NTNU
Det skapande universitetet

Interaksjon og læring i matematikk

Ein studie av korleis ulike matematiske tema og kontekstar påverkar kommunikasjonsmønster og kunnskapsutvikling

Bente Ommedal Krumsvik

Master i lærerutdanning med realfag
Oppgåva levert: Mai 2010
Hovudrettleiar: Tine Wedege-Mathiassen, MATH

Noregs teknisk-naturvitskapelege universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Masterstudien min har eg utført i samband med mi lektorutdanning ved Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet i Trondheim. Eg starta på utdanninga hausten 2005, og har gjennom dei fem åra studert faga matematikk, fysikk, kjemi og biologi. Arbeidet med masteroppgåva i matematikkdidaktikk føregjekk i løpet av våren 2010.

Eg vil her takke min rettleiar, Frode Rønning, for god hjelp og gode råd. Takk for at du alltid førte meg tilbake på riktig spor, når eg ikkje visste korleis eg skulle kome meg vidare.

Vidare vil eg takke Ida Håvik for arbeidet med å oversette samandraget til engelsk. Det var til stor hjelp. Ikkje minst vil eg takke læraren og klassen som stilte seg til disposisjon for undersøkinga mi. Spesielt takk til det gode samarbeidet med læraren, både gjennom masteroppgåva si pilotundersøking og sjølve masteroppgåva.

Til slutt vil eg takke mine medstudentar og mine næraste, for gode råd og god støtte undervegs i prosessen.

Trondheim, 1. juni - 2010

Bente Ommedal Krumsvik

Samandrag

Målet med studien er å få ei betre forståing for korleis ulike matematiske tema og kontekstar i undervisninga er med på å påverke kva kommunikasjonsmønster som oppstår, og korleis elevane utviklar kunnskap i matematikk. Det blir brukt eit analyseverktøy som består av teori om ulike kommunikasjonsmønster og om ulike typar matematikkoppgåver i samanheng med tradisjonell og undersøkande matematikk-undervisning. I tillegg blir det brukt teori som omhandlar ulike oppfatningsnivå når det gjeld matematisk generalisering og korleis elevane brukar og oppfattar teikn og symbol i matematikk, i samanheng med elevane si kunnskapsutvikling.

I studien blir det nytta kvalitative forskingsmetodar, i form av observasjon. Utvalet består av ein matematikklærar og ein 9. klasse. Datamateriale blir samla inn i løpet av tre dagar, der det til saman er seks økter med matematikkundervisning. Gjennom observasjonen blir det sett på kva kommunikasjonsmønster som oppstår, og korleis elevane utviklar kunnskap. I analysen blir det plukka ut enkeltepisodar og dialogar av datamaterialet, og dei blir analysert ved hjelp av analyseverktøyet.

Resultata frå studien tyder på at det er ein samanheng mellom kva matematiske tema undervisninga handlar om, kommunikasjonsmønstra som oppstår og korleis elevane utviklar matematisk kunnskap. I tillegg tyder det på at konteksten rundt matematikkoppgåvene er med på å påverke korleis interaksjonen føregår mellom elevane og læraren, samt i kva grad elevane utviklar kunnskap. Det kan sjå ut til at gjennom opne og utforskande oppgåver, og ein reell og konkret referansekontekst, er det lettare for elevane å omgrepsmessig mediere mellom matematiske symbol og referansekontekstar. Her er det samtidig betre lagt til rette for at elevane diskuterer med kvarandre og med læraren, og for at det oppstår undersøkande kommunikasjonsmønster. Motsetninga er ei mindre open undervisning som dreier seg om semi-verkelege kontekstar. Her tyder det på at kommunikasjonsmønstra utviklar seg til å bli tradisjonelle, og elevane har større problem med å kople saman matematiske omgrep, og symbol.

Summary

The purpose of this research study is to achieve a better understanding of how different mathematic themes and contexts in teaching, affect communication patterns and how students develop knowledge about mathematics. To do this, an analysis tool consisting from theories on different communication patterns and different types of mathematic assignments, connected to traditional and investigative mathematic teaching, will be applied. In addition, theories that describe different levels of perception in mathematic generalization, and how students utilize and perceive signs and symbols in mathematics, in connection with the students' acquirement of knowledge, will be applied.

In this research study, a qualitative research method, namely observation, will be used. The selection consists from a mathematics teacher and a class of ninth-graders. The data has been collected during a period of three days, in a total of six teaching sessions. The observations focus on the types of communication patterns that arose in these sessions, and how the students acquired mathematic knowledge. In the analysis chapter, single episodes and dialogues are selected, and are analyzed by means of the analysis tool previously described.

The results featured in this research study suggest that there is a connection between themes in mathematic teaching, the communication patterns that arise, and how students develop mathematic knowledge. In addition, the results suggest that the context that surrounds mathematic assignments, affect both the interaction between students and teacher, and to which degree the students develop knowledge. It seems that through open and investigative assignments, and in a real and concrete context of reference, it is easier for students to mediate between mathematic symbols and context of reference. This also facilitates a better discussion between students and teacher, and creates investigative patterns of communication. The opposite would be a less open form of teaching, revolving around semi-concrete contexts, where patterns of communication seem to become more traditional, and students appear to connect mathematic concepts and symbols with greater difficulty.

Innhald

VEDLEGG

1. INNLEIING

1.1 Bakgrunn for studien

Mitt utgangspunkt for studien, er at eg gjennom praksis i lektorutdanninga har erfart at det kan vere ei stor utfordring å kommunisere ”riktig” med elevane. Det eg her tenker med ”riktig”, er at eg som lærar vil kommunisere med elevane slik at eg kan legge til rette for best mulege læringsmulegheiter i matematikkundervisninga. Alrø og Skovsmose (2002) ser på det å lære som noko personleg, men samtidig føregår læringa i ein sosial samanheng med mellommenneskelege samhandlingar. Dermed vil elevane si læring vere avhengig av kvaliteten på dei mellommenneskelege samhandlingane som spring ut av kommunikasjonen. Erfaringane eg gjorde meg i praksis førte til at eg utvikla ei interesse for kommunikasjonen som føregår i klasserommet, og kva samanhengar det er mellom ulike interaksjonsmønster og ulike situasjonar i matematikkundervisninga. Hovudansvaret for å oppretthalde ein velfunksjonerande kommunikasjon i klasserommet meiner eg ligg hos læraren. Likevel trur eg at det er fleire faktorar som er med på å bestemme kva type kommunikasjon som oppstår eller blir utvikla i matematikkundervisninga, og korleis elevane lærer. Etter kvart som eg har fordjupa meg i temaet har det dukka opp spørsmål eg ønskjer å sjå på, der samanhengar mellom kommunikasjonsmønster, fagtema, oppgåvetypar, læring og forståing er sentrale.

Gjennom praksis og den fagdidaktiske undervisninga på lektorutdanninga, har eg blitt opptatt av at matematikk kan og bør undervisast på ein undersøkande og problem-løysande måte. Sjølv har eg som elev og som student erfart at matematikkundervisninga føregår gjennom det som Alrø og Skovsmose (2002) ser på som ein *tradisjonell måte*, der tavleundervisning og løysing av rutineoppgåver dominerer. Dermed synes eg det er spennande å sjå at matematikkundervisninga kan gjennomførast på ein annan måte. Ei *undersøkande og utforskande matematikkundervisning* vil vere ein kontrast til den tradisjonelle, der det eksisterer andre typar kommunikasjonsmønster (Alrø & Skovsmose, 2002). I samanheng med undersøkande og problemløysande undervisning, har det etter kvart kome fram at det er behov for nye forskingsmetodar. Som forskingsmetode er observasjon av interaksjonen mellom elevar som løyser slike oppgåver sett på som den mest hensiktsmessige måten å forske på korleis elevar utviklar løysingsstrategiar og matematisk kunnskap (Lesh & Zawojewski, 2007).

Analyse av interaksjonen som føregår i undervisnings- og læringsprosessar i matematikk er ein viktig del av den matematikkdidaktiske forskinga, og klasseroms-interaksjonar som studieobjekt får meir og meir merksemd (Bartolini Bussi, 1994; Steinbring, 2005). Steinbring og Nührenbörger (2009) ser i sin studie at ulike sosiale situasjonar i klasserommet fører til ulike typar interaksjonar. Her tek deltakarane ulike roller i dei ulike situasjonane, og dermed får dei forskjellige tilnærmingar til interaksjon. Vidare fokuserer Steinbring og Nührenbörger på korleis elevar dannar matematisk kunnskap i interaksjon med medelevar og med lærarar. Spørsmålet dei stiller seg, er i kva grad lærarane er merksame på elevane sine interaktive tolkings-prosessar. Steinbring og Nührenbörger ser gjennom studien at når elevane kommuniserer seg imellom, kan det matematiske innhaldet både sjåast på som gitte fakta eller som noko dei kan diskutere seg fram til. Når læraren kommuniserer med elevane derimot, blir den matematiske kunnskapen sett på som noko læraren allereie veit og som elevane skal lære seg. Det å lytte til elevane, stille spørsmål og gi tilbakemelding, har eg sett at er eit sentralt tema i den matematikkdidaktiske forskinga. Mason (1998) meiner at spørsmål i matematikkundervisninga har to funksjonar, der dei både kan fungere som ein test av elevane sin matematiske kunnskap eller dei kan vere fokuserande og ein del av ein utforskingsprosess. Dermed må vi som lærarar, hevdar Mason, vere merksame på kva type spørsmål vi stiller. Doerr (2006) ser i sin studie korleis lærarar lyttar og responderar til elevane sine, og at det her er viktig at lærarar har utvikla eit detaljert skjema for korleis elevane kan tilnærme seg matematikkoppgåvene. På den måten, meiner Doerr, vil lærarane vere betre forberedt til å stille spørsmål og forstå elevane si tenking. Lærarane vil dermed ha ein betre føresetnad for å kunne utfordre elevane, slik at dei utviklar den matematiske kunnskapen sin vidare. Yackel (1995) meiner at når matematikkundervisninga no blir meir og meir undersøkingsbasert, er det viktig at både forskarar og lærarar forstår korleis elevane forklarer sine løysings-metodar og tankemåtar. Like viktig seier Yackel, er det å forstå at elevane sin aktivitet i matematikkundervisninga har ein refleksiv samanheng med konteksten aktiviteten deira føregår i.

Eg ønskjer å sjå på kommunikasjonsmønster som oppstår mellom lærar og elevar, og mellom elevar fordi eg ser eit behov for at det skal settast meir i fokus i lærarutdanninga og blant eksisterande lærarar. Bartolini Bussi (1994) påpeikar viktigheita av å analysere eksisterande situasjonar i klasserommet, for å kunne gjere både lærarar og forskarar merksame på at det eksisterer undervisningsideologiar underforstått i klasserommet. Samtidig er det i følgje Bartolini Bussi, viktig å få fram betydinga skjulte interaksjons-mønster har for matematikkundervisninga. Vidare er det behov for å kome med beskrivingar av situasjonar og forhold mellom lærar og elevar, som er med på å støtte og engasjere elevane si læring (Cazden, 2001). I følgje Scherer og Steinbring (2006) vil det å få betre forståing omkring kva for matematiske interaksjonar mellom lærar og elevar som fører til lærar- eller elevsentrert undervisning vere viktig. Samtidig meiner Scherer og Steinbring at det er viktig å forstå kva typar interaksjon som anten oppmuntrar eller hindrar elevane si uavhengige og aktive læring. Med ein betre bakgrunn om interaksjonar og situasjonar som støttar elevane sitt engasjement og læring, kan eg vere med på å synleggjere lærarane sine måtar å undervise og kommunisere med elevane på. I følgje Voigt (1995) er dei fleste lærarar ikkje klar over korleis dei fører matematikkundervisninga si inn i faste mønster. Noko som betyr at det er viktig å legge vekt på kommunikasjonsmønster og læring. I samanheng med lærarutdanninga er det viktig at kommunikasjonen og interaksjonen som føregår i klasserommet blir vektlagt, der det er spesielt viktig å få meir kunnskap om korleis undervisninga kan sentrerast rundt elevane og støtte dei i deira læring (Cazden, 2001; Scherer & Steinbring, 2006). Samtidig kan eg sjølv fokusere på å sentrere mi eiga matematikkundervisning rundt elevane, og lære meir om korleis min kommunikasjon med elevane har samanheng med tradisjonell eller undersøkande matematikk-undervisning. I følgje Voigt vil ei tilnærming her vere å analytisk skilje mellom lærings- og interaksjonsprosessar, og dermed undersøke forholdet mellom matematisk læring og sosial interaksjon.

1.2 Forskingsspørsmål og føremål

På grunnlag av mi eiga interesse og det faktum at klasseromsinteraksjon og elevane si læring og forståing er nært samanvevd i matematikkundervisninga, ønskjer eg å studere kva samanhengar eg kan finne mellom dei ulike faktorane. Eg ønskjer å studere korleis ulike situasjonar i matematikkundervisninga heng saman med kva type kommunikasjonsmønster som oppstår. Med situasjonar i matematikkundervisninga meiner eg ulike hendingar eller episodar som oppstår i samanheng med ulike matematiske tema, i tillegg til ulike kontekstar undervisninga føregår i. Samtidig meiner eg at det er interessant å undersøke korleis type av matematikkoppgåver, problem-løysande/utforskande eller tradisjonelle, heng saman med kva type kommunikasjons-mønster som oppstår. Mi hypotese er at kontekst i samanheng med fagtema og oppgåvetypar har ei viktig rolle både for korleis kommunikasjonen føregår i klasserommet, og for korleis elevane utviklar sin kunnskap. Eg vel her å sjå på matematisk forståing på same måte som Voigt (1994) gjer i sin studie. Ut i frå det føregåande vil eg i min studie undersøke korleis ulike matematiske tema og kontekstar kan vere med på å påverke kva kommunikasjonsmønster som oppstår i undervisninga og korleis elevane utviklar matematisk kunnskap. Forskingsspørsmåla som skal hjelpe meg med studien er:

1. Korleis påverkar ulike tema og kontekstar i matematikkundervisninga kva kommunikasjonsmønster som oppstår?
2. Korleis påverkar ulike tema og kontekstar i matematikkundervisninga elevane si kunnskapsutvikling og forståing i matematikk?

Min innfallsvinkel er å undersøke dei undervisnings- og læringsprosessane som føregår i matematikklasserommet, gjennom kommunikasjonen mellom lærar og elevar og mellom elevar. Samtidig ønskjer eg å studere elevane si kunnskapsutvikling og forståing gjennom bruk av symbol, omgrep og referansekontekstar. For å kunne svare på forskingsspørsmåla, bygger studien på eit sosiokulturelt læringsperspektiv. Her skjer læring i eit samspel mellom individ, og der språk og kommunikasjon er sentralt (Dysthe, 2001; Säljö, 2003). Det teoretiske rammeverket består blant anna av ulike typar kommunikasjonsmønster, som kan oppstå i tradisjonelle eller undersøkande læringsmiljø: IRE/IRF-mønster, "gjett kva læraren tenker"-mønster, traktmønster, tematiske mønster og IC-modellen (Alrø & Skovsmose, 2002; Bauersfeld, 1988; Cazden, 2001; Wells, 1999). Her vil dei ulike kommunikasjonsmønstra vere eit verktøy for å analysere dialogane mellom læraren og elevane, og mellom elevane.

For å kunne seie noko om elevane si kunnskapsutvikling i samanheng med korleis dei samhandlar i klasserommet, nyttar eg meg av teorien til Steinbring (2005, 2006). Hos Steinbring er den epistemologiske trekanten sentral, og den fortel noko om kva koplingar elevar dannar seg mellom omgrep, referansekontekst og teikn/symbol i matematikk. Trekanten vil her vere eit verktøy for å beskrive eventuell utvikling av matematisk kunnskap. I samanheng med elevane si kunnskapsutvikling nyttar eg meg i tillegg av Lee (1996) sine ulike oppfatningsnivå for matematisk generalisering.

Mi eiga forskingsinteresse gjer det naturleg å velje eit kvalitativt forskingsdesign, fordi slik forsking blir brukt når ein har til hensikt å kome med ei grundig beskriving av ein spesifikk situasjon (Mertens, 2005). I studien er hensikta å betre forstå korleis kommunikasjonen i matematikkundervisninga føregår, og korleis den heng saman med ulike undervisningssituasjonar og elevane si kunnskapsutvikling. I studien nyttar eg meg derfor av observasjon, som er ein spesielt nyttig metode for å fange opp kommunikasjonsmønster (Mertens, 2005; Robson, 2002). Ved ein ikkje-deltakande observasjon analyserer eg korleis ein matematikklærar og 9. klasseelevane hans kommuniserer i den daglege matematikkundervisninga. Samtidig brukar eg bilde- og lydbandopptak for å fange opp det som skjer, for seinare å kunne tolke og analysere datamaterialet grundig. Analysearbeidet føregår ved at eg brukar teori til først å analysere matematikkoppgåvene elevane arbeider med, og deretter samspelet mellom læraren og elevane og mellom elevane.

1.3 Studien si oppbygging

Studien er bygd opp av seks ulike kapittel. I kapittel 2 blir den teoretiske ramma presentert. Eg startar med å sjå nærare på sosiokulturelle læringsteoriar, og betydinga dei har for fokuset i studien. Deretter kjem ein presentasjon av tradisjonell og undersøkande matematikkundervisning, etterfølgt av ulike kommunikasjonsmønster. Til slutt i det teoretiske rammeverket blir den epistemologiske trekanten og dei tre oppfatningsnivåa i samanheng med matematisk generalisering presentert, ettersom begge ligg til grunn for det analytiske verktøyet som skal vere med på å beskrive elevane si kunnskapsutvikling. I kapittel 3 blir studien sin metodikk gjort greie for. Her presenterer eg valt metode, framgangsmåte og gjennomføring av datainnsamlinga. I tillegg blir studien sin validitet og reliabilitet diskutert. Til slutt i kapittelet beskriv eg sjølve analyseverktøyet. Det neste kapittelet, kapittel 4, består av resultat og analyse av datamaterialet. Kapittelet er delt i to, der eg presenterer resultat og analyse etter to ulike fagtema som er sentrale i dei undervisningssekvensane eg observerer; vekstfaktor og kombinatorikk. Resultata og analysen blir vidare diskutert i kapittel 5, både opp mot forskingsspørsmåla, valt metode, praktiske avgrensingar og eventuelle forbetringar. I kapittel 6 konkluderar eg om eg har klart å svare på forskingsspørsmåla, og eg presenterar ei perspektivering av studien der eg ser på kva eg har lært av arbeidet og eventuelle framtidsutsikter.

2. TEORETISK RAMMEVERK

I kapittelet vil eg presentere det teoretiske rammeverket til studien, som dannar grunnlaget for analysen av datamaterialet. Her startar eg med å ta utgangspunkt i sosiokulturelle læringsteoriar. I den samanheng vil eg kort presentere to andre syn på læring: kognitivismen og behaviorismen. I tillegg er medierande verktøy og situert læring viktige omgrep i samanheng med sosiokulturelle læringsteoriar. Vidare vil eg presentere to former for matematikkundervisning som kan eksistere i klasserommet: tradisjonell og undersøkande. I samanheng med tradisjonell matematikkundervisning, presenterer eg omgrepa oppgåveparadigmet og oppgåvediskursen. Innanfor undersøkande matematikkundervisninga vil eg ta føre meg Skovsmose (2003) sine seks læringsmiljø, og kva matematisk problemløysing er. Deretter vil eg presentere ulike kommunikasjonsmønster som kan oppstå i samanheng med dei ulike undervisnings-formene. Til slutt i det teoretiske rammeverket vil eg presentere den epistemologiske trekanten, og dei tre oppfatningsnivå i samanheng med matematisk generalisering.

2.1 Sosiokulturelle læringsteoriar

I følgje Dysthe (2001) er eit sentralt element i sosiokulturelle læringsteoriar, at læring er noko som føregår mellom menneske. Læring er noko som skjer i samspelet mellom individ, og her er språk og kommunikasjon viktige element i læringsprosessane. Eit slikt læringssyn er sentralt i studien, då det er kommunikasjon og interaksjon mellom læraren og elevane imellom som er i fokus.

2.1.1 Tre ulike syn på kunnskap

Ein læringsteori er avhengig av kva perspektiv ein vel å sjå på læring frå, og her viser Dysthe (2001) til tre ulike perspektiv som kjem av ulike syn på kunnskap; kognitivismen, behaviorismen og sosiokulturell læringsteori. *Kognitivistisk* syn på læring fokuserar på elevane sine indre og personlege læringsprosessar (Dysthe, 2001). Læring gjennom *behavioristiske* læringssyn skjer ofte gjennom øving og gjennom å ta etter ei ytre åtferd. Fordi alle menneske har åtferd, blir det her sett på at det vil vere muleg å overføre den frå ein person til ein annan. *Overføringslæring* hevdar at kunnskap kan overførast frå læraren til elevane, og var tidlegare eit vanleg syn på læring og undervisning (Säljö, 2003). I dei siste tiåra har læringssynet om overføring av kunnskap blitt kraftig kritisert (Steinbring, 2005). Likevel kan eg ut frå eigne erfaringar, som elev og som lektorstudent, argumentere for at det framleis skjer undervisning som ser ut til å vere basert på ei tru om at kunnskap kan overførast.

Dei *sosiokulturelle læringsteoriane* kan i følgje Dysthe (2001) sporast tilbake til både George Herbert Mead og John Dewey. Dei hevda at kunnskap blir konstruert gjennom aktivitet, og gjennom samhandling og interaksjon mellom menneske i eit kulturelt fellesskap. Samtidig kan perspektivet sporast tilbake til Lev Vygotsky og Mikhail Bakhtin. Læringskonteksten vart på byrjinga av 80-talet av interesse for forskarane, og her er det Vygotsky som har hatt mest betyding på området. Han fekk knytt ideane om kontekst saman med mennesket sine psykologiske funksjonar og prosessar, der han påpeika at menneskeleg aktivitet føregår i kulturelle omgivnader og dei mentale prosessane kjem av samhandling med andre. Bakhtin på si side påstår at all slags kommunikasjon er *dialogisk*, noko som betyr at forståing og meining oppstår som eit samarbeid mellom to partar. Hovudpoenget hans er at meining ikkje kan overførast, men at det ligg i sjølve interaksjonsprosessen. Dysthe påpeikar at Bakhtin sitt læringssyn kjem som eit alternativ til den tradisjonelle overføringsmetaforen, der metaforen er så sterkt festa i den vestlege måten å tenke på at det er slik folk flest tenker om læring. I det sosiokulturelle perspektivet blir det lagt vekt på at kunnskap blir konstruert i ein kontekst og i samhandling med andre menneske, og interaksjons-prosessane er heilt avgjerande for elevane si læring og utvikling (Dysthe, 2001; Palincsar, 1998; Säljö, 2003).

2.1.2 Medierande verktøy

Vårt samspel med dei intellektuelle og fysiske verktøya, er i følgje Säljö (2003) sentralt i eit sosiokulturelt perspektiv på læring og utvikling. For å kunne forstå korleis menneske brukar dei kognitive ressursane sine, lærer og handterer ulike situasjonar, må eg som forskar ta med i betraktninga at menneske løyser problem og beherskar sosiale praksisar gjennom slike verktøy. I eit sosiokulturelt perspektiv på læring fungerer dei fysiske og intellektuelle verktøya som strukturerande ressursar når det gjeld å delta i sosiale praksisar. Samtidig er dei med som hjelpemiddel for å kunne gjere kompetente handlingar og tolkingar i nye situasjonar. *Læring* er her å ta til seg evna til å handle med nye fysiske og intellektuelle verktøy (Säljö, 2003, s. 155). I følgje Säljö kan mennesket gjennom interaksjon, auke si evne til å forstå korleis sosiale aktivitetar er strukturert og kva dei inneber. Voigt (1994) ser på *matematisk forståing* som eit produkt av sosiale prosessar og sosiale interaksjonar. Ut i frå eit slikt synspunkt, blir matematisk forståing studert som noko som blir produsert mellom elevar og ikkje som noko som blir konstruert og eksisterer berre hos kvar enkelt elev (Voigt, 1994, s. 172).

I følgje Säljö (2003) er det grunnleggande at fysiske og intellektuelle/språklege verktøy fungerar som medierande verktøy i eit sosiokulturelt perspektiv på læring. Å *mediere* betyr å fortolke, og det skjer i følgje Säljö ved at vi menneske handterer den abstrakte omverda og forstår den gjennom dei fysiske og intellektuelle verktøya. I samanheng med matematikk er det eit viktig skilje mellom matematisk kunnskap og kunnskap i andre vitskapar, som for eksempel fysikk, kjemi og biologi. Vi kan ikkje i matematikk nå dei matematiske objekta (tal, funksjonar, vektorar og liknande) gjennom instrument som mikroskop og målapparat. Den einaste måten vi kan få tilgang til dei abstrakte matematiske omgrepa, er gjennom å bruke teikn og semiotiske representasjonar (Duval, 2006). Dermed ser eg at teikn og symbol i matematikk vil vere medierande verktøy for å nå dei matematiske objekta.

Säljö (2003) påpeikar at omgrepet mediering er sentralt i å skilje den sosiokulturelle teorien frå andre leiande teoretiske perspektiv. Det at mennesket si tenking og førestillingsverd har vokse fram av kulturar og deira intellektuelle og fysiske verktøy, strir i mot dei kognitive førestillingane om at intellektet er rasjonelt og fungerer utanom det fysiske og konkrete. Det viktigaste medierande verktøyet vi menneske har er språket. Språket er i aller høgaste grad med på å mediere omverda, slik at den framstår som meiningsfull. Her har språket blant anna ein viktig funksjon i det å kunne referere til betydingsfulle fenomen som ikkje har nokon direkte fysisk eksistens, noko eg meiner er spesielt viktig i samanheng med matematiske omgrep. I tillegg er språket ein ressurs for å skape kunnskap om verda rundt oss, gjennom relasjonen mellom språklege uttrykk og fenomena uttrykka refererer til (Säljö, 2003).

2.1.3 *Situert læring*

I følgje Dysthe hevdar sosiokulturelle teoretikarar at dei fysiske og sosiale kontekstane der kognisjon føregår, er ein samanvevd del av den læringa som skjer. Ut i frå Kunnskapsforlaget (u.å) si ordbok betyr kontekst for eksempel ”ein del av” eller ”samanheng”. Ei sosiokulturell forståing av *kontekst*, er at ”alle deler er integrerte, vevde saman og læringa inngår i denne veven” (Dysthe, 2001, s. 43). Situert læring betyr at ferdigheiter og kunnskap er tett samanknytte med sjølve læringssituasjonen (Lave & Wenger, 1991), og eit *situert læringsperspektiv* fokuserer på dei delane av det interaktive systemet som den lærande er ein del av. Det *interaktive systemet* inneber individa i samspel med kvarandre, dei fysiske verktøya og representasjonssystem som språk og matematiske symbol (Dysthe, 2001, s. 44).

Ut i frå eit situert læringsperspektiv er den matematiske kunnskapen knytt til konteksten elevane arbeider i, og kven dei samhandlar med. Her ser eg at kunnskapen er avhengig av fleire faktorar rundt den enkelte eleven, noko som gjer at kunnskapen er *distribuert* mellom fleire enkeltindivid. Elevar med ulike ferdigheiter, vil for eksempel kunne kome med ulike bidrag i den samla kunnskapsutviklinga. Når kunnskapen er fordelt mellom dei enkelte elevane, vil den i tillegg vere sosial der den blir konstruert i samhandling og interaksjon mellom elevane (Dysthe, 2001).

I studien undersøker eg kommunikasjonen mellom lærar og elevar og mellom elevar i ulike kontekstar. Nedanfor vil eg derfor presentere ulike former for matematikkundervisning som kan eksistere i klasserommet. Seinare vil eg sjå på ulike kommunikasjonsmønster som er typiske for dei ulike undervisningsformene.

