige at jeg er blitt forbløffet ... ut av ingenting har jeg konstruert en merkverdig ny verden.*" Det tar ytterlige to år før det hele er skrevet ned og publiseres som et 24 siders appendiks til farens bok. Gauss leser de 24 sidene og beskriver János Bolyai i et brev til en

venn som en geometriker han har aktelse og respekt for, "...*et geni av første rang!*", Til tross for disse flatterende ord, irriterer Gauss Bolyai ved å fortelle han at han selv hadde gjort de samme oppdagelser tidligere, men unnlatt å publisere dette arbeidet. Man har i ettertid i Gauss etterlatte notater funnet dokumentasjon på at han virkelig hadde kommet fram til tilsvarende resultater som de János Bolyai hadde oppdaget. Men i dag gir man Bolyai full kreditt for grunnleggelsen av av hyperbolsk geometri (sammen med Nikolai Lobachevsky (1792 - 1856)). János Bolyai ønsket ikke i utgangspunktet å bevise at en geometri der Euklids 5. postulat ikke var oppfylt måtte inneholde selvmotsigelser. Han benyttet dette utgangspunktet til å utlede en rekke teoremer - uten å søke en motsigelse.

Lobachevsky publiserte samtidig et arbeid på ikke-euklidsk geometri i 1829, men verken Bolyai eller Gauss kjente til Lobachevskys arbeid. Dette skyldtes at det ble publisert på russisk i en lokal universitets-tidsskrift. Heller ikke Lobachevskys forsøk på å nå et bredere publikum nådde frem og både han og Bolyai fikk liten anerkjennelse for sine funn umiddelbart. Lobachevsky publiserte i 1840 "*Geometriske undersøkelser av parallellens teori*" som gir det klareste bilde av hans arbeid. Hans arbeid blir godt kjent etter dette og artikkelen blir publisert på flere språk i flere land. Til tross for dette uteble anerkjennelsen, muligens fordi det matematiske samfunnet ikke var mottagelig for slike revolusjonerende idéer.

I "*Geometriske undersøkelser av parallellens teori*" (appendiks i [Bon1955]) forklarer Lobachevsky hvordan hans ikke-euklidske geometri fungerer:

"Alle rette linjer som i et plan går ut fra et punkt kan, med referanse til en annen gitt rett linje i samme plan, deles inn i to klasser; skjærende og ikke-skjærende. Grenselinjene til den ene og den andre klassen av slike linjer kalles parallell til den gitte linjen."



Figur 1.15: Lobachevskys linjer

Her har Lobachevsky innsett at man kan ha en geometri der de i alle fall eksisterer et punkt og en linje hvor det finnes flere parallelle linjer. I figur 1.15 er det forsøkt å forklare Lobachevskys tanker. Han har med andre ord byttet ut Euklids parallellpostulat med et annet parallellpostulat.

Aksiom (Lobachevskys parallellpostulat). *Det eksisterer to linjer parallelle til en gitt linje l gjennom et punkt P som ikke ligger på denne linjen.*

Lobachevsky fortsatte å utvikle trigonometriske identiteter for trekanter som holdt i denne geometrien, og viser med dette at når trekantene blir mindre nærmer man seg de vanlige trigonometriske identiteter.

Bernhard Riemann (1826 - 1866), som skrev sin doktoravhandling under Gauss, ga et kjent foredrag den 10. juni 1854 hvor han reformulerte hele konseptet for geometri. Geometri var en mengde punkter samt et matematisk verktøysett som gjorde det mulig å utføre målinger (som f.eks lengde). Foredraget ble ikke publisert før 1868, to år etter Riemanns død, men skulle vise seg å gi en enorm innflytelse på utviklingen av geometrien. Riemann selv undersøkte en "sfærisk" geometri hvor en hver rett linje gjennom et punkt P som ikke ligger på en linje l skjærer linjen l . I denne geometrien er altså ingen paralleller mulig. Riemann kunne gi eksempler på sin geometri på den sfæriske jordkloden og med dette ble også aksepten abstrakt geometri større. Spesielt åpnet dette dørene for at også en geometri med flere parallelle linjer var mulig.

Hverken Bolyais/Lobachevsky-geometrien eller den euklidske geometrien var bevist å være logisk konsistent på dette tidspunktet. Århundrer med arbeid på euklidsk geometri har likevel vært nok til å overbevise matematikere om at ingen selvmotsigelse ville finne sted i Euklids fem postulater.

Den første kjente personen som bruker Bolyai/Lobachevsky ikke-euklidske geometri i sammenheng med euklidsk-geometri var Eugenio Beltrami (1835 - 1900). I 1868 skrev han artikkelen "Essay on the interpretation of non-Euclidean geometry" som gav en modell for to-dimensjonal ikke-euklidsk geometri i tre-dimensjonal euklidsk geometri. Modellene fikk han ved rottere en traktrise om sin egen asymptote. Et slikt legeme blir ofte kalt en pseudosfære. Det viste seg imidlertid at Beltramis modell var uferdig, men det gav en endelig avgjørelse på spørsmålet rundt Euklids 5. postulat ettersom modellen ga et tilfelle hvor Euklids fire første postulat holder, men det femte ikke holder. Modellen reduserer altså problemet om hvorvidt de ikke-euklidske aksiomene er konsistente til det samme problemet man har for aksiomene til euklidsk geometri. Dermed var slutt-strek for nær 2000 år med „desperate“ forsøk på å bevise Euklids V satt.

Beltramis arbeid på en modell for Bolyai/Lobachevskys ikke-euklidske geometri ble

fullført av Klein i 1871. Klein gikk videre og gav flere modeller for ikke-euklidsk geometri slik som Riemanns sfæriske geometri. Kleins arbeid baserte seg på en begreper for avstand definert av Cayley i 1859 som utarbeidet en generalisert definisjon av avstand. Videre viste han at det fantes tre fundamentalt forskjellige geometrier; hyperbolsk, elliptisk og euklidsk. Hyperbolsk var den geometrien utviklet av Bolyai og Lobachevsky m.fl. hvor rette linjer hadde flere parallelle linjer gjennom et utenfor-liggende punkt. Elliptisk var Riemanns type sfærisk geometri, hvor det ikke fantes parallelle linjer. Og tilslutt euklidsk geometri som er grensetilfelle av de to hvor hver linje har nøyaktig en parallell linje gjennom et utenfor-liggende punkt.

1.4 Modeller

I et aksiomatisk system som det vi har beskrevet i avsnittet over har begrepene (f.eks punkt, linje osv.) i seg selv ingen bestemt mening bortsett fra de eksplisitte egenskapen som er beskrevet i aksiomene. Begrepene kan med andre ord tolkes slik man måtte ønske så lenge de er i overensstemmelse med aksiomene. En tolkning av det aksiomatiske systemet er en spesiell måte for å gi mening til de udefinerte begrepene i det systemet. En tolkning kalles en modell for et systemet hvis aksiomene er korrekte utsagn i denne tolkningen. Siden teoremene i dette systemet alle er logisk utledet av aksiomene, og ingenting annet, vet vi at alle teoremer også gir mening og stemmer i en vilkårlig modell.

Tegninger eller figurer er eksempler på en slike modeller for geometri. De kan være nyttige når vi skal illustrere geometriske utsagn. imidlertid er det en fare for at de kan bidra til å gi feilaktige forestillinger om geometriske relasjoner, som i igjen kan lede til feilaktige bevis.

1.4.1 Kort om insidensgeometri.

Vi skal bruke et eksempel for å forklare modeller ytterligere.³

Eksempel 1.4.1. Insidensgeometri må oppfylle de tre aksiomene:

1. For hvert par av distinkte punkter så eksisterer det en unik linje som har „insidens med” begge punktene.
2. På en hver linje ligger det minst to distinkte punkt.
3. Det finnes tre ulike punkt som ikke alle ligger på samme linje.

³I denne seksjonen følger vi langt på vei forklaringene til Gerard A. Venema i „Foundations of Geometry” ([Ven2006], s. 19). I tillegg har jeg tatt med forklaringer og eksempler hentet fra Marvin Jay Greenbergs „Euclidean and non-euclidean geometries” ([Gre1994], s. 51-54).

Ta så mengden $\{A, B, C\}$ som består av tre bokstaver som vi vil kalle „punkt”. Vi kaller de undermengdene som inneholder nøyaktig to bokstaver for „linjer”, altså $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ og $\{A, C\}$. Et „punkt” tolkes slik at at „det ligger på” eller „har insidens med” en linje dersom „punktet” er et element i „linjen”. F.eks „Punktet” A „ligger på” „linjene” $\{A, B\}$ og $\{A, C\}$, men „ligger ikke på” $\{B, C\}$. For å bestemme hvorvidt denne tolkningene er en modell må vi sjekke at tolkningen av aksiomene er korrekte utsagn. For det første aksiomet ser vi at hvis A og B er paret av distinkte „punkter” er $\{A, B\}$ den unike „linjen”. For det andre aksiomet ser vi at for alle „linjene” $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ og $\{A, C\}$ består av (bare) to distinkte „punkter”. For det tredje aksiomet ser vi at A , B og C er tre distinkte „punkt” som ikke alle ligger på en „linje”. Da har vi bevist at tre-punkts-modellen er en modell for insidensgeometri.

Hvorfor bruker vi modeller og hvorfor trenger vi mer enn en? Som vi så var tre-punkts-modellen kvalifisert til å være en modell for insidensgeometri. Vi kan fra aksiomene utlede setninger fra aksiomene, som for eksempel:

Proposisjon. *Hvis l og m er to distinkte linjer som ikke er parallelle så har l og m nøyaktig et felles punkt.*

Bevis. Gitt at l og m er distinkte linje som ikke er parallelle. Anta så at l og m ikke har et felles punkt. Da har vi to muligheter; l og m har to eller flere felles punkt eller l og m har ingen fellespunkt. Dersom l og m ikke har noen felles punkt er de pr. definisjon parallelle, noe som strider med antagelsen. Anta derfor at l og m har to eller flere felles punkt. De to punktene er distinkte og gjennom disse går det i følge Insidens-aksiom 1 bare en distinkt linje. Altså må l og m være samme linje. Dette strider med at l og m skal være distinkte. Vi må derfor forkaste antagelsen og slutte at l og m har nøyaktig et felles punkt. \square

Da vet vi automatisk at dette må stemme også i vår modell. Dette er enkelt å innse i vår tre-punkts-modell. På en liknende måte kan vi bruke modellene til å utlede nye setninger (teoremer, lemma, preposisjoner eller liknende). Anta at du har et utsagn i et system, men ikke ennå vet hvorvidt det er en setning som kan bevises fra øvrige aksiomer. Vi kan da bruke våre modeller. Dersom vi kan finne en modell hvor setningen ikke er sann, vet vi at det ikke finnes noe bevis. De fleste er sikkert kjent med at vi bruker tegninger med streker for linjer og prikker (eller kryss for den saks skyld) for punkt til å teste om geometriske setninger holder vann. Det omvendte, derimot, fungerer ikke, selv om en setning ser rett ut i en tegning betyr ikke at du kan bevise den. For en forklarende figur for dette se s. 24 i Greenberg [Gre1994]. Av samme grunn er det beleilig med flere modeller.

Euklidsk geometri er en form for insidens geometri, men i tre-punkts-modellen ser vi forholdsvis lett at Euklids parallellpostulat ikke holder. I tre-punkts-modellen eksisterer det ingen parallelle linjer ettersom $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ og $\{A, C\}$ alle inneholder et felles punkt. (Tre-punkts modellen oppfyller det elliptiske parallell postulat.) Dermed kan vi konkludere at det euklidske parallell postulat ikke kan bevises fra insidens-aksiomene alene. Faktisk er det umulig å bevise at parallelle linjer i det hele tatt eksisterer i insidensgeometri. På samme måte er setningen „alle linjer har et felles punkt” (det elliptiske parallellpostulat) umulig å bevise ut i fra insidens-aksiomene dersom det eksisterer modeller for euklidsk geometri.

1.4.2 Uavhengighet og konsistens?

Vi sier at et utsagn i vår aksiomatisk system er uavhengig av aksiomene hvis det er umulig bevise eller motbevise utsagnet som en følge av aksiomene. En god måte å vise at et utsagn er uavhengig av aksiomene er å vise at utsagnet er rett i en modell for systemet og ukorrekt i en annen. Dette er måten man omsider klarte å bevise at Euklids 5. aksiom (parallellpostulatet) var uavhengig av de øvrige aksiomene.

Aksiomene i et aksiomatisk system sies å være konsistente hvis ingen logisk motsigelse kan utledes fra de. Dette er åpenbart en egenskap vi vil ønske fra aksiomene vi benytter, og også dette kan vi verifisere ved å benytte modeller. Dersom det eksisterer en modell for et aksiomatisk system, så må systemet være konsistent. Derfor er innsidens-geometrien konsistent (hvis ikke ville ethvert bevis ved kontradiksjon ført til et bevis ved kontradiksjon for det trivielle mengdeteori for mengden bestående av tre elementer). Det at det eksisterer en modell for euklidsk geometri og dermed at Euklids aksiomer umiddelbart var konsistente ble tatt som gitt helt frem til det siste.

Jeg har prøvd å vise her hvordan og hvorfor modeller, figurer, tegninger osv. kan være gode hjelpere i vårt studie av et aksiomatisk system. De kan brukes til å bevise uavhengigheten til utsagn, flere modeller for samme system kan vise hvordan ulike hendelser kan opptre innen samme system og modeller kan skaffe til veie bevis for et aksiomatisk systems konsistens. Samtidig har jeg prøvd å få frem viktigheten av å styre unna de „selvfølgelige” egenskaper en slik presentasjon gir. Se gjerne eksemplene i seksjon 1.2.2. Et spørsmål man videre bør spørre seg er; finnes det modeller for for eksempel euklidsk og hyperbolsk geometri?

Kapittel 2

Hilberts aksiomer

I Kapittel 1 Innledning ga vi en kort innføring av de fremskrittene som ble gjort etter Euklid med tanke på hyperbolsk geometri. Vi så på hvordan Euklid satte opp sine postulater eller aksiomer og hvordan han dermed ga en logisk deduktiv oppbygging. Euklid er i så måte den viktigste geometrikeren. Hans aksiomer hadde likevel en god del svakheter. Det viser seg at man trenger ett langt mer omfattende aksiomsystem, der noen av Euklids aksiomer blir overflødige (dvs. bevist fra andre), og noen blir stående.

Vi skal i fortsettelsen se på en redigert utgave av den tyske matematikeren David Hilberts (1862 - 1943)



Figur 2.1: David Hilbert

aksiomsystem. Han var ikke den første som stilte opp et slikt aksiomsystem, men hans aksiomer er det mest intuitive og gir en teori som ligger nærmest Euklids oppbygning av geometri. Hilbert sine originale aksiomer var 21 i tallet og blant disse var det et aksiom som viste seg å kunne bevises som en følge av de øvrige. Altså trengte Hilbert i utgangspunktet

20 aksiomer. Det viste seg også at man kunne innskrenke antallet ytterligere ved å forandre deler på deler av aksiomene. Vi presenterer her derfor bare 14 aksiomer for nøytral geometri. I tillegg kommer aksiomene for parallellitet. Flere andre hadde også foretatt opprydning i den euklidske geometrien, blant andre kan vi nevne Moritz Pasch (1843 - 1930). Sistnevnte er kreditert et av teoremene vi setter opp.

Selvom Euklid dannet grunnlaget og fikk geometrien oppkalt etter seg inneholdt „Elementene” altså en rekke feil. Hans aksiomer var verken konsistente eller kategoriske. Det vil si, Euklids aksiomer var ikke i seg selv nok til å bygge en geometri, man måtte ha flere aksiomer. David Hilbert skal i ha stor ære for å rette opp i de feilene Euklid hadde. I 1899 kom boka „Grundlagen der Geometrie” ut første gang og den tar for seg et fullstendig aksiom-sett for euklidsk geometri.

Som vi har vært inne på er parallellpostulatet det som skiller nøytral geometri fra euklidsk- eller hyperbolsk-geometri. For å presisere; uten et parallellpostulat får vi nøytral geometri, med Euklids parallellpostulat får vi euklidsk geometri og med det hyperbolske parallellpostulat får vi hyperbolsk geometri.

Vi skal her følge Marvin Jay Greenbergs oppstilling av Hilberts aksiomer [Gre1994].¹ Hilberts aksiomer er delt inn i 5 grupper:

1. Insidens
2. Mellomliggenhet
3. Kongruens
4. Kontinuitet
5. Parallellitet

Når vi her i starten skal diskutere nøytral geometri vil vi ikke ta med aksiomene for parallellitet. Dermed vil teoremer og lemma utledet fra Hilberts aksiomer for insidens, mellomliggenhet, kongruens og kontinuitet gjelde for både hyperbolsk og euklidsk geometri.

2.1 Insidens-aksiomene

I innledningen ga jeg i forbindelse med en diskusjon av modeller aksiomene for insidens. Disse aksiomene er endel av Hilberts aksiomer. Aksiomene var:

¹Denne måte å stille opp aksiomene på er også fulgt i en rekke annen litteratur (se f. eks. REF)

Aksiom 2.1.1. *For hvert par av distinkte punkter eksisterer det en unik linje som har „insidens med” begge punktene.*



Figur 2.2: Punktene P og Q bestemmer linjen $l = \overleftrightarrow{PQ}$ entydig.

Det ovenstående aksiomet retter opp i svakhetene ved Euklids Postulat I: „Å trekke en rett linje fra to vilkårlige punkt.” At det finnes minst en linje gjennom to distinkte punkter forsikrer Euklids postulat, men svakheten ligger i at den ikke tar høyde for entydigheten.

Aksiom 2.1.2. *På en hver linje ligger det minst to distinkte punkt.*

Postulat II i Euklids „Elementene” er som vi har sett tidligere direkte oversatt: „Å finne en endelig rett linje kontinuerlig i en rett linje.” Noe som må kunne kalles ullent! Det kan virke som om Euklid tenkte på en linje som i den klassiske streken figurbetraktningen og dermed gikk han muligens i fellen han selv hadde advart mot. I alle fall så han ingen grunn til å forutsette at hver linje hadde minst to punkter.

Aksiom 2.1.3. *Det finnes tre ulike punkt som ikke alle ligger på samme linje.*

Vi antar dermed her at begrepene punkt, linje og insidens er kjente. Ut i fra dette kan vi bevise noe som ikke Euklids aksiomer gir grunnlag for, det kan vises at punkter og linjer eksisterer, at ikke alle punkter er kolineære og at enhver linje har (insidens med) minst to punkter. Dette er likevel utsagn som Euklid bruker i sine beviser.

2.2 Mellomliggenhets-aksiomene

Den neste kategorien av aksiomer er mellomliggenhets-aksiomene. Disse egenskapen kan det virke som om Euklid tok for gitt ut fra figurbetraktninger. Dersom A , B og C er tre kolineære punkter sier man for eksempel at „ B ligger mellom A og C .” Hva betyr egentlig dette? De fleste av oss ser for oss en linje med tre punkter på og ser lett at det ene ligger „mellom” de to andre. Denne intuitive forståelsen er også den vi søker å postulere gjennom

de aksiomene vi setter opp, men vi må huske at til nå er begrepet „mellom” helt abstrakt og uten noen mening. Vi skal med andre ord innføre en relasjon for alle tripler A , B og C som skrives $A \star B \star C$ og mener at: B ligger mellom A og C . Denne relasjonen skal oppfylle de følgende mellomliggenhets-aksiomene.

Aksiom 2.2.1. *Hvis punktet B ligger mellom A og C skriver vi $A \star B \star C$. Da vil A , B og C være tre distinkte kolineære punkter, og $C \star B \star A$.*

Det ovenstående aksiomet representere det mest grunnleggende vi intuitivt tenker om på om mellomliggenhet. Altså at egenskapen er symmetrisk ($A \star B \star C \Leftrightarrow C \star B \star A$) og vi knytter egenskapen til tre punkter på en og samme linje.

Aksiom 2.2.2. *For to vilkårlige distinkte punkter B og D eksisterer det punkter A , C og E på linja \overleftrightarrow{BD} , slik at $A \star B \star D$, $B \star C \star D$ og $B \star D \star E$.*

I følge dette aksiomet har vi at det eksisterer punkter mellom B og D , og videre at linja \overleftrightarrow{BD} ikke slutter verken i B eller D . Dette medfører at endelige geometrier er utelukket. Dvs. en geometri som inneholder en endelig mengde punkter ikke tilfredsstillere dette aksiomet. For eksempel vil aksiomet ikke oppfylles i tre-punkts-modellen som vi presenterte tidligere.

Aksiom 2.2.3. *Hvis A , B og C er tre distinkte kolineære punkter vil et og bare et av punktene ligge mellom de to andre.*

Dette aksiomet forteller oss at linjen ikke er sirkulær. Dersom den hadde vært det ville et hvert punkt ligge mellom de to andre.

Dersom $A \star B \star C$ så sier vi at \overrightarrow{BA} og \overrightarrow{BC} er motsatte stråler. Dette stemmer overens med vår definisjon av motsatte stråler (se definisjon 1.2.7).



Figur 2.3: Motstående stråler \overrightarrow{BA} og \overrightarrow{BC} .

Ettersom A , B og C er kolineære punkter (aksiom 2.2.1) og C ikke er på \overrightarrow{BA} (aksiom 2.2.3) så er \overrightarrow{BA} og \overrightarrow{BC} også to distinkte stråler. Vi har også fra aksiom 2.2.2 at \overrightarrow{BA} alltid har en motsatt stråle \overrightarrow{BC} . Fra figurbetraktningen av figur 2.3 synes det opplagt at påstanden,

et hvert punkt P på l gjennom A , B og C må enten ligge på \overrightarrow{BA} eller \overrightarrow{BC} , holder. Dette er ikke like opplagt som det kan virke ettersom vi innfører et fjerde ukjent punkt P . Vi kan ikke uten videre slutte at dersom $A \star B \star C$ og $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftarrow{AB}$ så har vi $\overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftarrow{AB}$ (Linje-separasjons-egenskapen). Vi må huske at vi ikke kan bruke figurbetraktningen alene, men basere oss på de abstrakte definisjonene, aksiomene og følgene fra disse som vi har til rådighet. Til nå har vi ikke redskaper til å behandle flere enn tre punkter på en slik linje. Vi må derfor ha med et siste mellomliggenhets-aksiom.

Definisjon 2.2.4. La l være en vilkårlig linje og A og B to vilkårlige punkter som ikke ligger på l . Da vil

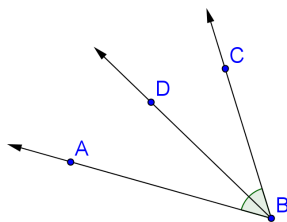
- i) A og B være på **samme side** av l dersom $A = B$ eller $AB \cap l = \emptyset$.
- ii) A og B være på **motsatt side** av l dersom $A \neq B$ og $AB \cap l \neq \emptyset$.

Aksiom 2.2.5. For alle linjer l og vilkårlige punkter A , B og C som ikke ligger på l , så gjelder

- i) Hvis vi har at A og B er på samme side av l og B og C er på samme side av l , da vil A og C være på samme side av l .
- ii) Hvis vi har at A og B er på motsatte sider av linjen l og punktene B og C er på motsatte sider av l , da vil A og C være på samme side av l .

Dette aksiomet gir indirekte at geometrien vår er to-dimensjonal. Hvis den ikke var det kunne linjen l være utenfor planet og skjære segmentet AC , men ikke skjære segmentet AB . Aksiomet er også nødvendig for å kunne gi mening til Euklids 5. postulat: „...hvis en rett linje (transversal) som faller på to rette linjer danner indre vinkler på samme side mindre enn to rette vinkler, vil de to rette linjene, hvis forlengt i det uendelige, møtes på den siden hvor de to vinklene er mindre enn to rette vinkler.” Det gjør bruk av to linjer som møtes på en side av en transversal. Vi definerer altså nå en „**side av en linje**” som mengden av alle punkter som er på samme side som et punkt A som ikke ligger på l . Dette kaller vi et **halv-plan begrenset av linja** l og skriver H_A .

Definisjon 2.2.6. For en gitt vinkel $\angle ABC$, defineres et punkt D til å være i det **indre** av vinkelen $\angle ABC$, dersom vi har at D og C er på samme side av \overleftarrow{AB} og D og A er på samme side av \overrightarrow{BC} . Vi sier at D i så fall er et **indre punkt** til vinkelen $\angle ABC$. Merk at vi fra definisjonen av vinkler har at \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{BC} ikke kan være motsatte stråler.

Figur 2.4: D ligger i det indre av $\angle ABC$.

Definisjon 2.2.7. Strålen \overrightarrow{BD} ligger mellom strålene \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{BC} dersom \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{BC} ikke er motstående og D er ett indre punkt til $\angle ABC$.

2.3 Kongruens-aksiomene

Kongruens betegner vi med \cong og den intuitive forståelsen av kongruens er at det handler en form for likhet. Ordet kongruens forklares gjerne i ordbøker som det som kan bringes til å dekke hverandre. Altså er to trekanter kongruente hvis de kan „flyttes” oppå hverandre slik at de dekker hverandre helt. Vi skal gi begrepet ytterlig mening gjennom seks aksiomer som knyttes til segmenter og vinkler. Også her er det naturlig å tilpasse aksiomene etter den intuitive forståelsen vi har av kongruens.

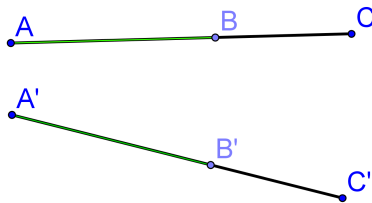
Aksiom 2.3.1. Hvis vi har to distinkte punkter P og Q og P' er et vilkårlig punkt, da vil det for hver stråle \vec{r} som springer ut fra P' finnes det et unikt punkt Q' slik at $Q' \neq P'$ og $PQ \cong P'Q'$.

Dette aksiomet sier intuitivt at vi alltid kan „flytte” et linjestykke. Hvis vi „flytter” P til P' slik at Q ligger på \vec{r} , da vil $Q' = Q$.

Aksiom 2.3.2. Hvis $AB \cong CD$ og $AB \cong EF$, da vil $CD \cong EF$. Vi har videre at $AB \cong AB$ for alle segmenter AB .

Dette aksiomet sier oss at kongruens mellom segmenter er en ekvivalensrelasjon etter som den både er en refleksiv ($AB \cong AB$), symmetrisk (Hvis $AB \cong CD$ og $AB \cong AB$, så er $CD \cong AB$) og transitiv egenskap (Hvis $AB \cong CD$ og $CD \cong EF$, så vil som en følge av de to første egenskapene $CD \cong AB$ slik at $EF \cong AB$ og $AB \cong EF$).

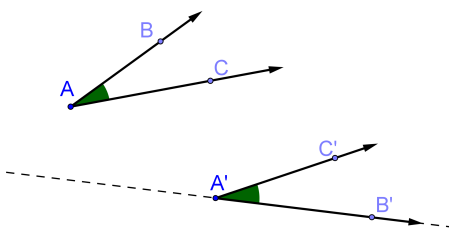
Aksiom 2.3.3. Hvis $A \star B \star C$, $A' \star B' \star C'$, $AB \cong A'B'$ og $BC \cong B'C'$, da vil $AC \cong A'C'$



Figur 2.5: Linjestykkene AC og $A'C'$ er kongruente.

Definisjon 2.3.4. Med $AB < CD$ (eller $CD > AB$) mener vi at det eksisterer et punkt E mellom C og D slik at $AB \cong CE$. Vi sier at segmentet AB er **mindre enn** CD , eller at segmentet CD er **større enn** AB .

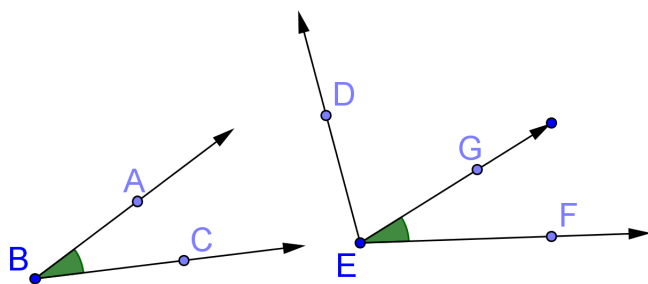
Aksiom 2.3.5. Gitt en vilkårlig vinkel $\angle BAC$ og en vilkårlig stråle $\overrightarrow{A'B'}$. Da finnes den en unik stråle $\overrightarrow{A'C'}$ på en gitt side av linja $\overleftrightarrow{A'B'}$ som er slik at $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$.



Figur 2.6: De to vinklene $\angle BAC$ og $\angle B'A'C'$ er kongruente.

Vi forstår da at vi kan „konstruere” en gitt vinkel med gitt topp-punkt på linjen på en gitt side av linja på en unik måte.

Definisjon 2.3.6. Med $\angle ABC < \angle DEF$ mener vi at det finnes en stråle \overrightarrow{EG} mellom \overrightarrow{ED} og \overrightarrow{EF} slik at $\angle ABC \cong \angle GEF$. Vi sier at vinkelen $\angle ABC$ er **mindre enn** $\angle DEF$, eller at vinkelen $\angle DEF$ er **større enn** $\angle ABC$.



Figur 2.7: De to vinklene $\angle BAC$ og $\angle B'A'C'$ er kongruente.

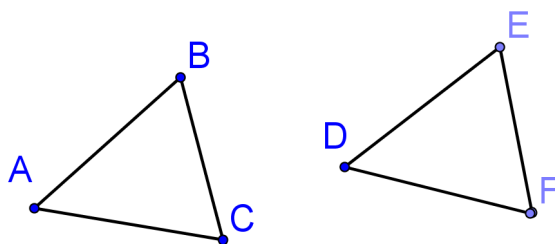
Aksiom 2.3.7. Hvis $\angle A \cong \angle B$, og $\angle A \cong \angle C$, da vil $\angle B \cong \angle C$. Vi har videre at enhver vinkel er kongruent med seg selv.

