NTNU
Det skapende universitet

Sammenhenger mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk og undervisningen de erfarer

Renate Monsen
Linda Ytterdahl Sandmark

Master i lærerutdanning med realfag
Oppgaven levert: Mai 2010
Hovedveileder: Tine Wedege-Mathiassen, MATH
Biveileder(e): Kjersti Wæge, PLU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Studien gjennomførte vi i løpet av våren 2010, som avslutning på vår lektorutdanning ved NTNU i Trondheim. For oss er det viktig å takke menneskene som har støttet og hjulpet oss gjennom hele prosessen fram til det endelige resultatet.

Vi ønsker for det første å takke vår veileder, Kjersti Wæge, for tett oppfølging. Takk for grundig tilbakemelding og støtte gjennom hele arbeidsprosessen. Veiledningsøktene med deg har vært oppklarende og inspirerende. Dessuten vil vi takke Tine Wedege for veiledning i arbeidet med pilotundersøkelsen.

Videre ønsker vi å takke Bente Ommedal Krumsvik, Hilde Fossbakk og Kirsti Rø for faglig respons. Vi takker dere i tillegg for utallige lunsj- og middagspauser der vi har fått mange gode råd og utløp for frustrasjon gjennom hele arbeidsprosessen. Vi takker Marte Svare for hjelp med den engelske versjonen av sammendraget. Vi ønsker dessuten å takke Jan-Arve Hansen for korrekturlesing.

I tillegg vil vi takke klassene vi gjennomførte datainnsamlingen i og deres lærere. Spesielt takker vi de åtte elevene som sa seg villige til å bli intervjuet. Lærerne takker vi for at de engasjerte seg i vår studie.

Ellers ønsker vi å rette en takk til våre nærmeste som har støttet oss i arbeidet med oppgaven, og gjennom hele utdanningsløpet som sådan.

Sist, men ikke minst, takker vi hverandre for et fabelaktig samarbeid både faglig og sosialt.

Trondheim, 1. juni 2010

Linda Sandmark og Renate Monsen

Sammendrag

I masteroppgaven fokuseres det på elevers forestillinger om forståelse, og på matematikkundervisning. Målet med studien er å få dypere innsikt i sammenhenger mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk, og undervisningen de erfarer. Studiens overordnede problemstilling er: *Hvilke sammenhenger kan det være mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk og matematikkundervisningen de erfarer?* I studien benyttes et tidligere utviklet analyseverktøy for å beskrive elevers forestillinger om forståelse. Analyseverktøyet tar utgangspunkt i skillet mellom instrumentell og relasjonell forståelse, som har blitt nyansert ved fire aktuelle tråder i matematisk kyndighet. De aktuelle trådene er 1) forståelse, 2) regneferdigheter, 3) strategisk kompetanse og 4) resonnering.

Studien tar utgangspunkt i to matematikklasser der elevene erfarer ulik matematikkundervisning. Elever i den ene klassen erfarer tradisjonell undervisning, mens elevene i den andre klassen erfarer en mer undersøkende form for undervisning. Undervisningen observeres for å gi et bilde av hvilke tråder i matematisk kyndighet som vektlegges. Et utvalg på fire elever fra hver klasse intervjues for å undersøke hvilke forestillinger de kan ha om forståelse i matematikk. Datamaterialet fra observasjonen og intervjuene analyseres ved hjelp av analyseverktøyet.

Resultatene fra studien indikerer at det kan være sammenhenger mellom forestillinger elever har om forståelse i matematikk og undervisningen de erfarer. Analysen av datamaterialet tyder på at i klasserommet preget av tradisjonell undervisning, fokuserer læreren på den instrumentelle delen av regneferdigheter. Lærerens fokus gjenspeiles i de fire elevenes forestillinger om forståelse i den forstand at den instrumentelle delen av regneferdigheter inngår i deres forestillinger. Analysen tyder på at i klasserommet som preges av undersøkende undervisning, vektlegger læreren trådene forståelse, strategisk kompetanse og resonnering. De fire elevene som erfarer slik undervisning, har forestillinger om forståelse i matematikk som har likhetstrekk med de tre nevnte trådene.

Summary

The focus of this paper is on students' beliefs about understanding, and on different methods of teaching of mathematics. The aim of the study is to gain deeper understanding of what correlation may exist between students' beliefs about understanding in mathematics and the teaching they experience. The research question of this paper is: *What correlation might exist between students' beliefs about understanding in mathematics and the teaching they experience?* In the study, a previously developed analytical tool is utilized to describe students' beliefs about understanding. The tool takes into consideration the divide between instrumental and relational understanding, categorized into four strands of mathematical proficiency. The respective strands are 1) conceptual understanding, 2) computing, 3) strategic competence, and 4) reasoning.

As a point of departure this paper considers two mathematics classes in which the students experience different methods of teaching. Students in the first class experience traditional teaching, while students in the second class experience an inquiry teaching approach. The teaching is observed to create an impression of what strands of mathematical proficiency are being emphasized. A sample of four pupils from each class is interviewed to investigate which beliefs they have regarding understanding in mathematics. The results from the observation exercise and the interviews are analyzed with the use of the previously mentioned analytical tool.

The results of the research indicate that there can be a correlation between students' beliefs about understanding in mathematics and the teaching they experience. Analysis of the data indicates that the teacher in the class subject to traditional teaching focuses on the computing strand of mathematical proficiency. The focus of the teacher is reflected in the students' beliefs about understanding in that the computing strand is included in their beliefs. The teacher of the class subjected to the inquiry teaching approach focuses on conceptual understanding, strategic competence and reasoning. The four students that experience this method of teaching have beliefs about understanding that have similarities with these three strands.

Innhold

Vedlegg

1 – Søkeoversikt

2 – Intervjuguide

3 – Lapper til intervjuspørsmålet ”Kan du fortelle om matematikkundervisningen dette skoleåret på godt og vondt?”

4 – Lapper til intervjuspørsmålet ”Hvordan lærer du matematikk best?”

5 – Samtykkeerklæring

6 – Oppgavehefte 1, Vikstrand videregående skole

7 – Oppgavehefte 2, Vikstrand videregående skole

8 – Oppgaver, Bakkegata videregående skole

1 Innledning

”Hvis jeg skal øve til en matteprøve så må jeg gjøre oppgavene om og om igjen, helt til jeg greier det med én gang” (Tea, 16 år)[1]

I løpet av våre praksisperioder som lektorstudenter fikk vi inntrykk av at store deler av matematikkundervisningen følger et tradisjonelt mønster. Vi erfarte at lærere legger vekt på at elever skal notere teori og eksempler fra tavla, etterfulgt av at elevene arbeider med oppgaver fra læreboka. Undervisningen er tradisjonell i den forstand at den er oppgave- og lærebokstyrt, som i følge Alseth, Breiteg og Brekke (2003) er typisk for matematikkundervisning i den norske grunnskolen. Videre fikk vi inntrykk av at for mange elever handler matematikk om å komme frem til riktig svar på en oppgave, ved bruk av en kjent, effektiv fremgangsmåte. Vi tolker erfaringene fra klasserommet dit hen at for mange elever er forståelse i matematikk synonymt med å kunne anvende regler og formler. Erfaringene har ført til at vi i studien ønsker å undersøke hvilke sammenhenger det kan være mellom matematikkundervisning og hva elever mener med å forstå matematikk.

Vi plasserer vår studie innenfor det konstruktivistiske paradigmet (Mertens, 2005). Vårt syn er at virkeligheten er i stadig utvikling, og at den er sosialt konstruert. Synet innebærer at elever konstruerer kunnskap i en sosial sammenheng. Pehkonen (2003) hevder at elevenes matematikkrelaterte forestillinger fungerer som et regulerende system for deres konstruksjon av kunnskap. Flere matematikkdidaktiske studier viser at elevers matematikkrelaterte forestillinger påvirker deres prestasjoner i matematikk (Schoenfeld, 1985, 1992; Thompson, 1992). I følge Lester (2002), er det viktig at vi som kommende lærere har innsikt i elevers forestillinger. Hans begrunnelse for det er at elevers forestillinger styrer handlinger, som videre vil påvirke deres læring. Lærere som har kjennskap til elevers matematikkrelaterte forestillinger har, i følge Spangler (1992), mulighet til å planlegge undervisning og strukturere klasseromsmiljøet for bevisst å påvirke elevenes forestillinger. Det er i følge Skemp (1987), spesielt viktig at lærere har kjennskap til hva elevene mener med forståelse i matematikk. Dersom elever og lærer har motstridende forestillinger om forståelse, kan det oppstå en konflikt i klasserommet.

[1] Tea er en av elevene i studien vår, og sitatet er hentet fra et av intervjuene vi gjorde med Tea i studien

Det kan eksempelvis oppstå en konflikt dersom læreren har en forestilling om at matematikk handler om å forstå relasjoner i tillegg til å utlede formler, mens elevene har en forestilling om at matematikk dreier seg om å pugge formler og regler.

Vårt søk etter litteratur tyder på at det ikke finnes empirisk forskning om sammenhenger mellom elevers forestillinger om forståelse og undervisningen de deltar i[2]. Det har imidlertid blitt gjennomført flere studier der forskeren undersøker mulige koblinger mellom undervisning og elevers matematikkrelaterte forestillinger, uten at studiene dreier seg spesifikt om forståelse (Op 't Eynde, De Corte, & Verschaffel, 2003; Spangler, 1992). Det finnes dessuten få studier om elevers forestillinger om forståelse (Berglie, 2009). Berglie har gjennomført en studie der hun utvikler et analyseverktøy for å beskrive elevers forestillinger om forståelse i matematikk.

1.1 Problemstilling

Elevers forestillinger og deres læring utgjør, i følge Spangler (1992), en sirkel. Elevers forestillinger påvirker deres atferd i undervisningssituasjoner. Dessuten påvirker undervisningen elevenes forestillinger i stor grad (Op 't Eynde et al., 2003; Spangler, 1992). Studier viser med andre ord *at* det finnes sammenhenger mellom elevers forestillinger og undervisning, men vi vet ikke *hvilke* sammenhenger det kan være. Målet med studien er å få innsikt i hvilke sammenhenger det kan være mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk og undervisningen de erfarer. Studiens overordnede problemstilling er: *"Hvilke sammenhenger kan det være mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk og matematikkundervisningen de erfarer?"* For å belyse problemstillingen, har vi formulert to forskningsspørsmål:

1. Hvilke forestillinger om forståelse kan elever som erfarer tradisjonell matematikkundervisning ha, og hvilke forestillinger om forståelse kan elever som erfarer undersøkende matematikkundervisning ha?
2. Hva kjennetegner læringsmiljøet i en klasse med tradisjonell matematikkundervisning, og hva kjennetegner læringsmiljøet i en klasse med undersøkende matematikkundervisning?

[2] Se Vedlegg 1 for utvidet søkeoversikt i forhold til Berglie (2009)

Studien vil kunne bidra til dypere innsikt i sammenhenger mellom 16-årige elevers forestillinger om forståelse i matematikk og matematikkundervisningen de erfarer det første året i videregående skole. Innsikten vil kunne bidra til læreres refleksjon rundt egen undervisning og bevissthet rundt hvordan matematikkundervisning kan påvirke elevers forestillinger om forståelse i matematikk.

For å finne svar på det første forskningsspørsmålet, observerer vi undervisningen som foregår i to klasser i videregående skole. Den ene klassen erfarer det vi velger å kalle *tradisjonell undervisning*[3]. Undervisningen er typisk strukturert slik at læreren presenterer ny teori og at han gjennom eksempler viser elevene hvordan de kan anvende bestemte algoritmer. Elevene arbeider deretter med oppgaver fra læreboka og de anvender algoritmene læreren har vist. Elevene får i liten grad mulighet til å resonnere og kommunisere ideer. Undervisningen er dessuten lite praktisk rettet (Alseth et al., 2003, side 115). Den andre klassen erfarer *undersøkende undervisning*[4], med fokus på at elevene skal være aktive og utforskende. De får dessuten mulighet til å utvikle egne antakelser, løsningsstrategier og metoder i matematikk (Wæge, 2007, side 51). I vår beskrivelse av undervisningen i de to klassene, tar vi utgangspunkt i fire aspekter ved et klasseroms læringsmiljø som Cobb (2000) presenterer. Aspektene er 1) klasseromsaktivitetenes struktur, 2) oppgavene elevene arbeider med, 3) verktøy og 4) klasseromsdiskursen. For å svare på det andre forskningsspørsmålet, gjennomfører vi semistrukturerte intervju med et utvalg elever fra de to klassene. Datamaterialet fra observasjon og intervju analyserer vi ved hjelp av et analyseverktøy utviklet av Berglie (2009). For å belyse problemstillingen undersøker vi hvilke sammenhenger det kan være mellom resultatet fra analysen av observasjonen og analysen av intervjuene.

1.2 Kapitteloppbygging

Kapittel 2 omhandler tidligere forskning på elevers matematikkrelaterte forestillinger. Det blir gjort rede for av hva som menes med en forestilling i studien, i tillegg til at det gis en redegjørelse for forestillingers organisering, natur og struktur. I kapittel 3

[3] Når vi i det følgende omtaler undervisning som tradisjonell, referer vi til Alseth et al. (2003) sin definisjon

[4] Når vi i det følgende omtaler undervisning som undersøkende, refererer vi til Wæge (2007) sin definisjon

beskrives to ulike definisjoner på forståelse i matematikk. Kapittel 4 omhandler elevers forestillinger om forståelse, der en tidligere studie blir presentert. I kapittel 5 blir begrepet matematisk kyndighet presentert. Videre blir det redegjort for hvordan begrepet kan forholde seg til to ulike former for forståelse. Kapittel 6 omhandler matematikkundervisning, der det blir gjort rede for studiens utgangspunkt for beskrivelse av matematikkundervisning. I kapittel 7 presenteres studier om sammenhenger mellom undervisning og elevers forestillinger relatert til matematikk. I kapittel 8 presenteres den teoretiske rammen. Det gis i tillegg en begrunnelse for valg av analyseredskap. Kapittel 9 tar for seg den aktuelle metodologien. En begrunnelse for valg av metoder blir gitt. I tillegg blir det gitt en beskrivelse av gjennomføring av observasjon, utvikling av intervjuspørsmål og gjennomføring av intervju. I kapittel 10 og 11 presenteres resultatene fra de to klassene, der elevens forestillinger om forståelse ses i sammenheng med undervisningen. I Kapittel 12 blir studiens resultat og metodiske spørsmål diskutert. Kapittel 13 viser en oppsummering av studiens resultat. I tillegg introduseres et nytt forskningsspørsmål som kan være aktuelt for fremtidige forskningsstudier om forestillinger om forståelse i matematikk.

2 Matematikkrelaterte forestillinger

I studien undersøker vi hvilke forestillinger elever kan ha om forståelse i matematikk. Interessen for forestillinger relatert til matematikk har i følge Kloosterman (2002) økt betraktelig siden begynnelsen av nittitallet. Flere forskere studerer elevers og læreres forestillinger relatert til matematikk. De studerer dessuten den vesentlige rollen forestillinger har i forbindelse med læring og undervisning i matematikk (Goldin, Rösken, & Törner, 2009; Leder, Pehkonen, & Törner, 2002). Enkelte forskere studerer forestillinger fra et kognitivt perspektiv og andre fra et affektivt perspektiv. Det finnes mange ulike teorier om matematikkrelaterte forestillinger (Op 't Eynde et al., 2003). Teoriene er vanskelig å forene og det er mangel på en definisjon av forestillinger forskere innen matematikkdidaktikk kan enes om (Furinghetti & Pehkonen, 2003; Goldin et al., 2009).

I forbindelse med matematikkrelaterte forestillinger kan det være hensiktsmessig å skille mellom objektiv og subjektiv kunnskap (Furinghetti & Pehkonen, 2003). *Objektiv* kunnskap i matematikk refererer til matematikkens generelt aksepterte struktur, som er allment akseptert innen forskningsfeltet. Den er en form for offisiell kunnskap en person har, som han kan uttrykke med logiske setninger. *Subjektiv* kunnskap er derimot unik for hver enkelt person, basert på den enkeltes erfaringer og forståelse av ulike situasjoner (Pehkonen & Pietilä, 2003). Utenforstående kan ikke bedømme kunnskapen. Vi kan på den måten omtale kunnskapen som personlig kunnskap (Furinghetti & Pehkonen, 2003).

Vi betrakter elevers matematikkrealterte forestillinger som en del av elevens subjektive kunnskap, og velger å støtte oss til Op ’t Eynde et al. (2003) sin definisjon:

Students’ mathematics-related beliefs are the implicitly and explicitly held subjective conceptions students hold to be true about mathematics education, about themselves as mathematicians, and about mathematics class context. These beliefs determine in close interaction with each other and with students’ prior knowledge their mathematical learning and problem solving in class (Op 't Eynde et al., 2003, side 27).

En person utvikler forestillinger på grunnlag av flere faktorer, og koblingene mellom en persons forestillinger er komplisert (Pálsdóttir, 2008). For å gi et helhetlig bilde av elevers matematikkrelaterte forestillinger, presenterer vi i det følgende forestillingers organisering, natur og struktur.

2.1 Organisering av forestillinger

Mennesker utvikler sine forestillinger i interaksjon med miljøet rundt seg (Pálsdóttir, 2008). En person sammenligner stadig sine forestillinger med nye erfaringer og med andres forestillinger. Det medfører at forestillingene er under kontinuerlig evaluering og endring (Furinghetti & Pehkonen, 2003). I følge Green (1971), er en persons forestillinger avhengige av hverandre. En person organiserer sine forestillinger i en større struktur, som utgjør et *forestillingssystem.* Når personen utvikler nye forestillinger, inkluderer han dem automatisk som en del av forestillingssystemet. På samme måte endrer han sine forestillinger som en del av den større strukturen (Green, 1971).

Green introduserer tre kjennetegn på forestillingssystemers organisering. Systemene er organisert kvasi-logisk, ut fra psykologisk sentralitet og i klynger. For det første arrangerer en person sine forestillinger *kvasi-logisk.* Personen arrangerer sine forestillinger i systemer basert på hvordan han selv ser koblingene mellom forestillingene. Det medfører at strukturen ikke er logisk for andre enn personen selv. Forestillingssystemer har dermed en kvasi-logisk struktur (Green, 1971) som er unik for hver enkelt person (Furinghetti & Pehkonen, 2003). For det andre er forestillinger organisert ut fra *psykologisk sentralitet.* Enkelte forestillinger er psykologisk sentrale for en person, mens andre forestillinger er mer perifere i personens forestillingssystem. Forestillinger har dermed en egen psykologisk styrke ut fra hvilken grad av overbevisning de innebærer for hver enkelt person. Perifere forestillinger lar seg enklere endre enn de sentrale. Et eksempel på sentrale forestillinger kan være læreres forestillinger om hva som er god undervisning. Slike forestillinger er ofte så sentrale for læreren at han ikke endrer dem selv ved innføring av nye læreplaner. En persons forestillingssystem er for det tredje organisert i *klynger* av tett forbundne forestillinger. Klyngene er ikke nødvendigvis forbundet med hverandre, som gjør at det for en person er mulig å ha forestillinger som er i konflikt med hverandre innenfor sitt forestillingssystem (Green, 1971).

2.2 Forestillingers natur

Forskere studerer, som tidligere nevnt, forestillinger fra ulike perspektiver. Furinghetti og Pehkonen (2003) hevder at dersom vi ser på koblingen mellom forestillinger og kunnskap, betrakter vi i all hovedsak forestillinger som en del av en persons kognitive struktur. Dersom vi betrakter forestillinger som en form for reaksjon på en bestemt situasjon, ser vi på forestillinger som en del av det affektive området. Furinghetti og Pehkonen påpeker videre at enkelte forskere betrakter forestillinger som rent kognitive, men at flertallet er enige om at forestillinger består av enkelte affektive elementer i tillegg til de kognitive elementene (Furinghetti & Pehkonen, 2003).

I følge McLeod (1992) har forestillinger en sentral rolle i menneskers utvikling av holdningsmessige og følelsesmessige reaksjoner til matematikk. Han inkluderer derfor forestillinger som en del av det affektive området. McLeod påpeker at forestillinger (beliefs), holdninger (attitudes) og følelser (emotions) er sentrale begreper innenfor forskning på det affektive området. Matematikkdidaktikere benytter begrepene for å beskrive affektive responser på matematikk (McLeod, 1992). Forestillinger, holdninger og følelser er ulike med tanke på hvor stabile de affektive responsene de beskriver er. Holdninger og forestillinger er vanligvis stabile, mens følelser forandrer seg hyppig. Videre varierer de tre begrepene ut fra hvor intense de affektive responsene de representerer er; fra mindre intense forestillinger til sterke følelser. I tillegg er de ulike med tanke på i hvor stor grad kognisjon spiller en rolle i responsen de representerer, og med tanke på tiden de tar å utvikle. Forestillinger er kognitive av natur og de tar lang tid å utvikle, mens følelser er forbundet med liten grad av kognitiv vurdering og tar kort tid å utvikle (McLeod, 1992). Wedege, Skott, Wæge og Henningsen (2006) rangerer begrepene ut fra økende grad av affektivt engasjement og intensitet, og ut fra avtagende grad av kognitivt engasjement og stabilitet, slik figur 1 viser:

Beliefs Attitudes Emotions

←--→

Stability Intensity

Figur 1: Spekter av typer affekt (Wedege et al., 2006, s 36)

Som vi ser av figur 1, står forestillinger på den kognitive enden av skalaen, og befinner seg dermed i en ”gråsone” mellom det kognitive og det affektive området (Pehkonen, Accepted).

2.3 Strukturering av forestillinger

Innenfor matematikkdidaktikk er det, i følge Op ’t Eynde, De Corte og Verschaffel (2003), mangel på en kategorisering av elevers matematikkrelaterte forestillinger forskere kan enes om. Op ’t Eynde et al. diskuterer og vurderer fire ulike kategoriseringer av elevers forestillinger om matematikklæring og problemløsing. Kategoriseringene dekker et vidt spekter av matematikkrelaterte forestillinger, og de er vanskelig å forene på grunn av ulikheter i struktur og innhold. Etter en analyse av forestillingers natur og struktur, foreslår Op ’t Eynde et al. et teoretisk rammeverk som sammenfatter de sentrale delene av kategoriseringene de har studert. Rammeverket består av tre hovedkategorier av elevers matematikkrelaterte forestillinger. De skiller mellom elevers forestillinger om matematikkopplæring, selvet og den sosiale konteksten, slik figur 2 viser:

1. Beliefs about mathematics education
    a) beliefs about mathematics as a subject
    b) beliefs about mathematics learning and problem solving
    c) beliefs about mathematics teaching in general
2. Beliefs about the self
    a) self-efficacy beliefs
    b) control beliefs
    c) task-value beliefs
    d) goal-oriantation beliefs
3. Beliefs about the social context
    a) beliefs about social norms in their own class
        - the role and the functioning of the teacher
        - the role and the functioning of the students
    b) beliefs about socio-mathematical norms in their own class

Figur 2: A framework of students' mathematics- related beliefs (Op 't Eynde et al., 2003, side 28).

Den første kategorien er *forestillinger om matematikkopplæring*. Kategorien rommer forestillinger om hva matematikk handler om, hvordan matematikkundervisning bør være, og forestillinger om hvordan elever lærer best. Forestillingen "matematikk handler om å se sammenhenger" er et eksempel på en forestilling i den første kategorien. Deretter følger en kategori som rommer *forestillinger om selvet*. Kategorien inkluderer blant annet forestillinger en person har om hva som skal til for å lykkes i matematikk og hva som er en god matematikkoppgave. "For å bli god i matematikk må jeg pugge formler" er eksempelvis en forestilling vi kan plassere her. Den siste kategorien er *forestillinger om den sosiale konteksten,* som inkluderer forestillinger om sosiale og sosiomatematiske normer. Normene er avgjørende for den faglige interaksjonen i klasserommet. *Sosiale normer* omhandler lærerens og elevers individuelle forestillinger om sin egen og andres rolle i klasserommet, og er uavhengig av matematikk som fag. En forestilling om sosiale normer kan for eksempel være at elever skal begrunne sine svar i matematikken. De s*osiomatematiske normene* er derimot fagspesifikke, og handler eksempelvis om hva elever og lærer regner som en god løsning på en oppgave. Forestillinger om sosiomatematiske normer inkluderer dessuten forestillinger om hva elever og lærer regner som en god matematisk forklaring.

”En god forklaring på derivasjon er at vi flytter ned eksponenten og gjør den mindre”, er et eksempel på en slik forestilling (Op 't Eynde et al., 2003).

En annen kategorisering av elevers matematikkrelaterte forestillinger, har Dionne (1984; i Rolka, Rösken, & Liljedahl, 2006)[5] utarbeidet. Dionne betrakter elevers matematikkrelaterte forestillinger som en kombinasjon av tre grunnleggende perspektiver; det tradisjonelle, formalistiske og det konstruktivistiske perspektivet (side 441). Törner og Grigutsch (1994, i Rolka et al., 2006, side 441)[6] omtaler de tre perspektivene som henholdsvis verktøykasse-, system-, og prosessaspektet. Forestillinger om matematikk og matematisk aktivitet kan vi i følge Törner og Grigutsch (1994, i Liljedahl, 2009) betrakte som en kombinasjon av de tre aspektene, der det er rom for å vektlegge dem ulikt. De hevder at en person som betrakter matematikk som en *verktøykasse* har en forestilling om at matematikk er en samling regler, formler, ferdigheter og regneoperasjoner. Aspektet rommer dessuten forestillinger om at matematisk aktivitet handler om å regne og om å benytte seg av regler, formler og prosedyrer. Dersom en person anser matematikk for å være et *system*, har han en forestilling om at matematikk handler om logikk, nøyaktige bevis, eksakte definisjoner og et presist matematisk språk. Matematisk aktivitet handler dermed om å gjennomføre nøyaktige bevis og om å anvende et presist og nøyaktig matematisk språk. *Prosessaspektet* favner forestillinger om at matematikk er en konstruksjonsprosess, der relasjoner mellom ulike deler av matematikken står sentralt. En person som betrakter matematikk som en prosess vektlegger kreativt arbeid, eksempelvis utledning av regler og formler (Törner og Grigutsch, 1994, i Liljedahl, 2009).

Vi ønsker å påpeke at Törner og Grigutsch sin presentasjon av de tre aspektene er noe uklar. Det er uklart om de mener at en person har et *syn* (view) på, eller en *forestilling* (beliefs) om matematikk som for eksempel en verktøykasse. De sier dessuten at en person kan *betrakte* (seeing) matematikk som en verktøykasse. I tillegg til å benytte begrepene syn, forestilling og betrakte om hverandre, lar de dem være udefinerte. Det medfører at vi vurderer deres presentasjon som noe uklar.

[5] Finner ikke direkte referanse til Dionne (1984)
[6] Finner ikke direkte referanse til Törner og Grigutsch (1994)

3 Forståelse

Vi studerer, som tidligere nevnt, hvilke forestillinger elever kan ha om forståelse i matematikk. Forståelse er, i følge Sierpinska (1994), et begrep vi benytter med ulike betydninger i dagliglivet. Vi snakker for eksempel om å forstå hverandre, om å ha en felles forståelse, og om å forstå et ord eller et fenomen (Sierpinska, 1994). I forbindelse med matematikkundervisning og innen matematikkdidaktisk forskning, ilegger vi dessuten begrepet flere ulike betydninger. Forståelse er imidlertid et vitenskapelig begrep som vi må definere (Sierpinska, 1990). I det følende redegjør vi for forståelse som begrep gjennom en presentasjon av to ulike definisjoner.

Skemp (1976) hevder at mange ulike dagligdagse betydninger av ordet forståelse skaper vanskeligheter i matematikkopplæringen. Han ser derfor et behov for å definere forståelse, noe han ønsker å sette søkelyset på. I sin definisjon på forståelse benytter Skemp (1987) begrepet skjema. Et *skjema* er en mental struktur av begreper. Ethvert begrep en person forsøker å forstå inkluderer hun i den større strukturen av begreper. De fleste begreper er utledet fra andre begreper, som gjør at en persons begrepsstruktur er hierarkisk organisert. En person kan klassifisere et begrep på ulike måter. Personen kan eksempelvis klassifisere en bil som et kjøretøy eller som et statussymbol, som medfører at hun har flere hierarkier innenfor sin begrepsstruktur. Et skjema integrerer eksisterende kunnskap og fungerer som et verktøy for fremtidig læring, i tillegg til å muliggjøre forståelse. I følge Skemp (1987) kan vi si at en person *forstår noe* når hun er i stand til å innlemme det i et passende skjema. Forståelse er dermed subjektivt; opplevelsen av forståelse, og graden av forståelse, er ulik fra person til person. Skemp ser på forståelse som en prosess som aldri slutter; det finnes ikke et nivå der en person kan si at hun forstår noe fullstendig. Hun kan derimot utvide sin forståelse av begreper enten ved å utvide sine opprinnelige skjemaer, eller ved å omorganisere dem (Skemp, 1987).

I likhet med Skemp (1987), ser Hiebert og Carpenter (1992) på forståelse som en prosess. Hiebert og Carpenter antar innledningsvis at en person selv konstruerer matematisk kunnskap og at hun selv danner representasjoner av matematiske ideer. De skiller mellom interne og eksterne representasjoner. For å kunne tenke på matematiske ideer må vi representere dem internt som mentale representasjoner. Når vi derimot skal kommunisere matematikk, er eksterne representasjoner nødvendig i den forstand at de må ta form som for eksempel skrevne symboler eller muntlig språk. (Hiebert & Carpenter, 1992). En person forstår en matematisk idé eller prosedyre, når hun kan innlemme ideens mentale representasjon som en del av sin kunnskapsstruktur. Forståelse handler dermed om å etablere koblinger mellom deler av matematikken (Hiebert & Carpenter, 1992). En person bygger gradvis strukturer av mentale representasjoner og utvikler forståelse. Utviklingen av forståelse skjer enten ved at personen kobler ny informasjon til sine eksisterende strukturer, eller ved at hun konstruerer nye forbindelser mellom tidligere løsrevet informasjon. Forståelsen øker når hun utvider og reorganiserer sine strukturer, og når hun styrker forbindelsene mellom de matematiske ideene (Hiebert & Carpenter, 1992). Hiebert og Carpenter påpeker derfor, i likhet med Skemp (1987), at forståelse ikke er noe en person har, eller ikke har. De påpeker imidlertid at forståelsen kan være nokså begrenset dersom en person kun etablerer enkelte potensielle forbindelser mellom ulike representasjoner, eller dersom forbindelsene er svake (Hiebert & Carpenter, 1992). Forståelse er i følge Hiebert og Carpenter fordelaktig i den forstand at når en person konstruerer forbindelser mellom ny og gammel kunnskap, husker hun de matematiske ideene. Dessuten innhenter en person gammel kunnskap enklere dersom den er en del av en større struktur. En annen kognitiv konsekvens av forståelse er at det begrenser antall elementer en person må huske, da hun inkluderer matematiske ideer i et større nettverk. Forståelse fremmer dessuten overføring av kunnskap, som er nødvendig for at elever skal kunne løse nye problemer ved hjelp av prosedyrer de tidligere har lært (Hiebert & Carpenter, 1992).

I motsetning til Hiebert og Carpenter (1992), skiller Skemp (1976) mellom to former for forståelse[7]. Den ene formen omtaler han som instrumentell forståelse, og den andre som relasjonell forståelse. *Instrumentell forståelse* beskriver han som ”regler uten årsaker”. En elev med instrumentell forståelse har kjennskap til en formel og er i stand til å anvende den, men vet ikke hvorfor den fungerer. En person med *relasjonell forståelse* vet både hva hun skal gjøre og hvorfor (Skemp, 1976). En elev med relasjonell

[7] Skemp påpeker at det var Mellin-Olsen som gjorde han oppmerksom på at det i opplæringssammenheng blir skilt mellom to former for forståelse

forståelse kan eksempelvis utlede en spesifikk formel eller regel ut fra mer generelle matematiske sammenhenger (Skemp, 1987). Instrumentell forståelse kan være enklere og mindre tidkrevende å utvikle i forhold til relasjonell forståelse. Fordelen med relasjonell forståelse er imidlertid at elever kan tilpasse seg nye oppgaver og situasjoner fordi de har kjennskap til hvordan og hvorfor metoder fungerer. Videre påpeker Skemp at en slik form for forståelse er mer varig enn instrumentell forståelse, og at utvikling av relasjonell forståelse kan være tilfredsstillende i seg selv. Elever som ser verdien av relasjonell forståelse utforsker i tillegg nye områder og temaer aktivt (Skemp, 1976).