2.2 Tradisjonell matematikkundervisning

Alrø og Skovsmose (2002) definerer *tradisjonell matematikkundervisning* som ei matematikkundervisning der tavleundervisning og løysing av rutineoppgåver dominerer. Her kan undervisningsøkta delast inn i to: Første del går ut på at læraren presenterer nytt stoff, i form av matematikkoppgåver eller matematisk tema. Andre del går ut på at elevane skal arbeide med det aktuelle stoffet gjennom bestemte oppgåver, der dei brukar dei teknikkane som allereie er gjennomgått på tavla. Resultata til elevane blir til slutt vurderte av læraren. Ei side av den tradisjonelle matematikkundervisninga er *oppgåveparadigmet*, der det er fokus på gjennomgang av nye matematiske tema og oppgåverekning. Paradigmet påverkar organiseringa av matematikkundervisninga, kommunikasjonsmønsteret mellom lærar og elevar og utforminga av matematikk-oppgåvene (Alrø & Skovsmose, 2002; Skovsmose, 2003).

Omgrepet tradisjonell matematikkundervisning har sterke likskapstrekk med Mellin-Olsen (1990) sitt omgrep oppgåvediskursen. *Oppgåvediskursen* er det språket og den praksisen læraren gjennomfører i klasserommet, og blir i følgje Mellin-Olsen brukt til å beskrive behandling av kunnskapar og organisering av arbeid som dominerar matematikkundervisninga. Gjennom studien sin ser Mellin-Olsen at lærarane ofte fokuserer på at elevane skal kome gjennom ei viss mengde stoff, matematiske oppgåver og tema, i løpet av ei viss tid. Elevane skal i ein oppgåvediskurs ha med seg eit minimum av kunnskapar fram mot eksamen og vidare skulegong. Ofte er det læreboka som bestemmer gangen i arbeidet, der kvart kapittel har tilhøyrande oppgåver som skal gjennomgåast i eit visst tidsrom. ”Fart” viser seg i studien å vere sjølve kjernen i oppgåvediskursen, då det både er eit mykje brukt ord av lærarane og det styrer store deler av undervisninga. Eit slikt fokus på fart kan føre til at elevane konkurrerer om å gjere flest muleg oppgåver, og at dei er meir opptatt av å få riktig svar enn av sjølve innhaldet i oppgåvene (Mellin-Olsen, 1990). Skovsmose (2003) ser på at i oppgåvediskursen vil matematikkundervisninga forme seg etter målet om å få avklart visse matematiske forhold, slik at elevane kan kome med korrekte svar på dei aktuelle oppgåvene. Samtidig som ei matematikkundervisning høyrer til i oppgåveparadigmet, vil den i følgje Skovsmose høyre heime i oppgåvediskursen.

Eg meiner at det her kjem tydeleg fram at den tradisjonelle matematikkundervisninga støttar seg på dei behavioristiske læringsteoriane. Behaviorismen har som grunnlag at elevane lærer ved å forandre si åtferd gjennom øving. Både i Alrø og Skovsmose (2002) sin definisjon av tradisjonell matematikkundervisning og i Mellin-Olsen (1990) sin oppgåvediskurs, er det stort fokus på arbeid med rutineoppgåver for at elevane skal lære, og det er gjennom øving av flest muleg oppgåver at elevane skal få med seg ”eit minimum” av kunnskapar.

Alrø og Skovsmose (2002) påpeikar at den tradisjonelle skulematematikken dannar ein kontekst for kommunikasjonen mellom lærar og elevar, der det utviklar seg spesielle kommunikasjonsmønster. I tradisjonelle matematikktimar har klasseromsinteraksjonen ein tendens til å utvikle seg til stegvise interaksjonsmønster. Lærarane er som regel ikkje klar over korleis matematikkundervisninga går inn i faste mønster, og elevdeltakinga i timane kan dermed bli misforstått (Voigt, 1995). Forsking på prosessane i matematikklasserommet har forsøkt å identifisere dei mest dominerande kommunikasjonsmønstra i den tradisjonelle matematikkundervisninga (Alrø & Skovsmose, 2002). I kapittel 2.4 som omhandlar kommunikasjonsmønster, kjem eg tilbake til dei ulike mønstra.

2.3 Undersøkande matematikkundervisning

2.3.1 Seks læringsmiljø

Skovsmose (2003) meiner at om elevar blir inviterte inn i eit frodig landskap, der dei ikkje klarer la vere å stille spørsmål som: ”Kva viss..?” og ”Kvifor det?”, har dei kome inn i eit *undersøkingslandskap*. I følgje Alrø og Skovsmose (2002) er grunntanken i eit undersøkings landskap at kunnskap blir utvikla i ei samhandling mellom aktørane. Alrø og Skovsmose refererer her til Dewey sine teoriar om at elevane sine erfaringar er eit startpunkt for all læring. Dei påpeikar at ein utforskingsprosess må starte på eit punkt der elevane allereie har erfaring, slik at dei kan utforske mest muleg på eiga hand. På same måte som Dewey, skiljer dei ikkje mellom ein læringsprosess og ein utforskingsprosess. Elevane må inviterast inn i landskapet og dei må ta i mot invitasjonen. Slik får dei ei kjensle av at dei er medeigarar av undersøkingsprosessen. Dermed kan ikkje utforskingsprosessen vere ein tvungen aktivitet, og resultat og konklusjonar kan ikkje bestemmast på førehand då det skal vere ein open forskingsprosess (Alrø & Skovsmose, 2002). Det som vidare kjenneteiknar landskapet er at elevane stiller undrande spørsmål, og det er deira undring som styrer samtalane. Samtidig er det karakteristiske med eit undersøkingslandskap at det ikkje er formulert oppgåver, men at læraren inviterer elevane til å forske gjennom utfordrande spørsmål (Skovsmose, 2003). Her meiner eg at fordi ikkje noko skal vere bestemt på førehand, så samsvarar undersøkingslandskapet med at elevane konstruerer kunnskap i samhandling med kvarandre i ein spesifikk kontekst. Det tyder då på at undersøkande matematikk-undervisning bygger på eit situert læringsperspektiv og sosiokulturelle læringsteoriar.

Samtidig ser eg at kunnskapen er distribuert mellom deltakarane i klasserommet, då dei alle bidrar til å konstruere kunnskapen i fellesskap.

Skovsmose (2003) meiner at matematikkundervisninga kan delast opp i seks ulike læringsmiljø, og for at undervisninga skal vere best muleg bør den ikkje halde seg berre i eit av dei. Her bør, i følgje Skovsmose, den enkelte matematikkklasse finne si eiga rytme ved å bevege seg rundt i dei seks ulike læringsmiljøa. Hovuddelinga i læringsmiljøa går mellom oppgåveparadigme og undersøkingslandskap, og kvar av dei blir vidare delt opp i ulike læringsmiljø alt etter kva referansar matematikkoppgåvene har. I tabell 1 under blir dei seks læringsmiljøa framstilt.

Tabell 1: Læringsmiljø (Skovsmose, 2003, s. 149)

	Opgaveparadigmet	Undersøgelseslandskaber
Referencer til ”ren” matematikk	(1)	(2)
Referencer til en ”semi-virkeleghed”	(3)	(4)
Reelle referencer	(5)	(6)

Som ein kan sjå i tabellen over, er eit læringsmiljø av type (1) i eit oppgåveparadigme, og her arbeider elevane med ”reine” matematikkoppgåver. ”Reine” matematikk-oppgåver er for eksempel reine taloppgåver, der meininga er å manipulere tal, bruke ein formel eller liknande. Eit type (2)-læringsmiljø finn ein i eit undersøkingslandskap, der målet er å undersøke tala, mønstra eller strukturane si verd. I andre linje i tabellen er det oppgåver med referansar til ei ”semi-verkelegheit”. Det betyr at den tidlegare reine taloppgåva har fått ein oppgåvetekst, som forsøker å etterlikne ekte referansar men har ingen sanseinntrykk. Her kan oppgåvene i eit oppgåveparadigme i rute (3), få ei ny meining ved å utforskast i landskapet i rute (4). Dei reelle referansane i landskapa i rute (5) og (6) kjem frå ekte situasjonar i den reelle verda, som for eksempel verkelege lønnsstatistikkar eller andre verkelege aktivitetar (Alrø & Skovsmose, 2002; Skovsmose, 2003).

Folke Larsen, Hein og Wedege (2006) ser i si undersøking at det ofte kan vere behov for å utvide tabellen til Skovsmose (2003) (tabell 1). Dei utviklar ei ny kolonne som dei kallar for *undersøkande læringsmiljø*, og den er ein mellomting mellom oppgåve-paradigmet og undersøkingslandskapet (tabell 2). Målet til Folke Larsen, Hein og Wedege er å imøtekome elevar som ikkje er kjent med den lause strukturen til undersøkingslandskapet. Det gjer dei ved å lage ei undersøkande undervisning, men med ein litt fastare struktur enn i eit undersøkingslandskap. Dermed får ein gjennom eit undersøkande læringsmiljø ei blanding av oppgåvestyrt undervisning og utforskande undervisning. Her kan læraren introdusere faste oppgåver, og gradvis utvide dei med nye problem og utfordringar (Folke Larsen, et al., 2006).

Tabell 2: Ni læringsmiljø (Folke Larsen, et al., 2006, s. 12)

	Opgave-paradigmet	Undersøgende læringsmiljø	Undersøgelses-Landskaber
Referencer til "ren" Matematikk	(1)	(1,2)	(2)
Referencer til "semi-virkelighed"	(3)	(3,4)	(4)
Reelle referencer	(5)	(5,6)	(6)

2.3.2 Problemløysing

I samanheng med utforskande matematikkundervisning, fell det naturleg å snakke om problemløysing. I følgje Kunnskapsløftet inneber ei utforskande matematikk-undervisning at elevane jobbar med matematiske problem (Utdanningsdirektoratet, 2006). Her vil eg sjå nærare på kva eit matematisk problem og problemløysing er.

Forsking på matematisk problemløysing starta å blomstre på 1980-talet, og har utvikla seg frå matematikaren Polya si beskriving av heuristisk problemløysing (Schoenfeld, 1992). Polya (1945/1988, s. xvi-xvii) ser på problemløysing som ein prosess med fire ledd:

1. Først må elevane forstå kva det aktuelle problemet går ut på. Her foreslår Polya at læraren kan stille spørsmål til elevane, som framhevar kva som er det ukjente i oppgåva, kva opplysningar oppgåveteksten gir og kva som er føresetnadane rundt situasjonen.
2. Deretter må elevane utvikle ein plan, eller ein idé om ein plan, om kva som må utførast for å kome fram til ei løysing.
3. Planen skal så utførast, der kvart steg må sjekkast nøye.

4. Til slutt skal elevane sjå tilbake på løysinga og løysingsprosessen deira. Her vil det kunne dukke opp spørsmål om resultatet kan etterprøvast, eller om resultatet kan utleiast på ein annan måte.

Det er fleire måtar å beskrive eit matematisk problem og problemløysing på. Problem og problemløysing blir i følgje Björkqvist (2003) alltid kopla saman med mulegheiter for nye utfordringar gjennom nye problem. Schoenfeld (1985) meiner at ei problem-oppgåve vil kunne vere eit problem for ein elev, medan for ein annan vil den kunne framstå som ei rein rutineoppgåve. Begle (1979) ser i si forsking at det er indikasjonar på at problemløysingsstrategiar er avhengig både av sjølve problemet og av problem-løysaren. Vidare meiner Blum og Niss (1991) at eit problem er ein situasjon med opne spørsmål. Dei opne spørsmåla skal utfordre den aktuelle problemløysaren, samtidig som han ikkje har nokon umiddelberre løysingsstrategiar tilgjengeleg.

I følgje Lesh og Zawojewski (2007) går problemløysing ut på at elevar utviklar nyttige måtar å tenke matematisk om relevante forhold, mønster og regelmessigheiter. Definisjonen på eit *problem* blir dermed:

> A task, or goal-directed activity, becomes a problem (or problematic) when the 'problem solver' (which may be a collaborative group of specialists) needs to develop a more productive way of thinking about the given situation. (Lesh & Zawojewski, 2007, s. 782)

Det som her meinast med å utvikle ein produktiv måte å tenke på, betyr at den som løyser problemet må først vere i stand til å tolke situasjonen (Lesh & Zawojewski, 2007). Når Lesh og Zawojewski meiner at det trengst å utviklast ein meir produktiv måte å tenke på, tolkar eg det som at dei meiner at eit problem bygger på at vi har behov for å finne ein løysingsmetode som er meir effektiv enn den vi eventuelt har frå før. Ei slik tolking stemmer overeins med ideen om at ei matematikkoppgåve er eit problem når vi ikkje kjenner løysingsmetoden, og at vi dermed treng å finne ein løysingsstrategi. Ut i frå definisjonen av eit problem, meiner Lesh og Zawojewski at problemløysing kan definerast som sjølve prosessen der situasjonen blir tolka matematisk. Problemløysing blir her sett på som ein gjentakande forståingsprosess av uttrykking og testing, der både det som er gitt og målet til problemet skal forståast. Kunnskapsløftet definerer *problemløysing* som: "Det er å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig det er" (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 57). Eg tolkar det her som at Kunnskapsløftet vidarefører Polya (1945/1988) sine idear omkring problemløysing, der Kunnskapsløftet vektlegg at elevane skal kunne tolke eit matematisk problem, løyse det og kunne vurdere gyldigheita til problemet. Elementa her meiner eg bygger på Polya sine fire ledd i ein problemløysingsprosess.

Eg vel her å bruke Lesh og Zawojewski (2007) sin definisjon på eit problem. Fordi i følgje dei handlar matematisk problemløysing om å sjå, tolke, beskrive og forklare situasjonar matematisk. Her handlar det om å forstå, ikkje berre å bruke dei riktige reglane og prosedyrane. Ein slik definisjon stemmer med dei tidlegare nemnte syna på problemløysing, der problemløysaren ikkje kan bruke kjente løysingsmetodar for å løyse eit problem. I tillegg brukar eg Kunnskapsløftet sin definisjon av problemløysing som går overeins med Polya sin problemløysingsprosess og Lesh og Zawojewski sin definisjon på eit problem der dei ser på problemløysing som sjølve tolkingsprosessen.

2.4 Kommunikasjons- og interaksjonsmønster

Interaksjon er meir enn berre ein sekvens med handlingar og mothandlingar. Deltakarane i ein interaksjonsprosess vil analysere kvarandre, ut i frå antakingar om kvarandre sine bakgrunnsforståing, forventningar, hensikt og liknande. Dei etterfølgjande handlingane til deltakarane, blir tolka ut i frå deira eigne forventningar. Korleis læraren sine handlingar blir tolka av elevane, handlar om kva forventningar og bakgrunnskunnskap elevane har. I mange tilfeller forventar elevane at interaksjonen i klasserommet skal skje på ein bestemt måte (Voigt, 1994, 1995).

Her vil eg presentere nokre kommunikasjons- og interaksjonsmønster som kan oppstå i matematikkundervisninga. I studien er dei ulike mønstra sentrale i arbeidet med å svare på forskingsspørsmåla, då dei er med på å synleggjere kva kommunikasjon som oppstår i klasserommet.

2.4.1 IRE/IRF-mønsteret

Eit velkjent kommunikasjonsmønster i tradisjonell undervisning er *IRE-mønsteret*, som er den tredelte sekvensen av lærarInitiering, elevRespons og lærarEvaluering. Gjennom IRE-mønsteret startar læraren med å stille eit spørsmål som inviterer til ein elevreaksjon. Etter at ein elev har svart på spørsmålet, vil læraren avslutte sekvensen ved å evaluere om svaret er riktig eller gale (Cazden, 2001, s. 30).

Wells (1999) argumenterer for ei reevaluering av den tredelte dialogen til IRE-mønsteret. Han viser til at det tidlegare har blitt argumentert for at den tredelte dialogen er ei vanleg form for interaksjon i klasserommet. Den har i tillegg blitt kalla ein effektiv måte å overvake elevane sin kunnskap og forståing på, og til å rettleie læringa deira. Wells viser vidare til kritikk av interaksjonsmønsteret, der det har blitt sagt at lærarane stiller for mange spørsmål, dei kjenner svaret på. I følgje Cazden (2001) har ofte spørsmåla som føremål å avdekke eller teste elevane sin kunnskap, men dei kan samtidig fungere som ein metode for å gjere ein lærarmonolog om til ein lærarstyrt dialog med elevane. Argumentet mot den tredelte dialogen er i følgje Wells, at lærarane må nytte seg av ei mindre kontrollerande form for klasseromsdiskurs for å få innsyn i elevane sine eigne tankar, og for å få dei til å stille eigne spørsmål.

Ein variant av den tredelte dialogen mellom læraren og elevane kallar Wells (1999, s. 173) for *IRF-mønsteret*, der lærarEvalueringa blir erstatta av lærarFeedback. Lærar-Feedback kan ein sjå på som ein oppfølgingsreaksjon. Her vil ikkje læraren berre evaluere eleven sitt svar, men samtidig gi respons for å utbygge svaret ved for eksempel å kome med eit oppfølgingsspørsmål. I staden for å gi tilbakemelding til eleven om at det er feil svar og rette på feilen, vil det vere mykje meir tilfredsstillande for eleven å få lagt trykk på det han faktisk har oppnådd saman med ei utviding av svaret. Samtidig kan læraren kome med oppfølgingsspørsmål ved riktige svar, for å rettleie elevane vidare framover (Cazden, 2001). Her vil det i større grad bli lagt til rette for muligheiter for å utvide elevane sine svar, sette kunnskapen i større samanhengar og kople ny kunnskap saman med kunnskapar elevane allereie har. Når det tredje steget er ei evaluering i IRE-mønsteret, vil det som oftast fungere som ei kontrollering av kva det er elevane kan. Uansett om det tredje steget består av ei evaluering eller ein oppfølgingsreaksjon, er interaksjonssekvensen avhengig av at elevane responderer på læraren sine spørsmål (Wells, 1999).

Wells (1999) påpeikar at ein tredelt dialog, som IRF-mønsteret, ikkje nødvendigvis kan klassifiserast som ein bra eller dårleg interaksjonssekvens. Ein slik dialog vil vere avhengig av både føremålet i den spesifikke situasjonen, og av dei overordna måla for matematikkundervisninga. Wells meiner at hos ulike lærarar, eller til og med hos den same læraren, vil den same diskursen kunne føre til heilt ulike undervisningssituasjonar og grad av deltaking og engasjement hos elevane.

Alrø og Skovsmose (2002, s. 22) ser på eit liknande kommunikasjonsmønster dei kallar *"gjett kva læraren tenker"*. Læraren styrer her retninga på kommunikasjonen, og elevane må nødvendigvis anstrenge seg for å følgje læraren. Her er det fokus på å oppnå rette svar, og eit rett svar vil føre til eit nytt spørsmål frå læraren. Heile tida vil læraren vite kva han vil fram til, men for elevane vil det sannsynlegvis framstå som svært usamanhengande fordi dei ikkje forstår heile hensikta med spørsmåla. Elevane brukar dermed kreftene sine på å gjette på kva det er læraren vil fram til, og dei vil då ta minimalt med ansvar for si eiga læring. Det er i følgje Alrø og Skovsmose fleire typiske elevresponsar til ein slik "gjettekonkurranse". Elevane kan svare med eit spørjande svar, med å umiddelbart avslå sitt eige svar eller med å gjette tilfeldig. Vidare kan elevane nekte for å vite svaret, spørje om hjelp eller å svare at han har same resultat som ein medelev. Det er i tillegg vanleg at elevane ikkje svarar i det heile tatt, eller at dei let som dei er opptatt med andre ting.

2.4.2 Traktmønsteret

Bauersfeld (1988) og forskingsgruppa hans gjennomførte ein studie av fleire konkrete situasjonar i klasserommet, der dei identifiserte underliggande mønster som deltakarane tilsynelatande fylgde ubevisst. Saman produserte lærar og elevar eit interaksjonsmønster, som viste seg å ha spesielle rutinar. Bauersfeld (1988, s. 36) kalla interaksjonsmønsteret for *traktmønsteret* (funnel pattern of interaction), og det går ut på at læraren gjennom interaksjon med elevane stiller spørsmål som heile tida leiar dei gradvis lenger fram mot eit spesifikt svar. Læraren kan for eksempel sjå ein elev som har vanskar med ei matematikkoppgåve, der han har feil svar eller sit fast. Her vil læraren starte med å stille eit ope spørsmål for å få eleven til å kome vidare med oppgåva. Når læraren får ein utilfredsstillande reaksjon frå eleven, i form av feil svar eller ingen respons, vil han forsøke å gi den nødvendige informasjonen slik at eleven kan kome med det læraren meiner er ein "passande" reaksjon. Om eleven framleis svarar avvikande, vil læraren halde fram med å stimulere mot den "passande" elevreaksjonen, gjennom smalare og meir presise spørsmål. Her vil kvaliteten på lærar-elev diskusjonen minke, fordi læraren stadig reduserer krava han har til eleven. Stegvis vil læraren gjennom sine handlingar redusere sine antakingar om kva eleven er kapabel til, på ein måte som er motsatt av det han eigentleg ønskjer. Eleven på si side ser dei forenkla og meir snevre krava til læraren, og kjenner den auka spenninga mellom dei. Sjansane eleven har til å svare riktig minkar, og etter kvart vil eventuelle reaksjonar eleven kunne gitt på eit tidlegare tidspunkt bli avvist. Traktmønsteret når eit toppunkt når det gjenstår for eleven å svare ved hjelp av eit enkelt ord, noko som igjen fører til at læraren sjølv presenterer den fullstendige løysinga. Uavhengig av kven som kjem med løysinga, blir mønsteret avslutta når løysinga blir presentert (Bauersfeld, 1988).

I samanheng med traktmønsteret påpeikar Bauersfeld (1988) at verken læraren eller elevane kan klandrast for eit slikt kommunikasjonsmønster, fordi dei ikkje er klar over kva retning handlingane deira tek. Mønsteret vil i følgje Bauersfeld utvikle seg frå deira felles refleksive forventningar og tolkingar av kvarandre som aktørar, og frå læraren og elevane sine rutinar erverva gjennom mange delte erfaringar i matematikklasserommet. Steinbring (1998) ser at det er krava om at kvar time skal føre fram til eit spesifikt mål i matematikkundervisninga, som fører til at traktmønsteret oppstår hyppig. Her meiner eg at traktmønsteret kan koplast saman med jaget Mellin-Olsen (1990) beskriv i oppgåvediskursen. Vidare meiner Steinbring at interaksjonsmønsteret kan relaterast til dei epistemologiske avgrensingane til den matematiske kunnskapen; til meir læraren forsøker å tydeleggjere den nye kunnskapen gjennom traktmønsteret, til vanskelegare er det for elevane å konstruere personlege tolkingar og idear om den aktuelle kunnskapen. Likevel vil traktmønsteret ofte føre til at både læraren og elevane sit igjen med ei kjensle om at situasjonen er under kontroll. Spesielt læraren vil vere både fornøgd og overbevist om at han har omhyggeleg respondert på vanskane som oppsto hos den individuelle eleven. I verkelegheita har eleven berre fylgt læraren si oppskrift, og svart med eit enkelt ord. Her kan vi ikkje vere sikre på at eleven i det heile tatt har oppfatta bodskapen til læraren (Bauersfeld, 1988). Samtidig er det fare for at traktmønsteret kan føre til at elevane utviklar ein form for strategi, der dei kjem med minst muleg respons heilt til spørsmålet krev minimalt med innsats for å kunne svare (Mason, 1998). På same måte som ved ”gjett kva læraren tenker”-mønsteret ser eg at gjennom eit traktmønster kan elevane ta minimalt med ansvar for eiga læring, og under ligg det eit mål om at dei skal kome fram til det svaret læraren ønskjer på lettast muleg måte.

2.4.3 Tematiske interaksjonsmønster

Til grunn for matematikkundervisning og læring ligg det visse matematiske meiningar som blir sett på som gitt av lærar og elevar. Voigt (1995, s. 172-173) beskriv omgrepet ”tatt for gitt” (taken as shared) ved at dei aktuelle personane har ei overbevising om at den andre deler dei same meiningane som ein sjølv, eller at dei er villige til å sette til side eventuelle tvil ved uunngåelege uklarheiter. Her vil det ikkje bety at ein lærar og elevane hans nødvendigvis deler den same kunnskapen, men at matematiske meiningar som blir sett på som gitt av deltakarane blir produsert under forhandling. Interaksjonar føregår medan deltakarane tolkar det matematiske temaet som det same, sjølv om dei ikkje kan vere sikre på at deira bakgrunnsforståing stemmer overeins. Ein kan aldri vere sikker på at ei forhandling mellom to samarbeidande personar som føregår problemfritt, bygger på like tankemåtar (Voigt, 1994, 1995). Det at noko er tatt for gitt, blir ofte sett på som sunn fornuft (commonsense knowledge) (Schütz & Luckmann, 1973, referert til i Voigt 1995, s. 173). Etter kvart vil deltakarane få eit inntrykk av at dei veit kva matematikkundervisning og læring er, og det som tidlegare vart danna under forhandlingar vil i staden vere underforstått i undervisninga (Voigt, 1995).

Når det føregår forhandling i matematikktimane, vil læraren og elevane danne seg eit nettverk av matematiske meiningar tatt for gitt. Voigt (1994, s. 283; 1995, s. 174) kallar nettverket av gitte meiningar for eit matematisk *tema* (mathematical theme). Eit slikt tema kan for eksempel vere ei samanlikning av to oppgåver med omsyn til ulikskapar og samsvar mellom dei, eller forholdet mellom matematiske uttrykk. Det matematiske temaet vil i følgje Voigt utvikle seg og forandre seg gjennom forhandlingane om matematiske meiningar, og læraren kan ikkje vere sikker på at elevane bidrar til temaet slik han har tenkt på førehand. Eit *tematisk interaksjonsmønster* vil oppstå når læraren og elevane dannar eit matematisk tema rundt eit spesifikt problem, spørsmål eller oppgåve (Voigt, 1995, s. 184). *Direkte matematisering* (direct mathematization) er eit tematisk interaksjonsmønster, fordi det er spesifikt til matematikkundervisninga og beskriv utviklinga av eit matematisk tema (Voigt, 1994, s. 289). Her blir ei forteljing eller eit bilde tolka som ei spesifikk matematikkoppgåve, medan alternative tolkingar ikkje blir tematisert. Typisk for mønster av direkte matematisering, er at læraren tar for gitt den aktuelle tolkinga. I mange tilfeller kan det føre til at læraren ”tvingar” elevane til å følgje ein bestemt løysingsmetode (Voigt, 1995).

Ein lærar og elevane hans har naturleg nok ulik bakgrunnskunnskap når det gjeld matematikk. Derfor må dei forhandle og diskutere matematiske meiningar. Gjennom rutinar og forpliktingar blir forhandlinga om matematiske meiningar forenkla, og sjansen for at det skal oppstå konfliktar minkar. Relasjonane mellom rutinane og forpliktingane dannar (tematiske) interaksjonsmønster, der læraren og elevane kjem fram til matematiske meiningar dei ser på som gitt. Alternative tolkingar av det gjeldande matematiske problemet, blir dermed oversett utan at dei er klar over det (Voigt, 1994). Her vil eg påstå at tematiske mønster kan samanliknast med situert læring, der kunnskapen blir utvikla i samhandling og samtidig er avhengig av lærings-situasjonen og læringskonteksten.

2.4.4 IC-modellen

I staden for å halde seg i eit restriktivt oppgåveparadigme kan, i følgje Alrø og Skovsmose (2002), elevane bli utfordra til å undersøke/utforske matematikken i eit undersøkingslandskap. Her kan det opplevast at kommunikasjonsmønstra blir forandra, og opne for nye mulegheiter for læring. Matematikkoppgåver med verkelege referansar kan bane veg ut av den tradisjonelle undervisninga. I sin studie oppdagar Alrø og Skovsmose at kommunikasjonsmønster i eit undersøkingslandskap er heilt annleis enn dei ein kan finne i det tradisjonelle matematikklasserommet. Mønstra i eit slikt landskap støttar læring gjennom utforsking og oppdaging. Ei matematikkundervisning som bygger på utforsking, er heilt forskjellig frå ei undervisning som bygger på synet om at kunnskap skal overførast frå læraren til elevane, fordi kunnskapen blir her utvikla i ei felles samhandling mellom elevane og mellom elevane og læraren (Alrø & Skovsmose, 2002).