Dette fører til at kongruens av vinkler også er en ekvivalensrelasjon på samme måte som for segmenter. Vi kan altså si at to vinkler $\angle A$ og $\angle B$ hører til samme ekvivalensklasse dersom $\angle A \cong \angle B$. Merk også at relasjonen er symmetrisk det vil si $\angle A \cong \angle B \Rightarrow \angle B \cong \angle A$ ($\angle A \cong \angle B$ og $\angle A \cong \angle A$ gir som en følge av aksiom 2.3.7, $\angle B \cong \angle A$).

Vi har til nå „konstruert” en relasjon (kongruens) som virker på både segmenter og vinkler, men uten at disse har noen sammenheng. For segmenter „konstruerte” vi også en addisjons-relasjon. Det kunne derfor virke naturlig å „konstruere” et slikt aksiom for vinkler også. Men addisjons-egenskapen for vinkler kan vises å følge av det neste aksiomet (aksiom 2.3.9).

Definisjon 2.3.8. To trekanter er kongruente, dersom vi har en 1-1 korrespondanse mellom hjørnene, som er slik at korresponderende sider er kongruente og korresponderende vinkler er kongruente. Vi skriver $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ dersom trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er kongruente.

Aksiom 2.3.9 (SAS (Side-Angle-Side) kriteriet). Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er slik at $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ og $\angle BAC \cong \angle EDF$, så er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



Figur 2.8: De to trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er kongruente.

SAS eller side-vinkel-side kriteriet knytter sammen kongruensrelasjonen for segmenter og vinkler. Aksiomet gir oss muligheten til å utlede alle de elementære resultatene vi kjenner fra skolematematikken.

Euklid forsøkte å bevise SAS-kriteriet som et teorem. Han argumenterte med en „forflytting” av trekantene (uten å forandre deres størrelse eller form) slik at de i sin helhet lå oppå hverandre. Altså det vi la til grunn som den intuitive forståelsen av kongruens. En slik forflytting kan ikke tas som gitt. Den blir derfor postulert gjennom SAS-kriteriet.

2.4 Kontinuitets-aksiomet

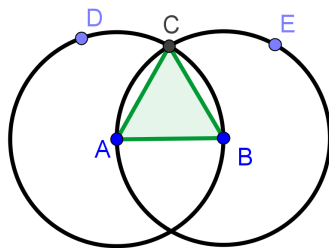
Kontinuitets-aksiomet er kanskje det mest subtile og vanskeligste aksiomene å forstå. Det fyller likevel et viktig „hull” i Euklids „Elementene”. Euklids bevis for Proposisjon I i „Elementene” er et godt eksempel på dette „hullet”.²

Proposisjon. *[At man på] På en gitt endelig rett linje³ [kan man klare] å konstruere en likesidet trekant.*

Euklids bevis:

²Ordene i klammer er lagt til for å gi Euklids heller „ullene” språk klarer betydning.

³Endelig rett linje er det vi kaller segment.

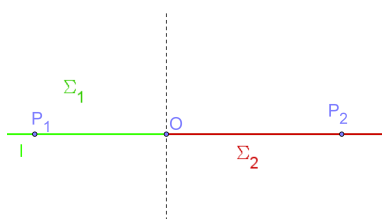
Figur 2.9: $\triangle ABC$ er en likesidet trekant

La AB være det gitte segmentet („endelig rett linje”). Vi kan dermed konstruere en sirkel (BCD) med sentrum i A og radius AB (Postulat III), og på tilsvarende måte kan vi konstruere en sirkel (ACE) med sentrum i B og radius BA . La C være et av de punkter der sirklene skjærer hverandre, og tegn segmentene CA og CB (Postulat I). Vi har da at $AC \cong AB$, siden A er sentrum i sirkelen (CDB). Vi har også at $BA \cong BC$ siden B er sentrum i sirkelen (BCE). Vi vil få at $CA \cong BC$ siden $CA \cong AB$ og $BC \cong AB$. Dermed vil $\triangle ABC$ være en likesidet trekant med AB som en av sidene. Hvilket er hva som ble krevet å vise.

Hvert steg i Euklids bevis synes å være rettferdiggjort, så det kan være vanskelig å se hvor „hullet” er. Men Euklid sier at sirklene skjærer hverandre i et punkt C . Hvordan vet vi egentlig at C eksisterer? Ut i fra figuren er det soleklart, men vi kan ikke bevise noe på grunnlag av figurer. Faktisk finnes det eksempler på modeller hvor de to sirklene ikke skjærer hverandre samtidig som alle av Euklids postulater er oppfylt (se s. 63 i [Ven2006]). Han trenger med andre ord et aksiom som beviser at sirklene skjærer hverandre i minst et punkt.

Blant annet slike betraktninger gjorde at man så behovet for også en ny kategori aksiomer og gjennom tiden har det også her vært mange forskjellige løsninger. Disse kan man lese mer om i f.eks [Gre1994] s. 93 - 101. Vi skal imidlertid hoppe rett til Dedekinds aksiom som oppsummerer hele „kontinuitets-problemet” til Euklid i et aksiom.

Aksiom 2.4.1 (Dedekinds aksiom). *La det være gitt en linje l . Anta at mengden av alle punkter på linja l er en disjunkt union $\sum_1 \cup \sum_2$ av to ikke-tomme delmengder \sum_1 og \sum_2 slik at intet punkt i \sum_1 er mellom to punkter i \sum_2 og at intet punkt i \sum_2 er mellom to punkter i \sum_1 . Da vil det eksistere et unikt punkt O på l , som er slik at $P_1 \star O \star P_2$ hvis og bare hvis et av punktene P_1 eller P_2 er i \sum_1 , og den andre er i \sum_2 , og $O \neq P_1$ og $O \neq P_2$.*

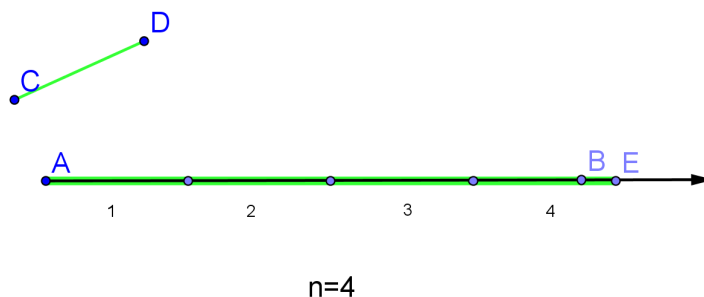


Figur 2.10: Dedekinds delmengder.

Et slikt par av delmengder Σ_1 og Σ_2 kalles Dedekind-snitt.

Det er ikke intuitivt at dette løser „kontinuitets-problemet” vi diskuterte tidligere og Dedekinds aksiom er heller ikke det som presenteres i Hilberts opprinnelige aksiomsystem. Her finner vi i imidlertid de to aksiomene:

Aksiom (Arkimedes' aksiom). *Hvis CD er et vilkårlig segment, A er et punkt, og \vec{r} er en stråle som springer ut fra A , da vil det for et hvert punkt $B \neq A$ på \vec{r} finnes et antall n slik at når CD legges etter hverandre n ganger oppå \vec{r} med start i A vil man nå et punkt E slik at $n \cdot CD \cong AE$, og enten $B = E$ eller $A \star B \star E$.*

Figur 2.11: Gitt $C \neq D$, så kan ethvert annet segment (AB) dekket av et endelig antall kongruente kopier av CD .

Aksiom (Det sirkulære kontinuitets-prinsippet). *Hvis en sirkel γ har et punkt innenfor og et punkt utenfor sirkelen γ' da møtes de to sirklene i to punkter.*

Her er et punkt P definert på **innsiden** av en sirkel med sentrum i O og radius OR hvis $OP < OR$, og på **utsiden** dersom $OP > OR$. Det sirkulære kontinuitets-prinsippet og Arkimedes aksiom kan begge utledes fra Dedekinds aksiom.⁴⁵

⁴På side 95 i [Gre1994] finnes et skisse av et bevis for at Dedekinds aksiom medfører Arkimedes aksiom.

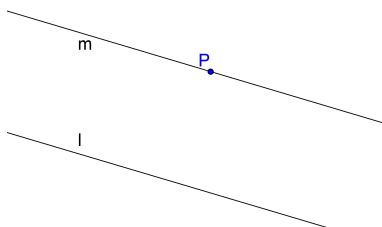
⁵Man finner et bevis for at det sirkulære kontinuitets-prinsippet følger av Dedekinds aksiom på side 238 i [Hea1956]

Teoremer som kan utledes fra de aksiomene vi har gitt til nå, er teoremer i nøytral geometri. Nøytral geometri fordi det foreløpig er et aksiomsystem som er nøytral med tanke på parallellpostulat. De danner med andre ord grunnlaget for både euklidsk og hyperbolsk geometri. For å komplettere det aksiomatiske systemet trenger vi imidlertid et parallellpostulat.

2.5 Parallellitets aksiomene

Ut i fra Hilberts aksiomer for nøytral geometri kan man få både hyperbolsk geometri og euklidsk geometri, ved å legge til et parallell-aksiom. Vi bruker her aksiomer som ligner Playfairs aksiom som tidligere er nevnt. Merk at selv om vi kaller parallellpostulatet for euklidsk geometri for det euklidske parallellpostulatet, så er dette ikke det samme som Euklids parallellpostulat eller Euklids 5. postulat. I så måte burde vi kanskje kalle det Hilberts parallellpostulat?

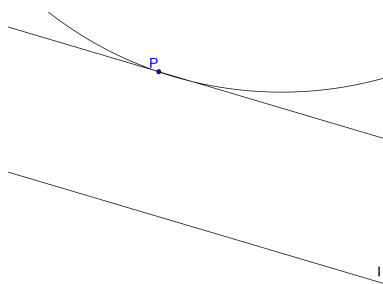
Aksiom 2.5.1 (Det euklidske parallellpostulatet). *For enhver linje l og et punkt P som ikke ligger på l , så finnes det nøyaktig en linje gjennom P som er parallell med l .*



Figur 2.12: Det euklidske parallellpostulatet

Omkring hyperbolsk geometri skal vi gå noe mer forsiktig til verks.

Aksiom 2.5.2 (Det hyperbolske parallellpostulatet). *Det finnes en linje l og et punkt P som ikke ligger på denne linjen, slik at det finnes minst to (distinkte) linjer gjennom P som begge er parallelle med l .*



Figur 2.13: Det hyperbolske parallellpostulatet.

Merk her at vi begrenser oss til å hevde at det finnes en linje og et punkt som ikke ligger på P hvor det finnes flere parallelle linjer. Vi skal senere vise at dette medfører at vi kan slutte det samme om enhver linje.

2.6 Hilberts aksiomer vs. Euklids postulater.

De aksiomene vi har gitt i de fire første seksjonene av dette kapittelet er en nøyaktig presentasjon av et aksiomatisk system for nøytral geometri. Hvis man i tillegg inkluderer det euklidske eller det hyperbolske parallellpostulatet får man et komplett aksiomatisk system for henholdsvis euklidsk eller hyperbolsk geometri. Med dette rydder Hilbert opp i de problemområdene vi har diskutert i forhold til Euklids postulater. Vi skal i neste kapittel se at vi kan bygge opp geometrien på en mer intuitiv måte som lar oss gå litt mer rett på sak. Likevel er det viktig å merke seg at aksiomene fra et aksiomsett kan bevises som følger fra den andre. La oss først derfor ta for oss Euklids postulater kontra Hilberts aksiomer.

Teorem (1. metamatematiske teorem). *Euklids fire første postulater følger av Hilberts aksiomer for nøytral geometri.*

Bevis. Vi har gitt Hilberts aksiomer for nøytral geometri og vil vise at Euklids 4 postulater dermed kan bevises.

Bevis for Euklids 1. postulat: *For hvert par av distinkte punkter P og Q finnes der eksakt én linje l som går gjennom både P og Q .*

Dette er analogt med Hilberts 1. insidens-aksiom (aksiom 2.1.1)

Bevis for Euklids 2. postulat: *For hvert segment AB og hvert segment CD finnes det et entydig bestemt punkt E , slik at B ligger mellom A og E , og segment CD er kongruent med BE .*

Her tar Euklid mellomliggenhet for gitt. Det er en av svakhetene ved Euklids aksiomatisk system. Sett bort fra dette følger Euklids 2. postulat direkte fra Hilberts 1. kongruensaksiom. Gitt to segmenter AB og CD . La \vec{r} være den motsatte strålen til \overrightarrow{BA} som altså

springer ut fra B . Det finnes da som en følge av aksiom 2.3.1 et punkt E på \vec{r} som er slik at $A \star B \star E$ og $CD \cong BE$.

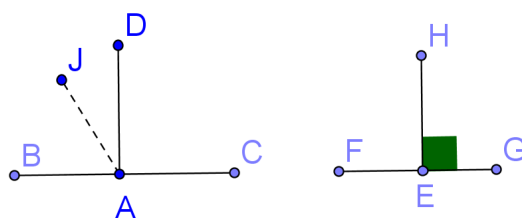
Bevis for Euklids 3. postulat: *For hvert par av distinkte punkter O og A finnes der en sirkel γ med O som sentrum og radius OA .*

Dette postulatet blir overflødig i Hilberts oppbygging. Oppbygning til Hilbert legger elementær mengdelære til grunn og da er det klart at mengden $\{R \in \mathbb{P} \mid OR = OP\}$ er en veldefinert, ikke-tom mengde. Hilbert definerer dermed sirkelen (definisjon 1.2.4) med sentrum O og radius OA til å være mengden av alle punkter P , som er slik at $OP \cong OA$.

Bevis for Euklids 4. postulat: *Alle rette vinkler er kongruente.* (s. 92 i [Gre1994])
La $\angle BAD \cong \angle CAD$ og $\angle FEH \cong \angle GEH$ slik at vi fra definisjon 1.2.11 har med 4 rette vinkler å gjøre. Anta at $\angle BAD \not\cong \angle FEH$ (RAA). Da vil den ene vinkelen være mindre enn den andre.⁶ Anta derfor uten tap at $\angle FEH < \angle BAD$. Da vil det finnes en stråle \vec{AJ} mellom \vec{AB} og \vec{AD} slik at $\angle BAJ \cong \angle FEH$ (definisjon 2.3.6). Etersom supplement-vinklene til kongruente vinkler er kongruente⁷ vil $\angle CAJ \cong \angle GEH$ og vi får: $\angle CAJ \cong \angle GEH \cong \angle FEH$ (aksiom 2.3.7). Vi får dermed (aksiom 2.3.7) at

$$\begin{aligned} \angle CAJ \cong \angle FEH &< \angle BAD \cong \angle CAD \\ \angle CAJ &< \angle CAD \end{aligned}$$

Dermed må \vec{AJ} ligge mellom \vec{AD} og \vec{AC} , men dette er i strid med at \vec{AJ} ligge mellom \vec{AD} og \vec{AB} . Altså må $\angle BAD \cong \angle FEH$.



Figur 2.14: „Alle rette vinkler er kongruente.”

□

⁶Dette bør egentlig utledes, se proposisjon 3.21(a) s. 92 i [Gre1994].

⁷Bør i utgangspunktet utledes, se proposisjon 3.14 s. 88 i [Gre1994]

Kapittel 3

Et moderne aksiomsystem

I den moderne matematikken er vi vant med å knytte reelle tall (lengde) til det abstrakte begrepet linjesegment. Den amerikanske matematikeren George David Birkhoff (1884 - 1944)



Figur 3.1: George David Birkhoff (1884 -1944)

tok utgangspunkt i et nytt aksiomatisk system som knyttet kongruens av vinkler og linjesegmenter til den reelle tall-linjen. Dermed gjorde han bruk av de egenskapene vi kjenner for reelle tall og Birkhoff trengte da bare seks aksiomer i motsetning til Hilberts fjorten¹ aksiomer. Hans tilnærming skal vi se har en rekke fordeler. Denne oppbyggingen er logisk ekvivalent med Hilberts aksiomer, det vil si det kan vises at alle av Hilberts aksiomer følger av Birkhoffs og omvendt (2. metamatematiske teorem).

¹I utgangspunktet 16 aksiomer, når Hilberts „Grundlagen de Geometrie” ble gitt ut.

Birkhoff hevdet at dette aksiomsystemet var mer anvendelig for studenter som skulle lære geometri. Den benyttet kunnskap som elevene kjente og bidro dermed til at elevene umiddelbart kunne fatte en rekke begreper. Det er viktig å understreke at ettersom de to aksiomsystemene er logisk ekvivalente kan man også ved bruk av Hilberts aksiomer innføre en sammenheng mellom de reelle tallene og lengde i det euklidske og hyperbolske plan. Dette teoremet har vi utelatt her². Nyere studier av Euklidsk geometri av blant annet Robin Hartshorne [Har2000] viser at aksiomer for euklidsk geometri virkelig ikke behøver egenskapene til den reelle tall-linjen, snarere inneholder Hilberts aksiomer alle byggestenene til det reelle tallsystemet!

Aksiomsystemet vi skal presentere er altså basert på det aksiomsystemet George Birkhoff introduserte 1920-tallet. Det ble publiserte i artikkelen "A set of postulates for plane geometry (based on scale and protractor)" i *Annals of Mathematics* 33. utgave i 1932 (s. 239-245). Senere skrev Birkhoff, sammen med Ralph Beatley, læreboken „Basic Geometry” [Bir1940], som var rettet mot elever i den amerikanske „high school”, altså ungdommer i 16. til 18. år. Til denne læreboken følger også en inngående manual for lærere hvor Birkhoff og Beatley forklarer idéene bak Birkhoffs aksiomsystem.

Han bruker egenskapene distanse, vinkelmål og areal som tre av sine aksiomer. Denne innfallsvinkel er vanlig i moderne matematikk; for eksempel er konseptet metrisk rom fundamentalt i moderne geometri. Et metrisk rom er en mengde punkter med en distanse-funksjon som oppfyller distanse-aksiomet. I de eldre aksiomatiske systemene er, som vi har sett, distanse, vinkelmål og areal ikke nevnt. I stedet bruker man konseptet kongruens av segmenter, vinkler og polygoner. Denne tradisjonelle innfallsvinkelen kan vi si var arvet fra antikkens Hellas og da spesielt Euklid. Birkhoffs aksiomer gjør det mulig å behandle for eksempel mellomliggenhet direkte gjennom egenskapene til den reelle tall-linjen. Er punktet B mellom punktene A og C på en rett linje så har vi at de reelle tallene $|AB| < |AC|$.

Tidlig på 1960-tallet ble Birkhoffs aksiomer igjen noe modifisert av for å tilpasses nye standarder i amerikanske læreplaner. Ytterligere forenklinger og forandringer har blitt gjort på Birkhoffs aksiomer slik de er presentert her. Fordelen med et slikt system er at det kan forstås av alle som kjenner til egenskapene til de reelle tallene. Dette aksiomsystemet bør altså være egnet for videregående elever i den norske skole selvom de har liten erfaring med abstrakt matematikk.

Vi følger Gerard A. Venema sin bok „Foundations of Geometry” [Ven2006] i oppstillingen av Birkhoffs aksiomer. Vi skal bruke den samme notasjonen og de definisjoner som vi introduserte i forbindelse med andre aksiomatiske system (kapittel 2 og seksjon 1.2.1).

²Teorem 4.3 s.122 i[Gre1994]

3.1 Birkhoffs aksiomer

Aksiom 3.1.1 (Eksistens-postulatet). *Samlingen av alle punkt danner en ikke-tom mengde. Det finnes mer enn et punkt.*

Dette aksiomet sørger for at vi har med en ikke-tom mengde å gjøre. Det er nødvendig for å gi de andre aksiomene mening. Også Hilbert gjør noe liknende når han med aksiom 2.1.3 sier at det eksisterer tre ulike punkt som ikke ligger på samme linje. Samtidig sørger han for at geometrien ikke kan være endelig ved hjelp av det første mellomliggenhetsaksiomet (aksiom 2.2.1). Mengden av alle punktene kalles planet. I nøytral plangeometri betegner vi denne med \mathbb{P} . Er det det euklidske planet det er snakk om betegner vi det med \mathbb{E} og dersom vi har med det hyperbolske planet å gjøre betegner vi det med \mathbb{H} .

Aksiom 3.1.2 (Insidens-aksiomet). *Hver linje er en mengde punkter. For hvert par av distinkte punkter A og B finnes det nøyaktig en linje l slik at $A \in l$ og $B \in l$. Denne linjen betegner vi unikt med \overleftrightarrow{AB} .*

Dette ovenstående aksiomet er analogt med Hilberts aksiom 2.1.1. Birkhoff innfører så en direkte link mellom linjesegmenter og den reelle tall-linjen. Dette kaller han avstand.

Definisjon 3.1.3. En **bijeksjon** en funksjon $f : X \rightarrow Y$ som er i en en-til-en-korrespondanse mellom elementene i X og elementene i Y . Det vil si at den må tilfredsstille de to betingelsene:

- i) Hvis x og y er elementer i X og $x \neq y$, så er $f(x) \neq f(y)$. (f er injektiv.)
- ii) For ethvert element $y \in Y$, finnes det en $x \in X$ slik at $f(x) = y$. (f er surjektiv.)

En funksjon er bijektiv hvis og bare hvis den er både injektiv og surjektiv.

Aksiom 3.1.4 („Linjal-postulatet”). *For hvert par av punkter P og Q eksisterer det et reelt tall $|PQ|$, som kalles avstanden fra P til Q . For hver linje l er det en bijeksjon $f : l \rightarrow \mathbb{R}$ slik at hvis P og Q er punkter på l som korresponderer med de reelle tallene henholdsvis $f(P)$ og $f(Q)$, så er $|PQ| = |f(P) - f(Q)|$. Bijeksjonen $f : l \rightarrow \mathbb{R}$ kalles en koordinat-funksjon for linjen l og det reelle tallet $f(P)$ kalles koordinaten til P .*

Distanse-funksjonen f knytter (plan)geometrien til hele det reelle planet \mathbb{R}^2 . Dermed kan Birkhoff innføre en enkel definisjon som løser opp i „problemområdet” mellomliggenhet som vi diskuterte i forbindelse med Hilberts aksiomer.³

³[Ven2006] er noe klønete her. Venema definerer en lignende koordinat funksjon på s. 61, men kunne på en naturlig måte tatt definisjonen allerede i forbindelse med „linjal-postulater”. Dermed kunne han definert mellomliggenhet på samme måte som her.

Definisjon 3.1.5. Hvis A , B , og C være tre distinkte og kolineære punkter sier vi at punktet B **ligger mellom** A og C der det for en koordinat-funksjon $f : \overleftrightarrow{AB} \rightarrow \mathbb{R}$ er slik at $f(B)$ ligger mellom $f(A)$ og $f(C)$ på tall-linjen. I så fall skriver vi $A \star B \star C$.

Vi skal se at det dermed følger naturlig at $A \star B \star C$ medfører at $|AB| + |BC| = |AC|$ og omvendt.

Definisjon 3.1.6. Lengden til segmentet AB er det reelle tallet $|AB|$, altså distansen fra A til B . To segmenter AB og CD kalles kongruente (med samme betydning som før) dersom de har samme lengde.

Teorem 3.1.7. Hvis P og Q er to vilkårlige punkter så gjelder;

- i) $|PQ| = |QP|$
- ii) $|PQ| \geq 0$
- iii) $|PQ| = 0$ hvis og bare hvis $P = Q$

Bevis. (s. 59 i [Ven2006]) La P og Q være to punkter. Først vil vi vise at det finnes en linje l slik at både P og Q ligger på denne. Enten er $P = Q$ eller $P \neq Q$. Hvis $P \neq Q$, så eksisterer det fra aksiom 3.1.2 eksakt en linje $l = \overleftrightarrow{PQ}$ slik at P og Q ligger på l . Hvis $P = Q$ må det finnes et annet punkt $R \neq P$ (aksiom 3.1.1). Vi kan da la l være den unike linjen \overleftrightarrow{PQ} gjennom $P = Q$ og R (aksiom 3.1.2). I begge tilfellene finnes det altså en linje gjennom både P og Q .

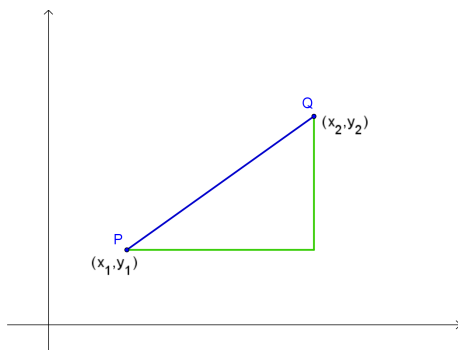
Det eksisterer en bijeksjon fra l til \mathbb{R} med de gitte egenskaper (aksiom 3.1.4). Spesielt korresponderer P og Q respektivt med de reelle tallene $f(P)$ og $f(Q)$, med $|PQ| = |f(P) - f(Q)|$ og $|QP| = |f(Q) - f(P)|$ (aksiom 3.1.4). Men vi vet fra algebra på reelle tall at $|x - y| = |y - x|$, så dermed har vi i) at $|PQ| = |QP|$. Vi vet også at $|x - y| \geq 0$ så vi har at $|PQ| \geq 0$ (ii).

Det gjenstår å vise at $|PQ| = 0 \Leftrightarrow P = Q$. Anta at $|PQ| = 0$ (\Rightarrow). Da er $|f(P) - f(Q)| = 0$ så vi vet fra algebra at $f(P) = f(Q)$. Derfor må $P = Q$ ettersom f er en bijeksjon. Anta så at $P = Q$ (\Leftarrow). Da har vi at $f(P) = f(Q)$ (f er en bijeksjon) så $|PQ| = |f(P) - f(Q)| = 0$, hvilket var ønsket. \square

Det følger at $A \star B \star C \Leftrightarrow C \star B \star A$. (se Korollar 5.4.7 s. 59 i [Ven2006]).

En vilkårlig bijeksjon kan brukes til å måle avstand. En slik funksjon kalles en metrikk. Metrikker er nærmere studert i seksjon 6.1. Definisjonen som gis av metrikk der har med trekant-ulikheten, denne kan droppes ved å bemerke at $d(P, Q) \geq 0$ for alle P og Q . Den „vanligste” metrikk når vi har med det euklidske planet å gjøre er den euklidske metrikk. Den definerer avstanden mellom to punkter gitt kartesiske koordinater, $P = (x_1, y_1)$ og

$Q = (x_2, y_2)$, ved funksjonen $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Det finnes imidlertid en rekke andre metrikker som kan brukes. Til eksempel kan vi nevne „taxi-cab”-metrikken som for de samme punktene P og Q gir avstanden $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. De to avstands-funksjonene er avbildet i figur 3.2.



Figur 3.2: Avstanden $|PQ|$ med euklidisk metrikk i blått og „taxi-cab” metrikk i grønt.

Det er da mulig å konstruere en koordinat-funksjoner assosiert til enhver metrikk. For den euklidiske metrikken vil for eksempel enhver linje som i det kartesiske planet ikke er vertikal kunne uttrykkes ved $y = ax + b$. Da defineres $f : l \rightarrow \mathbb{R}$ med $f(x, y) = x\sqrt{1 + a^2}$. Hvis l er vertikal kan den uttrykkes med $x = c$ og definerer $f(c, y) = y$. x og y er her koordinatene.

Teorem 3.1.8 (Linjalplasserings-teoremet). *Dersom $f : l \rightarrow \mathbb{R}$ er en vilkårlig koordinat-funksjon for linjen l så vil enhver annen koordinat-funksjon $g : l \rightarrow \mathbb{R}$ på formen $g = f + k$ eller $g = -f + k$, der k er en vilkårlig reell konstant, også være en koordinatfunksjon for l .*

Bevis. Det er gitt at f er en koordinat-funksjon for l . Fra definisjonen av koordinat-funksjoner vet vi at f er en bijeksjon og at for alle $P, Q \in l$ har vi $|f(P) - f(Q)| = |PQ|$. Vi vil først vise at $g = f + k$ er en koordinat-funksjon når f er en koordinat-funksjon og k er et vilkårlig gitt reelt tall. Dette skal vi vise i tre steg: i) at $-f$ er injektiv, ii) $-f$ er surjektiv⁴ og tilslutt iii) at $-f$ er slik at $| -f(P) - (-f(Q)) | = |PQ|$. i) Anta at $g(P) = g(Q)$, det vil si at $f(P) + c = f(Q) + c$ som gir oss at $f(P) = f(Q)$. Etersom f er injektiv er $P = Q$. ii) La $x \in \mathbb{R}$ være et vilkårlig valgt tall. Etersom f er surjektiv finnes det et punkt $P \in l$ slik at $f(P) = x - k$. Dette medfører at $g(P) = f(P) + k = x - k + k = x$, altså er g surjektiv. Vi har nå vist at g er bijektiv. iii) $|g(P) - g(Q)| = |(f(P) + k) - (f(Q) + k)| = |f(P) - f(Q)| = |PQ|$ ettersom f pr. antagelse er en koordinat-funksjon.

⁴i) og ii) gir at f er bijektiv

Vi skal så vise at også $g = -f + k$ er en koordinat-funksjon. Vi bruker de samme tre stegene. i) Vi antar at $g(P) = g(Q)$. Da er $-f(P) + k = -f(Q) + k$, og vi får $-f(P) = -f(Q)$. Da er $f(P) = f(Q)$ og ettersom f er injektiv så må $P = Q$. Altså er g injektiv. ii) Gitt et vilkårlig reelt tall x . Siden f er surjektiv finnes det et punkt $P \in l$ slik at $f(P) = -x + k$. Da vil $g(P) = -(-x + k) + k = x$, altså er x et billedpunkt ved g og g er derfor surjektiv. iii) $|g(P) - g(Q)| = |(-f(P) + k) - (-f(Q) + k)| = |f(Q) - f(P)| = |f(P) - f(Q)| = |PQ|$ ettersom f pr. antagelse er en koordinat-funksjon. \square

Korollar 3.1.9. *For hvert par av punkter P og Q finnes det en koordinatfunksjon $f : \overleftrightarrow{PQ} \rightarrow \mathbb{R}$ slik at $f(P) = 0$ og $f(Q) > 0$.*

Bevis. La $g : \overleftrightarrow{PQ} \rightarrow \mathbb{R}$ være koordinatfunksjon vi vet eksisterer fra linjal-postulatet (aksiom 3.1.4). Dersom $g(P) = 0$ la $h(P) = f(P)$, og dersom $g(P) \neq 0$ la $h(P) = g(P) - k$, der $k = g(P)$ (Linjalplasserings-teoremet). Da er $h(P) = 0$. Dersom $h(Q) > 0$ la $f = h$, og dersom $h(Q) < 0$ la $f = -h$ (Linjalplasserings-teoremet). Da er $f : \overleftrightarrow{PQ} \rightarrow \mathbb{R}$ er koordinatfunksjon slik at $f(P) = 0$ og $f(Q) > 0$. \square

Ingen koordinat-funksjon er unik, og de kartesiske koordinat-funksjonene over skal bare tjene som eksempler. Vi skal senere se at for ulike modeller for hyperbolsk geometri skal vi knytte helt andre koordinat-funksjoner til linjer.