I følge Skemp (1976) eksisterer det to ulike fag som begge går under betegnelsen matematikk. Undervisning i det ene faget har fokus på instrumentell forståelse, og det andre har fokus på relasjonell forståelse. Førstnevnte fag dreier seg om at elever lærer et økende antall fikserte fremgangsmåter. Ved hjelp av fremgangsmåtene kan elever finne sin strategi for å løse oppgaver med ett svar, ut fra et gitt datamateriale. Fremgangsmåten elever tidligere har lært gjør at de vet akkurat hva de skal gjøre på hvert punkt. De har imidlertid ikke utviklet bevissthet rundt forholdet mellom den trinnvise fremgangsmåten de benytter, og løsningen på oppgaven. Elever som derimot utvikler relasjonell forståelse, bygger opp begrepsmessige strukturer. Innenfor sin struktur kan hver elev danne et nærmest ubegrenset antall veier fra ethvert startpunkt til ethvert endepunkt.

Vi anser det som hensiktsmessig å skille mellom instrumentell og relasjonell forståelse i vår studie. Inntrykket vi har fra praksis er, som sagt, at for mange elever handler matematikk om å løse en oppgave på kortest mulig tid, ved hjelp av en kjent fremgangsmåte. Vår vurdering er at elever og lærer vektlegger instrumentell forståelse i undervisningen. I studien tar vi utgangspunkt i de to formene for forståelse for å undersøke hvilke forestillinger elever har om forståelse i matematikk, og hva som kjennetegner ulike former for undervisning. Vi ønsker imidlertid å nyansere begrepene for å kunne gi et mer detaljrikt bilde av elevenes forestillinger om forståelse.

4 Elevers forestillinger om forståelse i matematikk

Vi har i det foregående presentert begrepene forestillinger og forståelse isolert. Det finnes som sagt få studier om elevers forestillinger om forståelse i matematikk[8]. I det følgende presenterer vi en studie av Berglie (2009) der hun undersøker hvilke forestillinger elever kan ha om forståelse i matematikk. Før vi presenterer studien viser vi hvordan forestillinger om forståelse inngår i Op 't Eynde et al. (2003) sin kategorisering av elevers matematikkrelaterte forestillinger.

4.1 Matematikkrelaterte forestillinger

Op 't Eynde et al. (2002) skiller mellom forestillinger om matematikkopplæring, selvet og den sosiale konteksten i sin kategorisering av elevers matematikkrelaterte forestillinger (kapittel 2.3). Vi velger å benytte rammeverket de presenterer som utgangspunkt for vår studie av elevers forestillinger om forståelse, da vi mener at forestillinger om forståelse inngår i rammeverket (figur 2). I det følgende begrunner vi hvorfor vi mener at vi kan plassere forestillinger om forståelse i matematikk inn i Op 't Eynde et al. sitt rammeverk.

Vi kan plassere en elevs forestillinger om forståelse under kategorien forestillinger om matematikkopplæring. Eksempelvis kan vi plassere forestillingene "matematikk handler om å se sammenhenger" og "elever lærer matematikk best når de pugger mange formler " under forestillinger om matematikkopplæring. Den andre kategorien er forestillinger om selvet. Vår vurdering er at vi kan plassere forestillingene "problemløsningsoppgaver gjør at jeg lærer matematikk best" og "jeg blir god i matematikk når jeg pugger formler", som begge er forestillinger om forståelse, i den kategorien. I tillegg mener vi at forestillinger om forståelse kan være en del av forestillinger om den sosiale konteksten. "I vår klasse må vi begrunne våre svar" og "det læreren sier er alltid riktig" mener vi er forestillinger om forståelse vi kan plassere under kategorien om den sosiale konteksten.

[8] Se søkeoversikt, Vedlegg 1

4.2 En studie av elevers forestillinger om forståelse i matematikk

Berglie (2003) har som sagt gjennomført en studie der hun undersøker hvilke forestillinger elever kan ha om forståelse i matematikk. I studien intervjuer hun fire elever i en matematikkklasse ved en ungdomsskole (15-åringer). Hun utvikler et analyseverktøy for å analysere elevers forestillinger om forståelse, der hun tar utgangspunkt i Skemps (1987) skille mellom instrumentell og relasjonell forståelse. De to formene for forståelse nyanserer hun ved å benytte fire tråder i matematisk kyndighet (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001), som vi kommer tilbake til i kapittel 5. Ved å analysere datamateriale fra intervju med hver av de fire elevene, gir Berglie et detaljert bilde av elevenes forestillinger. Resultatene tyder på at analyseverktøyet er godt egnet til å fange opp ulike nyanser ved elevers forestillinger om forståelse i matematikk. Berglie har en arbeidshypotese om at elevers forestillinger er kontekstavhengige. Hun danner seg et bilde av undervisningskonteksten elevene erfarer på grunnlag av observasjon av undervisningen og intervjuene med elevene. Datamaterialet tyder på at elevene erfarer tradisjonell undervisning (Skemp, 1987). Hennes analyser indikerer at elever i samme matematikkklasse kan ha ulike forestillinger om forståelse. To av elevene har forestillinger som i hovedsak samsvarer med relasjonell forståelse, mens de to andres forestillinger samsvarer med instrumentell forståelse. Berglie kan imidlertid verken bekrefte eller avkrefte arbeidshypotesen.

Berglie påpeker at det kunne vært interessant å undersøke elevers forestillinger om forståelse i en klasse der elevene erfarer undersøkende matematikkundervisning. I vår studie undersøker vi hvilke forestillinger elever kan ha både i en klasse der det foregår tradisjonell undervisning, og der det foregår undersøkende undervisning. Vi benytter Berglies analyseverktøy til å analysere elevenes forestillinger. I tillegg analyserer vi observasjonsdataene fra klasserommene ved hjelp av Berglies verktøy for å kunne avdekke hvilke tråder i matematisk kyndighet læreren vektlegger i undervisningen. På den måten utvider vi bruken av analyseverktøyet. Vår studie kan på den måten bidra til økt innsikt i mulige sammenhenger mellom undervisning og elevers forestillinger om forståelse i matematikk.

5 Matematisk kyndighet

Berglie (2009) benytter fire tråder i matematisk kyndighet til å nyansere begrepene instrumentell og relasjonell forståelse (Skemp, 1987) (kapittel 4.2). I det følgende presenterer vi begrepet matematisk kyndighet, i tillegg til Berglies diskusjon om hvordan trådene i kyndighet forholder seg til instrumentell og relasjonell forståelse.

Det finnes ikke, i følge Kilpatrick, Swafford og Findell (2001), et begrep som gir et helhetlig bilde av hva suksessfull matematikklæring innebærer. De hevder at begreper som kompetanse og kunnskap er for snevre. De innfører derfor begrepet *matematisk kyndighet*[9](mathematical proficiency) som et mål for suksessfull matematikklæring. Matematisk kyndighet består av fem sammenvevde tråder som er gjensidig avhengige av hverandre: 1) Forståelse, 2) Regneferdigheter, 3) Strategisk kompetanse, 4) Resonnering og 5) Engasjement[10].

I følge Kilpatrick (2001), kan vi benytte kyndighet til å definere læringsmål i matematikk for alle elever, uavhengig av alder. Dessuten *bør* alle elever utvikle matematisk kyndighet. Kyndige elever tror at de kan løse problemer, utvikle forståelse og lære prosedyrer ved hardt arbeid. For slike elever er matematisk kyndighet verdt strevet. For å oppnå matematisk kyndighet må elevene utvikle alle fem trådene. Det kan imidlertid være matematikktimer der læreren vektlegger kun én eller to tråder i undervisningen, men han bør prioritere samtlige tråder i løpet av et skoleår. En slik prioritering er vesentlig for å styrke sammenhengen mellom trådene (Kilpatrick & Swafford, 2002).

5.1 Forståelse

Den første tråden i matematisk kyndighet er *Forståelse* (conceptual understanding). Kilpatrick og Swafford (2002) definerer Forståelse som ”comprehending mathematical concepts, operation, and relation – knowing what mathematical symbols, diagrams, and procedures means” (side 9). Begrepet innebærer at elever ikke bare forstår løsrevne

[9] Berglies (2009) oversettelse
[10] Vi velger å benevne trådene med stor forbokstav slik at det senere i teksten er tydelig at det er trådene i matematisk kyndighet vi refererer til

fakta og prosedyrer, men at de forstår fundamentale ideer i matematikk. Elever som har Forståelse vet hvorfor matematiske ideer er viktige og i hvilke kontekster de er nyttige. I tillegg ser de sammenhenger mellom matematiske ideer. Elever med Forståelse kan arbeide med nye oppgaver ved å benytte kjente mønstre og generelle prinsipper. Kunnskapen elever får ved utvikling av Forståelse gir grunnlag for å rekonstruere fakta og metoder, løse nye og ukjente problemer, og for å utvikle ny kunnskap.

I følge Berglie (2009) er Forståelse en undertype av relasjonell forståelse (Skemp, 1987). Både Forståelse og relasjonell forståelse innebærer at en elev setter sin kunnskap i system, og at han ser sammenhenger i matematikk. Berglie påpeker at det da er mulig for eleven å tilegne seg ny kunnskap, i tillegg til at tilegningen skjer enklere.

5.2 Regneferdigheter

Kilpatrick og Swafford (2002) definerer videre *Regneferdigheter* (computing) som "carrying out mathematical procedures, such as adding, subtracting, multiplying, and divide numbers flexibly, accurately, efficiently, and appropriately" (side 9). Elever som har Regneferdigheter kan benytte ulike matematiske prosedyrer. De gjør elementære beregninger og anvender algoritmer raskt og nøyaktig. Regneferdigheter innbærer dessuten at elever er fleksible i sin bruk av algoritmer. Elevene vet både når og hvordan de kan benytte ulike prosedyrer hensiktsmessig (Kilpatrick & Swafford, 2002). En elev med Regneferdigheter kan i tillegg vurdere om et svar er fornuftig (Kilpatrick et al., 2001). Regneferdigheter og Forståelse er tråder i kyndighet som på mange måter henger sammen. Elevers Forståelse kan bidra til deres utvikling av Regneferdigheter. Forståelse bidrar til at elever ikke glemmer matematiske prosedyrer, og til at de ikke gjør elementære regnefeil. Videre kan elever utvikle Forståelse ved å benytte ulike prosedyrer og på den måten styrke sine Regneferdigheter. Elever uten tilstrekkelige Regneferdigheter har problemer med å utvikle Forståelse for matematiske ideer og problemer (Kilpatrick et al., 2001).

Elever med Regneferdigheter vet både når og hvordan de kan benytte en prosedyre hensiktsmessig (Kilpatrick & Swafford, 2002). Berglie (2009) ser derfor likhetstrekk mellom instrumentell forståelse (Skemp, 1987) og tråden Regneferdigheter. En elev med Regneferdigheter må i tillegg til å ha instrumentell forståelse, være fleksibel og i stand til å vurdere om et svar gir mening. Berglie hevder at dersom en elev skal kunne anvende kunnskapene sine fleksibelt, må eleven ha satt sine kunnskaper i system og se relasjonen mellom dem. Elevene må da ha relasjonell forståelse, noe de dessuten må ha for å kunne vurdere om et svar er fornuftig. Berglie betrakter derfor Regneferdigheter som bestående av både en instrumentell og en relasjonell del (Berglie, 2009). Vi ser det slik at vi kan skille mellom den instrumentelle delen av Regneferdigheter, og tråden Regneferdigheter. Førstnevnte begrenser seg til å innebære at elevene anvender prosedyrer nøyaktig, effektivt og passende, uten krav om at de skal anvende prosedyrene fleksibelt.

5.3 Strategisk kompetanse

Den tredje tråden i matematisk kyndighet er *Strategisk kompetanse* (strategic competence/applying), som Kilpatrick og Swafford (2002) definerer som ”being able to formulate problems mathematically and to devise strategies for solving them using concepts and procedures appropriately” (side 9). Tråden innebærer at elever anvender kunnskap om begreper og prosedyrer for å løse problemer. Elever med Strategisk kompetanse vet når de bør benytte begreper og prosedyrer. For å komme frem til løsninger på problemløsingsoppgaver, utarbeider de en egen løsningsstrategi. De er i stand til å skille det som er kjent og relevant fra det ukjente, og de er i stand til å formulere problemer (Kilpatrick & Swafford, 2002). Strategisk kompetanse er relatert både til Forståelse og Regneferdigheter. Utviklingen av strategier for å løse oppgaver som ikke er rutinemessige, avhenger av Forståelsen av det problemet omhandler. I tillegg kan Strategisk kompetanse bidra til at en elev utvikler Forståelse for begreper og prosedyrer (Kilpatrick et al., 2001). Strategisk kompetanse er dessuten tett forbundet med Regneferdigheter. For å løse et problem må elever inneha Regneferdighetene som er nødvendige (Kilpatrick & Swafford, 2002). Strategisk kompetanse er i tillegg vesentlig for utviklingen av Regneferdigheter. Elever utvikler sine Regneferdigheter når de anvender Strategisk kompetanse for å velge mellom ulike fremgangsmåter (Kilpatrick et al., 2001).

I følge Berglie (2009), finnes det likhetstrekk mellom Strategisk kompetanse og relasjonell forståelse. Elever anvender i begge tilfeller sine kunnskaper fleksibelt. Når elever møter ukjente problemer, tilpasser de sin eksisterende kunnskap til det nye problemet. Mer bestemt, ser Berglie på Strategisk kompetanse som en undertype av relasjonell forståelse.

5.4 Resonnering

Den fjerde tråden, *Resonnering* (reasoning), refererer til å kunne benytte ”logic to explain and justify a solution to a problem or to extend from something known to something not yet known” (Kilpatrick & Swafford, 2002, side 9). Tråden innebærer at elever studerer logiske sammenhenger mellom begreper og situasjoner ved at de tar for seg ulike deler av et problem, og at de undersøker hvordan delene henger sammen. Kilpatrick og Swafford omtaler resonnering som limet som holder matematikken sammen. Resonnering handler om å kunne forklare og begrunne en matematisk løsning. Elever kan dermed forbedre sin resonneringsevne ved å forklare eller begrunne løsninger for andre. Resonnering samhandler sterkt med de andre trådene av kyndighet, spesielt når elever arbeider med problemløsing. Elever benytter sin Strategiske kompetanse til å formulere et problem, og til å utvikle en løsningsstrategi. Resonneringen er avgjørende når elever vurderer om den foreslåtte strategien er hensiktsmessig. Videre benytter elevene Forståelse når de begrunner *hvorfor* den er hensiktsmessig (Kilpatrick et al., 2001).

I følge Berglie (2009) er det likheter mellom Resonnering og relasjonell forståelse. I begge tilfeller ser elever relasjoner mellom ulike deler av matematikken. For å kunne vurdere og å begrunne det de gjør, må elever vite hvorfor arbeidet de har gjort er riktig. De må da ha relasjonell forståelse. Berglie ser mer bestemt på Resonnering som en fjerde undertype av relasjonell forståelse

5.5 Engasjement

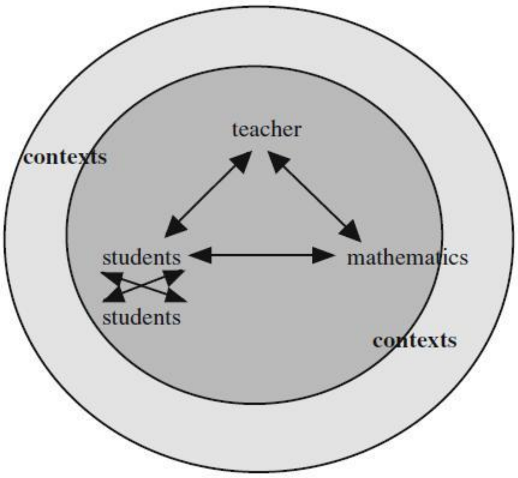
Matematisk kyndighet omhandler mer enn evnen til å forstå, beregne, anvende og resonnere. Den siste tråden Kilpatrick og Swafford (2002) inkluderer, er *Engasjement* (engaging). Tråden definerer de som ”seeing mathematics as sensible, useful, and doable – if you work at it – and being willing to do the work" (side 9). Elever bør ha en personlig tilknytning til ideen om at matematikk gir mening, og at de kan anvende faget. For å lære matematikk suksessfullt må elever ha positiv innstilling til matematikken. Engasjerte elever vet at de lærer matematikk med innsats og erfaring, og at matematikk er oppbygd av logiske og fornuftige sammenhenger (Kilpatrick & Swafford, 2002). Berglie (2009) vurderer det slik, at engasjement ikke er en undertype av verken instrumentell eller relasjonell forståelse. Engasjement handler om elevers personlige tilknytning til matematikk og har dermed ikke noe med forståelse å gjøre.

6 Matematikkundervisning

I vår studie undersøker vi, som tidligere nevnt, hvilke sammenhenger det kan være mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk og undervisningen de erfarer. For å kunne studere undervisningen, tar vi utgangspunkt i et teoretisk rammeverk som vi presenterer i det følgende.

6.1 Undervisningstrekanten

I følge Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) er det ikke tilstrekkelig å kun se på læreren og det han gjør når vi ønsker å studere matematikkundervisning. For å studere undervisningen er det nødvendig å både se på læreren, elever og det matematiske innholdet. Undervisning består imidlertid ikke av elementene i isolasjon, men av interaksjonen mellom dem. Kilpatrick et al. betrakter nærmere bestemt undervisning som interaksjon mellom lærer, elever og matematikken, som illustrert i figur 3:



Figur 3: Undervisningstrekanten (Kilpatrick et al., 2001, side 314).

Læreren, med sine intellektuelle og personlige ressurser, påvirker i følge Nipper og Sztajn (2008) interaksjonen i klasserommet. Ressursene påvirker hvordan læreren oppfatter, tolker og responderer, på elevene og det matematiske innholdet. Elevers erfaringer, forståelse og engasjement er dessuten avgjørende for hvordan de responderer på læreren og det matematiske innholdet, som er avgjørende for interaksjonen i klasserommet. Videre påvirker det matematiske innholdet undervisningen i den forstand at det enten kan legge til rette for læring, eller virke begrensende på muligheten for læring. Selv om en lærer presenterer det samme matematiske problemet for to ulike elevgrupper, blir undervisningsøktene sannsynligvis ulike, nettopp fordi undervisning handler om interaksjon mellom de tre nevnte elementene. I tillegg til elementene i trekanten, er konteksten undervisningen foregår i avgjørende for å forstå aktiviteten i et klasserom. *Konteksten* refererer til situasjonsmessige og miljømessige elementer som har betydning for undervisningen. Eksempelvis er skolens vurderingspraksis, organisatoriske struktur og lederskap elementer som påvirker undervisningen (Nipper & Sztajn, 2008). På grunn av vår studies omfang, velger vi å begrense studien av undervisning til interaksjonen mellom lærer, elever og det matematiske innholdet.

6.2 Læringsmiljø

Som utgangspunkt for vår studie av matematikkundervisning, velger vi å ta utgangpunkt i fire aspekter Cobb (2000) presenterer. Han tar for seg fire aspekter ved læringsmiljøet i klasserom, som er sentrale med tanke på elevers matematiske utvikling: 1) Oppgavene, 2) klasseromsaktivitetenes struktur, 3) verktøy og 4) klasseromsdiskursen. Aspektene presenterer vi i det følgende hver for seg, men det er viktig å presisere at de er sterkt avhengig av hverandre. Det første aspektet er *oppgavene* læreren inkluderer i undervisningen. Oppgavene kan eksempelvis være lukkede tekstoppgaver, eller åpne problemløsingsoppgaver. Det andre aspektet ved læringsmiljøet er *klasseromsaktivitetenes struktur*. Strukturen omhandler hvorvidt det foregår diskusjoner mellom elever og i plenum, og om elever arbeider individuelt eller i grupper. Dessuten nevner Cobb spørsmålet om det er læreren som starter aktiviteter og leder diskusjoner, eller om elevene tar initiativ som en del av klasseromsaktivitetens struktur. Videre inkluderer Cobb elevers bruk av *verktøy* som et aspekt ved læringsmiljøet. Aktuelle verktøy kan eksempelvis være grafisk kalkulator, konkreter og digitale matematikkprogram. I den sammenheng er det viktig å se på hvordan elever faktisk benytter verktøyene og hva de kan lære av det. Til slutt nevner Cobb klasseromsdiskursen som et sentralt aspekt ved klasserommets læringsmiljø. *Klasseromsdiskursen* dreier seg om hvordan læreren og elever kommuniserer matematikk, og er i følge Cobb det viktigste kjennetegnet på klasseromsmiljøet. Diskursen omfatter blant annet normer for hva elever og lærer regner som en tilfredsstillende matematisk forklaring, i tillegg til selve innholdet i diskusjoner som foregår i klasserommet. Ved å studere undervisningen med utgangspunkt i de fire aspektene, fanger vi opp elementene i Kilpatrick et al. (2001) sin undervisningstrekant (figur 3). Studien gir oss mulighet til å si noe om interaksjon mellom lærer, elever og det matematiske innholdet.

Det teoretiske rammeverket vi benytter for å studere klasseromsdiskursen og kommunikasjon, omtaler Gravenmeijer og Cobb (in press) som ”the emergent perspective” (tabell 1). Rammeverket tar utgangspunkt i at vi kan se klasseromsaktivitet fra to ulike perspektiver; fra et sosialt eller fra et psykologisk perspektiv. Det *sosiale perspektivet* refererer til klasseromsfellesskapet som en kollektiv gruppe (Yackel & Rasmussen, 2002). Perspektivet omhandler normgivende måter å resonnere, argumentere og handle på innad i hver klasse. Det *psykologiske perspektivet* fokuserer på hvordan hver enkelt elev resonnerer. Med andre ord handler perspektivet om hvordan elever deltar i aktiviteter i klasserommet (Cobb, 2000). Perspektivene er avhengige av hverandre og utgjør to alternativer til hvordan vi kan studere og forstå det som foregår i et klasserom (Cobb, Stephan, McClain, & Gravenmeijer, 2001).

Tabell 1: Rammeverk for analyse av klasserommets matematiske aktivitet og læring (Cobb, 2000, side 68, vår oversettelse)

Sosialt perspektiv	**Psykologisk perspektiv**
Klasserommets sosiale normer	Forestillinger om egen rolle, andres rolle, og den generelle natur til matematisk aktivitet i skolen
Sosiomatematiske normer	Matematiske forestillinger og verdier
Klasserommets matematiske praksis	Matematiske tolkninger og vurderinger

I første kolonne, under sosialt perspektiv, skiller Cobb (2000) mellom tre aspekter ved klasseromskulturen; klasserommets sosiale normer, sosiomatematiske normer og klasserommets matematiske praksis. Klasserommets *sosiale normer* refererer til den generelle deltakelsesstrukturen i klasserommet (Cobb, 2001). De sosiale normene omhandler læreres og elevers forpliktelser og forventninger til hverandres handling. Lærer og elever etablerer normene i fellesskap, og de er uavhengige av matematikk som fag (Cobb, 2000). I klasser der det foregår tradisjonell matematikkundervisning, og der det foregår undersøkende matematikkundervisning (reform mathematics)[11], er de sosiale normene markant ulike. I klasserom med tradisjonelle undervisning, består lærerens rolle i å forklare matematiske ideer og prosedyrer. Et eksempel på en sosial norm som ofte preger slike klasserom, er at elevene er forpliktet til å finne ut hva læreren mener og forventer, og til å handle deretter. Sosiale normer i klasserom der det foregår undersøkende undervisning, kan eksempelvis være at elever er forpliktet til å forklare og begrunne løsninger, og at de skal forsøke å forstå andres forklaringer (Gravenmeijer & Cobb, in press). Ved å delta i etableringen av klasserommets sosiale normer reorganiserer elever sine individuelle forestillinger. Elever reorganiserer mer bestemt sine forestillinger om egen rolle, andres rolle og matematikkaktiviteters natur. Slike forestillinger påvirker elevers videre deltakelse i etableringen av sosiale normer. De sosiale normene og elevers forestillinger om egen og andres rolle og matematikkaktiviteters natur, er dermed refleksivt forbundet (Cobb, 2000). Forbindelsen mellom dem impliserer at de sosiale normene og elevers forestillinger utvikles sammen som et dynamisk system (Yackel & Rasmussen, 2002).

Det andre aspektet ved klasseromskulturen Cobb (2000) presenterer, er *sosiomatematiske normer*. Sosiomatematiske normer refererer til normer for handling og interaksjon i klasserommet, som er spesifikke for matematikk. Normer for hva som er en avansert eller effektiv løsning, og for hva som er en akseptabel matematisk forklaring og begrunnelse er eksempler på sosiomatematiske normer (Yackel & Cobb, 1996). Elever og lærer utvikler sosiomatematiske normer i fellesskap og definerer stadig normene på nytt. Når elever deltar i slike fellesaktiviteter utvikler de spesielle matematiske forestillinger og verdier. De utvikler blant annet forestillinger om hva som er en akseptabel, avansert og effektiv matematisk løsning og forklaring (Gravenmeijer & Cobb, in press). Slike forestillinger påvirker elevers videre forhandling om sosiomatematiske normer. Elevers matematiske forestillinger og verdier er dermed refleksivt forbundet med de sosiomatematiske normene (Cobb, 2000).

[11] Vi velger å oversette ”reform mathematics” til undersøkende matematikkundervisning

Klasserommets matematiske praksis er det siste aspektet ved klasseromskulturen Cobb (2000) presenterer. Aspektet omslutter normgivende måter å handle og kommunisere på i matematikk. Praksisen oppstår under elevers arbeid med for eksempel et forsøk. Den matematiske praksisen er dermed spesifikk for bestemte emner og er ikke stabil over tid (Gravenmeijer & Cobb, in press). Praksisen korrelerer med hver enkelt elevs matematiske tolkninger og vurderinger, som befinner seg under det psykologiske perspektivet på klasseromsaktivitet (Cobb, 2000).

7 Sammenhenger mellom undervisning og elevers matematikkrelaterte forestillinger

Vårt søk etter litteratur[12] tyder på at det ikke finnes studier om sammenhenger mellom elevers forestillinger om forståelse og matematikkundervisning. Flere matematikkdidaktikere har imidlertid studert hvordan undervisning påvirker elevers matematikkrelaterte forestillinger, og hvordan forestillingene påvirker elevers tilnærming til matematikken. I det følgende presenterer vi studier der forskeren undersøker slike sammenhenger.

I følge Carter og Norwood (1997) er det åpenbart at undervisningen elever erfarer, påvirker deres matematikkrelaterte forestillinger. Carter og Norwood gjennomfører en kvantitativ studie der de undersøker hvorvidt læreres forestillinger om undervisning og læring i matematikk gjenspeiler seg i elevers forestillinger. Spørreskjemaet de benytter for å få et innblikk i elevers forestillinger inkluderer blant annet forestillinger om forståelse. Elevers forestillinger om forståelse viser seg å være signifikant ulike i klasser der læreren har forestillinger i tråd med undersøkende undervisning, og der læreren har forstillinger i tråd med tradisjonell undervisning. I førstnevnte klasser har flere elever en forestilling om at de gjør det godt i matematikk når de arbeider hardt for å løse problemer. Videre har de en forestilling om at å gjøre det godt i matematikk handler om å forstå. Et slikt forhold mellom læreres og elevers forestillinger er imidlertid ikke er nok til å hevde at undervisningen elever erfarer påvirker deres forestillinger. Begrunnelsen er at mange faktorer, i tillegg til lærerens forestillinger, påvirker undervisningen (Carter & Norwood, 1997). Flere matematikkdidaktiske forskere gjennomfører studier av læreres matematikkrelaterte forestillinger. Studiene viser at selv om læreres forestillinger ikke er eneste relevante faktor i forhold til undervisning, må det være det være en positiv korrelasjon mellom forestillingene og undervisningen (Skott, 2000; Thompson, 1992). På grunn av likheter mellom elevers forestillinger innad i en klasse og forskjeller i elevers forestillinger mellom klasser, konkluderer Carter og Norwood med at undervisningen må påvirke elevers forestillinger til en viss grad (Carter & Norwood, 1997).

[12] Se søkeoversikt, Vedlegg 1

Hannula (accepted) hevder, i likhet med Carter og Norwood, at undervisningen i matematikk påvirker elevers matematikkrelaterte forestillinger. Hannula gjennomfører en studie der han blant annet undersøker hvordan klasseromskonteksten påvirker elevers matematikkrelaterte forestillinger. Resultatene fra studien indikerer at det er en viss likhet blant elever i samme klasse når det gjelder enkelte matematikkrelaterte forestillinger. Derfor vurderer Hannula det som sannsynlig at klasseromskonteksten elever erfarer påvirker deres forestillinger. Vi ønsker å påpeke at Hannula ikke definerer hva han legger i begrepet klasseromskontekst. Slik vi tolker det, kan vi benytte klasseromskontekst på samme måte som undervisning, da vår definisjon på undervisning (Kilpatrick et al., 2001) er nokså vid. Vi ser som sagt på undervisning som interaksjon mellom elever, lærer og det matematiske innholdet.

I tillegg til at undervisningen påvirker elevers matematikkrelaterte forestillinger, påvirker forestillinger deres tilnærming til matematikken. Pehkonen (1995) hevder at elevers matematikkrelaterte forestillinger fungerer som et regulerende system for deres konstruksjon av kunnskap. I følge Furinghetti og Pehkonen (2003) vil en elev som mener at matematikk handler om å følge et utvalg regler og formler, ha vansker med løse oppgaver som krever mer enn ren tallbehandling. De hevder at eleven vil ha problemer med å utvikle forståelse i matematikk. Furinghetti og Pehkonen påpeker dessuten at elevers matematikkrelaterte forestillinger kan ha affektive konsekvenser. En affektiv konsekvens av den nevnte elevens forestillinger, kan være at han ikke ser gleden av å arbeide med matematiske oppgaver.

Det er, i følge Spangler (1992), en syklisk sammenheng mellom elevers forestillinger og deres læring. Elevers erfaringer fra matematikkundervisningen er på en side med på å forme deres forestilling om hva det vil si å lære matematikk. På en annen side, har elevers matematikkrelaterte forestillinger stor innvikning på deres tro på egne evner og vilje til å engasjere seg i matematikkoppgaver.

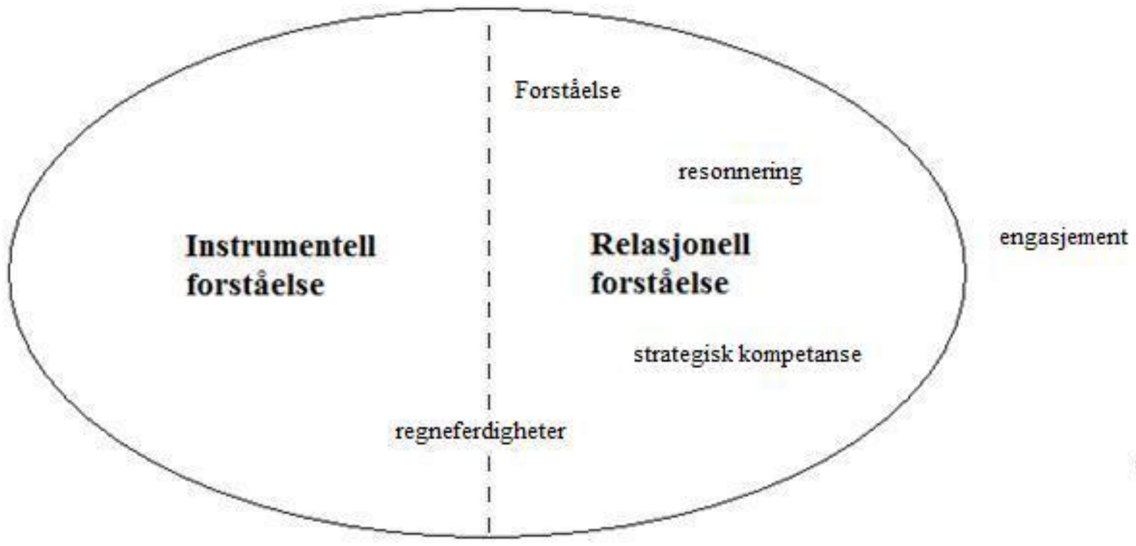
8 Teoretisk rammeverk

Vi studerer som sagt mulige sammenhenger mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk og undervisningen de erfarer. I det følgende presenterer vi det teoretiske rammeverket vi benytter for å kunne belyse vår problemstilling.