Dei utforskande kommunikasjonsmønstra er samla i Alrø og Skovsmose (2002) sin IC-modell, som består av elementa: å kome i kontakt, lokalisering, identifisering, forhandling, høgttenking, reformulering, utfordring og evaluering. Alrø og Skovsmose meiner det er viktig å presisere at elementa ikkje nødvendigvis må kome i ei bestemt rekkefølgje, og alle treng ikkje vere tilstades i ein og same kommunikasjonssekvens.

Det er meir vanleg å finne mindre eller ufullstendige IC-modellar, der eitt eller fleire element dukkar opp i ein interaksjonssekvens. I utforskings- og samarbeidsprosessen, som IC-modellen bygger på, er elevane engasjert i ein oppdagingsprosess samtidig som at læraren skal fungere som ein tilretteleggande arbeidsleiar. I tillegg til at læraren er ei støtte for elevane, vil han ha mulegheiter til å sjølv oppdage nye matematiske eigenskapar han tidlegare ikkje har vore oppmerksam på (Alrø & Skovsmose, 2002).

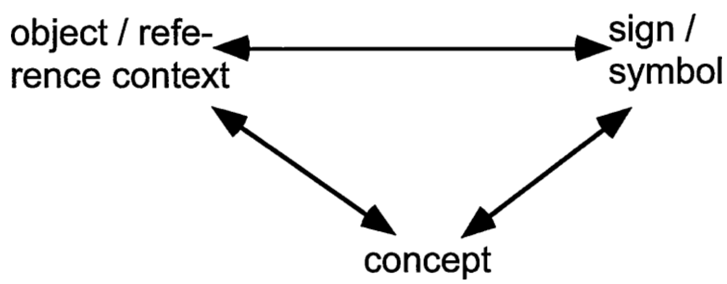
I følgje Alrø og Skovsmose (2002) er aktiv lytting ein føresetnad for kommunikasjon i IC-modellen. Ein aktiv lyttar må stille spørsmål og vere støttande medan han forsøker å forstå den som snakkar. Dermed vil læraren og eleven *kome i kontakt*, og dei vil ha lettare for å forstå kvarandre. Når deltakarane kjem i kontakt, er dei oppmerksame til kvarandre og til dei bidrag som måtte kome undervegs i kommunikasjonssekvensen. Samtidig skal deltakarane ha gjensidig respekt, ansvar og tillit. Gjennom kontaktelementet blir deltakarane opne for å forske, og etter at læraren har oppnådd kontakt har han mulegheit til å *lokalisere* eleven sitt perspektiv for korleis eit problem blir forstått. Lokaliseringa kan skje ved å stille spørsmål på ein undersøkande måte (Alrø & Skovsmose, 2002). Undersøkande spørsmål kan vere av typen: ”Kva om…?” eller ”Kvifor det?”. Samtidig skal ikkje spørsmåla ha førehandsgitte svar (Alrø & Skovsmose, 2002; Skovsmose, 2003). Eit *perspektiv* er i følgje Alrø og Skovsmose vanlegvis ein underliggande dimensjon i ein kommunikasjonssekvens. Den enkelte elev sine perspektiv rommar meiningar og matematisk forståing, og kjem til syne gjennom språket og kva dei vel å snakke om. Utan at dei kommuniserande deltakarane forstår eller godtar kvarandre sine perspektiv, vil det dermed vere vanskeleg å få til å kommunisere. For eksempel kan eleven ha eit perspektiv om at fokuset for matematikkoppgåva er resultatet, medan læraren fokuserer på at eleven skal forstå sjølve algoritmen. I eit slikt tilfelle kan kommunikasjonen mellom læraren og eleven bli problematisk (Alrø & Skovsmose, 2002). Voigt (1994, 1995) ser på noko av det same i dei tematiske interaksjonsmønstra i kapittel 2.4.3 over. Han meiner at elevar og lærarar har ulike matematiske utgangspunkt, men gjennom rutinane i klasserommet blir dei ”einige om” matematiske meiningar.

Om eleven er i stand til å uttrykke sitt perspektiv, vil det vidare vere muleg for både han og læraren å *identifisere* perspektivet ved hjelp av matematiske faguttrykk. *Forhandling* som eit element i modellen, går ut på at begge partar kan legge fram idear som kan forskast vidare på. Under forhandling er målet å klargjere kva det aktuelle perspektivet inneber, gjennom ein felles utforskingsprosess. Her vil det vere aktuelt å diskutere alternative idear, då det ikkje er nokon ”rett” løysingsmetode. Identifisering og forhandling som forskingsprosess kan føre til blant anna *høgttenking*, der tankar og perspektiv blir synlege for dei involverte i kommunikasjonsprosessen. Læraren vil vidare ha mulegheit til å klargjere ideane ved å *reformulere* eleven sine formuleringar. Gjennom reformulering kan både læraren og eleven unngå misforståingar, og dermed oppnå eller bekrefte ei felles forståing. Ei reformulering kan bli innleia av såkalla ”sjekk-spørsmål”, der dei ulike partane kan sjekke med den andre om ein har blitt forstått riktig. Av og til kan det vere behov for å *utfordre* eleven, slik at han kjem seg vidare i utforskingsprosessen. Då er klargjering av tankar og perspektiv ein føresetnad for at læraren skal kunne kome med ei utfordring. Her kan utfordringa skje gjennom hypotetiske spørsmål som er opne og undrande, gjennom ei ny forhandling eller gjennom ei ny undersøking av eit gitt perspektiv. Til slutt kan læraren og eleven *evaluere* om dei har sett problemet frå det same synspunktet, og om dei har prøvd å løyse problemet på same måte. Misforståingar kan oppstå ved interaksjon mellom lærar og elev, der dei kan ha heilt ulike måtar å sjå på eit problem på. Det er viktig for ein god kommunikasjon at begge partar deler ansvaret for utforskingsprosessen og at det er eleven sine perspektiv, ikkje læraren sine, som dannar utgangspunktet for eit utforskingssamarbeid (Alrø & Skovsmose, 2002).

2.5 Den epistemologiske trekanten

Matematiske teikn og symbol er i følgje Steinbring og Nührenbörger (2009) sentrale element for å forstå utviklinga av den matematiske kunnskapen og forståinga hos elevar. Grunnlaget for påstanden er at det er gjennom matematiske teikn og symbol matematikklæring og undervisning føregår. Steinbring (2006) ser på at matematiske teikn/symbol først og fremst er relatert til den epistemologiske naturen ved matematisk kunnskap. Dei matematiske symbola blir her sett på som instrument for å kode, beskrive, kommunisere, operere med og generalisere matematisk kunnskap. Teikn (språklege uttrykk, figurar eller liknande) og symbol i matematikken fungerer dermed som eit kulturelt kommunikasjonsverktøy, i samanheng med å utvikle matematisk kunnskap. Eit symbol vil ikkje aleine ha ei betyding, og kvar enkelt elev må danne ei kopling mellom symbolet og ein passande referansekontekst for å skape meining rundt det aktuelle symbolet (Steinbring, 2006). Her tolkar eg det som at meining blir skapt gjennom mediering mellom teikn/symbol og ein referansekontekst. Teikn og symbol meiner eg då fungerer som eit medierande verktøy, til å "kome i kontakt" med den matematiske kunnskapen som vi elles ikkje har direkte tilgang til. Som tidlegare nemnt er mediering mellom fysiske og intellektuelle verktøy grunnleggande for eit sosiokulturelt læringsperspektiv, noko som underbygger at matematisk kunnskap og læring blir utvikla hos elevane i samspel med omgivnadane og kvarandre.

Steinbring (2006) skil mellom to essensielle funksjonar for matematiske teikn og symbol: ein semiotisk funksjon og ein epistemologisk funksjon. Gjennom ein *semiotisk funksjon* representerer dei matematiske teikna noko konkret. For eksempel kan teiknet "4" stå som ein merkelapp for fire prikkar: $4 \leftrightarrow$ ⁘. Her har symbolet "4" som funksjon å erstatte figuren av dei fire prikkane. Når eit teikn har ein *epistemologisk funksjon*, fortel teiknet korleis den matematiske kunnskapen blir tolka i ein spesifikk kontekst. Den epistemologiske funksjonen til symbolet "4" er at det står for ein omgrepsmessig idé om ei mengd, med akkurat så mange (fire) element. Samtidig kan ein tenke på talet 4 som 1 større enn 3, eller at $2 + 2 = 4$. Steinbring meiner at teikn eller symbol ikkje har noko meining på eiga hand, og det trengst ei kopling mellom teikn/symbol og ein referansekontekst. Ei slik kopling kan dannast ved at det skjer ei omgrepsmessig mediering mellom matematiske teikn/symbol og ein strukturert referansekontekst. Medieringa beskriv Steinbring gjennom den epistemologiske trekanten, vist i figur 1 under.



Figur 1: Den epistemologiske trekanten (Steinbring, 2006, s. 135)

Den *epistemologiske trekanten* til Steinbring (2006) er eit teoretisk verktøy for å kunne forstå og analysere ei semiotisk mediering mellom matematiske teikn/symbol, og delvis kjente referansekontekstar. Det er nødvendig å ha eit omgrepsmessig fundament for å kunne vidareutvikle og forsterke dei matematiske omgrepa. Dei fundamentale matematiske omgrepa er med på å regulere medieringa mellom objekt/referansekontekst og teikn/symbol, og fører til ei utvikling av den matematiske kunnskapen. Referansepunkta i trekanten sine tre hjørne dannar eit balansert og vekselvis støtta system, og systemet må eleven aktivt produsere i interaksjon med andre. Den epistemologiske trekanten kan brukast til å modellere den elles usynlege matematiske kunnskapen elevar konstruerer gjennom interaksjon. Trekanten kan fungere som eit analyseverktøy, der den er eit hjelpemiddel for forskarar til å analysere matematiske tolkingar som blir danna gjennom lærar-elev interaksjonar eller elev-elev interaksjonar (Steinbring, 2006; Steinbring & Nührenbörger, 2009).

Den epistemologiske trekanten som eit analyseverktøy av elevane si matematiske kunnskapsutvikling kan vidare utvidast. For å kunne beskrive ei utvikling i ein lærings-prosess, kan det settast opp ein etterfølgjande sekvens av epistemologiske trekantar (Steinbring, 2006). Farrugia (2007) har sett på korleis ein kan framstille epistemologiske trekantar i kjeder. Her blir kunnskapsutvikling illustrert ved at ein eksisterande epistemologisk trekant kan settast i samanheng med fleire etterfølgjande trekantar. Her fungerar det eksisterande symbolhjørnet som ein referansekontekst i den nye trekanten, og det kan dermed koplast ein ny trekant på den gamle. Slik kan det då fortsette gjennom ei kjede av epistemologiske trekantar, der den matematiske kunnskapen og forståinga heile tida blir oppgradert eller utvikla (Farrugia, 2007).

2.6 Tre oppfatningsnivå

Lee (1996) meiner at all matematikk handlar om å generalisere mønster, og at problem-løysing er ein slik generaliseringsaktivitet. Spesielt i algebra er det viktig at elevane tidleg får introdusert generalisering av mønster, fordi i starten av eit matematisk tema vil elevane si forståing omkring emnet utvikle seg ut i frå kva fokus læraren har (Lee, 1996).

Gjennom ein studie av eit utval elevar som jobbar med algebraiske mønsterfølgjer, ser Lee (1996) at det ikkje berre er rett fram å generalisere matematiske mønster. Det blir her oppdaga at det oppstår hindringar på tre oppfatningsnivå: sansingsnivået, verbaliseringsnivået og symboliseringsnivået. *Sansingsnivået* er det første nivået i ein generaliseringsaktivitet, der det blir oppdaga at det eksisterer eit mønster. I neste omgang må eleven uttrykke kva det aktuelle mønsteret går ut på, og endar då opp på *verbaliseringsnivået*. For å kunne fullføre ein generaliseringsaktivitet i matematikk, må eleven i tillegg til å verbalisere mønsteret kunne uttrykke det gjennom teikn og symbol. På *symboliseringsnivået* klarer eleven å bruke matematiske teikn og symbol til å uttrykke eit matematisk mønster (Lee, 1996, s. 105).

Nettopp fordi Lee (1996) påpeikar at generalisering er ein problemløysingsaktivitet som er vesentleg for all slags matematikk, meiner eg at dei tre oppfatningsnivåa kan vere eit nyttig analyseverktøy i samanheng med elevar si læring og forståing i matematikk generelt. Saman med Steinbring (2006) sin epistemologiske trekant, er dei tre oppfatningsnivåa med på å synleggjere kva forståing elevar har om matematiske teikn og symbol og kva samanheng dei klarer å sette dei i. Elevane si kunnskapsutvikling er sentral i forskingsspørsmåla, då eg ønskjer å sjå på korleis ulike matematiske tema og kontekstar er med på å påverke elevane si læring. Under har eg sett opp dei tre nivåa til Lee i ein tabell.

Tabell 3: Tre oppfatningsnivå ved matematisk generalisering.

3	Symboliseringsnivå	Eleven klarer å uttrykke eit matematisk mønster ved hjelp av teikn/symbol.
2	Verbaliseringsnivå	Eleven klarer å uttrykk eit matematisk mønster ved hjelp av språk.
1	Sansingsnivå	Eleven klarer å sjå eit matematisk mønster.

3. METODOLOGI

I kapittelet vil eg ta føre meg metodane som er brukt for å samle inn og behandle data i forskingsstudien. Først vil eg presentere studien sitt forskingsdesign og bakgrunnen for val av metode. Vidare kjem ein presentasjon av metodane observasjon og bilde- og lydbandopptak. Her forklarar eg korleis datainnsamlinga føregår, etiske betraktningar og studien sitt utval. Deretter diskuterar eg validiteten og reliabiliteten til studien, då det er fleire faktorar som kan vere med på å påverke kvaliteten. Til slutt vil eg presentere korleis gjennomføringa av datainnsamlinga og analysen av datamaterialet føregjekk, før eg gjer greie for analyseverktøyet og bruken av det i studien min.

3.1 Forskingsdesign

I studien min søker eg å studere korleis ulike matematiske tema og kontekstar kan vere med på å påverke kva kommunikasjonsmønster som oppstår i undervisninga og korleis elevane utviklar matematisk kunnskap. Til den aktuelle forskinga er det mest hensiktsmessig å nytte seg av eit kvalitativt forskingsdesign. I følgje Mertens (2005) blir kvalitativ forsking brukt når hensikta er å kome med ei grundig beskriving av ein spesifikk situasjon eller praksis, og når det er ønske om å undersøke eit fenomen eller ein situasjon i sine naturlege omgivnader. Forskingsdesignet egnar seg dermed svært godt til studien si hensikt, som er å betre forstå korleis kommunikasjonsmønstra i matematikkundervisninga heng saman med situasjonar, oppgåvetypar og elevane si kunnskapsutvikling i mest muleg naturlege omgjevnader. Typisk for kvalitative studiar er eit konstruksjonistisk perspektiv. Dei grunnleggande oppfatningane innan det konstruksjonistiske forskingsparadigmet, er at verkelegheita og kunnskapen er sosialt konstruert (Mertens, 2005).

Eg legg til grunn for studien min at det matematiske fagstoffet må framstillast som at det kan genererast gjennom ein interaksjonsprosess. Matematisk kunnskap og forståing blir her sett på som eit produkt av interaksjonsprosessar, og er spesifikk for den aktuelle kulturen i klasserommet. Gjennom sosial interaksjon kjem tolkingar elevane har av matematiske teikn og symbol til syne. Ut i frå eit slikt syn, vil målet for ein fortolkande forskingsstudie vere å rekonstruere og forstå interaktiv kunnskapsutvikling i matematikkundervisninga som ein utviklande prosess avhengig av vilkåra omkring dei enkelte situasjonane (Steinbring, 2000, 2006; Voigt, 1995).

Studien min føregår i ein 9. klasse på ein barne- og ungdomsskule, over tre dagar. Mitt utgangspunkt er at eg ønskjer å studere interaksjonen i sitt rette element, og sjå kva samanhengar det er mellom det som føregår i undervisninga, kommunikasjonsmønster som oppstår og elevane si kunnskapsutvikling. Studien sitt forskingsdesign er kvalitativ og konstruksjonistisk, der eg ønskjer å gå inn i ein reell situasjon i klasserommet og studere kommunikasjon og interaksjon mellom lærar og elevar og mellom elevar i arbeid med matematikk.

3.2 Metodar

3.2.1 Val av metode

Observasjon og intervju er vanlege metodar innan kvalitativ forsking og det konstruksjonistiske paradigmet, der målet er å forstå dei samansette og sosiale konstruksjonane av meining og kunnskap (Mertens, 2005). I studien er fokuset å undersøke samanhengar mellom klasseromsinteraksjon, undervisning og læring, og her er det hensiktsmessig å bruke observasjon som metode. Observasjon er ein vanleg forskingsmetode når det gjeld å finne ut kva som føregår i ein spesifikk situasjon, som for eksempel kva som føregår i matematikkundervisninga (Robson, 2002). Voigt (1994) meiner at matematisk forståing er eit produkt av dei sosiale interaksjonane i klasserommet. Dermed er det naturleg å undersøke elevane si matematiske forståing gjennom korleis den kjem til syne i samhandlinga mellom kvarandre og med læraren. Alrø og Skovsmose (2002) påpeikar at gjennom ei grundig studie av kommunikasjons-sekvensar i klasserommet, kan ein forskar få tak i elevane sine refleksjonar og læringsprosessar som ligg under kommunikasjonen deira. Gjennom observasjon kan eg både sjå og høyre kva samhandlingar som skjer mellom læraren og elevane i deira naturlege omgjevnader. Metoden er i tillegg spesielt hensiktsmessig for å fange opp dei ulike kommunikasjonsmønstra som oppstår i samhandlinga (Mertens, 2005; Robson, 2002).

3.2.2 Innsamling av data

I studien har eg valt å nytte meg av fleire metodar for datainnsamling: observasjon som føregår ved at eg som forskar observerer og noterar det eg ser på som interessant, saman med bilde- og lydbandopptak ved at eg filmar og tek opp lyd på ein diktafon. Eg vil her beskrive metodane kort, samtidig som eg påpeikar fordelar og ulemper ved dei.

Observasjon:
Eg har valt ein passiv-deltakande observasjon som metode. Gjennom *passiv-deltakande* observasjon er eg som observatør tilstades, utan at eg involverer meg direkte med deltakarane i klasserommet (Mertens, 2005). Den passive observasjonen eignar seg dermed bra i studien, fordi eg ikkje ønskjer å ha for stor påverknad på den naturlege undervisningssituasjonen. Eg observerer gjennom å studere korleis matematikk-undervisninga føregår, og ved å vere open for kva som kan skje eller oppstå i dei ulike sekvensane. Samtidig er observasjonen *semistrukturert* i den forstand at eg ser etter fastsette element, som kommunikasjonsmønster, oppgåvetypar, kontekstar, fagtema og kunnskapsutvikling hos elevane (Mertens, 2005; Robson, 2002).

Det er fleire fordelar og ulemper med observasjon. For det første vil det å observere ei hending eller ein prosess, ha som fordel at det gir informasjon om kva som faktisk føregår i den aktuelle situasjonen (Mertens, 2005). Metoden er direkte og har etnografiske trekk, der eg som forskar ikkje spør folk om kva dei meiner eller trur, men eg studerer kva dei faktisk seier og gjer. Dermed vil eg kunne oppnå eit ganske nøyaktig inntrykk av korleis den verkelege situasjonen er. I tillegg er observasjonsmetoden fleksibel, i forhold til at eg kan tilpasse den til ulike hendingar som skjer undervegs. Likevel har metoden visse utfordringar, der det kan vere vanskeleg å tolke og kategorisere informasjon som blir samla inn under observasjonen. I tillegg er det relativt stor fare for at eg som observatør kan påverke situasjonen og deltakarane, fordi eg er eit uvant element i klasserommet. Dermed kan eg ikkje vere heilt sikker på at den informasjonen eg får hadde vore den same om eg ikkje hadde vore tilstades i klasserommet (Mertens, 2005; Robson, 2002).

Bilde- og lydbandopptak:
Hovuddelen av datamaterialet i forskingsstudien består av bilde- og lydbandopptak. For å sikre meg mest muleg data av interaksjonen i klasserommet og detaljane i samtalane, vel eg å gjennomføre bilde- og lydbandopptak av læraren og elevane samtidig som eg observerer. Her meiner eg at slike opptak er svært nyttige for å kunne ta vare på det som blir sagt i dei ulike situasjonane. Samtidig meiner eg at bilde- og lydbandopptaka er avhengige av observasjonen for at det endelege datamaterialet skal kunne seie noko om sjølve konteksten og situasjonen kommunikasjonen føregår i. I pilotstudien til studien brukte eg diktafon for å kunne innhente eit mest muleg detaljrikt datamateriale av undervisninga og kommunikasjonen som føregjekk. Erfaringa eg gjorde meg her var at det ofte kunne vere vanskeleg å tyde og tolke lydbandopptaka, fordi eg ikkje kunne sjå kva som føregjekk. Derfor har eg valt å bruke bildeopptak i tillegg til lydbandopptak, i studien. Bilde- og lydbandopptak gir meg ei mulegheit til å nærare studere dei ulike samtalane i ettertid, der eg kan bruke både observasjonen og bildeopptaka til å gjere transkripsjonane av lydbandopptaka rikare og meir nøyaktige.

Ein annan fordel med bilde- og lydbandopptak, er at det kan vere med på å unngå mi subjektive vinkling på dei enkelte situasjonane som oppstår gjennom matematikk-undervisninga. Ei slik datainnsamling vil kunne vere med på å gjere datainnsamlinga og analysen meir fullstendig, der resultat og analyse ikkje vil vere like avhengig av mitt fokus og dei meiningane eg vil gjere meg opp gjennom observasjonen (Cohen, Manion, & Morrison, 2000).

I studien fungerer observasjonsnotatane som eit supplement til bilde- og lydbandopptak av elevar og lærar. Den semistrukturerte observasjonen blir brukt som knaggar til kva eg skal fokusere på ved den seinare transkripsjonen og analysen. I tillegg brukar eg observasjonsnotatane når eg skal beskrive dei ulike situasjonane og undervisnings-timane si oppbygging.

3.2.3 Etiske betraktningar

Eg meiner at det som er viktigast å informere forskingsdeltakarane om i samanheng med studien, er at læraren og elevane er anonyme og at ingen av opptaka vil bli vist til andre enn meg og rettleiaren min. Både Kvale og Brinkmann og Forskningsetiske

Komiteer (2006) påpeikar at alle som er gjenstand for forsking, skal få all den informasjon dei treng for å kunne skaffe seg ei forståing av forskingsfeltet, og kva dei eventuelt gir seg ut på. Gjennom eit *informert samtykke* får forskingsdeltakarane informasjon om studien sitt overordna føremål, samtidig som eg sikrar meg at deltakarane deltek frivillig (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 88). For å sikre at deltakarane i studien min skal få den informasjonen dei har krav på, utarbeidde eg ei samtykkerklæring (Vedlegg 1) som vart sendt ut til heile klassen. Samtykkeerklæringa skulle lesast og underskrivast av både elevane og foreldra. I følgje Forskningsetiske Komiteer (2006) er det viktig at både elevar og foreldre samtykker til at eg får lov å filme, fordi mange av elevane i utvalet er under 15 år.

3.2.4 Utval

Utvalet består av ein matematikklærar og hans 9. klasse i matematikk på ein barne- og ungdomsskule. I min studie har eg valt å bruke det same utvalet som eg nytta meg av i pilotstudien, som vart utført hausten 2009. Ein fordel her er at eg allereie har hatt kontakt med den aktuelle læraren, slik at det er lett for meg å ta kontakt på nytt. Samtidig har elevane sett meg før, noko som kan vere med på å minske meg som eit forstyrrande element i den naturlege undervisningssituasjonen. Grunnlaget for utvalet i pilotstudien var at den aktuelle skulen vart anbefalt av ein av rettleiarane mine, på grunn av mitt fokus på undersøkande og problemløysande matematikkundervisning. Her vart det antatt at skulen og matematikklærarane hadde ei viss erfaring innan problemløysing, fordi skulen har eit matematikkrom med tilgjengeleg materiale for undersøkande og problemløysande undervisning.

Gjennom samtykkeerklæringa kom det fram at det var eit fåtal av elevane som let seg filme av eit videokamera. Matematikkundervisninga på den aktuelle skulen blir gjennomført med halv klasse om gongen, dermed vart det gjort eit kjerneutval i kvar av halvdelane. I den eine halvdelen var det tre jenter som let seg filme, og i den andre halvdelen var det to jenter og to gutar. Desse sju elevane utgjer dermed kjerneutvalet i studien, der dei blir følgt opp av videokameraet gjennom dei ulike undervisnings-sekvensane. I tillegg til kjerneutvalet vart det gjort tilfeldige utval etter kvart i forskingsprosessen. Det tilfeldige utvalet består av både læraren og enkelte elevgrupper, og dei vart tekne opp på lydband.

3.3 Validitet og reliabilitet

Ved å velje eit kvalitativt forskingsdesign, forsøker eg å finne så mange ulike kvalitetar ved eit fenomen som muleg. Sjølv om observasjon kan vere ein passande metode i forhold til forskingsspørsmålet, kan det vere fleire faktorar som er med som mulege feilkjelder. Her vil eg sjå på nokre av dei.

3.3.1 Validitet

Studien min er ein mindre forskingsstudie, og den vil dermed ikkje kunne gje eit fullstendig bilde på korleis verkelegheita eigentleg er i matematikktimane til den aktuelle klassen. Resultata kan vere avhengige av kva situasjonar som oppstår akkurat i dei observerte timane. Her kan for eksempel dagsformen til læraren og elevane vere med på å påverke undervisninga. Samtidig vil mine observasjonar som forskar føre til at det blir lagt vekt på enkeltepisodar eller spesielle hendingar, då det vil vere vanskeleg å få med seg alt som skjer i ei undervisningsøkt. Slike faktorar vil vere med på å true den *indre validiteten*, eller truverda, til studien (Mertens, 2005).

Det er fleire forskingsstrategiar som kan vere med på å auke truverda, blant anna innsamling av data over lenger tid og triangulering. *Triangulering* inneber at eg ser på den aktuelle situasjonen frå fleire synsvinklar (Mertens, 2005, s. 255). Derfor har eg valt å observere den same læraren og klassen i tre dagar, noko som her inneber seks undervisningssekvensar. Samtidig triangulerer eg ved å samle inn data ved å bruke både bilde- og lydbandopptak, saman med observasjon. Tidsperspektivet gjer at eg ikkje har mulegheit til å gjere fleire grep for å sikre den indre validiteten. Det kunne for eksempel vore nyttig å intervjue læraren og elevane, for å skaffe seg ei betre forståing av interaksjonsprosessane i klasserommet. Samtidig kunne eit skriftleg datamateriale av elevane sitt arbeid, vere med på å underbygge mi forståing og analysen av elevane si kunnskapsutvikling.

Den *ytre validiteten* fortel i kor stor grad resultata kan overførast til andre situasjonar. I kvalitative studiar blir den ytre validiteten definert gjennom i kor stor grad lesaren kan sjå likskapar mellom forskingsresultata og andre liknande situasjonar (Mertens, 2005, s. 256). Det er avgrensa kor mykje som kan overførast til andre situasjonar gjennom kvalitative studiar. I studien min går eg grundig inn i korleis ein enkelt lærar kommuniserer med elevane sine, og korleis kommunikasjonen og kunnskapsutviklinga føregår i ein spesifikk matematikklasse. Her er ikkje hensikta å generalisere resultata til generell matematikkundervisning, men å få ei betre og grundigare forståing rundt forskingsspørsmåla. Dermed kan resultata i studien overførast til andre situasjonar gjennom at andre lærarar kan kjenne seg igjen i dei ulike hendingane som blir beskrive, og kanskje dra nytte av dei i eiga undervisning (Mertens, 2005).