Definisjon 3.1.10. En mengde er en **konveks mengde** hvis og bare hvis for alle par av punkter P og Q i mengden, så er alle punkter mellom P og Q i mengden.

Aksiom 3.1.11 (Halv-plan postulatet). *For enhver linje m vil punktene som ikke ligger på m utgjøre to disjunkte, ikke-tomme mengder H_1 og H_2 , som kalles halv-plan begrenset av m , slik at følgende egenskapene er tilfredsstillt:*

- i) H_1 og H_2 er konvekse mengder.
- ii) Hvis $P_1 \in H_1$ og $P_2 \in H_2$, så vil linjesegmentet P_1P_2 skjære m .

På samme måte som Birkhoff innførte lengde av segmenter innfører han så vinkelmål.

Aksiom 3.1.12 (Gradskive postulatet). *For hver vinkel $\angle BAC$ eksisterer det et reelt tall $\mu(\angle BAC)$, som kalles vinkelmålet av $\angle BAC$, slik at det følgende er oppfylt:*

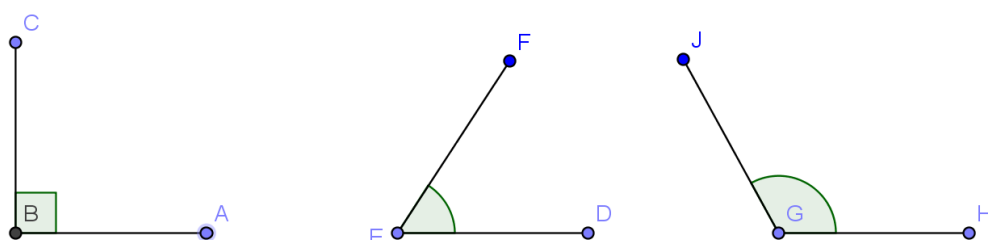
- i) $0^\circ \leq \mu(\angle BAC) < 180^\circ$ for hver vinkel $\angle BAC$.
- ii) $\mu(\angle BAC) = 0^\circ$ hvis og bare hvis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
- iii) For hvert reelt tall r , $0 < r < 180$, og for hvert halv-plan H begrenset av \overleftrightarrow{AB} finnes det en unik stråle \overrightarrow{AE} slik at E er i H og $\mu(\angle BAE) = r^\circ$.
- iv) Hvis en stråle \overrightarrow{AD} er mellom strålene \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AC} , så er $\mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC) = \mu(\angle BAC)$.

v) Hvis $\angle BAD$ er supplementvinkelen til $\angle DAC$ så er $\mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC) = 180^\circ$

Vi skal nedenfor definere kongruens mellom vinkler på tilsvarende måte som kongruens av segmenter.

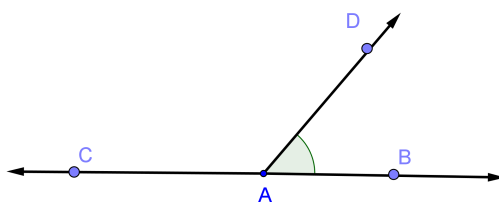
Definisjon 3.1.13. To vinkler kalles kongruente ($\angle ABC \cong \angle DEF$), dersom $\mu(\angle ABC) = \mu(\angle DEF)$.

Definisjon 3.1.14. Vinkelen $\angle ABC$ er en **rett vinkel** hvis $\mu(\angle ABC) = 90^\circ$, $\angle DEF$ er en **spiss vinkel** hvis $\mu(\angle DEF) < 90^\circ$, og $\angle GHJ$ er **stump vinkel** dersom $\mu(\angle GHJ) > 90^\circ$.



Figur 3.3: $\angle ABC$ er rett, $\angle DEF$ er spiss og $\angle GHJ$ er stump

Vi har ikke fulgt [Ven2006] helt her. Der er ikke egenskapen v) *Hvis $\angle BAD$ er supplementvinkelen til $\angle DAC$ så er $\mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC) = 180^\circ$* med. Dette kan i faktisk bevises (s. 79 i [Ven2006]) på grunnlag av de andre egenskapene og de foregående aksiomene, men krever at vi definerer supplementvinkler på en annen måte enn her (definisjon 1.2.9). I så måte er dette er overflødig postulat, men vi har beholdt postulatet noe som er i tråd med slik Birkhoff selv satte opp postulatet (se s. 404, appendiks B i [Ven2006]).



Figur 3.4: $\angle BAD$ og $\angle CAD$ er supplementvinkler, og $\mu(\angle BAD) + \mu(\angle CAD) = 180^\circ$

La oss videre se på noen teoremer som følger av denne versjonen av Birkhoffs aksiomer.

Vi starter med å se på teoremer for mellomliggenhet, et emne som var gjenstand for grundig undersøkelse også for Hilberts aksiomer på side 26.

Teorem 3.1.15. *La l være en linje og A, B, C være tre distinkte punkter på l . La videre $f : l \rightarrow \mathbb{R}$ være en koordinat-funksjon for l . Punktet B ligger mellom A og C hvis og bare hvis enten $f(A) < f(B) < f(C)$ eller $f(C) < f(B) < f(A)$.*

Bevis. (\Rightarrow) Anta først at $A \star B \star C$. Da har vi

$$|f(A) - f(B)| + |f(B) - f(C)| = |f(A) - f(C)| \quad (3.1)$$

ut fra definisjonen av koordinat-funksjoner (def. i teorem 3.1.4) Men trekant-ulikheten på de reelle tallene sier at $|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$ bare dersom α og β har samme fortegn. Ettersom (3.1) er en likhet mellom reelle tall må vi altså ha: Enten

$$f(A) - f(B) > 0 \quad \text{og} \quad f(B) - f(C) > 0$$

som er ekvivalent med $f(A) > f(B) > f(C) > 0$, eller

$$f(A) - f(B) < 0 \quad \text{og} \quad f(B) - f(C) < 0$$

som er ekvivalent med $f(A) < f(B) < f(C)$.

(\Leftarrow) Anta så at tallet $f(B)$ ligger mellom $f(A)$ og $f(C)$ på \mathbb{R} . Dersom $f(A) > f(B) > f(C)$, har vi

$$\begin{aligned} |AB| + |BC| &= |f(A) - f(B)| + |f(B) - f(C)| \\ &= f(A) - f(B) + f(B) - f(C) \\ &= f(A) - f(C) = |f(A) - f(C)| = |AC|. \end{aligned}$$

Tilfellet der $f(A) < f(B) < f(C)$ er helt analogt. □

Ettersom $f(P), f(Q)$ og $f(R)$ er distinkte punkter på \mathbb{R} og vi vet at eksakt et av disse tallene ligger mellom de to øvrige (i vanlig forstand) følger det at vi har $P \star Q \star R$, $Q \star P \star R$ eller $Q \star R \star P$. Altså vil det si at for tre distinkte kolineære punkter P, Q og R så er eksakt en av disse mellom de andre.

Vi behøver et siste aksiom før vi har et aksiomsett for nøytral geometri, dette aksiomet var også en av Hilberts aksiomer.

Aksiom 3.1.16 (SAS-kriteriet). *Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er to trekanter slik at $AB \cong DE$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ og $BC \cong EF$, så er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Her benytter vi den samme tolkningen som vi gjorde for SAS-kriteriet når vi diskuterte Hilberts aksiomer

3.2 Birkhoffs aksiomer vs. Hilberts aksiomer

De aksiomer vi har gitt i kapittel 2 og i kapittel 3 er gir begge en nøyaktig presentasjon av et aksiomatisk system for nøytral geometri. Hvis man i tillegg inkluderer det euklidske eller det hyperbolske parallellpostulatet får man et komplett aksiomatisk system for henholdsvis euklidsk eller hyperbolsk geometri. De to måtene å bygge opp geometrien på er begge upåklagelige. Det gir med andre ord ingen mening å si at den ene oppbyggingen er mer korrekt enn den andre. Vi skal imidlertid se at Birkhoffs oppbygging er noe mer intuitiv og lar oss gå litt mer rett på sak. La oss derfor vise at på Birkhoffs aksiomer medfører Hilberts aksiomer.

Teorem (2. metamatematiske teorem). *Hilberts aksiomer for nøytral geometri følger av Birkhoffs aksiomer for nøytral geometri.*

Bevis. Vi har nå gitt Birkhoffs aksiomer for nøytral geometri, og skal vise at vi kan utlede alle Hilberts aksiomer for nøytral geometri.

Hilberts insidensaksiom 1 (aksiom 2.1.1) er inneholdt i Birkhoffs insidensaksiom (aksiom 3.1.2).

Hilberts insidensaksiom 2 (aksiom 2.1.2): Birkhoffs linjal-postulat (aksiom 3.1.4) knytter en hver linje til den reelle tallinjen, det forsikrer at det eksisterer overtellbart mange punkter (like mange som tall i \mathbb{R}) på en hver linje.

Hilberts insidensaksiom 3 (aksiom 2.1.3): Fra Birkhoffs eksistenspostulat (aksiom 3.1.1) har vi at det eksisterer minst to punkter P og Q . Insidensaksiomet (aksiom 3.1.2) forsikrer at det finnes en linje $l \in \overleftrightarrow{PQ}$. Fra Birkhoffs halv-plan-postulat (aksiom 3.1.11) vet vi at det finnes punkter utenfor l . Med andre ord minst 3 ikke-kolineære punkter i \mathbb{P} .

Hilberts mellomliggenhets-aksiom 1 (aksiom 2.2.1): Fra linjal-postulatet (aksiom 3.1.4) og definisjonen av mellomliggenhet (definisjon 3.1.5) følger det trivielt at $A \star B \star C \Rightarrow C \star B \star A$.

Hilberts mellomliggenhets-aksiom 2 (aksiom 2.2.2): Vi bruker også her linjal-postulatet (aksiom 3.1.4) og definisjonen av mellomliggenhet (definisjon 3.1.5). Siden vi har tall $x, y, z \in \mathbb{R}$ slik at $x < f(B)$, $f(B) < y < f(D)$ og $f(D) < z$ (dersom $f(B) < f(D)$) og samtidig vet at f er surjektiv følger det at det finnes punkter $A = f^{-1}(x)$, $C = f^{-1}(y)$ og $E = f^{-1}(z)$ slik at $A \star B \star D$, $B \star C \star D$ og $B \star D \star E$. Dersom $f(B) > f(D)$ er beviset helt analogt.

Hilberts mellomliggenhets-aksiom 3 (aksiom 2.2.3) følger (også) fra velkjent egenskap ved \mathbb{R} . Dersom $x = f(A)$, $y = f(B)$ og $z = f(C)$ så er et og bare et av tallene x , y og z mellom de to andre.

Hilberts mellomliggenhets-aksiom 4 (aksiom 2.2.5): La l være en linje og $A, B, C \notin l$.
 i) Gitt at A og B er på samme side av l og at B og C er på samme side av l . Fra halvplan-postulatet (aksiom 3.1.11) vet vi at det bare eksisterer to halv-plan som begrenses av l . Gitt at $A \in H_A$ så er $B \in H_A$ og derfor også $C \in H_A$. De tre punktene er altså i samme halv-plan og derfor på samme side av l .
 ii) Gitt at A og B er på motsatt side av l og at B og C er på motsatt side av l . A og B ligger i forskjellig halvplan H_A og H_B begrenset av l . Det eksisterer bare to halv-plan begrenset av l , så når $B \in H_B$ ($A \in H_A$) må $C \in H_A$. Altså er A og C i samme halvplan og derfor på samme side av l .

Hilberts kongruensaksiom 1 (aksiom 2.3.1): Fra linjalpostulatet (aksiom 3.1.4) vet vi at vi kan ordne et reelt tall til lengden av $|PQ| = |f(P) - f(Q)|$. Vi kan også for et vilkårlig punkt P' og en stråle \vec{r} som springer ut fra P' kan vi ordne et unikt punkt Q' slik at $|P'Q'| = |g(P') - g(Q')| = |f(P) - f(Q)| = |PQ|$. Da er $PQ \cong P'Q'$ fra definisjonen av lengde (definisjon 3.1.6). Merk det at vi begrenser oss til strålen \vec{r} gjør at vi bare finner et unikt punkt Q' . På en vilkårlig linje r gjennom P' finner vi to punkter Q' og Q'' slik at $|PQ| = |P'Q'| = |P'Q''|$.

Hilberts kongruensaksiom 2 (aksiom 2.3.2): Dette følger direkte av definisjonen av lengde og aksiom 3.1.4.

Hilberts kongruensaksiom 3 (aksiom 2.3.3): La A, B, C, A', B' og C' være slik som beskrevet i aksiomet. La videre $|AB| = a$ og $|BC| = b$ slik at $|A'B'| = a$ og $|B'C'| = b$. Ettersom $|AB| + |BC| = |AC| = a + b$ og at $|A'B'| + |B'C'| = |A'C'| = a + b$ har vi at $|AC| = |A'C'|$, altså er $AC \cong A'C'$.

Hilberts kongruensaksiom 4 (aksiom 2.3.5): Vi har gitt en vilkårlig vinkel $\angle BAC$ og en stråle $\vec{A'B'}$. Fra gradskiveaksiomet (aksiom 3.1.12) har vi at det eksisterer et reelt tall knyttet til $\angle BAC$. Fra iii) i samme aksiom har vi at vi for en gitt stråle (denne ligger allerede i et av halv-planene) finnes en annen stråle $\vec{A'C'}$ slik at aksiomet er oppfylt.

Hilberts kongruensaksiom 5 (aksiom 2.3.7): Gitt at $\angle A \cong \angle B$ og $\angle B \cong \angle C$. Da er $\mu(\angle A) = \mu(\angle B) = \mu(\angle C)$ (def. kongruens av vinkler). Altså er $\angle A \cong \angle C$.

Dedekinds aksiom (aksiom 2.4.1): La l være en gitt linje. La videre m være en linje gjennom l slik at de to linjene l og m danner en rett vinkel. Kall skjæringspunktet for l og m for O . Linjen m deler da planet i to halv-plan H_1 og H_2 (aksiom 3.1.11). La er $\vec{OP_1} \cap O = \sum_1$ og $\vec{OP_2} \cap O = \sum_2$. \sum_1 og \sum_2 er to distinkte ikke-tomme delmengder som utgjør hele linjen l bortsett fra punktet O . Det er da klart at $P_1 \star O \star P_2$ hvis og bare hvis P_1 og P_2 er i forskjellige Dedekinds delmengder \sum_1 og \sum_2 .

Vi har dermed bevist at Hilberts aksiomer for nøytral geometri følger av Birkhoffs aksiomer. \square

En fordel med å bevise et slikt metamatematisk teorem er at vi kan benytte Hilberts aksiomer i utledningene videre. Ettersom de er bevist på grunnlag av Birkhoffs aksiomer holder de selvfølgelig dersom vi tar utgangspunkt i disse.

3.3 Fordelene med Birkhoffs aksiomer

Vi har argumenter med at Birkhoffs aksiomer gjør verden lettere for oss. Det gjenstår å virkelig bevise det. I den forbindelse skal vi presentere teoremer som vi kan utlede både ved bruk av Hilberts aksiomer og Birkhoffs aksiomer. Vi vil dermed vise hvordan disse resultatene ofte følger fra egenskapen som Birkhoff la til grunn, nemlig egenskapene til den reelle tallinjen.

Birkhoffs innfallsvinkel gjør det mulig å umiddelbart ha en rekke konsepter klart for seg. For eksempel gir begrepet **mellom** mening ut i fra tallinjen som knytter det til hvorvidt et tall er mellom to andre tall. Et annet eksempel er begrepene **større enn** og **mindre enn** både når det gjelder segmenter og vinkler. Hilberts innfallsvinkel krever en abstrakt definisjon av dette, mens Birkhoffs gir oss en intuitiv forståelse knyttet til tallinjen.

Hilberts aksiomsett og Birkhoffs aksiomsett er logisk ekvivalente. Derfor må man ut i fra Hilberts aksiomer kunne utlede en sammenheng mellom den reelle tallinjen og både lengde og vinkelmål. Se teorem 4.3 s. 122 i [Gre1994]. Sett i lys av dette blir de to fremstillingene like.

La oss se på noen resultater fra de fire aksiomene for mellomliggenhet. Vi bruker her den samme notasjonen og de definisjonene som ble presentert i seksjon 1.2.1. Merk at vi nå har presisert hva mellomliggenhet egentlig innebærer.

Proposisjon 3.3.1. *For to vilkårlige punkt A og B vil:*

- i) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$
- ii) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftarrow{AB}$

Bevis. (første del fra s. 75 i [Gre1994]) Vi ser først på i). Ved definisjon er $AB \subset \overrightarrow{AB}$ og $AB \subset \overrightarrow{BA}$, så dermed er $AB \subseteq \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. La nå punktet C være et av de felles punktene til \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{BA} , vi ønsker dermed å vise at C er på AB . Hvis $C = A$ eller $C = B$, så er C et endepunkt på AB . Ellers er A, B og C tre kolineære punkter (def. av stråle og aksiom 2.2.1), og da vil nøyaktig en av relasjonene $A \star B \star C$, $A \star C \star B$ eller $C \star A \star B$ holde (aksiom 2.2.3). Hvis $A \star B \star C$ holder da er C ikke på \overrightarrow{BA} , hvis $C \star A \star B$ så er C ikke på

\overrightarrow{AB} . I begge disse tilfellene er ikke C på begge strålene. Derfor må relasjonen $A \star C \star B$ holde, og C må ligge på AB .

La oss så se på ii). Fra definisjonen er $\overleftarrow{AB} \supset \overrightarrow{AB}$ og $\overleftarrow{AB} \supset \overrightarrow{BA}$ så fra definisjonen er $\overleftarrow{AB} \supseteq \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. La nå C være et vilkårlig punkt i mengden \overleftarrow{AB} (aksiom 2.2.2) og vil vise at $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. Anta først at $C \in AB$, da vil fra det over $C \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$ og dermed $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. Dersom $C \notin AB$ så har vi enten $A \star B \star C$ eller $C \star A \star B$. Dersom $A \star B \star C$ har vi at $C \in \overrightarrow{AB}$ og dersom $C \star A \star B$ så har vi $C \in \overrightarrow{BA}$. Vi kan dermed slutte at $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$ og dermed at $\overleftarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. \square

La oss studere dette ved bruk av Birkhoffs aksiomer.

Bevis. La A og B være to vilkårlige (distinkte) punkter. Vi har direkte fra linjalpostulatet (aksiom 3.1.4) at vi kan knytte den reelle tallinjen til den unike linjen \overleftarrow{AB} . La $f(A) = x$ og $f(B) = y$. Anta uten tap av generalitet at $x < y$. Strålen \overrightarrow{AB} er da bestemt av alle punktene P med korresponderende koordinater slik at $f(P) \geq x$, og \overrightarrow{BA} bestemt av alle Q slik at $f(Q) \leq y$. Fra elementær mengdelære vet vi da at $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$ korresponderer til alle punktene C slik at $x \leq f(C) \leq y$, altså er $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$. Vi har også at $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$ korresponderer til alle punktene P, Q som oppfyller enten $f(P) \geq x$ eller $f(Q) \leq y$, det vil si alle punktene på linjen \overleftarrow{AB} . Altså er $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftarrow{AB}$. \square

Et annet eksempel på at Birkhoff lar oss gå rett på sak er noe som fremstår som en opplagt følge av proposisjonen over.

Proposisjon 3.3.2 (Linje-separasjons-egenskapen). *La $A, B, C \in l$ være slik at $C \star A \star B$. Da vil et hvert punkt P som ligger på l , enten ligge på strålen \overrightarrow{AB} eller på den motsatte strålen \overrightarrow{AC} .*

Dersom vi skulle bevist dette ut i fra Hilberts aksiomer ville det krevet at vi først viste at:

Proposisjon. *Gitt $A \star B \star C$ og $A \star C \star D$, så har vi $B \star C \star D$ og $A \star B \star D$.*

Bevis. (s. 78 i [Gre1994]) \square

Et resultat som igjen er helt opplagt fra Birkhoffs aksiomer. La oss nå derfor se på et bevis for den samme egenskapen direkte fra Birkhoffs aksiomer og egenskapene til den reelle tallinjen. Sammenlign det gjerne med beviset på side 79 i [Gre1994].

Bevis for linje-separasjons-egenskapen. Har $f : l \rightarrow \mathbb{R}$ (aksiom 3.1.4) og har gitt at $C \star A \star B$. La videre $f(C) = x$, $f(A) = y$ og $f(B) = z$ og anta uten tap av generalitet at $x < y < z$

, A ligger da mellom C og B fra definisjonen av mellomliggenhet (definisjon 3.1.5). Strålen \overrightarrow{AB} er bestemt av alle punktene B' med korresponderende koordinater slik at $f(B') \geq y$, og \overrightarrow{AC} bestemt av alle C' slik at $f(C') \leq y$. Punktene B' og C' merket svarer da til alle punktene P på linjen l . \square

Vi skal gi et tredje eksempel på fordelene med Birkhoffs aksiomer, det gir kanskje det klareste bildet av „snarveiene” Birkhoff lar oss ta. La oss derfor definere hva vi mener med et midtpunkt.

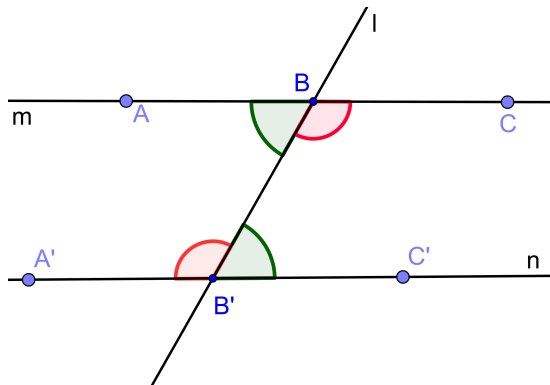
Definisjon 3.3.3. La A og B være to distinkte punkter. M kalles midtpunktet til segmentet AB dersom M ligger på segmentet AB og $AM \cong MB$

Teorem 3.3.4. *Hvert segment har et unikt midtpunkt.*

3.3.1 Et segments midtpunkt med Hilberts aksiomer

Før vi beviser teorem 3.3.4 skal vi se på tre resultater vi vil bruke i beviset.

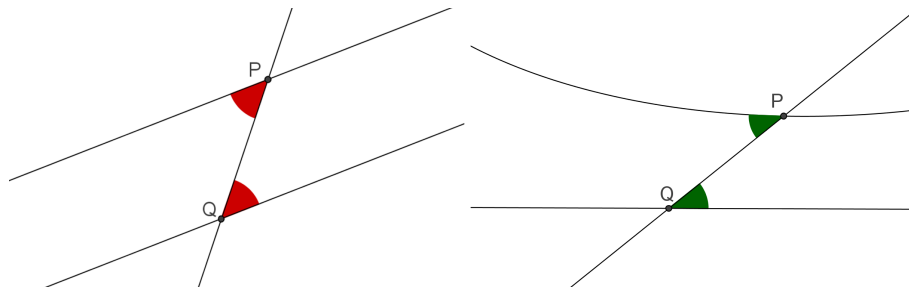
Definisjon 3.3.5. La \mathcal{L} være en mengde linjer i planet. En linje l er en **transversal** for \mathcal{L} hvis $l \notin \mathcal{L}$, og $l \cap m \neq \emptyset$ for alle $m \in \mathcal{L}$.



Figur 3.5: l er transversal til m og n .

La l være en transversal for linjene m og n , og la B og B' være skjæringspunktene mellom m og n og transversalen l . La også A og C være punkter på m slik at $A \star B \star C$, og likt for A' og C' på n . Vinklene $\angle A'B'B$, $\angle ABB'$, $\angle C'B'B$ og $\angle CBB'$ kalles **indre vinkler**. Parene av vinkler $\angle ABB'$ og $\angle C'B'B$ (grønne i figur) samt $\angle A'B'B$ og $\angle CBB'$ (røde) kalles **alternerende indre vinkler**.

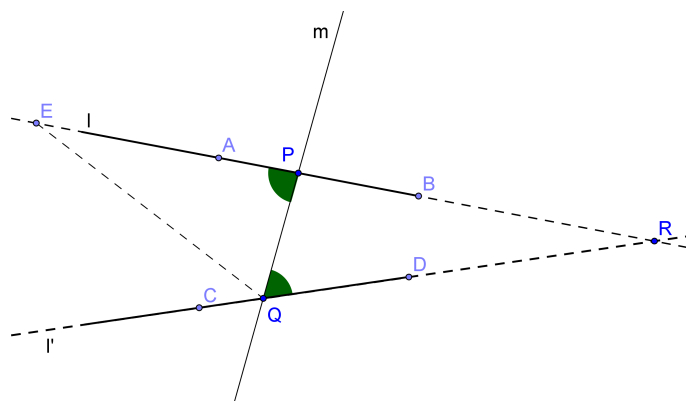
Teorem 3.3.6 (Indre alternerende vinkel-teorem). *Hvis en linje m passerer gjennom linjene l og l' på en slik måte at de indre alternerende vinkel er lik, så vil linjene l og l' aldri møtes.*



Figur 3.6: Indre alternerende vinkel-teorem

5

Bevis. (s.117, [Gre1994]) Det er gitt at vinkelen $\angle APQ \cong \angle DQP$, og vi vil bevise teoremet med Reductio ad absurdum (heretter: RAA), altså bevis ved kontradiksjon. Anta derfor at linjene l og l' møtes i et punkt R .



Figur 3.7: Indre alternerende vinkel-teorem - et umulig tilfelle

R må da ligge på samme side av linjen m på både l og l' , så vi kan uten tap av generalitet si at R ligger på samme side av m som D og B . Da finnes det (som en følge av Aksiom 2.3.1) et punkt E på \overrightarrow{PA} , slik at $PE \cong QR$. Vi får da (fra SAS, Aksiom2.3.9) at $\triangle PQR \cong \triangle PQE$

⁵Dette teoremet er opplagt i euklidsk geometri, men i hyperbolsk geometri er dette vanskeligere å fatte umiddelbart. Dette kan bunne i at selvom det motsatte, altså at to linjer som ikke møtes vil danne samme indre vinkel når en annen linje skjærer de begge, er korrekt i euklidsk geometri er det ikke slik i hyperbolsk geometri.

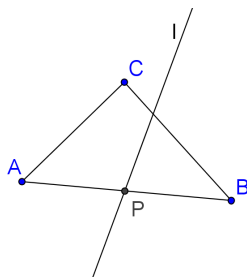
og spesielt vil $\angle RPQ \cong \angle EQP$. Etersom vi har at $\angle RPQ$ er supplementvinkel til $\angle EPQ$ så må $\angle EQP$ være supplementvinkel til $\angle RQP$ (supplementvinkler til kongruente vinkler er kongruente) Vi får da at også E må ligge på l' , dette er en klar motsigelse ettersom l og l' skulle være to distinkte linjer. \square

Korollar 3.3.7 (AAS-kriteriet). *Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er slik at $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle BCA \cong \angle EFD$ og $AC \cong DF$, så er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Bevis. La $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ være to trekanter som beskrevet over. Vi vil vise at $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ved bevis ved kontradiksjon og antar uten tap av generalitet at $CB \not\cong FE$. La så E' være et punkt på \overrightarrow{FE} slik at $FE' \cong CB$. Da er som følge av SAS (aksiom 3.1.16) $\triangle ABC \cong \triangle DE'F$. Dette gir videre at $\angle ABC \cong \angle DE'F$. Vi har at $\angle DEF \cong \angle ABC$ og dermed at $\angle DE'F \cong \angle DEF$. $\angle DEF$ og $\angle DE'F$ er indre alternerende vinkler og \overleftrightarrow{DE} og $\overleftrightarrow{DE'}$ møtes i D . Dette er i strid med indre alternerende vinkel-teorem (teorem 3.3.6) Altså må vi forkaste antagelsen $CB \not\cong FE$ og slutte at $CB \cong FE$, da følger det av SAS at $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. \square

Teorem 3.3.8 (Paschs teorem). *Hvis A , B og C er tre distinkte punkter og l er en vilkårlig linje som skjærer AB i et punkt mellom A og B da må l skjære minst en av AC eller BC . Hvis C ikke ligger på l , så vil l skjære eksakt et av segmenter AC eller BC .*

Bevis. ([Gre1994] s. 80)



Figur 3.8: Paschs teorem.

Teoremet er opplagt dersom C ligger på l . La oss derfor anta at C ikke ligger på l . Vi har da at l skjærer AB i et punkt P mellom A og B . Da må A og B ligge på motsatt side av l . Da vil enten C og A ligge på samme side av l eller C og B ligge på samme side av l (aksiom 2.2.5). Dersom C og A ligger på samme side av l så må C og B ligge på motsatt side av l . Da vil l skjære BC og ikke AC . Tilsvarende dersom C og B ligger på samme side av l . \square

Vi er omsider klar for å bevise teorem 3.3.4: *Hvert segment har et unikt midtpunkt.*

Bevis for teorem 3.3.4 ved bruk av Hilberts aksiomer. La AB være et vilkårlig segment, og la $P \notin \overleftrightarrow{AB}$ være et vilkårlig punkt (eksisterer pga. aksiom 2.1.3). Det eksisterer en unik stråle \overrightarrow{BX} på motsatt side av \overleftrightarrow{AB} i forhold til P slik at $\angle PAB \cong \angle XBA$. Det er videre et unikt punkt Q på \overrightarrow{BX} slik at $AP \cong BQ$. Ettersom $\angle PAB \cong \angle QBA$ fra konstruksjonen har vi fra alternerende indre vinkel-teorem (teorem 3.3.6) at linjene \overleftrightarrow{AP} og \overleftrightarrow{BQ} er parallelle. P og Q er på motsatte sider av \overleftrightarrow{AB} og derfor er $PQ \cap AB \neq \emptyset$. Kall skjæringspunktet M .

