NTNU
Det skapende universitet

Hvilke forestillinger kan elever ha om forståelse i matematikk?

Ingebjørg Berglie

Master i lærerutdanning med realfag
Oppgaven levert: Juni 2009
Hovedveileder: Tine Wedege-Mathiassen, MATH
Biveileder(e): Kjersti Wæge, PLU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Oppgaven er et resultat av min avslutning av lektorutdanningen ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet i Trondheim. Arbeidet med masterstudien har foregått i løpet av våren 2009. Jeg vil benytte anledningen til å takke de menneskene som har vært med på å gjøre masteroppgaven til det den har blitt.

Jeg vil først takke mine to veiledere, Tine Wedege og Kjersti Wæge. Dere har begge gitt meg konstruktive råd og god veiledning. Tine vil jeg takke spesielt for tilbakemeldningene på skriftlig arbeid. Kjersti for god og engasjert veiledning gjennom hele prosessen. Jeg føler jeg har hatt et stort utbytte av veiledningstimene med deg.

Jeg vil takke Lene Leer for alle konstruktive spørsmål og tips til studien gjennom hele prosessen. I tillegg vil jeg takke deg for korrekturlesing av oppgaven min. Jeg vil takke Monica Krogstad for hjelp med oversettelsen av sammendraget til engelsk.

Ikke minst vil jeg også takke klassen jeg gjennomførte datainnsamlingen i, da spesielt elevene som sa ja til å bli intervjuet. Læreren deres vil jeg takke for at hun lot meg besøke klassen hennes, og for å vise interesse og engasjement for studien min.

Til slutt vil jeg takke mine nærmeste for å all støtte underveis i prosessen med å gjøre ferdig masteroppgaven.

Trondheim, 1. juni - 2009

Ingebjørg Berglie

Sammendrag

Målet med studien er å få innsikt i hvilke forestillinger elever kan ha om forståelse i matematikk. I studien utvikles det et nytt analyseredskap for å beskrive elevers forestillinger om forståelse i matematikk i detalj. I uviklingen av analyseredskapet tas det utgangspunkt i skillet mellom instrumentell og relasjonell forståelse. De fire første trådene i matematisk kyndighet (proficiency) benyttes til å nyansere de to forståelsestypene.

Arbeidshypotesen i studien er at det er en sammenheng mellom elevenes forestillinger og undervisningskonteksten. Kvalitative metoder benyttes for å samle inn datamateriale til studien. Det anvendes formell observasjon for å observere undervisningen i en avgangsklasse på ungdomstrinnet (15-åringer) i en periode. Fire elever i den samme klassen intervjues ved hjelp av et semistrukturert intervju. Fokus for intervjuet er å få innsikt i elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Datamaterialet fra de fire intervjuene analyseres ved hjelp av analyseredskapet. Det gis eksempler på utsagn og tolkninger fra hvert enkelt intervju.

Resultatene fra studien indikerer at elever kan ha ulike forestillinger om forståelse i matematikk. Resultatene fra analysen tyder på at analyseredskapet fungerer godt for å få fram nyansene i elevenes forestillinger. På bakgrunn av analysene av datamaterialet gis det ikke grunnlag for verken å bekrefte eller avkrefte arbeidshypotesen.

Summary

The purpose of the study was to gain insight in to what beliefs students' might have of mathematical understanding. In this study, a new analytical tool was made to describe students' beliefs in detail. The development of the analytical tool was based on the difference between instrumental and relational mathematical understanding. The four first threads of mathematical proficiency was used to nuance the difference between the two types.

In this study, the working hypothesis is that there is a connection between students' belief and the educational context. To gather data for this study, qualitative methods were used. A formal observation technique was used to observe senior class students in lower secondary school (15-year olds) for a period of time. Four from the same class was interviewed in a semi structured interview. The focus of the interview was to gain insight in to the students' belief of the mathematical understanding. The data from these interviews was analyzed using the analytical tool. Examples and quotes from each interview are presented in the paper.

The study indicates that students from the same class may have different beliefs of mathematical understanding. The results rendered by the analytical tool, indicates that it works well in capturing the nuances in the students beliefs. Given the background of the data analysis, there is no basis to neither reject nor verify the working hypothesis.

Innholdsfortegnelse

Vedlegg

1 Innledning

Helt siden jeg begynte på lektorstudiet har jeg vært opptatt av de ulike forestillingene elever kan ha i matematikk. Spesielt er det en type forestillinger som har fanget oppmerksomheten min, og det er elevenes forestillinger om forståelse i matematikk[1]. I mine praksisperioder i lektorutdanningen erfarte jeg at elever kan si at de forstår noe i matematikk, når de egentlig ikke gjør det. I hvert fall ikke på den måten jeg mener at elevene skal forstå matematikken. For eksempel kan elevene si at de forstår en oppgave dersom de er i stand til å løse den ved hjelp av en algoritme eller en regel. Elevene forstår hva de skal gjøre og hvordan, men ikke hvorfor. En konsekvens kan være at de vil ha problemer med å anvende reglene i ukjente situasjoner (Skemp, 1987). Forskning viser at elevenes matematikkrelaterte forestillinger påvirker undervisningen og elevenes læring i faget (se for eksempel Goldin, Rösken, & Törner, 2009; Kloosterman, 2002; Pehkonen, 2003). Det er i tråd med mine egne små erfaringer fra praksis, og som en fremtidig matematikklærer vurderer jeg det som viktig å ha kjennskap til de ulike forestillingene elevene kan ha. I oppgaven fokuserer jeg på elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Ifølge Skemp (1987) er en av grunnene til at matematikklæreren bør vite hva elevene mener med forståelse i matematikken, at det kan oppstå en konflikt om læreren og elevene har motstridende forestillinger. Han nevner to typer uheldige kombinasjoner. Den første er når elever som har som mål å forstå hvordan de skal anvende regler og prosedyrer, får undervisning av en lærer som ønsker at de også skal forstå hvorfor reglene og prosedyrene fungerer. Et eksempel på det finnes hos Kloosterman (1996). En elev som har en forestilling om at pugging er viktig i matematikklæringen, kan trosse lærerens formaninger om at forståelse av løsningsprosesser er viktigere enn pugging av prosessene. Elevene vil heller fokusere kreftene sine på å lære prosessene utenat. Er situasjonen omvendt, oppstår den andre kombinasjonen.

Matematikkfaget i skolen har ofte handlet mer om å lære regler og prosesser utenat enn om å forstå det en jobber med (Anghileri, 2007; Niss, 2003). Fordi menneskene i dag har flere teknologiske hjelpemidler, som for eksempel kalkulatorer og datamaskiner,

[1] Med elevenes forestillinger i matematikk mener jeg hva elevene mener om hva det vil si å forstå matematikk.

mener Hedrèn (2003) at det ikke bør være et like stort krav om å kunne utføre kalkulasjoner hurtig ved hjelp av penn og papir. Han hevder at hoveddelen av matematikklæringen derfor bør vektlegge forståelse av, og refleksjon over, hvordan matematikken henger sammen, i stedet for ren regning. Flere av utdanningsmulighetene, og muligheter ellers i samfunnet, krever at elevene har forståelse i matematikk. (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Derfor mener jeg også at det er viktig å vite hvilke forestillinger elever har om forståelse i matematikk. Forståelse i matematikk gjenspeiles også i den norske læreplanen i matematikk (LK06). I den blir det vektlagt at elevene skal utvikle fleksible og tilpasningsdyktige kompetanser. Det legges vekt på fem grunnleggende ferdigheter[2], som er integrert i kompetansemålene i læreplanen i matematikk. I de grunnleggende ferdighetene i matematikk inngår blant annet det at elever skal kunne analysere, forklare, tolke og argumentere (Utdanningsdirektoratet, 2006). For at elevene skal kunne få utvikle fleksible og tilpasningsdyktige kompetanser i faget, og for at de skal kunne analysere, forklare, tolke og argumentere, mener jeg at de må ha forståelse i matematikk. Min vurdering er at elevene må få anledning til å utvikle forståelse i matematikken for å utvikle de fem grunnleggende ferdighetene i faget.

Når det gjelder tidligere studier av elevers forestillinger om forståelse i matematikk har min litteraturstudie vist at det er et emne det ikke er forsket så mye på[3]. Det har blitt gjennomført mange undersøkelser om elevers forståelse av bestemte matematiske emner (se for eksempel Blomhøj, 1997; Dash, 2009; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, & Stephens, 2005). Studiene undersøker ikke elevenes forestillinger om forståelse i matematikk, men elevenes forståelse av matematiske begreper. Et eksempel er Knuth m.fl. (2005) som fokuserer på elevers forståelse av to fundamentale begreper i algebra, henholdsvis ekvivalens og variabel. Et annet eksempel er Blomhøj (1997) som gjør en empirisk undersøkelse av elevenes begrepsforståelse. Dash (2009) studerer ulike forståelsesformer hos et utvalg elever i to ulike klasser, en i Sverige og en i India. Hun har undersøkt om elevene forstår de to begrepene helhet og deler, og hvordan de

[2] De fem grunnleggende ferdighetene er: å kunne uttrykke seg muntlig i matematikk, å kunne uttrykke seg skriftlig i matematikk, å kunne lese i matematikk, å kunne regne i matematikk og å kunne bruke digitale verktøy i matematikk.

[3] Se vedlegg 1 for en søkeoversikt.

forholder seg til hverandre, når de arbeider med matematiske problemer. Dash har heller ikke studert hva elevene selv mener med forståelse i matematikk. En som derimot har undersøkt hva elevene mener med forståelse i matematikk er Wæge (2007). Hun undersøker elevenes motivasjon for å lære matematikk, og i sine analyser av elevenes motivasjon fokuserer hun blant annet på hva elevene mener med forståelse i matematikk. Ingen av de nevnte studiene setter hovedfokus på hva elevene selv legger i forståelse i matematikk. Det finnes dermed ingen empirisk forskning om elevers forestillinger om forståelse i matematikk. Det finnes derimot en studie av Haser (2006) som handler om lærerstudenters forestillinger i matematikk, deriblant deres forestillinger om matematikkforståelse. Jeg kommer tilbake til den studien i kapittel 3.

1.1 Forskningsspørsmål

Målet med studien er å få innsikt i hva elever mener med forståelse i matematikk. Siden jeg studerer elevers forestillinger, kan studien plasseres innenfor det affektive området innenfor forskning på matematikkutdanning (Hannula, Op't Eynde, Schlöglmann, & Wedege, 2007). Studien har følgende forskningsspørsmål: *Hvilke forestillinger kan elever ha om forståelse i matematikk*? Fordi tidligere forskning indikerer at det er en sammenheng mellom undervisningskonteksten og elevenes forestillinger (Kloosterman, 1996; Op't Eynde, De Corte, & Verschaffel, 2002), er min arbeidshypotese at elevenes forestillinger om forståelse i matematikk er kontekstavhengige.

I studien undersøker jeg 15-årige elevers forestillinger om forståelse i matematikk. Jeg anvender kvalitative metoder som intervju og observasjon for å finne svar på forskningsspørsmålet og arbeidshypotesen. I tillegg utvikler jeg et analyseredskap for å beskrive elevens forestillinger om forståelse i matematikk.

1.2 Kapitteloppbygging

Kapittel 2 i studien handler om forskning på forestillinger i relasjon til matematikk. Det blir redegjort for hva som menes med en forestilling i studien. Videre blir organiseringen av forestillinger og ulike typer av forestillinger presentert. Til slutt i kapittelet presenteres metodologiske utfordringer ved studier av forestillinger. I Kapittel 3 beskrives noen definisjoner av forståelse i matematikk. En studie av lærerstudenters forestillinger om forståelse i matematikk presenteres avslutningsvis i kapittelet. Kapittel 4 handler om matematisk kompetanse og kyndighet, som begge blir gjort rede for. Til slutt i kapittelet blir matematisk kyndighet sammenlignet med forståelseskomponentene fra studien med lærerstudentene. I kapittel 5 presenteres den teoretiske rammen. Det gis en oversikt og begrunnelse for valg av analyseredskap. Kapittel 6 tar for seg metodologi. Det gis en redegjørelse for valg av metode og erfaringer fra en pilotstudie. Videre presenteres utforming av intervjuguide og en beskrivelse av utførelsen. I kapittel 7 presenteres resultatene og analysen fra studien. I første del beskrives undervisningskonteksten, deretter presenteres resultatene og analysen av intervjuene med elevene. I kapittel 8 diskuteres ulike forhold ved studien, både resultatsmessige og av metodologisk art. I kapittel 9 gis en oppsummering av resultatene fra studien. I tillegg introduseres eventuelle nye forskningsspørsmål.

2 Forestillinger i relasjon til matematikk

I oppgaven undersøker jeg hvilke forestillinger elevene har om forståelse i matematikk. I følge Goldin, Rösken og Törner (2009) finnes det ingen definisjon av forestillinger som alle matematikkdidaktiske forskere er enige i. Jeg velger å bruke Pehkonens (2003) generelle definisjon av en *forestilling* (belief)[4] som ”en elevs forholdsvis stabile subjektive kunnskaper om et bestemt fenomen” (Pehkonen, 2003, p. 456). En forestilling er noe en elev har med stor grad av overbevisning. Likevel er det ikke alltid mulig å forsvare de subjektive kunnskapene fra et vitenskapelig ståsted. For eksempel kan en elev ha en forestilling om at divisjon alltid gjør et tall mindre. En elev er heller ikke alltid bevisst de forestillingene hun/han har, noe jeg må ta i betraktning når jeg ønsker å undersøke dem. En elev kan i tillegg velge å legge skjul på forestillingene sine. For eksempel kan eleven skjule forestillingene om hun/han ønsker å fremstå på en bestemt måte, eller ikke stoler på den hun/han snakker med (Furinghetti & Pehkonen, 2002). De ulike forestillingene påvirker hverandre (Pehkonen, 2003). For eksempel kan elevenes forestillinger om hva matematikk er, påvirke forestillingene deres om matematikklæring. På samme måte kan elevenes forestillinger om matematikklæring påvirke deres forestillinger om forståelse i matematikk. For eksempel vil elever som tror at å pugge er den beste måten å lykkes i matematikk på, trolig ikke bruke krefter på å prøve å forstå hvordan de matematiske ideene henger sammen.

2.1 Organisering av forestillinger

En elevs forestillinger blir ordnet, eller organisert, i et forestillingssystem (belief system). Med en elevs *forestillingssystem* mener jeg den større strukturen elevens personlige kunnskaper utgjør (Green, 1971). Når en elev tilpasser en ny forestilling til sitt forestillingssystem blir den koblet sammen med de personlige kunnskapene eleven har fra før. Green påstår at forestillinger og meninger aldri er helt separert fra hverandre, men at de til sammen utgjør systemet av forestillinger hos en elev. Skal en undersøke de ulike forestillingene elever kan ha, som jeg gjør i min studie, er det nødvendig å ha oversikt over de ulike dimensjonene et forestillingssystem kan bestå av (Op't Eynde &

[4] I Pehkonens (2003) artikkel er beliefs oversatt til oppfatninger. Jeg velger i likhet med Wæge (2007) å oversette beliefs til forestillinger. I den samme artikkelen (Pehkonen, 2003)blir forestilling brukt som oversettelse på conception, som blir definert som en oppfatning (belief) av høyere rang. Det vil si at elevene er bevisst sine forestillinger (conceptions), de har et argumentasjonsgrunnlag for de.

De Corte, 2003; Pehkonen, 1995). Green forklarer organiseringen av forestillinger hos et individ ved hjelp av tre ulike dimensjoner. Den første dimensjonen er kvasilogisk dimensjon, og går ut på at elever alltid har forstillinger som er avhengig av andre forestillinger. Hver enkelt elev har sitt eget personlige system av forestillinger, et system som ikke behøver å være bygd opp logisk. Noen av forestillingene er primære, mens andre er avledet. Et eksempel på en primær forestilling kan være: ”Matematisk kunnskap innebærer i hovedsak mekaniske og prosedyremessige ferdigheter”. En avledet forestilling fra den primære forestillingen i eksempelet over kan være: ”Lærerens rolle er å vise og beskrive de etablerte tilnærmingsmåtene” (inspirert av Pehkonen, 2003, p. 170). De ulike forestillingene blir ordnet i et system etter hvert som eleven selv ser sammenhenger mellom dem. Fordi eleven selv definerer forbindelsen mellom forestillingene sine, blir strukturen mer kvasilogisk enn logisk. Strukturen i et forestillingssystem skiller seg dermed fra strukturen til et kunnskapssystem, fordi i et kunnskapssystem vil forbindelsen mellom de ulike kunnskapene eleven har være logisk. Den andre dimensjonen handler om at viktighetsgraden til forestillinger vil variere. Etter som ulike forestillinger kan ha ulik viktighetsgrad hos den enkelte, forklarer Green at den psykologiske betydningen vil være forskjellig. En *psykologisk sentral forestilling* (central) er en stabil forestilling som har stor betydning for en person. *Perifere forestillinger* (peripheral) er mindre viktige og ikke like stabile. Det er lettere å endre de perifere forestillingene enn de psykologisk sentrale forestillingene. En forestilling som er viktig for en person, kan være mer perifer for en annen. Den tredje dimensjonen kalles *klynger* (clusters). Mennesker organiserer forestillingene sine i klynger som henger løst sammen, eller ikke sammen i det hele tatt. En slik organisering gjør det mulig for en elev å ha tilsynelatende motstridende forestillinger (Green, 1971; Pehkonen, 2003). Det som for forskeren ser ut som motstridende forestillinger, behøver ikke nødvendigvis bli oppfattet slik hos eleven (Pehkonen, 1995). For eksempel kan en elev addere en brøk ved å addere sammen teller og nevner. Samtidig klarer eleven å løse samme oppgave helt korrekt ved hjelp av illustrasjoner. Eleven får dermed to ulike svar på samme oppgave, men aksepterer begge svarene som riktige. En forklaring på at elevene godtar begge svarene kan være at de to fremgangsmåtene for å løse oppgaven hører til to forskjellige klynger i elevens forestillingssystem (Green, 1971).

2.2 Ulike modeller eller struktureringer av forestillinger

Det er mulig å dele forestillinger inn i forskjellige kategorier. Jeg finner flere ulike forslag til en slik inndeling. Op't Eynde m.fl. (2002) mener at å kategorisere forestillinger kan være en løsning på problemet med å finne en universell definisjon av forestillinger. De presenterer en oversikt over det de kaller tilgjengelige kategoriseringer, eller modeller, av elevers forestillinger som er relatert til matematikklæring og problemløsning. Jeg vil presentere tre forskjellige modeller, eller struktureringer, før jeg tar for meg rammeverket som de foreslår. De tre modellene, og i tillegg eksempler på forestillinger som tilhører de ulike struktureringene, er oppsummert i tabell 1.

Tabell 1: De ulike modellene og tilhørende eksempler (Kloosterman, 1996; McLeod, 1992; Pehkonen, 2003).

	Modell	Eksempler på forestillinger
McLeod	1: Forestillinger om matematikk 2: Forestillinger om selvet 3: Forestillinger om matematikkundervisning 4: Forestillinger om den sosiale konteksten	1: Matematikk er viktig Matematikkoppgaver kan alltid løses på 5 min 2: Oppgaven er for vanskelig for meg 3: Læreren skal gi oss reglene vi skal bruke 4: Læring involverer konkurranse
Kloosterman	1: Forestillinger om matematikk 2: Forestillinger om matematikklæring 2a: Forestillinger om seg selv som lærer av matematikk 2b: Forestillinger om lærerens rolle 2c: Andre forestillinger om matematikklæring	1: Matematikk er nyttig 2a: Jeg er ikke flink til å løse oppgaver 2b: Læreren har de riktige svarene 2c: Pugging er viktig i matematikk Matematikkoppgaver kan alltid løses på 5 min
Pehkonen	1: Forestillinger om matematikk 2: Forestillinger eleven har om seg selv som elev og bruker av matematikk 3: Forestillinger om matematikkundervisningen 4: Forestillinger om hvordan innlæringen av matematikk foregår	1: Matematikk er unyttig 2: Jeg får til alle oppgaver som jeg prøver hardt nok på 3: Undervisningen bør organiseres i små grupper Læreren bør gjennomgå alt nytt stoff på tavla 4: Eleven bør selv komme fram til egne fremgangsmåter En elev lærer ikke noe av å pugge formler

Det er ingen enkel oppgave å sammenligne de ulike modellene. Ved første øyekast kan de se relativt like ut. Likevel er det ikke alltid at de omfatter de samme forestillingene. Selv om alle struktureringene favner om et bredt spekter av relevante forestillinger, så ser det ikke ut til å være noen enighet om strukturen og innholdet i de relevante typene av elevers forestillinger (Op't Eynde, et al., 2002).

En mulig strukturering av elevers forestillinger i matematikk finner jeg hos McLeod (1992). Han presenterer en forskningsoversikt om elevenes affektive relasjoner til matematikk og beskriver analytisk hvordan det affektive området kan deles inn. Det affektive området omfatter forestillinger, holdninger og følelser. Figur 1 viser en illustrasjon av de affektive responsene til matematikk:

Figur 1: Illustrasjon av det affektive spekteret.[5]

De tre typer av affektive responser varierer i stabilitet og intensitet. Forestillinger og holdninger er relativt stabile. Følelser er mer ustabile. Følelser er mer intense enn holdninger og forestillinger. De tre begrepene varierer i tillegg i kognisjon og tiden det tar å utvikle de. Forestillinger er relativt kognitive og tar lengre tid å utvikle enn følelser. McLeod skiller mellom fire typer av forestillinger, som vist i tabell 1. Et annet forslag til strukturering av elevers forestillinger i matematikk finnes hos Kloosterman (1996). Han presenterer en modell av elevers forestillinger som har betydning for deres motivasjon i matematikk. Han deler forestillingene i to hovedtyper (se tabell 1). Pehkonen (2003) presenterer en tredje strukturering av elevenes forestillinger i matematikk. Han skiller mellom fire hovedtyper av forestillinger (se tabell 1). Pehkonen kaller systemet av matematikkrelaterte forestillinger som elevene har, for elevenes syn (view) på matematikk.

Det er som nevnt ikke uproblematisk å sammenligne ulike forslag til struktureringer. Jeg vil likevel gjøre et forsøk på det, med utgangspunkt i noen av forskernes betraktninger og egne vurderinger. Til hjelp for å vise hvordan jeg tenker, henviser jeg til tabell 1 og eksemplene som står i den. Kloosterman (1996) forsøker å integrere McLeods (1992) forestillingstyper i sin egen modell. Han mener at den første typen i begge modellene, som hos begge kalles ”forestillinger om matematikk”, inneholder de

[5] Inspirert av KappAbel-forskningsrapporten (Wedege & Skott med Wæge & Henningsen, 2006).

samme forestillingene. Op't Eynde m.fl. (2002) deler ikke hans syn på at de to typene favner om de samme forestillingene. De begrunner det med at Kloostermans type ikke inneholder elevers forestillinger om matematikklæring slik den gjør hos McLeod. Jeg er enig i deres oppfattelse. Ta for eksempel forestillingen om at "matematikkoppgaver kan alltid løses på fem minutt" (se tabell 1), som tilhører McLeods første type. Det er en forestilling om matematikklæring. Den kan ikke plasseres i Kloostermans første type, men i stedet innunder hans andre type (se tabell 1). Slik jeg vurderer det, er Pehkonens (2003) første type, som i likhet med det de to andre kalles forestillinger om matematikk, lik Kloostermans første type. Heller ikke hos Pehkonen inngår forestillinger om matematikklæring i den første typen. Videre mener Kloosterman at hans andre type, forestillinger om matematikklæring, i hovedsak omfatter de tre siste typene til McLeod, nemlig forestillinger om selvet, matematikkundervisning og den sosiale konteksten. Kloosterman har ikke med en egen forestillingstype som handler om den sosiale konteksten. Det er fordi han mener at den typen forestillinger henger sterkt sammen med, og er til stede, i elevens forestillinger om matematikklæring.