3.3.2 Reliabilitet

I eit kvalitativt forskingsdesign er eg som forskar og observatør ein del av instrumentet for datainnsamlinga. Her vil det vere fare for at dei oppfatningar og meiningar eg har med meg inn i forskingssituasjonen, kan vere med på å bestemme kva data som blir innsamla og den vidare analysen av dei. Dermed vil mine meiningar og min bakgrunn vere med på å minke *reliabiliteten*, eller pålitelegheita, til forskingstudien (Mertens, 2005). Det vil vere vanskeleg å unngå ein slik påverknad, fordi forsking innan det konstruksjonistiske paradigmet blir sett på som eit produkt av forskarane sine verdiar. Ein studie kan dermed ikkje vere uavhengig av mine personlege verdiar, men for å oppretthalde ein viss objektivitet i forskinga vil eg forsøke å gjere påverknaden så liten som muleg. Blant anna kan eg vere klar på mine eigne verdiar og oppfatningar, prøve å vere oppmerksam og starte studien med eit ope sinn (Mertens, 2005; Robson, 2002). I tillegg vil eg tydeleggjere mine resultat og tolkinga av dei for lesaren, gjennom å direkte vise til utdrag frå samtalane i klasserommet.

Bilde- og lydbandopptaka er ein viktig del av forskingsinstrumentet i studien, og dermed vil kvaliteten vere av stor betyding. Det er viktig at eg kan høyre godt kva som blir sagt, slik at det ikkje oppstår nokre misforståingar. Ved pilotstudien kunne det i nokre tilfelle vere vanskeleg å høre kva elevane sa på lydbandopptaka, fordi det var ein del bakgrunnsstøy i klasserommet. Ved å ikkje få med seg heile samtalen mellom læraren og elevane, kan det føre til at tolkinga av datamaterialet blir feil. Fordi eg her observerer og samlar inn meir data enn i pilotstudien, får eg meir datamateriale å jobbe med. Dermed meiner eg at det skal vere muleg å få mykje brukbart datamateriale, sjølv om eg kan risikere at ikkje alt er av like god kvalitet. I tillegg får eg eit overlappande datamateriale ved enkelte situasjonar i undervisninga, fordi eg både observerer, og tar bilde- og lydbandopptak. Ved bruk av fleire datainnsamlingsmetodar, meiner eg at eg sikrar meg at mest muleg av datamaterialet skal bli av best muleg kvalitet.

3.4 Gjennomføring

3.4.1 Datainnsamling

Datainnsamlinga føregjekk over tre dagar. Undervisninga var lagt opp slik at klassen var delt i to, og kvar halvdel hadde ein dobbelttime med matematikk kvar av dei dagane. Dermed fekk eg observert det same undervisningsopplegget to gonger per dag, og med ulike elevgrupper. Bruk av filmkamera føregjekk ved at eg fokuserte kameraet på læraren og kjerneutvalet. Diktafonen vart brukt ulikt over dei tre dagane, der den vart plassert både på læraren og hos nokre tilfeldig utvalte elevgrupper.

Den første dagen var lagt opp til at det skulle vere tavleundervisning. Her valte eg i den første økta å filme læraren, fordi han fokuserte merksemda til klassen mot seg sjølv og tavla. Dei tre jentene i kjerneutvalet fekk dermed diktafonen på pulten mellom seg, slik at eg fekk inn datamateriale av kommunikasjonen deira. Etter som at elevane jobba med ein del samarbeidsoppgåver i løpet av økta, gjekk læraren rundt i klasserommet og samhandla med elevane. Her følte eg at eg fekk med for lite av kommunikasjonen læraren hadde med dei ulike elevgruppene. Dermed gjekk eg over til å filme dei to gutane i den neste økta, og læraren fekk gå rundt med diktafonen på seg slik at eg kunne få med meg meir av interaksjonen som føregjekk mellom han og resten av elevane.

Undervisninga på den andre dagen føregjekk ved at elevane jobba i grupper, og dei rullerte rundt på fire ulike arbeidspostar i klasserommet. I dagens to økter valte eg å følgje dei aktuelle elevane rundt på postane og filme dei. Dermed fekk eg både lyd og bilde av korleis elevane kommuniserte og kva dei gjorde. Læraren hadde heile tida diktafonen på seg, slik at eg samtidig fekk innhenta interaksjonen mellom han og resten av elevane i klassen.

Organiseringa av den siste dagen likna på den for dag nummer to, men elevgruppene flytta ikkje rundt på seg. Elevane arbeidde i grupper, og dei fekk fleire arbeidsoppgåver i løpet av økta. Her valte eg å filme kjerneutvalet på same måte som før. På førehand hadde eg hørt på lydbandopptaka frå dag nummer to. Her oppdaga eg at det av og til kunne vere vanskeleg å høre alt av det elevane sa, og fordi læraren vandra mykje rundt frå gruppe til gruppe kunne det ofte føre til at det vart lite samanheng i dei korte kommunikasjonssekvensane. Derfor valte eg å legge diktafonen på pulten til nokre tilfeldige elevgrupper. Dei ulike gruppene viste seg å ha ulik grad av diskusjon mellom seg, og eg valte derfor å flytte diktafonen rundt i klasserommet for kvar oppgåve som vart gitt.

I løpet av alle tre dagane forsøkte eg så godt eg kunne å observere det som føregjekk i klasserommet. Eg tok notat av element i undervisninga og interaksjonen, som kunne hjelpe meg i det etterfølgjande analysearbeidet.

3.4.2 Analysen

Etter datainnsamlinga vart datamaterialet transkribert. Her brukte eg både bilde- og lydbandopptak til å sette saman ein fullstendig transkripsjon av det som føregjekk i matematikkundervisninga i løpet av dei tre dagane. Samtidig brukte eg observasjons-notatane og hukommelsen, til å utdjupe kva som føregjekk rundt og i samanheng med dei ulike situasjonane. Arbeidet med å transkribere datamaterialet gjorde eg så raskt som muleg etter at data var samla inn, slik at alle observasjonar og inntrykk låg ferske i minnet.

I første del av analysearbeidet laga eg ei oppsummering av alt som hadde skjedd i undervisninga dei tre dagane. Eg brukte transkripsjonane til å skrive ei ”forteljing” for kvar av dei tre dagane. Her starta eg så vidt å analysere nokre av dei eg meinte var dei mest interessante situasjonane. I neste omgang plukka eg ut dei utdraga som vidare peika seg ut som mest interessante. Dialogane som var ”interessante” var av god kvalitet og hadde matematisk innhald som kunne hjelpe meg med å svare på forskings-spørsmåla. Samtidig kunne eg sjå at det føregjekk spennande samtalar her. Med eit slikt utgangspunkt starta eg å gå nærare inn på analysearbeidet ved hjelp av den tilhøyrande teorien.

Etter at det var blitt gjennomført ei analyse av datamaterialet, vart det enda ein gong plukka ut det som var etter mi og rettleiars meining dei mest interessante resultata.

Deretter vart det gjennomført ein ny analyserunde av materialet, der eg gjekk djupare inn i kva som føregjekk i dei ulike dialogane. Her var det svært nyttig å ha bilde- og lydbandopptak, der eg kunne gå tilbake å sjå eller høyre på enkelte situasjonar som ikkje var blitt transkribert godt nok i starten. Dermed sikra eg meg ei betre forståing omkring det som føregjekk i undervisninga.

3.5 Analyseverktøy

I analysearbeidet brukar eg det teoretiske rammeverket i teorikapittelet. Eg starta med å dele dialogane inn i to fagtema: vekstfaktor og kombinatorikk. Eg valte å gjere det slik både fordi dei to tema var hovudsakleg det undervisninga dreia seg om, og fordi det vart enklare for meg å sortere alt datamaterialet. Den vidare analysen blir igjen delt inn i to fasar: analyse av oppgåvene og analyse av dialogane. Her brukar eg noko teori til å analysere sjølve oppgåvene, og deretter meir teori for å analysere dei enkelte dialogane og det som føregår av kunnskapsutvikling.

Aktuelle matematikkoppgåver elevane jobbar med i timane, blir analysert opp mot Skovsmose (2003) sine seks ulike læringsmiljø (tabell 1, s. 15) og Folke Larsen et al. (2006) sine ni ulike læringsmiljø (tabell 2, s. 16). Her ser eg om oppgåvene høyrer heime i eit undersøkingslandskap eller i eit oppgåveparadigme, noko som vil vere med på å fortelje om oppgåvene er problemløysningsoppgåver eller ikkje. I tillegg brukar eg Steinbring (2006) sin epistemologiske trekant (figur 1, s. 26) for å sjå kva som er omgrep, symbol og referansekontekst til dei ulike oppgåvene.

Dialogane blir analysert opp mot dei ulike kommunikasjonsmønstra. Her blir det sett på kva mønster som oppstår i dei ulike interaksjonssekvensane, og kva som kan vere årsaka til det. Det blir undersøkt om elevane brukar problemløysingsstrategiar, etter Polya (1945/1988) sin leddvise problemløysingsprosess. Samtidig brukar eg Steinbring (2006) sin epistemologiske trekant til å tolke elevane si kunnskapsutvikling. Som eit tilleggsverktøy for å tolke elevane si læring og matematiske forståing, nyttar eg meg av Lee (1996) sine tre oppfatningsnivå (tabell 3, s. 28). Oppfatningsnivåa er med på å fortelje i kva grad elevane oppfattar det dei arbeider med matematisk.

4. RESULTAT OG ANALYSE

I kapittelet presenterar eg mine data og analysen av dei. Her har eg valt å dele inn i to tema, som er fagområda vekstfaktor og kombinatorikk. Årsaka til ei slik inndeling er at matematikkundervisninga som føregår på dei tre observerte dagane, handlar nettopp om berekning av vekstfaktor og kombinatorikk. I kvart av tema vil eg ta føre meg dei aktuelle matematikkoppgåvene elevane arbeider med, og deretter dei tilhøyrande dialogane. Datamaterialet blir analysert ved hjelp av analyseverktøyet presentert i kapittel 3.5. Dei ulike utsegnene i dialogane er koda med V eller K, saman med eit nummer, alt etter kva fagtema dei kjem under.

4.1 Vekstfaktor

Vekstfaktor er hovudtemaet i to av dei tre observerte dagane. *Vekstfaktor* blir ofte omtalt som prosentvis vekst, og brukast til å berekne alt som aukar eller minkar med ein fast prosent i eit gitt tidsrom. Symbolet vekstfaktoren ofte blir oppgitt som er $\left(\frac{p}{100}+1\right)$, eventuelt som eit desimaltal, der p er prosentsatsen (Hessen, u. å.). Den første observerte dagen var lagt opp til at læraren styrte undervisninga frå tavla. Her repeterte han kva renter er, han kom med oppgåver som elevane skulle løyse gjennom samarbeid, og på tavla oppsummerte han korleis oppgåvene skulle løysast. I undervisningstimane den andre dagen arbeidde elevane i grupper, der dei rullerte rundt på fire ulike postar som læraren hadde forberedt. Ein post gjekk ut på at gruppa trilla kvar sine terningar 100 gonger, samtidig som dei førte statistikk over kva dei fekk. Ut i frå statistikken rekna dei ut brøk, prosent og desimaltal. Ved ein annan post spelte elevane prosentdomino, der dei skulle sette saman prosent, promille og brøk. På dei to andre postane føregjekk det arbeid med oppgåver, frå læreboka og eit ark læraren hadde utarbeidde, som omhandla fagtemaet vekstfaktor. Det var heile tida læraren som styrte tida, og etter viss tid måtte gruppene skifte plass. Utanom introduksjonen i starten, hadde læraren ingen form for tavleundervisning eller felles oppsummering i løpet av økta.

I fagområdet vekstfaktor er det sparing og berekning av renter undervisninga handlar om. Temaet renter er noko elevane har jobba med tidlegare. Dei observerte timane føregår rett etter vinterferien, og eg ser at undervisninga for nokre elevar er ei form for repetisjon medan for andre er det framleis nytt stoff.

4.1.1 Analyse av oppgåver

Det er fleire ulike oppgåver elevane arbeider med i samanheng med temaet vekstfaktor. Her har eg gjort eit utval av dei oppgåvene som er relevant for interaksjonssekvensane eg analyserer. Utvalet av dialogar vart gjort på grunnlag av kva eg tolkar som dei mest interessante dialogane mellom lærar og elevar og mellom elevane. Dialogane vart vurdert som interessante der det var god kvalitet på bilde- eller lydbandopptaket, og samtidig var av matematisk innhald som er relevant for forskingsspørsmåla. Dermed er det for meg naturleg å ta føre meg dei oppgåvene som høyrer til dialogane.

Oppgåve 1:
Ulrik setter 5000 kr i banken. Renten er 3 %. Hvor mye kan Ulrik ta ut etter 3 år?

Oppgåve 1 er i følgje Skovsmose (2003) sine seks læringsmiljø, i eit oppgåveparadigme med referansar til ei ”semi-verkelegheit” (tabell 1, s. 15). Elevane får ei rekneoppgåve som er ”pakka inn” i opplysningar som ikkje er henta frå ein verkeleg situasjon, men som skal likne på eit verkeleg problem. Eg antar at målet med oppgåva er at elevane skal bruke dei oppgitte tala og finne vekstfaktoren og den oppsparte renta ved hjelp av dei. Grunnlaget for antakinga mi er den direkte oppgåveteksten og læreboka si framstilling av temaet, der det er fleire eksempeloppgåver som går ut på å finne kor mykje pengar det er i banken etter eit visst antal år (Torkildsen & Maugesten, 2009). Her er det ikkje noko stort rom for elevane å utforske oppgåva, då eg meiner at det er tydeleg forventa kva dei skal gjere.

Det er tre metodar elevane kan nytte seg av for å løyse oppgåva. Den eine metoden går ut på å først finne éin prosent av 5000 kr, for så å gange det med tre for å få 3 % av 5000 kr. Eller dei kan direkte utrekne 3 % renter av 5000 kr. Deretter må 3 % av 5000 kr leggast til grunnbeløpet, for å finne ut kor mykje ein har i banken etter eit år. Utrekningane er vist i figur 2 under.

(1) $\frac{5000\,kr}{100} = 50\text{kr}$ og $50kr \times 3 = 150kr$ eller $\frac{5000kr \times 3}{100} = 150kr$,

(2) $5000\ kr + 150\ kr = 5150\ kr\ etter\ eit\ \text{år}.$

Figur 2: Utrekning av 3 % renter etter eit år.

Fordi vi får renters renter på pengar som står i banken fleire år, må det utreknast nye 3 % renter av 5150 kr, og legge det til for å få beløpet etter to år. For å til slutt kunne berekne 3 % renter igjen og finne summen som står i banken etter tre år.

Operasjonane i figur 2 kan alternativt gjerast ved éi utrekning:

$$\frac{5000kr \times 3}{100} + 5000\ kr = 5150\ kr\ etter\ eit\ \text{år}$$

Figur 3: Pengar i banken etter eit år.

Ein tredje måte å løyse oppgåva på, er ved hjelp av vekstfaktor. Vekstfaktoren kan ein finne ved å gjere følgjande utrekningar:

$$\left(\frac{5000\,kr \times 3}{100} + 5000\ kr\right) = 5000kr\left(\frac{3}{100} + 1\right) = 5000kr \times 1{,}03.$$

Her er vekstfaktoren $\left(\frac{3}{100} + 1\right)$, også oppgjeve som desimaltalet 1,03.

Figur 4: Utrekning av vekstfaktoren i oppgåve 1.

Deretter kan ein finne dei oppsparte beløpa i banken etter eit, to og tre år:

$Etter\ eit\ \text{år}$:	$5000\ kr\ \times 1{,}03 = 5150\ kr.$
$Etter\ to\ \text{år}$:	$5150\ kr\ \times 1{,}03 = 5304{,}50\ kr.$
$Etter\ tre\ \text{år}$:	$5304{,}50\ kr\ \times 1{,}03 = 5463{,}64\ kr.$

Figur 5: Utrekning av pengar i banken ved hjelp av vekstfaktoren 1,03.

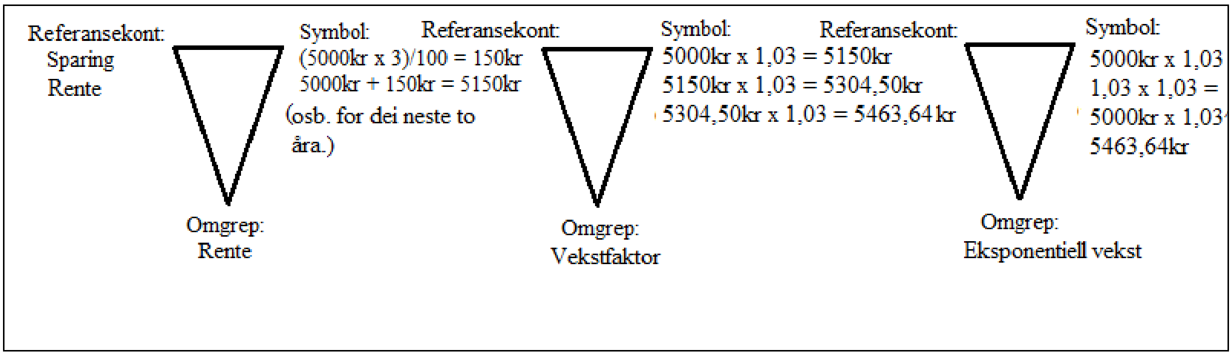
Til slutt er det ei mulegheit for å samle alle dei føregåande operasjonane i eit og same reknestykke, der ein tek i bruk eksponentiell vekst i samanheng med at vekstfaktoren blir ganga inn tre gonger:

Du har i banken etter tre år:

$$5000\ kr \times 1{,}03 \times 1{,}03 \times 1{,}03 = 5000kr \times 1{,}03^3 = 5463{,}64\ kr.$$

Figur 6: Løysing av oppgåve 1 ved bruk av eksponentiell vekst.

Ved å bruke den epistemologiske trekanten som analyseverktøy, er det her fleire mulege kunnskapsstrukturar rundt ulike omgrep. Blant anna er omgrepet ”renter” sentralt i oppgåva, der det er grunnlaget for utrekningane. Gjennom utrekningane i figur 2 blir ein prosent representert ved reknestykket $\frac{5000\,kr}{100}$, og tre prosent ved reknestykket $\frac{5000\,kr \times 3}{100}$. Deretter blir tre prosent lagt til grunnbeløpet, for å finne oppsparte pengar i banken etter eit år. Her kan elevane danne koplingar til utrekningane, ved at referansekontekst og symbol blir mediert gjennom omgrepet ”rente”. Det viktigaste i samanheng med oppgåve 1 er kanskje omgrepet ”vekstfaktor”, som her blir presentert gjennom symbolet 1,03. Den algebraiske utrekninga vist i figur 4, vil kunne fungere som referansekonteksten til symbolet, der omgrepet ”vekstfaktor” medierer mellom utrekninga og symbolet 1,03. Trinna i utrekninga viser kva som er samanhengen mellom vekstfaktor og prosentvis vekst av sparepengane. Bruk av vekstfaktor gir elevane eit vidare grunnlag for å kunne snakke om eksponentiell vekst og potensar (jamfør figur 6). Kunnskapskonstruksjonane kan dermed framstillast ved hjelp av tre ulike epistemologiske trekantar. Dei tre trekantane kan igjen representere ei kunnskapsutvikling gjennom ei kjede, som vist i figur 7 under (Farrugia, 2007; Steinbring, 2006).



Figur 7: Tre ulike epistemologiske trekantar i samanheng med oppgåve 1, sett saman i ei kjede.

Fleire av dei same elementa eg har tatt føre meg i oppgåve 1, gjeld vidare for oppgåve 2. Oppgåva hører heime i eit oppgåveparadigme, med referansar til ei semi-verkelegheit. Den andre oppgåva liknar på den første, men den har meir fokus på repetisjon av den aktuelle øvinga. På same måte som i den første oppgåva skal elevane finne riktig tal og sette det inn på riktig plass i ein formel, og det er ikkje mange tolkingsmulegheiter. Likevel er oppgåva sin natur litt annleis, då den snur om på problemet:

Oppgåve 2:

a) *Du får 36 kr i rente på et år, og renten er 3 %. Hvor mye penger satte du i banken?*
b) *Du får 36 kr i rente på 3 måneder. Renten er 2,5 %. Hvor mye penger satte du i banken?*
c) *Du får 40 kr i rente på åtte måneder. Du satte inn 2000 kr. Hvor mange prosent var renten?*

I oppgåve 2 a) blir det spurt om kor mykje pengar som vart sett inn i banken, ikkje kor mykje du får ut. Her kan altså elevane ”snu om på” reknestykket frå førre oppgåve, og jobbe med ein ukjent x som grunnbeløp:

(1) $\frac{X\ kr \times 3}{100} = 36\ kr$

(2) $X\ kr = \frac{36\ kr\ \times 100}{3} = 1200\ kr$

Figur 8: Berekning av oppgåve 2 a).

I del b) av oppgåva er det gitt informasjon om at etter tre månader har du oppnådd 36 kroner i rente. Renta er 2,5 %, og spørsmålet er kor mykje pengar som er sett inn i banken. Eg antar her at renta er oppgitt for eit heilt år, i og med det er mest vanleg ved sparing i bank i tillegg til at det er slik det er presentert i undervisninga og i læreboka: ”Renten oppgis i prosent for ett år” (Torkildsen & Maugesten, 2009, s. 10). Eg antar at det her ligg til grunn at ein ikkje får renters renter når tidsrommet er under eit år, og då blir løysingsforslaget som følgjer:

(1) $Xkr \times \left(\frac{2{,}5 \times 3\ mnd}{100 \times 12\ mnd} + 1\right) = X + 36kr$

(2) $X(1{,}00625 - 1) = 36kr$

(3) $X = \frac{36kr}{0{,}00625} = 5760\ kr\ i\ grunnbeløp.$

Figur 9: Løysing av oppgåve 2b)

Til slutt er det i oppgåve 2c) ein annan vri på oppgåva, då dei spør etter kor mykje renta er på når du har fått 40 kr i rente på åtte månader etter eit innskot på 2000 kr. Oppgåva kan løysast på to måtar, der p er den ukjente prosentsatsen:

(1) $2000kr \times \left(\frac{p \times 8\ mnd}{100 \times 12} + 1\right) = 2040kr$

(2) $\left(\frac{p \times 8\ mnd}{1200} + 1\right) = 1{,}02$

(3) $p \times 8\ mnd = (1{,}02 - 1) \times 1200$

(4) $p = \frac{24}{8}$

(5) $p = 3\ \%\ rente.$

(1) $\frac{2000\,kr \times p}{100} = 60kr$

(2) $p = \frac{60kr \times 100}{2000\,kr}$

(3) $p = 3\ \%\ rente$

Figur 10: Oppgåve 2c) sine to løysingsforslag

I oppgåve 2 jobbar elevane som tidlegare nemnt i ei såkalla semi-verkelegheit. Det kjem tydeleg fram ved at renter blir framstilt som noko proporsjonalt, og det betyr at verkelegheita er forenkla. Elevane vil sannsynlegvis forbinde renter med noko som vi berre opererer med på årsbasis, medan i det verkelege livet har vi i tillegg renter i samanheng med for eksempel månadsrente på lån eller kredittkjøp. Referansekonteksten i oppgåva består framleis av sparing av pengar, men her er det snakk om ulike tidsrom; for eit år, tre eller åtte månader. Eg meiner at dei epistemologiske trekantane i figur 7 gjeld framleis. Utfordringane i samanheng med oppgåve 2 kan vere at elevane må finne og vurdere kva som er kjente og ukjente faktorar i dei ulike deloppgåvene. Dei skal ha eit visst forståingsgrunnlag for å kunne plassere dei riktige symbola i riktig kontekst.

4.1.2 Analyse av dialogar

I undervisningstimane med vekstfaktor, introduserar læraren undervisningsøkta og temaet med å avklare kva omgrepet "renter" betyr. Her ser eg at renter blir kopla opp mot ein spesifikk referansekontekst:

V.01	Lærar:	Renter, hva er renter? Står på tavla. (Pause). Ja?
V.02	Rune:	Skal oppgis i prosent for hvert år.
V.03	Lærar:	Er det renter? (Pause). Det står noe på tavla (Tekst som står på tavla: Renter: Oppgis i prosent for et år. 3 % rente betyr 3 % rente per år.), og så må vi tenke oss til noe. Hva er rente? Hvis dere får rente, hva er det?
V.04	Rune:	Eh…
V.05	Line:	Prosent som legges til, trekkes fra et tall (pause), antall penger som regel.

V.06	Lærar:	Ja. Om du låner eller låner ut penger, så får du renter på det. Og renter oppgis i prosent for et år. 3 % renter, betyr 3 % renter pr. år. Ganske enkelt og greit […]

Interaksjonssekvensen meiner eg føregår gjennom traktmønsteret (Bauersfeld, 1988), der læraren tydeleg forsøker å få fram det han meiner er det rette svaret. Læraren spør Rune i linje V.03 om ”Er det renter?”, og seier vidare at det står noko på tavla og så må dei tenke seg til ”noe”. Her kan det tenkast at læraren har eit spesifikt svar i tankane, det han kallar ”noe”, som elevane må kome fram til. Læraren er tydeligvis ikkje nøgd med svaret til Rune, og spør vidare. I linje V.03 tolkar eg det som at læraren forsøker å lokke fram ei spesifikk forklaring på renter, der han seier at elevane må tenke seg til ”noe” i tillegg til den informasjonen dei får på tavla. Line forklarer så at prosent er noko ein legg til eller trekk frå eit beløp. Her tyder det på at ho har danna koplingar mellom referansekonteksten, som består av spare eller låne pengar i banken, med omgrepet renter. Til slutt i dialogen avsluttar læraren traktmønsteret ved å legge fram det fullstendige svaret sjølv (linje V.06).

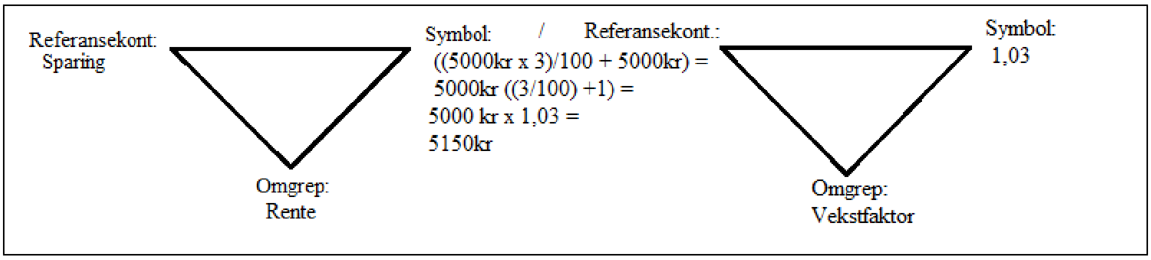
Gjennom dialogen kan det sjå ut til at Rune har ei oppfatning om at renter er definert gjennom at det ”blir oppgitt i prosent per år”. Fleire av mine observasjonar tyder på at det er mange av elevane som er av same oppfatning. Læraren presiserer i linje V.06 at det handlar om å låne eller låne ut pengar, samtidig som han vektlegg at renter oppgjevast i prosent per år. Ut i frå interaksjonssekvensen kan det tyde på at elevane kan ha ei kopling mellom omgrepet renter og at det alltid blir oppgjeve i prosent per år. Når læraren sjølv vektlegg ein slik samanheng, vil han vere med på å danne ei sterkare kopling. Her kan det tyde på at det er, eller blir danna eit matematisk tema rundt omgrepet renter som blir ”tatt for gitt” (Voigt, 1995). Verknaden av eit slikt matematisk tema, ser eg seinare i undervisninga som omhandlar vekstfaktor.