Enten er i) M mellom A og B , ii) A mellom M og B , iii) B mellom A og M , eller iv) så er $M = A$ eller $M = B$. Vi vil vise at $A \star M \star B$ så anta at M ikke ligger mellom A og B (RAA).

iv) Hvis $M = A$ så er A, P og M kolineære og $\overleftrightarrow{AP} = \overleftrightarrow{AB}$ som skjærer \overleftrightarrow{BQ} . Altså har vi en motsigelse. For $M = B$ kan det føres et analogt argument.

ii) Anta derfor at A ligger mellom M og B . Dette innebærer at \overleftrightarrow{PA} vil skjære siden MB i trekanten $\triangle MBQ$ i et punkt mellom M og B . Da har vi fra Paschs teorem (teorem 3.3.8) at \overleftrightarrow{PA} skjærer enten MQ eller BQ . BQ er utelukket ettersom $\overleftrightarrow{BQ} \parallel \overleftrightarrow{AP}$. Hvis linjen \overleftrightarrow{AP} skjærer segmentet MQ , så må linjen \overleftrightarrow{AP} inneholde hele segmentet MQ , ettersom P, Q og M er kolineære. Da har vi at $M = A$ som vi tidligere har vist ikke er mulig.

iii) På samme måte som i ii) kan vi vise at B ikke kan ligge mellom A og M .

Vi kan derfor slutte at $A \star M \star B$. Dette betyr at $\angle AMP \cong \angle BMQ$ ettersom de er vertikal-vinkler. Fra AAS-kriteriet (korollar 3.3.7) er $\triangle AMP \cong \triangle BMQ$. Derfor er $AM \cong MB$ og M er midtpunktet til AB . M er unikt ettersom kongruensaksiom 1 (aksiom 2.3.1) forsikrer at det bare kan eksistere et punkt M på \overleftrightarrow{AB} slik at $AM \cong MB$. \square

3.3.2 Et segments midtpunkt med Birkhoffs aksiomer

Birkhoffs aksiomer lar oss gå rett på sak.

Bevis for teorem 3.3.4 ved bruk av Birkhoffs aksiomer. La AB være et vilkårlig segment. Vi vil vise at det eksisterer et unikt midtpunkt M . Fra linjal-postulatet (aksiom 3.1.4) vet vi at det finnes en bijeksjon $f: \overleftrightarrow{AB} \rightarrow \mathbb{R}$. La derfor $x = f(A)$ og $f(B) = y$. Det finnes da et unikt punkt M på AB slik at $f(M) = \frac{y-x}{2}$. Da vil (aksiom 3.1.4)

$$|AM| = |f(A) - f(M)| = \left| x - \frac{y-x}{2} \right| = \left| \frac{x-y}{2} \right|$$

og

$$|MB| = |f(M) - f(B)| = \left| \frac{y-x}{2} - y \right| = \left| \frac{x-y}{2} \right|.$$

Altså er $AM \cong MB$ og M er et midtpunkt på segmentet AB . M er unikt ettersom f er en bijeksjon, ettersom $f(M) = \frac{y-x}{2}$ er et unikt tall er M et unikt punkt. \square

Kapittel 4

Nøytral geometri

Aksiomene vi presenterte i de to foregående kapitlene danner begge grunnlag for nøytral geometri når vi ikke tar med noe parallellpostulat. Vi skal dermed bevise teoremer som holder i nøytral geometri, dermed holder de både i euklidsk og i hyperbolsk geometri. I forbindelse med presentasjonen og sammenligningen av Hilberts og Birkhoffs aksiomsett ble det utledet noen resultater som dermed holder i nøytral geometri. De var:

Proposisjon. *For to vilkårlige punkt A og B vil:*

- i) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$*
- ii) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftarrow{AB}$*

Proposisjon (Linje-separasjons-egenskapen). *La $A, B, C \in l$ være slik at $C \star A \star B$. Da vil et hvert punkt P som ligger på l , enten ligge på strålen \overrightarrow{AB} eller på den motsatte strålen \overrightarrow{AC} .*

Teorem (Indre alternerende vinkel-teorem). *Hvis en linje m passerer gjennom linjene l og l' på en slik måte at den indre alternerende vinkel er lik, så vil linjene l og l' aldri møtes.*

Korollar (AAS-kriteriet). *Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er slik at $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle BCA \cong \angle EFD$ og $AC \cong DF$, så er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Teorem (Paschs teorem). *Hvis A, B og C er tre distinkte punkter og l er en vilkårlig linje som skjærer AB i et punkt mellom A og B da må l skjære minst en av AC eller BC . Hvis C ikke ligger på l , så vil l skjære eksakt et av segmenter AC eller BC .*

Teorem. *Hvert segment har et unikt midtpunkt.*

På grunnlag av dette følger:

Korollar 4.0.9. *Hvis m og n er to distinkte linjer som begge står vinkelrett på en linje l så vil m og n aldri møtes.*

Bevis. De indre alternerende vinklene er her rette vinkler og alle rette vinkler er kongruente (Euklids 4. postulat). Så fra teorem 3.3.6 vet vi at m og n aldri møtes. \square

Definisjon 4.0.10. Normalen på en linje l gjennom et punkt P som ikke ligger på l er en linje som går gjennom P og står vinkelrett på l .

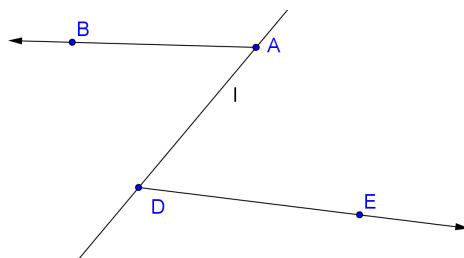
Korollar 4.0.11. *Hvis P er et punkt som ikke ligger på l så er normalen fra P på l unik.*

Bevis. Anta at m er normalen til l gjennom $P \notin l$ som skjærer l i Q . Hvis n er en annen normal på l gjennom P som skjærer l i R så er m og n to distinkte linjer normalt på l gjennom P . Fra Korollar 4.0.9 er m og n da parallelle. Det gir motsigelse ettersom m og n begge går gjennom P . Altså kan ikke m og n være distinkte, og normalen til l gjennom P er unik. \square

Definisjon 4.0.12. Punktet der normalen til l skjærer linjen l kalles **footpunktet** til normalen.

4.1 Krysslinje-teoremet

Teorem 4.1.1 (Z-teoremet). *La l være en linje og A og D to distinkte punkter på l . Hvis B og E er to punkter på motsatt side av l så skjæres ikke strålene \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{DE}*

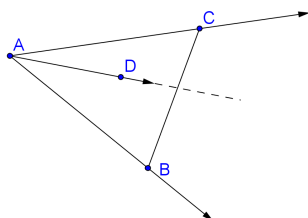


Figur 4.1: Z-teoremet

Bevis. La l, A, B, D, E være som beskrevet i teoremet. Alle punktene på \overrightarrow{AB} , bortsett fra A , ligger i H_B bundet av l . Videre ligger alle punkter på \overrightarrow{DE} , bortsett fra D , i halv-plan H_E bundet av l . H_B og H_E er distinkte fra halv-plan postulatet (aksiom 3.1.11). Derfor

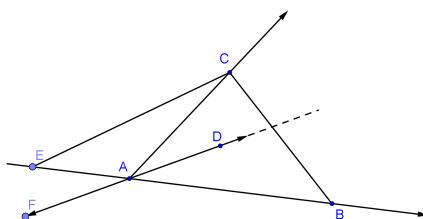
kan strålene \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{DE} ikke møtes i andre punkt enn $A = D$, men hypotesen sier at A og D er distinkte punkter. \square

Teorem 4.1.2 (Krysslinsje-teoremet). *Hvis \overrightarrow{AD} ligger mellom \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AC} da vil \overrightarrow{AD} skjære segmentet BC .*



Figur 4.2: Krysslinsje-teoremet

Bevis. (s. 77 i [Ven2006]) La $\triangle ABC$ være en trekant og la D være et indre punkt i vinkelen $\angle BAC$. La E og F være punkter slik at $E \star A \star B$ og $F \star A \star D$ (Linjal-postulatet, aksiom 3.1.4) og la $l = \overleftrightarrow{AD}$.



Figur 4.3: Krysslinsje-teoremet

Ettersom D er et indre punkt i vinkelen $\angle BAC$ så kan verken B eller C ligge på l . Paschs teorem (teorem 3.3.8) sier da at trekanten $\triangle EBC$ er slik at l krysser enten EC eller BC . Det gjenstår å vise at det er strålen \overrightarrow{AD} (og ikke den motsatte strålen \overrightarrow{AF}) som skjærer enten EC eller BC og at \overrightarrow{AD} skjærer BC . Med andre ord må vi vise at; i) $\overrightarrow{AF} \cap EC = \emptyset$, ii) $\overrightarrow{AF} \cap BC = \emptyset$ og at iii) $\overrightarrow{AD} \cap EC = \emptyset$.

i) Ettersom A er mellom F og D ligger de på motsatt side av \overleftrightarrow{AB} (halv-plan postulatet, aksiom 3.1.11). På den andre side er C og D på samme side av \overleftrightarrow{AB} (D er et indre punkt i

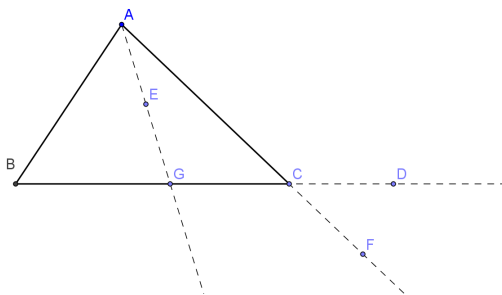
$\angle BAC$), så C og F er på motsatt side av \overleftrightarrow{AB} (halv-plan postulatet). Derfor er $\overrightarrow{EC} \cap \overrightarrow{AF} = \emptyset$ (Z-teoremet, teorem 4.1.1). Altså er $\overrightarrow{AF} \cap EC = \emptyset$. ($EC \subset \overrightarrow{EC}$)

ii) På samme måte som i i) er C og F på motsatt side av \overleftrightarrow{AB} . Derfor er $\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{AF} = \emptyset$ (Z-teoremet). Altså er $\overrightarrow{AF} \cap BC = \emptyset$.

iii) Etersom A er mellom E og B , ligger E og B på motsatt side av \overleftrightarrow{AC} (halv-plan postulatet). På den andre side er B og D på samme side av \overleftrightarrow{AC} (D er et indre punkt i $\angle BAC$), så E og D er på motsatt side av \overleftrightarrow{AC} (halv-plan postulatet). Da kan vi igjen bruke Z-teoremet og får at $\overrightarrow{CE} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset$. Da har vi at $\overrightarrow{AD} \cap EC = \emptyset$. \square

4.2 Ytre vinkel-teorem

Teorem 4.2.1 (Ytre vinkel-teorem). *En ytre vinkel i en trekant er større enn hver av de motstående indre vinklene i trekanten.*



Figur 4.4: Ytre vinkel-teorem

Bevis. Det må vises at $\angle ACD$ er større enn $\angle A$ (se figur 4.4). Vi har enten at i) $\angle A < \angle ACD$, ii) $\angle A \cong \angle ACD$ eller iii) $\angle A > \angle ACD$.

ii) Anta $\angle A = \angle BAC \cong \angle ACD$. Da er fra indre alternerende vinkel-teorem (teorem 3.3.6) linjene \overleftrightarrow{AB} og \overleftrightarrow{CD} parallelle. Dette gir motsigelse ettersom B ligger på begge.

iii) Anta så at $\angle A > \angle ACD$. Da eksisterer det en stråle \overrightarrow{AE} mellom \overleftrightarrow{AB} og \overleftrightarrow{AC} slik at $\angle CAE \cong \angle ACD$. Fra krysslinjeteoremet (teorem 4.1.2) vet vi at \overrightarrow{AE} skjærer BC i et punkt G . Igjen har vi fra indre alternerende vinkel-teorem (teorem 3.3.6) at \overleftrightarrow{AE} og \overleftrightarrow{CD} er parallelle, som igjen gir motsigelse.

Altså må i) $\angle A < \angle ACD$ være korrekt. \square

Korollar 4.2.2. *Summen av vinkelmålet av to vilkårlige vinkler i en trekant er mindre enn 180° .*

Bevis. Gitt en vilkårlig trekant $\triangle ABC$. Vil vise at $\mu(\angle A) + \mu(\angle C) < 180^\circ$. Fra ytre vinkel-teorem (teorem 4.2.1) har vi at $\angle A < \angle ACD$. Videre har vi fra gradskive-postulatet (aksiom 3.1.12) at $\mu(\angle ACD) + \mu(\angle C) = 180^\circ$. Det gir oss

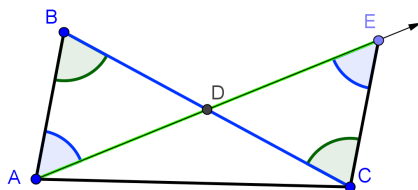
$$\begin{aligned}\mu(\angle A) &< \mu(\angle ACD) \\ \mu(\angle A) + \mu(\angle B) &< \mu(\angle ACD) + \mu(\angle B) = 180^\circ.\end{aligned}$$

□

4.3 Saccheri-Legendre teoremet

Teorem 4.3.1 (Saccheri-Legendre-teoremet). *Vinkelsummen til de tre vinklene i en trekant er mindre enn eller lik 180° .*

Bevis. (RAA) Anta at at vi har en trekant $\triangle ABC$ hvor $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB > 180^\circ$. Da eksisterer (gradskive postulatet, aksiom 3.1.12) det et positivt reellt tall, $x \in \mathbb{R}^+$, slik at $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ + x$.



Figur 4.5: Saccheri-Legendre-teoremet

La D være midtpunktet til BC (teorem 3.3.4) og la E være det unike punktet på strålen \overrightarrow{AD} slik at $DE \cong AD$ (aksiom 2.3.1). Da har vi fra SAS-kriteriet (aksiom 3.1.16) at $\triangle BAD \cong \triangle CED$. Dermed er $\mu(\angle ABC) = \mu(\angle DCE)$ og $\mu(\angle AEC) = \mu(\angle BAD)$. Da får vi

$$\begin{aligned}\mu(\angle BAC) + \mu(\angle ABC) + \mu(\angle ACB) &= (\mu(\angle BAD) + \mu(\angle CAE)) + \mu(\angle ABC) + \mu(\angle ACB) \\ &= \mu(\angle AEC) + \mu(\angle CAE) + (\mu(\angle DCE) + \mu(\angle ACD)) \\ &= \mu(\angle AEC) + \mu(\angle CAE) + \mu(\angle ACE),\end{aligned}$$

så $\triangle ABC$ og $\triangle ACE$ har samme vinkelsum, men trenger ikke være kongruente.

Merk at $\mu(\angle BAE) + \mu(\angle CAE) = \mu(\angle BAC)$ og derfor $\mu(\angle CEA) + \mu(\angle CAE) = \mu(\angle BAC)$. Da er det umulig at både $\mu(\angle CEA) > \frac{1}{2}\mu(\angle BAC)$ og $\mu(\angle CAE) > \frac{1}{2}\mu(\angle BAC)$, så minst en av disse vinkelmålene er mindre enn $\frac{1}{2}\mu(\angle BAC)$. Derfor eksisterer det en trekant $\triangle ACE$ hvor vinkelsummen er $180^\circ + x$, men hvor en av vinklene har vinkelmål mindre enn eller lik $\frac{1}{2}\mu(\angle BAC)$.

Repeterer vi denne konstruksjonen får vi en trekant med vinkelsum lik $180^\circ + x$, men hvor en av vinklene har vinkelmål mindre enn eller lik $\frac{1}{4}\mu(\angle BAC)$. Da finnes det med andre ord en $n \in \mathbb{Z}^+$ slik vi fra Arkimedes aksiom for reelle tall har at

$$\frac{1}{2^n}\mu(\angle BAC) \leq x.$$

Dermed har vi etter et endelig antall n iterasjoner en trekant med vinkelsum $180^\circ + x$ hvor minst en av vinklene har vinkelmål mindre enn eller lik $\frac{1}{2^n}\mu(\angle BAC) \leq x$. Da vil de to andre vinklene i trekanten ha en vinkelsum større enn 180° som strider med korollar 4.2.2. Altså må vinkelsummen til en trekant være mindre enn eller lik 180° . \square

Korollar 4.3.2. *I en trekant $\triangle ABC$ er vinkelsummen til to vilkårlige vinkler mindre enn eller lik vinkelmålet til den ytre vinkelen til den gjenstående vinkelen i trekanten.*

Bevis. Fra det over kan vi slutte at vinkelsummen til alle vinklene i en trekant $\triangle ABC$ er slik at $\mu(\angle BAC) + \mu(\angle ABC) + \mu(\angle ACB) \leq 180^\circ$. Det gir oss fra gradskive postulatet (aksiom 3.1.12v))

$$\begin{aligned} \mu(\angle BAC) + \mu(\angle ABC) &\leq 180^\circ - \mu(\angle ACB) \\ &= \mu(\angle BCD). \end{aligned}$$

Hvor $\angle BCD$ er det ytre vinkelen til $\angle ACB$. \square

4.4 Kort om eksistens av parallelle linjer

Lemma 4.4.1. *Det eksisterer parallelle linjer.*

Bevis. Vi trenger egentlig bare å vise at det må være slik at det eksisterer minst to distinkte linjer som er parallelle. La likevel l være en vilkårlig linje og P være et vilkårlig punkt som ikke ligger på l . Nedfell normalen m fra P til l . Fra gradskive-postulatet vet vi at det finnes en linje n gjennom P slik at n står vinkelrett på m . Fra teorem 3.3.6 er linjen n parallell med l . \square

Faktisk har vi bevist noe som er ennå sterkere nemlig at det for en hver linje l og et punkt P som ikke ligger på l finnes en linje gjennom P som er parallell med l . Merk at vi ikke har avgjort (og ikke kan avgjøre) hvorvidt denne parallelle linjen er unik.

Teorem 4.4.2. *Negasjonen av det hyperbolske parallellpostulatet fører til euklidske parallellpostulatet og visa versa.*

Bevis. Negasjonen av det hyperbolske parallellpostulatet er: *For en hver linje l og et punkt P som ikke ligger på l , finnes det enten ingen eller nøyaktig en linje gjennom P som er parallell med l .* Negasjonen av det euklidske parallellpostulatet er: *Det finnes minst en linje l og et punkt P som ikke ligger på l , slik at det finnes enten ingen eller minst to linjer gjennom P som ikke skjærer l .*

Vi vet fra lemma 4.4.1 at det eksisterer parallelle linjer, og dermed er kan vi utelukke dette alternativet i begge tilfeller. Altså står vi igjen med henholdsvis det hyperbolske og det euklidske parallellpostulat. \square

Kapittel 5

Hyperbolsk geometri

Grunnen til å bruke så lang tid på å introdusere nøytral geometri er for å senere ha et sammenligningsgrunnlag og dermed se likheter og ulikheter mellom geometrier. Vi (har og) skal definere det på følgende måte:

Definisjon 5.0.3. Hyperbolsk geometri er geometrien du får ved å ta utgangspunkt i aksiomene for nøytral geometri og det hyperbolske parallellpostulatet (aksiom 2.5.2).

Vi merker oss at vi kan ta utgangspunkt i både Hilberts og Birkhoffs aksiomer for nøytral geometri. Det hyperbolske parallellpostulat var:

Aksiom 5.0.4 (Det hyperbolske parallellpostulatet). *Det finnes en linje l og et punkt P som ikke ligger på denne linjen, slik at det finnes minst to linjer gjennom P som ikke skjærer l .*

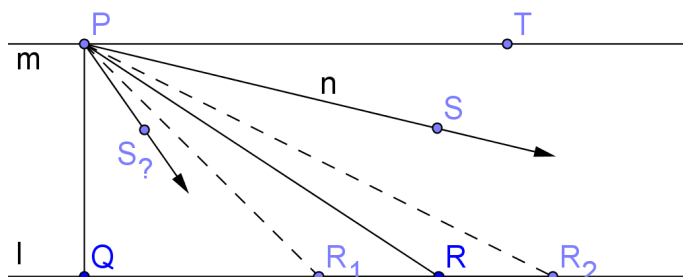
Vi har gått forsiktig til verks når vi skal bygge opp den hyperbolske geometrien og vil oppdage at vår nye verden leder til noen, med János Bolyai sine ord, „merkelige” konsekvenser.

5.1 „Merkelige” konsekvenser

Teorem 5.1.1. *Det eksisterer en trekant med vinkelsum ekte mindre enn 180° .*

Bevis. La l være en linje og P et punkt som ikke ligger på l , slik at to linjer parallelle til l går gjennom P (Hyperbolske parallellpostulat). La Q være fotpunktet til den normalen fra P på l . La videre m være vinkelrett på \overrightarrow{PQ} gjennom P (aksiom 2.3.1). Da er m og l parallelle fra indre alternerende vinkel-teorem (teorem 3.3.6). La n være en annen linje gjennom P som ikke skjærer l . Også denne linjen n eksisterer som en følge av det

hyperbolske parallellpostulat. La \overrightarrow{PS} være strålen på n som ligger mellom \overrightarrow{PQ} og en stråle \overrightarrow{PT} på m .



Figur 5.1: $\triangle PQR$ har vinkelsum ekte mindre enn 180°

Vi krever nå: *Det finnes et punkt R som ligger på l og på samme side av \overleftrightarrow{PQ} som S og T slik at $\mu(\angle QRP) < \mu(\angle SPT)$.*

Vi skal bevise dette ved å konstruere en følge av vinkler $\angle QR_1P, \angle QR_2P, \dots, \angle QR_nP$ slik at $\mu(\angle QR_{j+1}P) < \frac{1}{2}\mu(\angle QR_jP)$, og dermed benytte oss av Arkimedes aksiom for reelle tall¹.

Det finnes et punkt R_1 som ligger på l og er slik at $QR_1 \cong PQ$ (aksiom 2.3.1) Da er $\triangle QR_1P$ en likebeint trekant og $\mu(\angle QR_1P) \leq 45^\circ$. På samme måte finnes det et punkt R_2 på l slik at $Q \star R_1 \star R_2$ og $R_1R_2 \cong PR_1$. Da er $\triangle PR_1R_2$ en likebeint trekant og $\angle R_1PR_2 \cong \angle QR_2P$. Ettersom $\angle QR_1P$ er ytre vinkel til $\triangle PR_1R_2$ følger det fra Saccheri-Legendre-teoremet (teorem 4.3.1) at

$$\begin{aligned} \mu(\angle R_1PR_2) + \mu(\angle QR_2P) &\leq \mu(\angle QR_1P) \\ 2\mu(\angle QR_2P) &\leq 45^\circ \end{aligned}$$

Da er $\mu(\angle QR_2P) \leq 22,5^\circ$. Fortsetter vi en slik konstruksjon finner vi et punkt R_n som ligger på l og er slik at $Q \star R_{n-1} \star R_n$ og

$$\mu(\angle QR_nP) \leq \left(\frac{45^\circ}{2^n}\right).$$

¹Arkimedes aksiom for reelle tall sier at gitt et vilkårlig reelt tall x så eksisterer det et naturlig tall n slik at $n > x$. Dette var opprinnelig et av Hilberts kontinuitetsaksiomer, men er i vår fremstilling en direkte følge av Dedekinds aksiom (2.4.1).

Vi benytter så Arkimedes aksiom slik at for et vilkårlig positivt reelt tall, for eksempel $\mu(\angle SPT)$, finnes det et punkt R på l slik at R er på samme side av \overleftrightarrow{PQ} som S og T og $\mu(\angle QRP) < \mu(\angle SPT)$. Vi har dermed bevist kravet over.

Nå ligger \overrightarrow{PR} mellom \overrightarrow{PQ} og \overrightarrow{PS} , hvis ikke ville \overrightarrow{PS} ligget mellom \overrightarrow{PQ} og \overrightarrow{PR} som fra krysslinsje-teoremet (teorem 4.1.2) ville gitt motsigelse med at $n \parallel l$. Derfor er $\mu(\angle QPR) < \mu(\angle QPS)$ slik at

$$\mu(\angle RPQ) + \mu(\angle QRP) < \mu(\angle SPQ) + \mu(\angle QRP) < \mu(\angle SPQ) + \mu(\angle SPT) = 90^\circ.$$

Da har vi at $\mu(\angle QPR) + \mu(\angle RQP) + \mu(\angle PRQ) < 180^\circ$. □

Definisjon 5.1.2. Et **rektangel** er en firkant der alle fire vinklene er rette.

Teorem 5.1.3. *Det eksisterer ikke rektangler.*

Bevis. Vinkelsummen i et rektangel er $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$. Anta at det eksisterer et slikt rektangel $\square ABCD$. La videre \overleftrightarrow{AC} være diameteren som deler rektangelet i to trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle ADC$. Disse trekantene har begge vinkelsum ekte mindre enn 180° . Da må med samme argument som tidligere en av vinklene i rektangelet være mindre enn 90° . Det strider med definisjonen av et rektangel, altså kan det ikke eksistere rektangler. □

Definisjon 5.1.4. En **konveks firkant** er en firkant hvor alle vinklene er mindre enn 180°

Korollar 5.1.5. *Alle konvekse firkanter har vinkelsum mindre enn 360°*

Bevis. Følger av det over. □

5.2 Det universelle hyperbolske teorem

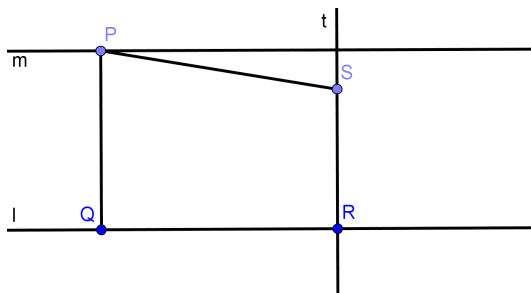
Når vi bygget opp det aksiomatiske systemet hyperbolske geometri var ga vi følgende hyperbolske parallellpostulat:

Aksiom (Det hyperbolske parallellpostulatet). *Det finnes en linje l og et punkt P som ikke ligger på denne linjen, slik at det finnes minst to linjer gjennom P som ikke skjærer l .*

Ut i fra det vi har bevist hittil i kapitlet kan vi utlede det hyperbolske parallellpostulat til å gjelde for enhver linje og punkter som ikke ligger på linjen.

Teorem 5.2.1 (Det universelle hyperbolske teorem). *For enhver linje l og et punkt P som ikke ligger på l , så finnes det minst to distinkte linjer som begge er parallelle med l .*

Bevis. La l være en vilkårlig linje og P et vilkårlig punkt som ikke ligger på l . Nedfell en normal fra P på l og kall fotpunktet Q . La videre m være en linje gjennom P slik at m og \overleftrightarrow{PQ} står normalt på hverandre. Fra indre alternerende vinkel-teorem (aksiom 3.3.6) er $l \parallel m$.



Figur 5.2: Både \overleftrightarrow{PS} og m er parallell med l

La videre R være et vilkårlig punkt l , $P \neq Q$. Det eksisterer en normal t på l gjennom P (gradskive-postulatet, aksiom 3.1.12). Nedfell nå en normal på t fra P og la S være fotpunktet på t . Nå er også \overleftrightarrow{PS} parallell med l ettersom begge står vinkelrett på t (indre alternerende vinkel-teorem). Gjenstår å vise at $\overleftrightarrow{PS} \neq m$. Anta derfor at $\overleftrightarrow{PS} = m$ (RAA). Da ligger S på m og $\square PQRS$ er et rektangel. Dette strider med teorem 5.1.3. Altså må de distinkte linjene \overleftrightarrow{PS} og m begge være parallelle med l . \square

5.3 Saccheris-firkanter og Wallis trekanter

Girolamo Saccheri var som nevnt i innledningen en jesuittprest som levde fra 1667 til 1733. I et forsøk på bevise Euklids femte postulat ut fra de andre aksiomene antok han at Euklids femte postulat var feil (RAA). Han studerte dermed firkanter i håp om å utlede en motsigelse som gjorde han i stand å bevise parallellpostulatet. Firkantene han studerte er i dag kjent som Saccheri-firkanter. Vi skal se litt nærmere på disse firkantene i den hyperbolske geometrien.

Definisjon 5.3.1. La $\square PQRS$ være en konveks firkant hvor to tilstøtende hjørner er rette vinkler. Segmentet som forbinder de to hjørnene kaller vi **grunnlinjen**. Siden ovenfor grunnlinjen kaller vi **topplinjen** og de to andre sidene kaller vi **sider**. Hvis de to sidene er kongruente kaller vi $\square PQRS$ en **Saccheri-firkant**. Vinklene som dannes av topplinjen og sidene kaller vi **toppvinklene** i Saccheri-firkanten.

Teorem 5.3.2. *I en Saccheri-firkant er toppvinklene spisse og kongruente.*

Bevis. La $\square PQRS$ være en Saccheri-firkant. Da er $\mu(\angle QPS) = \mu(\angle PSR) = 90^\circ$ og $PQ \cong SR$. PS er felles side i de to trekantene $\triangle QPS$ og $\triangle RSP$. Da har vi fra SAS-kriteriet (aksiom 3.1.16) at $\triangle QPS \cong \triangle RSP$. Da er $QS \cong PR$ og $\angle PSQ \cong \angle SPR$. Altså er $\mu(\angle PSQ) = \mu(\angle SPR)$. $\mu(\angle QPS) = \mu(\angle QPR) + \mu(\angle SPR)$ og $\mu(\angle PSR) = \mu(\angle PSQ) + \mu(\angle QSR)$ slik at

$$\mu(\angle QPR) = \mu(\angle QSR) = 90^\circ - \mu(\angle PSQ).$$

Altså er $\angle QPR \cong \angle QSR$. Sammen med $PQ \cong SR$ og $QS \cong PR$ får vi ved bruk av SAS-kriteriet at $\triangle PQR \cong \triangle SRQ$. Da har vi at $\angle PQR \cong \angle SRQ$.