I følge Op't Eynde m.fl. har Pehkonens inndeling likhetstrekk med Kloostermans. Pehkonen presenterer et litt annerledes hierarki av kategorier og undertyper i forhold til Kloosterman.[6] Jeg har allerede vært inne på hvordan den første kategorien til Pehkonen, som omhandler elevenes forestillinger om matematikk forholder seg til Kloostermans. Den andre typen til Pehkonen, forestillinger eleven har om seg selv som elev og bruker av matematikk, mener jeg inneholder mange av de samme forestillingene som McLeods andre type, forestillinger om selvet (se tabell 1). I begge typene kan forestillinger som at "oppgaven er for vanskelig for meg" eller "jeg får til alle oppgaver jeg prøver på" plasseres. Eksemplene kan også plasseres i Kloostermans første undertype (2a); forestillinger om seg selv som lærer av matematikk. Derfor mener jeg at Pehkonens andre type inneholder flere av de sammen forestillingene som Kloostermans første undertype (se tabell 1). I Pehkonen sin tredje type kan, slik jeg vurderer det, forestillinger fra både McLeods tredje og fjerde type inngå (se tabell 1). Forestillinger

[6] Pehkonen forklarer at struktureringen hans kan gjøres finere og finere ved å stadig legge til nye undertyper. Jeg kommer ikke til å presentere en slik inndeling i min studie, men eksempel finnes i Pehkonen (1995).

om matematikkundervisning, som er Pehkonens tredje type, kan inneholde forestillinger om at ”læreren skal gi oss reglene vi skal bruke” og at ”læring involverer konkurranse”. Kloosterman sine undertyper ”forestillinger om lærerens rolle” og ”andre forestillinger om matematikklæring” mener jeg omfatter den tredje typen til Pehkonen; forestillinger om matematikkundervisning (se tabell 1). Den fjerde og siste typen til Pehkonen er ”forestillinger om hvordan innlæringen av matematikk foregår”. Min vurdering er at den har fellestrekk både med Kloostermans undertype ”andre forestillinger om matematikklæring” og McLeods tredje type (se tabell 1).

Jeg har nå presentert tre ulike modeller av matematikkrelaterte forestillinger, og fortalt hvordan jeg mener de henger sammen. Før jeg presenterer rammeverket til Op’t Eynde m.fl. (2002), vil jeg argumentere for at elevers forestillinger om forståelse i matematikk i høy grad er en del av elevers matematikkrelaterte forestillinger. Slik jeg vurderer det, kan elevenes forestillinger om forståelse i matematikk plasseres innunder Pehkonens (2003) fjerde kategori, forestillinger om hvordan innlæringen av matematikk foregår. For eksempel kan forestillingen ”forståelse i matematikk oppnås gjennom at elevene får oppdage sammenhenger på egenhånd”. Forestillinger om matematikk kan i tillegg være en del av McLeods (1992) første kategori; forestillinger om matematikk. Et eksempel på det kan være forestillingen ”å forstå en regel vil si å vite hvordan den skal anvendes”. Begge de to eksemplene på forestillinger om forståelse mener jeg i tillegg kan plasseres i Kloostermans (1996) tredje underkategori; andre forestillinger om matematikklæring.

McLeod (1992) etterlyser et mer sammenhengende rammeverk for forskning på forestillinger. Op’t Eynde m.fl. (2002) har gjort et forsøk på det. De tar utgangspunkt i en litteraturanalyse av tilgjengelige modeller, eller struktureringer, av elevenes forestillinger relatert til læring og problemløsning i matematikk. Jeg skal presentere rammeverket de foreslår, men først vil jeg presentere deres definisjon av forestillinger:

> Students’ mathematics-related beliefs are the implicitly or explicitly held subjective conceptions students hold to be true about mathematics education, about themselves as mathematicians, and about the mathematics class context. These beliefs determine in close interaction with each other

> and with students' prior knowledge their mathematical learning and problemsolving in class (Op't Eynde, et al., 2002, p. 27).

Det er verdt å legge merke til at definisjonen sier noe om hvordan forestillinger påvirker læringen i faget. Forestillingene påvirker, sammen med de kunnskapene elevene tar med seg inn i læringssituasjonen, både matematikklæringen og problemløsningen. Rammeverket om elevenes matematikkrelaterte forestillinger består av de tre komponentene som er nevnt i definisjonen, og ser ut som følger:

1. Beliefs about mathematics education
    a. Beliefs about mathematics as a subject
    b. Beliefs about mathematical learning and problemsolving
    c. Beliefs about mathematics teaching in general
2. Beliefs about the self
    a. Self-efficacy beliefs
    b. Control beliefs
    c. Task-value beliefs
    d. Goal-orientation beliefs
3. Beliefs about the social context
    a. Beliefs about social norms in their own class
        i. The role and the functioning of the teacher
        ii. The role and the functioning of the students
    b. Beliefs about socio-mathematical norms in their own class (Eynde, Corte, & Verschaffel, 2002, p. 28)

I den første komponenten, forestillinger om matematikkopplæringen, inngår elevenes syn på hva matematikk er og hvordan de tilnærmer seg matematikken. Den andre komponenten i rammeverket handler om elevenes forestillinger om selvet, og referer til motivasjonskonstrukter som den enkelte møtte. Den siste komponenten Op't Eynde m.fl. tar for seg, forestillinger om den sosiale konteksten, handler om elevenes syn på normene i klasserommet. Min arbeidshypotese er som sagt at elevenes forestillinger om forståelse er kontekstavhengig. Det vil med andre ord si at jeg tror at elevenes forestillinger om forståelse vil være påvirket av forestillingene de har om undervisningskonteksten.

2.3 Metodologiske utfordringer ved studier av forestillinger

Interessen for forestillinger om matematikk har økt de siste femten årene (Kloosterman, 2002). Samtidig har det vokst fram en anerkjennelse av at slike studier kan være både problematiske og komplekse (Lester, 2002). Lester diskuterer et viktig problem i studiene av menneskers forestillinger og kommer med noen forslag til hvordan det er mulig å løse det. En grunnleggende antagelse for forskning på forestillinger er at de styrer valgene mennesker gjør (Kloosterman, 1996; Lester, 2002). På en annen side er det også ofte en antagelse om at forestillinger ligger gjemt. Det medfører at det bare er mulig å studere forestillinger ved å utlede de fra hvordan mennesker tenker og handler. Når en forsker hevder at elever oppfører seg på en bestemt måte på grunn av forestillingene sine, og deretter slutter deres forestillinger ut fra hvordan de oppfører seg, involverer det sirkulær resonnering. Lester presenterer to mulige måter å løse problemet på. Et alternativ er å kreve at det blir benyttet grundige begrepsmessige og metodologiske analyser i slike studier. En annen løsning er å utvikle forskningsmetoder som avdekker forestillingene direkte, istedenfor å utlede de fra elevens handlinger. Videre spør Lester: ”Do students know what they know?” (p. 352). Han stiller spørsmål ved om det virkelig er mulig å få tak i elevenes kjerneforestillinger ved bruk av intervju, fordi han hevder at intervjudata er upålitelige. Han tror heller ikke at elevene tenker mye over forestillingene de har om matematikk, og dermed ikke er særlig klar over dem. Det er med andre ord flere viktige forhold å ta hensyn til i en studie av elevers forestillinger. Jeg kommer nærmere tilbake til hvordan jeg behandler de metodologiske utfordringene i kapittel 6.

3 Forståelse

Blant forskere og teoretikere finnes det flere definisjoner av, og syn på, hva forståelse i matematikk er eller kan være (se for eksempel Hiebert, et al., 2000; Sierpinska, 1990, 1994; Tall, 1978). Skal en studere hva det betyr å forstå for elevene i matematikkopplæringen, er det nødvendig med en presisering av uttrykket (Sierpinska, 1994). Et av målene Skemp hadde med sin artikkel om instrumentell og relasjonell forståelse (Skemp, 1976), var å trekke forskernes oppmerksomhet mot hva forståelse i matematikk egentlig vil si (Sierpinska, 1990; Skemp, 1987). Selv definerer Skemp (1987) forståelse ved hjelp av ideen om skjema, som skal forstås som en begrepsstruktur. Alle begreper en person forsøker å forstå blir ordnet i strukturer bestående av andre begreper. Med unntak av de primære begrepene er alle begreper utledet av andre begreper. De utledede begrepene bidrar på sin side igjen til dannelsen av andre begreper. Dermed blir det dannet et slags hierarki av begreper, eller det Skemp kaller en begrepsstruktur. Det samme begrepet kan bli klassifisert på forskjellige måter innenfor en begrepsstruktur. For eksempel er det mulig å klassifisere penger som et betalingsmiddel, sammen med kredittkort og sjekk. En annen måte å klassifisere penger på kan være som et statussymbol, sammen med bil og svømmebasseng. Funksjonen til et skjema er å integrere eksisterende kunnskap og fungere som et redskap for fremtidig læring. En av de viktigste egenskapene til et skjema er at det muliggjør forståelse. Definisjonen av forståelse går ut på at en person forstår noe når hun/han kan plassere det i et passende skjema. For eksempel forstår en elev et teorem om hun/han ser hvordan det er relatert til de andre kunnskapene hans. De andre kunnskapene kan være andre teoremer eller figurer, eksempler og definisjoner. Forståelse har i tillegg en subjektiv natur. I det ligger det at elever kan ha ulik grad av forståelse etter som hver enkelt elevs skjema er unikt. Forståelse er heller ingen enten eller tilstand. Etter som eleven studerer matematikk videre, kan hun/han lære nytt matematisk innhold som hun/han kan se i relasjon til det bestemte teoremet. Da kan eleven få en dypere forståelse. Skemp (1987) mener at *forståelse* handler om å se strukturer mellom relasjoner. Med *relasjonell forståelse* (relational understanding) vet et individ både hva hun/han skal gjøre, hvordan og hvorfor. Det handler om at eleven bygger opp et godt skjema. Med utgangspunkt i skjemaet vil hun/han være i stand til å utlede forskjellige fremgangsmåter. Eleven vil se hvordan de ulike begrepene og kunnskapene i skjemaet forholder seg til hverandre. Da vil eleven kunne komme seg fra et utgangspunkt i skjemaet sitt til et vilkårlig sluttpunkt. En person med *instrumentell forståelse* (instrumental understanding) vet derimot kun hva hun/han skal gjøre og hvordan, men ikke hvorfor. Instrumentell forståelse handler om at eleven har lært et økende antall fikserte fremgangsmåter som skal hjelpe hun/han til å finne løsningen på en oppgave. Fremgangsmåtene gir elevene trinnvise instruksjoner. Dersom eleven kun har instrumentell forståelse for noe matematisk innhold, vil eleven for eksempel ha vanskeligheter med å benytte seg av det matematiske innholdet i et problem hun/han kan møte i hverdagen. Det kan være på grunn av at eleven ikke har noen bevissthet om hvordan trinnene i de ulike instruksjonene henger sammen. Hun/han har ikke utviklet et passende skjema (Skemp, 1987).

Ifølge Skott (2000) ser Piaget viktigheten av å bygge ny læring på tidligere forståelser. Læring kan ikke ses på som en ervervelse av ferdig utviklede begrepsstrukturer. Piaget introduserer begrepet skjema i sin læringsteori. Et kognitivt skjema kan forstås som en kunnskapsstruktur. Piaget mener at et individ må selv utvikle sine egne begrepsstrukturer. Han kaller denne utviklingen for adapsjon. Adapsjon består av to prosesser. Den første kaller han assimilasjon. Assimilasjon går ut på å utvikle skjemaer ved å plassere nye opplevelser i de på en måte som ikke endre strukturen til skjemaene. Den andre prosessen er akkomodasjon. Da vil individet endre strukturen til skjemaene. Det skjer hvis de nye opplevelsene ikke fungerer sammen med den eksisterende strukturen (von Glaserfeld, 1995). Vygotsky deler Piagets syn på at læreren ikke kan overføre begreper direkte til elevene, det vil si at elevene ikke lærer noe av å erverve ferdig utviklede begrepsstrukturer. Han kritiserer derimot Piaget for ikke å ta hensyn til det sosiale elementet ved læring (Vygotsky, 1987). Skemp (1987) har referanser til Piaget og Vygotsky. Slik jeg vurderer det, finnes det likhetstrekk mellom læringsteoriene til Skemp og Piaget og Vygotsky. Skemp mener også at ny læring bygger på tidligere forståelser, og at eleven bygger opp sitt eget personlige skjema som muliggjør forståelse.

For noen forskere og forfattere er forståelse synonymt med å forstå hvorfor (Sierpinska, 1994). Noen av de som mener at forståelse handler om å forstå hvorfor, er Hiebert m.fl. (2000). De hevder at forståelse er noe komplekst, det er ikke noe som eleven har eller ikke har, men noe som stadig er i endring og vekst. Definisjonen de presenterer sier at: "…we understand something if we see how it is related or connected to other things we know" (Hiebert, et al., 2000, p. 4). Hiebert m.fl. gir et eksempel på hvordan en elev forstår hvordan hun/han skal addere 35 og 47. Eleven forstår oppgaven hvis hun/han kan relatere oppgaven til andre kjente forhold om addisjon, og til hva tallene 35 og 47 egentlig betyr. Skemp (1987) mente opprinnelig også at forståelse handlet om å forstå hvorfor. Han skriver at det var Mellin-Olsen som først gjorde han oppmerksom på at det kan være to ulike typer forståelse i matematikk. Før han hørte et foredrag til Mellin-Olsen så ikke Skemp på instrumentell forståelse som en form for forståelse, men mer som "rules without reason"(Skemp, 1987, p. 153).

Sierpinska (1990) diskuterer hvorvidt det er mulig å se på forståelse som en handling (an act) eller en prosess. Hun betrakter forståelse som en handling, nærmere bestemt en handling involvert i en prosess av tolkning. Med andre ord ser hun på forståelse som å tilegne seg mening. Hun stiller spørsmål ved om det fins grader, nivåer eller typer av forståelse. Som nevnt skiller Skemp (1987) mellom ulike typer av forståelse. Selv forsøker Sierpinska seg med følgende kategorisering av handlinger av forståelsen av et matematisk begrep:

1. *Identification* of objects that belong to the denotation of the (or: a) concept (relates to the concept in question, or: identification of a term as having a scientific status; this act consists in a sudden perception of something being like the "figure" in the Gestaltist experiments.
2. *Discrimination* between two objects, properties, ideas, that were confused before.
3. *Generalization* consists in becoming aware of the non-essentiality of some assumption, or of the possibility of extending the range of applications.
4. *Synthesis* is grasping relations between two or more properties, facts, objects, and organizing them into a consistent whole (Sierpinska, 1990, p. 29).

De fire kategoriene av handlinger er identifisering, diskriminering, generalisering og syntetisering. Nødvendige betingelser for at alle de fire handlingene skal forekomme er erfaring, bruk og anvendelse (Sierpinska, 1990). Tall (1978) hevder at å dele forståelse inn i ulike kategorier kan være nyttig ved noen anledninger. Likevel kan de gjøre oss blinde for andre mulige faktorer. Med andre ord om jeg for eksempel velger å benytte Sierpinskas kategoriseringer i en studie, så må jeg åpne for muligheten for at kategoriseringen ikke dekker alle faktorer som kan dukke opp.

3.1 Lærerstudenters forestillinger om forståelse i matematikk

Haser (2006) undersøker de matematikkrelaterte forestillingene til tyrkiske lærerstudenter og lærere som underviser i sitt første år. I en artikkel fra 2004 analyserer hun, sammen med Star, datamateriellet fra studien med hensyn til lærerstudentenes forestillinger relatert til forståelse i matematikk. Haser og Star (2004) utvikler i artikkelen fire komponenter om forståelse i matematikk. De fire komponentene kaller de henholdsvis innhold, resonnering, anvendelse og prosedyrer. Begrepene blir forklart nærmere under:

1. *Innhold* (content)

   Flere av studentene gir uttrykk for at det ligger mer enn kun tall og fremgangsmåter bak forståelse i matematikk. En elev som forstår matematikk vet hva begreper og algoritmer betyr og i tillegg hvordan de kan utledes. Med andre ord er forståelse i matematikk mer enn overflatekunnskaper. Det viktigste er å ha kunnskap om hvordan begreper og algoritmer blir dannet, og betydningen av dem.
2. *Resonnering* (reasoning)

   Å kunne tenke logisk er fundamentalt for matematikken ifølge studentene. Forståelse i matematikk gjør det lettere for en elev å kunne være i stand til å tenke logisk. Innunder begrepet logisk tenkning ligger både det å kunne tenke og handle logisk. Flere av lærerstudentene mener at dersom en elev har forståelse i matematikk så har hun/han gode forutsetninger for å se et problem fra flere sider. En elev som klarer å ordne sine egne matematiske ideer logisk, mener de at trolig må vite hva hun/han driver med.
3. *Anvendelse* (application)

   Mange av studentene så på det å være i stand til å anvende matematisk kunnskap til andre matematiske oppgaver og kontekster, som en svært viktig del av forståelse i matematikk. De mener at det medfører at en bygger sammenhenger til annen matematisk kunnskap. Det ble lagt stor vekt på at anvendelse ikke kun dreier seg om å være i stand til å bruke regler og prosedyrer i situasjoner som ligner på hverandre. Derimot skal en elev også kunne søke etter de eksisterende matematiske ideene, reglene eller prosedyrene i alle tenkelige situasjoner.

4. *Prosedyrer* (procedures)

   Får eleven en oppgave eller et problem, og har kunnskap og forståelse om prosedyren eller problemløsningsprosessen, vil hun/han klare å komme fram til de trinnene som må gjennomføres for å løse dem.

Senere vil jeg komme tilbake til hvordan de fire komponentene Haser og Star presenterer, har likhetstrekk med de fire første trådene i begrepet matematisk kyndighet (proficiency) som definert av Kilpatrick (2001).

4 Matematisk kompetanse og kyndighet

I min studie undersøker jeg, som nevnt tidligere, elevers forestillinger om forståelse i matematikk. Jeg har valgt å ta utgangspunkt i Skemp (1987) sine definisjoner av instrumentell og relasjonell forståelse. For å fange opp detaljrikdommen ved elevenes forestillinger om forståelse, vil jeg beskrive ulike komponenter ved instrumentell og relasjonell forståelse. Jeg ønsker å utvikle et analyseredskap for studien som gir en detaljert beskrivelse av elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Videre ønsker jeg å danne et mer nyansert bilde av relasjonell forståelse. Derfor vil jeg forsøke å dele relasjonell forståelse inn i flere undertyper. I en tidligere studie[7] undersøker jeg hvorvidt komponenter i to ulike begreper, henholdsvis matematisk kompetanse og matematisk dyktighet (proficiency), kan inngå i den teoretiske rammen. I dette kapittelet vil jeg presentere de to begrepene nærmere, for å bedre kunne rettferdiggjøre og argumentere for valg av analyseredskap.

4.1 Matematisk kompetanse

Kompetansebegrepet har fått en vesentlig gjennomslagskraft i løpet av de siste årene. Det gjelder både i Norge og andre deler av verden (Jørgensen, 2001). De siste årene har det altså blitt lagt stadig mer vekt på kompetanser i matematikkdidaktikken (Wæge, 2007). Matematisk kompetanse blir av Niss og Jensen (2002) definert på følgende måte:

> Matematisk kompetence består i at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematikk og matematisk virksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematikk indgår eller kan komme til at indgå (Niss & Jensen, 2002, p. 43).

Niss og Jensen identifiserer åtte sentrale matematiske delkompetanser i rapporten. Til sammen utgjør de matematisk kompetanse. En matematisk delkompetanse går ut på at eleven på bakgrunn av innsikt skal kunne handle hensiktmessig i omstendigheter der matematiske utfordringer inngår. En delkompetanse blir dermed et innsiktsbasert handleredskap (Niss & Jensen, 2002). De åtte delkompetansene blir delt inn i to

[7] Høsten 2008 gjennomførte jeg en pilotstudie med samme forskningsspørsmål. I studien testet jeg ut en intervjuguide og to ulike analyseredskaper. Intervjuguiden fra den studien kommer jeg tilbake til i kapittel 6.

hovedgrupper. Den første gruppen omhandler evnen til å spørre og svare på spørsmål om og med matematikk:

1. Tankegangskompetanse – å kunne utøve matematisk tankegang.
2. Problembehandlingskompetanse – å kunne formulere og løse matematiske problemer
3. Modelleringskompetanse – å kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende andre felter.
4. Resonnementskompetanse – å kunne resonnere matematisk (Niss & Jensen, 2002).

Den andre gruppen av matematiske delkompetanser handler om evnen til å kunne håndtere matematikkens språk og kunnskaper:

5. Representasjonskompetanse – å kunne håndtere forskjellige representasjoner av matematiske saksforhold.
6. Symbol- og formalismekompetanse – å kunne håndtere matematisk symbolspråk og formalisme.
7. Kommunikasjonskompetanse – å kunne kommunisere i, med og om matematikk.
8. Hjelpemiddelkompetanse – å kunne benytte seg av og forholde seg til hjelpemidler for matematisk virksomhet (inkl. IT)(Niss & Jensen, 2002)[8].

De åtte delkompetansene overlapper hverandre, selv om hver enkelt har sin egen identitet. Delkompetansene henger altså sammen med hverandre. Det er ikke mulig å ha en delkompetanse helt uavhengig av andre delkompetanser. Alle delkompetansene har to sider ved seg. Den ene siden er å motta matematisk innhold. Det innebærer å forstå, analysere og reflektere over matematikken. Den andre siden er å sende ut det matematiske innholdet. Det innebærer å kunne uttrykke matematikk til andre. For eksempel skal eleven kunne forklare sine resonnementer og løsninger til medelever. I tillegg skal eleven kunne overbevise læreren, både muntlig og skriftlig, om at hun/han forstår matematikken (Niss & Jensen, 2002).

Kompetansebegrepet til Niss og Jensen blir kritisert av Wedege (2003). Hun diskuterer det hun mener er to kritikkverdige forhold ved deres definisjon. Det første er det at de utelater den affektive dimensjonen ved kompetanse. Skal en elev bruke sin matematiske

[8] Jeg velger å bruke Wæge (2007, p. 44) sin oversettelse av de åtte delkompetansene.

kunnskap i alle mulige sammenhenger må også elevens affektive forhold til matematikk bli trukket inn som en del av hennes/hans kompetanse. Hun argumenterer i tillegg for at kompetanse ikke er noe du har, som i Niss og Jensens arbeid, men noe du er.