8.1 Elevers forestillinger om forståelse

For å kunne si noe om hvilke forestillinger om forståelse i matematikk elever kan ha, velger vi å benytte verktøyet Berglie (2009) har utviklet. Analyseverktøyet presenterer vi i det følgende og begrunner vårt valg av verktøy.

I sin studie tar Berglie utgangspunkt i relasjonell og instrumentell forståelse (Skemp, 1987). Hennes argumentasjon for hvordan de fire aktuelle trådene i matematisk kyndighet (Kilpatrick et al., 2001) kan inngå som komponenter i de to formene for forståelse, presenterte vi i kapittel 5. Hennes verktøy viser en nyansering av instrumentell og relasjonell forståelse ved de fire aktuelle trådene i matematisk kyndighet slik figur 4 viser:



Figur 4: Analyseverktøyet; instrumentell og relasjonell forståelse nyansert ved hjelp av fire tråder i matematisk kyndighet (Berglie, 2009, side 36)**.**

Berglie er den eneste[13] som gjennomfører en studie av elevers forestillinger om forståelse i matematikk. Hun benytter analyseverktøyet i en studie av ungdomsskoleelever mens vi i vår studie studerer elever ved videregående skole. Vi kan imidlertid ikke se at det kan medføre problemer for oss. Hennes diskusjon av hvordan trådene i matematisk kyndighet forholder seg til instrumentell og relasjonell forståelse, vurderer vi som grundig og velbegrunnet. Det er helt klart en fordel for oss at Berglie har benyttet analyseverktøyet før. Vi ser det i tillegg som fordelaktig at hennes resultater indikerer at verktøyet er godt egnet til å gi et detaljert bilde av elevers forestillinger om forståelse.

Tidlig i arbeidet med studien vurderte vi å benytte Törner og Grigutsch (1994, i Liljedahl, 2009) sine tre aspekter ved en elevs forestillinger om matematikk og matematisk aktivitet, som utgangspunkt for utvikling av et analyseverktøy. Vi vurderte å nyansere instrumentell og relasjonell forståelse ved hjelp av de tre aspektene 1) verktøykasse, 2) system og 3) prosess, slik Berglie (2009) gjør ved hjelp av de fire aktuelle trådene i matematisk kyndighet. I det følgende argumenterer vi for hvorfor vi imidlertid velger å støtte oss til Berglies verktøy. For å begrunne vårt valg sammenligner vi de fire aktuelle trådene i matematisk kyndighet med de tre aspektene verktøykasse, system og prosess. Aspektet verktøykasse har, slik vi tolker det, likhetstrekk med Regneferdigheter. I begge tilfeller skal elever anvende regler, formler og regneoperasjoner. Verktøykasse som aspekt skiller imidlertid ikke mellom å anvende prosedyrer fleksibelt, nøyaktig, eller effektivt slik tråden Regneferdigheter gjør. Skillet mellom fleksibel eller effektiv bruk av prosedyrer er etter vår vurdering vesentlig. På den måten står Regneferdigheter med en fot innenfor både relasjonell og instrumentell forståelse. Hvorvidt aspektet verktøykasse kan inngå som komponent i enten instrumentell eller relasjonell forståelse er vanskelig å si, da vi ikke får innsikt i hvorvidt matematikk handler om effektiv eller fleksibel bruk av prosedyrene. En elev som betrakter matematikk som et system, vektlegger logikk, nøyaktige bevis, eksakte definisjoner og et presist matematisk språk. Vi ser ett likhetstrekk mellom systemaspektet og Resonnering, da begge inkluderer logikk. Ellers er det store foreskjeller på systemaspektet og tråden Resonnering, i den forstand at Resonnering

[13] Se Vedlegg 1 for søkeoversikt

handler om å forklare og begrunne løsninger i tillegg til å gå fra noe kjent til noe ukjent. System handler derimot om nøyaktige bevis, eksakte definisjoner og et presist matematisk språk. Etter vår vurdering er det å forklare og begrunne løsninger i matematikk en vesentlig komponent i relasjonell forståelse. En forestilling om at matematikk handler om nøyaktige bevis, eksakte definisjoner og et presist matematisk språk, finner vi vanskelig å plassere i forhold til instrumentell og relasjonell forståelse. Vi sammenligner prosessaspektet med Strategisk kompetanse da begge innebærer at matematikk er en konstruksjonsprosess, eksempelvis gjennom utledning av regler og formler. Strategisk kompetanse innebærer i tillegg at elever skal formulere problemer, noe de tre aspektene ikke omfatter. Prosessaspektet har dessuten likhetstrekk med Forståelse ved at relasjoner i matematikk står sentralt i begge. Forståelse innebærer i tillegg at elever skal forstå matematiske begreper, symboler og prosedyrer, som vi mener er en vesentlig komponent i relasjonell forståelse.

Slik vi vurderer det, er de fire trådene i matematisk kyndighet bedre egnet enn de tre aspektene til å nyansere instrumentell og relasjonell forståelse. Trådene i kyndighet inkluderer flere elementer enn de tre aspektene, bortsett fra at systemaspektet omfatter eksakte definisjoner og et presist matematisk språk.

8.2 Lærerens fokus i undervisningen

Som utgangspunkt for vår studie av undervisning, benytter vi Cobbs (2000) fire aspekter ved et klasseroms læringsmiljø, både til observasjon og analyse av observasjonsdataene. I det følgende begrunner vi vårt valg av rammeverk for analyse av observasjonsdata fra matematikkundervisningen.

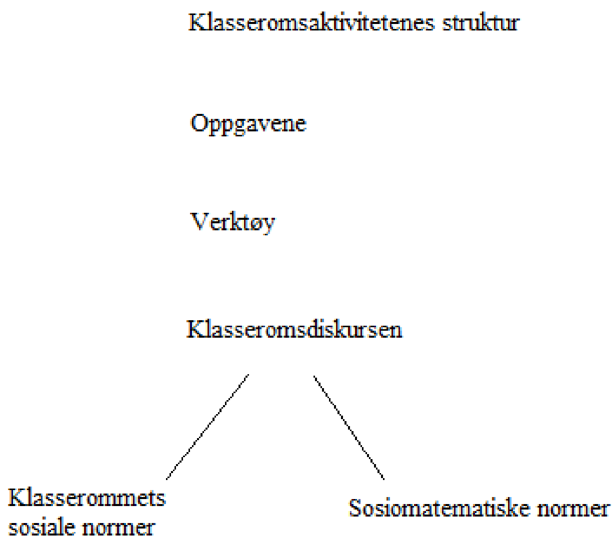
Vi analyserer observasjonsdataene med utgangspunkt i klasseromsaktivitetenes struktur, oppgavene, verktøy og klasseromsdiskursen. De tre første aspektene benytter vi i analysen fordi de er med på å danne et helhetlig bilde av undervisningen. Det siste aspektet består, i følge Cobb (2000), av klasserommets sosiale normer, sosiomatematiske normer og matematiske praksis.

Cobb påpeker at klasserommets sosiale normer er refleksivt forbundet med elevers forestillinger om egen rolle, andres rolle, og den generelle natur til matematisk aktivitet i skolen. Vår vurdering er vi kan plassere elevers forestillinger om forståelse under elevers forestillinger om egen og andres rolle og den generelle natur til matematisk aktivitet i skole (tabell 1). En forestilling om forståelse vi kan plassere under forestillinger om egen rolle, er eksempelvis forestillingen ”for å forstå matematikk, må jeg regne oppgaver fra læreboken raskt og effektivt”. Videre kan vi plassere en forestilling om at lærerens rolle består i å vise elever hvordan de kan anvende ulike algoritmer i den samme kategorien. Dessuten inngår forestillinger om forståelse, for eksempel en forestilling om at matematikk handler om å se sammenhenger, i forestillinger om matematikkaktiviteters natur. På den måten mener vi at klasserommets sosiale normer er forbundet med elevers forestillinger om forståelse. Vi anser det derfor som hensiktsmessig å analysere observasjonsdataene med utgangspunkt i klasserommets sosiale normer, slik at vi i tillegg får et innblikk i elevenes forestillinger om forståelse.

På samme måte mener vi at ved å analysere observasjonsdataene med utgangspunkt i sosiomatematiske normer, får vi innblikk i elvers forestillinger om forståelse. I følge Cobb (2000) er de sosiomatematiske normene refleksivt forbundet med elevers matematiske forestillinger og verdier (tabell 1). Vår vurdering er at klasserommets sosiomatematiske normer er forbundet med elevers forestillinger om forståelse, da vi kan plassere forestillinger om forståelse under matematiske forestillinger. En elev kan for eksempel ha en forestilling om at ”en god forklaring på derivasjon er at vi finner stigningstallet til en tangent i et punkt på grafen”. Vi mener det er en forestilling om forståelse, som vi kan plassere under matematiske forestillinger og verdier.

Det tredje elementet i rammeverket til Cobb (2000) er klasserommets matematiske praksis. Elever og lærer utvikler praksisen under arbeid med for eksempel et bestemt forsøk som medfører at praksisen ikke er stabil over tid. Vi analyserer derfor ikke observasjonsdataene med utgangspunkt i den matematiske praksisen. Klasserommets matematiske praksis er dessuten ikke refleksivt forbundet med elevers forestillinger.

Vårt utgangspunkt for analyse av observasjonsdataene, illustrerer vi i figur 5:



Figur 5: Utgangspunkt for analyse av observasjonsdata (inspirert av Cobb, 2000)

9 Metode

For å undersøke hvilke sammenhenger det kan være mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk og undervisingen de erfarer, gjennomførte vi en kvalitativ studie. Kvalitative studier handler, i følge Mertens (2005), om å studere mennesker i sine naturlige omgivelser. For å få et innblikk i elevers matematikkrelaterte forestillinger anbefaler Spangler (1992) å benytte uformelle diskusjoner preget av åpne spørsmål. I tillegg hevder han at det kan være hensiktmessig å observere matematikkundervisningen med fokus på interaksjon mellom elever. Våre valg i forhold til metode presenterer vi og begrunner i det følgende. I tillegg presenterer vi utvalget studien er basert på.

9.1 Valg av metode

Valget om hvorvidt vi skal benytte kvalitative eller kvantitative metoder begrunner vi ut fra tre forhold; vår vitenskapsteoretiske posisjon, forskningsspørsmålet og ulike praktiske forhold (Mertens, 2005). Vi plasserer oss som tidligere nevnt innenfor det konstruktivistiske paradigmet. Paradigmet er preget av tanken om at virkeligheten er sosialt konstruert, og tanken om at virkeligheten er i stadig utvikling. Innenfor et slikt paradigme er det, i følge Mertens (2005), hensiktsmessig å gjennomføre kvalitative studier. Videre er forskningsspørsmålet avgjørende for våre valg av metoder. Vi ønsker å få innblikk i elevers forestillinger, som er nokså komplekse og ofte ubevisste (Pehkonen, 2003). I følge Lester (2002) er forestillinger skjult i den forstand at vi kun kan studere forestillinger ved å utlede dem fra hvordan mennesker tenker og handler. For å undersøke hvilke forestillinger elever har, mener vi derfor at det er hensiktsmessig å benytte kvalitative metoder. På den måten kan vi danne et bilde av forestillingene ved å tolke dataene vi samler inn. Enkelte praktiske forhold påvirker i tillegg våre valg av metoder. Det finnes, som tidligere nevnt, lite forskning på elevers forestillinger om forståelse i matematikk[14]. Vi har dermed ikke grunnlag for å gjennomføre en større kvantitativ undersøkelse, da undersøkelsen må bygge på solid kunnskap om elevers forestillinger.

[14] Se søkeoversikt, Vedlegg 1

9.2 Utvalg

I vår masterstudie ble utvalget foretatt på grunnlag av to kriterier. Det første kriteriet dreide seg om målgruppa. Vi ønsket å studere elever fra videregående skole, da vår oppfatning er at de har et mer bevisst forhold til matematikk og egen læring enn elever fra for eksempel en ungdomsskole. Det andre kriteriet var undervisningen elevene erfarer. Vi ønsket både å studere tradisjonell undervisning og undersøkende undervisning.

9.2.1 Førsteutvalg

Utvalget består av to skoleklasser ved to ulike skoler; Vikstrand videregående skole og Bakkegata videregående skole[15]. Den ene klassen valgte vi på grunnlag av en anbefaling fra veilederen vår. Veilederen foreslo at vi kontaktet en lærer ved Vikstrand vgs. som gjennomfører undersøkende matematikkundervisning. I klassen er det 10 elever som har faget 1T. Matematikkfaget 1T er et teoretisk fag for elever på Vg1. Den andre klassen i utvalget er en klasse ved en videregående skole vi har kjennskap til. Fra egen erfaring vet vi at undervisningen ved Bakkegata vgs. i stor grad følger et tradisjonelt mønster. Vi kjenner læreren vi kontaktet og vet at han underviser nokså tradisjonelt. Klassen er en 1T-klasse bestående av 28 elever. I utgangspunktet hadde vi ikke krav om hvilket matematikkfag klassene vi valgte ut skulle ha. Ved Bakkegata vgs. kunne vi velge mellom to klasser og vi valgte derfor den klassen som hadde det samme faget som klassen ved Vikstrand vgs. Det medfører forhåpentligvis at elevene i klassene er på omtrent samme refleksjonsnivå når det gjelder sitt forhold til matematikk og matematikklæring.

9.2.2 Andreutvalg

Utvelgelsen av elever til intervju gjorde vi på grunnlag av tre kriterier. Det første kriteriet var at elevene skulle være på ulikt faglig nivå. Det andre kriteriet var at utvalget skulle bestå av omtrent likt antall gutter og jenter. Til slutt ønsket vi at elevene skulle være ulike med tanke på hvor aktive de er muntlig. På bakgrunn av kriteriene valgte vi fire elever fra hver klasse; to jenter og to gutter. Observasjon av elevene i klasserommet

[15] Vi velger å forkorte videregående skole til vgs. i det følgende.

og samtaler med lærerne dannet grunnlaget for utvelgelsen av de åtte elevene. Elevene vi valgte anså vi som interessante i forhold til forskningsspørsmålet vårt, i den forstand at vi forventet at de hadde noe å fortelle om matematikk og matematikkundervisning.

Tre av de fire elevene i utvalget fra Vikstrand vgs. oppfyller våre kriterier for utvelgelse. De er på ulikt faglig nivå og viser ulikt muntlig aktivitetsnivå. Når det gjelder den fjerde eleven, hadde vi opprinnelig valgt ut ei jente. Hun var ikke til stede den dagen vi gjennomførte intervjuene og vi hadde ikke mulighet til å intervjue henne på et senere tidspunkt. Vi valgte derfor en annen jente i klassen, men hun ønsket ikke å delta på intervjuet. Ettersom det kun var fire jenter i klassen var det bare ett alternativ igjen, da vi ønsket å intervjue to elever av hvert kjønn. Jenta vi valgte til slutt var nokså lik en av de andre elevene vi ønsket å intervjue med tanke på faglig nivå og aktivitetsnivå. Det medfører at utvalget fra Vikstrand vgs. ikke oppfyller kriteriene for utvelgelse til det fulle. Når det gjelder elevene fra Bakkegata vgs., oppfyller de våre kriterier. Elevene i utvalget, to jenter og to gutter, er på ulikt faglig nivå og de viser ulikt muntlig aktivitetsnivå i matematikktimene.

9.3 Observasjon

Vi ønsket å danne et bilde av læringsmiljøet i de to ulike klassene ved å benytte observasjon som metode. Observasjonen gav oss dessuten et bilde av de ulike elevene i klassene, som var med på å danne grunnlaget for utvelgelse av elever til intervju.

9.3.1 Teoretisk utgangspunkt for observasjon

Som teoretisk utgangspunkt for observasjon benyttet vi blant annet tre avaspektene til Cobb (2000); klasseromsaktivitetenes struktur, oppgavene og verktøy. Vi tok utgangspunkt i aspektene, da vi anser dem som sentrale for å kunne gi et helhetlig bilde av undervisningen. Videre observerte vi med utgangspunkt i klasserommets sosiale og sosiomatematiske normer (figur 5), som er en del av klasserommets sosiale perspektiv. Cobb påpeker at klasserommets sosiale og psykologiske perspektiv utgjør to alternativer til hvordan vi kan forstå det som foregår i klasserommet. Ved å observere undervisning med utgangspunkt i det sosiale perspektivet kan vi dermed danne et bilde av undervisningen og i tillegg få et inntrykk av elevers matematikkrelaterte forestillinger, noe vi begrunner i det følgende.

Det sosiale perspektivet består for det første av klasserommets sosiale normer, som er refleksivt forbundet med elevers forestillinger om sin egen og andres rolle, og den generelle natur til matematisk aktivitet i skolen (Cobb, 2000). Vår vurdering er at slike forestillinger i tillegg sier noe om elevers forestillinger om forståelse i matematikk For det andre er sosiomatematiske normer, i følge Cobb, refleksivt forbundet med elevers matematiske forestillinger og verdier. Slik vi vurderer det, kan elevers matematiske forestillinger si noe om deres forestillinger om forståelse. I den forstand kunne vi få et innblikk i elevers forestillinger om forståelse ved å observere undervisningen med fokus på klasserommets sosiale normer og sosiomatematiske normer. Vi må imidlertid vurdere hvorvidt sosiale og sosiomatematiske normer er forbundet med alle mulige forestillinger elever kan ha om forståelse i matematikk. Vår påstand er at forestillingene som korrelerer med sosiale og sosiomatematiske normer (tabell 1) kan si noe om samtlige kategorier av matematikkrelaterte forestillinger i Op 't Eynde et al. (2003) sitt rammeverk, som vi tidligere har presentert. Slik vi vurderer det kan forestillingene Cobb (2000) inkluderer både si noe om forestillinger om matematikkopplæring, selvet og den sosiale konteksten. På den måten kunne vi ved å observere med utgangspunkt i klasserommets sosiale og sosiomatematiske normer, si noe om alle mulige forestillinger elever kan ha om forståelse i matematikk. Datamaterialet fra observasjon beriket dermed vår tolkning av elevenes respons på spørsmål i intervjuene. Slik bruk av ulike metoder omtaler Mertens (2005) som datatriangulering. Bruk av flere metoder for datainnsamling kan styrke våre tolkninger og konklusjoner, og kan på den måten være med på å styrke undersøkelsens validitet[16].

9.3.2 Gjennomføring av observasjon

I vår observasjon av undervisningen var vi deltakende observatører, som er en mye brukt metode innenfor kvalitativ forskning (Mertens, 2005). Vi var *perifer-medlem-forskere,* som innebærer at vi observerte og samhandlet nært nok med elevene til å

[16] Validiteten referer til hvorvidt vi måler det som er relevant i sammenhengen. Vi vil komme tilbake til det i kapittel 12

etablere et innsideperspektiv på det som foregikk i klassen uten å forstyrre deres aktivitet (Mertens, 2005). Vi observerte hver klasse i fire undervisningstimer[17], der to timer dannet en undervisningsøkt. Under observasjonen satt vi på hver vår kant av klasserommet for å få oversikt over det som foregikk. I oppstartsfasen dannet vi oss et bilde av det *fysiske miljøet* i klasserommet for å kunne gi en tilstrekkelig beskrivelse av situasjonen vi befant oss i (Mertens, 2005). Vi tegnet en skisse av klasserommet som viste hvor hver elev satt. Videre noterte vi det som skjedde i klasserommet og hadde samtidig fokus på de fire aspektene til Cobb (2000). Vi noterte fritt og markerte situasjoner eller utsagn som kunne si noe om klasseromsaktivitetenes struktur, oppgaver, verktøy eller klasseromsdiskursen. For å fange opp samtaler mellom elever og lærer som var utydelige bar læreren båndopptaker. Lydopptaket gav oss mulighet til å fokusere på samtaler i klasserommet, som spesielt kunne si noe om sosiale og sosiomatematiske normer som preget klassen.

9.3.1 Analyse av observasjon

Etter hver undervisningsøkt gikk vi gjennom notatene fra observasjonen hver for oss. Der notatene var mangelfulle hørte vi på lydopptakene fra undervisningsøkta og føyde til det som manglet. Deretter diskuterte vi observasjonsdataene for å undersøke om vi oppfattet ulike situasjoner likt. Dersom vi hadde ulike oppfatninger diskuterte vi den aktuelle situasjonen, hørte på lydopptaket og ble enige om en felles oppfatning. En slik kryssjekking av våre funn og fjerning av unøyaktige tolkninger, hevder Mertens (2005) kan øke undersøkelsens troverdighet. Videre benyttet vi Cobbs aspekter (figur 5), ved å strukturere notatene etter hvorvidt de kunne si noe om klasseromsaktivitetenes struktur, oppgavene, verktøy, sosiale normer, eller sosiomatematiske normer. Da vi var ferdige med observasjonen ved en skole, sammenfattet vi notatene fra begge undervisningsøktene i én sammenhengende tekst. Vi analyserte deretter tekstene ved hjelp av Berglies (2009) analyseverktøy (figur 4), for å kunne si noe om hva læreren i hver klasse vektlegger i undervisningen.

[17] En undervisningstime varte i 45 minutter.

9.4 Intervju

Den andre kvalitative metoden vi benyttet er intervju. Analyse av datamaterialet fra intervjuene danner hovedgrunnlaget for å kunne gi et bilde av elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Metoden er, i følge Mertens (2005), godt egnet dersom vi ønsker å forstå en persons inntrykk eller erfaringer. Ved å intervjue elevene hadde vi mulighet til å følge opp interessante svar og undersøke underliggende motiver. Dessuten kunne vi tolke ikke-verbale signaler fra informantene som enten støttet opp om den verbale responsen, eller som endret vår forståelse av den. Det vi imidlertid måtte være bevisst på ved bruk av intervju som metode, er at vi som forskere ubevisst kunne påvirke informantenes svar (Mertens, 2005).

Høsten 2009 gjennomførte vi en pilotundersøkelse der vi undersøkte hvorvidt narrative intervju er en velegnet metode for å studere elevers forestillinger om forståelse. Et *narrativt intervju* er kjennetegnet av fokus på historier som informanten forteller (Kvale & Brinkmann, 2009). Spørsmålet vi baserte intervjuene på var: ”Kan du fortelle, både på godt og vondt, om matematikkundervisning du har erfart oppgjennom årene og om ditt eget arbeid med matematikk?”. Vår erfaring er at en intervjuform som krever at informantene forteller fritt, er utfordrende for elever ved videregående skole. Vi opplevde at elever ikke har et så bevisst og reflektert forhold til matematikk og matematikkundervisning som vi hadde håpet. I arbeidet med masteroppgaven benyttet vi av den grunn en mer strukturert intervjuform som gir rom for å stille flere spørsmål. Vi anså det som hensiktsmessig å gjennomføre *semistrukturerte intervju*. Det innebar blant annet at intervjuet skulle dekke bestemte temaer (Kvale & Brinkmann, 2009).

9.4.1 Begrunnelse av intervjuspørsmål

Vi utviklet en intervjuguide[18] med tanke på å få kvalitative beskrivelser fra elevene i forhold til de fire aktuelle trådene i matematisk kyndighet. Intervjuspørsmålene utviklet vi med utgangspunkt i kategoriene av elevers matematikkrelaterte forestillinger Op ’t Eynde et al. (2003) presenterer. Vår vurdering er at slike forestillinger i tillegg kan si noe om elevers forestillinger om forståelse. Op ’t Eynde et al. skiller mellom forestillinger om matematikkopplæring, selvet og den sosiale konteksten. Vi vurderer

[18] Se Vedlegg 2

det slik at en elevs forestillinger om matematikkopplæring, på mange måter kan si noe om elevens forestillinger om forståelse i matematikk. Eksempelvis kan forestillingen ”matematikk handler om å se sammenhenger” både si noe om forestillinger om matematikkopplæring og om forståelse. En forestilling om selvet kan være ”problemløsingsoppgaver gjør at jeg lærer matematikk best”. Vår vurdering er at forestillingen kan si noe om en elevs forestillinger om forståelse. En elevs forestillinger om den sosiale konteksten kan på samme måte gi oss et innblikk i elevens forestillinger om forståelse. Forestillingene ”I vår klasse må vi begrunne våre svar” og ”en god forklaring er å vise hvordan jeg har brukt en formel” er eksempler på forestillinger om den sosiale konteksten, som etter vår vurdering kan si noe om elevers forestillinger om forståelse. Som vi ser kan samtlige kategorier romme forestillinger som sier noe om elevers forestillinger om forståelse. Vi utviklet derfor spørsmål fra hver kategori, som vi mener kan gi respons som gir innblikk i elevers forestillinger om forståelse. Grunnen til at vi valgte å ikke spørre elevene direkte om hvilke forestillinger de har, er at forestillinger, i følge Pehkonen (2003), ofte er ubevisste. Vi vurderte det derfor som hensiktsmessig å stille spørsmål som indirekte kan si noe om elevenes forestillinger.

I det følende presenterer vi spørsmålene i intervjuguiden med begrunnelser for hvorfor vi inkluderte hvert spørsmål. I følge Kvale og Brinkmann (2009) bør spørsmålene i intervjuguiden være formulert kort og enkelt, noe vi forsøkte å ta hensyn til. Intervjuguiden inneholder følgende 11 hovedspørsmål:

Spørsmål 1: Kan du fortelle om matematikkundervisningen dette skoleåret på godt og vondt?
Spørsmål 2: Hva synes du om matematikkundervisningen dette skoleåret?
Spørsmål 3: Hva synes du kjennetegner en god matematikktime?
Spørsmål 4: Hva synes du læreren din legger vekt på i undervisningen?
Spørsmål 5: Hvordan lærer du matematikk best?
Spørsmål 6: Hva gjør du når du møter problemer som du ikke greier å løse med en gang?
Spørsmål 7: Når føler du at du lykkes i matematikk?
Spørsmål 8: Tenk på en elev som du synes er god i matematikk. Kan du beskrive hva det er som gjør at den eleven er god i matematikk?
Spørsmål 9: Er matematikk likt noen av de andre fagene du har på skolen?
Spørsmål 10: Hva handler matematikk egentlig om?
Spørsmål 11: Hvis du kunne endre matematikkundervisningen, hva ville du gjort?

Det innledende spørsmålet kan gjerne referere til en konkret situasjon (Kvale & Brinkmann, 2009). Vi velger å be elevene fortelle om matematikkundervisningen de har erfart inneværende skoleår. Spørsmålet benyttet vi i pilotundersøkelsen vår. Responsen fra elevene opplevde vi den gang som god og den åpnet for at vi kunne stille flere spørsmål. Inspirasjon til spørsmålet fikk vi fra Wæge (2007). Vi ønsker at elevene skal fortelle nokså fritt. Idet vi får inntrykk av at elevene er ferdige med å fortelle, legger vi frem lapper[19] på pulten foran dem. På hver lapp har vi skrevet et matematisk emne elevene har arbeidet med i løpet av skoleåret, for eksempel trigonometri og derivasjon. Hensikten med lappene er at det skal være lettere for elevene å fortelle mer om undervisningen. For å få informantene til å utdype sine svar kan det, i følge Robson (1993), være hensiktsmessig å formulere såkalte ”probes”. Vi formulerer derfor underspørsmål til flere av spørsmålene i intervjuguiden. I tilfeller der elevene synes det er vanskelig å forholde seg til det innledende spørsmålet, spør vi om de kan fortelle om undervisningsopplegg de likte spesielt godt eller spesielt dårlig.

Det andre spørsmålet, ”Hva synes du om matematikkundervisningen dette skoleåret?” mener vi kan bidra til å gi et innblikk i elevers forestillinger om forståelse. Ved at de gir uttrykk for hva de synes om undervisningen, kan vi få et inntrykk av hvilke tråder i matematisk kyndighet de vektlegger. Videre mener vi at elevenes vektlegging av de ulike trådene kan komme enda tydeligere frem gjennom spørsmål tre; ”Hva synes du kjennetegner en god matematikktime?”. Wedege et al. (2006) og Boaler (1997) benytter spørsmålet i sine studier. Vi håper at elevenes respons kan si noe om hvilke tråder i matematisk kyndighet de vektlegger; om de for eksempel fokuserer på Resonnering eller Regneferdigheter. Det fjerde spørsmålet ”Hva synes du læreren din legger vekt på i undervisningen?” stiller vi elevene for å få et inntrykk av hvilke tråder de oppfatter at læreren fokuserer på. Vi mener at responsen kan si noe om elevenes forestillinger om forståelse i matematikk.

Vi henter inspirasjon til det femte spørsmålet fra Wæge (2007). Samtidig som vi spør elevene om hvordan de lærer matematikk best, legger vi frem lapper. På hver lapp har vi

[19] Se Vedlegg 3

skrevet en arbeidsform[20]. Vi legger blant annet frem lappene ”Vi leter etter mønstre og systemer” og ”Jeg samarbeider med andre”. Hensikten med spørsmålet er å undersøke hvilke tråder elevene fokuserer på, gjennom det de sier om de ulike lappene. Det de sier om å samarbeide med andre kan for eksempel gi et inntrykk av hva de mener med å resonnere. Spørsmålet ”Hva gjør du når du møter problemer som du ikke greier å løse med en gang” er inspirert av Boaler (2002). Elevenes respons på spørsmålet kan si noe om deres forestillinger om forståelse ved at vi får et inntrykk av om de for eksempel vektlegger Resonnering eller Strategisk kompetanse.

Det sjuende spørsmålet, om når elevene føler at de lykkes i matematikk, henter vi fra intervjuguiden til Wæge (2007). Vi benyttet spørsmålet i vår pilotundersøkelsen. Responsen vi fikk i forbindelse med pilotundersøkelsen gav oss innblikk i elevenes forestillinger om forståelse ved at de for eksempel svarte at de lykkes når de løser mange oppgaver raskt og effektivt. Elevenes respons på spørsmålet kan gi innblikk i hva de mener med suksessfull matematikklæring, altså hvilke tråder i matematisk kyndighet de vektlegger. Med spørsmål åtte ønsker vi at elevene skal beskrive en elev de synes er god i matematikk, et spørsmål både Berglie (2009) og Spangler (1992) benytter. Spørsmålet kan bidra til å si noe om hva elevene synes er viktig når det gjelder suksessfull matematikklæring.

Spørsmål nummer ni henter vi fra intervjuguiden til Boaler (1997). Hun benytter spørsmålet i en studie der hun blant annet undersøker hvorvidt ulike læringsmiljø påvirker elevenes kunnskap og forståelse. Spangler (1992) benytter dessuten et liknende spørsmål i sin studie. Hensikten med å spørre elevene om de synes matematikk er likt noen av de andre fagene på skolen, er å avdekke hva elevene mener matematikk handler om uten å spørre dem direkte. Videre spør vi elevene direkte om hva de mener matematikk handler om, som er vårt tiende spørsmål. Spørsmålet benytter både Wæge (2007) og Berglie (2009). Elevenes respons på de to spørsmålene kan si noe om hvordan de ser på matematikk som fag og hvilke tråder i matematisk kyndighet de vektlegger. Avslutningsspørsmålet ”Hvis du kunne endret matematikkundervisningen, hva ville du gjort?” er hentet fra Boaler (1997). Elevenes respons kan si noe om deres

[20] Se Vedlegg 4

vektlegging av de ulike trådene i matematisk kyndighet. Spørsmålet kan i tillegg avdekke om elevene har matematikkrelaterte forestillinger som samsvarer, eller er i konflikt, med undervisningen slik de selv oppfatter den.