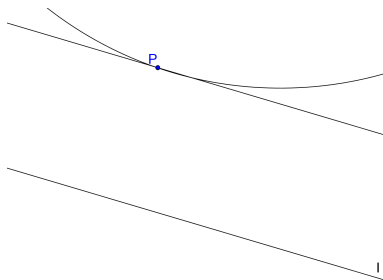
Gjenstår å vise at vinklene $\angle PQR \cong \angle SRQ$ er spisse. Vinkelsummen i en konveks firkant er mindre enn 360° . Det gir oss

$$\begin{aligned} \mu(\angle QPS) + \mu(\angle PSR) + \mu(\angle SRQ) + \mu(\angle RQP) &< 360^\circ \\ \mu(\angle SRQ) + \mu(\angle RQP) &< 180^\circ \\ \mu(\angle SRQ) &< 90^\circ. \end{aligned}$$

Altså er toppvinklene spisse. □

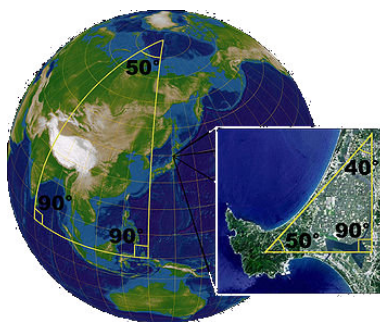
5.4 Modeller for det hyperbolske plan

Vi har så langt i dette kapittelet sett på et utvalg av noen av de resultatene vi får ved å følge aksiomene for hyperbolsk geometri. Dermed har vi sett endel eksempler for hvordan euklidsk geometri skiller seg fra hyperbolsk geometri. I euklidsk geometri har vi er det enkelt produsere troverdige figurer ved å tegne på et flatt papir. Det er ikke like enkelt derimot å gi troverdige figurer som stemmer overens med aksiomene i den hyperbolske geometrien. Når vi for eksempel ville gi en figur for det hyperbolske parallellpostulat brukte vi følgende figur.



Figur 5.3: Det hyperbolske parallellpostulatet.

Figuren gir oss en forestilling av to linjer gjennom P som begge er parallelle med l , men den ene av linjene er jo ikke rett? Altså kvalifiserer den ikke til den intuitive forståelsen vår av at en (rett) linje er den korteste avstanden mellom to punkter i et papirplan. Av den grunn kan det virke som om tanken om en hyperbolsk geometri er det rene tankespinn og ikke har noen bruksverdi. Euklidsk geometri derimot er det lettere å se bruksverdien til. Et eksempel som vi ga tidligere var egypterens behov for å kunne måle opp eiendomsgrenser. Ved hjelp av euklidsk geometri kunne man altså gjøre nøyaktige beregninger tilknyttet landmåling? Svaret er både ja og nei. Ja fordi man ut i fra den euklidske geometrien kunne gi eksakte formler for beregning av for eksempel areal av en trekant på en flat overflate. Nei ettersom jordoverflaten ikke er flat. Dette spiller selvfølgelig liten rolle for lokal landmåling den dag i dag, men tenker man seg en trekant utspent av linjene ekvator, nullmeridianen og 90° vestlig lengdegrad er vinkelsummen ikke lengre 180° . Faktisk er alle vinklene i denne trekanten 90° , altså er vinkelsummen 270° . Generelt vil enhver trekant på denne overflaten ha vinkelsum som er over 180° og arealet av en firkant vil være større en kvadratet til sidene.



Figur 5.4: Trekanter på jordoverflaten

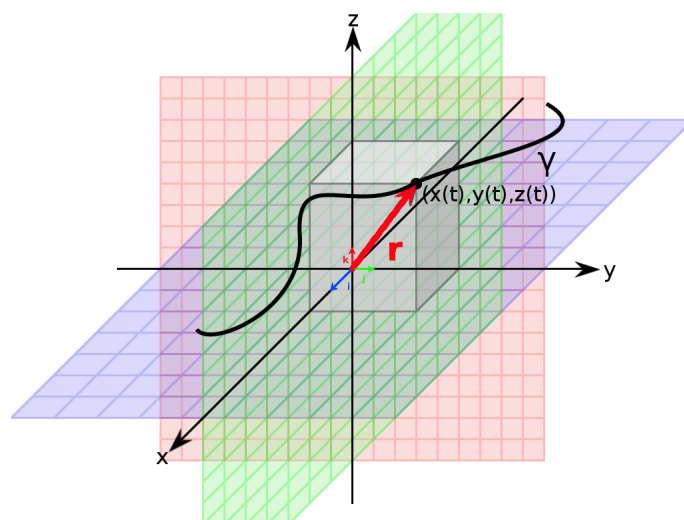
Ut i fra dette kan man utlede at geometrien man har på en kules overflate har trekanter hvor vinkelsummen alltid er større en 180° . Mens geometrien i et plan er slik vi kjenner den fra skolematematikken er euklidsk og har trekanter med vinkelsum nøyaktig lik 180° . Jakten på modellen for en geometri med trekanter med vinkelsum mindre enn 180° kan dermed begynne.

Kapittel 6

Flater i \mathbb{R}^3

Vi skal begynne vår jakt på en modell for den hyperbolske geometrien ved å studere kurver og flater i \mathbb{R}^3 .

En romkurve i \mathbb{R}^3 beskrives med koordinatene x , y og z som funksjoner av en variabel t . Det er en vanlig å tolke variabelen t som tid slik at koordinatene $x(t)$, $y(t)$ og $z(t)$ beskriver posisjonsvektoren $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ til en „partikkel” som følger kurven ved tiden t . \mathbf{i} , \mathbf{j} og \mathbf{k} er standard basisvektor for henholdsvis x -, y - og z -aksen.



Figur 6.1: \mathbf{r} er posisjonsvektoren til en partikkel som flytter seg langs kurven γ .

Når t varierer beveger „partikkelen” seg langs kurven og når vi fortsetter å tolke kurven på denne måten forutsetter vi at kurven γ er **kontinuerlig**. Det vil si at kurven ikke kan plutselig hoppe til et punkt bort fra kurven. Dette er det samme som å forutsette

at $x(t)$, $y(t)$ og $z(t)$ er kontinuerlige med tanke på t , og vi sier at $\mathbf{r}(t)$ er en kontinuerlig vektorfunksjon av t . Med samme tolkning kan vi gi begrepet **hastighet** mening gjennom å se på forflytningen partikkelen gjør på et tidsintervall Δt . Gjennomsnittshastigheten til partikkelen mellom de to punktene på kurven $\mathbf{r}(t_0)$ og $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$ er derfor

$$\frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

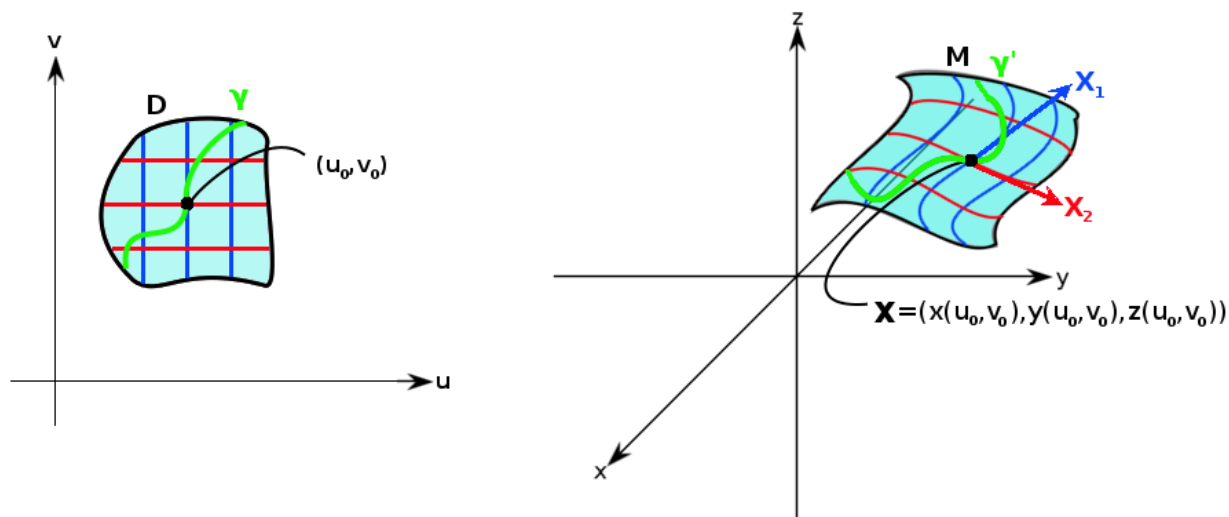
Hastigheten i punktet $\mathbf{r}(t_0)$ finner vi da ved å la avstanden (dvs tidsintervallet) Δt gå mot null. Dersom denne grensen finnes sier vi at $\mathbf{r}(t)$ er **differensierbar** i t_0 . Hastigheten beskrives da av vektoren

$$\mathbf{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t_0).$$

Hastigheten er derfor (tangent)vektoren i tangentretningen til kurve γ i punktet $\mathbf{r}(t)$ og har lengde $|\mathbf{v}(t)|$. $|\mathbf{v}(t)|$ kaller vi **farten** til partikkelen i $\mathbf{r}(t)$. Når hastighetsvektoren eksisterer, er kontinuerlig og ikke forsvinner sier vi at γ er en **glatt** kurve.

En flate M i \mathbb{R}^3 kan beskrives som bildet av en undermengde D av \mathbb{R}^2 . Vi kan med andre ord gi den en parametrisering slik at

$$\mathbf{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$



Figur 6.2: Flaten M parametrisert til D .

Definisjon 6.0.1. En flate gitt som over er **regulær** hvis vektorene

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\ \mathbf{X}_2(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)\end{aligned}$$

er lineært uavhengige og $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ er kontinuerlige for hvert par $(u, v) \in D$.

At \mathbf{X}_1 og \mathbf{X}_2 er lineært uavhengige på D er ekvivalent med egenskapen: $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \neq \mathbf{0}$ for alle par $(u, v) \in D$. Etttersom $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ alle er kontinuerlige i ethvert punkt forsikrer at alle tangentvektorene i punktet (u_0, v_0) ligger i et plan (utspent av \mathbf{X}_1 og \mathbf{X}_2) gjennom punktet på flaten. En kurve γ gjennom $(u_0, v_0) \in D$ blir avbildet som en kurve γ' på flaten M .

Dersom $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ beskriver en romkurve γ' i \mathbb{R}^3 vil som over tangentvektoren (x, y, z antas å være deriverbare) være gitt ved $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$. Vi ser nå på en flate hvor $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ og kurven $t \rightarrow (u(t), v(t))$ er en plan kurve γ gjennom $(u_0, v_0) \in D$. $t \rightarrow \mathbf{X}(u(t), v(t))$ er derfor en kurve γ' på flaten gjennom $\mathbf{X}(u_0, v_0)$. Tangentene (antar at x, y, z er differensierbare i (u_0, v_0) og at u, v er deriverbare i $t = t_0$) til γ' kan da beregnes ved hjelp av kjerneregelen.¹

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{X}(u(t), v(t)) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot v'(t) \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot v'(t) \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot u'(t) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot v'(t) \right) \mathbf{k} \\ &= u'(t) \cdot \mathbf{X}_1 + v'(t) \cdot \mathbf{X}_2,\end{aligned}$$

eller $\frac{d}{dt}\mathbf{X}(u(t_0), v(t_0)) = u'(t_0) \cdot \mathbf{X}_1(u_0, v_0) + v'(t_0) \cdot \mathbf{X}_2(u_0, v_0)$. Altså har vi vist at tangentene til flatekurven $\gamma' : t \rightarrow \mathbf{X}(u(t), v(t))$ i punktet $t = t_0$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{X}_1(u_0, v_0)$ og $\mathbf{X}_2(u_0, v_0)$. De to vektorene \mathbf{X}_1 og \mathbf{X}_2 vil altså spenne ut et plan gjennom punktet som er slik at alle tangenter ligger i dette planet.

Vi skal ta med et eksempel hvor vi betrakter flaten en rotasjonskurve tegner ut. Dette er ikke tilfeldig da vi vil bruke slike rotasjonslegemer senere i kapitlet.

Eksempel 6.0.2. Hvis en glatt kurve på formen $\Gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ i xz -planet roteres

¹Kjerneregelen gjelder bare dersom vi forutsetter at \mathbf{X} er glatt og u, v er deriverbare i $t = t_0$

rundt z -aksen, så er tegner den ut flaten gitt ved

$$\mathbf{X}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)).$$

Vi skal vise at \mathbf{X} er regulær når $f(u) \neq 0$ og $\Gamma'(u) \neq 0$ for alle u .

Eksempel. Vi ser først at

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)) \\ \mathbf{X}_2(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0). \end{aligned}$$

Hvis $\Gamma'(u) \neq 0$ for alle u , så er for en gitt u , enten $g'(u) \neq 0$ eller $f'(u) \neq 0$. Hvis $g'(u) \neq 0$ så er \mathbf{X}_1 og \mathbf{X}_2 tydelig lineært uavhengige. Hvis $f'(u) \neq 0$ og $g'(u) = 0$, så vil

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = f'(u)f(u)(\cos^2 v + \sin^2 v)\mathbf{k} = f'(u)f(u)\mathbf{k}.$$

Siden $f(u) \neq 0$ for alle u så er $f'(u)f(u) \neq 0$ og derfor er $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \neq \mathbf{0}$. Med andre ord er \mathbf{X}_1 og \mathbf{X}_2 lineært uavhengige.

Definisjon 6.0.3. En vektor \mathbf{v} er en **tangentvektor** til flaten M i punktet P hvis det er en kurve på M som passerer gjennom P og har hastighetsvektor \mathbf{v} i P . Mengden av alle tangentvektorer til M i P kalles **tangentplanet** til M i P .

Tangentplanet til M i P er et to-dimensjonalt vektorrom med $\{\mathbf{X}_1(u_0, v_0), \mathbf{X}_2(u_0, v_0)\}$ som basis, hvor $\mathbf{X}(u_0, v_0) = P$.

6.1 Metrikk

En metrikk er en funksjon d som tilordner et ikke-negativt reelt tall til et hvert par av elementer i en mengde P dvs $d : P \times P \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Definisjon 6.1.1. La P være en mengde. En metrikk er da en funksjon på $P \times P$ med positive reelle verdier som for alle $p, q \in P$ tilfredsstiller:

$$\begin{aligned} D_1 \quad d(p, q) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = q \\ D_2 \quad d(p, q) &= d(q, p) \quad \quad \quad (\text{symmetri}) \\ D_3 \quad d(p, r) &\leq d(p, q) + d(q, r) \quad \quad (\text{trekantulikheten}) \end{aligned}$$

For eksempel kan metrikken beskrive avstanden mellom to punkter i en geometri. Vi skal se på metrikker i en (differensial)geometri og deler den da opp metrikken opp i infinitesimale deler. Infinitesimale deler kan forklares som segmenter så små at de ikke kan måles. De er ikke lik null, men likevel så små at de ikke kan skilles fra null. De infinitesimale delene er ikke geometriske fenomener slik som et (selv et svært lite) segment, men kan ved summasjon brukes til å beregne en kurves lengde. Dette kaller vi Riemannsk metrikk.

6.1.1 Riemannsk metrikk

I en Riemannsk metrikk får vi avstandsfunksjonen ved å måle lengden til stykkevis glatte kurver $t \rightarrow \mathbf{r}(t)$. La $\mathbf{r}(t) = \alpha(t)\mathbf{i} + \beta(t)\mathbf{j} + \gamma(t)\mathbf{k}$ hvor α , β og γ er differensierbare på et intervall $[a, b]$. Da er buelengden til kurven fra $t = a$ til $t = b$ gitt ved:

$$s = \int_a^b \sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2 + \gamma'(t)^2} dt$$

Merk her at $\sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2 + \gamma'(t)^2} = |\mathbf{r}'(t)|$ som før kalles farten (lengden til hastighetsvektoren $\mathbf{r}'(t)$) for kurven. Vi kan altså si at integralet summerer opp uendelig små deler av farten i hvert punkt mellom a og b .

Vi har sett at en flate i \mathbb{R}^3 med kartesiske koordinater x , y og z for alle punkter på flaten kan beskrives med de to koordinatene u og v , slik at

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v). \end{aligned}$$

Vi har altså parametrisert flaten ved hjelp av koordinatene u og v . Den parametriserte flaten skrives som en vektorfunksjon:

$$\mathbf{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

som avhenger av de to (reelle) variablene u og v , og definerer en åpen mengde i uv -planet. Disse funksjonene kan hjelpe oss til å hente ut informasjon om egenskapene til flaten. Spesielt kan vi finne ut hvilke egenskaper som forblir uforandret av at flaten blir parametrisert. En av disse invariante egenskapene er lengden til en kurve tegnet på overflaten.

Buelengde kan beregnes som et integral og er lengden til en kurve tegnet på en flate. Vi lar da som før parametrene u og v avhenge av en tredje variabel t , som er definert på et intervall $[a, b]$. La derfor $\mathbf{X}(u(t), v(t))$ være en parametrisert kurve på en flate som

over. Vi forutsetter som tidligere at x , y og z er differensierbare og at u og v er deriverbare i intervallet $[a, b]$. Vi får;

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= x(u(t), v(t)) \\ \beta(t) &= y(u(t), v(t)) \\ \gamma(t) &= z(u(t), v(t)),\end{aligned}$$

og ved derivasjon:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \frac{\partial x}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} v'(t) \\ \beta'(t) &= \frac{\partial y}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v} v'(t) \\ \gamma'(t) &= \frac{\partial z}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial z}{\partial v} v'(t).\end{aligned}$$

Dette gir videre:

$$\begin{aligned}\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2 + \gamma'(t)^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 u'(t)^2 + 2\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} u'(t)v'(t) + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 v'(t)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 u'(t)^2 + 2\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} u'(t)v'(t) + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 v'(t)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 u'(t)^2 + 2\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} u'(t)v'(t) + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 v'(t)^2 \\ &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] u'(t) + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] v'(t) \\ &+ \left[\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}\right] 2u'(t)v'(t).\end{aligned}$$

Fra før vet vi at

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \\ \mathbf{X}_2(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right),\end{aligned}$$

og ved innsetting får vi:

$$\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2 + \gamma'(t)^2 = u'(t)^2(\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_1) + 2u'(t)v'(t)(\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2) + v'(t)^2(\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_2).$$

Da blir buelengden til kurven fra $t = a$ til $t = b$:

$$\sigma = \int_a^b \sqrt{u'(t)^2(\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_1) + 2u'(t)v'(t)(\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2) + v'(t)^2(\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_2)} dt.$$

Her er $(\mathbf{X}_n \cdot \mathbf{X}_m)$ skalarproduktet av de to vektorene \mathbf{X}_n og \mathbf{X}_m .

Den Riemannske metrikken er ofte presentert på den kvadratiske formen:

$$d\sigma^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (6.1)$$

hvor $E = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_1$, $F = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2$ og $G = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_2$. Denne kvadratiske formen kaller vi den første fundamentale formen og skal vi benytte oss av senere.

$d\sigma$ har som tidligere nevnt ingen selvstendig betydning, men kan tolkes som et infinitesimalt linjeelementet av en kurve på flaten. $d\sigma^2$ representerer i så måte kvadratet av forflytningen av $\mathbf{X}(u, v)$ når u øker med du og v med dv . Integrasjonen gir oss derfor et mål for den globale avstanden mellom punkter på vår flate M .

Hvis vi velger en annen parametrisering, for eksempel med parametrene r og s , så vil vi få andre verdier A , B og C . Kjernerregelen gjør det mulig å sette de to i sammenheng via ligningen

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial s} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

hvor T betegner transponeringen av matrisen. Som vi ser forandres matrisen med E , F og G ved hjelp av Jakobi-matrisen:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial s} \end{bmatrix}.$$

Ved å på en lur måte forandre parametriseringen kan buelengden bli lettere å regne med. Det kan være verdt å merke seg at vi ikke forandrer den kvadratiske formen. Det er bare snakk om et variabel-bytte og dersom vi setter inn sammenhengen mellom variablene vil vi se at den kvadratiske formen $d\sigma$ er uforandret. Den kvadratiske formen er altså selv invariant.

6.1.2 Eksempler

Eksempel 6.1.2. Euklidsk metrikk

I et rettlinjett koordinatsystem som det vanlige to-dimensjonale kartesiske koordinat-

systemet har vi standard euklidsk metrikk:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Så fra (6.1) ser vi at $E = 1$, $F = 0$ og $G = 1$ og vi får matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

En vilkårlig funksjon i det to-dimensjonale euklidske plan beskrives da med de to koordinatene x og y . Videre kjenner vi til at lengden av en slik kurve kan beskrives med

$$s = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

En vilkårlig funksjon i det samme planet kan også beskrives med polar-koordinater r og θ , hvor $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$. Da vil Jakobi-matrisen bli

$$J = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

Og transformasjonen fra kartesiske til polare koordinater er gitt ved matrisen:

$$\begin{aligned} J^T I J &= J^T J = \\ \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -r \sin \theta \cos \theta + r \sin \theta \cos \theta \\ -r \cos \theta \sin \theta + r \cos \theta \sin \theta & r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Altså blir $E' = 1$, $F' = 0$ og $G' = r^2$ og fra dette får vi at den nye Riemannske metrikken for buelengden er gitt ved:

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (6.3)$$

Vi kan her vise at de to distansefunksjonene er like. $x = r \cos \theta$ slik at $dx = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta$ og $y = r \sin \theta$ slik at $dy = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta$. Ved substusisjon får vi

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 = (dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta)^2 + (dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta)^2 \\ &= dr^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - r \sin \theta \cos \theta dr d\theta + r \sin \theta \cos \theta dr d\theta + r^2 d\theta^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 = d\sigma^2 \end{aligned}$$

Eksempel 6.1.3. Enhets-sfæren i \mathbb{R}^3

Enhets-sfæren i \mathbb{R}^3 har euklidisk standardmetrikk:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Ettersom vi vet at $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ på overflaten til enhets-sfæren, lar vi ($\rho = 1$,) ϕ og θ være nye (sfæriske) koordinater på overflaten. Slik at $x = \sin \phi \cos \theta$, $y = \sin \phi \sin \theta$ og $z = \cos \phi$. Merk at det er restriksjonen til sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ som gir oss muligheten å fjerne en parameter, en slik begrensning hadde vi ikke i eksempelet over. Ved utregning får vi da at:

$$dx = \cos \phi \cos \theta d\phi - \sin \phi \sin \theta d\theta$$

$$dy = \cos \phi \sin \theta d\phi + \sin \phi \cos \theta d\theta$$

$$dz = -\sin \phi d\phi$$

La så $d\sigma^2$ være $ds^2|_{S^2}$. Altså ds^2 på enhet-sfæren. Da kan vi beregne den nye metrikken $d\sigma^2$.

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= ds^2|_{S^2} = dx^2|_{S^2} + dy^2|_{S^2} + dz^2|_{S^2} \\ &= (\cos \phi \cos \theta d\phi - \sin \phi \sin \theta d\theta)^2 \\ &\quad + (\cos \phi \sin \theta d\phi + \sin \phi \cos \theta d\theta)^2 + (-\sin \phi d\phi)^2 \\ &= \cos^2 \phi \cos^2 \theta d\phi^2 - 2 \sin \phi \cos \phi \sin \theta \cos \theta d\phi d\theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta d\theta^2 \\ &\quad + \cos^2 \phi \sin^2 \theta d\phi^2 + 2 \sin \phi \cos \phi \sin \theta \cos \theta d\phi d\theta + \sin^2 \phi \cos^2 \theta d\theta^2 \\ &\quad + \sin^2 \phi d\phi^2 \\ &= (\cos^2 \phi \cos^2 \theta + \cos^2 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi) d\phi^2 \\ &\quad + (\sin^2 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ &= (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) d\phi^2 + \sin^2 \phi d\theta^2 \\ &= d\phi^2 + \sin^2 \phi d\theta^2 \end{aligned}$$

6.2 Kurver

Vi skal fortsette å studere kurver som geometriske fenomener, og de fleste har et vist begrep for hva en kurve er. Den kan være en sti en maur forflytter seg på en flate eller en vilkårlig reiseruten til en romrakett som flyr rundt i rommet. Den er uansett en punktmengde og

vi definerte en romkurve slik

Definisjon 6.2.1. En kurve i \mathbb{R}^3 er en vektorfunksjon av parameteren $t \in [a, b]$:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

For hver verdi av t får vi et punkt som skal være med i mengden kurven består av. Vi kan gi det en mer konkret betydning ved å tenke på det som posisjonen til en partikkel ved tiden t . Vi antar for det etterfølgende at funksjonene $x(t)$, $y(t)$, og $z(t)$ er kontinuerlige. Dette innebærer den ikke gjør plutselige hopp, eller forsvinner for så å dukke opp igjen et annet sted.

Definisjon 6.2.2. Den deriverte vektorfunksjonen til kurven \mathbf{r} er

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Hvis vi antar at også denne er en kontinuerlig vektorfunksjon, innebærer det at \mathbf{r} er differensierbar for alle verdier av t . Mer generelt kan vi si at dersom $\mathbf{r}'(t)$ eksisterer så er differensierbar i t . I fortsettelsen skal vi anta at \mathbf{r} også har kontinuerlige andrederiverte.

Vi kan altså betrakte t som tiden en partikkel bruker, men i geometrien er vi oftere opptatt egenskaper som lengde. Vi kan derfor ved behov parametrisere kurver med buelengden. Vi vil fortsette å kalle $|\mathbf{r}'(t)|$ for farten og betegner denne med $v(t)$. Merk at dette er en skalarfunksjon. Kurven har en buelengde (som vi så på i forrige seksjon) mellom to punkter som korresponderer med to verdier t_1 og t_2 for $\mathbf{r}(t)$. Hvis $t_1 < t_2$ så er buelengden $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{r}'(t)| dt$.

6.2.1 En kurves krumning

Vi skal her studere hvordan tangent-retningen endres langs en plan kurve. Kurven gis parameterform $\mathbf{r} = \Gamma(t)$. Tangent-retningen beskrives da med enhets-vektoren \mathbf{e} og er gitt ved

$$\mathbf{e}(t) = \frac{\Gamma'(t)}{|\Gamma'(t)|}. \quad (6.4)$$

Også her skriver vi $v(t) = |\Gamma'(t)|$, slik at $\mathbf{e}(t) = \frac{\Gamma'(t)}{v(t)}$. For å angi hvor fort kurven endrer retning bruker vi krumningen som vi definerer som

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\mathbf{e}}{ds} \right|, \quad (6.5)$$

der s er buelengden. For at den deriverte i 6.5 skal eksistere forutsetter vi som før at $\Gamma'(t)$ er kontinuerlig, ulik null og at $\Gamma''(t)$ eksisterer.

La så $s(t)$ betegne kurvens buelengde mellom et fast punkt med parameterverdien t_0 og et annet punkt med verdien t . Da har vi som før

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\Gamma'(\tau)| d\tau.$$

Ettersom $s'(t) = |\Gamma'(t)| = v(t) > 0$ er funksjonen $s = s(t)$ strengt voksende og vi har en invers funksjon $t = t(s)$, som har derivert $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{v(t)}$. Kjernerregelen (antas kjent) gir nå

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = \mathbf{e}'[t(s)] \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{e}'(t)}{v(t)}. \quad (6.6)$$

Derivering av likningen $\Gamma'(t) = v(t) \cdot \mathbf{e}(t)$ gir $\Gamma''(t) = v'(t)\mathbf{e}(t) + v(t)\mathbf{e}'(t)$. Videre er

$$\Gamma' \times \Gamma'' = v\mathbf{e} \times [v'\mathbf{e} + v\mathbf{e}'] = v^2(\mathbf{e} \times \mathbf{e}'). \quad (6.7)$$

\mathbf{e}' er imidlertid vinkelrett på \mathbf{e} ettersom vi vet at $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1$ og ved derivasjon $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}' = 0$. Derfor er $|\mathbf{e} \times \mathbf{e}'| = |\mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}'| = |\mathbf{e}'|$ og vi får fra (6.5), (6.6) og (6.7) at

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{e}}{ds} \right| = \frac{|\mathbf{e}'|}{v} = \frac{|\mathbf{e} \times \mathbf{e}'|}{v} = \frac{|\Gamma' \times \Gamma''|}{v^3}.$$

Krummingen i punktet $\Gamma(t)$ kan da altså beregnes med formelen

$$\kappa(t) = \frac{|\Gamma'(t) \times \Gamma''(t)|}{|\Gamma'(t)|^3}, \quad (6.8)$$

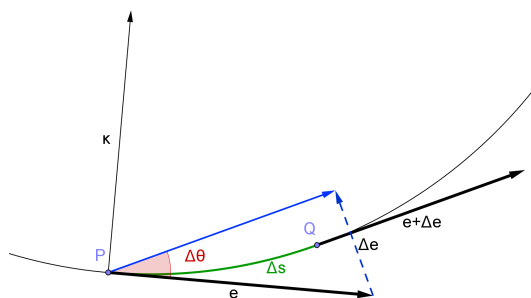
som bare avhenger av $\Gamma(t)$. I konkrete tilfeller må man sette inn parametriseringen på koordinatform. Gitt at parametriseringen $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ så vil

$$\begin{aligned} |\Gamma'(t)|^2 &= x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \\ \Gamma' \times \Gamma'' &= (y'z'' - y''z', z'x'' - z''x', x'y'' - x''y'). \end{aligned}$$

Om kurven i tillegg er plan kan vi gi den en parametrisering hvor $z(t) = 0$, da forenkles uttrykket til krummingen på koordinatform til

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (6.9)$$

Definisjonen på krumming kan begrunnes ut i fra følgende tankerekke. La \mathbf{e} og $\mathbf{e} + \Delta\mathbf{e}$ være enhets-tangent-vektorene i to nærliggende punkter P og Q på kurven (se figur 6.3).