I samanheng med omgrepet vekstfaktor, tyder det på at elevane manglar noko som medierer mellom symbolet 1,03 og sparing. Gjennom dialogen under kjem det fram at å arbeide med vekstfaktor er berre ein teknikk for eleven. Her tolkar eg det som at læraren forsøker å få eleven til å seie at han har brukt vekstfaktor for å løyse oppgåva, men eleven ser ikkje ut til å forstå kva han eigentleg har gjort:

V.07	Lærar:	Går det bra?
V.08	Truls:	Jah.
V.09	Lærar:	(forbausa) Oi! Hva har du brukt her?
V.10	Truls:	Juks?
V.11	Lærar:	Nei!
V.12	Truls:	En lur måte?
V.13	Lærar:	Ja!
V.14	Truls:	Ja det var han studenten som hjalp meg sant. Det er liksom gange med 3 % mer enn hundre, liksom. […] For det skal jo være en økning.
V.15	Lærar:	Ja. Mhm. […]
V.16	Lærar:	Hva det kalles det der? (Læraren viser til vekstfaktoren).
V.17	Truls:	Juksemåte.
V.18	Lærar:	Nehei.
V.19	Truls:	Det er en smart måte!
V.20	Lærar:	Smart måte.

Her startar læraren med å kome i kontakt med eleven. Deretter oppdagar han at eleven har brukt vekstfaktor for å løyse oppgåva, og spør eleven om kva han har gjort. Sannsynlegvis ønskjer læraren her at eleven skal svare vekstfaktor. Ut i frå responsen til eleven (linje V.10), kan det sjå ut til at eleven ikkje forstår kva eller kvifor han har gjort det på den måten. Eleven blir tilsynelatande mistenksam til læraren sitt spørsmål, og trur han har gjort noko feil der han svarar ”Juks?”. Etter at Truls har fått bekrefta av læraren at løysinga er riktig, forsøker han å forklare at løysingsmetoden har noko med at beløpet skal auke (linje V.14). Læraren stiller spørsmål som kan karakteriserast av typen ”gjett-kva-læraren-tenker” (Alrø & Skovsmose, 2002), der han spør ”Hva kalles det der?”. Eg antar at læraren framleis er ute etter svaret ”vekstfaktor”, fordi ut i frå min observasjon er det bruk av vekstfaktor som er hovudpoenget i undervisninga.

Det er tydeleg at eleven ikkje har utvikla den nødvendige koplinga mellom referanse-konteksten som er sparing/renter og symbolet 1,03, då han framleis trur at det er ein ”juksemåte” (linje V.17) eller ein ”smart måte” (linje V.19). Her vil eg påstå at koplingane eleven har mellom referansekontekst og symbol er svake, fordi han ikkje har det klart føre seg kvifor symbolet er slik. Det meiner eg kjem tydelegare fram i linje V.14, der han forklarer med at det er ”liksom gange 3 % mer enn 100”. Han manglar altså ein referansekontekst som kan hjelpe til i medieringa av omgrepet ”vekstfaktor”. Eg har illustrert den ønskelege kunnskapsutviklinga i figur 11 under, der den epistemologiske trekanten til eleven kan byggast på ved at det eksisterande symbolet blir ein referansekontekst i den neste epistemologiske trekanten:



Figur 11: Påbygging av eksisterande epistemologisk trekant for ønskeleg kunnskapsutvikling av ”vekstfaktor”.

Det var mange av elevane som valte å først finne ein prosent av beløpet, og deretter gange det med tre. I ein interaksjonssekvens mellom læraren og to gutar forklarer elevane at dei har brukt nettopp ein slik løysingsmetode, men læraren ønskjer tydelegvis at dei skal bruke ein annan. Sekvensen startar med at læraren spør elevane korleis dei har løyst oppgåva. Spørsmåla kan tolkast som læraren sitt forsøk på å kome i kontakt med elevane. Dei to gutane svarar på spørsmålet, og ein interaksjonssekvens er i gang mellom dei og læraren der gutane forklarer korleis dei løyser oppgåve 1:

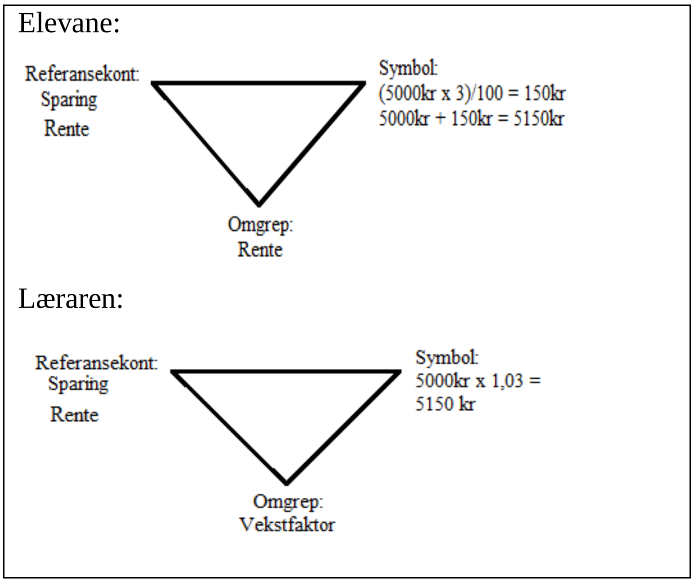
V.21	Lars:	Vi tar et år etter hvert, så blir det mer og mer, og så plusser vi på.
V.22	Lærar:	Mhm, ja. [Pause.] Så dere la på renta andre året? 5150?
V.23	Eivind:	Så dele på tre.
V.24	Lærar:	Så delte dere på?
V.25	Eivind:	100, og ganger tre.
V.26	Lærar:	Ja? Og da fikk dere?
V.27	Eivind:	Da fikk vi det (peikar på 154,50).
V.28	Lærar:	Ja.
V.29	Eivind:	Så plussa vi sammen dem (viser til 5150 kr og 154,50 kr). [Pause]
V.30	Lærar:	Ja.
V.31	Eivind:	Og da fikk vi det (viser til 5304,50 kr). Og så gjorde vi sånn igjen.
V.32	Lærar:	Ja. Det er rett svar. Ja.[Pause.]
V.33	Eivind:	Vi er flinke.
V.34	Lærar:	Kan dere gjøre det på en lettere måte?

I linje V.21 forklarer Lars korleis dei tenker når dei løyser oppgåva. Eivind utdjupar vidare forklaringa i linje V.23 til V.31. Her kan det tyde på at elevane har forstått kva det betyr at ein får rentesrenter når sparinga føregår over fleire år, der dei seier at ”vi tar et år etter hvert, så blir det mer og mer”. Dermed ser det ut til at elevane har ein viss kunnskap og forståing omkring det å rekne ut renter i oppgåve 1, der eg vil samanlikne koplingane deira med den første epistemologiske trekanten i figur 7 på side 42. Ei vidare analyse tyder på at gutane er på eit sansingsnivå, eit verbaliseringsnivå og eit symboliseringsnivå (Lee, 1996), der dei uttrykker at dei finn prosenten for kvart år og legg saman beløpa.

Elevane forklarer vidare at dei fortset på same måten for å finne prosenten etter to år og etter tre år. Det kan gjennom dialogen sjå ut til at læraren forsøker å teste elevane sine kunnskapar, då han stiller spørsmål som ”Så delte dere på?”, og lokkar fram framgangs-måten deira. Samtidig kan bakgrunnen for spørsmålet vere at læraren ser at elevane har gjort noko anna enn det dei seier, slik at han får dei til å tenke seg om og svare på nytt. Vidare kan det på grunnlag av at læraren svarar ” Ja. Det er rett svar. Ja.” i linje V.18, tolkast som at læraren evaluerar svara til dei to elevane. Det kan altså tyde på at dialogen føregår gjennom IRE-mønsteret (Cazden, 2001), der læraren stiller spørsmål som elevane svarar på og som læraren etter kvart evaluerar. Mot slutten av dialogen kjem læraren med ei utfordring eller eit hint om at det fins ein anna løysingsmetode, der han spør om dei kan gjere det på ein ”lettere måte” (linje V.20). Eg antar at det læraren meiner med ein ”lettare måte”, er at det går raskare å berekne svaret med vekstfaktor. Det kjem fram gjennom min observasjon av undervisningstimane, der læraren ofte påpeikar at det er ”en veldig lett måte å gjøre det på” å bruke vekstfaktor og at det er ein rask metode: ”Sparer veldig mye tid. Gunstig når det er travelt, på prøver og sånt, så er det veldig safe” (linje V.67, s. 53).

Både det å kome i kontakt og kome med ei utfordring er element frå IC-modellen (Alrø & Skovsmose, 2002). Likevel held den føregåande dialogen seg for det meste innan eit oppgåveparadigme, der det er element av IRE-mønsteret. Ut i frå dei samla observasjonane av undervisninga, tyder det på at læraren legg vekt på bruk av vekstfaktor som ein lett og rask måte å rekne på. Dermed meiner eg at det kjem tydeleg fram at læraren ønskjer at elevane her skal finne ein spesifikk løysingsmetode, som består av bruk av vekstfaktor.

Eg antar at elevane på same måte som Truls i dialogen på side 46 (V.07-V.20), vil mangle ein referansekontekst i vidare arbeid med å finne ein enklare metode, og for å kunne danne koplingar mellom sparing og symbolet for vekstfaktor. Antakinga mi kjem av observasjonen av undervisninga, og av den førre eksempeldialogen. Av dialogen over kan det sjå ut til at elevane og læraren har ulike epistemologiske trekantar omkring kunnskapsstrukturane sine (jamfør figur 12). Det at læraren og elevane har ulike perspektiv, kan føre til vanskar i kommunikasjonen mellom dei (Alrø & Skovsmose, 2002).



Figur 12: Elevane og læraren sine epistemologiske trekantar i samanheng med oppgåve 1.

Ut i frå det eg har observert, har ikkje elevane i klassen arbeidde med sjølve den algebraiske utviklinga av vekstfaktorar. Elevane er kanskje ikkje vante med å undersøke algebraisk, og dei har dermed ikkje eit godt nok grunnlag for å forstå kva ein vekstfaktor er og kva symbolet betyr, då dei har eit hol i samanhengen mellom 1,03 og den stegvise utrekninga vist i figur 4 på side 41. Elevane treng den stegvise utrekninga for å kunne bygge vidare på den epistemologiske trekanten sin, og danne koplingar mellom omgrepet ”vekstfaktor” og dei tilhøyrande symbola (jamfør figur 11, s. 47).

Ei anna elevgruppe valte å bruke vekstfaktor for å løyse oppgåve 1 frå starten av. Likevel tyder dialogen under på at heller ikkje dei er sikre på kva vekstfaktoren eigentleg er, og kva symbol dei skal bruke:

V.35	Stine:	Etter 1 år er det 150 kr (finn 3 % av 5000). Etter 1 år er det 5150kr (legg 150 kr til 5000 kr).
V.36	Anette:	Vi må vel regne det ut da? (Pause). Jeg tenker hvis vi ganger med 1,03 hvert år. Men da må vi sette et regnestykke for hvert år. Eller så tar vi det på kalkulatoren.

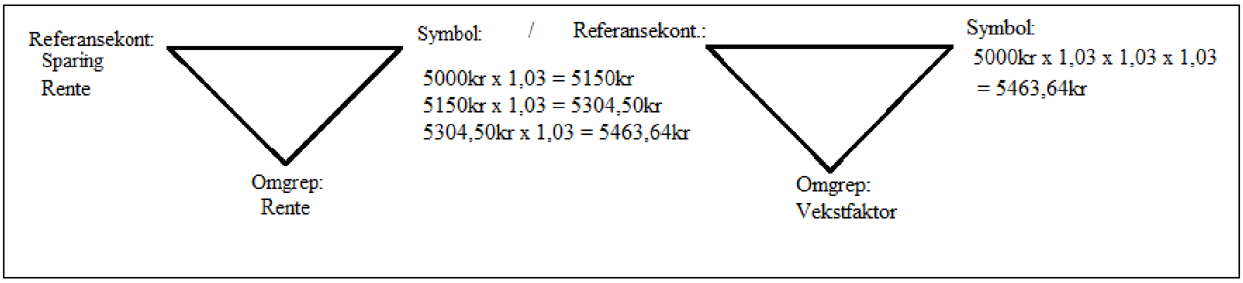
V.37 Stine: Ja.
V.38 Anette: Mhm. Og en..
V.39 Trude: Gange 0,03, 1,03.
V.40 Anette: Nei, 1,03.
V.41 Trude: 0,03 kanskje? (Pause). Er det ikke 103 % på 3 %?
V.42 Anette: Hvis du ganger med 1,03, så trenger du ikke å gange og så legge det til. (Pause). Vi må jo ha med de 5000 også. (Pause).
V.43 Stine: Men ganger vi det med 1,03, og så ganger vi det svaret med 1,03 igjen?
V.44 Anette: Ja, for hvert år.
V.45 Stine: Ja, OK.
V.46 Anette: Da slipper vi å først gange med 1,03 og så legge det til.

Det blir her observert at Stine startar i linje V.35 med å rekne ut 3 % av 5000 kr, for så å legge den summen til 5000 kr for å få 5150 kr. Anette foreslår i linje V.36 at dei kan gange med 1,03 for kvart år i staden for. Det er resten av jentene einige i, men dei har tydelegvis ikkje heilt kontroll på omgrepet ”vekstfaktor” fordi dei ikkje heilt forstår korleis symbolet skal uttrykkast (linje V.39-V.41). Anette derimot viser i linje V.36 og V.42 at ho er på sporet av ein struktur. Eg tolkar det her som at ho meiner at å gange med 1,03 er lettare enn å først gange med 0,03 med 5000, for så å legge det svaret til 5000. Dialogen mellom jentene tyder på at Anette har kome seg på eit sansingsnivå, og eit delvis verbaliserings og symboliseringsnivå. Likevel kan det tyde på at koplingane mellom referansekonteksten og symbolet ikkje er sterke nok til at ho heilt forstår kva det inneber. Det kan vere at jentene er på veg til å bygge på sin eksisterande epistemologiske trekant, men dei manglar referansekonteksten i trekant nummer to illustrert i figur 11 på side 47, for å kunne fullføre kunnskapsutviklinga.

I sekvensen under, diskuterer jentene vidare om dei kan gange med 3,09:

V.47 Stine: Vi kunne jo bare ganga det med (pause). Hadde det blitt det samme (pause), med..
V.48 Trude: Hm?
V.49 Stine: Hadde det ikke blitt det samme om vi ganga det med 3,09?
V.50 Anette: Nei [Pause]. Jeg tror ikke at det hadde blitt det samme for det endrer seg jo for hvert år, og så [utydelig] blir det litt mer enn tre prosent her. Ellers så hadde det jo blitt, eh, 5900, eller nei, 5450. Blir det ikke?
V.51 Stine: Ja. (Pause). Jo..

Stine lurer på om dei ikkje kan gange med 3,09 (linje V.49). Her antar eg at ho tenker at fordi det er snakk om sparing over 3 år, så kan renta uttrykkast som $3 \times 1{,}03 = 3{,}09$. Anette viser i linje V.50 at ho har ein følelse av at renta heile tida aukar, og verbaliserar svakt ei rentersrente. Det kan vere at dei er på eit sansingsnivå, der dei oppfattar at det er eit mønster, gange med 1,03 for kvart år, men dei er usikre på kva symbol som vil uttrykke den samanhengen. Dei prøver seg med symbolet 3,09, og det neste steget vil vere å sjå at det er symbolet $1{,}03 \times 1{,}03 \times 1{,}03$ som uttrykker det dei er ute etter. Ei slik kunnskapsutvikling kan illustrerast ved hjelp av ei kjede av to epistemologiske trekantar:



Figur 13: Kunnskapsutvikling av eksponentiell vekst.

Gjennom interaksjonssekvensen ser eg teikn til at elevane tenker høgt, og det blir argumentert for den aktuelle løysingsmetoden. Jentene stiller spørsmål både for å klargjere kvarandre sine perspektiv og for å bekrefte at dei tenker likt: ”Men ganger vi det med 1,03, og så ganger vi det svaret med 1,03 igjen?”(linje V.43). Spørsmåla er ekte spørsmål dei ikkje veit svaret på, for eksempel: ”Hadde det ikke blitt det samme om vi ganga det med 3,09?” (linje V.49). Både det å tenke høgt, det å forhandle om ein løysingsmetode og det å stille ekte spørsmål er element som høyrer til i IC-modellen.

Etter kvart som elevane blir ferdige med oppgåva, gjennomgår læraren løysinga på tavla. Læraren startar her med å sjå på korleis ein kan løyse oppgåva ved å først finne ein prosent, og deretter finne beløpet dei har i banken etter eit år. Den følgjande samtalen er tatt ut i frå tavlesekvensen, der læraren lurer på korleis oppgåva kan løysast ved hjelp av ein annan metode (bruk av vekstfaktor):

V.52 Lærar: Og da vil jeg gjerne høre her, for her var det gjort noe annet. 5304,50 kr har jeg nå i banken (etter to år). Hva var det nå dere hadde gjort? Endre?

V.53 Endre: Vi ganga med 1,03.

V.54	Lærar:	Hvorfor gjorde dere det?
V.55	Endre:	Fordi atte (pause). Jeg veit ikke hvordan jeg skal forklare det.
V.56	Peder:	Men du må jo ha over 100, eller 1,0 for å øke da.
V.57	Lærar:	Ja.
V.58	Peder:	Så vi tok liksom, tre fordi det var 3 %.
V.59	Lærar:	Ja. Og 3 % er det samme som tre?
V.60	Endre:	Hundredeler?
V.61	Lærar:	Ja. Og derfor står tretallet på?
V.62	Peder:	Hundredelen?
V.63	Lærar:	Ja. Hundredelsplassen. (Pause). Og da fikk dere til svar? Femtusen?
V.64	Endre:	Firehundre og sekstitre, komma seks tre fem.
V.65	Lærar:	Ja. Og det var en veldig enkel måte. Og dere gjorde dette på alle. Gjorde dere ikke det?
V.66	Elevane:	Ja.

Endre forklarer i linje V.53 at dei brukte 1,03 å gange med. Læraren spør så kvifor dei gjorde det. Her spør han sannsynlegvis etter kvifor dei brukte akkurat talet 1,03, og ikkje for eksempel 1,3 eller 1,003. Det kjem tydelegare fram i linje V.59-V.63, der læraren stiller spørsmål for å få fram at tretalet står på hundredelsplassen. Elevane på si side viser at dei har fått med seg at når vekstfaktoren er eit tal som er over ein, så veks beløpet (linje V.56). Samtidig viser dei ei usikkerheit, ved at Peder seier i linje V.58 at dei "liksom" tok tre fordi det var 3 %. Her har dei sannsynlegvis gjort ei intuitiv kopling, som er rein semiotisk, om at fordi det er snakk om 3 % må det stå 1,03 og ikkje for eksempel 1,05. Samtidig har dei ei forståing om at det må stå eit 1-tal framføre kommaet, fordi pengane i banken skal auke. Elevane knyter her omgrepet "vekstfaktor" opp mot symbolet "1,03", men koplinga til referansekonteksten er svak (jamfør figur 11, s. 47). Dermed vil eg påstå at elevane er på eit sansingsnivå, og dei er på veg opp på eit svakt verbaliseringsnivå. Ut i frå observasjonen tyder det på at sjølv om elevane opererer på eit symboliseringsnivå, har dei ikkje kome seg dit av eigne oppdagingar i dei to første nivåa (jamfør tabell 3, s. 28). Kommunikasjonen mellom læraren og elevane føregår gjennom eit kommunikasjonsmønster som eg tolkar som ei blanding av traktmønsteret og IRF-mønsteret (Wells, 1999). Ved kvart spørsmål elevane svarar på, kjem eit nytt samanhengande spørsmål som fører dei enda nærare det læraren ønskjer at dei skal kome fram til. Her fører kommunikasjonsmønsteret at elevane tippar på kva det er læraren er ute etter, og det oppstår eit "gjekk kva læraren tenker"-mønster.

Noko av årsaka til at elevane manglar ein referansekontekst til å danne koplingar til symbolet 1,03 og omgrepet ”vekstfaktor”, kan ligge i føremålet læraren har med at elevane skal lære det. Det kjem fram i den vidare dialogen læraren har med elevane i klassen:

V.67	Lærar:	Så dere gjorde egentlig sånn her (skriv på tavla), 5000 kr ganger 1,03 ganger 1,03 ganger 1,03. Og da fikk dere det svaret der (skriv 5463,635 kr på tavla). Det gikk veldig fort å regne. Og en veldig lett måte å gjøre det på. Da slipper en veldig mange regneoperasjoner. Sparer veldig mye tid. Gunstig når det er travelt, på prøver og sånt, så er det veldig safe. (Pause). Og det de gjorde, var at de brukte noe som heter for vekstfaktor. […] Det er da en måte vi kan regne prosent på, som er veldig enkel. Det går veldig fort. Det er da at, som han sier, at det vi har i banken, det kan vi si at er 100 %. Og når det øker, med 3 %, så får vi da 103 %. Og hvis vi gjør om det til desimaltall, så blir det?
V.68	Peder:	1,03.
V.69	Lærar:	Ja! Som vi har jobba veldig mye med. Sånn at det er vekstfaktoren. Det gjør at vi kan her regne ut, veldig enkelt og greit. Virker ikke det her greit?
V.70	Peder:	Jo.

Læraren legg her trykk på at bruk av vekstfaktor er ein ”lett måte å gjøre det på” og ”på prøver og sånt, så er det veldig safe” (linje V.67). Ut i frå utsegna til læraren, kan det tyde på at motivet læraren har for at elevane skal lære å bruke vekstfaktor i utrekning av renter, er for at det skal gå raskare og for at elevane skal få riktig svar på prøver. Eit slikt motiv tyder igjen på at undervisninga føregår i eit oppgåveparadigme og gjennom ein oppgåvediskurs, der fokuset er på å rekne mange oppgåver i pensum på kortast muleg tid. I alle fall legg læraren her til rette for at elevane utviklar ei kopling mellom omgrepet ”vekstfaktor”, og legg vekt på at det er ein rask og enkel reknemetode i samanheng med sparing og renter.

Som eg såg i starten av undervisninga, er det eit fokus på at renter blir oppgjeve i prosent per år. I den følgjande samtalen mellom to jenter som arbeider med oppgåve 2, kjem det fram korleis dei arbeider med renteomgrepet.

V.71	Lærar:	Ja. Den neste oppgaven er litt vanskelig. (Les oppgåveteksten). Du får 40 kroner i rente i åtte måneder. Du satte inn 2000. Hvor mange prosent var renten?
V.72	Anne:	Den må vi finne, vi må finne til ett år først.
V.73	Lærar:	Ja. Du må finne ut hvor mye du får i rente på ett år. Og det gjør du ut av det du vet der. Hva er det du vet?
V.74	Anne:	Du deler på..
V.75	Kari:	Du setter inn 2000.
V.76	Lærar:	Du setter inn 2000 ja. Og så får du?
V.77	Anne:	40 ganger åtte måneder.
V.78	Lærar:	40 kroner i rente på åtte måneder.
V.79	Anne:	Da deler du..
V.80	Kari:	Da blir det 20 på fire måneder da?
V.81	Lærar:	Ja, da blir det 20 per fire måneder. Og da vet du at du får i løpet av 12 måneder?
V.82	Kari:	60.
V.83	Lærar:	60 ja. Da er dere på vei. Mhm. Kjempe bra.

Læraren startar interaksjonssekvensen med å lese oppgåva deira høgt. Jentene forsøker vidare å svare på korleis dei kan løyse oppgåva. Dei startar med å sjå på kva informasjon dei har fått i oppgåveteksten (linje V.72-V.76), deretter problematiserar dei oppgåva gjennom proporsjonalitetar (linje V.77-V.82). Dei ser på at $\frac{40}{8} = \frac{20}{4} = \frac{60}{12}$, noko som tyder på at dei antar at det er ein proporsjonalitet i renta. Det ser ut til at det er ei underforstått tematisering av omgrepet renter, der renter blir oppgjeve i prosent per år og at den kan delast opp i mindre delar. Dermed ser eg her eit tematisk interaksjons-mønster, der dei kun ser på ei tolking av oppgåva (Voigt, 1995). Læraren stiller gjennom heile sekvensen korte og presise spørsmål, der eg meiner at det er tydeleg at det er eit spesifikt svar han er ute etter. For kvart spørsmål som blir svart på, kjem han med eit nytt spørsmål som fører vidare framover. Dermed kan det sjå ut som at læraren forsøker å føre dei på riktig spor av løysingsmetoden, som er å finne renta du får i løpet av eit år gjennom å berekne proporsjonalitetar. Til slutt evaluerar læraren jentene, ved å påpeike at dei er på riktig vei. Eit slikt interaksjonsmønster bygger på IRE/IRF-mønsteret, der kvart spørsmål blir gjengjeldt med eit nytt og til slutt evaluert. Elevane gjettar på kva det er læraren ønskjer at dei skal svare (linje V.80), noko som tyder på at kommunikasjonen føregår gjennom ”gjett kva læraren tenker”-mønsteret.

Likeeins i den neste sekvensen, observerer eg dei same interaksjonsmønstra og den same problematiseringa gjennom proporsjonalisering av renta. Her er det tre gutar som jobbar med del b i oppgåve 2, og læraren oppdagar at dei har tolka 2,5 % rente som renta per månad:

V.84	Lærar:	Nei, det er ikke rett det.
V.85	Emil:	Er det rente på et helt år det er snakk om her?
V.86	Lærar:	Ja. altså 2,5 er rente på et helt år.
V.89	Emil:	Åja, jeg trodde det var rente per måned.
V.90	Lærar:	Nei. Husk på det, det sa jeg på mandag, at rente oppgis i prosent per år.
V.91	Emil:	(Litt flau). Ja, jeg vet det, men det var noe sånn uklart her.. (Latter).
V.92	Lærar:	Men da blir det litt anna ja.
V.93	Emil:	Men da må vi bare dele tolv på fire.
V.94	Lærar:	Nei, men husk på det at du har fått rente for tre måneder. Hvor mange måneder er det i ett år?
V.95	Emil:	Ja, da må vi dele 2,5 på fire da, må vi ikke?
V.96	Lærar:	Nei, ja, det kan du gjøre.
V.97	Emil:	Ja, det..
V.98	Lasse:	Det var det jeg sa til deg. […]
V.99	Lærar:	Men, du kan og gjøre det på en annen måte. Du kan ta 36 ganger?
V.100	Emil:	12?
V.101	Lærar:	Gange?
V.102	Ulrik:	2,5?
V.103	Lasse:	Gange det der svaret der, er det ikke?
V.104	Lærar:	Nei, 36 kroner du har fått i rente på tre måneder. Hvor mange tre-måneder er det på ett år?
V.105	Elevane:	Fire.
V.106	Lærar:	Ja. Og da må du gange 36 med?
V.107	Elevane:	Fire.
V.108	Lærar:	Fire. Da har du renten for ett år. Den er 2,5 prosent, av det vi har i banken.

I interaksjonssekvensen over forklarer Emil at han tolka oppgåva som at renta var per månad (linje V.89). Deretter observerer eg at læraren tek styringa, og stiller elevane spørsmål for å få dei på sporet av riktig løysingsmetode. Han presiserer her at rente blir oppgitt i prosent per år (linje V.86 og V.90). Ut i frå det eg observerar, oppstår det ei konflikt når eleven og læraren ikkje deler den same tematiseringa som ligg underforstått i undervisninga. Vidare er det ei direkte matematisering, då den alternative løysingsmetoden til Emil ikkje blir diskutert (Voigt, 1994, 1995). Ut i frå observasjonen blir Emil flau, og i linje V.91 snakkar han det vekk med at det var litt uklart. Likevel er han rask til å finne ei alternativ løysing som han sannsynlegvis trur er i tråd med det læraren ønskjer. Løysinga går ut på å dele tolv på fire (linje V.93). Her antar eg at han tenker på at $3 \times 4 = 12$, og at det dermed er fire tre-månadsbolkar i løpet av tolv månader. Læraren svarar nei, og går rett vidare med å stille eit meir innsnevra spørsmål (linje V.94). Emil tenker vidare og skyt inn at 2,5 må vel delast på fire. Læraren seier i linje V.96 at det går an, men det er ikkje slik han vil at dei skal gjere det (linje V.99). Frå linje V.99 og ut resten av sekvensen, stiller læraren meir og meir innsnevra spørsmål, der elevane kan svare med berre reine talsvar. Ut i frå det føregåande meiner eg at interaksjonen føregår gjennom traktmønsteret. Samtidig ser det ut som at elevane forsøker å tippe på kva det er læraren er ute etter, i eit "gjett kva læraren tenker"-mønster (linje V.100 og V.102). Ut i frå dialogen ser det som at læraren er ute etter at elevane skal kome fram til at dei må gange 36 med fire. Eg antar at det er fordi $4 \times 3 = 12$, og dermed kan dei finne renta som ein får i løpet av eit år. Her blir uttrykket $4 \times 3 = 12$ kopla opp mot uttrykket $4 \times 36kr = X\ kr$, der $4 \sim 4$, $3 \sim 36kr$ og $12 \sim X\ kr$. Læraren og elevane har her eit fokus på proporsjonalitet, og dei held seg i ei forenkla verkelegheit. Verkelegheita er forenkla fordi dei opererer med at det blir sett inn berre eit beløp i løpet av eit år, og dei tenker på renta som noko ein kan gange og dele opp for å få rente etter eit år.