Til slutt i intervjuguiden inkluderer vi spørsmål av mer direkte art, for eksempel ”Når du sier at du har forstått en oppgave eller teori i matematikk, hva legger du i det?”. Spørsmålene tar vi med for å sikre at vi får materiale å arbeide med i analysen i tilfelle resten av intervjuet gir oss lite materiale. Slike spørsmål bør vi i følge Kvale og Brinkmann (2009) eventuelt stille avslutningsvis, etter at informantene har gitt sine egne, spontane beskrivelser.

9.4.2 Gjennomføring av intervju

I det følgende presenterer vi vår gjennomføring av intervjuet. Det er, i følge Kvale og Brinkmann (2009), hensiktsmessig å innlede intervjuet med en brifing; at vi for eksempel forteller kort om intervjuets formål. Vi fortalte derfor at studien vår handler om elevers syn på matematikk og matematikkundervisning, og gav informantene rom til å stille spørsmål før selve intervjuet startet. Det er dessuten avgjørende at vi oppmuntret informanten til å beskrive sine tanker og til å fortelle om sine opplevelser og følelser (Kvale & Brinkmann, 2009). Vi forsøkte å legge til rette for en avslappet stemning og viste at vi satte pris på elevenes deltakelse. Videre fortalte vi at vi er interesserte i deres tanker og at det er viktig at de sier det de mener. Kvale og Brinkmann påpeker videre at dersom analysen av datamaterialet innebærer koding av svarene, bør vi som intervjuere tenke på det under intervjuet. Vi forsøkte derfor hele tiden å avklare betydningen av svarene informantene gav med tanke på de ulike trådene i matematisk kyndighet, som vi skulle benytte i analysen. På den måten tydeliggjorde vi informantens respons, som kunne gi analysen et sikrere grunnlag. Vår intervjuguide består som sagt av på forhånd planlagte spørsmål. Under det semistrukturerte intervjuet hadde vi imidlertid mulighet til å endre rekkefølgen på spørsmålene eller formuleringene underveis, dersom det var hensiktsmessig. Dessuten gav intervjuformen rom for å enten utelukke eller legge til enkelte spørsmål underveis. Som en avrunding på intervjuet kan det være hensiktsmessig med en debrifing (Kvale & Brinkmann, 2009). Vi ga derfor elevene mulighet til å si noe fritt avslutningsvis, i tillegg til at de kunne stille eventuelle spørsmål.

9.4.3 Analyse av intervju

Analysen av intervjuene innledet vi med å transkribere lydopptakene, og med å markere utsagn som kunne si noe om elevenes forestillinger om forståelse. Videre markerte vi utsagn der elevene sier noe om forståelse, regneferdigheter, strategisk kompetanse og resonnering. Utsagnene så vi deretter i lys av definisjonene på trådene i matematisk kyndighet for å vurdere hvilke tråder elevenes utsagn kan kobles opp mot. Deretter valgte vi utsagn som til sammen kunne gi et helhetlig bilde av hver elevs forestillinger om forståelse. De utvalgte utsagnene analyserte vi ved hjelp av Berglies (2009) verktøy. Vi benyttet i tillegg datamaterialet fra observasjonen for å støtte oppunder våre tolkninger. Dessuten vurderte vi det som hensiktsmessig å inkludere utsagn som sier noe om det elevene gjør i sitt eget arbeid med matematikken. Utsagnene benyttet vi til å styrke vår tolkning av utsagn som sier noe om elevenes forestillinger om forståelse.

9.5 Etiske problemstillinger

Kvale og Brinkmann (2009) påpeker at intervjustudier utforsker menneskers privatliv. Det er derfor viktig å ta hensyn til etiske problemstillinger gjennom hele arbeidsprosessen, både under selve intervjuet og ved transkribering og analyse. I det følgende legger vi frem hvilke etiske hensyn vi tok i arbeidet med vår studie.

Det finnes etiske retningslinjer som vi som forskere bør sette oss inn i ved begynnelsen av en intervjuundersøkelse. Vi la spesielt vekt på *informert samtykke*, som blant annet innebærer at vi informerte elevene om undersøkelsens overordnede formål og hovedtrekkene i forskningsdesignet (Kvale & Brinkmann, 2009). Vi fortalte elevene at vi studerer elevers syn på matematikk og matematikkundervisning. Før aksjoneringen gav vi elevene en samtykkeerklæring[21] som de skulle ta med hjem. Ettersom elevene er under myndighetsalder, ba vi foreldre og foresatte om å gi sitt samtykke på at vi kunne observere og intervjue elevene. Vi la i tillegg vekt på informert samtykke under

[21] Se Vedlegg 5

intervjuene. Elevene fikk informasjon om at det kun var oss som intervjuere som skulle høre på lydopptakene og at vi skulle transkribere og slette opptakene. Dessuten sikret vi at elevene deltok frivillig ved at vi gav dem mulighet til å trekke seg fra undersøkelsen, både underveis i intervjuet og i etterkant. Etter intervjuet fikk elevene tilbud om å få transkripsjonene tilsendt, slik at de kunne godkjenne det de hadde sagt.

Datamaterialet fra intervju og observasjon behandlet vi med *fortrolighet* (confidentiality), som innebærer at vi beskytter elevers og læreres privatliv. Det innebærer dessuten at vi behandler og rapporterer datamaterialet uten at noen kan assosiere det med de aktuelle personene (Mertens, 2005). I studien ivaretar vi fortroligheten ved at vi ikke navngir elever og lærere med eget navn, og ved at vi holder skolenes navn hemmelig.

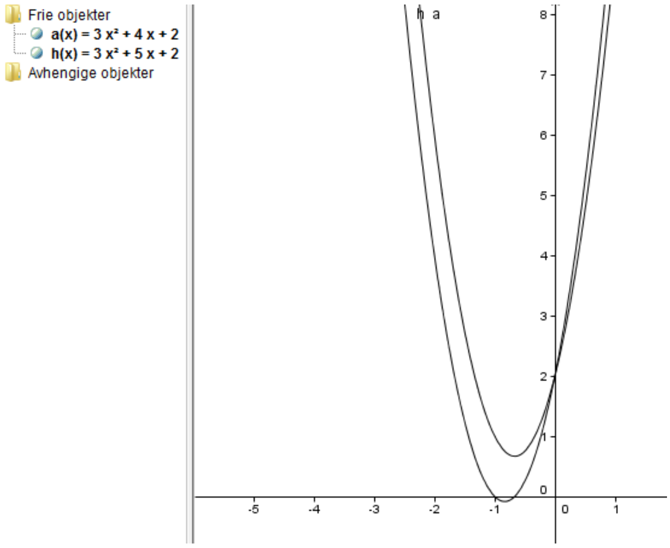
10 Resultat fra Vikstrand videregående skole

Vi observerte som sagt undervisningen i en matematikklasse ved Vikstrand videregående skole. Vårt inntrykk av læringsmiljøet i klassen er at miljøet er preget av faglig fokus og elevenes aktive deltakelse. Læreren oppfordrer elevene til å lete etter mønstre og systemer, og hun fungerer som veileder. Hun oppfordrer stadig elevene til å begrunne og forklare løsninger i diskusjoner som foregår i plenum. Observasjonen analyserer vi ved hjelp av Berglies (2009) analyseverktøy for å kunne si noe om hvilke tråder i matematisk kyndighet læreren vektlegger i undervisningen. I det følgende presenterer vi våre observasjoner fra Vikstrand vgs., samt analysen av datamaterialet.

10.1 Observasjon av undervisningen

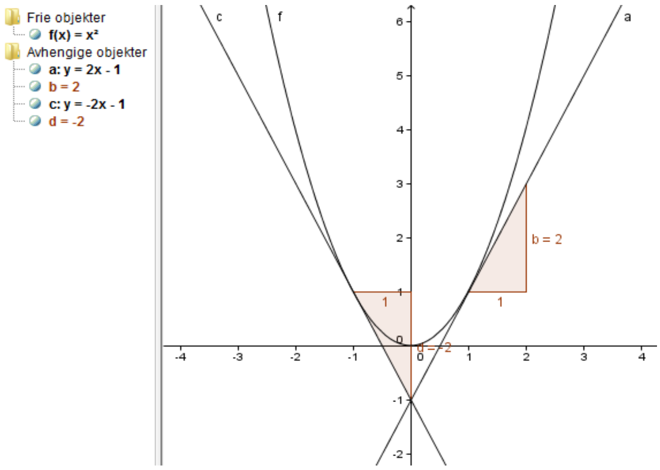
Den første undervisningsøkta starter med en kort oppsummering av tidligere lærte begreper og hjemmeleksen elevene har hatt knyttet til andregradsfunksjoner. Læreren leder oppsummeringen der hun fokuser på elevdeltakelse. Hun stiller åpne spørsmål som oppmuntrer elevene til å være aktive deltakere i diskusjonen. Elevene får mulighet til å svare på alle spørsmål ved at læreren gir dem god tid til å tenke. Læreren oppmuntrer elevene til å komme med faglige innspill og hun legger opp til at de skal begrunne og argumentere for det de sier. I fellesskap gjennomgår de en av oppgavene elevene har hatt i hjemmelekse, da enkelte elever ikke har løst den. Oppgaven[22] de gjennomgår innebærer at de skal bestemme hvilke koeffisienter som avgjør formen og plasseringen til en graf i et koordinatsystem. Elevene starter med å tegne grafen til en vilkårlig andregradsfunksjon i GeoGebra[23]. Læreren ber elevene om å endre koeffisienter slik at grafen forflytter seg eller endrer form, som figur 6 viser. Hun velger så en av elevenes funksjoner som eksempel og i fellesskap finner de ut hvilke koeffisienter som avgjør grafens form og posisjon i koordinatsystemet.

[22] Se oppgave 1, Vedlegg 6
[23] GeoGebra er et digitalt matematikkprogram



Figur 6: Hvilken koeffisient bestemmer grafens plassering i koordinatsystemet?

Elevene får så utdelt et oppgavehefte[24] som består av oppgaver der de skal finne stigningstallet til tangenter i flere punkter på forskjellige grafer. Funksjonene de arbeider med har et andregradsledd og eventuelt et konstantledd. De arbeider for eksempel med funksjonen $f(x) = x^2$. Elevene fører stigningstallene inn i en tabell. Ut fra tabellen skal de komme frem til et system for stigningstallet til tangenter i ulike punkter på $f(x) = x^2$. Ut fra systemet skal elevene foreslå stigningstallet til tangenten i punkter med andre x-verdier, for eksempel $x = -2$ og $x = 3$. Ved å finne stigningstallet ved hjelp av GeoGebra, slik figur 7 viser, undersøker elevene om forslagene stemmer.



Figur 7: Beregne stigningstallet til tangenter i GeoGebra

[24] Se Vedlegg 6

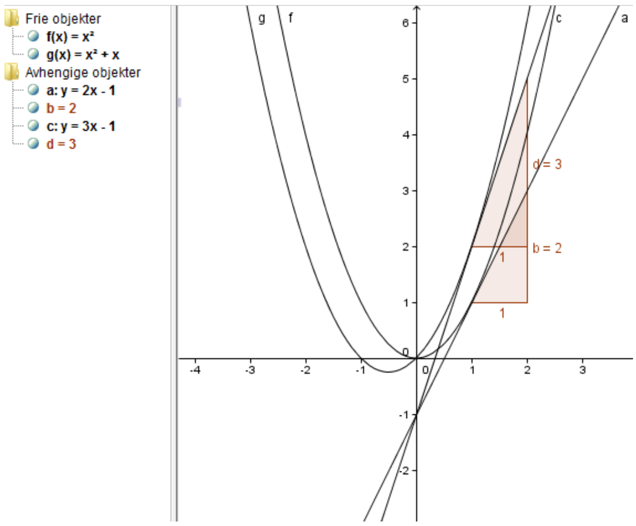
Når elevene har kommet frem til et system for stigningstallet til tangenter på bestemte grafer, får de i oppgave å formulere en regel for stigningstallet til en tangent i et punkt på en vilkårlig graf. Læreren legger vekt på at elevene skal formulere seg nøyaktig, men med egne ord. De arbeider først med andregradsfunksjoner, deretter med tredjegradsfunksjoner. Under arbeidet med oppgavene i heftet oppfordrer læreren elevene til å samarbeide parvis. Hun ber dessuten elevene om å forklare hvorfor systemene de har kommet frem til fungerer, eller hvorfor systemene ikke fungerer.

Læreren avbryter elevenes arbeid med oppgavene tre ganger der hun oppmuntrer elevene til å legge frem sine forslag i plenum. I fellesskap diskuterer de forslagene og hver elev må argumentere for sine innspill. Diskusjonen ender med at elevene kommer frem til et felles forslag om at formelen for stigningstallet til en tangent i et punkt på funksjonen $f(x) = ax^m$, er amx^{m-1}. Læreren spør elevene om stigningstall kan forbindes med noe de har arbeidet med tidligere og de kommer frem til at de kan koble det opp mot momentan vekstfart. Under diskusjoner i fellesskap legger læreren vekt på at elevene skal vurdere ulike løsninger og forslag. Enkelte elever engasjerer seg veldig i diskusjonen når andre elever bidrar med innspill. De argumenterer for og mot ulike forslag og begrunner hvorfor forslagene gjelder, eller ikke gjelder generelt.

Den andre undervisningsøkta innleder læreren med repetisjon av emnet fra forrige økt, der hun legger vekt på begreper som stigningstall til en tangent og momentan vekstfart. Hun oppmuntrer elevene til å være aktive i den forstand at det er elevene som må fortelle hva de arbeidet med forrige undervisningsøkt og hva de kom frem til. I innledningen av økta er det fokus på systemene for stigningstall som elevene utledet. Lærerne introduserer deretter begrepet derivasjon og notasjonen for derivasjon. Hun legger vekt på at derivasjon kun er en enklere måte å si "stigningstallet til tangenten i et punkt" og "momentan vekstfart i et punkt" på.

Læreren skriver deretter ulike funksjoner på tavla, for eksempel $f(x) = 2x^2$ og $g(x) = x^3$. Hun oppmuntrer elevene til å forklare med egne ord hva som skjer når de finner den deriverte av funksjonene. Elevene skal så finne en formel for den deriverte av x^n. Læreren oppmuntrer elevene til å prøve seg frem, mens hun går rundt for å kontrollere at de kommer frem til en formel. De endrer og justerer sine forslag etter hvert som de oppdager at forslagene ikke holder. For eksempel ser de at formelen fungerer for andregradsfunksjoner, men ikke for tredjegradsfunksjoner. De må da endre sine forslag. Elevene utarbeider så formler for derivasjon i fellesskap, som læreren skriver på tavla: $(x^n)' = nx^{n-1}$ og $(ax^n)' = anx^{n-1}$.

Elevene får deretter utdelt er oppgavesett[25] de skal arbeide med. Som i forrige økt fokuserer læreren på at elevene skal lete etter systemer for stigningstallet til ulike tangenter på en graf. Læreren oppfordrer elevene til å sammenligne stigningstallet til tangenter på to funksjoner, for eksempel på $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^2 + x$ (figur 8). De får i oppgave å finne ut hva som skiller stigningstallene fra hverandre og hvorfor det er slik.



Figur 8: Sammenligning av to funksjoner

Elevene henvender seg først og fremst til hverandre dersom de har problemer med å løse oppgavene. Lærene oppmunter elever som finner en løsning til å forklare den for andre elever. Dersom elevene spør læreren om hjelp, oppfordrer hun til at de skal forsøke å gjøre oppgaven på nytt og gjerne ved bruk av en annen fremgangsmåte. Læreren ber i tillegg elevene om å forklare hva de tenker og hvordan de har gått frem for å løse hver oppgave. Når elevene gir uttrykk for at de er ferdig med oppgavene, diskuterer læreren og elevene oppgavene i fellesskap. Elevene kommer med forslag til

[25] Se Vedlegg 7

en formel for derivasjon av funksjoner med flere ledd: $s(x) = ax^2 + bx$, $s'(x) = 2ax + b$. Resten av økta benytter elevene til å løse derivasjonsoppgaver fra læreboka, som de skal løse ved å anvende den generelle formelen de har kommet frem til. Elevene diskuterer løsninger med læreren; de godtar ikke det læreren sier uten videre. Dessuten diskuterer de svar som står i fasiten og argumenterer for at det svaret de har kommet frem til må være riktig.

10.1.1 Oppsummering

Klasseromsaktivitetene er strukturert på den måten at læreren og elevene i fellesskap innleder undervisningsøktene med å repetere emnet de arbeidet med forrige økt. Elevene arbeider deretter parvis med oppgaver. Læreren avrunder elevenes arbeid med en faglig diskusjon, der elevene skal presentere og begrunne sine forslag.

Elevene arbeider med oppgaver læreren har utviklet selv og samlet i hefter. Oppgavene er lagt opp slik at elevene selv skal komme frem til systemer for stigningstallet til tangenter på ulike funksjoner. Elevene skal i tillegg lete etter sammenhenger mellom systemer for funksjoner, de skal for eksempel sammenligne systemene for $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^2 + x$.

Verktøyet elevene anvender er GeoGebra. De benytter programmet til å tegne grafer og til å undersøke hva som skjer med en graf når de endrer koeffisienter og konstantledd i funksjonsuttrykket. I tillegg benytter de GeoGebra til å tegne tangenter i ulike punkt på grafen og til å beregne tangentens stigningstall.

Sosiale normer som preger klassen er for det første en felles forventning om at elevene skal forsøke å se sammenhenger i matematikk, og at de skal lete etter systemer. Elevene begrunner og diskuterer ulike forslag og løsninger. Diskusjonene medfører at elevene hele tiden endrer og justerer sine forslag. Lærerens rolle i klasserommet er å være en veileder som oppmuntrer elevene til å begrunne og argumentere for det de gjør. De sosiomatematiske normene som preger klasserommet, får vi ikke et inntrykk av gjennom observasjonen av de to undervisningsøktene.

10.1.2 Analyse av klasserommets læringsmiljø

Våre tolkninger av observasjonen fra Vikstrand videregående skole indikerer at læreren først og fremst fokuserer på trådene Forståelse, Strategisk kompetanse og Resonnering i matematisk kyndighet. I tillegg tolker vi det slik at hun ønsker at elevene utvikler Regneferdigheter, selv om det ikke er den tråden hun vektlegger mest. Tolkningen vi har gjort, presenterer og begrunner vi i det følgende.

Datamaterialet fra observasjonen tyder på at læreren i stor grad vektlegger Forståelse i undervisningen. Vår tolkning er at hun fokuserer på at elevene skal forstå matematiske begreper og relasjoner, og at de skal vite hva matematiske symboler og fremgangsmåter betyr. Øktene vi observerer innleder læreren med en diskusjon rundt begrepene momentan vekstfart og stigningstall til en tangent. Læreren kobler senere begrepene sammen med begrepet derivasjon. Hun er svært tydelig på at når hun skriver x', som betyr det den deriverte av x. Videre påpeker hun at derivasjon er en enklere måte å si ”formelen for stigningstallet til tangenten i et punkt på grafen til funksjonen x” på. Læreren fokuserer på at elevene skal forstå relasjonen mellom de tre begrepene momentan vekstfart, stigningstallet til en tangent og derivasjon, som kan bidra til at elevene utvikler forståelse for derivasjon som prosedyre. Observasjonen tyder på at læreren fokuserer på at elevene skal se relasjoner mellom ulike tilfeller ved at de for eksempel sammenligner stigningstallet til tangenter på to funksjoner. Slik vi tolker observasjonen, fokuserer læreren på Forståelse i matematikk.

Vi tolker dessuten datamaterialet dit hen at læreren fokuserer på Strategisk kompetanse. Observasjonen indikerer at hun legger vekt på at elevene skal lete etter mønstre og systemer ved at de skal utlede generelle regler for derivasjon. Elevene må finne egne strategier for å finne et system; læreren legger få føringer på hvordan de skal gå frem. Dersom elevene er usikre på om de har funnet et system som fungerer, ber læreren dem om å kontrollere forslaget ved å benytte en annen fremgangsmåte. Noen elever velger å kontrollere ved å tegne grafer og tangenter i GeoGebra, mens andre kontrollerer ved å gjøre beregninger på papir. Vår tolkning av observasjonen er at læreren har fokus på at elevene selv skal finne strategier for å løse et problem, som er en indikasjon på at hun legger vekt på Strategisk kompetanse.

Datamaterialet indikerer i tillegg at læreren fokuserer på Resonnering. Læreren oppfordrer elevene til å begrunne og argumentere for ulike forslag til derivasjonsformel og løsninger på oppgaver de diskuterer i plenum. Hun oppfordrer i tillegg elevene til å begrunne og argumentere når de arbeider selvstendig med oppgaver. Læreren oppmuntrer elevene i stor grad til å gå fra noe kjent til noe som enda er ukjent; de arbeider med stigningstallet til tangenter og forsøker å utlede generelle formler for den deriverte.

Vår tolkning er dessuten at læreren ønsker at elevene skal utvikle Regneferdigheter. Når elevene har kommet frem til en generell formel for derivasjon, arbeider de med oppgaver fra læreboka. Oppgavene er lagt opp slik at elevene skal anvende formelen for derivasjon de har utledet. I og med at elevene selv har utledet formelen de benytter, og at de må anvende den fleksibelt, mener vi at hun fokuserer på tråden Regneferdigheter i sin helhet. Vi påstår imidlertid at Regneferdigheter ikke er en tråd hun fokuserer på isolert. Hun fokuserer på tråden i samspill med de andre trådene i matematisk kyndighet.

10.2 Introduksjon til intervju

Ved Vikstrand videregående skole gjennomførte vi som sagt intervju med fire elever; to gutter og to jenter. I datamaterialet fra intervjuene finner vi flere utsagn fra elevene som ikke direkte sier noe om deres forestillinger om forståelse. Vi inkluderer enkelte utsagn av slik art, da de kan være med på å gi et helhetlig bilde av elevenes forhold til matematikk og matematikkundervisningen de erfarer. Det mer helhetlige bildet er med på å styrke tolkningene vi gjør, som er med på å øke studiens troverdighet. For å forstå hva elevene mener med enkelte utsagn, støtter vi oss til observasjonen av undervisningen elevene erfarer. I det følgende presenterer vi våre analyser og tolkninger.

10.3 Intervju med Andreas

Vi opplever Andreas som en utadvent og hyggelig gutt. Våre observasjoner og samtaler med læreren, indikerer at Andreas er på et middels faglig nivå. Han er muntlig aktiv i matematikktimene. Andreas stiller både spørsmål og kommer med faglige innspill, og han samarbeider godt med guttene han sitter sammen med. Han virker som en engasjert matematikkelev, som er interessert i å lære matematikk.

Når Andreas forteller om matematikkundervisningen, sier han at læreren gjennomgår oppgaver veldig nøye og fokuserer på at elevene skal forstå matematikken. Han sier at læreren ønsker at elevene skal forstå det de gjør. Før løste han oppgaver uten å vite hva han egentlig gjorde, sier han:

1 I: Da vil jeg at du skal fortelle meg om matematikkundervisningen deres, sammen med læreren, og da vil jeg gjerne høre både på godt og vondt.

2 A: Nei, sånn generelt så går hun gjennom oppgavene veldig nøye, og så. Det hun vil at vi skal greie, det er ikke å gjøre mest mulig oppgaver, det er å forstå hva vi gjør egentlig. Når vi skal bruke formlene og. Det er det problemet jeg har hatt for det meste, jeg har liksom bare gjort oppgavene og greid dem lett, men jeg har ikke helt visst hva jeg har gjort. Så det er det hun driver på med sammen med meg nå […].

Emnet de arbeidet med i undervisningsøktene vi observerte, er derivasjon. Andreas sier at han forsto derivasjon ganske raskt og han har noen tanker om hvorfor. Han forteller at han pleier å tenke for seg selv for å finne ut av ting:

17 I: Men hva var det som gjorde at du skjønte det da?

18 A: Nei jeg vet ikke, jeg pleier å sitte å filosofere litt, jeg tenker over ting, og er det noe jeg ikke finner ut av, enten så får jeg helt hjerneteppe hvis det er noe jeg burde kunne. Eller hvis det er noe som jeg ikke har lært om fra før av, så må jeg finne ut av det, og det er sånn. Jeg satt liksom å testet litt ut for meg selv mens de andre gikk gjennom […].

Videre sier Andreas at forståelse har en annen betydning nå enn før. Før krevde lærerne kun at han kom frem til riktig svar, men nå må han i tillegg forklare hvordan han tenker:

19 I: Men kan du ikke fortelle litt om timen i går, nei på tirsdagen, for eksempel, når du og Anette?

20 A: […] Det med å forstå det, jeg føler at det har en helt annen betydning nå enn det hadde før.

21 I: Det må du forklare vet du

22 A: På ungdomsskolen og barneskolen så krevde lærerne at du egentlig bare skulle greie det, sånn en pluss en, da skulle du liksom bare greie å skrive to. Men du skal ikke vite hvorfor det er to, du skal ikke vite hvordan du gjør det, du skal bare skrive to. Men nå så, det var et veldig dårlig eksempel da, men nå skal du liksom forklare litt mer om hvordan du tenker […]. Og hvis du ikke klarer det, så er du ikke helt i mål, da må du tenke litt lenger igjen.

Han forteller videre at han delvis forsto derivasjon, men uten å ha funnet et bestemt system. Han ønsket å finne systemet, så han vurderte hvorfor en annen elevs forslag til derivasjonsformel ikke var riktig:

23 I: Så du mener at sånn som det var i går, da forsto du det?
24 A: Ja.
25 I: Fordi at?
26 A: Jeg vet ikke helt, jeg forsto det jo litt sånn smått først, jeg fikk det jo til, men hadde ikke noe spesielt system på det. Men jeg må jo si at jeg juksa litt da, med hennes, så begynte jeg å tenke litt mer på den. Hun hadde jo rett, men igjen så hadde jo ikke hun riktig videre. Og hvorfor hadde hun ikke det. Og da startet jeg den der tenkingen min igjen, og da måtte jeg prøve å finne ut av det […].

Andreas forteller at i en vanlig matematikktime diskuterer de nye emner i plenum og elevene arbeider med oppgaver. I arbeidet med oppgavene får de bruk for det de har gjort tidligere i timen, og de får vist at de har forstått emnet de arbeider med:

30 I: Hvordan viser dere det da tenker du?
31 A: […] Noen oppgaver var litt lenger enn det vi hadde gjort på tavla, og for å greie dem så måtte man forstå det. Men jeg så i klassen så var det mange som hadde greid dem, selv om vi ikke hadde gått gjennom det. Liksom det vi hadde gått gjennom først da, som gikk på samme systemet, det at vi greide å forstå hva det gikk ut på, gjorde at vi greide oss videre uten hjelp.

Andreas sier at han lærer mye av å diskutere med seg selv. Han forteller at da de arbeidet med derivasjon, forsøkte han å finne et system. I GeoGebra tegnet han ulike grafer og tangenter, og lette etter et system ved å sammenligne grafene:

58 I: Hvordan går du frem da?
59 A: Vi kan jo ta den der derivasjon. Der prøvde jeg å finne et system. Satte opp en jeg allerede kunne, men i dag skulle vi ha pluss x i tillegg. Og da prøvde jeg å forstå hva det betydde for grafen. Og så satte jeg opp begge grafene og satte opp tangent i en til tre på begge to. Så prøvde jeg å sammenligne dem og se om det var et system i det […].

Videre sier Andreas at læreren vektlegger at elevene skal forstå det de gjør, noe han eksemplifiserer med at de må forklare hva derivasjon egentlig er. De må vite hva de finner ved å derivere, når de skal anvende derivasjon og hvordan de gjør det, sier han:

52 I: Men hva synes du læreren legger vekt på i undervisningen sin, hva er det hun fokuserer på?
53 A: Det er jo helt klart det med forståelse. Det med å forstå oppgavene, forstå hva vi egentlig driver på med. Vi driver jo nå på med derivasjon, og forståelse, definisjonen fra henne, ville vært at vi skal forklare hva derivasjon egentlig er. Liksom, hva vi finner med derivasjon, og når vi skal bruke det, og hvordan vi gjør det […].
54 I: Men du sier at det er hennes definisjon, er det din definisjon å?

55 A: Ja, det har blitt det mer nå […].

Når han skal fortelle om ulike arbeidsmåter i matematikk, sier Andreas at han foretrekker at læreren gir hint fremfor at hun sier hva de kan gjøre. Dersom læreren forteller hva de skal gjøre, lærer han ikke hvordan han skal finne det ut selv og da kommer han ikke til å huske hvordan han skal gjøre det senere heller:

61 A: "Læreren forteller hvordan jeg skal gå frem." Den har jeg delte meninger om. "læreren gir et hint slik at jeg kan komme meg videre selv". På den første så forteller jo læreren enkelt og greit hva du skal gjøre, du lærer ikke hvordan du skal finne ut det selv. […] Så jeg ville sagt at jeg lærer mye bedre når hun gir oss hint enn når hun forteller hva vi skal gjøre […].

Han forteller at de noen ganger leter etter mønster og systemer. Da må de ha god forståelse, mener han:

72 I: Når dere leter etter mønster da, hva føler du at du lærer av det?
73 A: Ja, egentlig. Jeg føler at når man leter etter mønster og systemer så må man ha en god forståelse for hva man egentlig driver på med […].

Andreas føler at han har lyktes i matematikk når han har forstått hva han har gjort og kan arbeide videre med oppgavene uten hjelp:

76 I: Når synes du at du lykkes i matematikk?`
77 A: Når. Jeg vil ikke si at jeg har lyktes i matematikk bare når jeg har klart et stykke. Men hvis jeg klarer å forstå hva jeg har gjort og kan jobbe videre med det uten at jeg trenger hjelp. Da føler jeg at jeg har lyktes.

En god matematikkelev er i følge Andreas en elev med ekstremt god forståelse. Eleven tenker på en helt annen måte enn alle andre, og hun benytter andre metoder enn de andre elevene:

80 I: Nå vil jeg at du skal tenke på en elev som du synes er flink i matematikk. Så vil jeg at du skal forklare meg hva det er som gjør den eleven god, hva er det som skiller den fra andre elever?
81 A: Da må det være at forståelsen er ekstremt stor […]. Men hun er ganske god i matte, og bare det å greie å tenke seg til andre metoder enn de vi normalt sett bruker, da har man kommet ganske langt.

10.3.1 Andreas' forestillinger om forståelse i matematikk

Slik vi tolker intervjudataene, har Andreas en forestilling om forståelse i matematikk som har klare likhetstrekk med tråden Forståelse i matematisk kyndighet. Andreas sier innledningsvis at læreren deres ønsker at de skal forstå; at de skal vite hva de har gjort (utsagn 2). For å forstå holder det ikke å kun skrive et svar. Man må tillegg forklare hvordan man tenker (utsagn 22). Vi tolker utsagnene som at Andreas har en forestilling om at forståelse handler om å vite hvordan matematiske prosedyrer fungerer. Det kan være en indikasjon på at det han mener med å forstå, samsvarer med Forståelse i matematikk. Fokuset på Forståelse kommer i tillegg tydelig frem ved at han mener læreren deres fokuserer på forståelse. For å eksemplifisere det sier han at for å forstå derivasjon så må de forstå hva derivasjon egentlig er (utsagn 53).