Figur 6.3:

La videre $\Delta\theta$ være vinkelen mellom de to vektorene og Δs være lengden på buen PQ . Da er $|\Delta\mathbf{e}| = 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}$ og

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{e}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\mathbf{e}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$

Krummingen til en kurve er altså et mål på tangentvektorens retningsendring per lengdeenhet på buen. Sagt på en annen måte gir den oss, for hvert punkt på en kurve, et tall som kvantifiserer kurvens avvik fra å være rett.

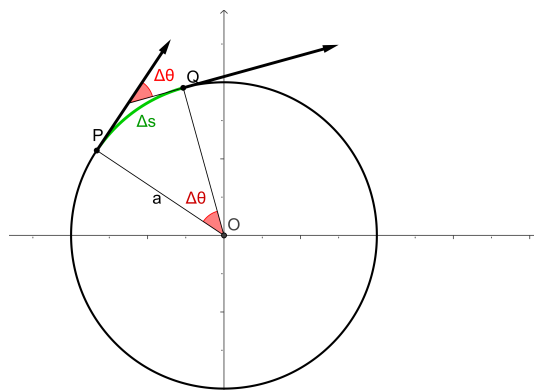
Hvis buen er en sirkel med radius a (se figur 6.4) så er $\Delta s = a\Delta\theta$ og $\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{a}$. Sirkelens krumning er altså konstant, det vil si lik i hvert punkt. da kan vi uttrykke radien med

$$a = \frac{1}{\kappa(s)}.$$

Av denne grunn kaller vi generelt

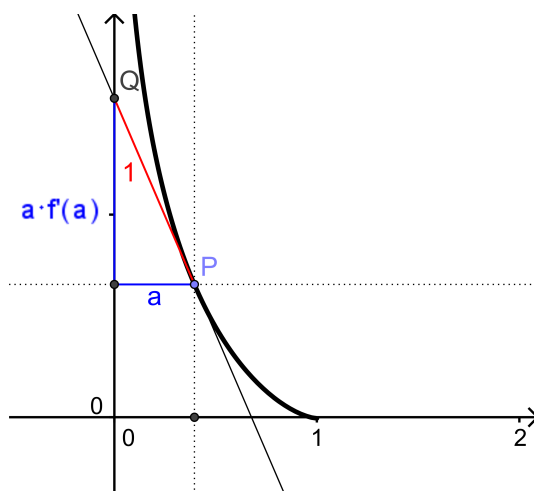
$$R = \frac{1}{\kappa},$$

for krumningsradien.

Figur 6.4: Sirkel γ med tangentlinje T og radius a .

For å billedgjøre begrepet krumning i større grad kan vi se for oss en partikkel som beveger seg i et plan med konstant enhets-fart. Stien partikkelen tilbakelegger gir oss en kurve C i planet. Hvis vi lar tiden være parameteren gir denne oss en naturlig parametrisering av C . Retningen partikkelen har i ethvert punkt gis som en vektor T og kan variere. Krumningen gir oss et mål (det vil si en skalar; et tall) for hvor fort partikkelen endrer retning, eller sagt på en annen måte hvor fort T roterer når t varierer. Hvis retningen ikke forandres ($T = \text{konst.}$) er krumningen lik null. Hvis retningen forandres lite, er krumningen liten, til eksempel hvis partikkelen løper rundt en sirkel med stor (nær uendelig) radius, eller svinger sakte. I motsatt fall er krumningen stor hvis retningen forandres mye, til eksempel hvis partikkelen løper rundt en sirkel med liten radius, eller tar en krapp sving.

Eksempel 6.2.3 (Beregning på traktrisen).



Figur 6.5: Traktrisen

Figur 6.5 viser grafen til det vi kaller traktrisen. Rotasjonslegemet som dannes av å rotere rundt y -aksen skal vi senere se at spiller en viktig rolle for hyperbolsk geometri. Traktrisen er i så måte ikke tilfeldig valgt. La oss derfor studere traktrisen. En traktrise (eller slepekurva som den også blir kalt) er stien en tung stein tegner ut når den dras med en lenke med konstant lengde 1 fra sitt startsted $(1, 0)$ etter en traktor som kjører bortover y -aksen. Sagt på en annen måte er det kurven som er slik at lengden på tangentlinjen fra punktet til y -aksen er konstant og lik 1. Kurven vil altså aldri treffe y -aksen, men nærme seg den mer og mer ettersom y blir større. Dersom $y = f(x)$ er den kartesiske likningen for grafen vet vi at tangentlinjen i et punkt $P = (a, f(a))$ er gitt ved $y_T = \frac{d}{dx}f(a) \cdot (x-a) + f(a)$. Tangentlinjen skjærer altså y -aksen i $Q = (0, f(a) - f'(a) \cdot a)$. Avstanden $|PQ| = 1$ gir oss følgende betingelse

$$\begin{aligned} |PQ| = 1 &= \sqrt{[a-0]^2 + [f(a) - (f(a) - f'(a)a)]^2} \\ &= a\sqrt{1 + f'(a)^2}. \end{aligned}$$

Ettersom $0 < x = a \leq 1$ for alle punkter på traktrisen kan vi kvadrere uten tap og får

$$\begin{aligned} 1 &= a^2(1 + f'(a)^2) \\ f'(a)^2 &= \frac{1}{a^2} - 1 \\ f'(a) &= \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} = \pm \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}. \end{aligned}$$

Merk her at $0 < a^2 \leq 1$ slik at vi ikke får problemer med kvadrattrot av et negativt tall. Vi er videre bare interessert i oversiden av x -aksen slik at vi kan konsentrere oss fortegnet som gir negativt stigningstall for tangentlinjen $f'(a) = -\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$. Med andre ord har vi differensiallikningen med initial-verdi $y(1) = 0$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-\sqrt{1-t^2}}{t}, \quad (6.10)$$

men ettersom vi her har y som en funksjon av x er altså $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}$. Det er også klart at $x' = \frac{dx}{dx} = 1$ og videre at $x'' = 0$ og ved innsetting i (6.9) får vi:

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (6.11)$$

Derivasjon gir da:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx} \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x} \\ &= -\frac{x \frac{d}{dx} (\sqrt{1-x^2}) + \sqrt{1-x^2}}{x^2} \\ &= \frac{x \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{-x^2 - 1 + x^2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-1}{x^2 \sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Så vi finner krumningen:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \frac{1}{(1+\frac{1-x^2}{x^2})^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \cdot x^3 = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Vi kan også finne krumningen ved å studere differensialproblemet med initial-verdi $y(1) = 0$ nærmere. Den parametriseringen vi bruker her skal vi bruke senere når vi studerer rotasjonslegemet til traktrisen. Husk at:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-\sqrt{1-t^2}}{t}.$$

Vi finner y ved integrasjon.

$$\begin{aligned} \int dy &= \int_x^1 \frac{-\sqrt{1-t^2}}{t} dt \\ y &= \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) - \sqrt{1-x^2}, \end{aligned}$$

når vi bare er interessert i verdier der $y > 0$.² Leddet $\ln \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right)$ kan skrives som $\operatorname{sech}^{-1}(x)$ og vi får da følgende kartesiske likning

$$y = \operatorname{sech}^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}.$$

²Integrasjonen gir egentlig $\pm \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} - \sqrt{1-x^2}$ som vi kunne brukt videre. Vi letter dog arbeidet litt med å bare ta for oss den ene grenen av traktrisen, men i utgangspunktet kan traktrisen tenkes på som en symmetrisk lik gren på andre siden av y -aksen.

Vi ser at $y \in [0, \infty]$, mens x er begrenset til intervallet $(0, 1]$. Når $y = 0$ er $x = 1$ har kurven sitt topp-punkt og når $y \rightarrow \infty$ nærmer kurven seg x -aksen. En parametrisering av traktrisen er som følger

$$\begin{aligned}x(t) &= \operatorname{sech}(t) \\y(t) &= t - \tanh(t),\end{aligned}$$

hvor t er definert i intervallet $[0, \infty]$. Vi kan sette inn $x(t)$ og $y(t)$ i den kartesiske likningen over å se at de to fremstillingene samsvarer. $t = 0$ svarer til topp-punktet $(1, 0)$, mens vi beveger oss oppover y -aksen når t stiger.

Ved utregning får vi første- og andre-deriverte

$$\begin{aligned}x'(t) &= -\operatorname{sech}(t) \tanh(t) \\y'(t) &= \tanh^2(t) \\x''(t) &= \operatorname{sech}(t) \tanh^2(t) - \operatorname{sech}^3(t) \\y''(t) &= 2\operatorname{sech}^2(t) \tanh(t)\end{aligned}$$

Da kan vi sette inn i formelen for krumming (6.5) og får:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \\&= \frac{|2\operatorname{sech}^3(t) \tanh^2(t) + \tanh^2(t)[\operatorname{sech}(t) \tanh^2(t) - \operatorname{sech}^3(t)]|}{(\operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) + \tanh^4(t))^{\frac{3}{2}}} \\&= \frac{|\tanh^2(t) \operatorname{sech}(t)[\operatorname{sech}^2(t) + \tanh^2(t)]|}{(\tanh^2(t))^{\frac{3}{2}}} \\&= \frac{|\tanh^2(t) \operatorname{sech}(t)|}{\tanh^3(t)}.\end{aligned}$$

Ved å studere $\tanh^2(t) \operatorname{sech}(t)$ ser vi at denne er positiv for alle verdier av t . Vi kan derfor slutte at:

$$\kappa = \frac{\operatorname{sech}(t)}{\tanh(t)} = \frac{\frac{1}{\cosh(t)}}{\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}} = \frac{1}{\sinh(t)} = \frac{2}{e^t - e^{-t}}.$$

Fra begge beregningene fikk samme svar, ettersom

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{e^t - e^{-t}},$$

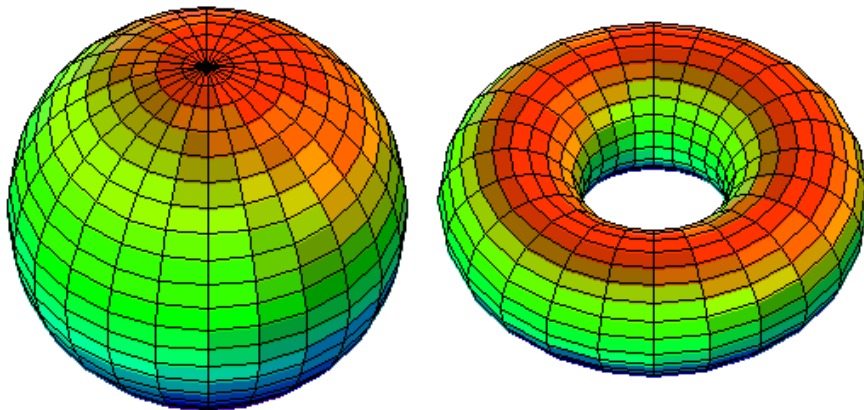
innsatt $x = \operatorname{sech}(t)$.

Som vi ser vil krummingen variere. Når $t = 0$ vil $x = 0$ og krummingen vil være ∞ . Samtidig vil krummingen gå mot null når $t \rightarrow \pm\infty$ eller $x \rightarrow 0$. Vi beveger oss da altså langt oppover langs y -aksen på grafen til funksjonen. Dette skal vi se stemmer godt overens med ønsket krumning av flaten som dannes av rotasjonslegemet.

6.3 En flates krumning

I denne rapporten er hovedmålet å diskutere og redegjøre for hyperbolsk geometri. Blant andre Beltrami knytter dette til geometrien på en flate som i et euklidsk rom har konstant og negativ krumning. Jeg vil derfor i det følgende gi en forklaring på begrepet krumning av en flate.

Krumning kvantifiserer som før en kurve eller en flates avvik fra å være flat. Altså har en plan flate krumning lik null. En sirkel derimot er tydelig krummet og krumningen avhenger av radius av sirkelen. Når sirkelen blir stor nærmer den seg en rett linje og krumningen går mot null, når radius er liten blir derimot krumningen stor. Dermed kan $\kappa = \frac{1}{r}$ virke som en passende formel for krumningen av en sirkelbue, hvor r er radius til en sirkelen. Jeg vil vise at krumningen til en sirkelbue eller en sfære er konstant og positiv, mens en pseudosphære har en konstant og negativ krumning.



Figur 6.6: Sfære og torus.

Overflaten til de to figurene i figur 6.6 er tydelig krummede og like tydelig er de forskjellige. Krumningen til en kurve er som vi har sett bestemt utifra retningen til kurva (mer nøyaktig valg av normalvektor) og som en følge av dette kan og vil den alltid velges slik

at den er positiv. I denne forstand er krumning av en kurve uavhengig av parametriseringen. Krumningen til en flate skal vi se at også er uavhengig av hvilken orientering vi velger. Den parametriseringen vi velger må vi beholde for hele flaten og dermed vil valg av normalvektor og dermed orientering være uvesentlig.

Når vi går videre skal vi likevel ta med oss tanken om at krumningen av en kurve er positiv hvis krumningen skjer mot normalvektoren i punktet og negativ hvis den krumningen bøyer flaten bort fra normalvektoren. En kurve er, som vi har sett på, en-dimensjonal (den har en variabel) mens et plan er to-dimensjonalt (den har to variable). En flate er bildet av en funksjon med to slike variable³. Vi skal begrense oss til å se på tilfellet der flaten er en undermengde av det 3-dimensjonale kartesiske rommet \mathbb{R}^3 , slik at en flate beskrevet med en funksjon er på formen

$$\Gamma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

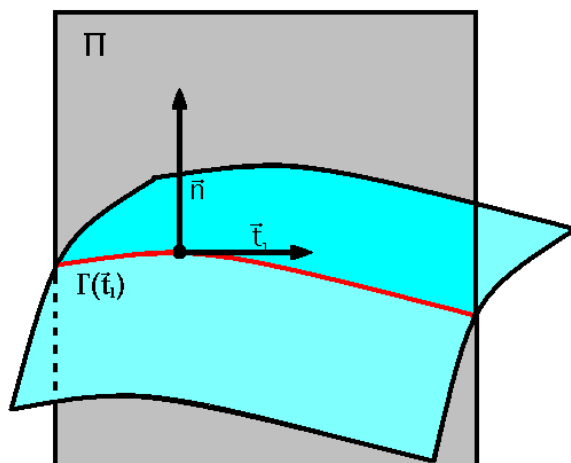
Funksjonen Γ antas å ha nok deriverte slik at det er en normalvektor og et tangentplan i hvert punkt. Med andre ord må Γ være glatt nok slik at $\Gamma' \neq 0$ og kontinuerlig, samt at Γ'' må eksistere. Funksjonen må også være en bijeksjon, bortsett fra at punkter på randen av rektangelet $[a, b] \times [c, d]$ kan bestemmes. Flatene er da bildet av Γ og funksjonen Γ er en parametrisering av flaten. Eksempelvis kan en sfære med radius a defineres som bildet av en funksjon $\Gamma : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ hvor $\Gamma(u, v) = (a \cos u \sin v, a \sin u \sin v, a \cos v)$, og en torus defineres som bildet av $\Gamma : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ hvor $\Gamma(u, v) = (a(\cos u)(2 + \cos v), a(\sin u)(2 + \cos v), a \sin v)$. Et bilde av de to ble gitt i starten av avsnittet, figur 6.6, sfæren til høyre og torusen til venstre.

Krumningen til en flate eller den gaussiske-krumningen er definert som

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \tag{6.12}$$

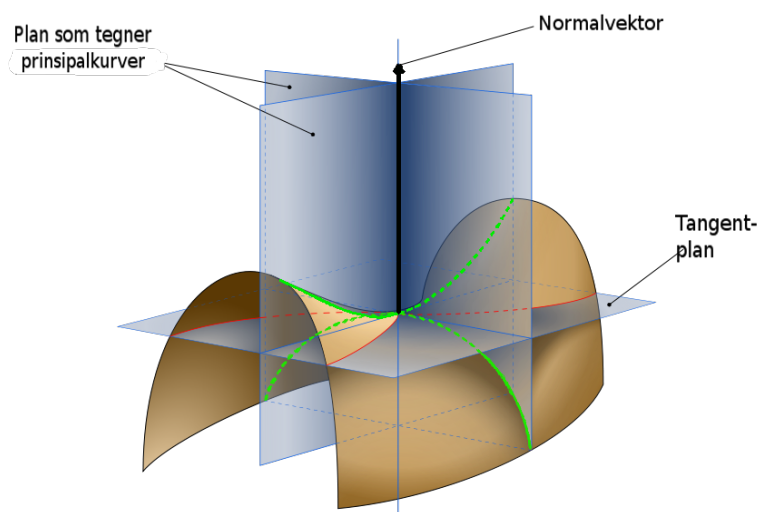
hvor $\kappa_1 \cdot \kappa_2$ er produktet av krumningen av to prinsipale kurver i punktet. Vi tenker oss at $P = (x, y, z)$ er et punkt på en flate i \mathbb{R}^3 .

³Generelt er en flate et geometrisk rom som for hvert punkt i rommet er området rundt punktet avbildet av en kontinuerlig bijeksjon av to variable.



Figur 6.7: Krumningen k_1 er krumningen av $\Gamma(\vec{t}_1)$.

La så \vec{n} være en av normalvektor (enten opp eller ned) til flaten og \vec{t}_1 være en tangentvektor til flaten i punktet P . Vi kan velge \vec{t}_1 kan velges i uendelig mange retninger. Planet som spennes ut av disse \vec{n} og \vec{t}_1 kaller vi Π , og Π snitter flaten i en snittkurve $\Gamma(\vec{t}_1)$. Denne snittkurven (tegnet med rødt i figur 6.7) har krumning som vi kan beskrive med k_1 . k_1 beskriver nå krumningen av flaten i retningen bestemt ved \vec{t}_1 . Se figur 6.7. Ettersom flaten er glatt vil normalvektoren variere kontinuerlig med tangentvektoren. La θ være vinkelen ved innføring av polar-koordinater i tangentplanet. Dette fører til at det for hver verdi av $\theta \in [0, 2\pi]$ vil være finnes en verdi for krumningen som vi kaller k_θ . Merk her at dersom vi bytter orientering på normalvektoren \vec{n} så vil normalplanet Π bli det samme, mens alle k_θ vil skifte fortegn. Vi kan nå sammenligne alle verdier av k_θ og finne dens maksimum og minimum. Det kan selvfølgelig være flere retninger som gir samme krumning eller at krumningen er lik i alle retninger. Uansett finner vi en maksimumsverdi og en minimumsverdi. I disse to retningene ligger det vi kaller for prinsipal-kurvene og κ_1 og κ_2 bestemmes av krumningen i disse retningene. Faktisk viser det seg at de to prinsipale retninger alltid opptrer vinkelrett på hverandre, men det vil ikke vises her da dette ikke spiller en stor rolle i den videre undersøkelsen.



Figur 6.8: Tangentplan, normalvektor og to plan som tegner ut prinsipal-kurvene til et sadel-punkt

I figur 6.8 er tangentplanet, normalvektoren og de to prinsipale plan tegnet og vist for sadelpunktet på en flate (en sadel). Kurvene som krumningene κ_1 og κ_2 er satt på er tegnet inn med grønt. De to krumningene vil som vi ser ha forskjellig fortegn for denne flaten. Krumningen av den kurven som krummer mot normalvektoren er positiv mens den andre er negativ. Derfor vil flatens krumning $K = \kappa_1\kappa_2$ være negativ⁴.

Når vi til nå har diskutert krumning av en flate har vi gjort det med bruk av hvordan denne flaten er plassert i et større rom, hos oss \mathbb{R}^3 . Med andre ord har krumningen vært avhengig av vektorer og plan som ligger i \mathbb{R}^3 og ikke bare på flaten. Mål som på en slik måte avhenger av rommet flaten er plassert i kaller vi ekstrinsiske, mens egenskaper som bare avhenger av forhold internt på flaten kaller vi intrinsiske. Vår forklaring så langt kan lede oss i den tro at en flates krumning er en ekstrinsisk egenskap. Gauss å vise at dette faktisk var en intrinsisk egenskap som kunne bestemmes alene ut i fra metrikken på flaten. Han kalte dette resultatet for Theorema Egregium, som på latin betyr “bemerkelsesverdig teorem”.

Teorem 6.3.1 (Theorema Egregium). *Krumningen til en flate er invariant under en lokal isometri.*

Bevis. Vi skal ikke bevise dette her. Et bevis finnes for teoremet og en nærmere beskrivelse finnes på s.536 i [Gra2006], men gjør bruk av en mengde stoff vi ikke skal ta med her. Jeg

⁴Hvis vi velger normalvektoren nedover i stedet for oppover slik som i figur 6.8 vil fortegnet på både κ_1 og κ_2 byttes, men produktet K vil beholde det samme fortegn, her negativt.

vil likevel prøve å forklare hvorfor det er slik som Gauss beviste. \square

På en regulær flate i et euklidisk 3-dimensjonal vil vi kunne bestemme en metrikk som bestemmer buelengden av en kurve på flaten. Dette ble beskrevet i seksjon 6.1 Metrikk. Krumningen kan da beskrives som

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (6.13)$$

når vi har en regulær flate å gjøre. Her er E , F og G er koeffisienten fra den første første fundamentale formen (I), og e , f , og g er koeffisienten fra den andre fundamentale formen (II). Den første fundamentale formen fås direkte fra Riemann metrikken til flaten

$$I : \quad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (6.14)$$

Den beskriver buelengden til en kurve på flaten, og er en intrinsisk egenskap. Koeffisienten er som vi har sett gitt ved skalarproduktet

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_1 \\ F &= \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 \\ G &= \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_2 \end{aligned}$$

Den andre fundamentale formen (II) er

$$II : \quad edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \quad (6.15)$$

hvor

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbf{X} \\ f &= \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbf{X} \\ g &= \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Her er

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{X} \times \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{X}}{\left| \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{X} \times \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{X} \right|} = \frac{\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|},$$

den (normaliserte) normalvektoren til punktet på flaten.⁵ Setter vi de to sammen får vi:

$$\begin{aligned} e &= \frac{\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|} \cdot \frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbf{X} = \frac{\det(\frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|} \\ f &= \frac{\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|} \cdot \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbf{X} = \frac{\det(\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|} \\ g &= \frac{\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|} \cdot \frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbf{X} = \frac{\det(\frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|}. \end{aligned}$$

Der determinanten tas over matrisen bestående av de tre vektoren i hver sin kolonne. Fra tidligere har vi sett at $(|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|)^2 = EG - F^2$ og innsatt i (6.13) får vi

$$K = \frac{\frac{\det(\frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \det(\frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{EG - F^2} - \frac{\det(\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^2}{EG - F^2}}{EG - F^2} \quad (6.16)$$

$$= \frac{\det(\frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \det(\frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) - \det(\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^2}{(EG - F^2)}. \quad (6.17)$$

Ved utregning finner vi at (her betyr subskrift partiellderivert)

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\right) \det\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\right) &= \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \left(\begin{matrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right) \\ \mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{X}_{vv} & \mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{X}_u & \mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_{vv} & \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u & \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_{vv} & \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_u & \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

og likt at

$$\det\left(\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\right)^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_{uv} & \mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_u & \mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_{uv} & \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u & \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_{uv} & \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_u & \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v \end{vmatrix}.$$

Nesten alle disse prikk-produktene kan vi lett erstatte med E, F og G ettersom $E = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u$,

⁵Vi ser her at dersom vi kan får de to tangentvektorene \mathbf{X}_1 og \mathbf{X}_2 til å stå vinkelrett på hverandre vil uttrykket kunne forenkles betraktelig. Vi kommer tilbake til dette senere.

$F = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v$ og $G = \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v$ med den nye skrivemåten. Unntak er $\mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{X}_{vv}$ og $\mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_{uv}$ som vi må jobbe litt mer med⁶

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{X}_{vv} - \mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_{uv} &= (\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_{vv})_u - \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_{vvu} - (\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_{uv})_v + \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_{uvv} \\
 &= (\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_{vv})_u - (\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_{uv})_u \\
 &= ((\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v)_v - \mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_v)_u - \frac{1}{2}(\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u)_{vv} \\
 &= (\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v)_{vu} - \frac{1}{2}(\mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v)_{uu} - \frac{1}{2}(\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u)_{vv} \\
 &= F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} - \frac{1}{2}E_{vv}.
 \end{aligned}$$

Ved innsetting får vi Brioschis formel:

Teorem 6.3.2 (Brioschis formel). *La $\mathbf{r} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ være en parametrisering av en flate. Da vil krumningen av flaten være gitt ved*

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)} \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} \right\} \quad (6.18)$$

Bevis. Teoremet er en følge av det vist over. \square

Med dette har vi også til en viss grad vist at (se [Gra2006]s. 535 for mer nøyaktig fremgangsmåte) krumningen til en flate bare er avhengig av metrikken, det er dette vi kaller for intrinsisk.

Metrikken til en flate er som tidligere vist gitt ut i fra tre variable E , F og G (se (6.14)). Dersom vi forandrer parametrene vil også koeffisientene E , F og G forandres. Dette har vi sett på i seksjon 6.1. Dersom vi benytter oss av diagonaliserte metrikker vil $F = 0$ og dette gjør at formelen for krumning kan forenkles ytterligere.

Teorem 6.3.3. *La $\mathbf{r} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ være en diagonalisert parametrisering av en flate med en metrikk slik at $F = 0$. Da vil krumningen av \mathbf{r} være gitt ved*

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{-1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\} \\
 &= \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right\}. \quad (6.19)
 \end{aligned}$$

⁶Merk at $\mathbf{X}_{vvu} = \mathbf{X}_{uvv}$!

Bevis. Vi får dette ved innsetting av $F = 0$ i Brioschis formel (Teorem 6.3.2). \square

6.3.1 Eksempler

Eksempel 6.3.4. Hvis flaten vi skal bestemme krumningen på er et plan vil et hvert punkt kunne ha rette snittkurver. Altså vil de to prinsipale krumningen begge være lik null, og dermed blir krumningen av flaten null. Det samme gjelder sylindre ettersom en av de prinsipale kurvene vil være en rett linje uansett punkt⁷, og dermed ha krumning lik null. Krumningen på slike flater er også konstant ettersom den er null i et hvert punkt på flaten.

Eksempel 6.3.5. En annen flate som har konstant krumning er sfæren. Se figur 6.6. Geodetiske kurver på en sirkel er alltid deler av stor-sirkler og krumningene κ_1, κ_2 tas derfor over to av disse. Prinsipal-krumningen kan skaffes fra to vilkårlige stor-sirkler gjennom et vilkårlig punkt på sirkelen siden alle punkt vil kunne representeres ved de samme sirklene. Vi kan som tidligere nevnt for å være på den sikre siden bruke to ortogonale kurver. Uansett blir krumningen $\kappa_i = \frac{1}{r}$; $i = 1, 2$, dersom vi velger normalvektoren ut av sfæren og r er radius til sfæren. Dersom vi velger normalvektoren inn i sfæren blir krumningen av stor-sirklene $\kappa_i = -\frac{1}{r}$; $i = 1, 2$. Uavhengig av hvilken retning vi velger på en normalvektor (vi har jo egentlig argumentert for at vi ikke behøver den) vil krumningen på flaten bli produktet av de to og dermed får vi

$$K = \frac{1}{r^2}.$$

Denne krumningen er lik for et hvert punkt på sirkelen, altså konstant, og dessuten positiv siden r er være positiv.

Vi kan beregne krumningen også instrinsiktivt (det vil si uten bruk av hvordan sfæren er plassert i \mathbb{R}^3). Dersom vi bruker vanlige sfære-koordinater for sfæren med radius a har vi parametriseringen $\mathbf{r} = [a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi]$. I seksjonen 6.1 har vi vist at metrikken på sfæren da kan gis med $d\sigma^2 = a^2 d\phi^2 + a^2 \sin^2 \phi d\theta^2$ ($E = a^2$, $G = a^2 \sin^2 \phi$).

⁷Billedlig kan vi si at en hver flate som kan brettes, vris, eller rulles ut som et papirark vil ha krumning lik null.

Ved innsetting i (6.19) får vi:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{G_\phi}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{E_\theta}{\sqrt{EG}} \right) \right\} \\
 &= \frac{-1}{2\sqrt{a^4 \sin^2 \phi}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{2a^2 \sin \phi \cos \phi}{\sqrt{a^4 \sin^2 \phi}} + \frac{0}{\sqrt{EG}} \right\} \\
 &= \frac{-1}{2a^2 \sin \phi} (-\sin \phi) \\
 &= \frac{1}{a^2}.
 \end{aligned}$$

Krumningen av en flate er ikke alltid konstant. For eksempel vil den på en sadel (se figur 6.8) alltid være negativ, men verdien av krumningen vil variere. Se [Ven2006] side 352 for en utfyllende beregning av dette. På en torus ("smultring") vil krumningen variere mellom både negativ, null og positiv. Se figur 6.6 også her. Punktene som ligger som en ring (sirkel) rundt øverst på torusen, og punktene som på samme måte ligger nederst på torusen har krumning lik null. Alle punktene på utsiden av disse to sirklene har positiv krumning, mens alle punktene på innsiden har negativ krumning. Maksimal krumning finner vi på den sirkelen som ligger ytterst (det vil si den største sirkelen som ligger i x, y -planet). Minimal krumning (det vil si maksimal negativ) finner vi på sirkelen innerst i smultringen. De to prinsipale kurvene vil i et hvert punkt bestå av en liten sirkel som går rundt tverrsnittet av torusen i punktet. Den andre prinsipale kurven vil være en stor sirkel rundt hullet i smultringen. krumningen av den lille sirkelen vil alltid være den samme, $\kappa_1 = \frac{1}{r_l}$, hvor r_l er radius til den lille sirkelen i tverrsnittet av smultringen. Den store sirkelens krumning κ_2 bestemmer fortegnet og størrelsens variasjon.