Den nåværende læreplanen i matematikk i Norge (LK06) bygger på Niss og Jensen sin definisjon av åtte matematiske delkompetanser (Wæge, 2007). I en tidligere studie undersøker jeg om de åtte delkompetansene kan inngå i den teoretiske rammen for studien. Jeg undersøker om delkompetansene kan gi en god beskrivelse av ulike komponenter ved instrumentell og relasjonell forståelse. Studien viser at de ikke egner seg som analyseredskap for å undersøke elevenes forestillinger om forståelse, fordi delkompetansene overlapper såpass mye med hverandre.

4.2 Matematisk kyndighet

Matematisk kompetanse er, som nevnt, et av begrepene det har blitt lagt større vekt på i matematikkdidaktikken de senere år. Kilpatrick (2001) hevder at kompetanse, og andre lignende begrep, er for begrenset i omfang og ikke tilfredsstillende nok for den diskursen de har i USA. Derfor innfører Kilpatrick m.fl. (2001) begrepet matematisk kyndighet (mathematical proficiency[9]). *Matematisk kyndighet* forklares som karakteriseringen av ”suksessfull matematikklæring”, og består av fem sammenvevde tråder; Forståelse, regneferdigheter, strategisk kompetanse, resonnering og engasjement (Kilpatrick & Swafford, 2002). Kilpatrick m.fl. mener at elevene må undervises til å bli matematisk kyndige. Jeg har valgt å benytte de fire første av de fem trådene i den teoretiske rammen for studien min. De fire trådene vil beskrive ulike komponenter ved instrumentell og relasjonell forståelse. Jeg vil nå presentere de fem trådene som til sammen utgjør matematisk kyndighet og forklare hvordan jeg mener de forholder seg til Skemp (1987) sine definisjoner av instrumentell og relasjonell forståelse. Avslutningsvis kommer jeg til å sammenligne trådene med de fire komponentene av forståelse i matematikk som Haser og Star (2004) presenterer. I det etterfølgende

[9] Jeg velger å oversette mathematical proficiency med matematisk kyndighet. En direkte oversettelse av proficiency kan være dyktighet eller kompetanse. Slik jeg vurderer det, egner ikke de to ordene seg til å dekke begrepet proficiency. Kompetanse er allerede benyttet i matematisk kompetanse (Niss & Jensen, 2002), og dyktighet er et ord som mange allerede har et forhold til. For å unngå forvirring, benytter jeg derfor et synonym til dyktighet og kompetanse, nemlig kyndighet.

kapittelet kommer jeg til å argumentere for hvordan trådene egner seg i et analyseredskap til min studie.

4.2.1 Forståelse

Den første av de fem trådene blir kalt *Forståelse*[10] (understanding), og defineres som: "Comprehending mathematical concepts, operations, and relations – knowing what mathematical symbols, diagrams and procedures mean" (Kilpatrick & Swafford, 2002, p. 9). Elever med Forståelse kan med andre ord mer enn kun isolerte fakta og fremgangsmåter. De er i stand til å se hvorfor en matematisk ide er viktig, og i hvilke tilfeller de kan bruke ideen. Fordi elevene har klart å sette kunnskapene sine i et slags system, har de lettere for å lære nye ting. Som en konsekvens av at de ser ting i sammenheng, får de ofte mindre å lære enn om de ikke gjorde det (Kilpatrick & Swafford, 2002; Kilpatrick, et al., 2001). En kan se at elever har tilegnet seg Forståelse om de er i stand til å representere matematiske situasjoner på forskjellig vis. Elevene vil kunne se hvordan ulike representasjoner passer til ulike formål. De vil også være i stand til å se sammenhenger mellom begreper og fremgangsmåter. Nivået av detaljer, og hvor vidt sammenhengene spenner, kan si oss noe om hvor dyp elevenes Forståelse er (Kilpatrick, et al., 2001).

Forståelse har, slik jeg tolker det, likhetstrekk med relasjonell forståelse. Jeg ser mer bestemt på Forståelse som en undertype av relasjonell forståelse. Når en elev har Forståelse og relasjonell forståelse har hun/han i begge tilfeller satt kunnskapene sine i system. Det både muliggjør ny læring og gjør lettere for det. Eleven ser i begge tilfeller relasjoner mellom kunnskapene sine.

4.2.2 Regneferdigheter

Regneferdigheter (computing) defineres som "Carrying out mathematical procedures, such as adding, subtracting, multiplying, and dividing numbers flexibly, accurately, efficiently, and appropriately" (Kilpatrick & Swafford, 2002, p. 9). Dersom en elev har god Forståelse vil Forståelsen kunne være til stor hjelp for utviklingen av

[10] Den direkte oversettelsen av understanding er forståelse. I et forsøk på å unngå å forveksle den første tråden med forståelse generelt, velger jeg å skrive den med stor F.

regneferdigheter. I hverdagen møter elevene flere oppgaver som krever matematikk for at de skal kunne løse dem. Om en da ikke er kjent med ulike algoritmer, kan det ta unødvendig lang tid å løse problemer, eller man kan rett og slett komme til kort. Regneferdigheter går også ut på å kunne være i stand til å se hvorvidt et resultat er fornuftig (Kilpatrick, et al., 2001). I debatter om matematikkfaget i skolen blir ofte ferdigheter (regneferdigheter) og forståelse (Forståelse) sett på som konkurrenter (Kilpatrick, 2001; Kilpatrick, et al., 2001; Mervis, 2001). Men de er like viktige. Ingen av de kan stå alene, men må utfylle hverandre. Har en elev Forståelse gjør det at hun/han har lettere for å lære seg ulike ferdigheter. I tillegg vil en slik elev være i bedre stand til å huske det hun/han lærer seg. På den andre siden kan en si at uten et visst nivå av ferdigheter er det vanskelig å lære flere av begrepene i matematikk med Forståelse. Med en viss grad av regneferdigheter vil det i tillegg være enklere for en elev å gi uttrykk for Forståelsen sin (Kilpatrick, et al., 2001).

Regneferdigheter har slik jeg vurderer det, likheter med instrumentell forståelse i det at elevene bør vite hva de skal gjøre og hvordan (Kilpatrick, 2001; Kilpatrick, et al., 2001; Skemp, 1976, 1987). Et par særtrekk ved regneferdigheter er derimot kravet om fleksibilitet, og å være kapabel til å se om et svar gir mening (Kilpatrick, et al., 2001). Det er det ikke noe krav om i instrumentell forståelse. Der er det nok at elevene vet hva de skal gjøre og hvordan. Skal en elev kunne bruke kunnskapene sine fleksibelt mener jeg at det krever at eleven har satt kunnskapene sine i system og ser hvordan de forholder seg til hverandre. I tillegg er det min vurdering at for at en elev skal kunne se om et svar er fornuftig, så må hun/han ha en viss grad av relasjonell forståelse. Dermed mener jeg at regneferdigheter står med en fot innenfor både instrumentell og relasjonell forståelse (Skemp, 1976, 1987).

4.2.3 Strategisk kompetanse

Den tredje tråden av matematisk kyndighet er *strategisk kompetanse* (strategic competence/applying, min oversettelse), og definisjonen er som følger: ”Being able to formulate problems mathematically and to device strategies for solving them using concepts and procedures appropriately” (Kilpatrick & Swafford, 2002, p. 9). Kilpatrick m.fl. (2001) forteller at strategisk kompetanse tidligere har gått under andre navn i matematikkdidaktikklitteraturen og forskningen, blant annet som problemløsning og problemformulering (problem formulating). I hverdagen møter elevene på oppgaver og problemer som gjerne ikke er like spesifikke som de elevene ofte får på skolen. De behøver da kunnskaper og ferdigheter i problemformulering og problemløsning. Å bli strategisk kompetent, eller med andre ord en profesjonell problemløser, krever flere ting av elevene. De må blant annet lære hvordan de skal lage mentale representasjoner av problemer, og å kunne utvikle nye løsningsmetoder etter behov. En viktig del er altså det å være fleksibel (Kilpatrick, et al., 2001).

Strategisk kompetanse henger nært sammen med begge de to tidligere nevnte trådene av matematisk kyndighet. For eksempel om en matematikkelev skal finne en strategi for å løse et problem der metoden ikke er innlysende, må hun/han ha Forståelse for variablene og forholdene i problemet. På den andre siden kan strategisk kompetanse motivere eleven til å jobbe med problemløsningsoppgaver og til å arbeide med å forstå begreper som gitt, ukjent, vilkår og løsning. De to trådene, Forståelse og strategisk kompetanse, er med andre ord nært vevd sammen (Kilpatrick, et al., 2001). Det er også en klar sammenheng mellom regneferdigheter og strategisk kompetanse. Når elevene bruker sin strategiske kompetanse blir i tillegg fremgangsflyten deres utviklet. Det å kunne løse problemløsningsoppgaver krever at elevene er i stand til å utføre prosedyrer. På den andre siden, om de er gode i problemløsning, vil elevene ha lettere for å lære seg nye prosedyrer og begreper. Det er min mening at strategisk kompetanse kan sies å ha fellestrekk med det Skemp (1987) kaller relasjonell forståelse. Elevene skal i begge tilfeller bruke kunnskapene sine fleksibelt. De skal kunne bruke det de vet i ukjente situasjoner, ikke kun til å løse rutineoppgaver. Dermed ser jeg også på strategisk kompetanse som en undertype av relasjonell forståelse.

4.2.4 Resonnering

Resonnering (reasoning) blir forklart med: “Using logic to explain and justify a solution to a problem or to extend from something known to something not yet known” (Kilpatrick & Swafford, 2002, p. 9). Den fjerde tråden handler med andre ord om å være i stand til å tenke logisk på forholdet mellom begreper og situasjoner. Eleven må kunne resonnere over matematikken ved å vurdere ulike alternativer og forsvare det hun/han har kommet fram til. Ifølge Kilpatrick m.fl. (2001) er resonnering i matematikken limet som holder det hele sammen. Resonnering blir benyttet som navigasjonsverktøy gjennom de ulike delene som bygger opp matematikken; ulike faktakunnskaper, prosedyrer, begreper og løsningsmetoder. Eleven må spørre seg selv om det hun/han arbeider med gir mening. Gyldigheten til et svar blir rettferdiggjort ut fra at det følger av en rekke logisk steg gjennom matematisk innhold som det ikke hersker tvil om. Resonnering kan dermed bli demonstrert gjennom evnen til å rettferdiggjøre arbeidet sitt. Kilpatrick m.fl. skriver videre at:

> Many conceptions of mathematical reasoning have been confined to formal proof and other forms of deductive reasoning. Our notion of adaptive reasoning is much broader, including not only informal explanation and justification but also intuitive and inductive reasoning based on pattern, analogy and metaphor (Kilpatrick, et al., 2001, p. 129).

Det er særlig gjennom problemløsning at det er mulig å se hvordan resonnering vekselvirker med de andre trådene av matematisk kyndighet. Resonnering kommer til sin rett når det gjelder å vurdere hvorvidt den foreslåtte strategien i problemløsningsprosessen holder mål. Forståelse og resonnering henger også sammen. Førstnevnte gir elevene metaforer og representasjoner som de kan bruke for å undersøke gyldigheten til en løsning. Løsningsstrategier krever ofte gode kunnskaper i bruk av ulike prosedyrer. I vurderingen av hvorvidt prosedyren er egnet krever det at elevene har kapasitet til resonnering. Matematikkelevene må i tillegg bruke sin strategiske kompetanse mens de utfører en løsningsstrategi. Det kan bli gjort gjennom å ha oversikt over strategien og eventuelt finne andre strategier om den opprinnelige ikke er effektiv nok (Kilpatrick, et al., 2001).

Resonnering blir, slik jeg vurderer det, en fjerde undertype av relasjonell forståelse (Skemp, 1987). I begge tilfeller skal elevene kunne se hvordan de matematiske fenomenene forholder seg til hverandre. Elevene skal vite hvorfor ting må bli som de blir slik at de kan vurdere og forsvare arbeidene sine.

4.2.5 Engasjement

Kilpatrick m.fl. (2002) sitt syn på hva det innebærer å være matematisk kyndig dekker mer enn det å beherske Forståelse, regneferdigheter, anvendelse og resonnering. Å være matematisk kyndig inkluderer også engasjement for matematikk: "Seeing mathematics as sensible, useful, and doable – if you work at it – and being willing to do the work" (Kilpatrick & Swafford, 2002, p. 9). Engasjement (engaging) referer altså til elevenes evne til å se en mening i matematikken, til å oppfatte den som både nyttig og verdt å studere. Samtidig omfatter den en tro om at det vil lønne seg å jobbe med faget, og til å se seg selv som en effektiv lærer av matematikk. Tror elevene på det som her er nevnt, vil det være en viktig forutsetning for at de skal kunne tilegne seg de fire andre trådene som sammen med engasjement utgjør matematisk kyndighet. Alle har et personlig forhold til matematikk, men slik jeg ser det er det ikke alle som tror på det som svarer til den femte tråden. Det fins flere elever som verken har tro på seg selv som matematikkelev eller ser en mening med å studere matematikk. Engasjementet blir utviklet sammen med de andre trådene, og er til stor hjelp i utviklingen av hver enkelt av dem (Kilpatrick, et al., 2001). En hovedfaktor for å bestemme elevenes suksess i matematikk er deres affektive forhold til matematikk. Elever med et velutviklet engasjement, eller forhold, til matematikk skal ha selvtillit når det gjelder sine egne evner og kunnskaper. Samtidig makter de å se at det både er mulig å lære og forstå matematikken gjennom å arbeide med faget. Det gjør at matematisk kyndighet blir mer enn det å forstå, regne, løse og resonnere. Matematisk kyndighet inkluderer et personlig forhold til matematikk (Kilpatrick, et al., 2001). Slik jeg vurderer det, inneholder ikke Skemp (1987) sitt skille mellom relasjonell og instrumentell forståelse, et personlig forhold til matematikk.

Med engasjementtråden har matematisk kyndighet en affektiv dimensjon ved seg, som både Skemps to forståelsestyper og Niss og Jensens (2002) matematisk kompetanse mangler. Wedege (In Press) kritiserer Kilpatrick, som argumenterer for samfunnets behov for kyndighet i matematikk (proficiency in mathematics) uten referanser til empiriske bevis. Skovsmose (2006) skriver om at en antagelse i mye av forskningen på matematikkutdanning baserer seg på at det er en positiv verdi i matematikkutdanningen, ut fra det at utdanningen inneholder matematikk. Noe av innholdet i engasjementstråden, for eksempel det at elevene skal oppfatte matematikken som nyttig, baserer seg på at det er en positiv verdi i matematikken som eleven skal oppdage og tro på.

4.2.6 Matematisk kyndighet er ikke en alt-eller-intet tilstand

Læringen av matematikk er ikke et alt-eller-intet fenomen. Det er for eksempel mulig å forstå et matematisk begrep på flere ulike nivåer og måter. Det er en utvikling som skjer over flere år, hvert år elevene går på skolen bør de øke graden av matematisk kyndighet. En elev som ikke har utviklet alle trådene vurderes ikke til å være matematisk kyndig ifølge Kilpatrick m.fl. (2001). Hver av de fem trådene bør bli utviklet sammen med de andre, og slik påvirke hverandre kontinuerlig.

4.2.7 Sammenligning av matematisk kyndighet og Haser og Stars fire forståelseskomponenter

Nå som jeg har presentert de fem trådene som utgjør matematisk kyndighet, vil jeg sammenligne dem med forståelseskomponentene til Haser og Star (2004). Som nevnt tidligere presenterer Haser og Star fire komponenter av forståelse i sin studie av lærerstudenters forestillinger. De fire komponentene er innhold, prosedyrer, anvendelse og resonnering. Jeg sammenligner her de fire komponentene med de fire første trådene av matematisk kyndighet, henholdsvis Forståelse, regneferdigheter, strategisk kompetanse og resonnering, for å se hvordan de forholder seg til hverandre. Slik jeg tolker det, har ikke den femte tråden noe til felles med noen av de fire komponentene til Haser og Star. Det er min vurdering at verken innhold, prosedyrer, anvendelse eller resonnering omfatter noe som har med engasjement å gjøre. Ingen av komponentene handler om at elevene skal kunne se verdien og nytten av å studere matematikk.

Både Forståelse og innhold omfatter, slik jeg vurderer det, mer enn kun rene overflatekunnskaper. En elev med Forståelse skal kunne forstå hva det matematiske innholdet betyr, når hun/han kan bruke det og hvorfor det må være slik. Eleven ser sammenhengene mellom de ulike matematiske fenomenene. Innholdskomponenten på sin side vektlegger at elevene skal vite hva det matematiske innholdet egentlig betyr. I tillegg presiserer lærerstudentene at det betyr at elevene skal vite hvor begreper og algoritmer kommer fra. Med andre ord skal elevene vite hvordan de blir dannet. Jeg mener at den formuleringen i hovedsak er det samme som at elevene i den første tråden av matematisk kyndighet skal forstå hva et matematisk innhold betyr, og hvorfor det må være slik. I Forståelse blir det også fremhevet at kunnskapene blir satt i system. Det er min tolkning at når en setter noe i system, så har en forstått hvor ting kommer fra og hva det betyr.

Forklaringen Haser og Star gir på hva prosedyrekomponenten omfatter er relativt kort. Om eleven har kunnskaper og forståelse om en fremgangsmåte eller en problemløsningsprosess, så vil hun/han klare å finne fram til de stegene hun/han behøver for å løse et problem. I forklaringen av regneferdigheter blir det poengtert at forståelse vil være en fordel for å kunne utføre en utregning. Regneferdigheter omfatter etter min tolkning likevel litt mer, og er mer detaljert, enn prosedyrekomponenten. En elev med regneferdigheter skal kunne utføre matematiske prosedyrer både fleksibelt, nøyaktig effektivt og passende. Det står lite om hvordan eleven skal kunne utføre matematiske prosedyrer i prosedyrekomponenten. I anvendelseskomponenten står der derimot litt om at elevene skal kunne bruke regler og prosedyrer fleksibelt.

Slik jeg forstår det har strategisk kompetanse og anvendelse noen likhetstrekk. Begge to legger vekt på at elevene skal kunne bruke de matematiske kunnskapene sine i ukjente situasjoner. Elevene skal kunne finne fram til passende metoder å benytte seg av, blant de kunnskapene de allerede har. Dermed tolker jeg dem som at begge trådene peker på at elevene skal kunne bruke kunnskapene sine fleksibelt, og ikke bare i de vante situasjonene. Det som skiller de to begrepene litt fra hverandre er at det innunder strategisk kompetanse er et større detaljnivå.

Begge resonneringstypene legger vekt på hvor viktig det er å kunne tenke logisk. Etter min mening, omfatter resonnering, som en del av matematisk kyndighet, mer enn resonneringskomponenten til Haser og Star. Resonneringskomponenten hos Haser og Star forklarer relativt kort hvordan elever som kan tenke logisk, trolig forstår hva de driver med. I den fjerde tråden i matematisk kyndighet blir det utbrodert mer. Der blir det forklart mer om hvordan de skal tenke logisk og resonnere over matematikken. Elvene skal blant annet kunne vurdere og forsvare valgene de gjør.

Jeg har nå sammenlignet de fire første trådene av matematisk kyndighet med de fire komponentene av forståelse i matematikk som Haser og Star kom fram til. I det neste kapittelet vil jeg argumentere for valg av analyseredskap. Da kommer jeg blant annet til å bruke denne sammenligningen. Gjennom sammenligningen har jeg funnet flere parvise likheter mellom dem. I tillegg har regneferdigheter likhetstrekk med både prosedyrekomponenten og anvendelseskomponenten til Haser og Star.

5 Teoretisk ramme

5.1 Begrunnelse for valg av analyseredskap

I studien min tar jeg utgangspunkt i Skemp sine definisjoner av relasjonell og instrumentell forståelse for å kunne beskrive elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Fordi relasjonell forståelse er det vidt begrep, det inkluderer også instrumentell forståelse[11], ønsker jeg å nyansere relasjonell forståelse ved å beskrive ulike komponenter av den. Jeg ønsker å danne et mer nyansert bilde enn kun ren instrumentell og relasjonell forståelse. I den anledning velger jeg, som nevnt tidligere, å benytte de fire første trådene i matematisk kyndighet; Forståelse, regneferdigheter, strategisk kompetanse og resonnering. I kapittel 5 beskriver jeg hvordan trådene som utgjør matematisk kyndighet forholder seg til Skemp sine definisjoner av instrumentelle og relasjonell forståelse. Det er flere grunner til at jeg velger å benytte de fire trådene av matematisk kyndighet til mitt analyseredskap. Den første årsaken er likheten de fire første trådene av begrepet har med de fire komponentene Haser og Star presenterer i sin artikkel. Årsaken til at jeg ikke velger å bruke Haser og Star sin inndeling, er at jeg ikke synes forklaringene deres til de ulike komponentene er gode nok. Et annet argument er at analysene kun baserer seg på intervjudata fra 13 studenter. I tillegg ble den nevnte studien gjennomført på lærerstudenter, og ikke elever på ungdomsskolen. Slik jeg vurderer det, er lærerstudenter mer reflekterte omkring forståelse i matematikk. Det skyldes for det første at de er eldre enn ungdomsskolelever, og i tillegg at lærerstudenter gjennom utdanningen sin trolig får en innføring i forståelse i matematikk.
Grunnen til at jeg velger å benytte de fire trådene istedenfor de åtte delkompetansene er, som jeg har nevnt tidligere, erfaringer jeg gjorde meg i en tidligere gjennomført pilotstudie. I den studien undersøker jeg om delkompetansene kan inngå i den teoretiske rammen for studien. Studien viser at de matematiske delkompetansene ikke fungerer godt i et analyseredskap for å undersøke elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Flere av delkompetansene overlapper med hverandre, som for eksempel representasjon- og symbol- og formalismekompetansen (Niss & Jensen, 2002). Analyseredskapet egnet seg derfor ikke egnet til å gi en detaljert beskrivelse av elevenes

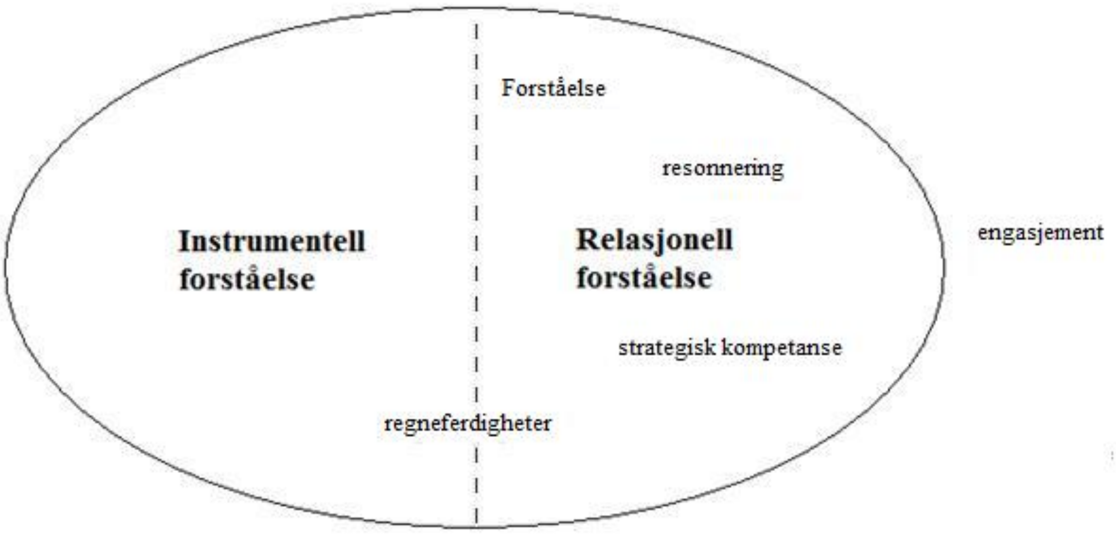
[11] Instrumentell forståelse går ut på, som nevnt i kapittel 3, at elevene vet hva de skal gjøre og hvordan. Med relasjonell forståelse vet elevene, i tillegg til hva de skal gjøre og hvordan, også hvorfor.

forestillinger om forståelse i matematikk. I den nevnte pilotstudien var det altså matematisk kyndighet som viste seg å fungere best til å nyansere Skemps to forståelsestyper, og til å beskrive elevenes forestillinger om forståelse i matematikk.