Vår tolkning av Andreas' forestilling om forståelse i matematikk, blir styrket av det han forteller om det han gjør i matematikktimene. Han forteller at han lykkes i matematikk når han forstår det han har gjort, og at han da kan benytter det han har gjort på én oppgave til å løse flere oppgaver (utsagn 31 og 77). I tillegg snakker Andreas om systemer. Han sier eksempelvis at når de arbeidet med derivasjon, forsøker de å se forskjeller, sammenligne og finne et system (utsagn 73). Han sier i tillegg at når han diskuterer med seg selv, sammenligner han tilfeller og forsøker å finne et system (utsagn 59). Utsagnene tolker vi som en indikasjon på at han er opptatt av å forstå relasjoner i matematikk, som kan være nok en indikasjon på at Andreas fokuserer på tråden Forståelse i matematisk kyndighet.

Slik vi tolker datamaterialet, inngår Strategisk kompetanse i Andreas' forestilling om forståelse. Andreas har en forestilling om at matematikk handler om å utlede løsningsstrategier selv, som er en viktig komponent i Strategisk kompetanse. Han sier at en god matematikkelev er en elev som tenker på en helt annen måte enn andre elever. Eleven tenker seg til andre metoder man kan benytte, andre metoder enn resten av klassen benytter, sier han (utsagn 81). Han sier i tillegg at for å lete etter mønstre og systemer, må han ha god forståelse (utsagn 73). Andreas' fokus på Strategisk kompetanse kommer dessuten frem gjennom det han forteller om lærerens rolle når han selv arbeider med oppgaver. Han sier at han ikke liker at læreren sier akkurat hva han skal gjøre for å løse en oppgave fordi han da ikke husker hvordan han skal gjøre det senere (utsagn 61). Andreas sier dessuten at han viser forståelse når han løser nye oppgaver ved hjelp av det han har lært (utsagn 31). Det tyder på at han ønsker å ta stilling til problemet selv, for så å velge en fornuftig løsningsstrategi, som tyder på at han fokuserer på Strategisk kompetanse.

Dataene indikerer dessuten at Andreas har en forestilling om at matematikk handler om å vurdere ulike løsninger og å forklare hvordan han tenker, som er en viktig komponent i tråden Resonnering. Han sier at forståelse handler om å kunne forklare hvordan han tenker (utsagn 22), som kan være en indikasjon på at hans Resonnering inngår i hans forestillinger om forståelse. Vår tolking styrkes av det Andreas forteller at han gjør i sitt eget arbeid med matematikk. Han sier for eksempel at han pleier å filosofere (utsagn 18), og at han vurderer hvorfor systemet til andre elever ikke fungerer for alle tilfeller (utsagn 26).

10.4 Intervju med Steffen

Vi oppfatter Steffen en pliktoppfyllende og arbeidsom gutt. Våre observasjoner og samtale med lærer tyder på at Steffen er faglig sterk i matematikk. Han arbeider flittig i timene og samarbeider godt med jenta han sitter sammen med. Våre observasjoner tyder på at de ofte hjelper hverandre. Steffen forholder seg nokså rolig i klasserommet; han svarer på spørsmål når læreren spør han, men er ellers lite muntlig aktiv.

Når Steffen forteller om undervisningen i klassen, sier han at de gjennomgår mange regler, med fokus på at elevene skal forstå. Videre sier Steffen at han har fått bedre forståelse for matematikk enn han hadde før. Hans forklaring på bedre forståelse er at han forstår flere sammenhenger i matematikk:

3 I: Når du sier at du har fått bedre forståelse da, hva legger du i det?

4 S: Ja altså, hun er veldig flink til å forklare. Hun gir deg ikke bare svaret hvis du ikke forstår, hun presser deg litt til å få den forståelsen vi er ute etter. At du skjønner det før du får svaret. Jeg synes at jeg forstår ganske mye mer sammenhenger i matten.

En typisk matematikktime innleder læreren med å presentere nye begreper. Dersom det nye emnet har likhetstrekk med et emne de har hatt tidligere, forsøker læreren å se tilbake på det de har gjort før og koble det opp mot det nye emnet. Steffen sier at læreren legger vekt på samtale mellom læreren og elevene i timen, der de skal forsøke å se systemer i det de arbeider med:

11 I: Hva vil du si at en typisk matematikktime er i deres klasse?

12 S: Ja vi starter jo med, hvis det er et nytt tema for eksempel, så innleder hun det nye temaet […]. Jeg tror det meste av timen går ut på å liksom prate, få en samtale mellom alle elevene og læreren. Hvordan vi skal løse det forskjellige, og se systemer i det vi jobber med.

På spørsmål om hva læreren legger vekt på, svarer Steffen at hun forsøker å få elevene til å forstå det de gjør:

13 I: Men hva synes du at læreren legger vekt på, hva synes du er hennes mål?

14 S: Hun er veldig flink til å forklare synes jeg, forklare hvordan du skal gjøre det. Og sånn som jeg sa i stad, å prøve å få deg til å forstå hva du gjør, eller hva som skjer. Ja, hun er egentlig ganske flink til det meste. Hun er bedre enn alle matematikklærere jeg har hatt.

Steffen hevder at det som skiller henne fra andre lærere er det at hun forsøker å få elevene til å forstå. Hun gir dem ikke bare svaret på oppgaven slik andre lærere gjør. Når elevene kun kommer frem til et svar lærer de ikke noe. Da har de ikke noe nytte av læringen, sier han:

17 I: Hvorfor har du ikke noe nytte av det hvis du bare får svaret da synes du?

18 S: Jeg synes, man lærer jo litt. Men du må jo forstå det du holder på med, det hjelper ikke å bare få det svaret. Da har du jo ikke lært noe uansett, og det hjelper ikke på en prøve eller på en innlevering. Da må du skjønne ting selv. […]

En god time for Steffen, er en time der han har fått til noe, og der han virkelig har forstått noe nytt. I en god time han har lært noe han kan anvende i dagliglivet:

19 I: Hva synes du kjennetegner en god matematikktime, når tenker du at yes, dette har vært en god time?

20 S: Det er selvfølgelig når jeg har mestret noe. Det er når jeg har skjønt noe nytt, og tenker liksom at, okei det her kan jeg. Det er også noe å lære seg å se når man kan bruke ting i dagliglivet, og det synes jeg er en bra time, når du klarer å virkelig forstå noe. […]

Videre mener han at en god karakter i matematikk krever at eleven har forståelse. Det innebærer at han forstår formlene i boka:

27 I: Hva mener du skal til for å få en god karakter i matte da?

28 S: Det ligger masse på forståelsen. At du skjønner det som skjer, og at du greier å gjøre det, gjøre de formlene i boka om slik at du skjønner dem i hodet. Istedenfor å pugge de som står i boka. Så lenge du greier å forstå de selv.

Når han skal beskrive en elev han synes er god i matematikk, sier Steffen at eleven ser systemer raskt:

29 I: Hvis du tenker på en elev som du vet om som du synes er god i matematikk. Hva er det som gjør at den personen er flink synes du?
30 S: Jeg tror det er fordi den personen skjønner, eller greier å se systemer veldig fort […].

Eleven han beskriver som god, får dessuten utlevert vanskeligere oppgaver av læreren. Han mener at oppgavene inneholder flere faktorer og at elevene må benytte flere regler samtidig for å løse dem:

33 I: Men når oppgavene inneholder flere faktorer, hva mener du?
34 S: Ja de inneholder flere detaljer, slik at du må tenke og bruke flere forskjellige regler fra forskjellige andre tema som vi har jobbet oss gjennom, og de må du bruke samtidig. Og til sammen så skal det få en løsning.

Videre forteller Steffen at han liker å arbeide med oppgaver der han må strekke seg litt, oppgaver som er en utfordring. Slike oppgaver er gjerne utvidet i den forstand at de har flere detaljer i oppgaveteksten, sier han:

89 I: Hvilken type oppgaver gir deg litt ekstra utfordring da?
90 S: De teoretiske oppgavene gir meg litt ekstra utfordring når de er litt utvidet, og med mer detaljer i selve oppgaveteksten.

Han forteller at de ikke arbeider så mye med teoretiske oppgaver, men at de heller leter etter mønstre og systemer:

49 I: Er det noen lapper du synes du lærer lite av da?
50 S: Vet ikke om det var noe spesielt. Greit å jobbe med teoretiske oppgaver, i alle fall i starten. Men vi jobber egentlig ikke så mye med teoretiske oppgaver, vi prater mer, prøver å finne mønster og systemer i de oppgavene.

Steffen hevder det er viktig at han forsøker å løse problemer selv før han ber om hjelp. Dersom han løser oppgaven på egenhånd, lærer han mer:

63 I: Hvordan gjør du det når du møter oppgaver eller problemer du ikke greier å løse da?
64 S: Jeg prøver å se om jeg greier å finne problemet selv. […] Jeg har ofte prøvd å se om jeg kan løse problemet selv før jeg har bedt om hjelp. Og det tror jeg kanskje er litt viktig.
65 I: Hvorfor det?
66 S: Jeg tror du har mer læring utav det, hvis du greier å se ting selv før du spør andre. […]

Når intervjueren legger ut lapper med ulike arbeidsformer på, sier Steffen at han foretrekker at læreren gir hint slik at han får muligheten til å tenke selv. Dessuten liker han å arbeide alene. Det er bedre å løse oppgavene ved å bruke sine egne tanker enn å benytte andres, sier han:

35 I: [lapper] Da kan du få velge hvilke lapper du vil legge vekt på og fortelle om. Og da er spørsmålet, hvordan synes du at du lærer matematikk?

36 S: Kanskje den der "Læreren gir meg hint slik at jeg kan komme meg videre selv", den tror jeg er veldig fin. Da får du ikke svaret, og da kan du prøve å tenke selv. Jeg liker ganske godt å jobbe alene også, å prøve å få det til med mine egne tanker. Hvis jeg greier å få det til selv så synes jeg at det er mye bedre enn å prøve å bruke andres tanker […].

På spørsmål om hva matematikk handler om, svarer Steffen at det handler om å forstå tall og formler i tillegg til hvordan han kan anvende formlene i dagliglivet. Når intervjueren ber han om å forklare hva han mener med forståelse for tall, svarer han at det dreier seg om å se sammenhenger mellom det som står på et ark og det som foregår i hverdagen:

81 I: Ja, når du sier forståelse for tall, hva mener du med det da?

82 S: Forståelse for tall?

83 I: Ja, eller forståelse da

84 S: At du kan se sammenhenger mellom det som er på arket og det som skjer i hverdagen. […]

10.4.1 Steffens forestillinger om forståelse i matematikk

Slik vi vurderer det, har Steffen en forestilling om forståelse i matematikk som i hovedsak samsvarer med tråden Forståelse i matematisk kyndighet. Steffen sier at elevene må utvikle forståelse (utsagn 4). Han mener at det ikke holder å få riktig svar på en oppgave; de må forstå det de gjør (utsagn 18). Dessuten hevder han at for å få en god karakter i matematikk, må man skjønne formlene i læreboka. Det holder ikke å bare pugge formlene i boka (utsagn 28). Videre sier han at en god matematikkelev ser systemer raskt (utsagn 30). Det er tydelig at Steffen fokuserer på å forstå hvordan matematiske prosedyrer fungerer, og på å forstå relasjoner i matematikk. Vi tolker det slik at hans forestilling om forståelse samsvarer med tråden Forståelse. En ytterligere indikasjon på Steffens vektlegging av Forståelse, er at forståelse for han handler om å se sammenhenger mellom det som skjer på arket og det som skjer i hverdagen (utsagn 20 og 84). Vår tolkning av hans forestilling blir dessuten støttet av det Steffen sier om egen læring. Han mener blant annet at han har fått bedre forståelse for matematikk nå enn før, som innebærer at han nå ser flere sammenhenger (utsagn 4). Videre sier han at de i klassen arbeider med å finne mønstre og systemer (utsagn 12 og 50).

Vi vurderer det dessuten slik at Strategisk kompetanse inngår i Steffens forestilling om forståelse. Han sier for eksempel at en god matematikkelev behersker vanskeligere oppgaver der man må bruke flere forskjellige regler samtidig (utsagn 34) og at oppgaver med mange detaljer gir han en ekstra utfordring (utsagn 90). Våre tolkninger tyder på at han kan ha en forestilling om at matematikk handler om å utlede løsningsstrategier selv, som er sentralt i Strategisk kompetanse. Tolkningene blir styrket av det Steffen sier om eget arbeid med matematikk. Han foretrekker at læreren gir hint slik at han må tenke selv (utsagn 36). Steffen mener dessuten at det er viktig å forsøke å løse problemer selv før han får hjelp, og at han lærer mye av det (utsagn 66). Det kan være indikasjoner på at han vektlegger Strategisk kompetanse i matematikk.

10.5 Intervju med Line

Vi oppfatter Line som en pliktoppfyllende og faglig fokusert jente. Observasjonen og samtaler med læreren, indikerer at Line er på et faglig høyt nivå. Hun arbeider godt i timene. Våre observasjoner indikerer at hun deltar i plenumsdiskusjoner i mindre grad, men hun diskuterer godt med elevene rundt seg.

En god matematikktime for Line er en time der elevene har vært aktive. I en god time gjennomgår læreren oppgaver elevene har arbeidet med. Hun forteller at læreren viser hvordan elevene kan løse oppgavene, gjerne med enklere metoder enn elevene har brukt:

26 I: Hvis du tenker på en matematikktime som du synes er god. En time du sitter igjen med at var en god matematikktime. Hva har dere gjort i den timen?

27 L: Da har vi vært ganske aktive. Da kan vi ha vært gjennom oppgaver som noen har slitt med, så får vi vite hvordan vi egentlig skulle ha gjort det. På en mye enklere måte enn slik vi gjorde dem […]. Det er en enklere vei. Så da blir jeg glad når man finner ut at det er mye lettere å gjøre det på. I stedet for å kaste bort mye tid.

Når intervjueren spør Line om hvordan hun lærer matematikk best legger hun frem lappen ”Jeg samarbeider med andre”. Hun uttrykker at hun lærer mest av det. Videre plukker hun ut ”Jeg forklarer for andre”. Når hun forklarer for andre, må hun uttrykke seg annerledes. Det er de muntlige aktivitetene hun lærer mest av. Da kan hun samarbeide, forklare og diskutere med andre:

39 L: Den her er mest, på først (I: samarbeide med andre). Og det å forklare for andre, får en sånn, at jeg liksom kan det og skal prøve å uttrykke meg annerledes for at den andre skal forstå meg. Diskutere hvis jeg begynner å bli usikker. Det er egentlig mye muntlig at jeg lærer mest. Hvis jeg ser at det er noe nyttig jeg skriver ned, hvis jeg har plass [...].

Av lappene som handler om læreren plukker Line ut ”Læreren gir meg hint slik at jeg kan komme videre selv”. Line synes det er positivt at læreren gir henne hint og at hun får mulighet til å prøve seg frem. Ved at læreren ikke gir henne svaret direkte, får Line mulighet til å tenke selv:

67 L: Den der. (I: gir hint). Sånn som hun gjorde på tirsdagen. Hun spurte med hva 9 og 25 (I: og 16) hadde til felles, og det var jo kvadrattall som var utregnet. Det var liksom noe med å tenke selv, som jeg ser positivt.

Line forteller at hun liker å arbeide med oppgaver der de skal lete etter mønstre og systemer. Hun sier at metoden krever tenking og diskusjon, i tillegg til at hun må være kreativ. Når elevene arbeidet med formelen til tredje - og fjerdegradsuttrykk i timen, synes hun det krevde mye tenking for å komme frem til formelen:

76 I: Hvordan synes du den metoden var?
77 L: Du må jo prøve å forstå hvordan du får ut svaret på den der. Se på svaret og det du skal regne ut, og finne ut hvordan svaret har blitt som det har blitt. Så det blir jo mye tenking og diskusjon om det.
78 I: Hvordan er det da når du kommer frem til den generelle regelen?
79 L: Jeg ble jo glad når hun kom til meg først og så at det var riktig. Da ble jo jeg veldig glad. Så var det noe med å være kreativ for å få det til.

Videre forteller Line at hun føler hun lykkes i matematikk når hun kan regne ut en oppgave raskt og at svaret stemmer overens med fasiten:

86 I: Når synes du at du selv lykkes i matematikk?
87 L: Det er når at jeg får regnet det ut ganske kjapt, og ser at svaret er riktig i fasiten.

Når Line beskriver en elev som er god i matematikk, forteller hun at eleven er aktiv og kan prøve seg frem:

90 I: Hvis du tenker på en elev som er god i matematikk. Hva er det som kjennetenger den eleven?
91 L: Det er at eleven er veldig mye aktiv og prøver seg frem veldig ofte […].

Line forteller at hun ikke liker tekstoppgaver eller oppgaver der hun må finne fremgangsmåten selv:

98 I: Hva slags type oppgaver er det du liker å arbeide mest med?
99 L: På hvilke måte da?
100 I: Om det er oppgaver fra boka, rene tekstoppgaver eller helt konkrete regneoppgaver. Oppgaver hvor du må finne fremgangsmåte selv.
101 L: Jeg liker ikke tekstoppgaver, og heller ikke å finne frem til fremgangsmåten selv. Nei.

10.5.1 Lines forestillinger om forståelse i matematikk

Analysen av intervjudataene viser at Line har en forestilling om forståelse som har likhetstrekk med samtlige tråder i matematisk kyndighet. I følge våre analyser av intervjudataene, inngår Forståelse i Lines forestilling om forståelse i matematikk. Hun sier eksempelvis i utsagn 67 at det er positivt å lete etter relasjoner mellom tall. Vi vurderer det dessuten slik at Strategisk kompetanse innegår som en del av Lines forestilling om forståelse. Hun har en forestilling om at matematikk handler om å være kreativ, om å prøve seg frem og om å finne strategier for å komme frem til formler og regler (utsagn 79 og 91). Line forteller imidlertid at hun ikke liker å finne fremgangsmåter selv (utsagn 101). Dataene indikerer dessuten at Line har en forestilling om forståelse, som har likhetstrekk med tråden Resonnering. Hun sier at når elevene utleder formler selv, må de finne ut hvordan de har gått frem for å finne formelen. Da må de tenke og diskutere med hverandre (utsagn 77). Det Line forteller om resonnering når hun forteller om sitt arbeid med matematikken, har likhetstrekk med tråden Resonnering i matematisk kyndighet. Hun forteller at hun lærer mye av å forklare for andre elever. Da må hun uttrykke seg annerledes for at elever skal forstå henne (utsagn 39).

Slik vi vurderer det, er det forskjell på hva Line mener forståelse i matematikk handler om og hva hun faktisk fokuserer på når hun arbeider med matematikk. Når hun ikke får til oppgaver, ønsker hun å vite hvordan hun kan løse dem. Hun ønsker å finne svaret raskt og deretter få mulighet til å kontrollere svaret med fasiten (utsagn 27 og 87). Vi tolker det som at Line i sitt eget arbeid fokuserer på den instrumentelle delen av Regneferdigheter.

10.6 Intervju med Mina

Vårt inntrykk av Mina er at hun er en stille og rolig elev. Samtaler med lærer og våre observasjoner tyder på at Mina er på et høyt faglig nivå. Hun samarbeider tett med elevene rundt seg og får god hjelp av dem under sitt arbeid med oppgaver. Våre observasjoner indikerer at Mina er fokusert i timene, og hun arbeider flittig med matematikken.

Mina forteller at hun synes matematikk er det morsomste faget på skolen og at hun liker matematikk veldig godt. Allikevel har hun merket at matematikken er vanskeligere nå enn før. Hun sier at matematikk er morsomt når hun forstår:

2 M: Jeg synes, for meg selv, så jeg liker matte og regne ut og sånn der. Synes det er det artigste faget jeg veit. Men, samtidig så merker jeg jo at det er mye vanskeligere enn den matten vi hadde i ungdomsskolen […]. Men, det som er bra da er at når jeg forstår noe, så synes jeg det er artig å holde på med.
3 I: Hva mener du med å forstå?
4 M: Som for eksempel geometri, det synes jeg er noe jeg har fått bedre tak enn for eksempel funksjoner. Når vi har geometri så forstår jeg det, når vi konstruerer og sånne ting […].

I følge Mina handler matematikk om regning og om å se sammenhenger. Hun sier at hun kan anvende matematikk utenfor skolen, og at hun da må trekke paralleller til matematikk hun har lært på skolen:

78 I: Så hvis du skulle sagt til en som spør: Hva handler egentlig matematikk om?
79 M: Mmm, det handler egentlig om bare mye regning. Regning og tall og bokstaver, og sammenhengen egentlig.
80 I: Hva mener du med sammenheng?
81 M: Det er jo sagt at matte kan du bruke i virkelig livet. Så det er jo sammenhengen mellom sånn når vi skal bygge et hus og hvorfor det blir sånn og sånn. At hjørnene må være rett, slik at huset skal bli bra. Det må ha 90 i vinkelen og sånne ting.

Mina hevder at matematikk ikke er likt noen av de andre fagene de har på skolen. Hun sier at matematikk er praktisk, og at hun må tenke over hvorfor matematikken er slik den er:

76 I: Er matematikkfaget likt noen av de andre fagene du har på skolen?

77 M: Nei. Det er det ikke i det hele tatt. Den her skolen er jo kjent for å være teoretiske fag […]. Men jeg synes at matte er litt sånn praktisk. At du trener hodet og sånn […]. Men matte så må du tenke og, ja, hvorfor det blir sånn og sånn. Så egentlig er det litt praktisk i hodet.

Mina forteller at de ofte har vanlige matematikktimer der læreren underviser. De benytter læreboken i liten grad i vanlige matematikktimer. Hun sier at læreren ønsker at elevene skal komme frem til hvorfor regler er slik de er:

10 M: Jeg synes hun ikke bruker så mye boka. Men, det er mest det hun vil at vi skal komme til, og ikke bare til reglene og sånn der. At sånn er det bare, men hun forklarer fra første i først hvorfor det blir sånn her. At hvorfor det blir sånn, og sånn […].

I følge Mina er kjennetegnet på en god matematikktime at læreren hjelper elevene med oppgaver de ikke får til. Mina sier at læreren forklarer løsninger, som gjør at elevene sitter igjen med en følelse av at de har skjønt hvorfor det er slik:

14 M: Det at læreren hjelper til med oppgaver som elevene ikke får til. Sånn at hun forklarer hvorfor det er sånn og sånn. Også må det være sånn at elevene skal si ”å ja, det er derfor”. Også må jo egentlig, prøve å vise eget, det synes jeg at hun bør prøve å vise tavla mest mulig. Og til slutt så bør hun skrive en slags oppsummering. Så du veit hva du nettopp har brukt timen til, hva du nettopp har lært. Ja.

Mina sier at i undervisningen legger læreren vekt på at elevene skal forstå. Elevene skal forstå hvorfor de får et bestemt svar på en oppgave:

25 I: Hva synes du læreren din legger vekt på i undervisningen?

26 M: At elevene skal forstå. Hvorfor det stykket blir sånn og sånn. For det er, matte har jo grunn til hvorfor det blir den og den liksom. Ja. Jeg tror matte er sånn her. At x delt på 2 er eller sånn er jo en grunn til det. Så da, det er jo det som vi skal prøve å forstå hvorfor det blir sånn.

Mina forteller at hun liker oppgavene som står i læreboka fordi de har fasit der hun kan kontrollere svarene sine. Hun er derimot ikke like glad i prosjekter der læreren har laget oppgaver selv:

86 I: Hva slags oppgavetyper liker du?

87 M: Jeg liker det som står i boka. Sånn, det er vel det som er ganske artig. Og så har du jo fasit bak i boka, så du kan sjekke selv og sånn. Sånne oppgaver. Jeg er ikke så veldig glad i sånne prosjekter der hun, sånn, finner oppgaver selv.

88 I: Hvordan synes du de oppgavene dere har hatt på ark de sisten timene har vært?

89 M: Det er vel oppgaver fra boka hun gir oss. Ja, det er vel de der. Så, jeg har egentlig ikke gjort så mange oppgaver. Jeg prøver bare å forstå hva hun sier og sånn. [pause] Det går jo bra hvis man bare følger regelen.

Teoretiske oppgaver er noe Mina lærer mye av, så lenge hun forstår emnet de arbeider med. Dersom hun møter vanskelige oppgaver, lærer hun ved å anvende det hun allerede kan. På den måten kommer hun frem til løsningen:

39 M: Den der, teoretisk oppgave, da lærer jeg det så veldig godt hvis jeg forstår det emnet da. Men hvis det er noe som er litt komplisert å regne så lærer jeg litt mer ved, med å tenke gjennom hodet hva jeg har lært nå og så klarer jeg å løse det […].

Når det kommer til digitale hjelpemidler, synes Mina at GeoGebra er nyttig. Hun sier at det greit å slippe å tegne grafen selv, og at hun forstår hvorfor grafen får et spesifikt utseende:

63 M: […] Så vi har egentlig bare holdt på med grafer og funksjoner, med digitale hjelpemidler. Så man ser jo hvorfor det er sånn, når grafen går helt opp sånn her. Så hun [læreren] er veldig flink til å forklare hvorfor grafen blir sånn.

Mina føler at hun lykkes i matematikk når hun ser resultatet på prøvene, og dermed føler at hun har forstått. Hun føler nesten aldri at hun lykkes ettersom hun glemmer fort. Videre sier hun at de i matematikk må huske regler:

72 I: Når synes du at du lykkes i matematikk?
73 M: Når jeg, man ser jo resultatet når prøvene kommer ut. Da synes jeg at, nå har jeg endelig forstått det. Men egentlig så synes jeg at jeg nesten aldri lykkes fordi at jeg pleier å glemme ting. Med matte så trenger man å huske regler og sånne ting. Men, så pleier jeg å glemme de. Det ingen sånn der, lykkes bare når prøvene kommer ut. Fordi før jeg skal ha prøven så pleier jeg å skrive ned det stoffet, så pleier jeg å huske kanskje til prøven […].

En elev som er god matematikk, beskriver Mina som en muntlig aktiv elev. Eleven finner metoder for å komme frem til løsninger på oppgaver, i tillegg til å komme frem til regler selv:

74 I: Hvis du ser for deg en elev som er god i matematikk, hva er det som kjennetegner den eleven?
75 M: […] Det at hun snakker når læreren underviser, og at hun klarer å komme frem til løsningen i sånne metoder, eller regler som hun prøver å gjøre. Så at hun, når har vi funnet regelen på den og sånn, så hun ikke bare sitter og stresser med hvorfor det blir sånn her […].

Mina sier at for å oppnå en god karakter i matematikk, må eleven ha forståelse og kunne svare på spørsmål om hvorfor i matematikken:

82 I: Hva mener du skal til for at man skal få en god karakter i matematikk?
83 M: Mener du i hennes klasse?
84 I: Ja, kan ta i hennes klasse
85 M: Egen forståelse av hvorfor det blir sånn. At regelen er sånn, og hvorfor ting er sånn. At, for jeg tror det var første prøvene jeg hadde med henne, så hadde jeg kanskje halvparten rett og halvparten var feil […] hun sier at det var på grunn av hvordan jeg hadde kommet frem til svaret. Selv om svaret var feil, så var fortsatt måten jeg gjorde det på rett. Så det er vel forståelse, det hun setter karakter på.

10.6.1 Minas forestillinger om forståelse i matematikk

Vår analyse viser at Mina har en forestilling om forståelse som i stor grad samsvarer med Forståelse, i tillegg til Strategisk kompetanse. Det kommer derimot frem at Mina fokuserer på den instrumentelle delen av Regneferdigheter i sitt eget arbeid med matematikk. Mina vektlegger Forståelse høyt i matematikk (utsagn 10, 14, 26, 63, 77, 81, 85). Utsagnene dreier seg i stor grad om at matematikk handler om å forstå *hvorfor*, som hun gjentar flere ganger i intervjuet. Mina synes læreren vektlegger at elevene skal forstå hvorfor matematikken er slik den er (utsagn 26). Videre forteller hun at de får en god karakter på prøver dersom de har forståelse. De må ikke nødvendigvis ha riktig svar, men vise at de benytter en hensiktsmessig fremgangsmåte (utsagn 85). I tillegg vet Mina at hun kan anvende matematikk utenfor skolen (utsagn 81). Vår tolkning er at Mina har en forestilling om forståelse i matematikk som har klare likhetstrekk med Forståelse, da hun fokuserer på å forstå prosedyrer og relasjoner. Vi tolker datamaterialet dit hen at Strategisk kompetanse i tillegg inngår i Minas forestilling om forståelse. Mina har en forestilling om at matematikk handler om å finne ulike strategier (utsagn 39, 75 og 85). Matematikk handler ikke bare om å komme frem til et riktig svar, det handler i tillegg om å utlede en fornuftig løsningsstrategi (utsagn 85).

Intervjudataene viser at Minas forestilling om forståelse i matematikk ikke stemmer overens med hvordan hun ser på sitt eget arbeid med matematikk. Under intervjuet forteller Mina om hva hun mener med å forstå i matematikk (utsagn 73 og 89). Når hun får et godt resultat på prøver, har hun husket regler. Hun behersker oppgaver dersom hun følger regler og liker oppgaver som har fasit. Forståelsen Mina prater om her, handler om at hun skal gjøre matematikkoppgaver nøyaktig og riktig. Vi tolker det som at forståelse for Mina, i sitt eget arbeid med matematikk, handler om den instrumentelle delen av Regneferdigheter.

10.7 Sammendrag av analyse av intervju

Dataene fra Vikstrand vgs. indikerer at Forståelse i stor grad inngår i elevenes[26] forestillinger om forståelse i matematikk. Elevene fokuserer på at matematikk handler om å forstå, som innebærer å se sammenhenger og systemer. De mener at forståelse i matematikk handler om å vite hva de gjør og *hvorfor*. Andreas sier eksempelvis at for å forstå derivasjon, må elevene vite hva derivasjon egentlig er (utsagn 53). En god matematikkelev er i følge Steffen en elev som ser systemer i matematikk (utsagn 30). Elevenes fokus på Forståelse kommer tydelig frem ved at Line sier at de må forstå hvorfor de får det svaret de får i matematikk (utsagn 77). Mina sier dessuten at det er forståelsen læreren setter karakter på når hun vurderer prøver. De må ikke nødvendigvis ha riktig svar på alle oppgavene (utsagn 85).

Datamaterialet tyder på at Strategisk kompetanse inngår i elevenes forestillinger om forståelse. I enkelte utsagn legger elevene vekt på at matematikk handler om å utlede løsningsstrategier selv. En god matematikkelev er, i følge Andreas, en elev som finner egne løsningsstrategier for å løse oppgaver (utsagn 81). I følge Steffen behersker den gode eleven vanskelige oppgaver som hun må benytte flere ulike formler for å løse (utsagn 34). Line mener at matematikk handler om finne strategier for å komme frem til formler og regler (utsagn 91). Fokuset på å finne løsningsstrategier selv, ser vi i tillegg i enkelte av Minas utsagn. Hun sier blant annet at matematikk handler om å utlede en fornuftig løsningsstrategi selv (utsagn 85).

Våre tolkninger indikerer videre at Resonnering inngår i to av elevenes forestillinger om forståelse. Andreas mener at forståelse i matematikk handler om å kunne forklare hvordan han tenker (utsagn 22). Line sier at når elevene utleder formler, må de diskutere og finne ut hvordan de har funnet formelen (utsagn 77).

[26] Elevene det er snakk om, er de fire elevene vi intervjuet

Slik vi tolker datamaterialet, inngår ikke tråden Regneferdigheter i elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Datamaterialet tyder imidlertid på at to av elevene i klassen ved Vikstrand vgs. fokuserer på den instrumentelle delen av Regneferdigheter i sitt eget arbeid med matematikken.

10.8 Sammenhenger mellom elevers forestillinger om forståelse og undervisningen de erfarer ved Vikstrand videregående skole

Våre tolkninger tyder på at læreren ved Vikstrand vgs. i hovedsak fokuserer på trådene Forståelse, Strategisk kompetanse og Resonnering. Analysen av dataene fra intervju, støttet av våre observasjoner, indikerer at elevene først og fremst har forestillinger om forståelse som samsvarer med tråden Forståelse i matematisk kyndighet. Dataene indikerer dessuten at Strategisk kompetanse inngår i elevenes forestillinger om forståelse. I tillegg tyder enkelte utsagn på at Resonnering inngår i to av elevenes forestilling om forståelse.