Gjennom observasjonen av undervisninga angåande temaet vekstfaktor, såg eg fleire eksempel på at læraren ønskjer at elevane skal utforske og samarbeide med oppgåvene. I utdraget under er det nokre jenter som jobbar kvar for seg og skriv i bøkene sine, utan at dei samtalar med kvarandre. Læraren ser situasjonen, og kjem bort til dei:

V.109 Lærar:	Klarer dere å samarbeide? Eller sitter dere der bare hver for dere?
V.110 Trude:	Jeg har gjort oppgave a. Det er jo bare å lese av […], og skrive det som står der. Det er ikke akkurat så veldig avansert at en trenger noe hjelp.
V.111 Lærar:	Ja, men, men at jeg vil at dere skal diskutere.

Som eg ser av utdraget over, ser ikkje elevane behovet for å diskutere løysinga av oppgåva. For jentene er det sannsynlegvis ikkje ei problemoppgåve der dei berre skal "skrive det som står der" (linje V.110). Dermed vil det vere enklare for dei å jobbe individuelt sidan dei kjenner til løysingsmetoden. Likevel ønskjer læraren at dei skal samarbeide. Her kan det tyde på at elevane og læraren har ulike syn på læring. Læraren ønskjer at elevane skal kommunisere sine eigne idear og tolkingar av matematikken, medan elevane på si side synes det er enklare eller tilstrekkeleg å berre gjere oppgåvene. Samtidig seier det noko om oppgåvene elevane jobbar med, fordi dei sannsynlegvis ikkje inviterer elevane til å utforske samanhengar og eigenskapar til matematikken i temaet vekstfaktor.

4. 2 Kombinatorikk

Kombinatorikk er ein del av matematisk sannsyn der ein gjer ei oppteljing av mengda mulege utfall i eit utfallsrom, og det gjerast på ein systematisk måte (Vedeld & Venheim, u. å.). Matematikkundervisninga i samanheng med fagtemaet kombinatorikk føregjekk på dag nummer tre, og den var lagt opp slik at elevane jobba i grupper. Her var det ingen rullering som ved dag nummer to, men dei fekk ulike oppgåver gjennom økta. Elevane arbeidde med kortstokkar, terningar og brikker i samanheng med temaet kombinatorikk. I tillegg arbeidde dei med oppgåver frå læreboka. Mellom kvar oppgåve oppsummerte læraren kva resultat elevane hadde fått, og gjekk gjennom eventuelle løysingsmetodar.

I undervisninga som omhandlar kombinatorikk er det å finne ei mengd kombinasjonar, eller rekkefølgjer, og sannsynsfordelinga sentralt. På same måte som ved temaet vekstfaktor er det for nokre av elevane delvis kjent stoff, men for mange er det mykje nytt i temaet kombinatorikk.

4.2.1 Analyse av oppgåver

Her har eg valt ut dialogar på grunnlag av kvaliteten på datamaterialet og det matematiske innhaldet, på same måte som ved fagtemaet vekstfaktor. I samanheng med dei ulike dialogane, arbeider elevane med eit utval oppgåver. Her vil eg presentere dei aktuelle oppgåvene og analysere dei gjennom den epistemologiske trekanten til Steinbring (2006) og til slutt vurdere om oppgåvene er problemløysande eller ikkje.

”Kortkombinasjonar”:
Den første oppgåva går ut på å først undersøke kor mange kombinasjonar ein kan finne med tre ulike kort frå ein kortstokk. Andre del av oppgåva består av å finne kor mange kombinasjonar ein kan lage av fem ulike kort. Her er det truleg tenkt at elevane først

skal bruke dei tre korta, og finne kor mange kombinasjonar ein kan lage ved å flytte dei rundt og prøve seg fram. I neste del av oppgåva er utfordringa at det er fem kort å jobbe med, og målet er sannsynlegvis at elevane skal oppdage at det blir for mange kombinasjonar til at dei kan ”lage” alle saman. Ut i frå ei slik oppdaging er det naturleg at elevane vil sjå at dei treng ein ny og meir effektiv løysingsstrategi, og forsøke å finne den. Om elevane opplever oppgåva slik, vil den stemme overeins med definisjonen på ei problemløysingsoppgåve (Lesh & Zawojewski, 2007). Grunnlaget for mine antakingar her er at eg meiner at det er ei naturleg utvikling å gå i frå ein mindre vanskegrad til ein større, når ein skal utforske mønster i matematikk.

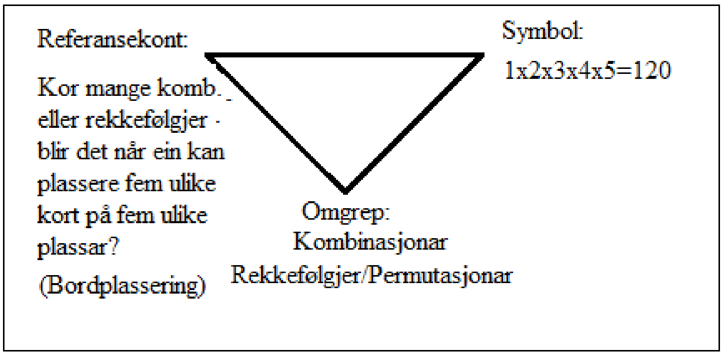
Det er fleire måtar å angripe problemet på. Ein strategi kan vere å tenke på at du har fem kort som skal plasserast på fem tomme plassar. Det første kortet har då fem mulegheiter for å plassere seg, det neste har fire og så vidare. For kvar av dei fem mulege plasseringane av det første kortet er det fire mulegheiter for det neste, dermed blir det 5×4 og ikkje $5 + 4$ mulegheiter. Utrekninga av mengda kombinasjonar til fem ulike kort er vist i figur 14 under.

$$\boxed{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120\ kombinasjonar}$$

Figur 14: Korleis finne mengda kombinasjonar av fem ulike kort.

Ein liknande referansekontekst kan vere å førestille seg at du har fem gjester du skal plassere rundt eit bord, og kor mange kombinasjonar kan ein lage av ei slik bordplassering.

Analysen av oppgåva gjennom den epistemologiske trekanten er illustrert i figur 15 under. Her er referansekonteksten er på kor mange måtar kan dei fem korta plasserast på fem ulike plassar, symbola er dei vist i figur 14 og omgrepet er ”kombinasjonar” (alternativt ”rekkefølgjer” eller ”permutasjonar”).

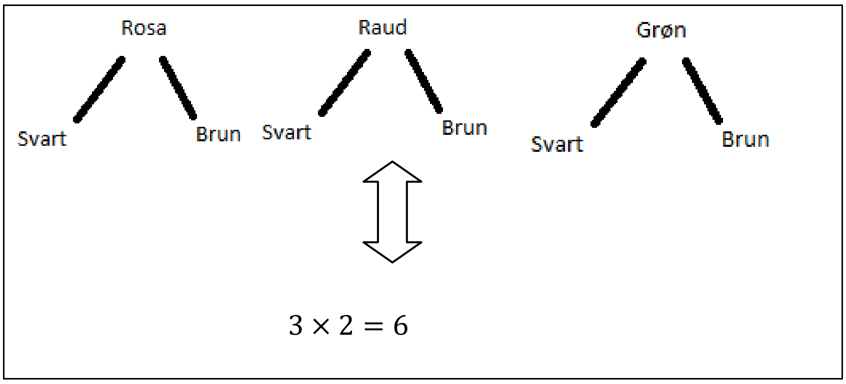


Figur 15: Den epistemologiske trekanten til kor mange kombinasjonar ein kan lage av fem ulike kort.

”Kleskombinatorikk”:

Oppgåve nummer to handlar om å undersøke kor mange kombinasjonar ”Anne” kan lage av sine tre overdelar og to bukser. Her legg læraren fram på ein overhead tre brikker (rosa, raud og grøn) som representerer overdelane, og to brikker (brun og svart) som representerer buksene. Deretter får elevane i oppgåve å diskutere korleis ”Anne” kan gjere ulike val av påkledning.

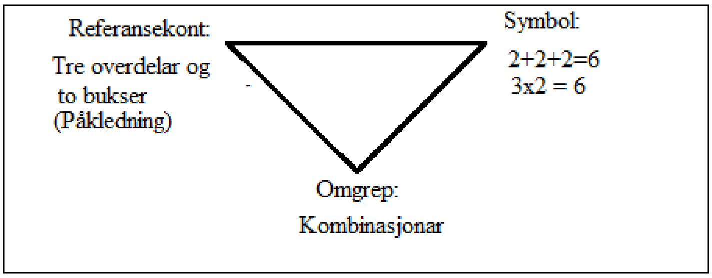
Referansekonteksten i oppgåva er påkledning, der dei ulike brikkene representerer dei ulike klesplagga. Løysinga er at det er tre mulege overdelar gangar to mulege bukser, fordi for kvar overdel er det to mulegheiter for val av bukse. Her kan altså elevane danne koplingar mellom omgrepet ”kombinasjonar”, påkledningskonteksten og symbola $3 \times 2 = 6$. I figur 16 under blir referansekonteksten kopla opp mot symbola.



Figur 16: Ulike kleskombinasjonar.

Elevane må likevel ikkje bruke reknestykket $3 \times 2 = 6$ for å løyse oppgåva. Det er fullt muleg å tenke seg at kvar av buksene kan kombinerast med kvar av toppane, og då telje opp dei mulege kombinasjonane: $2 + 2 + 2 = 6$.

Tolkinga av oppgåva kan oppsummerast ved hjelp av den epistemologiske trekanten i figur 17 under. Her er referansekonteksten påkledning, symbola kan vere både multiplikasjon og addisjon og omgrepet er ”kombinasjonar”.



Figur 17: Kleskombinatorikk gjennom den epistemologiske trekanten.

”Urettferdig kortspel”:

Den siste oppgåva går ut på at elevane skal spele eit enkelt kortspel, for så å avgjere om kortspelet er rettferdig eller ikkje. Gjennom spelet og berekning av kombinasjonar, blir sannsynsomgrepet belyst. Elevane blir her delt i grupper på to og to, der dei blir einige om kven som er elev A og kven som er elev B. Gruppa får så utdelt to raude og to svarte kort frå ein kortstokk. Elev A har i oppgåve å stokke og blande korta, og elev B noterer poenga. Sjølve spelet går ut på at elev B trekk to tilfeldige kort. Dersom B trekk eit raudt og eit svart kort, får B poeng. Om B trekk to raude eller to svarte kort, får A poeng. Spelet varer heilt til førstemann har nådd 20 poeng.

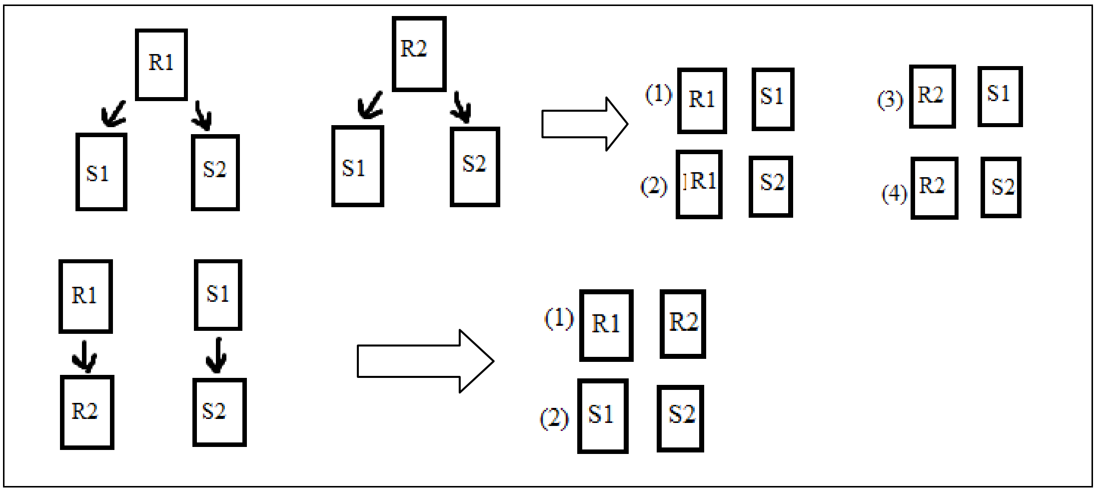
Målet med spelet er antakeleg at elevane skal oppdage korleis sannsynsfordelinga og kombinatorikken er ved korttrekkinga. Ved første trekk er det to mulege utfall: raudt eller svart kort. For å få to like kort er det av dei tre gjenverande korta eit gunstig kort, og for å få to ulike kort er det att to gunstige kort av tre mulege. Sannsynsfordelinga blir som følgjer når det første trekket er gjort:

(1) $\frac{1}{3} \times 100 =$ 33% sjanse for å trekke to like kort.

(2) $\frac{2}{3} \times 100 =$ 66% sjanse for å trekke to ulike kort.

Figur 18: Sannsynsfordeling til urettferdig kortspel.

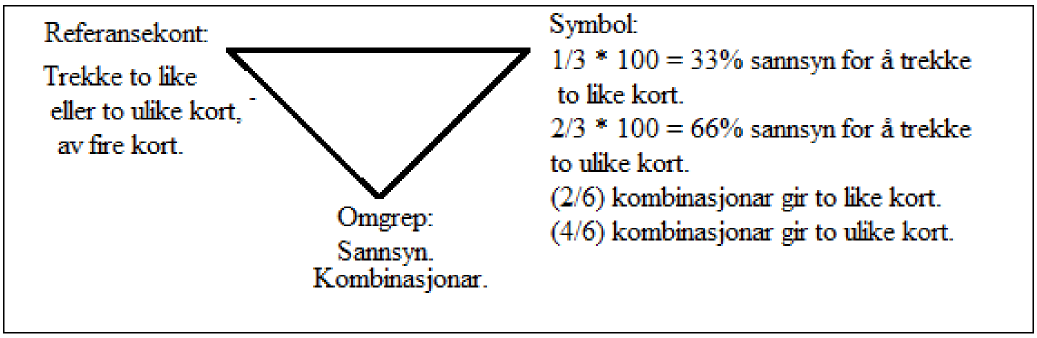
Ein annan måte å tenke på er at det er fire av seks kombinasjonar som gir to ulike kort, og det er to av seks kombinasjonar som gir to like kort. I figur 19 under er dei ulike kombinasjonane illustrert, og ein kan sjå at det er dobbelt så stor sjanse for å trekke to ulike kort som to like.



Figur 19: Kombinatorisk løysing av ”Urettferdig kortspel”, der R=raudt og S=svart, og vi får $\frac{4}{6}$ kombinasjonar som gir to ulike kort og $\frac{2}{6}$ kombinasjonar som gir to like kort.

Dei fire korta er her elevane sin referansekontekst, der dei har konkrete objekt dei undersøker og finn eigenskapane til spelet gjennom. Det er fleire omgrep i samanheng med oppgåva, det kan vere ”sannsyn” der du ser på kva kort ein kan trekke først og kva mulegheiter og kva sjanse som gjenstår i trekk nummer to. Sannsyna kan uttrykkast ved symbola i figur 18. Det kan vidare vere snakk om kva ”kombinasjonar” ein kan lage av dei fire korta, der det er fire kombinasjonar som gir to ulike kort og to kombinasjonar som gir to like kort (jamfør figur 19).

Koplinga mellom dei ulike hjørna i den epistemologiske trekanten kan framstillast som i figur 20 under.



Figur 20: Den epistemologiske trekanten til oppgåva ”Urettferdig kortspel”.

Samla analyse av oppgåvene:

For fleire av elevane kan det ut i frå observasjonen sjå ut til at oppgåvene fungerar som problemløysingsoppgåver. Mange av elevgruppene har ei usystematisk tilnærming til for eksempel den første oppgåva, der dei skal finne mengda kombinasjonar av tre og fem ulike kort. Elevane flyttar tilfeldig rundt på korta, og skriv ned dei ulike kombinasjonane etter kvart. Dei prøver seg fram, og finn etter kvart ut at det kan bli vanskeleg å finne alle kombinasjonane med ein slik framgangsmåte. Her oppdagar dei at det er behov for å finne ein alternativ og meir effektiv løysingsmetode. ”Kleskombinatorikk”-oppgåva er det kanskje fleire elevar som ”tek” tidleg, noko eg antar er fordi dei har jobba med ei slik oppgåveformulering før. Bakgrunnen for antakinga er at det etter mine erfaringar, er ein svært vanleg måte å problematisere kombinatorikk på. I tillegg finn eg eit eksempel i læreboka, der ”Ida” har bukser i to fargar som ho vil kombinere med sine tre ulike toppar (Torkildsen & Maugesten, 2009, s. 64). Dermed vil ikkje oppgåva vere ei problemløysingsoppgåve for alle elevane, fordi om dei har sett på problemet tidlegare vil ikkje løysingsmetoden vere ukjent. Den siste oppgåva derimot, er meir prega av at den er ei problemløysingsoppgåve, fordi elevane veit ikkje kva dei skal sjå etter. Under observasjonen ser eg at elevane får utdelt kvar sine kortstokkar og læraren går gjennom spelereglane. Likevel blir det ikkje påpeika av læraren at elevane skal sjå etter noko spesielt. Etter kvart legg læraren inn nokre hint rundt om på gruppene, der han spør om dei kan legge merke til noko spesielt med spelet. Dermed må elevane forske på kva det eventuelt kan vere. Spørsmåla til læraren kan her samanliknast med Polya (1945/1988) sine første ledd i problemløysings-prosessen, der han rår læraren til å framheve det ukjente i oppgåva og føresetnadane rundt situasjonen.

Dei tre oppgåvene har alle konkrete og reelle referansar. Elevane jobbar med kort frå ein kortstokk og brikker, samtidig som det er snakk om situasjonar med påkledning og kortspel der elevane kan kjenne seg igjen og relatere det til si eiga verkelegheit. Likevel tolkar eg det som at dei to første oppgåvene ikkje høyrer heilt heime i eit reint undersøkingslandskap, fordi dei er ferdigformulerte (Skovsmose, 2003). Samtidig høyrer dei ikkje heime i eit reint oppgåveparadigme (Alrø & Skovsmose, 2002), der dei er meir undersøkande enn ”øvingsoppgåve”-relatert. Eg vel å plassere oppgåvene om kortkombinatorikk og kombinatorikk av klede i det undersøkande læringsmiljøet til

Folke Larsen, Hein og Wedege (2006) som er vist i tabell 2 på side 16. Her er oppgåvene i eit undersøkingslandskap med ein fastare struktur, og læringsmiljøet er både prega av undersøkande og oppgåvebasert arbeid. Den siste oppgåva, det urettferdige kortspelet, meiner eg hører heime i eit reinare undersøkingslandskap då det ikkje er formulert klare spørsmål til elevane som fortel kva dei skal finne. Dermed plasserer eg den siste oppgåva i Skovsmose (2003) sitt undersøkingslandskap med reelle referansar, som er vist i tabell 1 på side 15.

4.2.2 Analyse av dialogar

Dei fleste elevane brukar etter det eg kan observere ein løysingsstrategi for å finne kombinasjonane til tre ulike kort frå ein kortstokk, ved å flytte rundt på dei. Nokre vel å systematisere ved å ta eitt og eitt kort fremst i rekka, og variere på dei to andre. Vidare observerer eg at alle elevane teiknar opp dei seks ulike kombinasjonane, før dei går vidare med problemet med å finne kombinasjonane til fem ulike kort frå kortstokken. I den følgjande interaksjonssekvensen arbeider tre jenter med å finne dei forskjellige kombinasjonane til dei fem korta. Hittil har dei flytta rundt på korta og notert. Læraren er innom gruppa, og han forsøker å sette dei på sporet av ein meir systematisk løysingsstrategi:

K.01	Lærar:	Prøv å sette dere ned og diskuter hvordan dere kan finne et system for å finne de ulike kombinasjonene. (Læraren går vidare).
K.02	Lise:	Tolv, tretten..
K.03	Mari:	Vi bytter de bakerste?
K.04	Lise:	Ja. (Pause). Tre, tre, tolv, A, tretten. Så bytter vi hva?
K.05	Mari:	De?
K.06	Lise:	De ja.
K.07	Mari:	Ok.
K.08	Lise:	Tre..
K.09	Mari:	Men en kombinasjon, hvis vi bytter de etterpå altså.
K.10	Eili:	Det blir veldig mange..
K.11	Lise:	Tre, tre, tolv. Nei, det blir ikke tolv da.. […]
K.12	Mari:	Nei, så har vi tolv og så tretten.
K.13	Lise:	Så er det tre, tre, her. (Pause). Ja.
K.14	Mari:	Men skal vi ikke bytte de to her da?
K.15	Lise:	Vi får jo, vi gjør det jo sånn, helt til vi får den gamle. (Jentene flyttar rundt på korta til dei får ein kombinasjon dei har frå før – "den gamle").
K.16	Mari:	Åja. Ok.
K.17	Lise:	Tre, tre. Nei, tre, A. (Pause). Så bytter vi de igjen.

K.18	Mari:	De her sånn?
K.19	Lise:	Nei, de her.
K.20	Mari:	Åja.
K.21	Eili:	Men kongen er ikke her fremst.
K.22	Mari:	Nei, men nå er vi på kongen sin veg, vi må gå en hel runde med absolutt alle. (Kongen ligg fremst, og dei flyttar på dei fire andre korta).
K.23	Eili:	Åh. Ok.
K.25	Mari:	Det kan ta en stund ja..

I linje K.01 kan det tolkast som at læraren ser at elevane ikkje kjem vidare i utforskings-prosessen, og derfor kjem han med ei utfordring eller eit hint om at dei treng å finne ein meir effektiv løysingsstrategi. Elevane på si side ser ut til å ta i mot utfordringa, og forsøker å systematisere framgangsmåten for å finne dei ulike kombinasjonane av korta. Dei vel å ta eit og eit kort fremst i rekka, og roterer rundt på dei fire andre korta (linje K.03). Lise argumenterer vidare i linje K.15 at strategien er å halde det første kortet på plass heilt til dei har fått rotert på dei fire andre i ein heil ”runde”. Her kunne det kanskje vori lettare for dei å sjå samanhengen mellom mengda kombinasjonar til tre kort og til fem kort, om dei på førehand hadde berekna mengda kombinasjonar til fire kort.

I interaksjonsprosessen mellom jentene kan eg observere at dei tenker høgt, samtidig som dei er aktive i ein felles utforskingsprosess. Gjennom forhandling får dei fram kva perspektiv dei har om idear til løysingsmetodar (Alrø & Skovsmose, 2002), og dei prøver ut ideane sine. Samtidig ser eg at elevane ikkje umiddelbart ser nokon passande løysingsmetode. Dermed vil oppgåva vere ei form for problemløysingsoppgåve for dei. Etter kvart ser dei at løysingsmetoden deira kanskje ikkje er effektiv nok, noko eg kan sjå i linje K.25, der Mari seier at det kjem til å ta lang tid. Utforskingsprosessen til jentene kan samanliknast med Polya (1945/1988) sin leddvise problemløysingsprosess. Jentene forsøker å forstå kva oppgåva går ut på, og læraren gir dei hint om korleis dei kan gå fram. Vidare utviklar dei ein plan som dei prøver ut, og når dei ser på resultata og arbeidet sitt ser dei at planen ikkje er bra nok. Dei vender seg i neste omgang til læraren, og han avviser ikkje løysingsmetoden dei har jobba med, men forsøker å hjelpe dei litt på veg med eit hint om å systematisere arbeidet sitt. Jentene jobbar vidare med ein strategi eg tolkar som ein dei meiner er meir effektiv, der dei vel å ikkje skrive opp alle dei forskjellige kombinasjonane men berre telje dei:

K.26 Mari: Skal vi bare telle egentlig?
K.27 Lise: Ja. En, to, tre.. (Pause). 16, 17. Ok, 17. (Pause). Så skal vi bytte.
K.28 Mari: Jeg bytta nettopp, tror jeg.
K.29 Lise: Åja.
K.30 Mari: Men jeg er ikke helt. (Pause). Sjekk..
K.31 Lise: Men sjekk med forrige. (Pause). 13, 12.
K.32 Mari: Ja, men da er det sånn.
K.33 Lise: 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30. Sånn. Nei.
K.34 Eili: Jeg fikk 20.
K.35 Lise: ..38, 39, 40, 41.
K.36 Mari: Men det blir samme, du kan ikke ha..
K.37 Lise: 42, 43. (Pause). Sånn!
K.38 Mari: Er det 43? (Pause). Men jeg tror det er bare 41..
K.39 Lise: Enda mer.
K.40 Mari: Enda mer? Men vi har jo gått en hel runde? Men.. (Pause). Ok, så starter vi der.
K.41 Alle: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21.
K.42 Mari: Men nå har vi gått en runde. […] Hva var det vi starta med da?
K.43 Lise: Vi starta med 3, 7, dame og A. (Pause). Men det her går jo ikke, det blir jo det samme hele tiden.
K.44 Mari: (Oppgitt). Åh, det her var vanskelig!

Elevane forsøker her å berre telje kor mange kombinasjonar dei kan finne etter kvart, utan å notere ned (linje K.26). Gjennom interaksjonssekvensen kjem det fram at jentene ikkje har heilt kontroll på kor mange kombinasjonar dei finn (linje K.33, K.34 og K.41). Det kan sjå ut til at dei blir forvirra angåande kvar dei starta, kor langt dei er komne og når dei har gått ein heil runde (linje K.40 og K.42). Dialogen er dermed prega av forvirring, og dei forhandlar med kvarandre om kor mange kombinasjonar dei finn utan at dei blir einige. Lise oppdagar i linje K.43 at metoden deira ikkje fungerer, og Mari seier oppgitt i linje K.44 at det er vanskeleg. Her kan det tyde på at jentene oppdagar at heller ikkje ein slik løysingsmetode vil føre dei lenger framover. Dermed må dei tenke nytt, og dei har behov for å finne ein meir produktiv måte å tenke på. Her kjem dei tilbake igjen til Polya (1945/1988) sitt første ledd i problemløysingsprosessen. Etter fleire liknande forsøk, der dei skiftar på kva slags kort dei startar med og måtar å telje på, kjem dei fram til ei ny vending i arbeidet:

K.45 Lise: Men nå må vi tenke her, de siste minuttene.
K.46 Mari: Ok, ok.
K.47 Eili: Det blir fem.. (pause), jeg tror at..
K.48 Mari: (Ivrig). Vi må gjøre det på samme måten som den håndhilse-tingen.

K.49	Alle:	(Ivrige). Ja, ja!
K.50	Mari:	Ok. Da later vi som de her er noen personer da.
K.51	Lise:	Ja.
K.52	Eili:	Hei, hei og hei.
K.53	Lise:	Og da blir det én mindre for dem å hilse på.
K.54	Eili:	Og så blir det her hei, hei og hei.
K.55	Mari:	Nå vet jeg det, nå vet jeg det! Ja! (Pause). Først gjør vi sånn her.
K.56	Lise:	Ja?
K.57	Mari:	Alle går en runde. Og så gjør vi det sånn at de to er der, og så går vi en runde med dem. Og så lar vi de tre være der, og så går vi en runde med dem. Og så bytter vi på den som er foran. Og så gjør vi det en gang til.