Fordi jeg bruker et analyseredskap som ikke er testet tidligere, annet enn i en liten pilotstudie, kan det oppstå utfordringer. Det er en mulighet for at analyseredskapet mitt må gjennom en bearbeiding når jeg har samlet inn datamateriellet, fordi det ikke er sikkert at redskapet passer til virkeligheten (med andre ord elevens utsagn). Eventuelt kan virkeligheten berike analyseredskapet mitt. Begge de to alternativene er noe jeg som forsker må ta høyde for i min studie, siden den har trekk fra en grounded theory studie[12] (Mertens, 2005).

5.2 Analyseredskap

Jeg har tidligere presentert de fem greinene av matematisk kyndighet og forsøkt å forklare hvordan jeg mener de forholder seg til Skemp sin definisjon av instrumentell og relasjonell forståelse. I tillegg har jeg argumentert for valg av analyseredskap. Figur 4 illustrerer hvordan de fire trådene i matematisk kyndighet kan inngå som komponenter i instrumentell og relasjonell forståelse.



Figur 2: Analyseverktøyet; instrumentell og relasjonell forståelse nyansert ved hjelp av fire tråder i matematisk kyndighet.

[12] Grounded theory definers som "a general methodology for developing theory that is grounded in data systematically gathered and analyzed" (Mertens, 2005, pp. 241-242)

De fire første trådene i matematisk kyndighet er Forståelse, regneferdigheter, strategisk kompetanse og resonnering. Innholdet i de fire trådene oppsummeres under:

1. *Forståelse*: elevens forståelse av matematiske begrep, operasjoner og relasjoner.
2. *Regneferdigheter*: elevens ferdighet i å utføre matematiske prosedyrer fleksibelt, nøyaktig, effektivt og passende.
3. *Strategisk kompetanse*: elevens evne til å formulere, representere og løse matematiske problem.
4. *Resonnering*: kapasiteten til logisk tenking og refleksjon om, forklaring av og begrunnelse for matematiske argumenter (Kilpatrick, 2001, min oversettelse).

6 Metode

6.1 Valg av metode

Jeg undersøker hvilke forestillinger elever kan ha om forståelse i matematikk. Forskningsspørsmålets natur gjør det naturlig å velge en kvalitativ metode. Jeg har heller ikke muligheter for å gjøre kvantitative undersøkelser fordi utvikling av spørsmål til spørreskjema må bygge på solid kunnskap innen det aktuelle området. Det er ikke gjort mye forskning på emnet, som det fremgår av litteraturstudien min. I følge Mertens (2005) er en kvalitativ metode passende om: ”the focus is on diversity among, idiosyncrasies of, and unique qualities exhibited by individuals” (Mertens, 2005, s 233). Gjennom mitt arbeid ønsker jeg nettopp å fokusere på mangfoldet og særegenhetene ved elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Jeg velger videre å benytte et kvalitativt intervju for å samle inn datamateriell til masteroppgaven. Steinar Kvale (2002) beskriver det kvalitative forskningsintervjuet ved at det forsøker å forstå verden fra intervjupersonens side. Det kvalitative forskningsintervjuet forsøker å få fram betydningen av folks erfaringer og deres opplevelser av verden. En slik metode er dermed passende siden jeg ønsker å forstå elevenes inntrykk og opplevelser. Kloosterman (2002) mener at det er flere fordeler med å gjennomføre intervju: “One of the major advantages as opposed to a survey or questionnaire is that when questions fail to produce detailed answers, the researcher can probe further” (Kloosterman, 2002, p. 249). Det fins flere fordeler ved å velge intervju som metode. Jeg kan for eksempel få god informasjon om det jeg ønsker å undersøke, mye på grunn av at metoden er så fleksibel. I tillegg har intervjueren mulighet til å utvikle et forhold til deltakeren, noe som kan gjøre det enklere å få dem til å svare på spørsmål. Utfordringene ved å gjennomføre intervjuer er blant annet at metoden er tidkrevende. Det tar tid å gjøre avtaler, få de nødvendige tillatelsene, gjennomføre intervjuene, transkribere og analysere dem. En annen utfordring ved intervju er at intervjueren ubevisst kan påvirke deltakerens svar. Jeg må være klar over min egen forforståelse omkring emnet, slik at jeg ikke lar den påvirke resultatene (Mertens, 2005; Robson, 2002). Et eksempel er det at jeg har lest teori om hvordan undervisningskonteksten vil påvirke elevenes forestillinger. Likevel må jeg ikke uten videre anta at det skal være slik i min studie også. Det kan være andre faktorer som spiller inn, som ikke jeg får innsikt i gjennom min studie.

For å velge ut elever til intervju, og for å få et innblikk i undervisningskonteksten, velger jeg å observere elever i en matematikklasse på en ungdomsskole i en kort periode (tre timer). Det er flere fordeler ved å bruke observasjon som metode i en studie. Istedenfor å stille elevene direkte spørsmål, kan jeg heller se på hva de gjør og hva de sier. Data samlet inn gjennom observasjon kan være med på å berike informasjon som blir samlet inn ved andre metoder (Robson, 2002). I hovedsak skal jeg benytte meg av observasjon for å finne aktuelle intervjupersoner til studien. Likevel tror jeg at det skal være mulig for meg å få et lite inntrykk av elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Fordi det ikke alltid er samsvar mellom det folk sier og det de gjør, kan observasjonen hjelpe meg til å se mer kritisk på resultatene fra intervjuene. En ulempe med observasjon er at det ikke er noen garanti for at jeg ikke påvirker situasjonen som blir observert. Elevenes oppførsel ville kanskje vært annerledes uten observatøren til stede. En annen ulempe er at metoden er tidkrevende. Tidsbruken kan bli kortet betraktelig ned ved hjelp av mer strukturerende tilnærminger. I en liten studie, som den jeg gjennomfører, vil det derfor være ønskelig å bruke formell observasjon. De mer formelle tilnærmelsene er høyst strukturerte, og mer fokuserte på et bestemt fenomen. Under en formell observasjon trenger observatøren kun å konsentrere seg om de bestemte fenomenene, alt annet blir ikke sett på som relevant (Robson, 2002). I min studie ligger fokuset på hvilke forestillinger elever kan ha om forståelse i matematikk. Jeg velger derfor å konsentrere meg om samtalene i klasserommet. Både de som foregår mellom elevene, og mellom elevene og læreren. Jeg har det teoretiske rammeverket klart for meg og skal gjennom observasjon prøve å få meg et inntrykk av elevenes forhold til forståelse i matematikk. Ikke minst skal jeg også prøve å danne meg et inntrykk av undervisningskonteksten. Min rolle under observasjonen blir som en passiv deltaker. Jeg skal være til stede i situasjonen, men skal ikke omgå deltakerne i studien (Mertens, 2005).

Ved bruk av flere enn en metode for å samle inn data til min studie får jeg det som kalles datatriangulering (Mertens, 2005). Datatrianguleringen kan være med på å redusere trusler mot validiteten i en studie. På den andre siden kan det bli en fare for å oppleve uoverensstemmelser mellom de ulike kildene (Robson, 2002). I min studie har jeg for eksempel to kilder for data om undervisningskonteksten, henholdsvis elevenes beskrivelse og mine observasjoner. Det gjør at jeg kan sjekke om det er samsvar mellom datamateriellet.

6.2 Intervju

Jeg velger å benytte et semistrukturert intervju, et metodevalg som er typisk for en kvalitativ studie (Mertens, 2005). Et slikt metodevalg håper jeg skal åpne for muligheter for at elevene forteller meg om sine forestillinger om forståelse i matematikk. Intervjutypen har kjennetegn som at spørsmålene i hovedsak er bestemt på forhånd, men at det er mulig å endre rekkefølgen av dem underveis i intervjuet etter hva intervjueren ser på som passende. I tillegg åpner metoden for endringer i formuleringen av spørsmålene. Under intervjuet kan intervjueren velge å se bort fra enkelte spørsmål, eller legge til andre. En av de viktigste forutsetningene for å gjennomføre et intervju er å ha en velutformet intervjuguide (Mertens, 2005; Robson, 2002).

6.2.1 Pilotstudien

Høsten 2008 gjennomførte jeg en pilotstudie med samme fokus som i masterstudien. En av hovedhensiktene med pilotstudien var å teste ut en intervjuguide. Jeg gjennomførte intervjuer med fem ungdomsskolelever. Dataene jeg fikk inn gjennom intervjuene ble brukt til å se hvilke spørsmål som gav meg best innsikt i elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. De seks spørsmålene som jeg velger å ta med meg videre i studien er:

1. Kan du beskrive en helt vanlig matematikktime på skolen?
2. Hvilke type oppgaver foretrekker du å arbeide med?
3. Hvordan mener du at du lærer matematikk best?
4. Hva mener du man må gjøre for å bli god i matematikk?
5. Hva synes du kjennetegner en god matematikkelev?
6. Hvis du skulle beskrive hva matematikk er til noen, hvordan ville du gjort det?

Det første spørsmålet fungerte bra som et oppstartsspørsmål. Ingen av elevene hadde vanskeligheter med å beskrive en helt vanlig time i matematikk. Spørsmålet fungerte også godt som et utgangspunkt for resten av intervjuet. Svarene jeg fikk kunne si noe om elevenes erfaringer i matematikkundervisningen. Svarene gav meg en ide om hvilke forestillinger elevene har om læring og undervisning i matematikk, hvordan innlæringen av matematikk foregår, og forestillinger om læreren sin rolle. I tillegg fikk jeg en anelse om hvilke av de fire trådene av matematisk kyndighet, og type forståelse, som blir vektlagt i matematikkundervisningen. De fem andre spørsmålene mener jeg fortalte meg noe om hvilke aspekter ved forståelse elevene vektlegger. Aspektene kunne bli identifisert og delt inn ved hjelp av analyseverktøyet. Siden matematisk kyndighet blir forklart som suksessfull matematikklæring, mener jeg at spørsmål tre, fire og fem kan si meg noe om hva de mener skal til for å få suksess i matematikk. Spørsmål to til seks sa meg noe om elevenes forestillinger om læring, om hvordan innlæringen foregår, om seg selv som matematikkelev og om matematikk.

Flere av elevene beskrev hva de selv mener med forståelse på en annen måte i forhold til den forståelsen ”den gode eleven” har. Det femte spørsmålet var et av de spørsmålene som jeg mener gav overraskende resultater. Jeg hadde ikke ventet å få beskrevet to ulike typer forståelse av de samme elevene. Svarene jeg fikk her lot seg beskrive ved hjelp av analyseverktøyet.

Under pilotintervjuene stilte jeg elevene spørsmål som direkte gikk på forståelse. Den typen spørsmål fungerte ikke optimalt med alle elevene. For eksempel stilte jeg et spørsmål om hva som er forskjellen på en elev som forstår matematikk, og en som ikke gjør det. Da fikk jeg av noen elever til svar at det er at den ene forstår, og den andre ikke gjør det. Det måtte mange tilleggspørsmål til for å få elevene til å utdype svarene sine, og det hendte også at jeg ikke fikk noen forklaring likevel. Senere i kapittelet kommer jeg tilbake til hvordan jeg i stedet for å spørre elevene direkte, på en måte nærmer meg temaet fra bakveien, ved å stille mer indirekte spørsmål.

6.2.2 Oppbygging av intervjuguiden

I oppbyggingen av selve intervjuguiden til studien (se vedlegg 2) er det flere faktorer av metodologisk art jeg må ta hensyn til. En av faktorene er at en ved et personlig intervju bør gjøre seg til kjenne med språket respondentene snakker (Mertens, 2005). Tidligere erfaring fra undervisning på ungdomstrinnet, gjør at jeg mener at språket til elevene er kjent for meg. I formuleringen av spørsmålene velger jeg å ikke bruke ord som kan være ukjente for elevene. Det blir anbefalt å bruke åpne spørsmål, med andre ord at intervjuet ikke skal bli bygd opp rundt ja- og neispørsmål. Spørsmålene bør under intervjuet gå fra det generelle til det mer spesifikke. Å spørre om to ting i samme spørsmål er ingen god ide. Under innledningen til intervjuet er det viktig å starte med å forklare hensikten med intervjuet. Her har forskeren flere forhold å ta hensyn til. Hvor mye er det egentlig ønskelig å fortelle intervjusubjektene på forhånd? Det kan være en risiko for å påvirke svarene deres om forskeren forteller akkurat hva hun/han er ute etter. Derfor velger jeg å fortelle mer generelt hva hensikten med intervjuet er, og ikke fortelle dem at jeg ønsker å finne ut hva de mener med forståelse i matematikk. En forsikring om at svarene deres blir behandlet anonymt er viktig under oppstarten av intervjuet. Det vil være en stor sjanse for at respondentene ikke tør å gi uttrykk for meningene sine om de frykter at uvedkommende kan spore intervjuene tilbake til dem. Jeg velger derfor å forklare elevene hvordan datamateriellet vil bli behandlet (Mertens, 2005).

Kvale (2002) skriver om bruken av taushet under intervjusituasjonen. Tausheten bør brukes som et middel for å komme videre i intervjuet. Da tillater en at intervjupersonene får tid til å tenke seg litt om og reflektere over svarene sine. Elevene kan få anledning til å bryte stillheten med eventuell viktig informasjon. Under intervjuet planlegger jeg å benytte meg av slik taushet. Det gjør jeg fordi egne erfaringer fra pilotundersøkelsen viste at jeg ofte var for rask til å si noe nytt når det ble et par sekunders stillhet. Ved å ikke tillate eleven til å få tid til å tenke, kan jeg risikere å gå glipp av verdifulle betraktninger. Helt til slutt i intervjuseansen kan det for forskeren være lurt å runde av med en oppsummering av det hun/han nettopp har hørt (Mertens, 2005). Jeg velger å ikke bruke så mye oppsummering under intervjuet fordi jeg er redd det kan ødelegge den naturlige samtalen. Derimot planlegger jeg å ta tak i det elevene sier og stille oppfølgingsspørsmål til det de sier. Gjennom å gjøre det håper jeg at jeg kan få bekreftet eller avkreftet om jeg forstår elevene riktig i det de sier. Som intervjuer må jeg heller ikke glemme å takke for deltakelsen helt til slutt (Mertens, 2005). Robson (2002) vektlegger at det er essensielt at respondentene ser på innsatsen de gjør som viktig.

6.2.3 Intervjuguide

Robson (2002) hevder at menneskers forestillinger er rimelig vanskelig å få tak i. For å finne ut hva elevene mener med forståelse i matematikk, mener jeg at en ikke kan spørre dem direkte. Egne erfaringer fra pilotstudien viste at jeg da gjerne ikke får så velbegrunnede svar. Lester (2002) hevder at elevene er relativt lite reflektert over en del av forestillingene de har i matematikk. Jeg velger derfor å ikke spørre elvene om hva de mener med forståelse i matematikk direkte. Hva de derimot mener det vil si å forstå en oppgave eller et teorem, mener jeg de skal ha dannet seg en forestilling om. Jeg antar at elevene tidligere har opplevd å få spørsmål som går på om de forstår en oppgave eller en teori, og dermed kan ha reflektert over hva en slik forståelse innebærer. Derfor mener jeg at en løsning kan være å spørre elevene om forhold som indirekte har med forestillingene deres om forståelse i matematikk å gjøre. Det kan for eksempel være spørsmål om forestillingene deres i matematikk, forestillinger om hva som trengs for å bli god i faget og forestillinger om hva matematikk er. Siden ulike typer forestillinger mer eller mindre påvirker hverandre (Pehkonen, 2003) og ofte henger sammen (Green, 1971), vil det å stille spørsmål som omhandler de temaene forhåpentligvis gjøre meg i stand til å danne et bilde av elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Jeg ønsker med andre ord å benytte meg av det faktum at de ulike typene/kategoriene av forestillinger har innvirkning på hverandre. Med utgangspunkt i den teoretiske rammen som blir presentert, intervjuspørsmål fra Wæges (2007) og Hasers (2006) avhandlinger, KappAbel-forskningsrapporten (Wedege & Skott med Wæge & Henningsen, 2006) og Boalers artikkel (1997), samt erfaringene fra pilotstudien, forsøker jeg å utvikle passende spørsmål til intervjuguiden. Jeg legger hovedvekt på at spørsmålene skal hjelpe meg til å finne svar på forskningsspørsmålet mitt. Derfor tar jeg i tillegg hensyn til hvordan spørsmålene som ble benyttet under forundersøkelsen fungerte.

Som introduksjonsspørsmål (Kvale, 2002) velger jeg å spørre elevene om de kan beskrive en vanlig matematikktime (se vedlegg 2). Spørsmålet er rimelig generelt og skal kunne åpne for mer spesifikke spørsmål på en naturlig måte. Spørsmålet er inspirert av Wæge (2007) sitt åpningsspørsmål i hennes elevintervju, og et av de første spørsmålene i elevintervjuet fra KappAbel-forskningsrapporten (Wedege, et al., 2006). Svarene jeg får fra det første spørsmålet er ment til å kunne åpne for at det blir naturlig å stille videre spørsmål om hvordan de arbeider med matematikken, og hva elevene mener er en god matematikktime. Det andre spørsmålet under intervjuet er derfor " Hvordan arbeider dere med nye temaer eller teori i matematikk?" (se vedlegg 2). Til de overnevnte spørsmålene hadde jeg såkalte "probes" og "prompts" tilgjengelig. En "*probe*" er et verktøy som kan benyttes for å få intervjusubjektet til å utdype et svar. "*Prompts*" gir den som blir intervjuet forslag på mulig svar (Mertens, 2005; Robson, 2002). En av de "probes" jeg ønsker å stille elevene går på hvordan de selv går fram for å forstå et nytt tema eller en teori i matematikk, en annen er hva de legger i det å forstå et tema eller en teori. Elevenes forestillinger omkring de to forholdene håper jeg kan si meg noe om deres forestillinger om forståelse i matematikk.

Jeg henter det tredje spørsmålet fra KappAbel-forskningsrapporten (Wedege, et al., 2006) og Boaler (1997). Meningen med spørsmålet "Hva synes du kjennetegner en god time?" (se vedlegg 2) er å undersøke hvorvidt elevene vektlegger forståelse, eller noen av egenskapene i matematisk kyndighet. Fokuserer eleven på forståelse, eventuelt hvilke sider ved forståelse? Det fjerde spørsmålet er "Hvilke type oppgaver foretrekker du å arbeide med?" (se vedlegg 2). Flere av de "probes" som jeg velger å bruke her er spørsmål jeg tar fra Wæges intervjuguide (Wæge, 2007), for eksempel "Liker du utfordrende oppgaver?" og "Liker du å gjøre mange oppgaver som du vet du får til, eller liker du å øke vanskelighetsgraden etter hvert?". De spørsmålene skal derfor være kvalitetssikret. Som et oppfølgingsspørsmål til det tredje spørsmålet velger jeg å spørre elevene om hva de mener det vil si å forstå en oppgave. Det er min vurdering at elevene i løpet av skolegangen flere ganger skal ha fått spørsmål om de forstår en oppgave (eller et tema eller en teori). Årsaken til at jeg tør å påstå det er først og fremst egne opplevelser som matematikkelev. Derfor mener jeg at det er sannsynlig at elevene kan klare å formulere hvilken forestilling de har om hva det vil si å forstå en oppgave. Deres forestilling om hva det vil si å forstå en oppgave tror jeg kan gi meg innsikt i hvilke forestillinger elevene har om forståelse i matematikk.

Det femte spørsmålet i intervjuguiden er hentet fra Wæge (2007). ”Hvordan lærer du best?” (se vedlegg 2) er et spørsmål som jeg mener kan være med på å gi meg bedre innsikt i hva elevene mener med forståelse i matematikk. Spørsmålet er formulert litt annerledes i forhold til hvordan det ble benyttet i pilotstudien. Det blir anbefalt å ha korte og konkrete spørsmål i et intervju (Robson, 2002) derfor velger jeg å kutte ut alle overflødige ord. I forbindelse med spørsmål sju skal det legges ut lapper på bordet med flere eksempler på ulike arbeidsmetoder (se vedlegg 3). Noen eksempler på slike er ”jeg sier ting høyt”, ”læreren forklarer metodene og viser løsningene” og ”vi arbeider med prosjekt”. Jeg mener at alle lappene, sammen med en begrunnelse på hvorfor eleven velger lappene, kan beskrives ved hjelp av analyseredskapet. Som en naturlig forlengelse av det femte spørsmålet velger jeg å spørre elevene om når de synes at de lykkes i matematikk (se vedlegg 2). Matematisk kyndighet blir forklart som suksessfull matematikklæring. Spørsmålet kan si meg mye om elevenes ulike forestillinger i matematikk, blant annet forestillinger om matematikk, om matematikklæring, og hvordan innlæring foregår i matematikk og om seg selv som matematikkelev. Jeg tror i tillegg at spørsmålet kan gi meg innsikt i hvordan elevene vektlegger forståelse med tanke på å lykkes i matematikk. Og ikke minst hvilke forestillinger de har om forståelse i matematikk. Jeg ønsker å få elevene til å utdype svarene sine ved hjelp av oppfølgingsspørsmål om hva de mener det vil si å kunne matematikk og hva de mener skal til for å få en god karakter i faget. Hovedspørsmålet og oppfølgningsspørsmålene er inspirert av Wæge (2007) og Haser (2006) sine studier.

Et av de spørsmålene som var med på å skape spennende resultater i pilotundersøkelsen var som nevnt når jeg bad elevene beskrive hvilke kvaliteter den ”gode” matematikkeleven har. I denne studien velger jeg å omformulere spørsmålet en anelse: ”Tenk på en elev som du mener er god i matematikk. Kan du beskrive hva du mener det er som gjør at den eleven er god i matematikk?” (se vedlegg 2). Jeg mener at spørsmålet kan få elevene til å dele flere av forestillingene sine med meg.