Observasjonen tyder på at læreren legger vekt på at elevene skal forstå relasjoner i matematikk, og at de skal forstå hva matematiske prosedyrer innebærer. Hun presiserer konsekvent at momentan vekstfart, stigningstallet til en tangent og derivasjon er det samme. Dessuten oppfordrer læreren elevene til å sammenligne ulike tilfeller i arbeidet med å utlede en formel for derivasjon. Vi tolker det som at hun fokuserer på at elevene skal forstå hva derivasjon innebærer, og at de skal forstå relasjoner i matematikken. Tolkningen av intervjuene med elevene ved Vikstrand vgs. indikerer at elevenes forestillinger om forståelse på mange måter reflekterer lærerens fokus i undervisningen. Elevene mener at matematikk handler om å forstå og at forståelse innebærer å kunne se sammenhenger og systemer i matematikk. I følge elevene, innebærer forståelse at de må vite hva de gjør og *hvorfor*. En elev eksemplifiserer det han sier om forståelse med at elevene må vite hva derivasjon egentlig er. Slik vi tolker det, har elevene forestillinger om forståelse i matematikk som samsvarer med tråden Forståelse; en tråd læreren vektlegger i matematikkundervisningen.

Læreren legger i tillegg vekt på at elevene skal finne løsningsstrategier selv, ved at de skal utlede en formel for derivasjon. Når elevene spør om hjelp, oppfordrer hun dem til å forsøke å utlede en ny løsningsstrategi. Hennes fokus på Strategisk kompetanse gjenspeiler seg i elevenes forestillinger om forståelse. Flere elever mener at en god matematikkelev er en elev som utvikler egne løsningsstrategier, og at matematikk handler om å finne hensiktsmessige strategier. Vi tolker det som en indikasjon på at Strategisk kompetanse inngår i elevenes forestillinger om forståelse.

Våre tolkninger av datamaterialet fra observasjonen tyder på at læreren fokuserer på Resonnering, da hun stadig oppmuntrer elevene til å begrunne og argumentere for det de gjør. Hun legger vekt på at elevene skal begrunne sine innspill i diskusjoner i plenum, og at de sammen skal vurdere ulike forslag til derivasjonsformel. Dessuten fokuserer hun på at elevene skal begrunne sine valg i arbeidet med oppgaver. Våre tolkninger av intervjudataene viser at Resonnering inngår i to av elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Én elev sier eksempelvis at forståelse handler om å forklare hvordan han tenker, og den andre sier at når elevene utleder formler må de diskutere hvordan de har kommet frem til formelen og hva den sier.

Observasjonsdataene tyder på at læreren dessuten vektlegger Regneferdigheter i den forstand at elevene arbeider med oppgaver der de skal anvende formelen for derivasjon de har utledet. Det er imidlertid ikke et gjennomgående fokus i undervisningen på lik linje med de andre trådene. Slik vi vurderer det, fokuserer hun på Regneferdigheter i samspill med de andre trådene. Vår vurdering er at Regneferdigheter ikke inngår i elevenes forestillinger om forståelse.

11 Resultat fra Bakkegata videregående skole

Vi observerte som sagt undervisningen i en matematikklasse ved Bakkegata videregående skole. Vårt inntrykk av læringsmiljøet i klassen, er at læreren i stor grad styrer undervisningen. Det er fokus på at elevene skal regne mange oppgaver fra læreboka som forberedelse til eksamen. Når elever spør om hjelp, kommer læreren med forslag til hvordan de kan løse oppgaven de arbeider med. I det følgende gir vi et bilde av læringsmiljøet i klassen og presenterer vår analyse av datamaterialet fra observasjonen.

11.1 Observasjon av undervisningen

Den første undervisningsøkta innleder læreren med en sekvens fra tavla, der han skriver hvilken del av kapitlet de skal arbeide med. Han definerer begrepene utfall og utfallsrom i sannsynlighet og presenterer eksempler der han anvender begrepene. Presentasjonen av eksemplene involverer elevene i liten grad. Læreren skriver oppgaveteksten på tavla og viser hvordan han løser hver oppgave. Underveis stiller han korte, lukkede spørsmål, for eksempel om sannsynligheten for å få en krone når han kaster en mynt.

Læreren oppfordrer deretter elevene til å sette seg parvis, og han deler ut oppgaver elevene skal arbeide med[27]. Han gir elevene klar og tydelig beskjed om hva de skal gjøre. Elevene får beskjed om at de skal kaste tegnestifter. De skal notere antallet som ligger med stiften opp etter 100 kast og beregne andelen kast med spissen opp. Læreren viser på tavla hvordan elevene kan regne ut andelen av et bestemt utfall. Han sier i tillegg at de på forhånd vet hva forventet utfall er. Det er imidlertid kun én elev som sier noe om hva de kan forvente. Resten av klassen har allerede begynt på oppgavene og får ikke med seg hva eleven sier. Under arbeidet med oppgaven henvender elevene seg til andre par når det er praktiske forhold ved oppgaven de er usikre på. Når de er ferdige med å kaste tegnestifter samler læreren inn resultatet fra hvert par. Læreren beregner andelen kast med spissen opp for klassens samlede datamateriale. Han oppsummerer deretter oppgaven de har gjort ved å fortelle elevene hva han har kommet frem til.

[27] Se Vedlegg 8

Læreren gir deretter elevene en innføring i hvordan de kan simulere tall på kalkulatoren. Han forteller elevene hva de skal trykke for å få frem tilfeldige tall. Elevene skal benytte simuleringsfunksjonen på kalkulatorene til å løse de to neste oppgavene på arket. De skal simulere 100 terningkast og 200 myntkast. Antall og andelen av henholdsvis seksere og kron noterer elevene på det utdelte arket. Når elevene er ferdige med oppgaven, oppsummerer læreren aktiviteten. Han spør hvilket resultat parene har fått på de to oppgavene. Fra enkelte elever får han respons, men mange fokuserer på andre ting enn det som forgår fra tavla. Videre sier han at resultatene er rimelige. En elev har for eksempel fått 13 % seksere på sine terningkast. Læreren sier det er rimelig, i og med at det er tilnærmet lik sannsynligheten for å få en sekser.

Resten av økta arbeider elevene med oppgaver fra læreboka. De fleste elevene samarbeider med andre ved at de viser hverandre hvordan de har løst hver oppgave. Det er tilfeller der elever foreslår for læreren at de kan forklare oppgavene for andre. I ett tilfelle er det en lang diskusjon mellom to jenter om en oppgave. Den ene jenta prøver å forklare for den andre hvordan hun har løst oppgaven. Til slutt står begge jentene fast og henvender seg til læreren som forteller dem hvordan de kan løse oppgaven.

Den andre undervisningsøkta innleder læreren med å skrive en overskrift på tavla som viser hvilket emne de skal arbeide med. Han presenterer noen eksempler på hva et utfall er, for så å koble det opp mot hva en hending er. Definisjonen av en hending skriver han på tavla, i tillegg til to formler de kan benytte for å beregne sannsynligheten for en hending:

1) $P(s) = summen\ av\ sannsynligheten\ av\ de\ utfallene\ hendingen\ består\ av$
2) $P(s) = \frac{antall\ \ gunstige\ \ utfall}{antall\ \ mulige\ \ utfall}$

Læreren løser deretter tre oppgaver på tavla, der han oppfordrer elevene til å komme med forslag om hvilken av de to formlene han kan anvende for å løse hver oppgave. Han inkluderer elevene ved for eksempel å spørre hvor mange gunstige og hvor mange mulige utfall de har.

Etter sekvensen på tavla arbeider elevene med oppgaver fra læreboka. Oppgavene omhandler emnet hendinger. Når elever er ferdige med oppgavene læreren har gitt dem, arbeider de med repetisjonsoppgaver fra læreboka. Læreren beveger seg rundt i klasserommet og hjelper de som rekker opp handa. Samtaler mellom elever og lærer foregår ofte ved at elevene stiller spørsmål om hvordan de skal gå frem for å løse en oppgave. Læreren forteller hva de skal gjøre for å komme et steg videre. Elevene forsøker å finne en hensiktsmessig formel, samtidig som de ber læreren om å bekrefte at det de tenker er riktig. Ofte gir elevene opp, og læreren forteller hva de skal gjøre for å finne løsningen på oppgaven. Et eksempel er en elev som spør om hvordan han skal faktorisere et uttrykk. Læreren sier til eleven at han bør forkorte uttrykket, og følger opp med å vise hvordan eleven skal forkorte. Ved et annet tilfelle spør en elev læreren om hjelp til å tegne grafen til en andregradsfunksjon. Læreren gir da eleven opplysninger fra oppgaveteksten som hun legger inn på kalkulatoren for å få tegnet grafen hun ønsker. Eleven spør videre om hun alltid må bruke kalkulatoren for å tegne en graf, eller om hun kan tegne den uten å benytte kalkulatoren. Svaret hun får er at hun aldri får en oppgave som innebærer grafer uten bruk av kalkulator på eksamen. Både elever og lærere nevner eksamen flere ganger i løpet av undervisningsøktene. Læreren sier flere ganger at de må arbeider med mange oppgaver før eksamen, og flere elever spør om oppgavene de gjør er relevante for eksamen.

11.1.1 Oppsummering

Klasseromsaktivitetene er strukturert slik at læreren innleder en undervisningsøkt med å presentere nye begreper fra tavla, i tillegg til at han gjennomgår aktuelle eksempler. Læreren inkluderer elevene i noen grad ved at han stiller enkle, lukkede spørsmål. Deretter arbeider elevene parvis med oppgaver resten av timen og henvender seg i stor grad til læreren dersom de står fast på en oppgave.

Oppgavene elevene arbeider med er hentet fra læreboka. I den første økta gjør de først noen praktiske oppgaver der de skal kaste tegnestifter, deretter oppgaver der de skal simulere myntkast og terningkast. Resten av tiden arbeider elevene med rene regneoppgaver fra emnet læreren har presentert i tillegg til repetisjonsoppgaver. Oppgavene skal de løse ved å anvende formlene læreren har presentert.

Verktøyet elevene hovedsakelig benytter, er grafisk kalkulator. Elevene benytter kalkulatoren for å simulere terningkast og myntkast, i tillegg til å gjøre utregninger og å tegne grafer. De benytter konkreter i form av tegnestifter. Tegnestiftene anvender de for å gjøre en oppgave der de beregner andelen av et bestemt utfall.

Sosiale normer som preger klassen er en felles forventning om at elevene skal gjøre mange oppgaver hentet fra læreboka. Lærerens rolle består i å presentere teori, i tillegg til å vise eksempler og fremgangsmåter. Når elevene spør om hjelp til en oppgave, forsøker elevene å finne ut hva læreren forventer at de skal gjøre, for så å handle deretter. I løpet av de øktene vi observerte, fikk vi ikke tak på de sosiomatematiske normene som preger klassen.

11.1.2 Analyse av klasserommets læringsmiljø

Vår tolkning av datamaterialet fra klassen ved Bakkegata videregående skole indikerer at læreren i hovedsak fokuserer på den instrumentelle delen av Regneferdigheter. I tillegg tolker vi det slik at han i enkelte tilfeller ønsker at elevene skal utvikle Forståelse, men det er ikke noe han legger vekt på. Vår analyse av datamaterialet fra observasjonen presenterer vi i det følgende.

Våre observasjoner indikerer at læreren fokuserer på at elevene skal utføre matematiske fremgangsmåter nøyaktig og effektivt. Når læreren gjennomgår eksempler på tavla, fokuserer han på å vise elevene hvordan de bør løse hver oppgave. Læreren inkluderer elevene i den forstand at han for eksempel spør om hvilken formel av to mulige det er mest hensiktsmessig å benytte. Vi observerer at verken læreren eller elevene stiller spørsmål om hvorfor de kommer frem til de ulike løsningene. Lærerens fokus på fremgangsmåter kommer tydelig frem når han hjelper elever med oppgaver. Han forteller elevene hva de skal gjøre for å løse en oppgave, uten å legge vekt på hvorfor valg av fremgangsmåte er hensiktsmessig. Vår tolkning er at læreren i stor grad fokuserer på den instrumentelle delen av Regneferdigheter i undervisningen.

Observasjonen tyder dessuten på at læreren i enkelte tilfeller ønsker at elevene skal utvikle Forståelse, i den forstand at de skal forstå matematiske begreper. Læreren introduserer ulike begreper for elevene i løpet av de to undervisningsøktene. Han gir flere illustrerende eksempler som viser relasjonen mellom begrepene. Vi tolker det som at læreren ønsker at elevene skal ha Forståelse for begrepene han introduserer. Det er derimot få indikasjoner på at læreren fokuserer på Forståelse når elevene arbeider med oppgaver. Vi observerer at lærerens kommunikasjon med elevene har lite fokus på at elevene skal finne kjente mønstre i oppgavene. Han relaterer sjelden det nye temaet til noe de har arbeidet med før. Elevene løser dessuten ofte oppgaver ved at læreren forteller hva de skal gjøre. Vår tolkning er derfor at læreren i liten grad fokuserer på Forståelse når elevene arbeider med oppgaver.

Våre observasjoner tyder på at læreren ikke fokuserer på Strategisk kompetanse. Elevene arbeider ikke med oppgaver som gir særlig rom for å utvikle egne løsningsstrategier. Samtaler mellom lærer og elev legger heller ikke til rette for at elevene skal finne fremgangsmåter selv. Lærerens fokus på resonnering er begrenset til at han oppfordrer elevene til å samarbeide. Vår tolkning er imidlertid at resonneringen han fokuserer på, ikke samsvarer med tråden Resonnering i matematisk kyndighet. Observasjonen tyder på at elever forklarer hverandre hvordan de har kommet frem til en løsning, uten at de begrunner hvorfor løsningsstrategien er hensiktsmessig. Når læreren hjelper elever eller underviser fra tavla, legger han opp til at elevene skal komme med konkrete og korte svar på spørsmål. Vår tolkning er at Resonnering ikke er et fokus i undervisningen, da læreren ikke legger vekt på at elevene skal forklare eller begrunne sine svar, eller at de skal vurdere alternative løsninger og fremgangsmåter.

11.2 Introduksjon til intervju

Ved Bakkegata videregående skole gjennomførte vi som sagt intervju med fire elever; to jenter og to gutter. For at vi skal forstå betydningen av enkelte utsagn fra elevene, støtter vi oss til observasjonsdataene fra klasserommet. Vi vurderer det som nødvendig, å for eksempel undersøke hva elevene legger i ”å gi hint”. I det følgende presenterer vi intervjuet med hver enkelt elev, og våre tolkninger av datamaterialet.

11.3 Intervju med Tea

Vi oppfatter Tea som en pliktoppfyllende jente, som arbeider flittig i matematikktimene. Våre observasjoner og samtaler med læreren indikerer at Tea er en faglig sterk elev. Observasjoner tyder på at Tea samarbeider tett med jenta hun sitter sammen med; de diskuterer ofte med hverandre for å løse oppgaver. Videre synes Tea å være litt sjenert, hun svarer for eksempel ikke på spørsmål læreren stiller i plenum.

Når Tea skal fortelle om matematikkundervisningen, sier hun at de har mest tavleundervisning, og at hun liker den godt. Noen ganger får de utlevert ark der det står hva de skal gjøre og ark med forskjellige regler på. Tea sier at når hun arbeider med oppgaver, forsøker hun først å gjøre oppgaven på samme måte som læreren har vist på tavla. Dersom hun ikke har kommet frem til riktig svar, gjør hun oppgaven på nytt helt til svaret stemmer med fasiten:

19 I: Men. Hvordan jobber dere når dere løser oppgaver?
20 T: Vi på en måte, tar oppgaven som står i boka, og så gjør vi det slik vi tror det er, slik vi har skrevet det ned fra tavla og sånn. Så når man er ferdig så bruker man ofte å sjekke fasiten bare for å dobbeltsjekke. Men så er det jo noen ganger at det er feil, så da starter man på nytt igjen, og da prøver du på nytt igjen til du føler at du får det riktig. […]

I en god matematikktime får hun hjelp av læreren når hun trenger det; han forklarer hvordan det er, sier hun:

27 I: Hva synes du kjennetegner en god mattetime?
28 T: Det er vel når du faktisk har det gøy med matten, når du slipper å kjede deg og når du ikke sitter og sliter. Og at når du rekker opp handa så får du hjelp. Og det at du får forklart hvordan det er. […]

Tea sier at hun lykkes i matematikk når hun forstår hva læreren mener når han forklarer. Videre sier hun at å lykkes handler om å gjøre oppgaver uten å se på det de har gjort før og uten hjelp. Da har hun skjønt det og kan gjøre de samme oppgavene om og om igjen:

31 I: Men hva er det for din egen del da, når føler du at du har lyktes liksom?
32 T: Det er vel det når han forklarer på tavla og jeg forstår hva han mener. Og det når jeg greier å gjøre oppgavene uten å sjekke det som vi har skrevet før, eller få hjelp. Da føler jeg at jeg har skjønt det, da sitter det, og da kan jeg gjøre oppgavene om og om igjen, uten å måtte sjekke det.

Når intervjueren ber Tea om å forklare hva hun mener med å forstå, sier hun at det handler om å skjønne hvordan hun skal løse en oppgave, uten å tenke seg om mange ganger:

33 I: Du sa at når han forklarer ting og du har forstått det. Greier du å beskrive hva du mener når du sier at du har forstått?
34 T: Det er jo hvis det er veldig mye da, og han står bare og forklarer. Da er det at du forstår hva han mener med det, du får med deg alt. Du på en måte stopper ikke opp på punkt to der du må tenke og tenke og tenke. Du får med deg alle poengene hans da, selv om du sitter og skriver når han snakker, så får du det med deg. Du forstår liksom hva han mener med det, du skjønner hvordan du skal gjøre det uten å måtte tenke deg om mange ganger.

Tea mener at læreren hennes fokuserer på å lære bort, at elevene skal få gode resultater prøvene, og at de skal bestå eksamen. I tillegg mener hun at læreren ønsker at alle skal forstå oppgavene de skal gjøre og kunne løse dem raskt:

37 I: Hva synes du at er målet hans?
38 T: Jeg tror det er at alle skal trives og at alle skal klare det.
39 I: Klare det?
40 T: Ja, at alle skal skjønne det, og at alle skal forstå hva han forklarer og forstå oppgavene som kommer. At alle skal klare det uten å sitte lenge og gruble på det. At alle skal ha en mulighet til å skjønne oppgavene.

Videre forteller Tea at hun ofte spør læreren når hun har problemer med en oppgave. Hun foretrekker at læreren gir henne hint fremfor at han sier direkte hva hun skal gjøre. Når læreren gir hint viser han hvordan hun kan løse oppgaven:

43 I: [lapper] Du kan se over dem og velge noen du trekker ut som positiv, og noen negativ. Og da er spørsmålet, når føler du at du lærer matematikk?
44 T: Kan jo ta det positive først da. Jeg synes at det er bra hvis du sitter og sliter, at han bare gir deg et hint på hvordan du gjør det.
45 I: Hva lærer du av det da synes du?
46 T: Han på en måte viser hvordan jeg skal komme fram til det, han sier meg hva jeg trenger på trekanten for å finne det jeg mangler og sånn der.

Tea føler hun lærer mest av å samarbeide eller forklare for andre. Når de samarbeider får hun huskeregler av andre:

62 T: […] Men jeg lærer mest av å samarbeide eller forklare for andre […].
63 I: Hva føler du at du lærer av det da?
64 T: Når du diskuterer med andre så får du på en måte den andre siden av det, du får kanskje, det er jo slike huskeregler og sånn som du får vite. Det er jo mange huskeregler […].

Når hun og sidemannen møter et problem de ikke finner løsningen på, går de ofte tilbake til det de har lært tidligere og til oppgaver som ligner på den de skal løse. Dersom de ikke skjønner hvordan de kommer frem til en løsning, ser de gjerne i fasiten og forsøker å bytte ut tallene slik at de får et riktig svar:

67 I: Men hvordan går dere frem for å løse en oppgave da?

68 T: Hvis vi får en oppgave som vi ikke skjønner fra starten en gang, så går vi ofte tilbake til det vi har lært tidligere, på oppgaver som ligner og ser hvordan vi har gjort det da. Hvis vi ikke skjønner det da så kan du jo ofte se i fasiten liksom, hvis du har prøvd deg da. Tenker sånn at hvis du bare bytter ut tallene liksom, og sjekker bak i fasiten og det er feil. Men vi prøver selv flere ganger før vi spør læreren da.

Tea mener at en vanskelig matematikkoppgave er en oppgave der hun ikke kommer frem til svaret med en gang. Selv er hun ikke veldig glad i slike oppgaver; hun foretrekker oppgaver av middels vanskelighetsgrad:

77 I: Liker du å jobbe med sånne oppgaver da?

78 T: Noen ganger, det er jo på en måte bra å få oppgaver der du utfordrer deg selv ordentlig. Men jeg synes det er bedre med en mellomting mellom veldig vanskelig og veldig lett. For du på en måte får testet litt av hvert enn at du må teste alt. Du må svare på sånn a, b og c. På hver oppgave så må du teste deg om og om igjen. Men på en sånn mellomoppgave så tester du litt og litt etter hvert. Det er bedre det enn at du må teste alt og sitte og slite.

En god matematikkelev er i følge Tea flink til å forklare og bruker kort tid på å finne ut hvordan hun kan løse en oppgave:

79 I: Da vil jeg at du skal tenke på en elev som du synes er god i matematikk, så vil jeg at du skal beskrive for meg hva det er som gjør den eleven god, hvorfor ser du opp til den eleven?

80 T: […] Hun vet hvordan hun skal forklare det og sånn, hun trenger ikke veldig lang tid på å finne ut hva hun skal gjøre […]. Hun vet hvordan hun skal gjøre det, jeg tror ikke hun sitter lenge på prøver og sånn, og grubler på hvordan hun skal gjøre det. Tror hun finner det fort ut?

Matematikkeleven hun beskriver trenger mindre forklaring og forstår mer enn andre. Intervjueren ber Tea igjen om å forklare hva hun mener med å forstå. Hun mener forståelse handler om å vite hvordan du skal gjøre det, som hun selv sier:

83 I: Og med å forstå mener du?

84: T: Ja at hun skjønner hva hun skal gjøre, at hun forstår hvordan hun skal gjøre det. Hm, et annet ord for det? Hun vet hvordan hun skal gjøre det.

Tea synes at det er viktig å forstå for å få en god karakter i matematikk. Det hun mener med å forstå en teori eller en oppgave, er at hun forstår når hun ikke trenger hjelp til å gjøre oppgaven flere ganger:

99 I: Men når du sier at du har forstått en oppgave eller en teori?
100 T: Det er jo, jeg trenger ikke hjelp til å gjøre det flere ganger. Trenger ikke hjelp til å forstå det. Jeg kan det, og da har jeg forstått det.

Videre hevder Tea at hun trenger matematikk for å komme seg videre i livet og at matematikk er nødvendig i dagliglivet. Videre hevder hun at matematikk handler om å benytte tall for å komme frem til et svar:

93 I: Greier du å beskrive hva du synes at matematikk egentlig handler om?
94 T: Det er vel å finne frem til svar der du må bruke tall på en måte. […]

Hun kan ikke sammenligne matematikk med andre fag, hovedsakelig på grunn av måten hun forbereder seg til prøver på. Når hun forbereder seg til en prøve i matematikk gjør hun oppgavene om og om igjen:

87 I: Hva er det som skiller matematikk fra andre fag da?
88 T: Hm. Det er sånn at når du sitter og øver til en prøve for eksempel i naturfag da, i går så satt jeg og leste hva jeg skulle gjøre. Hvis jeg skal øve til en matteprøve så må jeg gjøre oppgavene om og om igjen, helt til at jeg greier det med én gang. […]

Målet hennes i timene er å gjøre de oppgavene læreren har gitt dem, uten at hun står fast:

103 I: Hva er målet ditt sånn i timene da?
104 T: Målet mitt i en time det er vel å gjennomføre det vi har fått av oppgaver, og ikke bli stående fast. At du får gjort oppgavene uten å stå fast.

11.3.1 Teas forestillinger om forståelse i matematikk

Våre analyser av intervjuet med Tea tyder på at hennes forestilling om forståelse samsvarer med den instrumentelle delen av Regneferdigheter. Tea sier at matematikk handler om å komme frem til et svar ved bruk av tall (utsagn 94). Hun sier dessuten at fordelen med å samarbeide med andre er at hun får vite andres huskeregler (utsagn 64). Videre sier hun at hun lykkes i matematikk når hun kan løse oppgavene om og om igjen (utsagn 32), og at hun da forstår (utsagn 100). Vi tolker utsagnene dit hen at Tea fokuserer på å kunne anvende matematiske prosedyrer. Flere utsagn tyder på at hun fokuserer på *hvordan* (utsagn 28, 34, 80, 84) hun kan anvende en prosedyre for å løse en oppgave. I utsagn 84 sier hun eksempelvis at å forstå handler om å vite hvordan man skal løse en oppgave. Tea fokuserer ikke på *hvorfor* prosedyren fungerer. Hennes fokus på Regneferdigheter kommer dessuten frem ved at hun har en forestilling om at matematikk handler om å løse oppgaver raskt og effektivt. Hun sier at en god matematikkelev skjønner hva hun skal gjøre, og hun bruker kort tid på å løse en oppgave (utsagn 80). Videre sier Tea at det å forstå handler om å skjønne hva hun skal gjøre uten å måtte tenke seg om mange ganger (utsagn 34). Dessuten sier hun at målet til læreren er at alle elever skal skjønne oppgavene uten å sitte og gruble (utsagn 40), og at målet hennes er å gjøre oppgavene de har fått uten å stå fast (utsagn 104). Hennes fokus på å anvende matematiske prosedyrer raskt og effektivt, uten krav om å vite hvorfor, tolker vi som at hennes forestilling om forståelse har klare likhetstrekk med den instrumentelle delen av Regneferdigheter.

Vår slutning om at Tea fokuserer på den instrumentelle delen av Regneferdigheter, blir styrket av det hun sier om sitt eget arbeid med matematikk. Hun forteller at hun forbereder seg til en matematikkprøve ved å gjøre de samme oppgavene om og om igjen (utsagn 88). Tea forteller videre at når hun løser oppgaver, sjekker hun ofte med fasiten (utsagn 20). Dersom svaret er feil forsøker hun å bytte ut tallene slik at svaret blir riktig (utsagn 68). Vi mener hun fokuserer på å benytte matematiske fremgangsmåter slik at hun kommer frem til riktig svar, uten krav om å vite hvorfor de fungerer. Det er tydelig at hun fokuserer på å løse oppgaver i matematikk effektivt, som kommer tydelig frem ved at hun synes matematikk er gøy når hun ikke sitter og sliter (utsagn 28 og 78).

Tea fokuserer i tillegg på Strategisk kompetanse i sitt eget arbeid med matematikk. Hun foretrekker at læreren gir hint slik at hun kan finne sin egen fremgangsmåte (utsagn 44). Våre analyser fra observasjonen tyder imidlertid på at læreren ikke legger til rette for at elevene skal utvikle Strategisk kompetanse når han hjelper dem med oppgaver. Vårt inntrykk fra observasjonen bekrefter Tea i neste utsagn, der hun sier at når læreren gir hint så viser han *hvordan* hun skal gå frem (utsagn 46). Vi tolker dermed utsagnene som at Tea igjen viser at den instrumentelle delen av Regneferdigheter inngår i hennes forestillinger om forståelse.

11.4 Intervju med Espen

Vi oppfatter Espen en jordnær og pliktoppfyllende gutt. Våre samtaler med læreren og observasjoner av Espen, indikerer at han er en faglig sterk matematikkelev. Observasjonen tyder på at han kun kommer med innspill i plenum i tilfeller der læreren henvender seg direkte til han. Våre observasjoner tyder på at han arbeider godt med matematikken i timene, og at han samarbeider tett med guttene rundt seg.

Espen forteller at de har mye tavleundervisning, og at læreren gir eksempler og forklarer hva han gjør. Undervisningen liker Espen godt. Han forteller at han likte å arbeide med emnet modeller og vekstfart, fordi han da anvender dagligdagse opplysninger til å finne ut ting. Emnet momentan vekstfart har gjort han flinkere til å tenke logisk. Han har lært seg å se muligheter og å tenke litt nytt, sier han:

19 I: Hva mener du med å tenke logisk da?

20 E: Nei det er for eksempel når vi kjører til hytta, så pleier vi å beregne hvor lenge det er til vi kommer hjem. Da pleier jeg å se på hvor mange kilometer det er igjen, og hvor raskt vi kjører, og da må du tenke logisk da. Det er sånn jeg mener at jeg har utviklet meg når vi har jobbet med matematiske modeller og vekstfart. Han har lært meg å se muligheter og tenke litt nytt, eller litt mer logikkform på det jeg tenker.

Han hevder at læreren legger vekt på at elevene skal bli gode i matematikk. Å være god i matematikk mener Espen innebærer å få en karakter han er fornøyd med. I timene har Espen lyktes når han har løst en oppgave elevene rundt han ikke får til. Da føler han seg bedre enn dem og det er en god følelse, sier han. Han er bedre enn de andre elevene når han har løst en oppgave på kort tid, som de andre ikke greier:

40 I: Hva er det som gjør at du er bedre enn dem da tror du?

41 E: At jeg får til ting som de ikke får til, det skjer selvfølgelig omvendt også. Hvis de sliter med en oppgave i ti minutter og jeg løser den på ett minutt, og de ikke skjønner hvordan jeg har fått det til, da er det godt å være til.

Espen sier at han lærer matematikk best når læreren gjennomgår oppgaver på tavla, etterfulgt av at elevene gjør oppgaver som er nokså lik. Han sier videre at læreren er flink til å lære elevene hvordan de skal løse ulike oppgaver:

42 I: [lapper] Hvordan lærer du matematikk best?

43 E: En allerede da, læreren forteller hvordan jeg skal gå fram, det er læreren veldig flink til. Han gjør en nesten identisk oppgave først på tavla, og så får vi gjøre to tre nesten like oppgaver. […] Måten han gjør det på da, er at han lærer oss hvordan vi skal gjøre det […].

Han forteller at læreren er flink til å forklare. Enkelte ting synes Espen det ser vanskelig ut å regne ut, men det forklarer læreren på en enkel måte, sier han:

26 I: Hva synes du at han er god på da?

27 E: […] Og så er han god på å forklare, så sånne ting som ser helt umulige å regne ut bare forklarer han kjempelett […]

Videre sier han at han må forstå hvordan formler er og ikke bare pugge dem. Hvis han kun pugger formler greier han ikke å løse oppgaver med andre tall:

54 I: Men du sa i sted at fordelen var at da kunne du forstå en teori, kan du beskrive hva du mener med det?

55 E: Det blir mye enklere å. Det at han, for eksempel hvis han går gjennom noe, og så har jeg vært uheldig å dette av stoffet. Når jeg spør om det etterpå da, så gir han meg hint til hvordan det var. Og da får jeg det tilbake igjen i hodet. Slik at jeg ikke bare sier at jeg kan det, og så gjør jeg en oppgave med de samme tallene som han gjorde på tavla. Og så får jeg en annen oppgave med litt andre tall og får det ikke til. Da har jeg ikke lært noe, da har jeg bare pugget. Det at han får oss til å forstå hvorfor det er sånn, det er det som, ja.

På spørsmål om å finne metodene og løsningene selv svarer han at det ikke er noen vits i å forsøke på oppgaver han ikke har mulighet til å løse:

46 I: Enn å finne metodene og løsningene selv da?

47 E: Det er jo selvfølgelig vanskeligere da. Hvis du ser en oppgave og du ikke har peiling på hva du skal gjøre, da kommer i alle fall ikke jeg noen vei. Og da vil jeg heller ha noen som forteller meg eller hjelper meg på vei. Jeg mener i alle fall at det ikke er noe vits i å sitte der og prøve på noe du ikke har sjanse til. […]

Når Espen kommer til en oppgave han ikke greier å løse, sitter han i omtrent fem minutter og prøver for så å spørre læreren om hjelp. I arbeidet med en oppgave, løser han gjerne oppgaven ledd for ledd:

75 I: Hvordan går dere frem for å løse en oppgave da?

76 E: Det er jo forskjellige ledd i en oppgave, og da gjør du det du greier først som gjerne bygger på noe annet. Da må du kanskje finne ut en side for å finne ut vinkelen, du må gjøre a før du gjør b. Du tar de leddene, vanligvis gjør du a, b, c og d, sånn du går frem.