I linje K.48 observerer eg at Mari prøver seg på ein ny løysingsstrategi, der ho forsøker å relatere problematikken med å finne kor mange kombinasjonar fem ulike kort gir, til ein ny situasjon. Ho prøver å samanlikne kor mange rekkefølgjer ein får av korta, med korleis fem ulike personar kan handhelse på kvarandre. Sannsynlegvis er handhelsinga ein problematikk dei har vore borti før, slik at det er ein kjent situasjon for dei. Ideen blir teken godt i mot av resten av gruppa (linje K.49), og dei forsøker vidare å overføre handhelseproblematikken til korta. Jentene gir i linje K.50 til K.54 korta personleg-domar, der dei lar korta ”helse på kvarandre”. Samtidig beheld dei noko frå dei tidlegare løysingsstrategiane, der dei lar eit kort ”stå i ro” medan dei roterer på dei resterande fire. Ut i frå at jentene koplar saman dei to ulike situasjonane handhelsing og kort-kombinasjonar, meiner eg at dei gjer eit godt forsøk på å finne ei passande løysing der dei forsøker å kople den ukjente situasjonen saman med ein som er kjent. Her koplar jentene dei to referansekontekstane om kort og personar saman med omgrepet ”kombinasjonar” eller ”rekkefølgje”, og forsøker dermed å utvide den omgrepsmessige relasjonen til referansekonteksten.

Det neste steget vil vere å kople relasjonen opp mot dei aktuelle symbola, men dei kjem seg ikkje vidare. Ulikskapane mellom dei to referansekontekstane er at medan kombineringa av ulike kort er ein situasjon med multiplikasjon, er handhelsinga ein additiv situasjon. Den situasjonen jentene tenker på, er erfaringsmessig ei vanleg problemformulering som har til hensikt å telje opp kor mange handhelsingar det vil bli om fem personar skal helse på kvarandre. Dermed vil ikkje dei to referansekontekstane mediere same omgrep. Jentene er her på eit sansingsnivå, og dei forsøker å verbalisere mønsteret dei kan sjå ved å flytte rundt på korta (Lee, 1996). Eg tolkar det her som at dei ser ein likskap mellom at dei held i ro eit og eit kort medan dei roterer på resten, med det at ein person helsar på resten av gjestene. Dessverre blir utforskingsprosessen avbroten av at læraren skal oppsummere oppgåva på tavla. Jentene får dermed ikkje forska meir på den nye løysingsstrategien. Gjennom dei tre interaksjonssekvensane kan eg observere at elevane tenker høgt, dei stiller ekte spørsmål (linje K.3, K.4 og K.26) og dei gjer greie for sine perspektiv (linje K. 15 og K.57). I tillegg føregår det forhandlingar gjennom ein felles utforskingsprosess. Dermed er har sekvensane undersøkande kommunikasjonselement frå IC-modellen til Alrø og Skovsmose (2002).

Ei anna elevgruppe, som består av jentene Tine og Helene, forsøker også å finne ein passande løysingsstrategi til problemet med dei fem korta. Ut i frå min observasjon ser det ut til at elevane startar med den same strategien som jentene over, for å finne dei ulike kombinasjonane til tre og i neste omgang fem ulike kort. Dei tek eitt og eitt kort fremst i rekka, og bytar på dei fire andre relativt systematisk. Arbeidsprosessen i det første stadiet, der dei roterer dei tre og etter kvart fem korta, føregår for det meste individuelt. Under kjem eit utdrag av samtalen mellom jentene, der dei samanliknar resultata sine og diskuterer korleis dei skal jobbe vidare ut i frå det dei har funne ut:

K.58 Tine: Hvis vi tar de her, denne rekkefølgen (peikar på dei fem korta), og tar å regner det ut ikke sant?
K.59 Helene: Mhm. Så når vi har tatt den, så tar vi den når vi har ordnet alt, så tar vi den etterpå (peikar på korta og viser til at dei tar eit og eit kort fremst).
K.60 Tine: Ja, det var det jeg tenkte. (Skriv i boka si). Helene? Er det fire, nei fem muligheter på..?
K.61 Helene: Jeg har flere.
K.62 Tine: Ja, jeg vet at det er flere, jeg vet det er flere. De ligger sånn, og sånn, og så kan de jo bytte om på hverandre. Åh.(Pause). Seks, sju, åtte.. […] (Lengre pause der jentene skriv i bøkene sine).
K.63 Helene: (Jobbar for seg sjølv og tastar på kalkulatoren). Det blir 120 muligheter.
K.64 Tine: (Overraska). Har du funnet det ut?
K.65 Helene: Du skal finne en formel, ikke sant, og da finner vi en formel som går på antall. Og da tar du, siden det er fem tall, en gange to gange tre gange fire gange fem. Hvis det hadde vært fire, da hadde det bare blitt en til fire.
K.66 Tine: Ok, da er det en gange to gange to gange tre gange fire gange fem?
K.67 Helene: Ja.
K.68 Tine: Og hvor mye var det?

K.69 Helene: 120.
K.70 Tine: Men hvis det er tre muligheter da, er det en ganger to ganger tre da?
K.71 Helene: Ja.
K.72 Tine: Ok. (Trykker på kalkulatoren). En gange to gange tre gange fire gange fem. (Skriv i boka). […] Nå skal jeg sjekke hvor mange det blir hvis det er ti. Hallo! (Tastar på kalkulatoren). Oi! (Overraska). Men hvis man han ti forskjellige kort, så får man..(ser på kalkulatoren). Åh! Hæ!

I starten av interaksjonssekvensen tolkar eg at jentene lokaliserar kvarandre sine perspektiv (linje K.58 til K.62). Dei blir her tilsynelatande einige om at dei ønskjer å løyse oppgåva på same måten, og tenker høgt medan dei arbeider. I linje K.63 jobbar Helene for seg sjølv, og ut i frå det eg kan observere kan det tyde på at ho ser at oppgåva dei jobbar med har ein samanheng med reknestykket $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. Helene prøver ut løysingsstrategien på kalkulatoren, og fortel Tine at løysinga på oppgåva er 120 kombinasjonar. I linje K.65 forklarer Helene til Tine korleis ho tenker når ho vel å løyse oppgåva slik. Helene fortel at ho ville finne ein formel, og at ho då trengte ein formel som går på ”antall”, noko som tyder på at ho såg at det var behov for ein meir produktiv løysingsmetode. Her kjem det fram at Helene har danna seg ei kopling mellom omgrepet ”kombinasjonar” eller ”rekkefølgjer”, med symbola $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Dessverre er det vanskeleg å sjå korleis ho dannar koplinga, fordi ho sit å tenker for seg sjølv. Dei matematiske koplingane til Helene kan samanliknast med den epistemologiske trekanten illustrert i figur 15 på side 59. Her medierer ”kombinasjons”-omgrepet mellom symbola $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ og referanse-konteksten der dei skal finne kor mange kombinasjonar det blir av fem ulike kort.

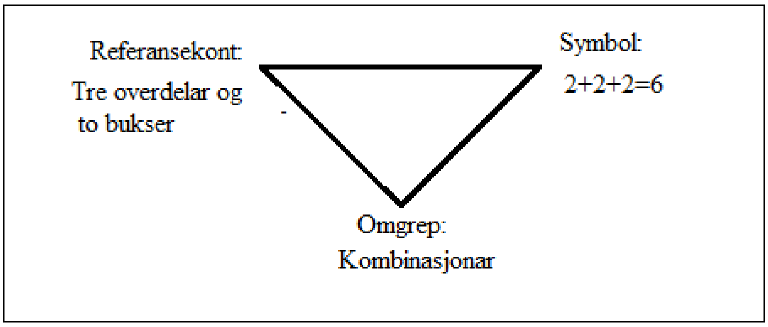
Koplinga blir her mediert gjennom referansekonteksten, som er dei fem korta og dei ulike kombinasjonane. Vidare tolkar eg det som at Helene har kome seg opp på eit symboliseringsnivå, etter at ho har sansa mønsteret i oppgåva. I linje K.65 forklarer Helene at fordi dei har fem kort, er det ”en gange to gange tre gange fire gange fem”, der ho uttrykker seg gjennom eit verbaliseringsnivå. Tine gjentar eller reformulerar det Helene forklarer, sannsynlegvis for å bekrefte at ho forstår det riktig (linje K.66). Vidare i linje K.70 spør Tine ”Men hvis det er tre muligheter da, […]?”, noko som tyder på at ho forsøker å lokalisere og bekrefte løysingsmetoden. I tillegg er det å stille spørsmål av ei slik form, typisk for ein undersøkande tilnærming til matematikken (Alrø &

Skovsmose, 2002; Skovsmose, 2003). Ei utforskande tilnærming kan til slutt observerast mot slutten av sekvensen (linje K.72), der Tine spør seg kva som skjer om det er ti ulike kort. Gjennom dialogen ser eg dermed fleire av elementa i IC-modellen; lokalisering, reformulering, forhandling og høgttenking. Samtidig viser jentene at dei utforskar problemoppgåva, og stiller undersøkande spørsmål.

Ei anna oppgåve elevane jobbar med i samanheng med kombinatorikk, går ut på å kombinere kle. Oppgåva består av fem brikker av ulik farge, og læraren presenterer dei som to bukser (svart og brun) og tre overdelar (rosa, raud og grøn). Etter at elevane har fått litt tid til å diskutere på gruppene kor mange kombinasjonar "Anne" kan lage av kleda sine, blir oppgåva gjennomgått i fellesskap. Læraren spør klassen kor mange kombinasjonar "Anne" kan ha, for å kome i kontakt med elevane. Etter ei lita stund rekker Sara opp handa:

K.73	Lærar:	(Sara har armen i veret). Sara?
K.74	Sara:	Seks.
K.75	Lærar:	Seks? Hvorfor har hun mulighet for seks? […]
K.76	Sara:	Fordi (pause), rosa kan gå med brun og svart. Da blir det to.
K.77	Lærar:	Ja?
K.78	Sara:	Og rød med brun og svart. Da blir det fire. Og grønn med brun og svart. Da blir det seks.
K.79	Lærar:	Da blir det seks. Ja. (Pause). Silje, du hadde oppe hånden?
K.80	Silje:	12.
K.81	Lærar:	12? Hvorfor går det 12?
K.82	Silje:	Fordi det går an med seks forskjellige topper, og med buksene (mumle).
K.83	Lærar:	Nå henger jeg ikke helt med.
K.84	Silje:	Hvis du har bare overdelen,
K.85	Lærar:	Ja?
K.86	Silje:	Så går det an med seks forskjellige muligheter.
K.87	Lærar:	Med overdelen?
K.88	Silje:	Ja. (Pause).
K.89	Lærar:	Hm.

Sara svarar i linje K.74 at "Anne" har seks mulegheiter for å kombinere kleda sine. Læraren spør ho vidare kvifor det er akkurat seks stykk. Her antar eg at læraren spør for å undersøke perspektivet til Sara og om ho forstår kvifor det blir slik, i og med at ho har svart riktig. Frå linje K.76 til K.78 forklarer Silje framgangsmåten, og ho viser her kva matematisk forståing ho har av oppgåva. Eg tolkar det som at Sara ser på ein overdel i gangen, og undersøker kva ho kan kombinere dei med. Ein rosa overdel kan kombinerast med den svarte eller den brune buksa, noko som gir to kombinasjonar. Her ser det altså ut til at Sara tenker logisk, og legg saman dei ulike mulegheitene etter kvart. Koplingane til Sara er illustrert i figur 21 under.



Figur 21: Sara kombinerar overdelane med kvar av buksene.

Forklaringa til Sara tyder på at ho har kome seg frå eit sansingsnivå til eit verbaliseringsnivå, der ho forsøker å forklare kva mønster ho ser. Om ho i tillegg er kome på eit symbolnivå, får eg ikkje vite fordi eg ikkje får sett kva ho eventuelt har notert. Gjennom argumenta hennar kan det likevel tyde på at Sara har danna eller er på veg til å danne koplingar mellom referansekonteksten og symbola $3 \times 2 = 6$, gjennom omgrepet ”kombinasjonar”.

Læraren svarar Sara med å evaluere forklaringa hennar i linje K.79, og konkluderer med at svaret er riktig. Deretter rekker Silje opp handa, og læraren spør ho kva ho meiner om oppgåva (linje K.79). Silje seier at svaret er tolv, men her forstår ikkje læraren korleis ho tenker (linje K.80 og K.81). Her tolkar eg det som at læraren spør rett og slett fordi han lurer på kva ho meiner med tolv kombinasjonar, og spørsmålet blir då eit ekte spørsmål for å kunne lokalisere perspektivet til eleven. Eg observerer her at Silje blir spak i stemma, og det blir vanskeleg å høyre forklaringa hennar. Det at Silje mumlar kan tyde på at ho er usikker på sitt eige svar, og dermed ikkje vågar å vere tydeleg på korleis ho tenker. Likevel forklarer ho i linje K.84 og K.86 at ”Anne” har seks mulegheiter berre med overdelane. Læraren viser her usikkerheit, og det tyder på at han ikkje heilt veit korleis han skal respondere (linje K.89). Det kan tyde på at Silje ser på at sidan det er tre overdelar så blir det $1 \times 2 \times 3 = 6$ mulegheiter for å kle på seg. Deretter vil det vere $6 \times 2 = 12$ mulegheiter med dei to buksene. Eit slikt resonnement kan tyde på at Silje tolkar oppgåva annleis enn læraren og Sara gjer. Ho koplar sannsynlegvis den nye referansekonteksten saman med symbola frå situasjonen i den førre oppgåva, der det var $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ mulege kombinasjonar.

Vidare i interaksjonssekvensen blir fleire av elevane i klassen engasjert. Det kan sjå ut til at Silje si alternative tolking av oppgåva fører til at fleire av elevane ser på den med nye auger. Ein av gutane kommenterer til Silje sine seks mulegheiter med overdelane, at det går ikkje an å ha på seg alle på same tid. Læraren opnar då opp for ein diskusjon, der han vil at dei skal finne ut av kva dei kan og ikkje kan kombinere. Ein elev svarar då at ved å ta ei og ei bukse, kan ein kombinere med overdelane for å ha på seg eit lag med klede. Deretter kjem læraren med eit spørsmål som utartar seg til å bli ei utfordring til tolkinga av oppgåva:

K.90	Lærar:	Kan du ha en rosa, en rosa overdel som bukse?
K.91	Elevar:	Nei.
K.92	Lærar:	(Jon har armen i veret). Jon?
K.93	Jon:	Nei. Men det går an hvis den svarte er stillongs og den brune bukse, Og så er det, så er det rosa topp, det røde sånn tunika og så den grønne jakke.
K.94	Lærar:	Ja? Da har du på deg alt samtidig. Ja. (Pause). Da har du én mulighet.
K.95	Jon:	Ja.
K.96	Lærar:	Hvis du da ikke får stillongsen utenpå buksen da. (Latter). Jeg vet ikke. (Pause). Er du enig Silje?
K.97	Silje:	Ja.. […]
K.98	Lærar:	Tenkte du at de her kan være i ulik rekkefølge eller? Var det det du tenkte?
K.99	Silje:	Ja.
K.100	Lærar:	Men det har ikke noe med ulike kombinasjoner av det du kan ha på deg. (Pause). Så det er greit. Så hun Anne kan velge mellom det der. Å ha på seg. [...]

I interaksjonssekvensen over diskuterer elevane korleis oppgåva kan forståast. Den tidlegare koplinga mellom referansekonteksten med påkledning, og dei tilhøyrande symbola får ein ny vri. Ein ny referansekontekst der det går an å ta på seg fleire lag av klede, skaper koplingar til nye symbol. Silje er eit eksempel på at ikkje nødvendigvis alle elevane forstår oppgåva på same måte, og det viser at det kan dukke opp problem når ei oppgåve eller ein matematisk samanheng blir ”tatt for gitt” av nokre av deltakarane i klasserommet (Voigt, 1995). Det at læraren og elevane har skapt eit matematisk tema rundt den aktuelle oppgåva, kan danne ei konflikt når nokre av elevane ikkje er innforstått med temaet (Voigt, 1994, 1995). I tilfellet over la læraren opp til at elevane skulle bli einige om oppgåvekonteksten. Det førte det til at nokre av elevane gjekk utanom den ”gitte” ramma og førte ein diskusjon eller ei forhandling om tolkinga av oppgåva, og korleis den skal løysast. Diskusjonen utviklar seg her til ein ny referansekontekst og nye symbol, der det er snakk om å ha på seg alle kleda på ein gong (linje K.93 og K.94). Det at elevane og læraren går utanom den ”gitte” ramma fører her til at interaksjonen er meir undersøkande, der elevane kjem med forslag og det blir diskutert ulike idear. Heilt til slutt i sekvensen vender læraren seg til Silje igjen, der han spør om ho er einig i at ”Anne” ikkje kan ha på seg alle kleda på ein gong (linje K.96). Han ønskjer tydelegvis å forsikre seg om at ho heng med på løysingsmetoden, og at ho har fortsått korleis dei andre tenker.

Den siste oppgåva eg tek føre meg, er den der elevane spelar det ”urettferdige kortspelet”. Spelet går ut på at elev A og B skal konkurrere om å få flest poeng ved å trekke to like eller to ulike kort av fire kort. Av det eg kan observere i samanheng med oppgåva, tyder det på at læraren ønskjer at elevane skal oppdage at det er noko mystisk med spelet. Han spør fleire av elevgruppene om dei kan sjå noko med spelet, men dei fleste seier berre at det er kjedeleg. Likevel oppfordrar læraren elevane til å diskutere kvifor det er så lett for elev B å vinne heile tida. Eg observerer at elevane ofte treng eit hint frå læraren om å undersøke om det kan vere ein grunn til at elev B vinn heile tida. Først etter at læraren har ført dei inn på sporet, går dei laus på å studere korta dei trekk av.

Etter at elevane har forska på kva som kan vere grunnen til at elev B stadig vinn kortspelet, går han gjennom problemet på ein overhead. I eit tilfelle rekk ikkje læraren ein gong å gjere klart utstyret før ein ivrig elev, Anders, ønskjer å fortelje kva som er ”hemmelegheita” med kortspelet. Anders uttrykker at det er fleire mulegheiter for å trekke to ulike kort enn to like: ”Jeg vet det! Det er flere muligheter, det er flere muligheter med rød og svart, enn med… Enn med rød og rød, eller svart og svart”. Her tyder det på at eleven har danna koplingar mellom referansekonteksten og kombinatorikk- og sannsynsomgrepet med oppgåva, der han sannsynlegvis framstiller sannsynet ved å sjå kva kombinasjonar ein kan trekke. Læraren evaluerar svaret til eleven, og seier at det er riktig. Likevel tyder det på at læraren ønskjer at elevane skal forklare nærare kvifor det er større sjanse for å trekke to ulike kort, men elevresponsen let vente på seg. Dermed startar læraren å demonstrere på overheaden korleis ein kan få ulike kombinasjonar ved å trekke kort. Forklaringa til læraren tilsvarer illustrasjonen i figur 19 på side 61, der han viser korleis korta kan kombinerast på ulike måtar. Til slutt spør han elevane kva det betyr, og han får som svar at det er seks ulike kombinasjonar i alt. Ut i frå den vidare interaksjonen mellom læraren og elevane, tyder det på at det ikkje var det svaret han ville fram til. Læraren spør vidare kor mange mulegheiter det er om han trekk eit kort først:

K.101 Kari:	Tre.
K.102 Lærar:	Ja, tre muligheter. (Pause). Men, hva betyr det med sannsynligheten? (Pause). Hva betyr det for sannsynligheten, det at hvis jeg trekker et svart kort er det én mulighet for å trekke et svart kort, og to muligheter for å trekke et rødt kort? (Pause). Hva betyr det for sannsynligheten? (Pause). Hva betyr det?
K.103 Kari:	At det er dobbelt så sannsynlig at B får poeng, enn at A får det?
K.104 Lærar:	Ja. (Pause). Det er dobbelt så sannsynlig. (Pause). Hvor mange prosent? (Pause). (Trude har handa i veret). Trude?
K.105 Trude:	50 % mer sannsynlig, eller?
K.106 Lærar:	Ja, enn å få, enn at A får poeng. Men hvis du skal fordele sannsynligheten for at, hvis jeg trekker et svart kort, hvor stor er sannsynligheten for at jeg trekker et svart kort igjen? (Pause). Det er noen som har sagt det. (Pause). Petter?
K.107 Petter:	33 %?
K.108 Lærar:	33 %. Og for rødt er det?
K.109 Petter:	66.
K.110 Lærar:	66. (Pause). Så det spillet her, var rett og slett helt urettferdig.[…]

Interaksjonssekvensen over utartar seg til å bli ein interaksjon mellom læraren og elevane basert på traktmønsteret (Bauersfeld, 1988). Læraren får som svar at det er tre mulegheiter for neste trekk, etter at han har trekt eit kort. I linje K.102 kjem læraren med meir og meir informasjon då han ikkje får nokon elevrespons. Deretter snevrar læraren inn spørsmålet, og spør etter kor stort sannsynet er for å trekke to ulike eller to like kort. Kari spør, eller gjettar, i linje K.103 om det er dobbelt så stort sannsyn for å B å få poeng enn at A får det. Læraren bekreftar det, og svarar med å stille eit enda meir spesifisert spørsmål om kor mange prosent det er. Heller ikkje no ser det ut til at han får det svaret han er på jakt etter, og spør igjen kor stort sannsyn det er for å trekke to svarte kort (K.106). Då svarar Petter at det er 33 %. Læraren er fornøgd og han spør vidare etter prosentsjansen for å trekke eit svart og eit raudt kort. Ut i frå at det er tydeleg at læraren er på jakt etter eit spesifikt svar, utviklar det seg interaksjonsmønster av den tradisjonelle typen. Oppgåva var frå starten av relativt open, der det vart lagt opp til at elevane skulle gjere eigne oppdagingar. Etter kvart forsøker læraren å lokke fram eit spesifikt svar, då elevane ikkje svarar det han tydelegvis er ute etter. Etter kvart blir spørsmåla meir og meir snevre, noko som tyder på at læraren og elevane føl traktmønsteret. Samtidig spør han spørsmål eg antar at han veit svaret på og blir det mønster av ”gjett kva læraren tenker” (Alrø & Skovsmose, 2002). Elevane gjettar for eksempel i linje K.105 der Trude spør ”50 % mer sannsynlig, eller?”, og i linje K.107 der Petter gjettar på at det kan vere 33 %.

6. DISKUSJON

Målet med studien min er å undersøke samanhengane mellom situasjonar og kommunikasjonsmønster, og mellom situasjonar og elevane si kunnskapsutvikling i matematikk. I det følgjande kapittelet vil eg sjå nærare på resultata til studien, og kva dei kan bety. Eg vil starte med å oppsummere kva resultat som er oppnådd i kvart av dei to tema, vekstfaktor og kombinatorikk, for så å samanlikne dei. Deretter vil eg kople resultata opp mot tidlegare forsking og studien min sine forskingsspørsmål. Til slutt vil eg sjå på studien i sin heilskap, der eg ser på metodikken og korleis analyseverktøyet har fungert.

6.1 Vekstfaktor

I undervisninga som gjekk under fagtemaet ”Vekstfaktor”, har eg gjennom analysen sett på at oppgåvene elevane arbeider med stort sett kan plasserast under Skovsmose (2003) sitt tredje læringsmiljø (tabell 1 s. 15). Her høyrer matematikkoppgåvene til i eit oppgåveparadigme, med referansar til ei semi-verkelegheit. Læreboka framstiller oppgåvene som at elevane skal bruke bestemte framgangsmåtar for å finne riktig svar (Torkildsen & Maugesten, 2009). Noko som her fører til at fleire av elevane ikkje ser behovet for å diskutere og samarbeide om oppgåvene, slik læraren vil at dei skal. Ved å analysere matematikkoppgåvene opp mot Steinbring (2006) sin epistemologiske trekant, ser eg at referansekonteksten er sparing og renter, medan omgrep og symbol varierer mellom renter, vekstfaktor og eksponentiell vekst. Gjennom temaet vekstfaktor ser eg i fleire av dialogane at elevane og læraren har ulike epistemologiske trekantar som utgangspunkt. I nokre tilfeller der læraren kommuniserer med elevane rundt ei oppgåve, har dialogen utgangspunkt i at han koplar saman referansekonteksten sparing, omgrepet vekstfaktor og det tilhøyrande symbolet. Elevane på si side koplar saman sparing, renter og symbola for renteutvikling som dei bereknar for kvart år (jamfør figur 12, s. 49). Her tolkar eg observasjonane slik at det er eit gap mellom det læraren vil at elevane skal gjere og elevane sitt utgangspunkt, der dei manglar samanhengen mellom sin løysingsmetode og læraren sin. Det viser seg vidare at når elevane i klassen opererer med omgrepet og symbolet for vekstfaktor, har dei ikkje danna dei koplingane som trengst for å forstå kva vekstfaktor faktisk er. Dei manglande koplingane mellom omgrep og symbol tolkar eg det som eit teikn på at elevane har behov for å vidareutvikle den epistemologiske trekanten sin. Men elevane er ikkje i stand til å gjere dei algebraiske operasjonane som trengst for å kunne fullføre kunnskapsutviklinga. Det at elevane har hol i kunnskapsutviklinga av omgrepet ”vekstfaktor”, ser vidare ut til å ha ein samanheng med at dei ikkje klarer å oppnå alle dei tre oppfatningsnivåa til Lee (1996). Eg ser i fleire tilfelle at elevane er på veg opp på både sansings-, verbaliserings- og symboliseringsnivået, men resultata tyder på at elevane ikkje når heilt opp på dei ulike oppfatningsnivåa.

Resultata tyder vidare på at læraren tidleg legg til rette for at elevane skal danne koplingar mellom omgrepet renter og at renter oppgjevast i prosent per år. Her blir det lagt opp til at renta blir rekna ut proporsjonalt gjennom året, noko som fører til at elevane og læraren opererer i ei forenkla semi-verkelegheit. Ei slik underforstått matematisk tematisering fører her til at alternative løysingsmetodar eller alternative tolkingar av oppgåvene blir avviste (Voigt, 1994, 1995). Det viser seg at ikkje alle elevane er innforstått med læraren (og læreboka) si tematisering av oppgåvene, noko som fører til at elevane gjettar på kva det er læraren vil at dei skal kome fram til.

Det kjem fram gjennom typen interaksjonsmønster i undervisninga, at læraren har spesifikke tankar om kva det er elevane skal utføre i løpet av dei aktuelle undervisnings-timane. Interaksjonen føregår for det meste gjennom traktmønsteret og IRE/IRF-mønsteret (Bauersfeld, 1988; Cazden, 2001; Wells, 1999). Traktmønsteret oppstår hyppig i undervisninga som omhandlar vekstfaktor. Det kjem tydeleg fram gjennom resultata at læraren ønskjer at elevane skal løyse oppgåvene på ein spesifikk måte, der han ofte stiller elevane meir og meir innsnevra spørsmål. Vidare opplever eg gjennom observasjonen at elevane ofte tippar på kva det er læraren spør etter. Spesielt når dei arbeider med å rekne renter som proporsjonalitetar, spør læraren spørsmål der elevane tippar på kva svaret skal vere. Dermed tyder resultata på at kommunikasjonen mellom læraren og elevane ofte føregår gjennom ”gjett kva læraren tenker”-mønsteret (Alrø & Skovsmose, 2002). Elles kjem det fram at læraren ofte veit svaret på spørsmåla sine, der han stiller leiande spørsmål til elevane. Gjennom dei ulike dialogane evaluerar læraren elevane sitt arbeid. Likevel kjem det fram nokre element frå IC-modellen til Alrø og Skovsmose (2002), når elevane jobbar sjølvstendig av læraren.

6.2 Kombinatorikk

Oppgåvene elevane arbeider med i samanheng med fagtemaet kombinatorikk, har reelle og konkrete referansar. Her får elevane bruke kort, terningar og brikker til å løyse oppgåvene med. I analysen er det tre aktuelle oppgåver som blir diskutert. Fordi to av oppgåvene, ”kortkombinasjon” og ”kleskombinasjon”, legg til rette for undersøkande arbeid og samtidig er ferdigformulerte, valte eg å plassere dei i Folke Larsen, Hein og Wedege (2006) sitt undersøkande læringsmiljø i tabell 2 side 16. Den siste oppgåva i samband med analysen, ”urettferdig kortspel”, valte eg å plassere i Skovsmose (2003) sitt undersøkingslandskap (rute 6 i tabell 1, s. 15), fordi elevane ikkje fekk noko klar beskjed om kva dei skulle gjere.