Avslutningsspørsmålet ”Hva handler egentlig matematikk om” (se vedlegg 2) fokuserer på hva matematikk egentlig handler om. Først og fremst tror jeg spørsmålet kan si meg noe om elevenes forestillinger om matematikk, men og andre typer forestillinger. Hva vektlegger elevene, handler det for eksempel om regneferdigheter eller forståelse? Inspirasjonen til det siste spørsmålet kommer fra Wæge sin studie. Det ene oppfølgingsspørsmålet (”Er matematikk mer om å forstå det du arbeider med, eller å huske ting utenat”) er hentet fra Boaler sin artikkel.

6.3 Utførelse

Valg av respondenter falt på elever som går på ungdomsskolen, et valg som kommer av at jeg gjennom egen undervisningserfaring fra ungdomsskolen ble interessert i deres måte å tenke på. Ifølge Mertens (2005) er det viktig å få de riktige tillatelsene når en skal gjennomføre en studie. Jeg var så heldig å få kontakt med en ungdomsskolelærer i byen jeg bor i, som ønsket å hjelpe meg med datainnsamlingen. Den samme læreren hjalp meg under arbeidet med pilotstudien til masterstudien noen måneder tidligere. Læreren gav meg tillatelse til å observere matematikklassen i tre klokketimer. Jeg forklarte henne at jeg ønsket å se etter elever som jeg kunne intervjue. I den første timen med observasjon forklarte jeg elevene kort hva som var grunnen til min tilstedeværelse. Forklaringen var generell fordi jeg ikke ønsket å påvirke elevene ved å si hva hovedfokuset mitt var. Under observasjonen satt jeg i et hjørne av klasserommet og observerte. Jeg skrev samtidig notater av observasjonene i en bok, min forforståelse, teoribakgrunn og mitt forskningsspørsmål hjalp med til å fokusere observasjonen. I den siste timen med observasjon ble de elevene jeg ønsket å intervjue spurt. En av elevene jeg ønsket å intervjue var ikke til stede i den siste timen jeg observerte, derfor spurte læreren henne for meg. Siden elevene er under myndighetsalder, måtte jeg skaffe samtykke fra deres foresatte (Robson, 2002). Det ble gjort gjennom en samtykkeerklæring de fikk utdelt (se vedlegg 4), Kvale (2002) kaller det et *informert samtykke*. Elevene og de foresatte bør få informasjon om hovedtrekkene i prosjektet, noe jeg mener de gjorde gjennom samtykkeerklæringen.

Jeg gjennomførte intervjuer av seks elever (to jenter og fire gutter) på avgangstrinnet. Jeg hadde kjennskap til elevene fra før, da jeg har undervist dem i matematikk i en periode på åtte uker i løpet av våren 2008. Jeg valgte å intervjue seks elever for å være sikker på å få et variert datamateriell. Læreren gav uttrykk for at elever lå på ulikt faglig nivå i matematikk. Selv om jeg har gjennomført intervjuer før, er jeg på langt nær en ekspert på området. Lengden på intervjuene var i gjennomsnittet ca 25 minutt. Intervjuene foregikk på et lite grupperom i tilknytning til klasserommet. Vi satt på hver vår side av et lite bord, med båndopptakeren i mellom oss. Intervjuet ble av flere grunner tatt opp på bånd. For det første for at jeg skulle kunne konsentrere meg mest mulig om intervjuet, og ikke måtte skrive ned alt som ble sagt. Kvale (2002) legger vekt på at det tillater intervjueren å konsentrere seg om samtalen under intervjuet. Et intervjuopptak kan en i tillegg gå tilbake og lytte på gang på gang, og få med seg mye relevant informasjon. Alt fra ordbruken til tonefallet og pauser med taushet blir registrert i opptaket (Kvale, 2002; Mertens, 2005; Robson, 2002). Etter intervjuene ble opptakene transkribert. Elevene fikk tilbud om å lese gjennom transkripsjonene og komme med kommentarer og innspill. Tre av elevene ønsket det. Ingen av dem kom derimot med noen kommentarer eller innspill til transkripsjonene.

7 Resultat og analyse

7.1 Undervisningskonteksten

Gjennom datamateriellet jeg samlet inn under observasjonen og intervjuene, fikk jeg dannet meg et bilde av undervisningskonteksten. Som nevnt tidligere observerte jeg matematikkundervisningen i en tiendeklasse på ungdomsskolen i totalt tre klokketimer. Den samme klassen har jeg for et års tid tilbake undervist i matematikk over en periode på åtte uker. Jeg hadde derfor kjennskap til elevene fra før. Læreren deres kjente jeg fra den tidligere nevnte pilotundersøkelsen. Hun er utdannet lektor, og bør dermed være faglig sterk i matematikk. Min oppfatning gjennom observasjonene er at læreren i høy grad er det. Hun forklarer det matematiske innholdet på en inkluderende måte og forsøker å få hele klassen med. Hun legger opp til at det skal være muntlig aktivitet når hun gjennomgår matematiske begreper, teorier eller oppgaver. Min oppfatning gjennom observasjonene er at elevene liker matematikklæreren sin svært godt. Det ser ut til at de har stor respekt for henne. Gjennom intervjuene ble min oppfatning bekreftet. Alle elevene jeg intervjuet uttrykte stor begeistring for læreren.

Undervisningen foregikk i et stort klasserom den første og tredje timen, mens den andre timen forløp på et mindre grupperom. De tre timene jeg observerte hadde et relativt likt forløp. Timene startet med at læreren hadde en sekvens på tavla. Da var det ofte en gjennomgang av oppgaver elevene hadde hatt problem med og/eller en presentasjon av noe nytt matematisk innhold. Etterpå fikk elevene anledning til å jobbe med oppgaver fra fargevelger[13]. Under tavlesekvensen inkluderte læreren elevene i presentasjonen ved å stille dem spørsmål. En veldig flink elev ble på et tidspunkt spurt om å komme opp til tavla og "bevise" en regel læreren brukte til å løse en oppgave. Eleven tok utfordringen og klarte den uten problem. Under datainnsamlingen observerte jeg kun det jeg vil kalle tradisjonell undervisning, det vil si en lærebok- og oppgavestyrt undervisning (Wæge, 2007), men både elevene og læreren forklarte meg at klassen tidligere hadde jobbet med det elevene kalte praktiske oppgaver.

[13] Oppgavene i læreboka er, etter de obligatoriske oppgavene som alle må gjøre, delt inn i tre vanskelighetsgrader som har fått navn etter farger; blå, gul, og rød. De blå oppgavene er de med lavest vanskelighetsgrad, de gule oppgavene har større vanskelighetsgrad, mens de røde er de vanskeligste. Elevene velger i samråd med læreren, eller selv, hvilken vanskelighetsgrad de ønsker å jobbe med.

Mine observasjoner tyder på at læreren vektlegger en relasjonell forståelse i matematikk. Elevene ble hele tiden bedt om å begrunne svarene sine. Min tolkning gjennom observasjonene er at læreren legger vekt på at elevene ikke bare skal kunne bruke regler og prosedyrer, men også at de skal forstå de underliggende begrepene. Slik jeg vurderer det, ønsker hun at elevene skal utvikle en relasjonell forståelse i matematikk. I de tre timene jeg var i klasserommet la jeg også merke til at det var vanlig å samarbeide om å løse oppgaver for de elevene som ønsket det.

7.2 Introduksjon til intervjuene

Jeg gjennomførte totalt seks intervjuer (fire gutter og to jenter). Alle intervjuene ble transkribert. Jeg tok kun med meg fire av de seks intervjuene videre til analysen. To av intervjuene med guttene viste seg dessverre å ikke inneholde datamateriell som kunne hjelpe meg til å besvare forskningsspørsmålet mitt. Det virket ikke som om de to elevene kunne begrunne svarene sine, enten fordi de ikke hadde noen formening om det eller fordi de rett og slett ikke hadde lyst til å gjøre det. Når jeg ikke fikk begrunnelser for hva de mente med utsagnene sine ser jeg ikke meg i stand til å gjøre tolkninger av svarene deres. Det betyr at utvalget ifølge læreren, består av to gutter på forholdsvis likt faglig nivå og to jenter på ulikt faglig nivå. De fire intervjuene jeg valgte å se nærmere på ble analysert ved hjelp av analyseredskapet. Jeg så etter utsagn som kunne si meg noe om hvilke forestillinger elevene har om forståelse i matematikk. Mye av datamateriellet viste seg å være svar som gikk på andre ting omkring matematikkundervisning enn forståelse. Likevel mener jeg at de svarene har gjort meg i stand til å se elevenes meninger i et større perspektiv. Noen av de svarene har gjort meg sikrere på at jeg har fått fram elevenes forestillinger om forståelse i matematikk gjennom mine tolkninger. Andre utsagn hos elevene har på sin side gjort meg mer usikker på om elevene egentlig mener det slik som de har sagt det, eller om det kanskje ligger en litt annen mening bak svarene deres. Uansett vil jeg ovenfor leseren poengtere at det kun er mine tolkninger og meninger av elevenes utsagn som legges fram i min studie. En annen person ville kanskje ha tolket intervjuene annerledes enn hva jeg har gjort. Derfor ønsker jeg å vise hvordan jeg har analysert og tolket intervjuene gjennom eksempler. Det vil bidra til å øke troverdigheten til studien.

I kapittelet vil jeg presentere analysene av hvilke forestillinger de fire elevene jeg intervjuet har om forståelse i matematikk. For å se meningene deres i et litt bredere perspektiv kommer jeg til å presentere noen av forestillingene deres om undervisning og læring i matematikk. Fordi jeg under intervjuene dessverre kom i skade for å stille noen ledende og/eller lukkede spørsmål, velger jeg å ikke ta med svarene jeg fikk på slike spørsmål i analysen. Hva det eventuelt kan ha hatt å si for resultatet, kommer jeg nærmere inn på i kapittel 8.

7.3 Intervju med Åse

Jeg valgte å intervjue Åse fordi hun, slik jeg vurderer det, er en utrolig dyktig og talentfull matematikkelev. Det gjorde at jeg var interessert i å finne ut hvilke forestillinger hun har om forståelse i matematikk. Jeg var nysgjerrig på om det kunne være en forskjell på hennes forestillinger om forståelse i matematikk, i forhold til de andre elevene jeg intervjuet. Læreren var enig i valget om å intervjue Åse. Hun er som sagt en veldig flink og begavet matematikkelev. Hun jobber mye for seg selv med eget stoff. I tillegg til å følge matematikkundervisningen på ungdomsskolen arbeider hun med læreplanmål for videregående skole. Under observasjonen ble jeg vitne til hvordan matematikklæreren av og til oppfordrer Åse til å forklare matematisk innhold for hele klassen. Mange av de andre elevene spør henne i tillegg om hjelp til å forklare hvordan de skal gjøre bestemte oppgaver. Etter min oppfatning ser hun ut til å være komfortabel med å forklare det hun kan til andre elever. Under observasjonen noterte jeg hvordan både læreren og medelevene benyttet seg av kunnskapene hennes. Åse ble for eksempel oppfordret til å forklare noe matematiske innhold på en annen måte enn hva læreren gjorde, eller til å "bevise" hvorfor en regel fungerte. Det virker som om de andre elevene har stor respekt for Åse og hennes kunnskaper i matematikk. Jeg vil nå presentere utsagn fra intervjuet som jeg mener kan fortelle oss noe om Åses forestilling om forståelse i matematikk og samtidig min tolkning av hennes forestillinger.

7.3.1 Åses forhold til matematikk

Da Åse fikk det siste spørsmålet om hva matematikk egentlig handler om, gav hun gav uttrykk for at det var et vanskelig spørsmål:

150 I: Hva handler egentlig matematikk om?

151 Å: Hva det handler om ja? Ja si det.

152 I: Ja men hvis noen bare kom til deg å spurte; matematikk, hva er det? Altså hvis du skulle beskrive det til noen, hvordan ville du gjort det?

153 Å: Beskrive matematikk, det var litt verre. Tenkepause. Det er jo å forstå hvordan ting fungerer og sånn. Eller hvordan ting som har med tall fungerer kanskje. Det meste har vel egentlig med matematikk å gjøre da. Nei det ble vanskelig.

154 I: Du sa det der med det meste har matematikk å gjøre. Hva tenker du på med det meste?

155 Å: Det er jo alt som, for eksempel en vanlig da, du må jo bruke matematikk hele tiden. For eksempel når du går i butikken og, eller ja, alle PC-er og sånn er det matematikk i, og alle elektriske apparater. Ja også hvis du skal skjønne[14] hvordan tyngdekraft og sånn der funker for eksempel. Det er jo alt rundt deg har jo med matematikk å gjøre, hvordan det er oppbygd og funker og sånn der.

I følge Åse handler matematikk om å forstå hvordan ting fungerer, eller kanskje hvordan ting som har med tall fungerer. Hun forklarer at det meste har med matematikk å gjøre, og at du må bruke matematikk hele tiden. For eksempel når du går i butikken. Matematikken kan brukes for å skjønne hvordan ting fungerer, det er for eksempel matematikk i alle elektriske apparater.

Åse forteller at interesse for matematikk trolig vil medføre at en elev holder mer på med det. Hun forteller at selv er hun ganske interessert i matematikk:

145 […] Hvis du er interessert i ting som har med matematikk å gjøre, så holder du antageligvis på med det mer enn andre.

146 I: Er du interessert i matematikk?

147 Å: Ja, ganske. Vil jeg tro.

7.3.2 Hvordan Åse jobber med matematikk

Åse forteller at en god time kjennetegnes med at hun føler at hun har lært noe:

47 I: Ja. Hva syns du kjennetegner en god time i matematikk?

48 Å: Hvis jeg føler at jeg har lært noe for eksempel. Og det ikke er så veldig mye bråk og sånn der tull. Bare at jeg føler at jeg har lært noe egentlig. Det synes jeg er en bra time.

[14] Åse, og de andre elevene, bruker vekselvis verbene å skjønne og å forstå.

Når Åse jobber for seg selv, forteller hun at hun leser og ser på beviser og oppgaver:

78 I: Har du lyst til å kommentere den lappen [Jeg arbeider alene] der litt for eksempel, når du arbeider alene. Hva er det du gjør da?

79 Å: Jeg sitter jo og leser noen ganger, også får noen beviser også ser jeg på noen oppgaver også. Og hvis jeg ser at jeg får til oppgaven med en gang, så tar jeg ikke å regner det ut, jeg bare går videre. Hvis det er en som jeg synes ser litt vanskelig ut, så gjør jeg den oppgaven.

80 I: Du hopper over de lette?

81 Å: Ja, altså jeg har veldig fritt hva jeg får lov til å gjøre av læreren, men jeg gjør det jeg føler selv at jeg har lyst til å gjøre. Jeg synes det er dumt å gjøre så veldig enkle oppgaver som går på det samme alle sammen.

[…]

88 I: Jeg tenkte jeg skulle spørre når, du snakket om at du ser på bevis. Ser du på bevis i boka eller prøver du å bevise noe på egenhånd?

89 Å: Vel, av og til så ser jeg på bevis i boka, og andre ganger. Eller det kan jo være at jeg ser hva beviset kommer fram til da. Også prøver jeg å komme fram til det selv da.

Når hun jobber på egenhånd og leser i matematikktimene får hun ofte noen beviser å se på. Etterpå ser hun på noen oppgaver. Hvis hun ser at hun ikke har noen problem med å få til en oppgave hopper hun over den. Hun synes det er dumt å gjøre oppgaver som alle går ut på det samme. Åse forteller at hun foretrekker å gjøre oppgaver som er litt vanskelige:

57 I: Hvilken type oppgaver foretrekker du å arbeide med?

58 Å: Hva mener du?

59 I: Det kan jo for eksempel være om du liker utfordrende oppgaver eller…

60 Å: Ja i så fall oppgaver som er litt utfordrende da. Og oppgaver hvor det bare ikke er, det er ikke bare sånn at du har lært en regel som du må bruke, men du må tenke litt selv og komme fram til. Du må bare bruke mye av det du har lært.

[…]

65 I: Hva er det som gjør at du blir utfordret?

66 Å: Det er jo når jeg får sånne vanskelige oppgaver, som jeg synes er litt vanskelig.

67 I: Hva er det som gjør at de er vanskelige da?

68 Å: Det er jo det at det ikke er noe som du har lært som du kan skikkelig, i en bok, som det står akkurat hvordan du må komme fram til fremgangsmåten selv.

Åse forteller at de vanskelige og utfordrende oppgavene er for henne oppgaver som det ikke er gitt med en gang hvilken regel hun skal benytte. En slik type oppgaver krever at hun bruker det hun har lært, og kommer fram til fremgangsmåten på egenhånd. Slik jeg vurderer utsagnene om oppgaveregning, legger Åse vekt på strategisk kompetanse.

7.3.3 Hvordan Åse går fram for å forstå et nytt tema eller en teori

For å forstå et nytt tema eller en teori i matematikk, forteller Åse at hun pleier å se på bevis:

41 I: Hvordan går du fram for å forstå et nytt tema eller en teori i matematikk?

42 Å: Når jeg ser hvorfor det er slik, beviset, da pleier jeg å skjønne det.

Når Åse ser på hvorfor temaet eller teorien er sånn, eller med andre ord ser på beviset, forstår hun det. Slik jeg vurderer det, setter bevis ting i sammenheng, og gjør at de nye kunnskapene blir mer enn isolerte kunnskaper. Den delen av svaret som fokuserer på hvorfor ”det” er slik, mener jeg derfor er et uttrykk for Forståelse. Samtidig er beviser også en viktig del av resonnering. Kan hun bevise noe, blir hun i stand til å rettferdiggjøre arbeidet sitt.

7.3.4 Åses forhold til å forklare matematikk

Under observasjonen la jeg som nevnt merke til at Åse ofte forklarer matematikk for medelevene sine. Hun forteller at det er en forskjell på det å forklare for seg selv og forklare for andre:

92 I: Du tok fram den der lappen når jeg forklarer ting for andre. Hva er det som er fordelen med den, eller hva skiller den fra når du diskuterer med deg selv?

93 Å: Da må du jo forklare det på en helt annen måte, du må jo si akkurat hva du har tenkt på. Hvis du kommer fram til noe selv så er det ikke sikkert at du vet helt hva du har gjort. Men da må du faktisk forklare alt du har gjort og sånt. Få andre til å forstå det og.

94 I: Syns du det er en forskjell på det å forstå noe selv, og det å forklare slik at andre forstår det?

95 Å: Ja, det synes jeg er veldig annerledes.

96 I: Har du lyst til å forklare det litt, hva er det som gjør at det blir annerledes?

97 Å: Vel, når jeg forstår noe selv så er det jo, det er bare at jeg ser det, jeg vet. Hvis jeg ikke må forklare det til noen andre så bare, jeg vet ikke helt hvorfor jeg skjønner det. Det bare er slik liksom. Men når jeg kan forklare det til andre så husker jeg det på en måte bedre selv også. Jeg må tenke bedre etter å sånn der. Det blir mer utfordrende også.

Åse ser, en klar fordel med å forklare matematikk for medelever. Hun fortellet at det er en forskjell mellom det å forstå noe for seg selv og forklare slik at andre forstår det. Når hun klarer å forklare noe slik at andre forstår det mener hun at hennes egen forståelse blir bedre. Det gjør også at hun selv klarer å huske det bedre. Hun ser det også som en liten utfordring å kunne forsøke seg på å forklare ting for andre elever. Når hun forstår noe for seg selv vet hun ikke helt hvorfor hun forstår det, hun bare gjør det sier hun.

7.3.5 Åse om hva som skal til for å lykkes i matematikk

Åse ble bedt om å fortelle om når hun synes at hun lykkes i matematikk:

107 I: Når synes du at du lykkes i matematikk?

108 Å: Det er vel når jeg greier å komme fram til noe selv da. Uten hjelp fra andre. At jeg klarer å, for eksempel hvis jeg ser noe, en sånn regel da, også klarer jeg å finne et bevis selv for hvorfor det blir sånn. For da føler jeg at jeg, ja, da føler jeg at jeg lykkes da.

109 I: Hva mener du det vil si å kunne matematikk?

110 Å: At du forstår det. Ikke at du pugger regler og, men at du faktisk forstår det, du skjønner hvorfor det er sånn.

Her er Åse igjen inne på det med bevis. Hun forteller at å lykkes i matematikk for henne vil si å klare å bevise noe matematisk innhold på egenhånd. I tillegg nevner hun at forståelse er viktig for å si at noen kan matematikk. Å pugge regler nytter ikke. I det at Åse mener det er viktig å forstå hvorfor ting er som de er, vurderer jeg det som at hun vektlegger Forståelse. Det kan i tillegg inngå litt resonnering i å forstå hvorfor noe matematisk innhold er som det er.

Under intervjuet ble Åse også bedt om å beskrive hva hun mener er en god matematikkelev:

132 I: Hvis du tenker på en elev som du mener er god i matematikk, hva er det som gjør at den eleven er god i matematikk?

133 Å: Det er vel at personen forstår det han holder på med, og ikke, at personen er, hvordan blir det da? Tenkepause. Jeg vet ikke helt, det er nå når det å forstå det da vil jeg tro. Det er bare vanskelig å forklare da men. Tenkepause. Jeg vet egentlig ikke hva jeg skal si jeg.

134 I: Bare prøv.

135 Å: Jeg vil tro at hvis den personen forstår det han eller hun driver på med, så blir man veldig mye bedre enn hvis man bare pugge regler uten å skjønne det.

Åse gir uttrykk for at det var en vanskelig oppgave å forklare hva som gjør en elev god i matematikk. Hun forteller at hun tror den eleven vet hva hun/han holder på med og forstår det. Eleven vil bli bedre om hun/han forstår det, enn om hun/han bare pugget regler uten å forstå det.

7.3.6 Åses forestilling om forståelse i matematikk

Slik jeg vurderer intervjudataene, har Åse en forestilling om forståelse som samsvarer med relasjonell forståelse. Jeg vil nå forklare hvordan jeg mener at hun gir uttrykk for de ulike trådene som er inneholdt relasjonell forståelse. Åse vektlegger for det første Forståelse høyt i matematikk. En god elev er en som forstår matematikk (utsagn 133), og for å kunne matematikk er det nødvendig å forstå det (utsagn 110). Slik jeg vurderer det, snakker Åse da om Forståelse. Hun er inne på den samme tråden andre steder i intervjuet også (utsagn 42 og 135). Åse er, ifølge mine analyser av intervjudataene, også inne på strategisk kompetanse (utsagn 60, 68, 79 og 89). Under intervjuet fortalte hun at det er viktig for henne å jobbe med oppgaver det hun må tenke litt, bruke det hun kan fra før og komme fram til egne fremgangsmåter. I tillegg er det min tolkning av datamaterialet at hun er inne på resonneringsdelen av relasjonell forståelse. På spørsmål om hva det vil si å kunne matematikk svarer hun at du forstår det, du skjønner hvorfor det er sånn (utsagn 110). Åse legger vekt på det med bevis, som hun nevner flere ganger i intervjuet. Hun jobber ofte med beviser når hun skal lære seg noe på egenhånd (utsagn 79). Det er på den måten hun føler at hun får til å forstå matematikken (utsagn 42). For Åse er det viktig å forstå hvorfor ting er som de er, og det gjør hun gjennom beviser. I tillegg tror jeg at Åse kan være inn på den relasjonelle delen av regneferdigheter (utsagn 133 og 135). Den gode eleven forstår hva hun/han driver på med. Den relasjonelle delen av regneferdigheter går ut på at eleven skal kunne vurdere hvorvidt et svar er gyldig, og det mener jeg eleven kan gjøre når eleven forstår hva hun/han driver med. Av alle de fire trådene i relasjonell forståelse, mener jeg at Åse vektlegger resonneringskomponenten mest.