Når de møter problemer som de ikke greier å løse med en gang, spør de ofte læreren. Læreren hjelper dem på vei, sier Espen:

73 I: Hva gjør dere som jobber sammen når dere møter problemer som dere ikke greier å løse med en gang?
74 E: Nei, vi sitter og funderer i kanskje fem minutt, og så spør vi læreren, og så kommer han og hjelper oss på vei. Så får vi jo nok en aha-opplevelse på hvordan det skal gjøres, og da gjør vi det bare da.

Espen mener at matematikk handler om tall og tallkunnskap, kombinert med logikk. Det han mener med logikk er å tenke smart og å se hvorfor det blir slik:

87 I: Og logikk betyr?
88 E: Jeg vet jo hva logikk er men. Det at du tenker smart og ser løsninger tidlig. Eller ikke nødvendigvis tidlig da, men at du ser hvorfor det blir sånn.

11.4.1 Espens forestillinger om forståelse i matematikk

Våre analyser av intervjuet med Espen tyder på at han har en forestilling om forståelse i matematikk som har likhetstrekk med flere tråder i matematisk kyndighet. Dataene tyder på at instrumentelle delen av Regneferdigheter inngår i Espens forestilling om forståelse i matematikk. Han sier blant annet at han lykkes i matematikk når han løser en oppgave på kort tid som de andre bruker lang tid på (utsagn 41) og at det ikke er noe vits i å streve med en oppgave han ikke har mulighet til å løse (utsagn 47). Utsagnene kan tyde på at han fokuserer på å løse oppgaver raskt og effektivt. Espen sier at læreren er flink til å forklare hvordan de skal regne ut forskjellige ting (utsagn 27), og at han lærer best når læreren viser elevene hvordan de skal gå frem for å løse en oppgave (utsagn 43). Utsagnene tolker vi som at Espen fokuserer på riktig og effektiv bruk av algoritmer. Han sier flere ganger at læreren viser dem *hvordan* de skal løse en oppgave og snakker da ikke om *hvorfor* (utsagn 41, 43, 55, 74). Vi tolker derfor utsagnene dit hen at Espens forestilling om forståelse i matematikk i stor grad samsvarer med den instrumentelle delen av Regneferdigheter. Espens fokus kommer dessuten frem gjennom det han sier om eget arbeid i matematikk. Når han møter oppgaver han ikke får til, spør han læreren om hjelp. Da får han ofte en aha-opplevelse på hvordan de skal gjøre det, som han selv sier (utsagn 74).

Våre tolkninger tyder i tillegg på at Espen har en forestilling om forståelse i matematikk, som har likhetstrekk med tråden Forståelse. I enkelte utsagn snakker Espen om *hvorfor*. Han sier blant at matematikk handler om tall kombinert med logikk. Logikk handler om at man ser hvorfor det blir slik (utsagn 88), som han selv sier det. Videre sier han at man må forstå en formel og ikke bare pugge den for å kunne bruke den til å løse en oppgave. Hvis man bare har pugget så har man ikke lært noe, sier han (utsagn 55). Utsagnene indikerer at han vektlegger forståelse av prosedyrer og fremgangsmåter, som er et tegn på at Forståelse inngår i hans forestilling om forståelse. Espen sier at læreren får elevene til å forstå hvorfor en formel er som den er (utsagn 55). Våre observasjoner tyder imidlertid på at læreren legger vekt på at elevene skal forstå *hvordan* de kan anvende formler og regler, og ikke *hvorfor*, som Espen sier.

Det Espen sier om eget arbeid med matematikk, har etter vår vurdering, likhetstrekk med tråden Strategisk kompetanse. Han sier at han likte å arbeide med emnet momentan vekstfart. Arbeidet med momentan vekstfart har gjort at han nå er flinkere til å tenke logisk; han har lært seg å se muligheter og tenke litt nytt (utsagn 20). Senere i intervjuet sier han imidlertid at det ikke er noe vits i å streve med en oppgave han ikke har mulighet til å løse (utsagn 47), som motstrider det vi nettopp sa om hans fokus på Strategisk kompetanse.

11.5 Intervju med Nils

Vårt inntrykk av Nils er at han er en utadvent gutt. Observasjonen av Nils og samtale med læreren indikerer at Nils er på et middels faglig nivå. Han samarbeider godt med andre elever og arbeider flittig i timene. Observasjonen tyder på at han er en pliktoppfyllende og flittig elev. Når det er urolig rundt han, observerer vi imidlertid at Nils er ukonsentrert.

I følge Nils innebærer en god matematikktime at læreren forklarer nye begreper og formler, slik at alle elevene forstår. En god time er kjennetegnet ved at han får til oppgaver. For at Nils skal få til en oppgave må han se poenget i oppgaven og finne en løsningsstrategi:

11 I: Hvis du tenker på en god matematikktime. Hva synes du skal kjennetegne en god matematikktime?

12 N: En time hvor læreren forklarer veldig godt hver enkelt for å forstå temaet vi går gjennom. Og at jeg kjenner at jeg mestrer oppgavene, og at de ikke er noe problem egentlig.

13 I: Hva skal til for at du mestrer en oppgave?

14 N: At jeg skjønner egentlig hovedpoenget med det. At jeg får med meg et slags poeng, og ser på, finner ut hvordan du gjør det.

Oppgavene Nils liker å arbeide med er korte og krever lite utregning. Han liker spesielt godt oppgaver som kommer tidlig på prøver:

79 I: Hva slags oppgaver liker du å jobbe med?

80 N: Jeg liker å jobbe med litt sånn korte oppgaver, ikke sånne oppgaver som bruker en hel A4 side på å skrive ned alt det du regner ut. Og ikke må taste en evighet på kalkulatoren for å få det til heller. Sånne oppgaver som gjerne er på starten av prøven. Sånn som ikke teller så veldig mye egentlig. Jeg vil at matte skal gå fort […].

Nils forteller at læreren prøver å få alle elevene til å forstå. Det han legger i at læreren prøver å få elevene til å forstå, er at læreren går nærmere inn på enkelte oppgaver. Læreren benytter enklere eksempler til å forklare:

15 I: Hvis du tenker på læreren din i matematikk. Hva er det du synes han legger vekt på i timen sin?

16 N: mmm, jeg synes han prøver å få alle til å forstå. Han stopper opp for å forklare for folk når de ikke henger med. Det synes jeg er veldig fint […].

17 I: Hva legger du i at han prøver å få dere til å forstå?

18 N: At, hvis noen først for eksempel prøver å si at de ikke skjønner det helt, det kan jo skje ganske ofte. Da går han litt tettere inn på det, og bruker kanskje noen litt enklere eksempler enn det man har brukt fra før [...].

Nils sier at læreren er flink til å få elevene til å forstå og til å lære bort matematikk til elevene. Allikevel ønsker Nils at de går i dybden på enkelte emner:

26 N: […] Så han er veldig engasjert i å prøve å få oss til å forstå. Han har heller ikke noe problem med å lære bort sånn sett. Han kanskje kunne gått, vært litt flinkere til å gå litt, enda mer i dybden på noen fag da […].

I timene noterer Nils det læreren skriver på tavla. Han liker å ha detaljerte notater slik at han forstår, spesielt til prøver:

33 N: […] Men gjerne så skriver jeg ned det som kommer på tavla, sånn den her: ”Skriver ned ting”. Hvis jeg skal, til prøver og sånn så liker jeg å ha det detaljert så jeg skjønner det selv i ettertid.

Når de arbeider med repetisjonsoppgaver, pleier Nils å lese gjennom notatene fra tidligere kapitler. I timene skriver han ned eksempler med utregning som læreren skriver på tavla. Eksempler han skriver ned, anvender han dersom han ikke får til enkelte oppgaver:

35 N: Ja, da leser jeg gjennom det når vi kommer tilbake til det kapittelet. […] Og det er veldig fint å ha når vi skal ha mattetentamen og sånn [….]. Det her blir jo brukt en del da. Når han forklarer eksempler og sånn. Læreren forklarer metoden og viser løsningene. Og det er jo også noe som jeg skriver ned. For han skriver oppgaven, og så skriver han hvordan du skal regne det ut, og så skriver han svaret. Og da er det gjerne lett, med andre ord med å ha en sånn eksempeloppgave så synes jeg det er ganske lett å få til andre ting og. Det gjør det mer enkelt å forstå.

Han gir et eksempel på når læreren har skrevet ned sinussetningen på tavla. Dersom han ikke husker den, ser han på utregningen læreren har gjort:

36 I: Bruker du eksemplene han har regnet ut til å løse oppgaver når du gjør oppgaver i boka?
37 N: De oppgavene jeg ikke forstår gjør jeg det. Men, sånn, det jeg kan, det bruker jeg gjerne ikke boka til. For eksempel hvis han har skrevet ned hvordan du skal regne ut den, hvordan den sinussetningen er for eksempel, og jeg ikke husker den helt så er det greit å se på hvordan han har regnet det ut.

Nils føler han lykkes i matematikk når han får en oppgave med en klar fremgangsmåte. Han liker oppgaver der han ikke trenger å prøve seg frem, oppgaver som har en klar løsningsstrategi:

67 I: Når føler du at du lykkes i matematikk?
68 N: Når jeg ikke trenger og, når jeg ikke ser på oppgaven og tenker at dæven, det her går ikke. Det her skjønner jeg ingenting av. Når jeg ikke er nødt til å prøve meg frem, når jeg veit hva som skal gjøres. Hvis jeg bare gjør det. At det går veldig smooth.

Når Nils spør læreren om hjelp skjønner han ikke alltid hva læreren forklarer. Dersom læreren forklarer andre elever forsøker Nils å følge med, eller spør eleven i etterkant. Selv om eleven har skjønt hva læreren har forklart, er det ikke alltid han klarer å forklare det til Nils:

63 I: Når du da eventuelt spør læreren. Hvordan synes du det fungerer?
64 N: Han går ganske fort frem noen ganger. Sånn, når han forklarer oppgaver, som noen ganger jeg ikke skjønner og. Så at jeg blir sittende igjen uten å forstå selv om han har forklart da. Gjerne hvis han forklarer til sidemannen og jeg prøver å følge med og, for å få det med meg. Og når sidemannen har skjønt det så har kanskje ikke jeg skjønt det, så prøver jeg å spørre han da. Siden han da sikkert har skjønt det.

65 I: Har han det da?

66 N: Tja, noen ganger kanskje, når du nettopp har skjønt det, så er det ikke like enkelt å forklare det bort.

11.5.1 Nils' forestillinger om forståelse i matematikk

Analysen av intervjudataene indikerer at forestillingen Nils har om forståelse i matematikk i stor grad samsvarer med den instrumentelle delen av Regneferdigheter. I intervjuet forteller Nils om forståelse. Nils sier at selv om elever har forstått en oppgave, betyr ikke det at de kan forklare den til andre (utsagn 66). Han sier at læreren legger vekt på at elevene skal forstå (utsagn 12, 16 og 26). Det han mener med å forstå er at læreren for eksempel benytter enklere eksempler til å forklare vankelige oppgaver (utsagn 14 og 18). Våre observasjoner av undervisningen tyder på at når læreren forklarer, viser han hvordan elevene kan løse en oppgave. Vår tolkning er at Nils fokuserer på anvendelse av algoritmer. Det Nils mener med å forstå, begrenser seg derfor til å gjelde Regneferdigheter fremfor Forståelse. Når Nils forteller om forståelse i matematikk nevner han ikke ordet *hvorfor*. Derimot nevner han *hvordan* han skal løse oppgaver (utsagn 14, 35 og 36) gjentatte ganger i intervjuet. Slik vi tolker intervjudataene handler Regneferdigheter for Nils om nøyaktig bruk av algoritmer, ikke om fleksibelt bruk. I hans forestilling om forståelse i matematikk, inngår derfor den instrumentelle delen av Regneferdigheter.

Våre tolkninger støttes av det Nils forteller om eget arbeid med matematikk (utsagn 33, 37 og 68). Han synes det er enklere å forstå når læreren forklarer metoder og viser løsninger på tavla (utsagn 35). I tillegg sier han at eksempler med utregning kan vise hvordan han skal løse oppgaver (utsagn 37). Forståelsen Nils forteller om her tolker vi som den instrumentelle delen av Regneferdigheter. Slik vi tolker utsagnet fokuserer Nils igjen på hvordan og ikke hvorfor. Nils ønsker videre at matematikk skal gå raskt, og han liker ikke å prøve seg frem når han løser oppgaver. Han liker oppgaver som er korte og krever lite regning (utsagn 68 og 80).

11.6 Intervju med Beate

Vi oppfatter Beate som en pliktoppfyllende matematikkelev. Våre observasjoner og samtaler med læreren, indikerer at Beate er en faglig sterk elev. Observasjonen tyder på at hun ofte samarbeider med andre elever og diskuterer mulige løsninger på oppgaver. Beate er muntlig aktiv i matematikktimene.

Beate forteller at hun har en god matematikklærer som er flink til å forklare. Undervisningen de har inneholder mye tavleundervisning, noe Beate synes er greit:

3 I: Hvordan synes du måten å undervise på er?

4 B: Nei, det er jo mye tavle, og det er egentlig ganske greit. Og han forklarer veldig godt før vi starter, så at det er ikke noe, vi starter ikke på det uten å vite hva vi skal gjøre da, på en måte.

I følge Beate har det vært en god matematikktime dersom hun fått til oppgavene de har arbeidet med, uten for mye hjelp fra læreren. I en god time gjennomgår læreren ny teori, og elevene arbeider deretter med oppgaver:

11 I: En god matematikktime, som du sitter igjen med at var en bra matematikktime. Hva er det som kjennetegner en slik time?

12 B: Nei, det er jo at du får det til da. At først så går du gjennom stoffet, så får vi oppgaver å regne med. Og at du føler at du får dem til (I: mmm). Uten at du spør om hjelp hele tiden […].

Hun sier at det læreren er god til, er å forklare hvordan hun skal gjøre oppgaver:

19 I:Hva synes du læreren din er god på?

20 B: Forklare. Hvordan du skal gjøre det. Og hjelpe deg, hvis du har spørsmål […].

Dersom Beate får hjelp av læreren med en oppgave, starter han med noe som er grunnleggende, for så å gå oppover i vanskelighetsgrad. På den måten skjønner Beate hva hun skal gjøre for å løse oppgaven:

21 I: Hvis du spør [læreren] om hjelp, hvordan forklarer han deg? Hva gjør han for at du skal komme videre?

22 B: Nei, han begynner kanskje mer med det grunnleggende, så går oppover i vanskelighetsgrad for at jeg skal skjønne hvordan det skal gjøres.

Når Beate står fast på en oppgave som ingen andre elever skjønner, ber hun læreren om hjelp. Hun ber læreren gi hint om hva hun skal gjøre for å løse oppgaven, og at han skal gi henne metoder som gjør det enklere å løse oppgaven:

54 I: Hvis du gjør en oppgave og står fast. Hva gjør du da?

55 B: Hvis det ikke er noen andre som skjønner heller, så rekker jeg opp hånda og spør læreren så han kan hinte litt til hvordan jeg skal gjøre det. At han ikke sier helt korrekt hva jeg skal gjøre og sånn der, men at han viser meg kanskje noen metoder som gjør det enklere da, for eksempel.

Beate føler hun lykkes i matematikk når hun får en god karakter på prøver. Hun sier at en god karakter krever mye arbeid og pugging:

58 I: Når synes du selv at du lykkes i matematikk?
59 B: Hvis jeg får en bra karakter da, på en prøve. Da føler jeg det.
60 I: Hva skal til for å få en god karakter?
61 B: Mye arbeid. Mye pugging og du kan liksom ikke starte rett før en prøve heller. Da det mye igjen å ta opp, så du må liksom holde på litt jevnt.

En god elev i matematikk skal i følge Beate være konsentrert. Eleven skal følge med på det læreren sier og skrive ned det han noterer på tavla. I tillegg gjør en god elev oppgavene læreren ber dem om å gjøre:

62 I: Hvis du ser for deg en elev som er veldig god i matematikk. Hva er det den eleven er god på?
63 B: Være konsentrert. At hun hører på hva læreren sier, og skriver det ned. Og gjør det du skal i timene, og ikke liksom tuller. Gjør oppgavene du har blitt bedt om.

Beate ser ingen likheter mellom matematikk og andre fag hun har. Når intervjueren spør om det er noen likheter med hvordan læreren underviser fagene, svarer hun at de andre fagene er mer muntlige enn matematikk. De andre fagene inneholder mer diskusjon:

66 I: Det er ikke noe i forhold til måten å undervise på?
67 B: Nei, det er ikke det. For i de andre fagene så går vi mest muntlig gjennom det hele tiden, og har mer sånne diskusjoner og lignende.

For Beate handler matematikk om tall og beregninger:

68 I: Hvis jeg ikke hadde visst hva matematikk gikk ut på, hva ville du sagt at matematikk handler om?
69 B: Mye tall. Mye vanskelige tall og mye forskjellige systemer og sånn der (I: mmm). Og hvordan du skal finne ut hva ting og beregne ting, og jeg veit ikke jeg.

Beate sier at hun liker å arbeide med oppgaver som står i læreboka og at det er slike oppgaver de arbeider mest med. Blant oppgavene i boka liker hun de korte oppgavene der hun kun skal finne løsningen. Dersom oppgavene inneholder mye tekst krever det at hun må tenke:

78 I: Hva slag oppgaver liker du å jobbe med?

79 B: Nei, dem som står i boka (I: mmm). Det er ikke så mye annet liksom.

80 I: De lange tekstoppgavene eller de (B: de korte ja)

81 B: Finne løsningen liksom. Bare på et stykke da. Mye tekst, det blir litt, ja, da må du tenke så mye igjen føler jeg. Så, helst korte ja.

11.6.1 Beates forestillinger om forståelse i matematikk

Vår analyse indikerer at den instrumentelle delen av Regneferdigheter i stor grad inngår i Beates forestilling om forståelse i matematikk. Intervjudataene viser at Beate har en forstilling om at matematikk handler å forstå hvordan hun skal løse en oppgave. Hun sier eksempelvis at matematikk handler om å vite hvordan hun skal gjøre beregninger (utsagn 69), og at læreren er flink til å forklare hvordan hun kan løse oppgaver (utsagn 20 og 22). For å lykkes, mener Beate at hun må pugge matematikken (utsagn 61). Slik vi tolker det, har utsagnene klare likhetstrekk med tråden Regneferdighet i matematisk kyndighet. Gjentatte ganger sier hun at matematikk handler om å vite *hvordan* (utsagn 20, 22, og 69), uten at hun sier *hvorfor*. Det kan tyde på at hun fokuserer på å anvende algoritmer riktig og nøyaktig, uten krav om å vite hvorfor algoritmen fungerer. Vi tolker det som at Beates forestilling om forståelse er i tråd med den delen instrumentelle delen av Regneferdigheter.

Hennes fokus på den instrumentelle delen av Regneferdigheter kommer i tillegg frem i det hun sier om sitt eget arbeid med matematikken. Hun foretrekker korte oppgaver med lite tekst, slik at hun slipper å tenke så mye (utsagn 81). Dessuten sier hun at tavleundervisningen der læreren viser fremgangsmåter er god, slik at hun vet hva hun skal gjøre når hun skal arbeide med oppgaver (utsagn 4). Vår tolkning av datamaterialet indikerer i tillegg at Beate fokuserer på strategisk kompetanse i sitt arbeid med matematikk. Beate sier at hun ønsker at læreren skal gi hint ved å vise metoder som gjør oppgaven enklere (utsagn 55). Slik vi tolker det har ikke det hun sier om hint noe med Strategisk kompetanse å gjøre; å gi hint innebærer for henne at læreren viser metoder. Derfor er utsagnet nok en indikasjon på hennes fokus på den instrumentelle delen av Regneferdigheter.

Intervjudataene viser at Beate i ett utsagn snakker om resonnering. Hun ser på matematikk som et fag der det ikke foregår diskusjoner (utsagn 67). Utsagnet indikerer at Resonnering ikke inngår i Beates forestilling om forståelse i matematikk.

11.7 Sammendrag av analyse av intervju

Intervjudataene fra Bakkegata videregående skole tolker vi som nokså entydige. Vår tolkning er at elevene[28] har forestillinger om forståelse i matematikk som samsvarer med den instrumentelle delen av Regneferdigheter. Tre av de fire elevene er konsekvente i sitt fokus på at matematikk handler om riktig anvendelse av algoritmer. Tea sier blant annet at forståelse handler om å vite hva hun skal gjøre, uten at hun må tenke seg om (utsagn 34). Videre sier Nils at han lykkes i matematikk når han ikke trenger å prøve seg frem for å løse oppgaver, men vet hva han skal gjøre (utsagn 68). Elevenes fokus på den instrumentelle delen av Regneferdigheter kommer dessuten tydelig frem ved at Beate sier at matematikk handler om å vite hvordan hun skal gjøre beregninger (utsagn 20). Eksemplene viser at de tre elevene kun legger vekt på *hvordan* de kan løse oppgaver; de sier ikke noe om *hvorfor*. Vår tolkning er at den fjerde eleven Espen, i likhet med de andre elevene, har forestillinger om forståelse som samsvarer med den instrumentelle delen av Regneferdigheter. Espen fokuserer på effektiv bruk av algoritmer ved at å lykkes i matematikk innebærer at han løser en oppgave på kort tid (utsagn 41). Han er imidlertid litt mer nyansert enn de andre, i og med at Forståelse inngår i hans forestilling om forståelse. Espen hevder blant annet at matematikk handler om tall kombinert med logikk, som innebærer at han ser *hvorfor* det blir slik (utsagn 88). Elevene sier lite om strategisk kompetanse og resonnering. Vi ser imidlertid to utsagn som indikerer at trådene ikke inngår i deres forestillinger. Beate sier eksempelvis at matematikk er et fag der det ikke foregår diskusjoner (utsagn 67), som kan være en indikasjon på at Resonnering ikke inngår i hennes forestilling om forståelse. Espen sier at det ikke er vits i å bruke tid på en oppgave han ikke greier å løse (utsagn 47). Vi tolker det som en indikasjon på at Strategisk kompetanse ikke inngår i hans forestilling om forståelse i matematikk.

[28] Med elevene, mener vi de fire elevene vi intervjuet

11.8 Sammenhenger mellom elevers forestillinger om forståelse og undervisningen de erfarer ved Bakkegata videregående skole

Observasjonen av undervisningen ved Bakkegata vgs. indikerer at læreren i all hovedsak fokuserer på den instrumentelle delen av Regneferdigheter. Lærerens fokus på riktig og effektiv anvendelse av algoritmer, kommer tydelig frem ved at han fokuserer på at elevene skal gjøre mange oppgaver. Når læreren løser oppgaver på tavla, inkluderer han elevene i den forstand at han spør hvilken formel av to alternativer det er mest hensiktsmessig å benytte. Dersom elever spør om hjelp til å løse en oppgave, bidrar læreren ved å fortelle elevene hva de kan gjøre. Observasjonsdataene tyder på at læreren fokuserer på *hvordan* elevene kan løse en oppgave, uten krav om at de skal vite *hvorfor* det blir slik.

Vår tolkning er at lærerens fokus gjenspeiler seg i elevenes forestillinger om forståelse. Fokuset gjenspeiler seg i den forstand at den instrumentelle delen av Regneferdigheter i stor grad inngår i samtlige elevers forestillinger om forståelse. En elev sier eksempelvis at forståelse dreier seg om å vite hva hun skal gjøre for å løse en oppgave, mens en annen sier at matematikk handler om å vite hvordan hun skal gjøre beregninger. Vi finner i tillegg utsagn der en elev sier at han lykkes når han ikke trenger å prøve seg frem for å løse en oppgave, men vet hvordan han skal gå frem. Elevene fokuserer, i likhet med læreren, på *hvordan* de skal løse en oppgave. Tre av elevene nevner ikke at de må vite *hvorfor* prosedyrene fungerer.

Vi tolker, som sagt, dataene fra observasjonen dit hen at læreren i enkelte tilfeller ønsker at elevene skal utvikle Forståelse. Slutningen trekker vi på grunnlag av at læreren gir elevene mange eksempler som illustrerer begrepene han presenterer. Vår tolkning av intervjuene tyder på at Forståelse, i tillegg til den instrumentelle delen av Regneferdigheter, inngår i én elevs forestillinger om forståelse. Eleven sier eksempelvis at han må forstå en formel for å anvende den til å løse en oppgave og at det ikke holder å pugge den.

12 Diskusjon

I det følgende diskuterer vi våre resultater og sammenligner resultatene fra de to klassene vi har studert. Videre drøfter vi ulike metodiske spørsmål i forbindelse med studien. Vi vurderer studiens validitet og reliabilitet, i tillegg til å diskutere vår bruk av Berglies (2009) analyseverktøy. Avslutningsvis presenterer vi nye forskningsspørsmål det kan være interessant å undersøke som en utvidelse av vår studie. I diskusjonen er det naturlig å koble våre resultater opp mot tidligere forskning. Da det ikke finnes empiriske studier av sammenhengen mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk og undervisningen de erfarer [29], har vi ikke mulighet til å gjøre en slik kobling. Det vi derimot kan gjøre, er å sammenligne elevers forestillinger om forståelse i vår studie og i Berglies studie.

12.1 Resultat

Våre resultater viser at det er tydelige sammenhenger mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk og matematikkundervisningen de erfarer. Vi gir nå en kort oppsummering av hvilke sammenhenger vi har kommet frem til ved Vikstrand vgs. og Bakkegata vgs. I oppsummeringen tar vi kun for oss de trådene vi ser et sterkt fokus på.

De fire elevene fra Vikstrand vgs. har, slik vi vurderer det, forestillinger om forståelse i matematikk som samsvarer med tråden Forståelse i matematisk kyndighet. Vår tolkning av observasjonsdataene tyder på at læreren har sterkt fokus på den samme tråden. Elever og lærer fokuserer på å se relasjoner i matematikk og at elevene skal vite *hvorfor* prosedyrer fungerer. Videre vurderer vi det slik, at Strategisk kompetanse inngår i flere elevers forestillinger om forståelse. Observasjonen tolker vi dit hen at læreren i tillegg legger vekt på Strategisk kompetanse. Både elever og lærer legger vekt på at elevene skal utlede hensiktsmessige løsningsstrategier i matematikk. Videre tolker vi intervjudataene dit hen, at Resonnering inngår i to av elevenes forestillinger om forståelse. Våre observasjoner av undervisningen tyder dessuten på at læreren legger vekt på tråden Resonnering. De to elevene og læreren fokuserer på at elever må begrunne og argumentere for sine forslag, både i arbeid med oppgaver og diskusjoner i

[29] Se søkeoversikt, Vedlegg 1

plenum. Når det gjelder de fire elevene fra Bakkegata vgs. har de, etter vår vurdering, forestillinger om forståelse som samsvarer med den instrumentelle delen av Regneferdigheter. Den samme tråden ser vi at læreren har sterkt fokus på i undervisningen. Både elever og lærer fokuserer på at matematikk handler om å vite hvordan de kan anvende algoritmer riktig og nøyaktig. De fokuserer, i all hovedsak, på *hvordan* de kan anvende algoritmene, uten krav om å vite *hvorfor* de fungerer.

For å styrke påstanden om at det er sammenhenger mellom elevenes forestillinger om forståelse og undervisningen, anser vi det som hensiktsmessig å sammenligne resultatene fra de to klassene. I kapittel 7 presenterer vi en studie gjort av Carter og Norwood (1997) der de kommer frem til at forskjeller på elevers matematikkrelaterte forestillinger innad i en klasse er liten og at variasjonen mellom klasser er stor. På det grunnlaget påstår de at undervisningen må påvirke elevenes forestillinger. Våre resultater viser at elevenes forestillinger om forståelse er nokså like innad i hver av de to klassene. Ved Vikstrand vgs. inngår Forståelse og Strategisk kompetanse i samtlige av de fire elevers forestillinger om forståelse. I tillegg inngår Resonnering i to av elevenes forestillinger, men det er ikke den tråden elevene legger mest vekt på. Våre resultater viser at elevenes forestilling om forståelse er nokså lik for de fire elevene da samtlige legger stor vekt på Forståelse og Strategisk kompetanse. Vi ser dessuten at de fire elevene gjennomgående fokuserer på *hvorfor* i matematikken. I klassen ved Bakkegata vgs. inngår den instrumentelle delen av Regneferdigheter i de fire elevenes forestilling om forståelse i matematikk. Én elev sier imidlertid at matematikk handler om å vite hvorfor en løsning er som den er, men det er ikke noe han legger spesielt vekt på. Vår vurdering er derfor at elevenes forestillinger er nokså like elevene imellom; de fire elevene fokuserer på *hvordan* i matematikken. Resultatene fra studien viser at det er stor forskjell på elevenes forestillinger mellom klassene. Som sagt, inngår hovedsakelig Forståelse og Strategisk kompetanse i elevene ved Vikstrand vgs. sine forestillinger. Ved Bakkegata vgs. inngår, i all hovedsak, den instrumentelle delen av Regneferdigheter i elevenes forestilling om forståelse.

Den eneste[30] studien som er gjennomført om elevers forestillinger om forståelse i matematikk er som sagt Berglies (2009) studie. Hennes resultater indikerer at elevenes forestillinger om forståelse kan ha individuelle preg; elever i samme klasse har ulike forestillinger om forståelse. To av elevene har en forestilling om forståelse som samsvarer med relasjonell forståelse, der den ene fokuserer på samtlige tråder i matematisk kyndighet, mens den andre fokuserer på Forståelse. De to andre elevene i Berglies utvalg har en forestilling om forståelse som samsvarer med instrumentell forståelse; de fokuserer på den instrumentelle delen av Regneferdigheter. Den ene eleven fokuserer i tillegg på Forståelse. I vår studie har elever i hver av de to klassene, som tidligere nevnt, nokså lik forestilling om forståelse. Vårt resultat tyder på at forestillinger ikke har individuelle preg innad i en klasse i den grad Berglie snakker om. Vi har ikke grunnlag for å si hva forskjellene i resultat mellom de to studiene skyldes. Likevel vil vi antyde at det kan skyldes lærernes tydelighet i de to klassene vi observerte undervisningen i. Observasjonen indikerte at lærerens fokus var svært tydelig i hver av klassene. Læreren ved Vikstrand vgs. var eksplisitt på at elevene skulle lete etter mønstre og relasjoner, mens læreren ved Bakkegata vgs. var eksplisitt på at det er viktig at elevene løser mange oppgaver i matematikk.

12.2 Studiens validitet og reliabilitet

I etterkant av en kvalitativ studie er det naturlig å diskutere studiens validitet og reliabilitet. Studiens validitet refererer til hvorvidt det vi måler er relevant i sammenhengen (Gunnarsson, 2002). Gunnarsson skiller mellom indre og ytre validitet. Indre validitet dreier seg om studiens troverdighet. For å øke studiens troverdighet, ga vi blant annet elevene vi intervjuet tilbud om å lese og eventuelt korrigere transkripsjonene fra intervjuene. Det var to elever som ønsket å få transkripsjonen tilsendt, men de hadde imidlertid ingen innvendinger. Studiens troverdighet øker ved at vi studerte elevene fra flere synsvinkler; vi benyttet datatriangulering. I vårt tilfelle benyttet vi både intervju og observasjon. Vi kunne på den måten bruke dataene fra observasjon til å støtte oppunder våre tolkninger av intervjudataene. Som vi ser av analysen av intervjuene, har våre observasjoner vært viktige. Ved Bakkegata vgs. sier flere elever at de foretrekker at læreren gir hint. Det kan være en indikasjon på at elevene har forestillinger om

[30] Se Vedlegg 1 for søkeoversikt

forståelse som samsvarer med Strategisk kompetanse. Observasjonen tyder imidlertid på at læreren ikke gir hint i den forstand; han gir elevene mer eller mindre klare beskjeder om hva de kan gjøre for å komme videre i arbeidet med oppgaver. Vår tolkning av elevenes utsagn endret seg dermed til at elevene har en forestilling om forståelse som har likhetstrekk med Regneferdigheter. Videre refererer studiens ytre validitet til studiens generaliserbarhet (Gunnarsson, 2002). I kvalitativ forskning er det imidlertid ikke vi som forskere som definerer generaliserbarheten. Vi beskriver forskningsprosessen og presenterer resultatene på en slik måte at leseren kan vurdere hvorvidt han kan overføre studien til andre situasjoner.