Eksempel 6.3.6. Vi kan diagonalisere flater slik at $F = 0$. Vi kan også gi de fleste flater diagonaliserte polarkordinater slik at i tillegg $E = 1$. Anta derfor at vi har en slik flate som er parametrisert slik at den Riemanske metrikken kan uttrykkes ved $ds^2 = dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$, der $f(r)$ er positiv glatt funksjon og $r \geq 0$. Vi kan da beregne krumningen til en slik flate. Ved innsetting av $E = 1$, $G = f(r)^2$, $E_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot 1 = 0$ og $G_r = \frac{\partial}{\partial r} f(r)^2 = 2f(r)f'(r)$ i (6.19) får vi krumningen

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{G_r}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{E_\theta}{\sqrt{EG}} \right) \right\} \\
 &= \frac{-1}{2f(r)} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \frac{2f(r)f'(r)}{f(r)} \right\} \\
 &= \frac{-1}{2f(r)} 2f''(r) = \frac{-f''(r)}{f(r)},
 \end{aligned}$$

når $r > 0$.

La oss se på kurvene $\theta = c = \textit{konst.}$ De tegner ut rette „stråler” i det diagonaliserte planet vårt. Hvis vi beregner lengden på „strålen” mellom på to punkter (r_1, c) og (r_2, θ) får vi

$$\begin{aligned} \int ds &= \int \sqrt{dr^2 + f(r)^2 d\theta^2} \\ &= \int_{r_1}^{r_2} |dr| = |r_2 - r_1|, \end{aligned}$$

ettersom $d\theta = 0$. Dette er også den korteste avstanden mellom de to punktene etter som det minste bidraget leddet $f(r)^2 d\theta^2$ kan gi er 0. Altså har vi at

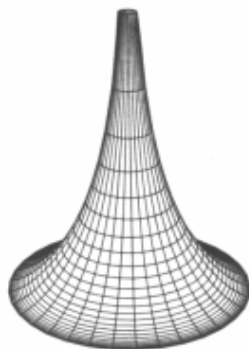
$$\begin{aligned} \int ds &= \int \sqrt{dr^2 + f(r)^2 d\theta^2} \\ &\geq \int_{r_1}^{r_2} |dr| = |r_2 - r_1|. \end{aligned}$$

Dette beviser at $\theta = c$ tegner ut geodetiske kurver på flaten vår.

Anta for fortsettelse at θ er periodisk med periode 2π . Altså slik som vinkelen i polarkoordinatene. Kurven $r = r_0$ tegner ut en lukket kurve som har konstant avstand fra punktet $r = 0$ (origo). Dette ser vi ettersom alle punkter (r_0, θ) har avstanden $|r_0 - 0| = r_0$ fra origo $(0, \theta)$ som en følge av det over. Vi kan beregne lengden til kurva $r = r_0$

$$\begin{aligned} \int ds &= \int \sqrt{dr^2 + f(r_0)^2 d\theta^2} \\ &= \int_0^{2\pi} f(r_0) d\theta \\ &= 2\pi \cdot f(r_0) \end{aligned}$$

Eksempel 6.3.7. Som vi bemerket har sadelen negativ krumning i alle punkt, men den er ikke konstant. En flate med konstant og negativ krumning er pseudosfæren. Pseudosfæren får vi ved å rotere traktrisen vi tidligere har sett på rundt y -aksen.



Figur 6.9: Pseudosfæren

I figur 6.9 over ser vi figuren til parametriseringen $\mathbf{r} = [\operatorname{sech}\phi \sin \theta, \phi + \tanh(\phi), \operatorname{sech}\phi \cos \theta]$ for $\phi = (0, 4)$ og $\theta = [0, 2\pi)$ plottet i Maple. Merk at y -aksen i figuren peker oppover i figuren mens xz -planet ligger nederst der pseudosfæren er bredest. Pseudosfæren er rotasjonslegemet som dannes av å rotere traktrisen vi tidligere så på rundt y -aksen. (Se eksempel 6.0.2 på side 72 for et generelt eksempel for rotasjonslegemer og eksempel 6.2.3 på side 82 for beregninger på traktrisen)

La oss først bruke formlene vi produsert over til å beregne krummningen og deretter forsøke og gi en forklaring av hvorfor krummningen av pseudosfæren er konstant -1 .

Dersom vi bruker parametriseringen over for pseudosfæren finner vi:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{-\sin \theta \cdot \sinh \phi}{\cosh^2 \phi} d\phi + \frac{\cos \theta}{\cosh \phi} d\theta \\ dy &= (1 - (1 - \tanh^2(\phi))) \cdot d\phi = \tanh^2(\phi) d\phi. \\ dz &= \frac{-\cos \theta \cdot \sinh \phi}{\cosh^2 \phi} d\phi - \frac{\sin \theta}{\cosh \phi} d\theta \end{aligned}$$

Og vi kan bruke standardmetrikken:

$$\begin{aligned}
 d\sigma^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\
 &= \left(\frac{\sin^2 \theta \cdot \sinh^2 \phi}{\cosh^4 \phi} d\phi^2 - 2 \frac{\cos \theta \sin \theta \sinh \phi}{\cosh^3 \phi} d\phi d\theta + \frac{\cos^2 \theta}{\cosh^2 \phi} d\theta^2 \right) \\
 &\quad + (\tanh^4 \phi d\phi^2) \\
 &\quad + \left(\frac{\cos^2 \theta \cdot \sinh^2 \phi}{\cosh^4 \phi} d\phi^2 + 2 \frac{\cos \theta \sin \theta \sinh \phi}{\cosh^3 \phi} d\phi d\theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cosh^2 \phi} d\theta^2 \right) \\
 &= \left(\frac{\sinh^2 \phi}{\cosh^4 \phi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \tanh^4 \phi \right) d\phi^2 + \frac{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{\cosh^2 \phi} d\theta^2 \\
 &= \tanh^2 \phi \left(\frac{1 + \sinh^2 \phi}{\cosh^2 \phi} \right) d\phi^2 + \frac{1}{\cosh^2 \phi} d\theta^2 \\
 &= \tanh^2 \phi d\phi^2 + \frac{1}{\cosh^2 \phi} d\theta^2.
 \end{aligned}$$

Dermed får vi den første fundamentale formen med verdiene $E = \tanh^2 \phi$ og $G = \frac{1}{\cosh^2 \phi}$.

Ved å partiellderiverte får vi $E_\theta = 0$, og $G_\phi = -\frac{2 \sinh \phi}{\cosh^3 \phi} = -\frac{2 \tanh \phi}{\cosh^2 \phi}$, og kan da regne ut krumningen til pseudosfæren ((6.19) på side 92):

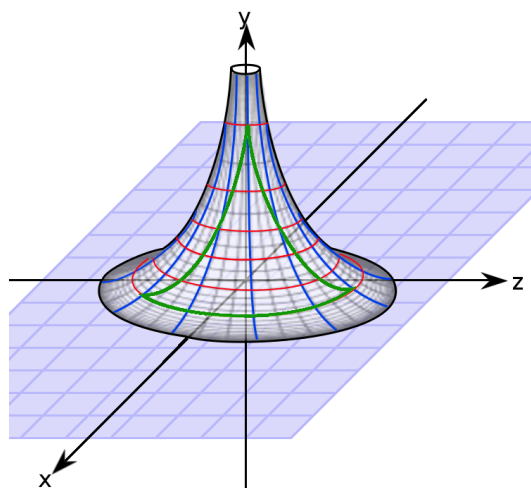
$$\begin{aligned}
 K &= \frac{-1}{2\sqrt{\tanh^2(\phi) \cdot \frac{1}{\cosh^2 \phi}}} \left\{ \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{-2 \frac{\tanh \phi}{\cosh^2 \phi}}{\sqrt{\tanh^2 \phi \cdot \frac{1}{\cosh^2 \phi}}} \right\} \\
 &= \frac{1}{\tanh \phi \cdot \frac{1}{\cosh \phi}} \left\{ \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{1}{\cosh \phi} \right\} \\
 &= \frac{\cosh \phi}{\tanh \phi} \left(-\tanh \phi \cdot \frac{1}{\cosh \phi} \right) \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

Vi har dermed vist at pseudosfæren har konstant og negativ krumning lik -1 .

Det er naturlig å tenke seg at de to prinsipale kurvene som bestemmer krumningen er de vi får ved å skjære pseudosfæren med xy -planet og xy -planet for en verdi $y > 0$. Da vil de to kurvene være henholdsvis være en traktrisen og en sirkel med minkende radius ettersom vi beveger oss oppover y -aksen. Da stemmer det godt overens at krumningen til traktrisen blir mindre (dvs går mot null). De to kurvene har også tydelig motsatt rettet krumning slik at hvert punkt på flaten er et lokalt sadelpunkt. Vi kan ikke avgjøre krumningen i punkter som ligger i xy -planet ettersom sirkelen i startpunktet er singulær. Med andre ord kan ikke flaten utvides glatt over denne. Vi vil her støte på problemer.

6.4 Oppsummering

Så langt har vi oppdaget at det finnes overflater som har konstant negativ krumning og vi har dermed ikke studert den hyperbolske plangeometrien på en god stund. Hva er det så som knytter disse tingene sammen. Vi nevnte tidligere at trekanter på en sirkelsfære har vinkelsum større enn 180° , og vi har sett at sfæren hadde positiv og konstant krumning lik 1. Samtidig har vi sett at plane flater har krumning lik 0. La oss derfor se på en trekant tegnet på pseudofæren.



Figur 6.10: Pseudofæren med grønn hyperbolsk trekant

I figuren er trekanten tegnet inn på pseudofærens flate og vi ser at mye kan tyde på trekanten har vinkelsum som er mindre enn 180° . Vi skal studere geometrien på pseudofæren videre når vi går videre i vår jakt på en modell for det hyperbolske planet.

Kapittel 7

Poincarès modell for hyperbolsk geometri

Modellen fått sitt navn etter den franske matematikeren Henri Poincarè (1854 - 1912). Poincarè beskrives som den „den siste universalist” med den betydningen at han gjorde fremskritt i nesten alle grener av matematikken. Ved siden av matematikken var Poincarè dessuten teoretisk fysiker og vitenskapsfilosof.

I modellen skal vi gjøre bruk av hele det euklidske øvre halv-plan. Det vil si at vi skal holde oss til det som med vanlige kartesiske koordinater kan uttrykkes med (x, y) hvor $y > 0$.

La derfor $\mathbb{H}^2 = \{x + iy | y > 0\}$ være det hyperbolske planet med metrikken

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

La $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ være en parametrisering av en kurve som forklart tidligere. En rett linje (fra punktet $\mathbf{x}(t_0)$ til punktet $\mathbf{x}(t_1)$) i det euklidske planet har (Pytagoras) buelengde $s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$. I Poincarès halv-plan-modell vil den samme linjen da ha buelengde

$$s_P = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt.$$

For å studere de vertikale linjene fra (x_0, y_0) til (x_0, y_1) trenger vi da å parametrisere disse kurvene. La derfor $\mathbf{x}(t) = (x_0, y)$ være denne parametriseringen. Da vil Poincarès buelengde

være

$$s_P = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y} dy = \ln(y)|_{y_0}^{y_1} = \ln(y_1) - \ln(y_0) = \ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right). \quad (7.1)$$

Vi skal at dette er den korteste kurven mellom de to slike punkter. Anta derfor at $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ er en vilkårlig glatt kurve som starter i punktet (x_0, y_0) og slutter i punktet (x_1, y_1) . Altså en kurve mellom de samme to punktene vi allerede har vist lengden mellom ved hjelp av Poincarès metrikk. Vi kan anta uten tap av generalitet at $y(t)$ er en stigende funksjon. Da har vi at

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt \\ &\geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt \\ &\geq \int_{y(t_0)}^{y(t_1)} \frac{dy}{y} \\ &\geq \ln\left(\frac{y(t_1)}{y(t_0)}\right). \end{aligned}$$

Med andre ord er den vertikale (euklidske) linjen som går mellom (x_0, y_0) og (x_0, y_1) den korteste mellom disse punktene. Altså er vertikale linjer i det øvre halv-planet rette linjer i denne modellen.

La oss så se på avstanden fra punktet $(1, 1)$ til $(1, 0)$. $(1, 0)$ er ikke et punkt i det hyperbolske planet så vi må finne grenseverdien for lengden fra $(1, 1)$ til $(1, y)$ og la $y \rightarrow 0$. Altså

$$\lim_{y \rightarrow 0} d_P((1, 1), (1, y))$$

hvor d er avstandsfunksjonen. Fra (7.1) har vi at

$$d_P((1, 1), (1, y)) = \ln(1) - \ln(y) = -\ln(y).$$

Vi finner da grenseverdien

$$d_P((1, 1), (1, 0)) = \lim_{y \rightarrow 0} d_P((1, 1), (1, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (-\ln(y)) = \infty.$$

Dette forteller oss at selvom modellen begrenser seg til det euklidske øvre halv-planet har linjer uendelig utstrekning i begge retninger.

7.1 Isometrier

Vi skal i denne seksjonen se på noen isometrier i det euklidske planet som vi får bruk for når vi skal studere Poincarès halv-plan-modell. Vi benytter derfor endel teoremer som vi ikke har bevist i denne oppgaven, men gir referanser til litteratur hvor slike teoremer finnes.

Definisjon 7.1.1. En **isometri** i planet \mathbb{R}^2 er en avbildning fra \mathbb{R}^2 til \mathbb{R}^2 som bevarer distanse. Med andre ord, f er en **isometri** hvis man for to vilkårlige punkt i \mathbb{R}^2 har $|f(P) - f(Q)| = |PQ|$.

Isometrier er altså transformasjoner som bevarer distanse og buelengden må derfor bevares under slike transformasjoner. Med andre ord er parametriseringen $(u(x, y), v(x, y))$ en isometri hvis

$$\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

En isometrisk parametrisering er translasjonen horisontalt $T_a(x, y) = (u, v) = (x+a, y)$. Dette ser vi ettersom $du = u_1 - u_0 = x_1 + a - (x_0 + a) = x_1 - x_0 = dx$ og $dv = dy$ slik at $\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Denne parametriseringen flytter alle punktene horisontalt med a og er representert ved matrisen

$$\tau_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La oss så se på refleksjoner. Refleksjoner kan som vi har sett beskrives med $R_b(x, y) = (u, v) = (2b - x, y)$. Refleksjonene skjer da over den vertikale linjen $x = b$. Da ser vi at $du = u_1 - u_0 = (2b - x_1) - (2b - x_0) = x_0 - x_1 = -dx$ og $dv = dy$ og også her vil $\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

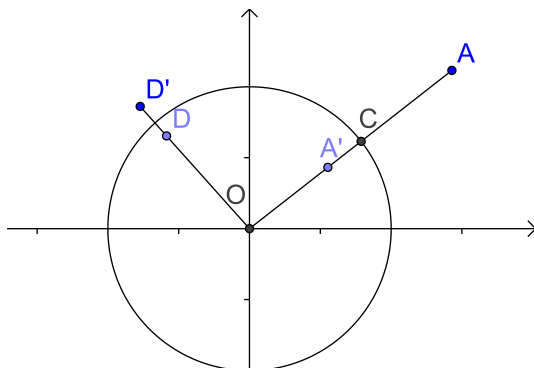
Vi vil også vise at parametriseringen

$$\Phi(x, y) = (u, v) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

er en isometri. Vi skal beregne buelengden direkte og lar for enkelhets skyld $r^2 = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned} \frac{du^2 + dv^2}{v^2} &= \frac{r^4}{y^2} \left(\left(\frac{(x^2 + y^2)dx - 2x^2dx - 2xydy}{r^4} \right)^2 + \left(\frac{(x^2 + y^2)dy - 2xydx - 2y^2}{r^4} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{y^2} \left(\frac{((y^2 - x^2)dx - 2xydy)^2 + ((x^2 - y^2)dy - 2xydx)^2}{r^4} \right) \\ &= \frac{1}{r^4 y^2} ((x^4 + 2x^2y^2 + y^4)dx^2 + (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)dy^2) \\ &= \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \end{aligned}$$

Det var ikke helt tilfeldig at vi valgte å skrive $r^2 = x^2 + y^2$ i utregningen over. r beskriver den euklidske avstanden fra (x, y) til origo. Parametriseringen Φ sender punktet (x, y) til $\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right)$. Den euklidske avstanden fra $\Phi(x, y) = \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right)$ til origo er da $\frac{1}{r^2}$. Altså vil $\Phi(x, y) = (x, y)$ når $r = 1$. Dersom $r < 1$ så vil avbildningen $\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right)$ av punktet (x, y) ligge på den samme strålen, men punktet vil ligge nærmere origo (den euklidske distansen er mindre enn 1) og dersom $r > 1$ vil avbildningen ligge på samme linje stråle, men lengre unna origo. Altså vil alle punktene på enhets sirkelen fikseres, alle punkter inne i enhets sirkelen vil sendes utenfor og alle punkter utenfor enhets sirkelen sendes inn i enhets sirkelen. Vi kaller denne inversjonen derfor speiling om enhets sirkelen.

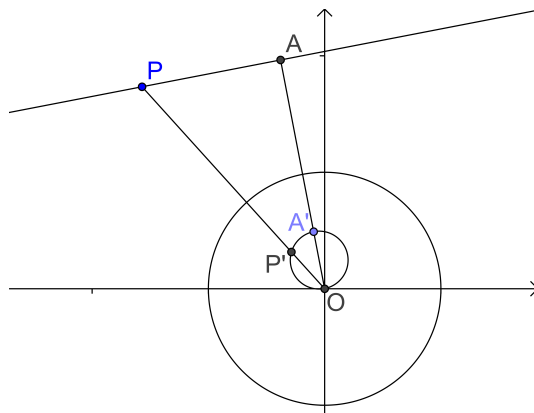


Figur 7.1: Punkter og deres avbildninger ved speiling om enhets sirkelen. $C = C'$

Parametriseringen speiler altså punkter om enhets sirkelen i Euklidsk geometri. Videre er bildet av punktet P under en speiling om en sirkel med senter i O og radius r er punktet P' på strålen \overrightarrow{OP} slik at $|OP'| = \frac{r^2}{|OP|}$. Dette fører oss til følgende resultater.

Teorem 7.1.2. *La l være en linje som ikke går gjennom enhets sirkelen med sentrum O . Bildet av l speilet om enhets sirkelen er en sirkel som går gjennom O .*

Bevis. La A være fotenpunktet til O på l .



Figur 7.2:

Vi finner da A' på \overrightarrow{OA} slik at $|OA'| = \frac{1}{|OA|}$. Konstruer så sirkelen med diameter $|OA'|$. Vi vil så vise at denne sirkelen er bildet til l ved inversjon om enhetsirkelen. La derfor P være et vilkårlig punkt på l . La videre P' være skjæringspunktet mellom sirkelen med diameter $|OA'|$ og \overrightarrow{OP} . Vi har nå to trekanter; $\triangle OAP$ og $\triangle OP'A'$. Disse er euklidisk sett formlike, $\triangle OAP \sim \triangle OP'A'$ (teorem 7.4.1 s. 167 i [Ven2006]). Da har vi

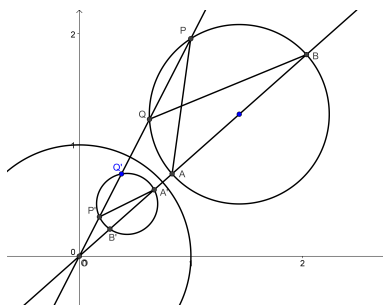
$$\begin{aligned} \frac{|OP'|}{|OA'|} &= \frac{|OA|}{|OP|} \\ |OP'| &= \frac{1}{|OP|}. \end{aligned}$$

Da er P' bildet til det vilkårlige punktet P speilet om enhetsirkelen. \square

Altså blir linjer utenfor enhetsirkelen avbildet som sirkler inne i enhetsirkelen. Ettersom parametriseringen er en bijeksjon vil bildet av sirkelen inne i enhetsirkelen avbildes som linjen utenfor.

Teorem 7.1.3. *Anta at γ er en sirkel som ikke går gjennom origo. Da vil avbildningen av γ når den blir speilet om enhetsirkelen være en sirkel.*

Bevis. La l være linjen gjennom O og sentrum i sirkelen γ .



Figur 7.3:

l skjærer da γ i to punkter A og B . La $|OA| = a$ og $|OB| = b$. La videre γ' være avbildningen av γ ved parametriseringen $\Delta : (x, y) \rightarrow (\frac{x}{ab}, \frac{y}{ab})$. La så A' og B' betegner denne avbildningen av henholdsvis A og B . Da er $|OA'| = \frac{1}{ab}b = a$ og altså er A' avbildningen av A speilet om enhetsirkelen. Samme for B og B' ettersom $|OB'| = \frac{1}{ab}a = b$.

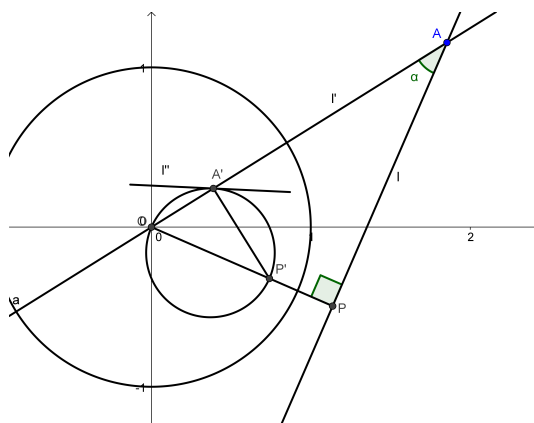
La så l' være en vilkårlig linje gjennom O som skjærer γ i P og Q . La også her P' og Q' være bildet av P og Q ved parametriseringen Δ . Nå er $\triangle OA'P' \sim \triangle OBQ$ (teorem 7.4.1 s. 167 i [Ven2006]), euklidsk sett, ettersom den ene trekanten er en dilatasjon av den andre. Ettersom vi arbeider i euklidsk geometri er også $\angle QBA \cong \angle QPA$ (teorem 10.4.9 s. 239 i [Ven2006]), altså er $\triangle OA'P' \sim \triangle OPA$. Da følger det at:

$$\begin{aligned} \frac{|OA'|}{|OP|} &= \frac{|OP'|}{|OA|} \\ \frac{1/a}{|OA|} &= \frac{|OP|}{a} \\ |OP'| &= \frac{1}{|OP|}. \end{aligned}$$

Altså er P' avbildningen av P speilet om enhetsirkelen, og γ' er bildet av γ . □

Teorem 7.1.4. *Speiling om enhetsirkelen bevarer vinkler.*

Bevis. La $\angle A = \alpha$ være vinkelen mellom to linjer l og l' , hvor l' går gjennom O . La videre P være fotpunktet til normalen fra O på l , og la P' være bildet av P speilet om enhetsirkelen.



Figur 7.4:

Da er bildet av l fra det over en sirkel γ med diameter OP' . Bildet av A er $A' = \gamma \cap l'$. La l'' være tangenten til γ i A' . Da er β vinkelen dannet av l' og l'' i A' bildet av α under speilingen. Vi skal vise at $\alpha \cong \beta$.

Fra teorem 7.4.1 s. 167 i [Ven2006] vet vi at $\triangle OAP \sim \triangle OP'A'$ ettersom de deler hjørnet O og begge har en rett vinkel. Derfor er $\angle A'P'O \cong \angle OAP \cong \alpha$. Fra teorem 10.4.9 s. 239 i [Ven2006] er $\beta = \angle A'P'O$, altså har vi $\alpha \cong \beta$. \square

Fra det vi har vist nå kan vi slutte følgende viktige teorem om linjer i Poincarès halvplan-modell:

Teorem 7.1.5. *Linjer i Poincarè øvre halv-plan-modell er (euklidske) linjer og halv-sirkler som står vinkelrett på x -aksen.*

Bevis. La P og Q være punkter i \mathbb{H}^2 som ikke ligger på samme vertikale linje. La videre γ være sirkelen gjennom P og Q med sentrum på x -aksen. Skjæringspunktene mellom γ og x -aksen kaller vi henholdsvis M og N . La videre ρ være en horisontal translasjon $-M$ etterfulgt av speiling om enhetsirkelen. Parametriseringen ρ er en isometri ettersom den er sammensatt av to isometrier. Punktet M sendes først til origo og dermed til ∞ ved denne parametriseringen. Derfor er bildet av γ en rett (euklidsk) linje. Siden sentrum i γ er på x -aksen så er vinklene i M og N rette og siden speilingen bevarer vinkler er bildet av γ en vertikal (euklidsk) linje. Siden vertikale linjer er linjer i vår modell, og isometrier bevarer buelengde, følger det at γ er en linje gjennom P og Q . \square

7.2 Möbius-transformasjoner

Vi har sett på noen isometrier i Poincarès halvplan-modell, men ønsker å kunne bestemme alle slike isometrier. Vi skal derfor undersøke på Möbius-transformasjonene.

En Möbius transformasjon er en rasjonal funksjon på formen

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

hvor z , a , b , c og d er komplekse tall og $ad - bc \neq 0$. Funksjonene sender z til det komplekse rom samt ∞ som betegner et „uendelighetspunkt”. Med andre ord er en Möbius-transformasjon en bijektiv konform avbildning av det utvidede komplekse plan

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Altså det komplekse plan sammen med et “uendelig fjernt punkt”. En Möbius-transformasjon kan dermed oppfattes som en homeomorfi fra $\hat{\mathbb{C}}$ til $\hat{\mathbb{C}}$. Vi utvider definisjonen av f ved å definere $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ og $f(\infty) = \frac{a}{c}$ ettersom;

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{d}{c}\right) &= \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az + b}{cz + d} = \infty, \quad \text{og} \\ f(\infty) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} \quad \text{når vi antar at } c \neq 0. \end{aligned}$$

Hvis vi antar at $c = 0$ ser vi at

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{0 \cdot z + d} = \infty,$$

slik at definisjonen fortsatt holder.

En Möbius-transformasjon kan også representeres med en 2×2 -matrise

$$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

og vi skriver $f = f_\gamma$. Vi kan umiddelbart merke oss at γ ikke er unikt bestemt ettersom den samme transformasjonen kan representeres med $k\gamma = \gamma' = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$, hvor $k \neq 0$ er en skalar. Vi vil kalle to slike matriser γ og γ' like dersom de representerer samme transformasjon og skriver $\gamma \equiv \gamma'$.

Vi kan nå lett vise at produktet av slike matriser utfører to Möbius-transformasjoner.

Teorem 7.2.1. $f_{\gamma_1\gamma_2}(z) = f_{\gamma_1}(f_{\gamma_2}(z))$.

Bevis. Gitt at f_{γ_1} er representert ved $\gamma_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ og f_{γ_2} er representert ved $\gamma_2 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Ved matrise multiplikasjon får vi:

$$\gamma_1\gamma_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix},$$

altså er

$$\begin{aligned} f_{\gamma_1\gamma_2}(z) &= \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)} \\ &= \frac{a(ez + f) + b(gz + h)}{c(ez + f) + d(gz + h)} \\ &= \frac{a\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) + b}{c\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) + d} \\ &= \frac{af_{\gamma_2}(z) + b}{cf_{\gamma_2}(z) + d} = f_{\gamma_1}(f_{\gamma_2}(z)). \end{aligned}$$

Hvilket skulle vises. □

Fra dette følger følgende teorem.

Teorem 7.2.2. Möbius-transformasjonene utgjør en gruppe under matrise-multiplikasjon.

Bevis. Vi stiller følgende kriterier til en gruppe (s.);

- i) lukkethet ($a, b \in G \Rightarrow a \bullet b \in G$),
 - ii) assosiativitet ($a, b, c \in G \Rightarrow (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$),
 - iii) identitets-element ($\exists e \in G$ s.a. $\forall a \in G \Rightarrow e \bullet a = a \bullet e = a$) og
 - iv) invers ($\forall a \in G \exists b \in G$ s.a. $a \bullet b = b \bullet a = e$),
- hvor G er en mengde og \bullet betegner en generell binæroperasjon.

i) Etersom teorem 7.2.1 sier at $f_{\gamma_1\gamma_2} = f_{\gamma_1}(f_{\gamma_2}(z))$ har vi at mengden av alle Möbius-transformasjoner er lukket under matrise-multiplikasjon.

ii) Matrise-multiplikasjon er assosiativ ettersom

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} aei + bgi + afk + bhk & aej + bgj + afl + bhl \\ cei + dgi + efk + dhk & cej + dgj + efl + dhl \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a(ei + fk) + b(gi + hk) & a(ej + fl) + b(gj + hl) \\ c(ei + fk) + d(gi + hk) & c(ej + fl) + d(gj + hl) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

iii) Identitets-elementet er gitt ved identitetsmatrisen $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, og tilhørende Möbius-transformasjon blir da

$$f_I(z) = \frac{z + 0}{0 \cdot z + 1} = z.$$

iv) Vi finner transformasjonenes invers ved å sette $w = f_\gamma(z)$ og løse med hensyn på z ;

$$\begin{aligned} w &= \frac{az + b}{cz + d} \\ (cz + d)w &= az + b \\ z &= \frac{dw - b}{-cw + a}. \end{aligned}$$

Merk at $f_\gamma^{-1} = f_{\gamma^{-1}}$ ettersom $f_\gamma(f_{\gamma^{-1}}(z)) = f_I(z) = z$. Vi har da at f_γ^{-1} er representert med

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \gamma^{-1}.$$

Her gjør vi bruk av betingelsen $ad - bc \neq 0$. □

I fortsettelsen vil vi skrive γz når vi mener $f_\gamma(z)$ slik at

$$\gamma z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Vi har fortsatt at $f_{\gamma_1 \gamma_2} = f_{\gamma_1}(f_{\gamma_2}(z))$ slik at $(\gamma_1 \gamma_2)z = \gamma_1(\gamma_2 z)$, men merker oss at $k(\gamma z)$

ikke nødvendigvis er lik $(k\gamma)z$ ettersom

$$k(\gamma z) = \frac{k(az + b)}{cz + d},$$

mens

$$(k\gamma z) = \gamma z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

La oss nå definere gruppen som består av mengden av alle slike matriser

$$M_{2 \times 2}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \hat{\mathbb{C}} \right\}.$$

Vi definerer også de tre gruppene

$$\begin{aligned} GL_2(R) &= \{\gamma \in M_{2 \times 2}(R); \det(\gamma) \neq 0\} \\ SL_2(R) &= \{\gamma \in GL_2(R); \det(\gamma) = 1\} \\ PSL_2(R) &= \frac{SL_2(R)}{SZ(R)}, \text{ hvor } SZ(R) \text{ er mengden av alle skalartransformasjoner med } ad - bc = 1 \end{aligned}$$

$GL_2(R)$ kalles den generelle lineære gruppen, $SL_2(R)$ den spesielle lineære gruppen og $PSL_2(R)$ den projektive spesielle lineære gruppen over den generelle ringen R . I vårt tilfelle vil den alltid være \mathbb{C} , $\hat{\mathbb{C}}$ eller \mathbb{R} .