7.4 Vår

Slik jeg oppfatter Vår er hun en blid, utadvendt og ivrig matematikkelev. Jeg ønsket å intervjue Vår fordi hun er en elev som er glad i å snakke og virker som å ha egne meninger. Samtidig la jeg under observasjonen merke til at Vår jobbet jevnt og trutt i matematikktimene, hun var en av de som jobbet ivrigst i alle de tre timene jeg observerte.

7.4.1 Vårs mål i matematikk

Vår har et langt svar på hva hun mener skal til for å få en god karakter i matematikk. Under forklaringen hennes kommer hun inn på hvilke mål hun har i matematikk:

90 V: Jeg mener egentlig at for å få en god karakter i matematikk, så er ikke det hva som er bra ut i fra andre. Sånn som jeg har tre i matte, og jeg er stolt av meg selv, for tre er en god karakter ut fra mine behov. Og hvordan jeg jobber. Jeg vet det at det er andre som kan det bedre enn meg, andre som får dobbelt så mye som meg i matte. Men det bryr meg ikke, for jeg ser ut ifra meg selv. Og det er viktig det at du ikke må sette for høye krav til deg selv. Du bør heller prøve å sette det slik at du veit at du må strekker deg litt. Men at du får det til. For hvis du ikke får det til da, så blir du bare utrolig sint på deg selv. Så en god karakter i matte er den karakteren du selv klarer å bli fornøyd med. At du selv vet at du setter deg et mål, at jeg skal ha den karakteren, også får du den karakteren eller høyere [..]

92 V: [..] jeg har aldri vært noe god i matte. Ikke på barneskolen og ikke på ungdomsskolen. Ingen gang. Og jeg vet selv at hvis jeg får tre på sluttarket, så er jeg fornøyd. Bare jeg klarer å holde den treeren. Og jeg vet selv det at hvis jeg får bedre, så er det egentlig ikke sannsynlig at jeg får fire, fordi jeg skjønner ikke jeg, det vi holder på med, men jeg får ikke til å gjennomføre det på en måte. For jeg vet hvordan jeg skal gjøre det, men jeg skriver nesten alltid feil. Og da kan jeg det jo ikke på den måten at jeg skal tenke at jeg skal ha fire. Så bare jeg klarer å holde den treeren, så blir jeg fornøyd. Det blir på en måte som jeg har fått seks.

Vår forteller at elevene ikke bør stille for høye krav til seg selv. En god karakter er den karakteren eleven selv er fornøyd med, ut i fra det målet hun/han har satt seg. Selv mener Vår at hun aldri har vært noe god i matematikk, verken på barne- eller ungdomsskolen. Hun setter seg et mål ut fra sine behov, og forteller at hun er fornøyd med å få en treer i matematikk.

7.4.2 Hvilken type oppgaver Vår foretrekker

54 I: Hvilken type oppgaver foretrekker du å arbeide med?

55 V: Jeg foretrekker helst å arbeide med veldig enkle ting. Pluss og minus og litt sånn. Det er noe geometri jeg skjønner, med søyler og sånn. Sånn som nå så har vi jo grafer og funksjoner. Og det skjønner jeg faktisk, og det er gøy å jobbe med, for jeg føler at jeg får det til. Det er liksom ikke bare å sitte å regne, men du kan sitte å tegne ting i boka også. Det synes jeg egentlig er ganske bra.

56 I: Liker du utfordrende oppgaver?

57 V: Ja, eller jeg liker oppgaver hvis jeg kan jobbe litt med dem, men at jeg klare å skjønne dem til slutt. At det ikke blir for vanskelige igjen. For da blir jeg bare irritert på meg selv, fordi jeg ikke får det til. Men jeg vil ikke ha for lette oppgaver igjen, for da får jeg en følelse av at jeg må lære meg noe mer etterpå. At jeg ikke fikk nok i den oppgaven. Men når vi begynner med veldig, veldig vanskelige oppgaver så vil jeg at vi skal gå tilbake et hakk av og til.

Vår forteller at hun liker å arbeide med enkle ting, det vil si ting hun forstår og får til. Likevel vil hun ikke ha for lette oppgaver heller, for da får hun en følelse av å måtte lære seg noe mer etterpå. Hun forteller videre at hun ikke får nok i slike oppgaver. Blir oppgavene derimot veldig vanskelige vil hun av og til at de skal gå tilbake et hakk.

7.4.3 Hvordan Vår mener at hun lærer best

På spørsmål om hvordan Vår mener at hun lærer best vektlegger hun de metodene som hun mener fremmer forståelse:

77 V: Ja jeg kan jo kommentere den om at vi gjør eksperimenter og praktiske forsøk. Fordi jeg syns det er veldig viktig at vi ikke bare sitter og skriver ting i en bok, men at vi faktisk prøver ut tingene. For da kan det være mye lettere for folk å skjønne dem. Og det er jo egentlig veldig viktig at vi kan bruke den matten vi lærer på ungdomsskolen i praksis. Selv om det kanskje er teorimatte[15]. For selv om det er en teori, så kan det være så likt virkeligheten at du kan bruke det i praksis. Og jeg synes det er en veldig bra måte å lære oss ting på. Særlig på sånn sannsynlighet og sånn. Da hadde vi et eksperiment med at vi skulle skyte strikk og si sånn cirka hvor langt det gikk først. Og så finne ut hvor langt det gikk på de ulike gangene og finne ut sannsynligheten.

[15] Vår snakker flere ganger under intervjuet om teorimatte og praksismatte. Når Vår forklarer hva hun mener med de to henviser hun til videregående og valget de får der.

Det var egentlig veldig lærerikt. For da skjønner du mer hvordan sannsynlighet er bygd opp på en måte. At du må sette deg slik, kanskje på den. Etter hvert som du kommer videre må du regne deg fram til det ved at du må ha de samme forsøkene om og om igjen. Og til slutt så finner du ut sannsynligheten.

Vår forteller at hun lærer best ved å gjøre eksperimenter og praktiske forsøk fordi det er viktig å prøve ut tingene. Det kan gjøre det lettere å forstå de. Hun synes det er viktig at de kan bruke matematikken de lærer på ungdomsskolen i praksis. Slik jeg vurderer det, snakker vår her om Forståelse og regneferdigheter når hun snakker om forståelse. Det med Forståelse mener jeg kommer fram spesielt i eksempelet Vår gir, når hun sier at hun skjønner hvordan sannsynlighet er bygd opp. Regneferdigheter kommer for eksempel fram i det at hun kan ”bruke det i praksis”.

Vår velger også ut lappen ” jeg snakker og diskuterer med medelever” som en metode der hun mener at hun lærer best:

78 V: Også at vi snakker og diskuterer litt. Det er jo egentlig veldig viktig for at vi skal skjønne og lære oss de tingene som vi virkelig trenger videre. Og at vi istedenfor at læreren forteller oss ting, så kan vi faktisk sette oss ned og forsøke å lære andre det vi har forstått. Selv om vi kanskje har forstått det feil, så kan vi i hvert fall prøve oss fram. For det er jo sånn vi lærer, vi lærer av feilene våre. Men selvfølgelig, så er det veldig viktig for meg i hvert fall at jeg sier ting til meg selv. At jeg når jeg sitter og jobber forsøker å forklare det til meg selv: hvorfor skal jeg gjøre det sånn, og hvorfor skal jeg gjøre det sånn?

Hun forklarer at det å snakke og diskutere er viktig for at elevene skal forstå og lære seg matematikken. Istedenfor at læreren forteller elevene det, så kan de selv forsøke å lære hverandre det de har forstått. Det gjør ikke noe om elevene ikke har forstått det helt. Gjør de en feil, vil de lære av det. Hun forteller at hun sier og forklarer ting til seg selv også. Vår velger i tillegg ut to lapper som hun mener går ut på det samme, henholdsvis at læreren forklarer og viser løsningene, samt at vi studerer og leter etter system:

79 V: Også har vi det med at læreren forklarer metodene og viser løsningene, og at vi studerer og leter etter system. Det er jo egentlig det samme. Og det er jo for oss, for meg i hvert fall, så er det egentlig veldig bra når jeg vet at hvis jeg ikke skjønner det hundre prosent så viser læreren meg

det. Hun hjelper alle sammen med å finne et mønster til at alt blir som det er. Og at læreren gir meg hint hvis jeg sitter fast ordentlig. Jeg synes det er viktig at læreren ikke bare går etter det høyeste behovet, men og de laveste. Selv om det er små ting som egentlig er ganske enkelt, at dem går igjennom det, for at alle skal forstå det ordentlig.

Hvis Vår ikke forstår noe helt fullstendig, så er det bra at læreren kan forklare hun det nærmere. Læreren hjelper alle til i finne et mønster og gi hint hvis hun sitter ordentlig fast.

7.4.4 Hvordan Vår vektlegger forståelse

Vår gir uttrykk for at forståelse er viktig i matematikk. Hun forklarer at det er viktig for at du skal kunne bruke matematikken:

87 I: Er det viktig å forstå matematikken?

88 V: Ja det er jo viktig at du forstår det. Du må jo forstå det du holder på med for at du skal kunne bruke det. Så du må forstå hva meningen med det og det er. Du må forstå hva meningen med pluss og minus er. Særlig på teori så må du forstå det. Du trenger ikke å forstå alt i praksis. Men du må forstå hvorfor deling er deling og ganging er ganging. Bare du klarer å bruke det igjen, for det er en helt annen mattetype. Teorimatte er veldig sånn at du må skjønne det. Da må du virkelig kunne teorien for å sette deg å skrive ned på ark.

[…]

105 I: Synes du at matematikken er mer om å forstå det du arbeider med, eller er det bare å huske ting utenat?

106 V: Jeg synes at det er viktig at jeg forstår det, og heller trenger en regelbok. For å huske alt sammen, men at du kan si til deg selv at det her forstår jeg, og det her klarer jeg å løse. Det synes jeg er det viktigste egentlig. For da blir du mer fornøyd med deg selv, for du bare forstår det. For hvis du bare husker det, så kan du bli usikker igjen. Og da kan du bli sur på deg selv for at du blir usikker. Så ja, det viktigste syns jeg er å forstå det. Og at du er fornøyd hvis du heller ikke forstår det, bare husker det. Du bør også være fornøyd med det. Men det beste er hvis du forstår det.

Når det gjelder forståelse i forhold til det å huske ting utenat i matematikken, forteller Vår at det er best hvis du forstår det. Forstår du det, vil du å bli mer fornøyd med deg selv. Hvis du bare husker det, kan du bli usikker. Likevel mener hun at du kan være fornøyd hvis du bare husker det og ikke forstår det. Slik jeg tolker intervjudataene, er hun her inne på Forståelse når hun snakker om forståelse.

7.4.5 Vår om å forstå en teori

I løpet av intervjuet fikk Vår spørsmål om hva hun legger i å forstå en teori:

40 I: Ok. Ja så hvis læreren spør deg om du forstår en teori, og du svarer ja, hva mener du da?

41 V: Jeg svarer ikke ja hvis jeg ikke vet det.

42 I: Men hvis du svarer ja.

43 V: Hvis jeg svarer ja så føler jeg at jeg har skjønt det. Men det er jo selvfølgelig ting som, inni de tingene hun forklarte, som er litt fjernt for meg. Og da spør jeg heller om jeg kan få hjelp. Men hvis jeg skjønner det sånn noenlunde, så sier jeg jo ja. For da har jeg skjønt prinsippet. Så få jeg heller prøve meg fram til å skjønne hvordan man gjør det.

44 I: Hva legger du i det at du skjønner prinsippet? Hva mener du med det?

45 V: Da mener jeg at jeg skjønner hvordan man skal bygge det opp. Jeg skjønner hvordan jeg skal gå fram for å løse stykket, men ikke hvordan man løser stykket enda. For da kan det være at jeg sitter fast og gjør feil når jeg løser det.

Selv om Vår sier at hun forstår en teori, så kan det være noe av det som er litt fjernt for henne. Hvis hun har skjønt det sånn noenlunde, har hun skjønt prinsippet, men må prøve seg fram til å forstå hvordan hun skal gjøre det. Slik jeg vurderer det, er Vår her inne på en sammensatt forestilling om forståelse, som er preget av både Forståelse og regneferdigheter.

7.4.6 Vår om å forstå en oppgave

Jeg spurte og Vår om hva hun legger i å forstå en oppgave i matematikk. Det gjør hun når hun kan klare å løse den. Hun trenger nesten ikke se i regelboka:

64 I: Hvis du sier om en oppgave, at den forstår jeg, hva er det du legger i det?

65 V: Hvis jeg forstår den så skal jeg klare å løse den. Da skal jeg skjønne det slik at jeg kan, for eksempel om vi kan ha regelbok, så trenger jeg nesten ikke se i regelboka for å skjønne det. Det er bare hvis jeg ikke husker et ledd. Ellers så kan jeg alt, og jeg kan klare å løse det uten problemer. Da har jeg virkelig skjønt det.

Det er min vurdering at når Vår sier hun forstår en oppgave, så er hun her inne på regneferdigheter.

7.4.7 Vårs forestilling om forståelse i matematikk

Analysene viser at Vår sin forestilling om forståelse i matematikk har flere sider ved seg. Vår gir uttrykk for at hun synes at Forståelse er viktig i matematikk (utsagn 88 og 106). For eksempel for at du skal kunne bruke matematikken. Jeg tolker intervjudataene som at Vår har en forestilling om forståelse i matematikk som er sterkt preget av Forståelse (utsagn 43, 77, 88 og 106). I løpet av intervjuet svarer Vår både på hva hun mener det vil si å forstå en teori og en oppgave. Når Vår sier at hun forstår en teori forklarer hun at hun har skjønt prinsippet, men ikke helt hvordan man skal gjøre det (utsagn 43). Slik jeg ser det mener hun at hun forstår begrepet og regelen, med andre ord har Forståelse, men trenger å jobbe mer med strategisk kompetanse og regneferdigheter. Når hun forteller at hun skjønner hvordan man skal bygge opp et stykke, men ikke hvordan hun skal løse det, mener jeg kun er en delvis strategisk kompetanse. Hvis hun forstår en oppgave så skal hun klare å løse den, uten å anvende seg så mye av regelboka (utsagn 65). Det er min oppfatning at Vår sin forestilling om å forstå en oppgave innebærer at hun kan løse den. Hun er da innom regneferdigheter i henhold til instrumentell forståelse. I tillegg mener jeg at hun kan være inne på regneferdigheter når hun forsteller om hva det vil si å forstå en teori (utsagn 43 og 45)

7.5 Intervju med Åge

Åge er, etter min oppfatning, en elev som ikke gjør mye ut av seg i matematikktimene. I løpet av de timene jeg observerte klassen hans så han ut til å jobbe godt med faget. Arbeidsinnsatsen hans var hovedgrunnen til at jeg ønsket å intervjue han. Det måtte litt overtaling til for at han gikk med på å bli intervjuet. Da han fikk en forsikring om at deltakelsen var anonym, sa han derimot straks ja.

7.5.1 Åge om hva matematikk handler om

Dataene fra intervjuet indikerer at Åge mener at matematikken i hovedsak handler om tall og å vise utregninger:

86 […] Ja jeg liker ikke så mye at det er sånn mye lange tekster i matematikk.

87 I: Nei?

88 Å: Nei, jeg liker mer å på en måte løse oppgaver. Istedenfor alt for lange oppgaver.

89 I: Hvis du leser en matematisk tekst, hva er det som skjer da, eller hvorfor liker du det ikke?

90 Å: Nei, jeg mener at matematikk er mer tall og sånn. Det blir litt kjedelig med lange tekster og. Det er ikke så artig liksom å holde på med.

[…]

172 I: Hva mener du at matematikk handler om?

173 Å: Matematikk handler om tall og å vise utregninger. Det er jo mye det som blir brukt i dagliglivet og. For eksempel hvis du skal bli snekker også skal du bygge, da må du bruke de praktiske. Det handler om å lære om matte.

Åge forteller at matematikken blir brukt i dagliglivet. Han gir et eksempel med hvis du skal bli snekker.

7.5.2 Hvordan Åge mener han lærer best

På spørsmål om hvordan han mener at han lærer best, ble det lagt ut lapper med mulige svar på bordet (se vedlegg 3). En av lappene Åge fremhever under intervjuet er "Jeg forklarer for andre":

105 I: Du valgte ut den at du forklarte for andre, hva er det som er fordelen med å forklare ting for andre?

106 Å: Ja hvis de ikke forstår det så er det lettere å få med når du forklarer rolig og sakte, liksom viser litt mer på tavla for andre elever som ikke skjønner da.

[…]

109 I: Men er det en fordel for deg å forklare for andre?

110 Å: Ja, for eksempel hvis du skal opp til eksamen da. Da må du jo på en måte forklare for de dere, læreren og.

Åge forteller at hvis de (andre elever) ikke forstår det, så er det lettere for de å få det med seg når han forklarer sakte og rolig. Personlig forklarer Åge at det er en fordel for han å forklare til andre hvis han skal opp til eksamen.

Det var en lapp Åge fortalte at han absolutt ikke hadde valgt ut til å beskrive hvordan han lærer best:

121 I: Har du lyst til å kommentere noen av de andre?

122 Å: Ja den der tror jeg ikke at jeg liker helt, å finne metodene og løsningene selv. Eller å finne løsningene selv, men hvordan du gjør metoden når du ikke kan det, er jo litt vanskelig. Så du bør jo liksom ha fått gjennomgått det først.

Åge forteller at han kan finne løsningene selv, men at det er vanskelig å finne ut hvordan du gjør metoden når du ikke kan det. Han mener at de bør ha fått det gjennomgått først.

7.5.3 Åge om å forstå et tema eller en metode

Et av spørsmålene under intervjuet handlet om hvordan Åge går fram for å forstå en ny teori i matematikk. Åge svarte da:

28 Å: Ja jeg prøver å lære meg det hvis jeg ikke skjønner det læreren har prøvd å lært. Så da må jeg jo lese i boka for å finne fram. Også får jeg jo hjelp av foreldrene mine når jeg er hjemme.

29 I: Hvis læreren for eksempel spør deg om du forstår det ho har gjennomgått, også svarer du ja, hva er det du legger i det at du har forstått?

30 Å: Det er jo at jeg har skjønt, klarer liksom å løse de fleste oppgavene i det temaet.

31 I: Ja?

32 Å: Ja, også at jeg klarer å mestre.

Åge prøver å lære seg det selv hvis han ikke skjønner det læreren har prøvd å lært han. Da leser han i boka. Når han er hjemme får han hjelp av foreldrene sine. Dataene indikerer at Åge mener at han forstår temaet læreren har gjennomgått når han kan løse de fleste oppgavene som tilhører det temaet. I tillegg sier Åge at han forstår et tema om han klarer å mestre. En del senere i intervjuet kommer Åge mer inn på hva han mener med å mestre:

136 I: Det neste spørsmålet er når mener du at du lykkes i matematikk?

137 Å: Det er når jeg mestrer temaet, forstår hvordan metoden er og hvordan det skal gjøres. Og får bra karakterer på prøvene i det temaet, liksom klarer, da føler jeg at jeg lykkes.

138 I: Når du sier at du forstår metoden, hva legger du i det?

139 Å: For eksempel at du forstår hvordan du skal gjøre det liksom.

Åge mestrer altså temaet når han forstår hvordan metoden er og hvordan den skal gjøres. Med å forstå metoden mener han at du forstår hvordan du skal gjøre det. Det mener jeg er et uttrykk for instrumentell forståelse.

7.5.4 Hvilken type oppgaver Åge foretrekker

Åge forteller at han liker best å gjøre oppgaver av middels vanskelighetsgrad. Da får han litt utfordringer, men samtidig så kan han det. Han sier at det er lurt å gjøre vanskelige oppgaver, da klarer han å forstå litt mer. Å gjøre mange lette oppgave mener han ikke er lurt, fordi da lærer han ikke noe nytt:

59 I: Ja, du snakket jo om oppgaver. Hvilken type oppgaver foretrekker du å arbeide med?

60 Å: Ja, hva mener du?

61 I: Nei jeg tenker, liker du for eksempel utfordrende oppgaver eller lette oppgaver eller?

62 Å: Ja sånn middels liksom. Eller det er jo lurt å ha litt vanskelige, så du klarer å forstå litt mer. I tilfelle du får det på tentamen eller eksamen eller noe. Men ja jeg liker jo best de middels ja, så får jeg litt utfordringer og med det samme så kan jeg det.

[…]

65 I: Hva tenker du om å gjøre veldig mange lette oppgaver?

66 Å: Det er jo ikke så lurt siden hvis de er lette så kan du det jo fra før av og da lærer du ikke så mye nytt da.

7.5.5 Hvordan Åge vektlegger forståelse

Åge fremhever forståelse flere ganger i løpet av intervjuet. For eksempel er en god matematikktime kjennetegnet med at han forstår det de har gjennomgått felles i klassen og at han har lært noe:

37 I: Hva synes du kjennetegner en god time?

38 Å: Ja det er jo at jeg klarer å forstå det vi har gjennomgått og at, det er jo på en måte at jeg har lært noe.

144 I: Ja. Hva mener du det vil si å kunne matematikk?

145 Å: Ja det er jo på en måte at du forstår det og klarer å si det til andre og. Ja, jeg har ikke så mye annet enn det.

[…]

150 I: Ja. Hva mener du skal til for å få en god karakter i matematikk?

151 Å: Ja det er jo å være mye aktiv i timene. Og gjøre leksene. Og få gode resultater på prøver. Forstå temaene.

[…]

162 I: Ja. Hvis du tenker på en elev som du mener er god i matematikk. Kan du beskrive hva det er du mener gjør at den eleven er god, eller flink i matematikk?

163 Å: Ja det er jo kanskje at ho eller han kan de fleste temaene, mer enn andre elever. Og forstår mer og har lært mer liksom. Og kan det, og klarer å forklare på en måte nesten alt da.

Forståelse inngår ifølge Åge i det å kunne matematikk. Samtidig forteller Åge at en skal klare å si matematikken til andre. Forståelse blir også nevnt som en faktor for å få en god karakter. I tillegg til forståelse, forteller Åge at det å være aktiv, gjøre leksene og få gode resultater på prøvene, er det som skal til for å få en god karakter. Den gode eleven forstår mer enn andre elever. Han er også her inne på det å kunne forklare matematikk. Hva han mener med forståelse her, mener jeg er litt vanskelig å vurdere. Likevel forteller han om at du skal kunne forklare, eller si, matematikk til andre. Dermed er det min vurdering at han kan være inne på Forståelse.