I tillegg til å diskutere studiens validitet, må vi diskutere dens reliabilitet. Studiens reliabilitet refererer til hvorvidt våre målinger er pålitelige; om vi måler det vi tror vi måler (Gunnarsson, 2002). Vår studies reliabilitet avhenger av kvaliteten på oss som forskere. Vi regner oss selv som nokså uerfarne i rollen som intervjuere og observatører, som kan være en trussel mot studiens reliabilitet. For å øke studiens reliabilitet har vi tatt bort enkelte spørsmål fra analysen av intervjuene, da vi anser dem som ledende. Et eksempel er et spørsmål fra intervjuet med Line, der vi styrer henne ved å spørre om hvem hun henvender seg til når hun står fast på en oppgave:

82 I: Når du står fast på en oppgave. Hvem henvender du deg til først da?
83 L: Til de som sitter ved siden av meg. Hvis hun eller han ikke har funnet ut av det heller, så prøver jeg å gå videre til neste oppgave for å se om jeg får det til. Og prøver å sammenligne de to. Og hvis det ikke fungerer, så må jeg bare spørre læreren. Da går det fint.

Istedenfor å spørre eleven om hvem hun henvender seg til, burde vi spurt om hva Line gjør når hun står fast i sitt arbeid med oppgaver. Vi har imidlertid flere sitater fra eleven der hun sier noe om sitt eget arbeid med matematikk. På den måten er ikke responsen på det ledende spørsmålet avgjørende for vår analyse av intervjudataene og påvirker derfor ikke reliabiliteten i særlig grad.

I tillegg til enkelte ledende spørsmål, finner vi eksempler på spørsmål vi burde fulgt opp i større grad. Dersom vi hadde fulgt opp spørsmålene, kunne vi blitt sikrere på hva eleven mener som kan være med på å sikre at det faktisk er elevenes forestillinger om forståelse vi undersøker. Vi ser eksempelvis at Beate sier at i en god matematikktime føler hun at hun får til oppgaver:

69 I: Hvis jeg ikke hadde visst hva matematikk gikk ut på, hva ville du sagt at matematikk handler om?

70 B: Mye tall. Mye vanskelige tall og mye forskjellige systemer og sånn der (I: mmm). Og hvordan du skal finne ut hva ting og beregne ting, og jeg veit ikke jeg.

Som en oppfølging kunne det vært interessant å spørre Beate om hva hun mener med systemer. På den måten kunne vi kanskje fått en tydeligere indikasjon på hvilke tråder i matematisk kyndighet hennes forestilling om forståelse har likhetstrekk med.

Vi står i fare for å redusere studiens reliabilitet dersom vi har en forutinntatt holdning til feltet vi studerer (Gunnarsson, 2002). Før gjennomføringen av intervjuene satte vi oss inn i matematikkdidaktiske studier som viser at elevenes matematikkrelaterte forestillinger påvirkninger undervisningen de deltar i og vice versa. Det var derfor fare for at vi inntok en forutinntatt holdning som påvirket innsamlingen av datamateriale. For eksempel kunne vi utelukkende fulgt opp respons fra elevene som samsvarte med inntrykket vi hadde fra observasjonen av undervisningen. Vi tror imidlertid at vi har lyktes i å være nøytrale intervjuere, som ikke har ledet elevene i en bestemt retning. Under observasjonen noterte vi dessuten alt som skjedde. Vi hadde fokus på Cobbs (2000) aspekter, men var åpne for at vi kunne observere elementer som ikke inngår i aspektene. En fare ved bruk av observasjon som metode er at vi kan påvirke læreren og elevenes oppførsel i undervisningen (Robson, 1993). Verken lærerne eller elever så ut til å ha problemer med at vi observerte dem i klasserommet. Vi erfarte at elevenes beskrivelser av matematikkundervisningen i sin klasse stemte godt overens med vårt inntrykk av undervisningen. Det tolker vi som en indikasjon på at læreren ikke lot seg påvirke nevneverdig av vår tilstedeværelse i klasserommet. Lærerne kunne dessuten bekrefte at undervisningsøktene var forholdsvis normale som tyder på at elevene ikke lot seg påvirke av at vi observerte dem. Dersom vi hadde vært til stede i klasserommet over en lengre periode, kunne vi imidlertid vært sikrere på at vår tilstedeværelse ikke påvirket lærer og elever. På den måten kunne lærer og elever venne seg til å ha observatører til stede, som kunne bidratt til økt reliabilitet.

En fordel i forhold til studiens reliabilitet er at vi har vært to forskere gjennom hele arbeidsprosessen (Gunnarsson, 2002). Under observasjonen opplevde vi det som fordelaktig å være to i den forstand at vi fanget opp mer enn det én av oss kunne gjort alene. Etter observasjonen diskuterte vi notatene våre for å kontrollere at vi forsto situasjoner likt. I forbindelse med intervjuene dro vi nytte av å være to i den forstand at vi kontrollerte hverandres transkripsjoner. I forbindelse med analysen av datamaterialet diskuterte vi dessuten samtlige tolkninger.

12.3 Vurdering av analyseverktøyet

Berglies (2009) studie tyder på at hennes analyseverktøy er godt egnet til å gi et nyansert bilde av ungdomsskoleelevers forestillinger om forståelse i matematikk. Vår studie viser, i likhet med Berliges, at verktøyet fungerer godt til å gi et nyansert bilde av elevers forestillinger. Vi benyttet imidlertid verktøyet til å undersøke hvilke forestillinger elever ved videregående skole kan ha. Elevene i vår studie erfarer dessuten en annen form for undervisning enn elevene i Berglies studie. På den måten har vi bidratt til å vise at verktøyet kan gi et nyansert bilde av 16-årige elevers forestillinger om forståelse; både elever som erfarer tradisjonell og undersøkende undervisning. Videre brukte vi verktøyet for å analysere undervisningen vi observerte, i den hensikt å kunne si noe om lærerens fokus i de to klassene. Vår oppfatning er at verktøyet er velegnet til å beskrive hva læreren vektlegger i matematikkundervisningen. Da vi observerte undervisningen var det tydelig å se at lærerne fokuserte på elementer som samsvarte med definisjonen på ulike tråder i matematisk kyndighet.

12.4 Videre arbeid med studien

I arbeidet med analysen av datamaterialet har vi utviklet en dypere forståelse for hva de fire aktuelle trådene i matematisk kyndighet innebærer. Vår forståelse av trådene er nokså annerledes i etterkant av analysen enn i forkant. Den dypere forståelsen av trådene i kyndighet medfører at vi gjerne skulle inkludert enkelte nye spørsmål i intervjuguiden og i tillegg formulert noen nye oppfølgingsspørsmål. Transkripsjonen av intervjuene inkluderer for eksempel få utsagn der elever snakker direkte om resonnering. I etterkant ser vi at enkelte spørsmål ikke har gitt oss innblikk i elevenes forestillinger i den grad vi forventet på forhånd. Det første spørsmålet, der vi ber elevene om å fortelle om matematikkundervisningen, opplevde vi som et godt innledende spørsmål. Elevenes respons gav oss mange muligheter til å stille oppfølgende spørsmål som har bidratt til vår innsikt i elevenes forestillinger. I forbindelse med det første spørsmålet la vi som sagt ut lapper som viste de ulike emner elevene har arbeidet med i matematikk. Vi ser at det elevene sa omkring lappene ikke har bidratt til å danne et bilde av deres forestillinger. Bruk av lappene krevde i tillegg forholdsvis mye tid.

En klar svakhet ved vår studie er at vi har lite datamateriale som gir innblikk i sosiomatematiske normer i klasserommene der vi har observert undervisningen. Normene er, som tidligere nevnt, refleksivt forbundet med elevers matematiske forestillinger og verdier (Cobb, 2000). I kapittel 6 argumenterte vi for at slike forestillinger i tillegg kan si noe om elevers forestillinger om forståelse. Vår vurdering er at vi har studert undervisningen over en såpass kort periode, at det ikke var mulig å fange opp de sosiomatematiske normene i tilstrekkelig grad.

I studien undersøker vi hvilke sammenhenger det kan være mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk og undervisningen de erfarer. Resultatene tyder på at elevenes forestillinger og lærerens fokus i undervisningen er tett forbundet. Som en mulig forlengelse av studien kunne det vært interessant å undersøke hvorvidt lærerens fokus er bevisst eller ubevisst. En interessant problemstilling kan være ”Hvilke sammenhenger kan det være mellom læreres forestillinger om forståelse i matematikk og matematikkundervisningen?”.

13 Avslutning

Studien fokuser på mulige sammenhenger mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk og undervisningen de erfarer. For å besvare problemstillingen *"Hvilke sammenhenger kan det være mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk og matematikkundervisningen de erfarer?"*, ble det samlet inn data gjennom intervju og observasjon. To ulike matematikklasser ved videregående skole ble observert og totalt åtte elever ble intervjuet. Elevene i den ene klassen erfarer tradisjonell undervisning, mens elevene i den andre klassen erfarer undersøkende undervisning. Datamaterialet fra både intervju og observasjon ble analysert ved hjelp av et analyseverktøy Berglie (2009) har utviklet. Verktøyet tar utgangspunkt i instrumentell og relasjonell forståelse (Skemp, 1987) som Berglie har nyansert ved hjelp av fire tråder (Forståelse, Regneferdigheter, Strategisk kompetanse og Resonnering) i matematisk kyndighet (Kilpatrick et al., 2001).

Resultatene fra studien indikerer at det er sammenhenger mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk og undervisningen de erfarer. Våre tolkninger er at læreren som gjennomfører undersøkende undervisning i hovedsak vektlegger trådene Forståelse, Strategisk kompetanse og Resonnering. Analysen indikerer at elevene i klassen har forestillinger om forståelse som har klare likhetstrekk med de samme trådene i matematisk kyndighet. Tråden Resonnering inngår imidlertid ikke i elevenes forestillinger om forståelse i like stor grad som de andre trådene. Læreren som gjennomfører tradisjonell undervisning, vektlegger den instrumentelle delen av Regneferdigheter. Vår tolkning er dessuten at elevene som erfarer tradisjonell undervisning i all hovedsak har forestillinger om forståelse i matematikk som samsvarer med den instrumentelle delen av Regneferdigheter. Den eneste[31] studien som finnes om elevers forestillinger om forståelse i matematikk er en studie gjort av Berglie (2009). Resultatene hun oppnådde indikerer at elevers forestillinger om forståelse kan ha individuelle preg, i den forstand at elever i samme klasse har ulike forestillinger om forståelse. Vårt resultat tyder på at forestillinger ikke har individuelle preg innad i en klasse i den grad Berglie indikerer.

[31] Se Vedlegg 1 for søkeoversikt

I vår studie blir bruken av Berglies (2009) verktøy utvidet. Resultatene tyder på at Berglies verktøy er godt egnet til å gi et nyansert bilde av 16-årige elevers forestillinger om forståelse; både elever som erfarer tradisjonell undervisning, og elever som erfarer undersøkende undervisning. Resultatene tyder på at verktøyet et godt egnet til å avdekke hvilke tråder i matematisk kyndighet lærere legger vekt på i matematikkundervisningen. Gjennom studien har vi sett at det er klare sammenhenger mellom undervisningen elevene erfarer og forestillingene de har om forståelse i matematikk. Resultatene indikerer at trådene i matematisk kyndighet som læreren vektlegger, gjenspeiles i elevenes forestillinger om forståelse. Studien bidrar til økt innsikt i hvilke sammenhenger det kan være mellom forestillingene elever har om forståelse i matematikk og undervisningen de erfarer. Videre kan studien bidra til læreres refleksjon rundt egen undervisning og bevissthet i forhold til hvordan undervisningen påvirker elevenes forestillinger om forståelse. Vi mener, i likhet med Spangler (1992), at lærere med innsikt i hvordan undervisning påvirker elevers forestillinger, bevisst kan påvirke elevenes matematikkrelaterte forestillinger. Innledningsvis nevnte vi dessuten at elevers forestillinger relatert til matematikk påvirker deres læring (Spangler, 1992). Vi mener derfor at en lærer som er bevisst på hvilke sammenhenger det kan være mellom elevenes forestillinger om forståelse og undervisning, har mulighet til å påvirke elevers læring ved å bevisst påvirke deres forestillinger om forståelse i matematikk.

Vi har studert hvilke tråder i matematisk kyndighet læreren vektlegger i et klasserom preget av tradisjonell undervisning, og i et klasserom med undersøkende undervisning. Analysene av undervisningen tyder på at lærerens fokus på trådene i matematisk kyndighet er svært ulike i de to klassene. Observasjonene tyder på at læreren som underviser tradisjonelt hovedsakelig fokuserer på den instrumentelle delen av Regneferdigheter. Læreren som underviser undersøkende, fokuserer på Forståelse, Strategisk kompetanse og Resonnering. I tillegg inkluderer hun tråden Regneferdigheter i samspill med de øvrige trådene. I læreplanen (LK 06) (Utdanningsdirektoratet, 2006) fokuseres det på at elever skal utvikle seks grunnleggende ferdigheter i matematikk: Å kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig, lese, regne og bruke digitale verktøy i matematikk. Etter vår vurdering innebærer utvikling av ferdighetene, at elevene utvikler samtlige tråder i matematisk kyndighet. Elevene skal for eksempel kunne uttrykke seg muntlig ved at de argumenterer for sin tankegang og drøfter et problem. Videre skal elevene kunne uttrykke seg skriftlig, som innebærer å sette ord på matematiske ideer og at de skal kunne benytte matematiske symboler. Elevene skal dessuten regne i matematikk, som handler om å anvende algoritmer, løse problemer og om å kunne benytte varierte løsningsstrategier (Utdanningsdirektoratet, 2006). Våre resultater viser at det kan være forskjell på hvilke tråder lærere vektlegger i undervisningen, selv om de har den samme læreplanen å forholde seg til. Som en mulig forlengelse av studien kunne det derfor vært interessant å undersøke hvorvidt lærerens fokus i undervisningen er bevisst eller ubevisst. En mulig problemstilling er hvilke sammenhenger det er mellom læreres forestillinger om forståelse i matematikk og matematikkundervisningen. Det kunne dessuten vært interessant å gjennomføre en større kvantitativ studie, der vi undersøker hvilke sammenhenger det kan være mellom elevers forestillinger om forståelse i matematikk og undervisningen de erfarer.

Referanseliste

Alseth, B., Breiteig, T., & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering: matematikkfaget som kasus*. Notodden: Telemarksforsking.

Berglie, I. (2009). *Hvilke forestillinger kan elever ha om forståelse i matematikk?* Trondheim: NTNU.

Boaler, J. (1997). *Experiencing School Mathematics: Teaching styles, sex and setting*. Buckingham, Philadelphia: Open University Press.

Boaler, J. (2002). The development of *disciplinary relationships*: knowledge, practice, and identity in mathematics classrooms. *For The Learning of Mathematics, 22*(1), 42-47.

Carter, G., & Norwood, K. S. (1997). The Relationship Between Teacher and Student Beliefs About Mathematics. *School Science & Mathematics, 97*(2), 62-67.

Cobb, P. (2000). The Importance of a Situated View of Learning to the Design og Research and Instruction. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 45-85). Westport, CT: Ablex Publishing.

Cobb, P. (2001). Supporting the Improvement of learning and teaching in social and institutional context. In S. Carver & D. Klahr (Eds.), *Cognition and Instruction: Twenty-Five Years of Progress* (pp. 455-478). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravenmeijer, K. (2001). Participating in Classroom Mathematical Practises. *The Journal of the Learning Sciences, 10*(1&2), 113-163.

Dionne, J. J. (1984). The perception og mathematics among elementary school teachers. In J. M. Moser (Ed.), *Proceedings of the 6th conference og the North American Chapter og the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 223-228). Madison, WI: University og Wisconsin: PME-NA.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2003). Rethinking characterizations of beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education* (pp. 39-57). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Goldin, G., Rösken, B., & Törner, G. (2009). Beliefs - No Longer a Hidden Variable in Mathematical Teaching and Learning Processes. In J. Maass & W. Schlöglmann

(Eds.), *Beliefs and Attitudes in Mathematical Education. New Research Result* (pp. 1-18). Rotterdam: Sense Publishers.

Gravenmeijer, K., & Cobb, P. (in press). Design research from the learning design perpective. In van den Akker, K. Gravenmeijer, S. McKenny & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design research: The design, development and evaluation of programs, processes and products*. London: Routledge.

Green, T. F. (1971). *The activities of teaching*. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha.

Gunnarsson, R. (2002). *Validitet och reliabilitet*. Hentet 15.05.2010 fra http://infovoice.se/fou.

Hannula, M. S. (accepted). *The effect of achievement, gender and classroom context on upper secondary students' mathematical beliefs.* Paper presented at the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME6), Lyon.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York: MacMillan Publishing Company.

Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Education Studies in Mathematics, 47*(1), 101-116.

Kilpatrick, J., & Swafford, J. (Eds.). (2002). *Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* Washington, DC: National Academies Press.

Kloosterman, P. (2002). Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: Measurement and implications for motivation. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2 ed.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Leder, G., Pehkonen, E., & Törner, G. (Eds.). (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lester, F., Jr. (2002). Implications of research on students' beliefs for classroom practice. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden*

Variable in Mathematics Education (pp. 345-353). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Liljedahl, P. (2009). Teachers' insights into the relationship between beliefs and practice. In J. Maass & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education* (pp. 33-43). Rotterdam: Sense Publishers.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathemathics education: a reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council og Teachers og Mathematics* (pp. 575-596). New York: Macmillan Publishing Company.

Mertens, D. M. (2005). *Research and Evaluation in Education and Psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods* (2 ed.). Thousand Oaks: Sage Publications, Inc.

Nipper, K., & Sztajn, P. (2008). Expanding the instructional triangle: conceptualizing mathematics teacher development. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(4).

Op 't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2003). Framing students' mathematics-related beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?* (pp. 13-37). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Pálsdóttir, G. (2008). Girls' Beliefs about the Learning of Mathematics. In B. Sriraman (Ed.), *Beliefs and mathematics: festschrift in honor of Günter Törner's 60th birthday*. Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc.

Pehkonen, E. (1995). *Pupils' view of mathematics: Initial report for an international comparison project*. University of Helsinki, Department of Teaching Education. Research report 152.

Pehkonen, E. (2003). Lærere og elevers oppfatninger som en skjult faktor i matematikkundervisningen. In B. Grevholm (Ed.), *Matematikk for skolen*. Bergen: Fagbokforlaget.

Pehkonen, E. (Accepted). *Use of Dionné's Tri-Division to Reveal Teacher Students' Beliefs in Mathematics.* Paper presented at the MAVI 15 - The Fifteenth MAVI conference, Genova, Italy.

Pehkonen, E., & Pietilä, A. (2003). On Relationship between Beliefs and Knowledge in Mathematics Education. In:. *Proceedings of the CERME-3 (Bellaria) meeting*, from http://ermeweb.free.fr/CERME4/

Robson, C. (1993). *Real World Research: A Resource for Social Scientists and Practitioner-Researchers* (2 ed.). Oxford: Blackwell Publishing.

Rolka, K., Rösken, B., & Liljedahl, P. (2006). Challenging the mathematical beliefs of preservice elementary school teachers. In J. Novotnvá, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 441-448). Praha: PME.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Florida: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-369). New York: Macmillan.

Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24-41.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London & Washington DC: The Falmer Press.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics teaching, 77*, 20-26.

Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics: Expanded American Edition*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Skott, J. (2000). *The Images and Practice of Mathematics Teachers*. København: Danish University of Education.

Spangler, D. A. (1992). Assessing Students' Beliefs About Mathematics. *Arithmetic Teacher, 40*(3), 148-152.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Törner, G., & Grigutsch, S. (1994). Mathematische Weltbilder bei Studienanfängern - eine Erhebung. *Journal für Mathematikdidaktik, 15*(3/4), 211-252.

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk - Føremål*. Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Wedege, T., Skott, J., Wæge, K., & Henningsen, I. (2006). *Changing views and practices? A study of the KappAbel mathematics competition*. Trondheim: Norwegian Center for Mathematics Education.

Wæge, K. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning* (1 ed.). Trondheim: Norges teknisk-naturvitenskaplige universitet (NTNU).

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Yackel, E., & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Søkeoversikt

- Gått gjennom følgende tidskrift:
  - International journal for mathematics teaching and learning
  - Mathematics teacher education & development
  - Mathematics teaching, utgaver fra 2003-2010
  - International Journal of Science and Mathematics Education
  - The international Journal on Mathematics Education
  - International electronic journal of mathematics education

- Gått gjennom følgende tidsskrift for årene 2009-2010, som en oppfølgning av Berglies (2009) søkeoversikt:
  - Literacy and Numeracy Studies
  - Mathematics Teacher Education and Development
  - Mathematical Thinking and Learning – an International Journal
  - Mathematics Education Research Journal
  - Matematik og naturfagsdidaktikk: tidsskrift for undervisere, forskere og
  - formidlere
  - Zentralblatt für Didaktikk der Mathematik
  - International Journal of Educational Development
  - Journal for Research in Mathematics Education
  - Educational Studies in Mathematics, nr 70-74
  - For the Learning og Mathematics
  - Journal of Mathematics Behaviour 2003-2010
  - Journal of Mathematics Teacher Education
  - Søkt i tidsskriftet Teaching Mathematics and its Application etter:
    - Students beliefs
    - Students understanding

- Søkt i database ERIC med søkeordene:
  - Students understanding mathematics, gav 3796 treff
  - Students mathematical understanding, gav 1944 treff
  - Students beliefs in mathematics, gav 781 treff
  - Students beliefs teaching, gav 3031 treff
  - Students beliefs mathematics teaching, gav 441 treff
  - Students beliefs about mathematics, gav 473 treff

- Sjekket referanselistene til relevante artikler og bøker

.

Intervjuguide

Introduksjon

Denne våren skriver jeg og en medstudent en masteroppgave som handler om elevers syn på matematikk, og matematikkundervisning. Jeg vil gjerne stille deg noen spørsmål, og jeg vil gjerne høre dine tanker og meninger. Det finnes ingen riktige eller gale svar, så du kan fortelle meg akkurat hva du mener.

Er det greit for deg at intervjuet blir tatt opp på bånd? Det vil kun være meg og min medstudent som skal høre på lydopptaket ditt. I oppgaven vår kommer vi ikke til å bruke navnet ditt, det eneste vi kommer til å opplyse om er kjønn og klassetrinn. Det vil derfor ikke være mulighet for noen å koble det jeg skriver tilbake til deg. Har du ønske om hvilket navn som jeg skal bruke? Hvis du underveis i intervjuet ikke forstår spørsmålene mine eller lurer på noe, så er det bare å spørre.

Da starter vi.

Spørsmål

1. Kan du fortelle om matematikkundervisningen dette skoleåret på godt og vondt? [LAPPER]

- Kan du fortelle om noen opplegg du likte spesielt godt, eller ikke likte?

2. Hva synes du om undervisningen dette skoleåret?

3. Hva synes du kjennetegner en god matematikktime?

- Hva er det som gjør denne timen god?

4. Hva synes du læreren din legger vekt på i undervisningen?

- Hva føler du at er læreren sitt mål med undervisningen?
- Hva synes du at læreren din er god på?

5. Hvordan lærer du matematikk best?
[LAPPER]

6. Hva gjør du når du møter problemer som du ikke greier å løse med en gang?
- Hva gjør læreren? Medelever?
- Hvordan synes du det fungerer?

7. Når føler du at du lykkes i matematikk?

8. Tenk på en elev du synes er god i matematikk. **Kan du beskrive hva det er som gjør at den eleven er god i matematikk?**

9. Er matematikk likt noen av de andre fagene du har på skolen?
- Hvordan?

10. Hva handler matematikk egentlig om?

11. Hvis du kunne endre matematikkundervisningen, hva ville du gjort?
- Hvorfor?

12. Eventuelt
Hva skal til for å få en god karakter i matematikk?
Hva synes du om å samarbeide med andre elever?
Hva slags oppgaver liker du å arbeide med?
Når du sier at du har forstått en oppgave eller teori i matematikk, hva legger du i det?
Evnt legge frem lapper igjen, stille spørsmål rundt lappene

Avslutning

Da har jeg stilt deg de spørsmålene jeg hadde planlagt, og jeg føler at jeg har fått svar på mye. Er det noe mer du ønsker å si i forhold til det vi nå har pratet om?

Ønsker du at jeg skal sende deg dokumentet etter at jeg har skrevet ned intervjuet vårt? Da kan du få mulighet til å fjerne noe du ikke vil jeg skal ta med til oppgaven, eller endre på noe du mener at ikke har kommet tydelig nok frem. Hvis ja, hva er din e-postadresse?

Tusen takk for at du stilte opp.

Vedlegg 3 Lapper til intervjuspørsmålet ”Kan du fortelle om matematikkundervisningen dette skoleåret på godt og vondt?”

Matematiske emner:

Geometri

Tallregning og algebra

Formler, likninger og ulikheter

Funksjoner og andregradsuttrykk

Potenser og logaritmer

Trigonometri

Matematiske modeller og vekstfart

Derivasjon

Sannsynlighet

Vedlegg 4 Lapper til intervjuspørsmålet ”Hvordan lærer du matematikk best?”

Hvordan lærer du matematikk best?

Jeg forklarer for andre

Jeg diskuterer med meg selv

Jeg diskuterer med medeelever

Jeg arbeider alene

Jeg samarbeider med andre

Jeg leser en matematisk tekst

Jeg arbeider med teoretiske oppgave

Jeg må finne metodene og løsningene selv

Jeg skriver ned ting

Jeg arbeider med praktiske oppgaver

Jeg bruker konkrete ting

Jeg sier ting høyt

Jeg bruker digitale hjelpemidler

Vi leter etter mønstre og systemer

Vi gjør eksperimenter eller praktiske forsøk

Vi arbeider med prosjekt

Læreren forklarer metodene og viser løsningene

Læreren gir hint meg hint slik at jeg kan komme videre selv

Læreren forteller hvordan jeg skal gå frem

Trondheim, 17.03.2010

Observasjon og intervju av elever

Våren 2010 skriver vi masteroppgave som avslutning på femårig lærerutdanning ved NTNU. Masteroppgaven handler om elevers syn på matematikk, og om matematikkundervisning. I den forbindelse ønsker vi i uke x å observere matematikkundervisningen i en klasse, samt å intervjue et utvalg elever. Det vil bli gjort lydopptak under intervjuet. I oppgaven kommer eleven til å bli anonymisert, det eneste som vil bli brukt er kjønn og klassetrinn. Det er frivillig å delta, eleven kan når som helst trekke seg, eller kreve at opplysninger blir slettet.

Vi håper at dere vil godkjenne at vi gjennomfører vår studie, og at vi bruker datamateriale fra observasjon og intervju i masteroppgaven vår. Samtykkeerklæring leveres til [lærer] innen **23.03.2010**.

For spørsmål, kontakt oss gjerne på telefon eller e-mail: [mobilnummer og e-postadresse]

Med vennlig hilsen
Renate Monsen og Linda Sandmark

Samtykkeerklæring

Vi sier oss villig til at ____ deltar i studien, og vi godkjenner at datamateriale fra observasjon og intervju blir brukt i masteroppgaven.

Dato/sted: ____

Underskrift fra elev:____

Underskrift fra foresatt:____

Oppgave 1 på GeoGebra:

Alle andregradsfunksjoner er på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$

Koeffisientene *a, b*, og *c* avgjør hvordan grafen ser ut og hvor den plasseres i koordinatsystemet.

Prøv dere fram og finn ut følgende:

Hvilke av disse tre koeffisientene bestemmer formen på grafen, og hvilke bestemmer plasseringen?

Oppgave 2: Tangenter til grafene

1. Tegn grafen til $h(x) = x^2$ i GeoGebra
Tegn tangenter i flere punkter, for eksempel i x = 1, x = 2, x = 0, x = -1, og noter opplysningene i et skjema:

$h(x) = x^2$		
Tangent i punktet	Tangentens stigningstall	Systemet er …
x = 1		
x = 2		
x = 0		
x = -1		

Kan du gjette hva stigningstallet vil bli for tangenten i andre x-verdier, x = -2, x = 3, osv. ? Skriv det du gjetter i tabellen, og kontroller etterpå ved å tegne

2. Gjør samme undersøkelse med flere funksjoner:

$k(x) = -x^2$		
Tangent i punktet	Tangentens stigningstall	Systemet er …
$x = 1$		
$x = 2$		
$x = 0$		
$x = -1$		

$g(x) = x^2 + 3$		
Tangent i punktet	Tangentens stigningstall	Systemet er …
$x = 1$		
$x = 2$		
$x = 0$		
$x = -1$		

$f(x) = 2x^2$		
Tangent i punktet	Tangentens stigningstall	Systemet er …
$x = 1$		
$x = 2$		
$x = 0$		
$x = -1$		

$a(x) = 3x^2$		
Tangent i punktet	Tangentens stigningstall	Systemet er …
$x = 1$		
$x = 2$		
$x = 0$		
$x = -1$		

GeoGebra:

"Låse" tangenter fast i forhold til ekstremalpunkt, og flytt så hele grafen. Hvordan går det med tangentenes stigningstall?

Oppgave:
Gjør tilsvarende undersøkelser med tredjegradsfunksjoner og undersøk om systemet du mener du har funnet vil stemme da:

Tegn tabeller i boka og undersøk:

$s(x) = x^3$

Bruk GeoGebra og tegn tangenter i x-verdiene -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4
Finner du systemet?

Hva med stigningstallene til tangentene til $t(x) = x^4$?

Oppgave:

Bruk GeoGebra.
Tegn grafen til $h(x) = x^2$, og sett av punktet A på grafen ved å skrive A=(1, h(1)).
Sett så av et punkt B på grafen og kontroller med "flyttepilen" at dette punktet kan gli fritt langs grafen.
Tegn ei rett linje (sekant) gjennom A og B. Studer hva som skjer med stigningstallet til denne linja når du lar punktet B nærme seg A.
Zoom inn og prøv igjen. Hva ser du?

Tangenter til grafer forts.

b(x) = x^2 + x			**Sammenlign med d(x) = x^2**	
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**System**	**Tangentens stigningstall**	**System**
x = 1				
x = 2				
x = 0				
x = -1				

e(x) = x^2 + 2x			**Sammenlign med f(x) = x^2**	
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**System**	**Tangentens stigningstall**	**System**
x = 1				
x = 2				
x = 0				
x = -1				

Vedlegg 7 Oppgavehefte 2, Vikstrand videregående skole

$g(x) = 2\,x^2 + x$			**Sammenlign med $h(x) = x^2$**	
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**System**	**Tangentens stigningstall**	**System**
x = 1				
x = 2				
x = 0				
x = -1				

$j(x) = 2\,x^2 + 3\,x$				
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**System**	**Tangentens stigningstall**	**System**
x = 1				
x = 2				
x = 0				
x = -1				

Skjema til sannsynlighetsoppgavene:

9.11

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	sum
Spiss opp											
Antall kast	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**100**

9.12

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	sum
S																
K	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	2	**100**

9.13

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	sum
Kr																
Ka	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	2	**100**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	sum
Kr																
Ka	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	2	**100**