Det viser seg gjennom analysen av resultata at dei fleste elevane brukar ein tilfeldig undersøkande framgangsmåte for å finne dei ulike kombinasjonane til fem kort frå ein kortstokk. Læraren gir hint fram mot at elevane bør finne ein måte å systematisere arbeidet sitt på, for å kunne kome vidare. Gjennom observasjonen kan eg sjå at elevane forsøker å tilnærme seg ein systematisk løysingsstrategi på fleire måtar. Gjennom dei ulike forsøka, er elevane innom dei fire problemløysingsledda i Polya (1945/1988) sin problemløysingsprosess. Elevane er vidare innom ulike oppfatningsnivå, der dei aller fleste kjem seg på eit sansingsnivå. Nokre av elevane kjem seg deretter opp på eit verbaliseringsnivå og eit symboliseringsnivå, der dei tydeleg ser og forklarar mønstra i oppgåvene ved hjelp av ord og symbol. Under oppgåveløysinga der elevane skal kombinere ulike klesplagg, kjem det fram at ikkje alle elevane har den same tematiseringa av oppgåva. Her utviklar det seg ein større diskusjon om korleis oppgåva kan tolkast, der læraren oppfordrar elevane til å diskutere rammene i oppgåva.

Kommunikasjonsmønstra i dei ulike dialogane som omhandlar kombinatorikk høyrer for det meste til i IC-modellen, noko som betyr at kommunikasjonen er av undersøkande art. Her observerer eg omtrent alle elementa i modellen, der elevane stiller utforskande spørsmål, dei forhandlar, undersøker kvarandre sine perspektiv og så vidare. Eg observerer i tillegg at læraren stiller undersøkande spørsmål, oftare enn han forklarar elevane kva dei skal gjere. Likevel har læraren ein tendens til å kommunisere med elevane gjennom traktmønsteret i nokre av gjennomgangane på tavla.

6.3 Ei samanlikning av dei to fagtema vekstfaktor og kombinatorikk

Gjennom det matematiske temaet vekstfaktor arbeider elevane med ein referansekontekst i ei semi-verkelegheit. Her må dei sjå føre seg korleis oppgåvene har samanheng med verkelege hendingar, der referansekonteksten berre er på papiret. Oppgåvene som omhandlar vekstfaktor legg heller ikkje opp til at elevane skal diskutere, og kommunikasjonen mellom elevane og læraren er stort sett tradisjonell. I motsetnad vekstfaktorundervisninga er matematikkoppgåvene av undersøkande art i kombinatorikkundervisninga, samtidig som konteksten er reell og konkret. Her diskuterar både elevane og læraren mulege matematiske samanhengar, samtidig som dei undersøker mulege løysingsmetodar gjennom undersøkande kommunikasjonsmønster.

Elevane er i fleire tilfeller i samanheng med vekstfaktorundervisninga på eit symboliseringsnivå, men det kan sjå ut til at elevane ikkje har full forståing for kva dei arbeider med. Resultata tyder på at læraren plasserer elevane på eit symboliseringsnivå, utan at dei først har vore innom sansings- og verbaliseringsnivået. Eit slik hopp meiner eg kan føre til nettopp det at elevane får eit hol i kunnskapsutviklinga av omgrepet ”vekstfaktor”, som resultata viser. I undervisninga om kombinatorikk kan det tyde på at elevane utviklar ei betre forståing rundt dei matematiske operasjonane og symbola, enn ved arbeidet med vekstfaktor. Det kan sjå ut til at dei konkrete referansane fungerer betre i medieringa mellom symbol og referansekontekst, der elevane dannar grundigare koplingar mellom dei ulike elementa i den epistemologiske trekanten. I forhold til undervisninga om vekstfaktor er det ikkje like mange som kjem seg opp på eit symboliseringsnivå, men til gjengjeld arbeider dei grundigare med forståinga på sansings- og verbaliseringsnivået.

For meg ser det vidare ut til at undervisninga som omhandlar vekstfaktor er meir lukka enn den som omhandlar kombinatorikk. Eit eksempel på det er den matematiske tematiseringa av oppgåvene, der renter blir tematisert som at det alltid blir oppgjeve i prosent per år. Her blir alternative tolkingar elevane gjer, avvist som gale av læraren. I undervisninga som omhandlar kombinatorikk, viser resultata at læraren er meir open for alternative tolkingar. Her blir det i gjennomgangen av oppgåva der elevane skal kombinere ulike klede, opna opp for ein diskusjon i klassen om korleis dei kan tolke rammene for oppgåva. Læraren gir ikkje inntrykk av at det berre fins ein korrekt løysingsmetode i samband med kombinatorikk, på same måte som i vekstfaktor-undervisninga.

Vidare i analysen av vekstfaktorundervisninga ser eg teikn til det ”jaget” som hører med i oppgåvediskursen, der elevane skal øve seg på visse matematiske prosedyrar fram mot prøver og eksamen. Læraren presiserer fleire gonger at å bruke vekstfaktor til å berekne kor mykje dei sparar i banken, både er ein tidsmessig effektiv metode og den er ”safe” å bruke på prøver. Her tolkar eg det som at han meiner at det er den tryggaste og enklaste metoden, for å få riktig svar på oppgåvene. Samtidig viser det seg at læraren har problem med å få elevane til å diskutere oppgåveløysing og framgangsmåtar her. I arbeid med kombinatorikkoppgåvene er det derimot ikkje noko problem å få elevane til å samarbeide og diskutere. Her legg læraren fram at det er viktig at elevane veit at om dei på prøver eller eksamen viser at dei kan systematisere informasjonen i oppgåva og vise at dei ser korleis dei kan kombinere elementa, kan det vere like bra som å rekne ut svaret. Resultata tyder på at læraren legg mykje meir vekt på at elevane skal forstå kva dei gjer i arbeidet med kombinatorikk, der det ikkje på same måten som ved arbeidet med vekstfaktor blir lagt vekt på at metodane er raske og effektive.

6.4 Tidlegare forsking og forskingsspørsmåla

Resultata til studien min tyder på at elevane sin interaksjon seg imellom ofte kan vere av undersøkande karakter, sjølv om læraren sin kommunikasjon med dei er av meir tradisjonell karakter. Slike resultat stemmer med Steinbring og Nührenbörger (2009) sine forskingsresultat. Dei ser at elev-elev interaksjon har ein tendens til å ope diskutere matematisk kunnskap, medan lærar-elev interaksjon styrer seg meir etter ei oppfatning om at læraren allereie innehar den matematiske kunnskapen som elevane skal lære. Dermed vil interaksjonen mellom læraren og elevane basere seg på at læraren veit kva elevane skal gjere, og dei må berre finne ut kva det er.

I samanheng med at elevane utviklar den omgrepsmessige betydinga av matematiske teikn og symbol og generaliserar matematiske mønster, vil eg vise til eit resultat i Wæge (2007) si doktorgradsavhandling. Wæge ser at bruk av konkretar i undervisninga kan vere med på å legge til rette for at matematiske omgrep både blir tydeleggjort og meir tilgjengeleg for elevane. Når elevar brukar konkretar til å leite etter mønster og system, for så å generalisere eit problem, vil det kunne bidra til ei auka forståing for symbola si betyding og kva det vil seie å generalisere. Eg ser gjennom resultata i min studie noko av det same som Wæge viser til. Det tyder på at elevane har lettare for å utvikle matematisk forståing for det dei arbeider med i undervisninga som omhandlar kombinatorikk. I vekstfaktorundervisninga derimot, ser det ut til at elevane har hol i kunnskapsutviklinga av omgrepet ”vekstfaktor”. Gjennom analysen ser eg dermed at bruk av konkretar (kort og brikker) som ein del av referansekonteksten, kan vere med på å gjere det lettare for elevane å mediere mellom teikn/symbol og referansekonteksten. Samtidig som det gjer det lettare for dei å generalisere matematiske mønster. Samtidig som konkretane knyter matematikken nærare verkelegheita til elevane, meiner eg at resultata viser at dei er med på å skape den refleksive samanhengen mellom matematikkundervisninga og elevane sin aktivitet som Yackel (1995) beskriv viktigheita av. Den matematiske aktiviteten til elevane føregår rundt konkretane, der det blir skapt ein sosial kontekst mellom elevane på gruppene.

Som tidlegare nemnt påpeikar Scherer og Steinbring (2006) at det er nødvendig å sjå på kva situasjonar og forhold i samband med klasseromsinteraksjonen, som er med på å sentrere undervisninga om elevane eller læraren. Cazden (2001) på same måte som Scherer og Steinbring, legg vekt på at det er viktig å forstå korleis undervisninga kan sentrerast rundt elevane og støtte dei i deira læring. Eg ser gjennom resultata til studien at når elevane arbeider med konkrete referansekontekstar, blir undervisninga meir open enn ved arbeid med matematikkoppgåver i ei semi-verkelegheit. Ei meir open undervisning der læraren har som mål at elevane skal forstå, tyder på at er med på å støtte elevane si læring då dei har mulegheiter til å forske på eiga hand. Samtidig ser eg av resultata at ei open matematikkundervisning kan vere med på å sentrere undervisninga om elevane. Her kan dei i større grad vere med på å forme undervisninga og kome med eigne idear, enn om det er læraren som styrer og bestemmer alt. Undervisninga som omhandlar vekstfaktor, blir mykje styrt av læraren der han gjennom dei tradisjonelle kommunikasjonsmønstra leiar elevane dit han ønskjer at dei skal. Dermed blir undervisninga sentrert om læraren i staden for elevane, og det vil vere usikkert om elevane utviklar den matematiske kunnskapen sin i riktig retning.

Studien sitt problemområde er å studere korleis ulike matematiske tema og kontekstar kan vere med på å påverke kva kommunikasjonsmønster som oppstår i undervisninga og korleis elevane utviklar matematisk kunnskap. Resultata tyder på at det er ein samanheng mellom typar oppgåver, kva referansekontekst elevane jobbar med, kva kommunikasjonsmønster som oppstår og korleis dei utviklar matematisk kunnskap. I forhold til det første forskingsspørsmålet, "Korleis påverkar ulike tema og kontekstar i matematikkundervisninga kommunikasjonsmønster som oppstår?", kan eg identifisere ulike trekk i forhold til openheita til undervisninga og tydelegheita til referanse-konteksten. I samanheng med fagtemaet vekstfaktor føregår undervisninga på ein tradisjonell måte, med ei overvekt av tradisjonelle kommunikasjonsmønster. Undervisninga som omhandlar fagtemaet kombinatorikk er meir retta mot undersøkande undervisning, og det er ei overvekt av undersøkande kommunikasjonsmønster. Det tyder her på at til meir konkret konteksten rundt matematikkoppgåvene er, til meir open er undervisninga. Samtidig blir det i den opne undervisninga betre lagt til rette for kommunikasjonsmønster av ein undersøkande type. Når undervisninga derimot har ei mindre openheit og referansekonteksten er mindre handfast, tenderar det til å bli meir tradisjonelle kommunikasjonsmønster. Ut i frå resultata er matematikkundervisninga meir open når elevane arbeider med problemløysande oppgåver, samtidig som læraren har eit mål om at dei skal forstå matematikken. Når oppgåvene føregår i ei semi-verkelegheit og læraren har eit mål om at dei skal gjere mest muleg oppgåver, er undervisninga meir lukka der det er klare føringar på kva det er elevane skal gjere.

Når det gjeld det andre forskingsspørsmålet, "Korleis påverkar ulike tema og kontekstar i matematikkundervisninga elevane si kunnskapsutvikling og forståing i matematikk?", tyder resultata på at når undervisninga føregår rundt reelle kontekstar er det lettare for elevane å utvikle den matematiske kunnskapen sin. Når undervisninga føregår rundt reine tal og symbol i ei semi-verkelegheit, tyder det på at det er ei større utfordring for elevane å undersøke og ei større utfordring for læraren å legge til rette for ei undersøkande undervisning. I undervisninga som omhandlar kombinatorikk får elevane konkrete referansekontekstar som er med på å legge betre til rette for ei mediering mellom omgrep og symbol, og for kunnskapsutvikling. Undervisninga som føregår rundt renter og vekstfaktor har ikkje nokon konkret referansekontekst, og koplingane i elevane sine epistemologiske trekantar er ufullstendige. Eller så har elevane her brot i kunnskapsutviklinga si. I den samanheng meiner eg at det tyder på at det krevjast eit større forarbeid for at elevane skal vere i stand til å arbeide undersøkande med reine tal og symbol. I følgje Lee (1996) handlar matematikk, og spesielt algebra, om å identifisere og generalisere mønster. Ved å trene elevane i å identifisere og generalisere algebraiske mønster ved hjelp av konkretar (brikker eller liknande) på eit tidleg tidpunkt, meiner eg at dei vil ha eit større grunnlag for å undersøke og danne koplingar mellom omgrep, referansekontekst og reine tal- eller symbolmønster seinare.

6.5 Studien sin metodikk

Eg har gjennom ein kvalitativ studie sett på om det er ein samanheng mellom situasjonar, kommunikasjonsmønster og elevane si kunnskapsutvikling i ein matematikkklasse. Her har det blitt brukt passiv observasjon som metode, saman med bilde- og lydbandopptak. Eg ønskjer å påpeike at eg verken kan eller har som mål om å gjennom ein slik studie fange opp kompleksiteten som eksisterer i den aktuelle klassen si matematikkundervisning. Samtidig ser eg at det er svært vanskeleg å få med seg alt som skjer i undervisninga, då det heile tida oppstår ulike situasjonar overalt i klasserommet. Gjennom analysen har eg vore nøydd til å plukke ut dei delane av datamaterialet som kan brukast vidare til å svare på forskingsspørsmåla, noko som gjer at analysen bygger på ein liten del av undervisninga. Mykje av grunnen til at eg ikkje kunne bruke delar av datamaterialet er at det til tider kan vere vanskeleg å høre elevane, både på bilde- og lydbandopptaka. Elevane har ein tendens til å mumle, i tillegg til at det er ein del bakgrunnsstøy frå resten av klassen på opptaka. Slike problem meiner eg at blir vanskeleg å unngå, utan at eg som forskar påverkar undervisningssituasjonen. Noko eg kunne gjort for å forbetre datamaterialet og forskingsresultata, er å intervjue elevane eller å samle inn det skriftlege arbeidet deira. Dermed kunne eg fått eit betre grunnlag for analysen av kunnskapsutviklinga deira. Samtalar med læraren kunne vidare synleggjort betre kva intensjonar han har med undervisninga, og korleis han tenker når han stiller spørsmål og samhandlar med elevane. Likevel meiner eg at eg gjennom data-innsamlinga og analysen har plukka opp vesentlege forskjellar mellom undervisninga av dei ulike fagtema. Gjennom studien har eg har sett at undervisninga føregår ulikt over ein mindre tidsperiode, med den same læraren og i den same klassen.

Analyseverktøyet eg brukar i studien min består av eit teoretisk grunnlag av ulike kommunikasjonsmønster og ulike undervisningslandskap. I tillegg brukar eg Steinbring (2006) sin epistemologiske trekant saman med Lee (1996) sine tre oppfatningsnivå, til å analysere elevane si kunnskapsforståing og utvikling. Eg meiner at verktøyet har fungert godt, då eg både har kunne analysere kva som føregår i kommunikasjonen mellom elevane og læraren og mellom elevane. Samtidig har verktøyet hjelpt meg til å forstå korleis elevane utviklar den matematiske kunnskapen sin. I den samanheng ønskjer eg å minne lesaren på at det er mine eigne subjektive tolkingar som ligg til grunn for analysen. Ved å vise til utdrag frå ulike dialogar, håpar eg at eg får auka truverda til studien.

7. KONKLUSJON OG PERSPEKTIVERING

I studien min studerer eg samanhengane mellom situasjonar, kommunikasjonsmønster og elevane si kunnskapsutvikling i matematikkundervisninga. Mi hypotese var at "kontekst i samanheng med fagtema og oppgåvetypar har ei viktig rolle både for korleis kommunikasjonen føregår i klasserommet, og for korleis elevane utviklar sin kunnskap". Mi viktigaste datakjelde er transkripsjonar av bilde- og lydbandopptak frå seks undervisningssekvensar. Resultata tyder på at det er samanheng mellom ulike situasjonar i klasserommet, kva interaksjonsmønster som oppstår og korleis elevane utviklar matematisk kunnskap. Konteksten til arbeidsoppgåvene viser seg å ha betyding for kor godt elevane utviklar kunnskap, der epistemologiske trekantar og kjeder av epistemologiske trekantar er meir fullstendige når konteksten er mest muleg reell og konkret. Samtidig er det ein samanheng mellom konteksten og dei kommunikasjons-mønstra som oppstår. Det kan tyde på at til meir reell og konkret konteksten til matematikkoppgåvene er, til meir undersøkande er kommunikasjonsmønstra i matematikkundervisninga. Når matematikkoppgåvene er tradisjonelle og held seg i ein semi-verkeleg kontekst, tyder resultata på at det hindrar læraren i å oppnå diskusjon og samarbeid blant elevane, samtidig som elevane har problem med å utvikle fullstendige koplingar mellom omgrep, symbol og referansekontekst.

Ved å studere ein matematikklærar og klassen hans, meiner eg at eg har identifisert interessante element i undervisninga som kan vere av interesse både for matematikk-lærarar og for lærarutdanninga. Som Voigt (1995) og Bauersfeld (1988) påpeikar, er som regel ikkje lærarane klar over kva kommunikasjonsmønster dei utviklar i matematikkundervisninga. I tillegg meiner eg av eiga erfaring, at det kan vere for lite fokus i lærarutdanninga på viktigheita av kommunikasjonen mellom læraren og elevane. Studien kan i den samanheng vere med på å synleggjere kva betyding dei ulike mønstra har for matematikkundervisninga, og kva samanheng dei har med situasjonar i undervisninga og elevane si kunnskapsutvikling. Det er viktig at matematikklærarane er klar over korleis dei samhandlar med elevane sine, slik at dei betre kan legge til rette for læring og utvikling av matematisk kunnskap. For meg vil heilt klart studien ha ei betyding for korleis eg tenker på og planlegg mi eiga undervisning. Ein av grunnane til at eg valte å fokusere på kommunikasjonsmønster og læring i matematikkundervisninga, er nettopp på grunnlag av at eg ønskte å lære meir om emnet. Eg har blitt mykje meir merksam på kor viktig det er at eg som lærar er klar over korleis eg kommuniserar med elevane, slik at eg ikkje leier dei fram mot ei førehandsbestemt løysing. Gjennom analysearbeidet ser eg at det er viktig at det er elevane og ikkje læraren som styrer undervisninga, slik at elevane har mulegheit til å forske på matematiske samanhengar på sin eigen måte. Resultata frå studien tyder på at gjennom opne oppgåver har elevane større mulegheiter til å gjere eigne oppdagingar, noko som kan føre til at dei utviklar den matematiske kunnskapen sin på ein betre måte. Dermed vil det vere viktig for meg i framtida å fokusere matematikkundervisninga rundt opne matematikkoppgåver, der det blir lagt til rette for ein undersøkande kommunikasjon i klasserommet. Ut i frå resultata på studien, tyder det på at det er viktig å få meir kunnskap omkring forskingsområdet. Her viser det seg at matematiske tema og kontekstar kan ha ein påverknad på interaksjonen i klasserommet og korleis elevane lære. Det betyr at matematiske tema og kontekstar har ei sentral rolle i matematikkundervisninga, og det er då viktig å forske vidare på det. Vidare kunne det vert interessant å sjå på om kommunikasjonsmønstra i matematikkundervisninga er med på å påverke elevane si kunnskapsutvikling i matematikk.

Til slutt meiner eg at analyseverktøyet eg brukar i studien, kan vere eit nyttig verktøy for andre lærarar å bruke i undervisningssamanheng. Eg synes verktøyet fungerar godt til å analysere matematikkoppgåver og samhandlingar i klasserommet. Verktøyet kan vere til hjelp både for å forstå elevane si kunnskapsutvikling og til å planlegge undervisninga, der det kan vere nyttig å på førehand sjå kva som kan vere med på å mediere mellom teikn/symbol og referansekontekstar. Som Doerr (2006) ser på i sin studie, er det viktig at lærarane er forberedt på korleis elevane kan tenke og tilnærme seg matematisk kunnskap i undervisninga, slik at dei betre kan forstå elevane og stille dei ”riktige” spørsmåla som vil føre elevane framover i si kunnskapsutvikling.

LITTERATURLISTE

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education. Intention, reflection, critique.* (Vol. 29). London: Kluwer Academic Publications.

Bartolini Bussi, M. G. (1994). Theoretical and empirical approaches to classroom interaction. I R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Red.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (s. 121-132). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. I D. A. Grouws, T. J. Cooney & D. Jones (Red.), *Effective mathematics teaching* (s. 27-46). Reston, VA: NCTM & Lawrence Erlbaum.

Begle, E. G. (1979). *Critical variables in mathematics education*. Washington, DC: The Mathematics Association of America and the National Council of Teachers of Mathematics.

Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsning. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 51-68). Bergen: Fagbokforlaget.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Cazden, C. B. (2001). *Classroom discourse. The language of teaching and learning.* (2nd ed.). Portsmouth, NH: Heinemann.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research methods in education*. London, New York: Routledge Falmer.

Doerr, H. M. (2006). Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models. *The international Journal on Mathematics Education (ZDM) 38*(3), 255-268.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Dysthe, O. (2001). Sosiokulturelle teoriperspektiv på kunnskap og læring. I O. Dysthe (Red.), *Dialog, samspel og læring* (s. 33-72). Oslo: Abstrakt forlag.

Farrugia, M. T. (2007). *The use of a semiotic model to interpret meanings for multiplication and division.* Paper presentert på CERME 5. Lasta ned 12.05, 2010, frå http://ermeweb.free.fr/CERME5b/WG8.pdf

Folke Larsen, A., Hein, M., & Wedege, T. (2006). Undersøgende læringsmiljø i matematik. *MONA, 4*, 7-20.

ForskningsetiskeKomiteer. (2006). Forskingsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Lasta ned 11.10, 2009, frå http://www.etikkom.no/retningslinjer/NESHretningslinjer/06

Hessen, A. (u. å.). Renter. Lasta ned 22.04, 2010, frå http://www.matematikk.org/artikkel/vis.html?tid=67226&within_tid=67223

Kunnskapsforlaget. (u.å). Ordnett. Lasta ned 04.05, 2010, frå http://www.ordnett.no

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskingsintervju* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation.* New York: Cambridge University Press.

Lee, L. (1996). An Initiation into algebraic culture through generalization activities. I N. Berdnarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (s. 87-106). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. I F. K. J. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, s. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Mason, J. (1998). Asking mathematical questions mathematically. Lasta ned 15.09, 2009, frå http://people.math.jussieu.fr/~jarraud/colloque/mason.pdf

Mellin-Olsen, S. (1990). Oppgavediskursen. I G. Nissen & J. Bjørneboe (Red.), *Matematikundervisning og demokrati. Initiativet vedrørende matematikundervisning* (s. 47-64). Roskilde: IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.

Mertens, D. M. (2005). *Research and evaluation in education and psycology. Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods* (2. utg.). London: Sage Publications, Inc. .

Palincsar, A. S. (1998). Social constructivist perspectives on teaching and learning. *Annual Review of Psychology, 49*, 345-375.

Polya, G. (1988). *How to solve it. A new aspect of mathematical method.* (First Princeton Science Library ed.). Princeton: Princeton University Press. Originalen utgitt i 1945.

Robson, C. (2002). *Real world research* (2. utg.). Oxford: Blackwell Publishing.

Scherer, P., & Steinbring, H. (2006). Noticing children's learning processes - Teachers jointly reflect on their own classroom interaction for improving mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 157-185.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I D. Grouws (Red.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning.* (s. 334-370). New York: MacMillan.

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I O. Skovsmose & M. Blomhøy (Red.), *Kan det virkelig passe? Om matematiklæring* (s. 143-157). København: L&R Uddannelse.

Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*, 157-189.

Steinbring, H. (2000). Interaction analysis of mathematical communication in primary teaching: The epistemological perspective. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 5*, 138-148.

Steinbring, H. (2005). Analyzing mathematical teaching-learning situations - The interplay of communicational and epistemological constraints. *Educational Studies in Mathematics, 59*, 313-324.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a *mathematical sign*? - An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 133-162.

Steinbring, H., & Nührenbörger, M. (2009). Forms of mathematical interaction in different social settings: Examples from students', teachers' and student-teachers' communication about mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(2), 111-132.

Säljö, R. (2003). *Læring i praksis. Et sosiokulturelt perspektiv* (3. utg.). Oslo: J.W. Cappelens forlag a.s.

Torkildsen, S. H., & Maugesten, M. (2009). *Sirkel 9B. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: H. Aschehoug & Co (W. Nygaard).

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Kunnskapsløftet - Læreplan i matematikk*. Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Vedeld, K., & Venheim, R. (u. å.). Kombinatorikk - når begivenheter og utfallsrom er vanskelig å telle opp. Lasta ned 22.04, 2010, frå http://www.matematikk.org/artikkel/vis.html?tid=68917&within_tid=68810

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 275-298.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sosiomathematical norms. I P. Cobb & H. Bauersfeld (Red.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (s. 163-201). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Towards a sociocultural practice & theory of education*. Port Chester, NY: Cambridge University Press.

Wæge, K. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning. Doktoravhandling.* Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet (NTNU), Trondheim.

Yackel, E. (1995). Children's talk in inquiry mathematics classrooms. I P. Cobb & H. Bauersfeld (Red.), *The emergence of mathematical meaning. Interaction in classroom cultures* (s. 131-162). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

VEDLEGG 1 Samtykkerklæring

Bente O. Krumsvik
Tlf: 41554999
E-post:krumsvik@stud.ntnu.no

Trondheim, 19.1.2010

Til foreldre/foresatte for elever på 9. trinn ved Lade skole

Anmodning om tillatelse til videoopptak i klassene

Jeg er masterstudent i matematikk med fagdidaktisk vinkling ved NTNU. Dette studieprogrammet har som mål å utdanne lærere som vil være i stand til å gi en god matematikkundervisning for elever i skolen, og det fokuserer på hva som er nødvendig kunnskap å ha når det gjelder undervisning og læring av matematikk. Jeg skal nå gjennomføre min masteroppgave, og i dette prosjektet vil jeg se på ulike undervisningssammenhenger og hvilke læringsmuligheter som oppstår.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, har jeg i samråd med min veileder kommet til at det vil være ønskelig å gjøre videoopptak av timene. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å kunne videofilme undervisningssekvenser på 9. trinnet ved Lade skole. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert så langt råd er, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er naturligvis helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Videoopptak skal være basert på normale undervisningssituasjoner i klassen, og opptakene vil bli lagt til rette slik at de i minst mulig grad skal kunne påvirke elevenes læring. Opptakene vil kun bli sett av meg, min veileder og eventuelt av andre masterstudenter og veiledere ved NTNU. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil det ikke være mulig å spore tilbake til enkeltindivider ettersom involverte personer vil bli anonymisert. Etter at masteroppgaven er fullført, etter planen i løpet av våren, vil innsamlede data bli slettet.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer).

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å la deres barn være med på det. Jeg ber foreldre/foresatte om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til videoopptak i klassen.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen

Bente O. Krumsvik

SVARSLIPP (stryk det som ikke passer)

Vi / jeg gir /gir ikke tillatelse til at det kan bli foretatt videoopptak av matematikkundervisning i klassen der ______________________________(elevens navn) er elev.

Jeg/vi har snakket med jenta/gutten vår om dette, og hun/han har også gitt sitt samtykke.

____
(Sted og dato)

____
(underskrift fra foresatte/foreldre)

Vennligst returner svarslippen til læreren i klassen så snart som mulig.