7.5.6 Åges forestillinger om forståelse i matematikk

Jeg vil nå forsøke å danne et bilde av hvilke forestillinger Åge har om forståelse i matematikk ut fra hans utsagn omkring ulike forhold i matematikk. Først vil jeg påpeke at dataene indikerer at Åge gir uttrykk at forståelse er viktig i matematikk, både i forhold til det å kunne matematikk, lykkes i faget og for å være en god matematikkelev (utsagn 137, 145). I tillegg er det en forutsetning for å få en god karakter i faget og for å være en god matematikkelev (utsagn 151, 163). Slik jeg tolker intervjudataene, kan han her være inne på Forståelse. Det mener jeg i tillegg at han er når han sier at vanskelige oppgaver gir litt mer forståelse (utsagn 62). Jeg tolker intervjudataene dit hen at Åge på direkte spørsmål om forståelse heller mer mot instrumentell forståelse enn på de indirekte. Åge hevder for eksempel at han forstår et tema når han kan gjøre de fleste oppgavene i det temaet (utsagn 30). Oppgavene Åge referer til antar jeg er de tilhørende oppgavene i læreboka. Som nevnt i beskrivelsen av undervisningskonteksten jobbet elevene med oppgaver fra læreboka de timene jeg observerte dem. Jeg mener han her er inne på regneferdigheter, da spesielt den instrumentelle biten. Det er min vurdering at Åge også er inne på den typen forståelse når han forteller hva han mener med å forstå en metode (utsagn 139).

7.6 Intervju med Tor

Tor er en elev som er litt over gjennomsnittet god i matematikk. I de timene jeg observerte han var det ikke alltid at arbeidsinnsatsen var på topp. Etter hva jeg observerte har Tor mange venner i klassen, og ser ut til å trives på skolen.

7.6.1 Tors beskrivelse av matematikken og undervisningen

Tor forteller at for han er matematikk løsning på oppgaver:

195 I: Ja, hva er matematikk for deg?

196 T: Løsninger på oppgaver.

[…]

207 I: Ja. Synes du at matematikk er mer om å forstå det du arbeider med eller er det å huske ting utenat?

208 T: Litt begge deler.

209 I: Ja?

210 T: Man må forstå det for å, eller du må ikke, men det er best å forstå det.

Tor forteller som sagt at matematikk for han er løsning på oppgaver. Det er ikke nødvendig å forstå det du arbeider med, men det er best. Hvordan de arbeider med nye temaer eller teori i matematikk beskriver han på følgende måte:

25 I: Hvordan arbeider dere med nye temaer eller teori i matematikk?

26 T: Det starter med at læreren går gjennom det på tavla. Også får vi jobbe med det på slutten av timen. Og hvis det er noe vi ikke forstår så kommer ho og hjelper oss. Så får vi lekse til neste gang.

[…]

29 I: Hva tenker du om denne måten å jobbe på?

30 T: Jeg synes det er veldig bra at ho gjennomgår det på tavla for det er ganske mye av matten som er vanskelig å forstå av seg selv. I hvert fall i den boka der, som vi bruker.

Tors beskrivelse indikerer at læreren går gjennom den nye teorien på tavla og deretter får elevene jobbe med det på slutten av timen. Han fikk også et spørsmål om hva han synes kjennetegner en god time. Da nevner han tre ting; at de kommer fort i gang, at det er arbeidsro og at de forstår det de jobber med:

49 I: Hva synes du kjennetegner en god time?

50 T: At vi kommer fort i gang og at det er arbeidsro og at vi forstår det vi jobber med.

7.6.2 Tor om å forstå en teori eller et tema:

Før jeg presenterer Tor forklaring på hvordan han går frem for å forstå en teori eller et tema, mener jeg det kan være relevant å se på hvordan han forteller at han går frem for å forstå det:

35 I: Hvordan går du fram for å forstå et nytt tema eller en teori?

36 T: Går fram?

37 I: Hva er det du gjør for at du skal forstå det?

38 T: Nei jeg hører jo på hva læreren sier.

Tor forteller at han hører på hva læreren sier for at han skal forstå det. Hva han legger i å forstå forklarer han på følgende måte:

45 I: Hvis du sier om noe nytt tema, eller en ny teori, at den forstår jeg. Hva legger du i det at du forstår?

46 T: At jeg klarer å gjøre oppgavene som ho har lagt opp til at vi skal gjøre. I forhold til nivået. Men det er jo sånn i starten av kapitlet da gjør vi sånn litt obligatoriske oppgaver som vi skal gjøre. Også kommet det sånn blå, gul eller rød.

47 I: Fargevelger?

48 T: Ja. Jeg synes nå jeg forstår det når jeg gjør gul.

Tor sier at han forstår et tema eller en teori når han klarer å gjøre de oppgavene læreren har lagt opp til at elevene skal gjøre. Selv forstår han det når han gjør oppgaver tilpasset sitt nivå, som er de ”gule oppgavene” på fargevelgeren.

7.6.3 Hvilken type oppgaver Tor foretrekker

63 I: Du har jo for så vidt vært litt inne på det da, men hvilke type oppgaver foretrekker du å arbeide med?

64 T: Jeg synes noen ganger, noen kapitler mestrer man jo mer enn andre. Så de man mestrer godt selv de liker jeg å jobbe med selv, for da går det fortere. Men de man trenger litt hjelp til så synes jeg det er greit å jobbe med noen som er gode i matematikk.

65 I: Hva er fordelen med å sette seg med noen som er gode?

66 T: At de kan hjelpe med hvis jeg ikke forstår det. Så slipper jeg å vente så lenge på at læreren skal komme å hjelpe meg. For det tar jo som oftest litt tid. Når det bare er en lærer.

[…]

79 I: Liker du å gjøre mange oppgaver på samme nivå, eller liker du at det er litt sånn økende vanskelighetsgrad?

80 T: Som oftest i boka så er det økende vanskelighetsgrad. At det kommer lettere i starten og vanskeligere. Og det er jo smart da, for da får du utfordret deg mer utover. I tillegg til at du får forklart hvordan du gjør det tidligere i boka. Så det er bra.

81 I: Hva er det som gjør at du føler at du blir utfordret i de oppgavene?

82 T: Nei hvis man sitter fast, så tenker man litt, også forstår man det. Så det er ganske bra.

Tor får spørsmål om hvilke type oppgaver han foretrekker å arbeide med. Da kommer han inn på hvordan han liker å jobbe med oppgaver. Hvis det er oppgaver han mestrer godt selv, liker han å jobbe alene fordi da går det fortere. Om det er oppgaver han trenger litt hjelp til, syns han det er greit å jobbe med noen som er gode i matematikk. De gode elevene kan hjelpe han hvis han ikke forstår det. Videre forteller Tor at det kan være smart med økende vanskelighetsgrad på oppgavene. Da mener han at du får utfordret deg mer. I tillegg får du en forklaring på hvordan du gjør det tidligere i boka. Det som gjør at Tor blir utfordret i en oppgave er at han må tenke litt, også forstår han det.

7.6.4 Tor om å forstå en oppgave

Tor har et ganske kort svar på hva det vil si å forstå en oppgave, da har han fått den til og tror den er rett:

87 I: Hvis du sier om en oppgave at den forstår jeg, hva mener du med det da?

88 T: At jeg har fått den til, at jeg tror det er rett.

7.6.5 Hvordan Tor mener han lærer best

På spørsmålet om hvordan Tor mener at han lærte best, ble det lagt ut lapper på bordet Med ulike alternativer. Tor velger blant annet ut lappen som handler om at læreren gir han hint slik at han kan komme seg videre selv:

101 I: Hvis vi tar denne her først, at læreren gir deg hint slik at du kan komme deg videre selv. Hva er det som gjør at du har valgt den?

102 T: Nei du lærer jo av det da. Hvis du sitter fast på en oppgave så gir ho deg ikke svaret men ho gir deg et hint slik at du kan tenke deg til løsningen selv.

Tor lærer noe av at læreren gir han hint slik at han kan komme seg videre selv. Om Tor sitter fast på en oppgave, så gir ikke læreren han svaret, men hint slik at han kan tenke seg til løsningen selv. Videre hevder Tor at han også lærer best når han jobber alene:

107 I: Hva er det som er fordelen med å jobbe alene da?

108 T: Du får til å konsentrere deg, og når du konsentrerer deg så husker du det som oftest lettere når du kommer til det samme kapitlet senere. Du husker bedre når du er konsentrert. Du gjør ikke bare oppgaven, men du tar til deg informasjon.

109 I: Hva er det du pleier å gjøre når du arbeider alene?

110 T: Nei jeg løser nå bare oppgaver.

Når Tor jobber alene med oppgaver, får han til å konsentrere seg. Da husker han det som oftest lettere. Han forteller at han ikke bare gjør oppgaven, men tar til seg informasjon. En annen lapp Tor trekker fram går på det med å forklare for andre:

117 I: Når du forklarer for andre?

118 T: Da lærer du å lære bort. Også lærer du noe selv.

119 I: Ja du lærer noe selv?

120 T: Ja, repeterer på en måte, blir det som.

Gjennom å forklare for andre forteller Tor at han lærer å lære bort, og lærer samtidig noe selv. Det blir som en repetisjon.

7.6.6 Tor om hva som skal til for å lykkes i matematikk

Tor har et kort svar på når han synes at han lykkes i matematikk. Det er når han får et bra resultat på en prøve:

159 I: Da var neste spørsmål, når synes du at du lykkes i matematikk?
160 T: Når jeg får et bra resultat på en prøve.

En nesten like kort beskrivelse har han av den gode matematikkeleven:

179 I: Hvis du tenker på en elev som du mener er god i matematikk, kan du beskrive hva det er du mener som gjør at den eleven er god?
180 T: Alltid rett.
181 I: Den har alltid rett?
182 T: Ja. Den er ganske god til regning og kan det meste.
183 I: Hvordan får han til å kunne alt da?
184 T: Nei jeg vet ikke.

En god matematikkelev, forteller Tor, er en som alltid har rett. Det er ganske god til regning og kan det meste. Hvordan hun/han får til å kunne alt sier Tor at han ikke vet.

7.6.7 Tors forestillinger om forståelse i matematikk

Jeg har nå presentert utsagn som jeg mener kan være til hjelp for å danne et bilde av hvilke forestillinger Tor har om forståelse i matematikk. Det er ingen enkel oppgave, fordi jeg ikke klarer å få han til å begrunne alle utsagnene sine like godt under intervjuet. Tor forteller at matematikk er løsninger på oppgaver (utsagn 196). Det som kjennetegner en god time for Tor er blant annet at han forstår det han jobber med (utsagn 50). Tor forklarer at for at han skal forstå noe i matematikk så får han læreren til å forklare det for seg (utsagn 38). Hva Tor legger i å forstå et tema eller en teori forteller han at går på at han kan gjøre oppgavene som hører til temaet eller teorien (utsagn 46). Tor mener at han forstår temaet når han får gjøre oppgaver tilpasset til sitt nivå (utsagn 46, 48). En oppgave forstår han når han har fått den til og tror den er rett (utsagn 88). Det er min vurdering at Tors har en instrumentell forestilling om forståelse når det gjelder å forstå et tema, en teori og en oppgave (utsagn 46, 48 og 88). Fordi han tror oppgaven er rett, ikke vet det, mener jeg at vurderingsbiten av regneferdigheter mangler. Generelt gjennom intervjuet tolker jeg intervjudataene som at Tor vektlegger den instrumentelle delen i forhold til den relasjonelle delen av forståelse (spesielt utsagn 108, 160, 182, 196). Kun et sted i intervjuet nevner han at forståelse er viktig, og det er etter at jeg har stilt spørsmål om matematikk er mer om å forstå det du arbeider med eller å huske ting utenat (utsagn 207). Han svarer da at du ikke må forstå det, men det er best. Selv når han forteller at han er positiv til økende vanskelighetsgrad på oppgaver (utsagn 80), mener jeg at han snakker om instrumentell forståelse. Jeg tolker jeg intervjudataene som om han mener at det er en fordel for å forstå hvordan han skal gjøre de tidligere oppgavene.

8 Diskusjon

I kapittelet vil jeg se nærmere på hva resultatene fra studien sier. Hvilke forestillinger kan elever ha om forståelse i matematikk? Fordi det ikke finnes empirisk forskning om elevers forestillinger om forståelse i matematikk, har jeg ingen mulighet til å koble resultatene opp mot tidligere forskning. Det finnes derimot tidligere studier som viser at det er en sammenheng mellom elevenes forestillinger og den undervisningskonteksten de opplever. Jeg vil diskutere om det er tilfellet for min studie også. Kan arbeidshypotesen min bekreftes ut fra resultatene? Videre vil jeg diskutere hvordan analyseredskapet fungerte i studien. I tilegg vil jeg se kritisk på ulike forhold av metodologisk art ved studien. Er det noe som kan ha påvirket resultatene? Til slutt vil jeg se litt nærmere på veien videre og om det kan finnes eventuelle nye forskningsspørsmål.

Resultatene fra studien viser at elevene jeg intervjuet har forskjellige forestillinger om forståelse i matematikk. I studien har jeg analysert transkripsjonene fra intervjuer med fire elever. Jeg vil nå kort gi en kort presentasjon av resultatene fra analysene av hver enkelt elev. Åse har, slik jeg vurderer datamaterialet, helt klart en forstilling om forståelse i matematikk som samsvarer med relasjonell forståelse. I løpet av intervjuet tolker jeg det som om hun er inne på alle de fire trådene i relasjonell forståelse, henholdsvis Forståelse, regneferdigheter, strategisk kompetanse og resonnering. Av alle de fire trådene mener jeg at hun vektlegger resonnering mest, fordi hun ofte nevner beviser som en viktig del av forståelse i matematikk. Den andre jenta jeg intervjuet var Vår. Slik jeg tolker intervjudataene, vektlegger også hun relasjonell forståelse. Spesielt mener jeg at er Vår inne på Forståelsestråden i relasjonell forståelse. Hun er i tillegg innom regneferdigheter, men i liten grad. Åge og Tor er de to guttene i studien. Mine tolkninger av datamateriellet er at begge er inne på en forestilling om forståelse i matematikk som samsvarer med instrumentell forståelse, men i ulik grad. Tor mener jeg at er den som klarest vektlegger instrumentell forståelse når det kommer til hvilke forestillinger han har om forståelse i matematikk. I løpet av intervjuet mener jeg at han fokuserer på den instrumentelle delen av regneferdigheter. Når det kommer til intervjudataene jeg fikk fra intervjuet med Åge, er det min vurdering at han er inne på instrumentell forståelse på de mer direkte spørsmålene om forståelse. Da tenker jeg på spørsmål som hva det vil si å forstå en oppgave. På de mer indirekte spørsmålene, som for eksempel når han forteller om vanskelige oppgaver, mener jeg at han snakker om Forståelse når han omtaler forståelse.

Datamaterialet samlet inn i studien indikerer at læreren i hovedsak gjennomfører en tradisjonell undervisning. Med tradisjonell undervisning mener jeg en lærebok- og oppgavestyrt undervisning (Wæge, 2007). Det er en undervisningsform som Alseth m.fl. (2003) sin studie viser at er dominerende i den norske skolen. Hovedkilden for data om undervisningskonteksten ble samlet inn ved hjelp av observasjon. Elevene ble under intervjuene bedt om å beskrive en helt vanlig matematikktime (se vedlegg 2). En sammenligning av elevenes beskrivelser av undervisningen og mine erfaringer fra observasjonen, indikerer at jeg opplevde en forholdsvis typisk undervisningssituasjon i de timene jeg observerte. Noen av elevene fortalte at de hadde jobbet med det de kalte praktiske oppgaver ved et par anledninger, men vanligvis opplevde elevene det jeg vil kalle tradisjonell undervisning. I observasjonstimene så jeg hvordan elevene hele tiden ble bedt om å begrunne svarene og påstandene sine av læreren. En av elevene ble bedt om å komme fram til tavla og vise hvorfor en regel fungerte.

I følge Kloosterman (1996) og Yackel og Rasmussen (2002) er det en sammenheng mellom elevenes forestillinger og den undervisningskonteksten de befinner seg i. Arbeidshypotesen i studien er at elevenes forestillinger om forståelse i matematikk er kontekstavhengige. Gjennom min studie mener jeg at jeg ikke har nok beviser for verken å bekrefte eller avkrefte arbeidshypotesen. Datamaterialet indikerer på en side at jentenes forestillinger om forståelse i matematikk kan ha blitt påvirket av det at læreren ber elevene om å argumentere for påstandene sine. Det er min vurdering at for å begrunne svarene sine, må elevene som et minimum ha Forståelse. Vår har en forestilling om forståelse i matematikk, slik jeg vurderer det, som er sterkt preget av Forståelse. Åse, som ofte forklarte matematisk innhold for andre elever, er i tillegg inne på strategisk kompetanse og resonnering ved forståelse i matematikk. Derfor kan det være en sammenheng mellom den undervisningskonteksten hun opplever, som går ut på at hun jobber mye med stoffet på egenhånd og ofte forklarer ting for andre, og hennes forestillinger om forståelse i matematikk. De to guttene har på en annen side en forestilling om forståelse i matematikk som er mer preget av instrumentell forståelse.

I studien har jeg kun anvendt analyseredskapet på datamateriell fra fire intervjuer. Det er min oppfatning at analyseredskapet har fungert godt for å beskrive ulike sider ved elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Resultatene fra studien viser at elever kan ha ulike forestillinger om forståelse i matematikk. Jeg mener at de fire trådene i relasjonell og instrumentell forståelse har hjulpet til å få fram nyanser ved elevenes forestillinger. Ved å vise til de utsagn i intervjuene som jeg gjør mine tolkninger fra, i tillegg til en grundig presentasjon av analyseverktøyet, håper jeg å ha lagt det til rette for at leseren kan vurdere gyldigheten av slutningene mine.

Etter å ha sett nærmere på hva resultatene fra studien indikerer, bør min egen innsats som intervjuer diskuteres. Jeg har på langt nær nok erfaring til å kunne kalle meg selv en god intervjuer. Riktignok har jeg før masterstudien gjennomført et pilotintervju, men det viste seg ikke å være nok øvelse for mitt vedkommende. Mertens (2005) skriver om at en av utfordringene ved å anvende intervju som metode er at intervjueren ubevisst kan påvirke intervjupersonenes svar. Det kan jeg ikke se bort fra at jeg har gjort i min studie. Som jeg har nevnt tidligere, kom jeg under intervjuet i skade for å stille lukkede og ledende spørsmål, det gjaldt spesielt oppfølgingsspørsmålene. Et eksempel fra intervjuet med Åge er da jeg prøver å få han til å begrunne hva han mener med å forstå en metode. Transkripsjonen viser at jeg legger ordene i munnen på han:

138 I: Ja. Når du sier at du forstår metoden, hva legger du i det?
139 Å: Ja for eksempel at du forstår hvordan du skal gjøre det liksom.
140 I: Hvordan du skal utføre det?
141 Å: Ja utføre det og regne det ut.
142 I: Hvordan du skal bruke den metoden?
143 Å: Ja.

Et annet eksempel er fra intervjuet med Åse. Hun snakker om noen praktiske forsøk som de har hatt av og til:

35 I: Ja liker du de praktiske forsøkene?
36 Å: Ja, noen av dem er ganske artige. Det er greit å ha litt forandring og ikke bare sitte å gjøre det samme alltid.
37 I: Ja så det er kjekkest med forandringer? Eller syns du at du lærer det på en annen måte?
38 Å: Ja det og. Du skjønner det på en annen måte.
39 I: Det blir mer håndfast kanskje?
40 Å: Ja.

I stedet for å spørre Åse om hva hun mener med å skjønne det på en annen måte med egne ord, stiller jeg dessverre det ledende spørsmålet ”Det blir mer håndfast kanskje?”. Intervjudataene jeg fikk gjennom den typen spørsmål som jeg nå har gitt eksempel på har ikke blitt benyttet i analysen. Det er for stor fare for at jeg ved å stille ledende spørsmål har påvirket elevenes svar, og at det dermed ikke er elevenes forestillinger som kommer fram, men mine. De lukkede spørsmålene har heller ikke bidratt til noe i analysen fordi jeg kun fikk ja eller nei til svar. Samtidig kan mange lukkede spørsmål i tillegg virke ledende. Selv om jeg har sett vekk fra datamaterialet jeg samlet inn gjennom slike spørsmål, kan det hende at spørsmålene likevel har påvirket resten av intervjudataene. Det kan ha medført at det er en fare for at det er mine forestillinger jeg undersøker istedenfor elevenes. Ved at jeg har sett vekk fra elevenes svar på slike spørsmål, medfører det at jeg ved flere anledninger kun har svaret på hovedspørsmålet å forholde meg til. En nærmere forklaring på hva de mener, mangler med andre ord. Derfor er det også en fare for at jeg kan overtolke intervjudataene. Hadde jeg vært flinkere til å få elevene til å begrunne svarene sine uten å virke ledende, kan det hende jeg ville fått begrunnelser som ikke samsvarer med mine tolkninger. Jeg ønsker å minne leseren på at det er mine subjektive vurderinger som ligger til grunn for analysen. Gjennom å vise til utsagn jeg drar mine tolkninger fra, håper jeg å øke troverdigheten til studien. Da kan leseren selv gjøre seg opp en mening om hvorvidt hun/han er enig i analysene av datamateriellet.

Når det kommer til valget om ikke å spørre elevene direkte om hva forståelse i matematikk innebærer tror jeg det var et riktig valg. Lester (2002) mener at elevene ikke er like reflekterte over alle forestillingene sine i matematikk. Det tror jeg absolutt er tilfellet med forestillinger om forståelse i matematikk. Ifølge Kloosterman (1996) kan

det virke som om elever danner forestillinger om forhold som de ofte konfronteres med. Intervjudataene viser at elevene kan være reflekterte over hva det vil si å forstå mer konkrete ting, som for eksempel en oppgave eller en teori. Jeg mener at elevene gjennom skolegangen flere ganger skal ha blitt stilt spørsmål om hva det vil si å forstå en oppgave eller en teori. Dermed har de fått anledning til å reflektere over forestillingene sine omkring det. Det er min vurdering at de indirekte spørsmålene, spørsmål som omfattet andre matematikkrelaterte forestillinger, har vært med på å gjøre meg i stand til å danne et bedre bilde av elevenes forestillinger om forståelse. Jeg mener derfor at det å nærme seg elevenes forestillinger om forståelse på en indirekte måte har fungert godt. Enda bedre tror jeg spørsmålene hadde fungert om jeg hadde vært en bedre intervjuer og klart å få elevene til å begrunne svarene sine godt.
Det virket for meg som om guttene ikke var like reflekterte over sine matematikkrelaterte forestillinger som jentene var. Spesielt var det tydelig med de to intervjuene jeg med gutter som jeg valgte å ikke benytte i studien. Hva det eventuelt kan komme av er jeg ikke sikker på. Kanskje jentene tenker mer over flere av forestillingene sine i matematikk enn hva gutter gjør?

En annen faktort som kan ha hatt innvirkning på observasjonsdataene er min tilstedeværelse. Som observatør har jeg ingen garanti for at timen ikke ville vært annerledes om jeg ikke var tilstede (Robson, 2002). Likevel tror jeg ikke at elevene har blitt noe særlig påvirket av at jeg observerte dem. Det tør jeg å påstå fordi jeg har kjennskap til elevene fra før, jeg er ingen fremmed for dem. I den perioden jeg underviste dem skjedde det ofte at ulike personer var til stede og observerte undervisningen. Observasjon skal dermed ikke være noe ukjent fenomen for dem. Før jeg begynte datainnsamlingen var jeg mer redd for jeg som observatør skulle ha en påvirkning på læreren og hennes oppførsel. Fordi min oppfatning av undervisningen var såpass lik elevenes beskrivelse, tror jeg likevel at min observatørrolle ikke har påvirket læreren.