Matrise-gruppen $M_{2 \times 2}(R)$ er mengden av alle 2×2 -matriser med verdier fra R . Den generelle lineære gruppen $GL_2(R)$ over R er mengden av inverterbare matriser sammen med matrise-multiplikasjon. Dette danner en gruppe ettersom produktet av to invertible matriser også er invertibel. Den spesielle lineære gruppen $SL_2(R)$ er en undergruppe av $GL(R)$ hvor matrisene ikke bare er invertible, men i tillegg har vi $(ad - bc) = 1$. Den projektive spesielle lineære gruppen $PSL_2(R)$ er en undergruppe av $SL_2(R)$ hvor $\gamma \equiv k\gamma$. Det eksisterer derfor en bijeksjon mellom gruppen $PSL_2(R)$ og Möbius-transformasjonene med $ad - bc = 1$.

Teorem 7.2.3. *Den horisontale translasjonen med a*

$$T_a(x, y) = (x + a, y),$$

kan beskrives av Möbius-transformasjonen representert av et element fra $SL_2(\mathbb{R})$.

Bevis. Nå er $a \in \mathbb{R}$, så $T_a(x, y)$ kan beskrives som en Möbius-transformasjon

$$T_a(x, y) = T_a(z) = z + a, \quad z \in \hat{\mathbb{C}},$$

og denne er representert ved $\tau_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. □

Teorem 7.2.4. *Parametriseringen*

$$\phi(x, y) = \left(\frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

som består av speiling om enhets sirkelen etterfulgt av en refleksjon gjennom $x = 0$, kan uttrykkes som en Möbius-transformasjon representert av et element fra $SL_2(\mathbb{R})$.

Bevis. Som en funksjon av komplekse tall er parametriseringen

$$\phi(z) = \phi(x + iy) = \frac{-x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{-(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = -\frac{1}{z}.$$

Denne Möbius-transformasjonen kan representeres ved;

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Teorem 7.2.5. *Gruppen $SL_2(\mathbb{R})$ er generert av σ og τ_a for alle $a \in \mathbb{R}$.*

Bevis. Vi får ved utregning

$$\sigma\tau_r = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & r \end{bmatrix},$$

så

$$\sigma\tau_s\sigma\tau_r = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & r \\ s & rs - 1 \end{bmatrix},$$

og

$$\sigma\tau_t\sigma\tau_s\sigma\tau_r = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & r \\ s & rs - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s & 1 - rs \\ st - 1 & rst - r - t \end{bmatrix}.$$

Dette betyr at for enhver $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ og $a \neq 0$, kan vi sette $a = -s$, $b = 1 - rs = 1 + ra$, og $c = st - 1 = -at - 1$ som gir

$$r = \frac{b - 1}{a} \quad \text{og} \quad t = \frac{-1 - c}{a}.$$

Siden $ad - bc \neq 0$ må $d = rst - r - t$. Altså hvis $a \neq 0$ så kan γ skrives som produkter av bare σ og translasjoner. Hvis $a = 0$ så er $c \neq 0$ ettersom $ad - bc = 1$. Da må $\sigma\gamma = \begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix}$. Altså er gruppen $SL_2(\mathbb{R})$ generert av translasjoner og σ . \square

7.3 Kryssforhold, translasjon, rotasjon og refleksjon

Det var kryssforholdet som satt Poincarè på idéen om en modell for hyperbolsk geometri. La derfor $a, b, c, d \in \hat{\mathbb{C}}$ være slik at minst tre av de er distinkte. Kryssforholdet mellom a, b, c og d er da

$$(a, b; c, d) = \frac{\frac{a-c}{a-d}}{\frac{b-c}{b-d}}.$$

Dersom vi holder de tre distinkte elementene fast (la de være $b, c, d \in \hat{\mathbb{C}}$) og lar det fjerde elementet a variere får vi da en Möbius-transformasjon

$$f(z) = (z, a; b, c) = \frac{\frac{z-c}{z-d}}{\frac{b-c}{b-d}} = \frac{z(b-d) - c(b-d)}{z(b-c) - d(b-c)},$$

representert ved $\gamma = \begin{bmatrix} b-d & c(b-d) \\ b-c & d(b-c) \end{bmatrix}$. Dette er den unike Möbius-transformasjonen som har den egenskapen at $f(b) = 1$, $f(c) = 0$ og $f(\infty) = \infty$.

Vi kan til altså finne Möbius-transformasjonen dersom vi kjenner til tre punkter med deres avbildningspunkter.

Vi har så langt hevdet at Poincarès øvre halvplan er en modell for det hyperbolske planet, men har ikke ennå sjekket at dette stemmer. Vi skal gjøre dette i neste seksjon, men det gjenstår å vise noen resultater omkring isometriene i vi studerte i forrige seksjon. Dette vil vi gjøre bruk av spesielt når det gjelder overbevisningen om at linjal-postulatet, halvplan postulatet og gradskive-postulatet er oppfylt.

La $P = a + bi$ og $R = c + di$ være punkter i vår modell. Vi kan se på forskjellige isometrier, men la oss se på den isometrien som sender punktet P på R og samtidig fikserer uendeligpunktet ∞ . Altså er $f(\infty) = \infty$, og $f(P) = R$. Da vil f sende da linjen gjennom P og ∞ til linjene gjennom Q og ∞ . Altså sendes den vertikale linjen $x = a$ på den vertikale linjen $x = c$, vi skriver $f(a) = c$. Dette betyr at vi har likhet mellom kryssforholdene

$$\frac{w-c}{di} = \frac{z-a}{bi},$$

og vi får

$$\begin{aligned} w &= \frac{d(z-a)}{b} + c \\ &= \begin{bmatrix} d & bc - ad \\ 0 & b \end{bmatrix} z. \end{aligned}$$

Nå, siden $b > 0$ og $d > 0$ så er determinanten til matrisen positiv. Når vi i tillegg har at alle elementene i matrisen er reelle kan vi konkludere med at isometrien er et element av $PSL_2(\mathbb{R})$.

Transformasjonen over er en translasjon. Dette kan vi slutte ettersom translasjoner er isometrier uten fikserte punkter. Et fiksert punkt er et punkt slik at $f(z_0) = z_0$. Dersom dette hadde vært tilfelle ville

$$\frac{d(z_0 - a)}{b} + c_0 = z_0,$$

fra det over. Det gir oss

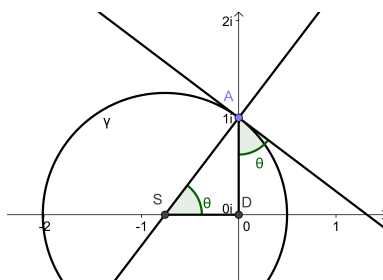
$$z_0 = \frac{ad - bc}{d - b},$$

hvor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Hvis vi antar at $b \neq d$ ($b > 0$ og $d > 0$) så er z_0 et reelt tall og ikke i det øvre halvplanet. Altså har transformasjonen ingen fikserte punkt og er derfor en translasjon. Hvis $b = d$ så er $z_0 = \infty$ og vi har heller ikke da løsninger i det øvre halvplanet.

En rotasjon i vil fikse et punkt. La derfor $P = a + bi$. Vi ønsker å finne den rotasjonen hvor P er fiksert og slik at alle andre punkter roteres om dette punktet med vinkel θ . Vi kan ved hjelp av euklidske geometri finne den euklidske linjen l gjennom P som danner vinkelen θ med den vertikale linjen gjennom P . Vi kan også finne den euklidske linjen l' som står vinkelrett på l i P . l' skjærer da x -aksen i et punkt S . La så γ være sirkelen med sentrum i S og radius SP . Skjæringspunktene til γ og x -aksen kaller vi M og N . Da er denne rotasjonen gitt ved kryssforholdet

$$(w, P; N, M) = (z, P; a, \infty)$$

La for eksempel $P = i$. La sentrum av γ være på den negative siden av x -aksen (valgfritt) og la radius i sirkelen være r . Da er $x = r \cos \theta$, $r \sin \theta = 1$, $M = -r - x$ og $N = r - x$ (se figur).



Figur 7.5:

Derfor må vi løse

$$(w, i; r - x, -r - x) = (z, i; 0, \infty).$$

Det kan vises at vi da får $w = \rho_\theta z = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} z$.

For et vilkårlig punkt $P = a + bi$ kan vi nå benytte en translasjon som sender P til $P' = i$ og dermed bruke denne samme rotasjonen ρ_θ for dermed å flytte P' tilbake til P . Translasjonen fra P til $P' = i$ er gitt ved $\tau = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ og den inverse translasjonen er $\tau^{-1} = \begin{bmatrix} b & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dermed er den vilkårlige rotasjonen om P :

$$\begin{aligned} \tau^{-1} \rho_\theta \tau &= \begin{bmatrix} b & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b \cos \frac{\theta}{2} - a \sin \frac{\theta}{2} & (a^2 + b^2) \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & a \sin \frac{\theta}{2} + b \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Den siste gruppen isometrier er refleksjoner. Refleksjonen om y -aksen (den imaginære aksens) er gitt ved $R_0(x, y) = (-x, y)$ og kan beskrives som $R_0(z) = \mu \bar{z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{z}$, hvor $\bar{z} = a - bi$ når $z = a + bi$. Vi ønsker å finne en generell for refleksjoner om en hyperbolsk linje l . Vi kan da bruke rotasjoner og translasjoner til å flytte l til y -aksen og dermed flytte punktet tilbake. Rotasjonen og translasjonen som flytter l til y -aksen betegner vi med γ_1 . Da blir den generelle refleksjonen om l blir da $\gamma_1^{-1} \mu \bar{z} \gamma_1 = \gamma_1^{-1} \mu \gamma_1 \bar{z}$. Vi ser at $\mu^2 = 1$ og at

$\mu\gamma\mu \in SL_2(\mathbb{R})$ for alle $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$ siden $\det(\mu) = -1$. Derfor er

$$\gamma_1^{-1}\mu\gamma_1\bar{z} = \gamma_1^{-1}(\mu\gamma_1\mu)\mu\bar{z} = \gamma_2\mu\bar{z} = \gamma_2(-\bar{z}),$$

hvor $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$. Derfor kan enhver refleksjon skrives på formen $\gamma(-\bar{z})$ for en $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$.

Dette gir oss til et viktig teorem om isometriene i det hyperbolske planet.

Teorem 7.3.1. *Enhver isometri f i det hyperbolske planet som ikke er en direkte isometri kan skrives på formen*

$$f(z) = \gamma(\bar{z}),$$

for en $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$.

Avstanden (eller lengden av segmentet) mellom to punkter $P = a + bi$ og $Q = a + ci$ på en vertikal linje har vi tidligere sett at er

$$|PQ| = \left| \int_b^c \frac{dy}{y} \right| = \ln\left(\frac{c}{b}\right),$$

men vi mangler et mål for den andre klassen av linjer. Den andre klassen av linjer er halvsirkler med sentrum på x -aksen. Vi kaller fotpunktene til sirkelen på x -aksen for M og N . Isometrier bevarer avstand og vi kan dermed benytte de ovenstående isometriene til å sende en vilkårlig linje gjennom punktene A og B til en vertikal linje. Dermed får vi også et mål for avstander på halvsirklene. Vi skal bruke transformasjonen σ som sender A til $A' = i$ og \overleftrightarrow{AB} til den vertikale linjen y -aksen (den imaginære aksen). Denne transformasjonen sender M til origo og N til ∞ . Siden bildet B' av B ligger y -aksen er $B' = 0 + ci$. Da er

$$|AB| = \left| \ln\left(\frac{c}{1}\right) \right| = \ln(c).$$

7.4 Aksiomene for hyperbolsk geometri.

Vi har ennå ikke sjekket at denne modellen faktisk oppfyller aksiomene for hyperbolsk geometri. La os derfor studere de i tur og orden.

Aksiom (Eksistens-postulatet). *Samlingen av alle punkt danner en ikke-tom mengde. Det finnes mer enn et punkt.*

Øvre halvplan-modellen består av uendelig mange punkter slik at dette aksiomet er oppfylt.

Aksiom (Insidens-aksiomet). *Hver linje er en mengde punkter. For hvert par av distinkte punkter A og B finnes det nøyaktig en linje l slik at $A \in l$ og $B \in l$. Denne linjen betegner vi unikt med \overleftrightarrow{AB} .*

Vi studerte linjer i Poincaré modellen tidligere og da oppdaget vi at dersom A og B var punkter euklidsk sett vertikalt ovenfor hverandre var linjen i hyperbolsk forstand bestemt av den samme vertikale linje. At denne er entydig følger av euklidsk geometri. Dersom A og B ikke var punkter på en vertikal linje så vi at linjen i hyperbolsk forstand var en sirkel med sentrum på x -aksen. entydigheten ble forsikret av teorem 7.1.5.

Aksiom („Linjal-postulatet”). *For hvert par av punkter P og Q eksisterer det et reelt tall $|PQ|$, som kalles avstanden fra P til Q . For hver linje l er det en bijeksjon $f : l \rightarrow \mathbb{R}$ slik at hvis P og Q er punkter på l som korresponderer med de reelle tallene henholdsvis $f(P)$ og $f(Q)$, så er $|PQ| = |f(P) - f(Q)|$. Bijeksjonen $f : l \rightarrow \mathbb{R}$ kalles en koordinat-funksjon for linjen l og det reelle tallet $f(P)$ kalles koordinaten til P .*

Vi har brukt forrige seksjon på å forklare de isometriene som sender en vilkårlig hyperbolske linjer på den en rett euklidsk linje. Dermed er det også klart at det eksisterer en bijeksjon som linjalpostulatet.

Aksiom (Halv-plan postulatet). *For enhver linje m vil punktene som ikke ligger på m utgjøre to disjunkte, ikke-tomme mengder H_1 og H_2 , som kalles halv-plan begrenset av m , slik at følgende egenskapene er tilfredsstillt:*

- i) H_1 og H_2 er konvekse mengder.*
- ii) Hvis $P_1 \in H_1$ og $P_2 \in H_2$, så vil linjesegmentet P_1P_2 skjære m .*

Vi har sett (også i forrige seksjon) at en refleksjon om en linje fikserer punktene på linjen. Alle andre punkter sendes til den andre siden av den hyperbolske linjen. For en vertikal linje er dette som i euklidsk geometri. For klassen av linjer som består av halvsirkler med sentrum på x -aksen sendes alle punkter utenfor til det indre av halvsirkelen. Dermed bestemmer de to sidene av enhver linje to distinkte, ikke-tomme mengder som vi kaller halv-plan. Halvplanene er også konvekse ettersom segmentet mellom to punkter i et av halvplanene tydelig også tilhører det samme segmentet.

Aksiom (Gradskive postulatet). *For hver vinkel $\angle BAC$ eksisterer det et reelt tall $\mu(\angle BAC)$, som kalles vinkelmålet av $\angle BAC$, slik at det følgende er oppfylt:*

- i) $0^\circ \leq \mu(\angle BAC) < 180^\circ$ for hver vinkel $\angle BAC$.*
- ii) $\mu(\angle BAC) = 0^\circ$ hvis og bare hvis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.*

iii) For hvert reelt tall r , $0 < r < 180$, og for hvert halv-plan H begrenset av \overleftrightarrow{AB} finnes det en unik stråle \overrightarrow{AE} slik at E er i H og $\mu(\angle BAE) = r^\circ$.

iv) Hvis en stråle \overrightarrow{AD} er mellom strålene \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AC} , så er $\mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC) = \mu(\angle BAC)$.

v) Hvis $\angle BAD$ er supplementvinkelen til $\angle DAC$ så er $\mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC) = 180^\circ$

Vi har sett at vinkler bevares ved isometrier. Derfor vil vinkler i Poincarè være lik vinkler i Euklidsk plan.

Aksiom (SAS-kriteriet). Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er to trekanter slik at $AB \cong DE$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ og $BC \cong EF$, så er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Vinkler er euklidske vinkler. Det samme gjelder lengde av segmenter, altså vil SAS-kriteriet oppfylles i Poincarès modell.

Aksiom (Det hyperbolske parallellpostulatet). Det finnes en linje l og et punkt P som ikke ligger på denne linjen, slik at det finnes minst to (distinkte) linjer gjennom P som begge er parallelle med l .

Også dette er lett å innse, la l være y -aksen i øvre halvplan og $P = 2 + i$. Da er den vertikale linjen gjennom P være $x = 2$. Denne linjen er tydelig parallell (også euklidsk sett) til l . La videre γ være halvsirkelen gjennom P med sentrum i $S = 2 + 0i$. Denne har fotpunktene $M = 1 + 0i$ og $N = 3 + i$. Altså er også denne linjen parallell med l . Dermed er også det hyperbolske parallellpostulatet oppfylt, og vi kan slutte at Poincarès øvre halvplan-modell er en modell for det hyperbolske planet.

Kapittel 8

Pseudosfærens betydning

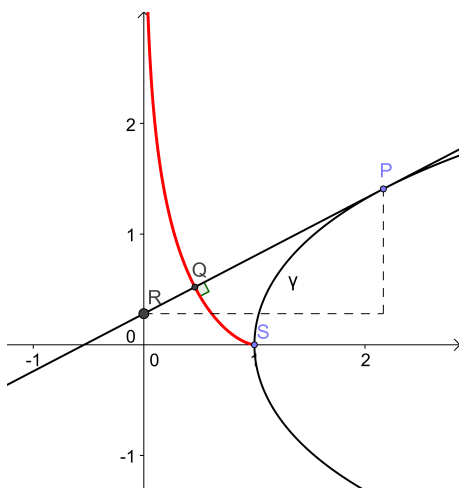
Som vi har vært inne på en rekke ganger mistenker vi det hyperbolske planet å være en flate med negativ krumning og som eneste kandidat hittil er pseudosfæren. Dette var også den første flaten med konstant negativ krumning som ble funnet. Eugenio Beltramis var oppdageren da artikkelen *Saggio di Interpretazione della Geometria Non-euclidea*¹ ble publisert i 1868² [Sti1996]. Her knytter Beltrami hyperbolsk geometri til pseudosfæren. Han var imidlertid klar over at pseudosfæren ikke kunne være en plan flate, ettersom den har en grensekurve, og i tillegg ikke er enkelt-sammenhengende. Den er topologisk sett en sylinder, men den kunne brukes.

8.1 Buelengden på pseudosfæren.

I et forsøk på å forstå geometrien på pseudosfæren skal vi gjennomføre et siste studie av traktrisen. Traktrisen kan i tillegg til de innfallsvinklene vi har hatt tidligere betraktes på følgende måte. La γ være grafen til $u = \cosh(v)$ i uv -planet.

¹Direkte oversatt til norsk blir *Forsøk på tolkning av ikke-euklidisk geometri*.

²I bladet *Giornala di Matematiche IV*



Figur 8.1: Traktrisen igjen

γ har bunnpunkt i punktet $S = (1, 0)$. For hvert punkt $P = (\cosh(v_0), v_0)$ på γ kan vi finne buelengden s fra P til S ved integrasjon:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{v_0} \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dv}\right)^2} dv = \int_0^{v_0} \sqrt{1 + \sinh^2(v)} dv \\ &= \int_0^{v_0} \cosh(v) dv = \sinh(v_0). \end{aligned}$$

Tangentlinjen til γ ved finner vi ved $u = \cosh(v_0) + \sinh(v_0)(v - v_0)$. La så Q være punktet på tangenten \overrightarrow{PQ} slik at $|PQ| = s = \sinh(v_0)$. Alle punktene Q tegner da ut traktrisen. Merk at tangenten \overrightarrow{PQ} da også står vinkelrett på traktrisen. Av denne grunn og konstruksjonen vi la til grunn er $|PQ|$ krumningsradien til en av de prinsipale kurvene på pseudosfæren.

Vi har sett på hvordan Poincarès øvre halvplan modell gir oss en modell for det hyperbolske planet. Det øvre halvplanet \mathbb{H}^2 er en plan flate og har derfor enkle koordinater. Koordinatene på pseudosfæren er ikke like enkle å bestemme, men vi kan vise at pseudosfæren er lokalt isometrisk til \mathbb{H}^2 når vi benytter avstandsfunksjonen definert av $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

Teorem 8.1.1. *Pseudosfæren, som har konstant negativ krumning lik -1 , er lokalt isometrisk til det øvre halvplanet med avstandsfunksjon $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.*

Bevis. Vi benytter innfallsvinkelen over på traktrisen og har da avstanden at den euklidske lengden $|PQ| = \sinh(v_0)$ i figur 8.1. La videre R være punktet der tangenten \overrightarrow{PQ} skjærer

v -aksen. \overrightarrow{PQ} har funksjon $u = \cosh(v_0) + \sinh(v_0)(v - v_0)$ og setter vi $u = 0$ får vi:

$$\begin{aligned} 0 &= \cosh(v_0) + \sinh(v_0)(v - v_0) \\ \sinh(v_0)v &= -(\cosh(v_0) - v_0 \sinh(v_0)) \\ v &= \frac{v_0 \sinh(v_0) - \cosh(v_0)}{\sinh(v_0)} \\ &= v_0 - \frac{1}{\tanh(v_0)}. \end{aligned}$$

Altså er $R = (0, v_0 - \frac{1}{\tanh(v_0)})$. Da følger det av pytagoras læresetning at det euklidske segmentet

$$\begin{aligned} |PR| &= \sqrt{(\cosh(v_0) + 0)^2 + (v_0 - v_0 + \frac{1}{\tanh(v_0)})^2} \\ &= \sqrt{\cosh^2(v_0) + \frac{\cosh^2(v_0)}{\sinh^2(v_0)}} \\ &= \cosh(v_0) \sqrt{\frac{\sinh^2(v_0) + 1}{\sinh^2(v_0)}} \\ &= \frac{\cosh(v_0)}{\sinh(v_0)} \sqrt{\cosh^2(v_0)} = \frac{\cosh^2(v_0)}{\sinh(v_0)}. \end{aligned}$$

Ettersom $|QR| = |PR| - |PQ|$ får vi

$$|QR| = \frac{\cosh^2(v_0) - \sinh^2(v_0)}{\sinh(v_0)} = \frac{1}{\sinh(v_0)} = \frac{1}{|PQ|}.$$

Krumningsradien i Q til de to prinsipale kurvene på pseudosfæren er $|PQ|$ og $|QR|$. Den første er den som dannes av normalplanet uv og den andre planet normalt til uv -planet gjennom PQ . Som en følge av symmetri gir disse planene maksimum og minimum krumning og samtidig er motsatt rettet. Derfor ser vi igjen at krumning til pseudosfæren er:

$$\kappa = -\frac{1}{|PQ|} \cdot \frac{1}{|QR|} = -1.$$

Vi skal fortsette å studere kjernen i teoremet; at pseudosfæren er lokalt isometrisk til øvre halvplan. Vi viste i eksempel 6.2.3 at traktrisen kunne gis parametrisering

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\cosh(t)} \\ v(t) &= t - \tanh(t). \end{aligned}$$

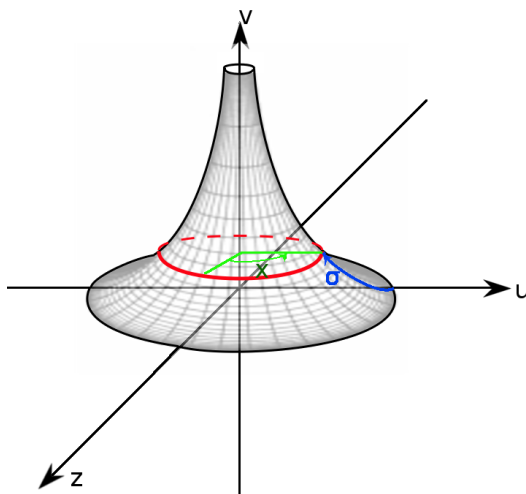
Men vi ønsker å parametrisere den ved hjelp av buelengden σ på traktrisen. Buelengden kan vi fra integralet³

$$\begin{aligned}\sigma &= \int_0^t \sqrt{du^2 + dv^2}, \\ &= \int_0^t \sqrt{\frac{1}{\cosh^2(t)} + (t - \tanh(t))^2} dt \\ &= \int_0^t \sqrt{t^2 - 2t \cdot \tanh(t) + \left(\frac{1}{\cosh^2(t)} + \frac{\sinh^2(t)}{\cosh^2(t)}\right)} \\ &= \int_0^t \sqrt{t^2 - 2t \cdot \tanh(t) + 1} \\ &= \log(\cosh \sigma),\end{aligned}$$

Derfor er $\cosh(t) = e^\sigma$ og

$$v = e^{-\sigma}.$$

Vi lar nå buelengden σ og vinkelen x være koordinatene våre på pseudosfæren.



Figur 8.2: Pseudosfæren parametrisert av σ og θ .

Buelengden motstående til vinkelen dx på sirkelen tegnet ut av planet parallelt med uz -planet (hvor z er tredjekoordinaten (u, v, z) i \mathbb{R}^3) gjennom punktet på pseudosfæren er $v \cdot dx = e^{-\sigma} dx$. Da er den infinitesimale avstanden ds mellom to punkter på pseudosfæren

³Vi har brukt *Wolfram Mathematica Online Integrator* til å kalkulere integralet

med koordinater (x, σ) og $(x + dx, \sigma + d\sigma)$ gitt ved metrikken representert ved

$$ds^2 = e^{-2\sigma} dx^2 + d\sigma^2.$$

Dersom vi nå setter inn variabelen $y = e^\sigma$ slik at $dy = e^\sigma d\sigma$ får vi

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{-2\sigma} dx^2 + \left(\frac{dy}{e^\sigma}\right)^2 \\ &= e^{-2\sigma} (dx^2 + dy^2) = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \end{aligned}$$

Av denne grunn er pseudosfæren lokalt isometrisk til xy -planet hvis avstanden er definert som over. □

8.2 Pseudosfærens begrensninger

Pseudosfæren gjør det mulig å konkretisere den hyperbolske plangeometrien i \mathbb{R}^3 . Naivt sagt kan man tegne hyperbolske figurer på denne flaten, på samme måte som vi kan tegne euklidske figurer i papirplanet. Pseudosfæren bringer på denne måten det hyperbolske planet ut i verden vi kjenner. I \mathbb{R}^3 kjenner vi den euklidske distansen til kurver.

Pseudosfæren er riktignok ikke perfekt. For det første er den ikke det „planet” vi i utgangspunktet ønsket å finne, men snarere en sylinder med negativ krumning. For det andre er den ikke komplett ettersom traktrisen ikke kan utvides glatt utover utgangspunktet $(1, 0)$. Faktisk kan det vises at ingen komplett \mathbb{R}^2 flate i \mathbb{R}^3 kan ha krumming -1 [Kob1998, s. 31], og derfor finnes det heller ingen andre flater som beskriver den hyperbolske geometrien like konkret og likevel globalt. For det tredje er linjene på pseudosfæren vanskelig å detektere. Det er med andre ord vanskelig å finne hva som er den korteste avstanden mellom to punkter på pseudosfæren. Unntaket er som vi har sett to punkter på samme snittkurve som danner en traktrise hvor vi utlede en forholdsvis enkel relasjon til \mathbb{R}^3 . Av disse grunnene er det ofte mer anvendelig å modeller hvor avstands-begrepet ikke euklidsk, men til gjengjeld er plane og komplette. En slik modell er for hele det hyperbolske planet er Poincarès øvre halv-plan modell.

Bibliografi

- [Ven2006] Gerard A. Venema, Foundations of Geometry, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2006.
- [Gre1994] Marvin Jay Greenberg, Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History, 3. utg., W. H. Freeman and Company, New York, 1994.
- [Ros1988] B. A. Rosenfeld, A history of non-euclidean geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [Sti1996] John Stillwell, Sources of Hyperbolic Geometry, American Mathematical Society, 1996.
- [Gra2006] Alfred Gray m.fl., Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica, 3. utg, Chapman & Hall/CRC, 2006
- [Ram1995] Arlan Ramsay og Robert D. Richtmeyer, Introduction to hyperbolic geometry, Springer-Verlag, New York, 1995
- [Bir1940] George Birkhoff og Ralph Beatley, Basic Geometry, Scott, Foresman and Company, Boston, 1940
- [Har2000] Robin Hartshorne, Euclid and Beyond, Springer-Verlag, New York, 2000
- [Hil1968] David Hilbert, Foundations of Geometry. Open Court. La Salle, Illinois, 1968.
- [Som1914] D. M. Y. Sommerville, The Elements of Non-Euclidean Geometry. G. Bell and Sons LTD, London, 1914.
- [Kob1998] Shoshici Kobayashi, Hyperbolic complex spaces, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.
- [Thu2002] William P. Thurston, The Geometry and Topology of Three-Manifolds, Electronic version 1.1, <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>, mars 2002.

- [Bon1955] Roberto Bonola, János Bolyai, H. S. Carslaw, Nikolaï Ivanovich Lobachevskii, *Non-Euclidean geometry: a critical and historical study of its development*, Courier Dover Publications, 1955
- [San2007] Karl Erik Sandvold m.fl., *Sigma R1 Matematikk*, Gyldendal Undervisning, Oslo, 2007
- [Hea1956] Thomas L. Heath, *Euclid's Elements*, Dover, New York, 1956