I en kvalitativ forskning er det naturlig å diskutere validiteten og reliabiliteten i studien. Validitet vil si at forskeren måler det som er relevant i sammenhengen, mens reliabilitet går på det at hun/han måler det på en pålitelig eller troverdig måte (Gunnarsson, 2002).

Når det gjelder validiteten til studien håper jeg at mine beskrivelser av datainnsamlingsmetodene, utvalget og analyseprosessen gir leseren anledning til å vurdere den indre validiteten i studien. Indre validitet går på i hvilken fra resultatene er gyldige for utvalget i studien (Gunnarsson, 2002). Når det gjelder deltakerkontroll i studien var det kun to av elevene som jeg presenterer som ønsket å lese gjennom intervjuet, henholdsvis Vår og Tor. Som nevnt tidligere, hadde de ikke noen kommentarer til transkripsjonene. Den ytre validiteten er i hvilken grad resultatene kan overføres til andre utvalg og situasjoner (Gunnarsson, 2002). Fordi min studie er en kvalitativ studie skal ikke jeg som forsker definere generaliserbarheten. Min oppgave i studien er å beskrive de ulike trinnene i studien og hvordan jeg har kommet fram til resultatene. Jeg håper at jeg har lykkes i det. Reliabiliteten ved studien bør som nevnt også diskuteres. Som jeg tidligere har vært inne på var ikke min evne til å gjøre intervju alltid like vellykket. For eksempel i det at jeg stilte ledende spørsmål og ikke fikk elevene til å begrunne svarene sine. Det skal sies at jeg heller ikke har mange erfaringer fra å gjøre observasjoner, men likevel ser det ut til at min oppfatning av undervisningen samsvarer med elevenes. Et annet forhold ved kvaliteten på forskeren er hvorvidt hun/han lar forforståelsen påvirke datamaterialet. Jeg mener selv at jeg ikke har latt arbeidshypotesen, det at jeg tror det kan være en sammenheng mellom elevenes forestillinger om forståelse og konteksten, påvirke studien min.

Jeg mener at analyseredskapet kan anvendes av lærere, forskere eller andre som ønsker å undersøke elevers forestillinger om forståelse i matematikk. Spørsmålene i intervjuguiden er tilpasset den teoretiske rammen og kan brukes for å samle inn data til eventuell analyse. Slik jeg vurderer det, er det viktig at læreren har kunnskaper om elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Det fordi elevenes forestillinger påvirker kvaliteten på undervisningen og læringen av matematikk (Goldin, et al., 2009). For å kartlegge sine elevers forestillinger om forståelse kan kanskje læreren anvende seg av mitt analyseredskap om hun/han finner det passende. Det kan hun/han for eksempel gjøre gjennom å samle inn data ved å stille elevene de samme spørsmålene som jeg har gjort i mine intervjuer.

Når det gjelder veien videre, ser jeg selv flere forskningsspørsmål som kunne vært interessante å studere videre. I min studie observerte jeg kun undervisningen og snakket med elevene om deres forestillinger. For eksempel kunne det vært interessant å se nærmere på hvilken forestilling læreren har om forståelse i matematikk og hvilken forståelse hun/han ønsker at elevene skal tilegne seg i matematikk. I min studie har jeg ikke sett meg i stand til å verken bekrefte eller avkrefte arbeidshypotesen om at det er en sammenheng mellom elevenes forestillinger og undervisningskonteksten. Resultatene ville kanskje vært annerledes om jeg intervjuet flere elever? Uansett tror jeg at det i en større studie kunne vært interessant å studere forestillingene til elever om forståelse i matematikk i klasser med en annen undervisningskontekst enn en der tradisjonell undervisning er vanlig og sammenligne. Er det for eksempel noen forskjell på forestillingene til elever som opplevere en mer aktiv og utforskende form for undervisning i forhold til tradisjonell undervisning? Resultatene fra studien min indikerer at det kan være en sammenheng mellom elevenes faglige nivå og deres forestillinger om forståelse i matematikk. Da tenker jeg spesielt på Åse. Det kunne derfor være interessant å fokusere enda mer på elever med ulikt faglig nivå. Er det for eksempel slik at elever på et høyt faglig nivå har en forestilling om forståelse i matematikk som inkluderer alle de fire trådene i relasjonell forståelse?

9 Avslutning

Oppgaven fokuserer på hvilke forestillinger elevene kan ha om forståelse i matematikk. Min arbeidshypotese gjennom arbeidet med forskningsspørsmålet har vært at elevenes forestillinger er kontekstavhengige. For å få svar på forskningsspørsmålet ble det i studien utviklet et nytt analyseredskap for å beskrive elevenes forestillinger om forståelse. Analyseredskapet tok utgangspunkt i Skemps (1987) skille mellom relasjonell og instrumentell forståelse. For å få fram ulike aspekter ved de to forståelsestypene ble de fire første trådene (Forståelse, regneferdigheter, strategisk kompetanse og resonnering) i matematisk kyndighet benyttet. Redskapet rettferdiggjøres blant annet ut fra likhetstrekk med forståelseskomponentene til Haser og Star (2004). En av årsakene til at jeg ikke anvender deres komponenter i min studie er at analysene deres er basert på intervju med lærerstudenter. Det er min vurdering at lærerstudenter er mye mer reflekterte omkring sine forestillinger om forståelse i matematikk enn elever på ungdomsskolen.

Det ble samlet inn data til studien av elevers forestillinger om forståelse i matematikk gjennom intervju og observasjon. Resultatene fra studien baserer seg på intervju med fire elever, to jenter og to gutter. Resultatene tyder på at analyseredskapet gjorde det mulig å gi detaljerte beskrivelser av elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Studien indikerer at elevenes forestillinger om forståelse kan ha individuelle preg. For eksempel indikerer resultatene at Åse, en veldig dyktig matematikkelev, har en forestilling om forståelse i matematikk som innebærer alle de fire trådene i relasjonell forståelse. Hun vektlegger resonneringstråden mest av de fire trådene. Vår, den andre jenta som ble intervjuet i studien, har også en forestilling om forståelse i matematikk som i hovedsak er relasjonell forståelse. Hun er derimot ikke inne på alle de fire trådene, men er i hovedsak inne på Forståelsestråden. De to guttene i studien har en forestilling om forståelse i matematikk som er mer instrumentell. Tor har, slik jeg vurderer resultatene, en forestilling som samsvarer med instrumentell forståelse. Åge er inne på instrumentell forståelse på direkte spørsmål om forståelse i matematikk. På de mer indirekte er det min vurdering at han snakker om Forståelse. Undervisningen elevene i studien opplever vil jeg beskrive som tradisjonell undervisning. Andre studier viser at det er en sammenheng mellom elevers forestillinger i matematikk og undervisningskonteksten. Resultatene fra min studie gjør meg ikke i stand til å påstå at det er tilfellet for min studie også.

I studien har det altså blitt utviklet et nytt analyseredskap for å beskrive elevers forestillinger om forståelse i matematikk. Jeg håper studien kan inneholde elementer som kan være til interesse for matematikklærere. Det er viktig å at elevene får anledning til å utvikle forståelse i matematikk i dagens teknologiske samfunn Hedrèn (2003). Det mener jeg gjenspeiles i den norske læreplanen (LK06), som bygger på de fem grunnleggende ferdighetene (Utdanningsdirektoratet, 2006). Jeg mener det er viktig at en lærer er klar over de ulike forestillingene elever kan ha i matematikk, fordi forestillingene vil påvirke elevenes læring (Goldin, et al., 2009). En av de matematikkrelaterte forestillingene er elevenes forestillinger om forståelse i matematikk. Analyseredskapet jeg utviklet for studien kan være et redskap som lærere kan anvende for å kartlegge hvilke forestillinger elever kan ha om forståelse i matematikk. Spørsmålene i intervjuguiden kan brukes til en slik undersøkelse. Eksemplene fra resultatene og analysen fra studien kan gi lærerne en forståelse av hvordan analyseredskapet kan anvendes.

Med denne studien har jeg fått innsikt i hvilke forestillinger elever kan ha om forståelse i matematikk. Jeg mener det er interessante erfaringer å ha med meg videre inn i læreryrket. En av grunnene til at jeg ønsket å undersøke elevenes forestillinger om forståelse er at det er et område det ikke er gjort noe særlig empirisk forskning på. Etter å ha gjennomført min studie, har jeg en oppfatning av at det absolutt er et område som er verdt å fokusere på. Selv mener jeg det kunne vært interessant å gjennomføre en tilsvarende studie i en større skala. Hva hadde resultatet blitt om jeg intervjuet flere elever i samme klasse? Eller hvilke resultater hadde jeg fått om jeg undersøkte elevers forestillinger i en klasse med en annen undervisningskontekst? I diskusjonskapittelet nevner jeg også noen andre nye forskningsspørsmål. Hvordan forholder lærerens forestillinger om forståelse seg i forhold til elevenes? Er det en sammenheng mellom elevenes faglige nivå og deres forestillinger?

10 Referanser

Alseth, B., Breiteg, T., & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering*. Notodden: Telemarksforskning.

Anghileri, J. (2007). *Developing number sense: Progression in the middle years*. London: Continuum International Pub. Group.

Blomhøj, M. (1997). Funktionsbegrepet og 9. klasse elevers begrepsforståelse. *Nordic Studies in Mathematics Education, 5*(1), 7-32.

Boaler, J. (1997). *Experiencing school mathematics: Teaching styles, sex and setting*. Buckingham: Open University Press.

Dash, I. (2009). *Flexibility in knowing school mathematics in the context of a Swedish and an Indian school class.* Lund, Lunds University.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterization of beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education* (Vol. 31, pp. 39-57). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Goldin, G., Rösken, B., & Törner, G. (2009). Beliefs: No longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. In J. Maass & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education: New research results*. Rotterdam: Sense Publishers.

Green, T. F. (1971). *The activities of teaching*. New York: McGraw Hill.

Gunnarsson, R. (2002). *Validitet och reliabilitet*: Hentet 27.05.2009 fra http://infovoice.se/fou/.

Hannula, M. S., Op't Eynde, P., Schlöglmann, W., & Wedege, T. (2007). *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Chapter 1: Affect and mathematical thinking.* Paper presented at the Cerme 5, Laranaca, Cyprus.

Haser, C. (2006). *Investigation of preservice and inservice teachers' mathematics related beliefs in Turkey and the perceived effect of middle school mathematics education program and the school contexts on these beliefs.* Michigan State University, Michigan.

Haser, C., & Star, J. R. (2004). *Preservice teachers' beliefs about mathematical understanding.* Paper presented at the 26th annual meeting of the North

American Chapter of the International Group for the Psychology of Matematics Education, Toronto: University of Toronto.

Hedrèn, R. (2003). Regning i skolen i dag og i morgen. In B. Grevholm (Ed.), *Matematikk for skolen* (pp. 71-102). Bergen: Fagbokforlaget.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., et al. (2000). Introducing the critical features of classrooms. In J. Hiebert, T. P. Carpenter, E. Fennema, K. C. Fuson, D. Wearne, H. Murray, A. Oliver & P. Human (Eds.), *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding* (pp. 1-15). Portsmouth: Heinemann Publishing Company.

Jørgensen, P. S. (2001). Kompetence - overvejelser over et begreb. *Nordisk psykologi, 53*(3), 181-208.

Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Educational Studies in Mathematics, 47*(1), 101-116.

Kilpatrick, J., & Swafford, J. (Eds.). (2002). *Helping children learn mathematics*. Washington DC: National Academic Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kloosterman, P. (1996). Students' beliefs about knowing and learning mathematics: Implications for motivation. In M. Carr (Ed.), *Motivation in mathematics* (pp. 131-156). Cresskill: Hampton Press, Inc.

Kloosterman, P. (2002). Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: Measurement and implications for motivation. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (Vol. 31, pp. 247-269). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. S. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & Variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 68-76.

Kvale, S. (2002). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal Akademisk.

Lester, F. K. (2002). Implications of research on students' beliefs for classroom practice. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (Vol. 31, pp. 345-353). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics*. New York: MacMillian Publishing Company.

Mertens, D. (2005). *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Mervis, J. (2001). Math education: Academy report aims to quiet debate. *Science, 291*(5505).

Niss, M. (2003). Mål for matematikkundervisningen. In B. Grevholm (Ed.), *Matematikk for skolen* (pp. 288-334). Bergen: Fagbokforlaget.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til utvikling af matematikundervisning i Danmark.* København: Undervisningsministeriet, Uddannelsesstyrelsen temahæfteserie nr. 18 - 2002.

Op't Eynde, P., & De Corte, E. (2003). *Students' mathematics-related belief system: Design and analysis of a questionnaire*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association.

Op't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs: A quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education* (Vol. 31, pp. 13-37). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Pehkonen, E. (1995). *Pupils' view of mathematics. Intitial report for an international comparison project.* Helsinki: University of Helsinki, Department of Teacher Education.

Pehkonen, E. (2003). Lærere og elevers oppfatninger som en skjult faktor i matematikkundervisningen. In B. Grevholm (Ed.), *Matematikk for skolen* (pp. 154-181). Bergen: Fagbokforlaget.

Robson, C. (2002). *Real world research: A resource for social scientists and practitioner-researchers*. Oxford: Blackwell Publishing.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24-41.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London & Washington DC: The Falmer Press.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Skemp, R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Skott, J. (2000). *The images and practice of mathematics teachers.* The Royal Danish School of Educational Studies, København.

Skovsmose, O. (2006). Research, practice, uncertainty and responsibility. *Journal of Mathematical Behaviour, 25*, 267-284.

Tall, D. (1978). The dynamics of understanding mathematics. *Mathematics Teaching, 81*, 50-52.

Utdanningsdirektoratet (2006). *Læreplanverket for kunnskapsløftet (K06)*: Hentet 2008.10.08 fra www.utdanningsdirektoratet.no.

von Glaserfeld, E. (1995). Piaget's constructivist theory og knowing *Radical constructivism: A way of knowing and learning.* (pp. 53-75). London: The Falmer Press.

Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech (N. Minick, Trans.). In R. W. Rieber & A. S. Carton (Eds.), *The collected works of L. S. Vygotsky: Vol. 1. Problems of general psychology* (pp. 167-214). New York: Plenum Press. (Original work published 1934).

Wedege, T. (2003). Kompetence(begreber) som konstruktion. *Dansk Pædagogisk Tidsskrift, 03/2003*, 64-75.

Wedege, T. (In Press). Needs versus demands: Some ideas on what it means to know mathematics in society. In B. Sriraman & S. Goodchild (Eds.), *Relatively and philosophically Ernest: Festschrift in honor of Paul Ernest's 65th birthday*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Wedege, T., Skott, J., Wæge, K., & Henningsen, I. (2006). *Changing views and practices? A study of the KappAbel mathematics competition* Trondheim: Norwegian Center for Mathematics Education.

Wæge, K. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning.* NTNU, Trondheim.

Yackel, E., & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (Vol. 31, pp. 313-330). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Vedlegg 1 Søkeoversikt

Søkeoversikt

- Gått gjennom følgende tidsskrift:
    - Adults Learning Mathematics: An International Journal
    - Focus on Learning Problems in Mathematics
    - Learning and Instruction
    - Literacy and Numeracy Studies
    - Mathematics Teacher Education and Development
    - Mathematical Thinking and Learning – an International Journal
    - Mathematics Education Research Journal
    - Matematik og naturfagsdidaktikk: tidsskrift for undervisere, forskere og formidlere
    - Zentralblatt für Didaktikk der Mathematik
    - International Journal of Educational Development.
    - Nomad
    - Næmnaren
    - Journal for Research in Mathematics Education tilbake til 1997
    - Educational Studies in Mathematics, nr 1-70
    - For the Learning og Mathematics, utgaver på nett fra 1981-2008
    - Journal of Mathematics Behaviour, utgaver på nett fra 1995-2003
    - Journal of Mathematics Teacher Education, fram til 2008
    - Tangen, utgaver fra 1990-2008
    - Søkt i tidsskriftet Teaching Mathematics and its Application etter:
        - Students beliefs
        - Students understanding
        - Mathematical proficiency

- Søkt i databasen ERIC:
    - Understanding mathematics gav over 6000 treff. Prøvde derfor å begrense antall treff med flere søkeord. Lest abstract på relevante treff for å se om det var det jeg var ute etter. Fikk tak i hele teksten på de som virket relevante, eller som jeg var usikker på:
        - Students understanding mathematics, gav 2016 treff
        - Students mathematical understanding, gav 1678 treff
        - Pupils understanding mathematics, gav 85 treff, ingen aktuelle
        - Students beliefs about understanding: 113 treff
        - Teacher knowledge and students beliefs in math/mathematics: 30/113 treff
        - Students beliefs in mathematics: 704 treff
        - Five strands of mathematical proficiency, tilbake til 1999
        - Math proficiency, tilbake til 1990
        - Mathematical proficiency, tilbake til 2000

- Sjekket referanselistene til alle relevante artikler og bøker.

Vedlegg 2 Intervjuguide

Intervjuguide

Innledning

Hei, jeg heter Ingebjørg Berglie og er en student på lektorutdanningen på NTNU. Denne våren skriver jeg en masteroppgave om elevers forhold til å lære matematikk. Til det trenger jeg din hjelp, fordi jeg er interessert i å høre elevenes meninger omkring dette. Hensikten med intervjuet er dermed å finne ut hvilke meninger og tanker du har omkring de spørsmålene jeg stiller. Derfor er det viktig at du sier akkurat det du mener. Det er ikke noen prøve, det vil si at det er ingen riktige eller gale svar. Jeg vil høre alt du har å si, det er bedre om du sier for mye enn for lite. Er det ok at vi tar intervjuet opp på bånd? Det er kun jeg som kommer til å høre på disse opptakene. Jeg kommer til å skrive ned på papir det som blir sagt. Men på det dokumentet kommer du til å være anonym. Det eneste som kommer til å stå der er klassetrinn og kjønn. Jeg kommer til å endre navnet ditt. Navnet på skolen og byen kommer jeg ikke til å ta med. Derfor skal det ikke være mulig for andre å spore intervjuet tilbake til deg. Har du med godkjennelse fra de foresatte? Har du noen spørsmål før vi setter i gang med intervjuet? Hvis du i løpet av intervjuet ikke skjønner hva jeg spør om, eller om det skulle være noe du ikke har lyst til å svare på, er det bare å gi beskjed. Da begynner vi intervjuet.

Spørsmål

1. **Kan du beskrive en helt vanlig matematikktime?**

2. **Hvordan arbeider dere med nye temaer eller teori i matematikk?**

    a. *Hvilke tanker har du om det?*

        a. Begrunnelse

    b. *Hvordan går du fram for å forstå et nytt tema/teori?*

    c. *Hva mener du det vil si å forstå en tema/teori i matematikk?*

3. **Hva synes du kjennetegner en god time?**

    a. *Hva gjør læreren som er så bra?*

        a. Begrunnelse

    b. *Hvor ofte har dere en slik time?*

4. **Hvilke type oppgaver foretrekker du å arbeide med?**

    a. *Liker du utfordrende oppgaver?*
        a. Hvorfor/hvorfor ikke?
    b. *Mange lette eller økende vanskelighetsgrad?*
        a. Hvorfor?
    c. *Hvordan blir du utfordret?*
    d. *Hva mener du det vil si å forstå en oppgave i matematikk?*

5. **Hvordan lærer du best?**

        a. Lapper.
        b. Andre ting?
        c. Noe du ikke forstår?
        d. Hvorfor?

6. **Når synes du at du lykkes i matematikk?**

    a. *Hva mener du det vil si å kunne matematikk?*
        a. Begrunnelse

    b. *Hva mener du skal til for å få en god karakter i matematikk?*
        a. Begrunnelse

7. Tenk på en elev som du mener er god i matematikk. **Kan du beskrive hva du mener det er som gjør at den eleven er god i matematikk?**

        a. Hvorfor?

8. **Hva handler egentlig matematikk om?**

    a. *Hvis du skulle beskrive hva matematikk er til noen, hvordan ville du gjort det?*
        a. Hvorfor legger du vekt på det?

    b. *Er matematikk mer om å forstå det du arbeider med, eller å huske ting utenat?*

Vedlegg 2 Intervjuguide

Avslutning

Da har jeg stilt alle spørsmålene jeg har. Er det noe du skulle ønske at jeg hadde spurt deg om? Har du lyst til å kommentere eller utdype noe av det du har sagt? Er det noe du angrer på at du har sagt, noe du ikke ønsker at jeg skal ta med i oppgaven?

Nå kommer jeg senere til å skrive ned denne samtalen, eller intervjuet, på papir og prøve å tolke det du har sagt. Har du lyst til å få dette sendt på mail, slik at du kan komme med kommentarer og se om jeg har forstått deg riktig? Eventuelt noter mail-adressen til eleven.

Hvis det skulle være noe du lurer på eller kommer på senere, så er det bare å ta kontakt på mail-adressen min.

Vedlegg 3 Lapper jeg lærer best

Lapper – Jeg lærer best

Jeg sier ting høyt.

Læreren gir meg hint slik at jeg kan komme videre selv.

Jeg snakker og diskuterer med medelever.

Jeg leser en matematisk tekst.

Jeg forklarer for andre.

Jeg samarbeider med andre.

Jeg sier ting inni meg og diskuterer med meg selv.

Jeg arbeider alene.

Læreren forklarer metodene og viser løsningene.

Jeg arbeider i grupper.

Læreren ”loser” oss gjennom matematikken.

Jeg skriver ned ting slik at andre også kan forstå det.

Jeg må finne metodene og løsningene selv.

Jeg arbeider med praktiske oppgaver.

Vedlegg 4 Samtykkeerklæring

Til elevens foresatte

20. 03. 2009

Om elevintervju til masteroppgave i uke 13

I forbindelse med en undersøkelse i matematikk ønskes et intervju av eleven. Intervjuet er en del av en masteroppgave i matematikk fagdidaktikk ved NTNU, og handler i hovedsak om elevenes syn på matematikk og matematikklæring.

Intervjuet kommer til å bli tatt opp på bånd. I masteroppgaven kommer eleven til å bli anonymisert. Det eneste som vil fremgå er kjønn og klassetrinn. Navnet på eleven kommer derfor til å bli endret.

Jeg håper at dere vil godkjenne at jeg intervjuer eleven og bruker intervjuet i masteroppgaven. Samtykkeerklæringen returneres til skolen **innen onsdag 25. mars**.

For spørsmål, vær vennlig å ta kontakt på telefon (95 28 14 07) eller mail (berglie@stud.ntnu.no).

Men vennlig hilsen

Ingebjørg Berglie

Samtykkeerklæring

Jeg godkjenner at ______________________ blir intervjuet, og at intervjuet blir benyttet i masteroppgaven.

Dato og sted: ________________________________

Underskrift foresatte: ________________________________