NTNU

Det skapende universitet

Koszul-algebraer over endelig kropper

Trude Pedersen Sundtjønn

Master i matematikk
Oppgaven levert: Mai 2008
Hovedveileder: Øyvind Solberg, MATH

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Oppgavetekst

Koszul algebraer over endelig kropper.

Masteroppgaven er innen algebra, nærmere bestemt Koszul-teori for algebraer. Koszul-algebraer, ble først definert av Priddy, har en sentral rolle innen algebra, geometri og topologi. Projektive moduler er viktige for å finne invarianter av moduler og ringer, både for kommutative og ikke-kommutative ringer.

Over Koszul algebraer er det en stor klasse av moduler som har projektive oppløsninger med en fin lineær struktur. I tillegg er det kjent at alle Koszul algebraer er kvadratiske algebraer, men det er ikke kjent en metode for å avgjøre når en kvadratisk algebra er Koszul eller ikke.

Denne masteroppgaven vil gi en innføring i teorien for Koszul-algebraer, og spesielt undersøke kvadratiske algebraer over endelige kropper. Over endelige kropper finnes det bare endelig mange kvadratiske algebraer. For konkrete eksempler ønsker en å finne hvor mange av de kvadratiske algebraer som er Koszul og i tillegg undersøke isomorfi-klassene av disse.

Sammendrag

Vi har i denne masteroppgaven sett på Koszul-algebraer. Vi har definert Koszul-algebraer som graderte algebraer hvor de simple modulene har en lineær gradert projektiv oppløsning, og vi har bevist forskjellige karakteriseringer av Koszul-algebraer.

Vi har bevist at alle Koszul-algebraer er kvadratiske algebraer, og at Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra selv er en Koszul-algebra. Vi har sett at alle monomielle kvadratiske algebraer er Koszul-algebraer, og at en algebra som har en kvadratisk Gröbnerbasis er en Koszul-algebra. Tilslutt har vi sett at algebraer på formen $kQ/(f)$, hvor f er kvadratisk, vil være Koszul-algebraer.

Vi har for to klasser av kvadratiske algebraer talt hvor mange av algebraene som var Koszul-algebraer. Det ene klassen av algebraer besto av bare Koszul-algebraer, mens for den andre klassen av algebraer så vi at ca 25% algebraene ikke var Koszul-algebraer.

Forord

Denne masteroppgaven er avslutningen på fem år med matematikkstudier. I løpet av disse årene har jeg lært mange nye og spennende ting, samtidig som jeg har fått nye venner.

Jeg fikk god støtte og oppmuntring de tre første årene ved Høgskolen i Agder, og foreleserne her viste meg hvor spennende matematikk kan være. Det gode og uformelle miljøet i Kristiansand gav meg lyst til å fortsette med matematikk.

Da jeg kom til Trondheim og NTNU høsten 2006 ble det mer spesialisering i matematikken, og algebra var det jeg synes var mest spennende. Dette er et valg jeg ikke har angret på. I løpet av de to årene her oppe har medstudenter og forelesere vært en inspirasjonskilde for meg, og det hyggelige sosiale miljøet på lesesalen har vært en god hjelp om jeg satt fast.

Da jeg skulle begynne å skrive masteroppgaven var jeg bekymret for at det å skrive ville være en ensom prosess, men i løpet av året har jeg sett at dette er feil. Jeg vil gjerne takke lesesalen, og alle venner som har støttet og oppmuntret meg. Spesielt vil jeg nevne Hanne, Norunn, Ingrid, Christian og Snorre. Takk for at dere har gitt meg et minneverdig år.

Tusen takk, mamma og pappa, for veldig mye støtte. Jeg må også nevne Timmy, hunden. Uansett hvor stresset jeg var når jeg var hjemme på besøk har han alltid vært glad for å se meg.

Jeg har arbeidet sammen med Kari-Lise Frisvold Olsen, og det har vært en glede å samarbeide med henne. Vi har delt frustrasjoner når alt virket uforståelig, og delt gleden når bevis endelig fungerer. Uten Kari-Lise hadde det vært et hardere og mer kjedelig år.

Sist, men absolutt ikke minst, vil jeg rette en stor takk til veileder Øyvind Solberg, som har hjulpet meg mer enn en kunne forvente. Det har aldri vært vanskelig å komme opp i 8. etasje for å spørre spørsmål.

Innhold

Kapittel 1

Introduksjon

1.1 Koszul-algebraer

Koszul-algebraer er graderte algebraer hvor de simple modulene har en lineær projektiv oppløsning. Dette gjør at Koszul-algebraer har vært viktige i kommutativ algebra og algebraisk topologi. Det har nylig vært viktige anvendelser av ikke-kommutative Koszul-algebraer i algebraisk topologi, Lie teori og kvantegrupper.

I oppgaven har vi sett på de grunnleggende begrepene i teorien om Koszul-algebraer, og bevist noen resultater om hvilke graderte kvadratiske algebraer som er Koszul-algebraer. Vi har anvendt dette på to klasser av kvadratiske algebraer for å se hvor mange av algebraene som var Koszul-algebraer.

1.2 Oppbygging av oppgaven

Oppgaven starter med noen grunnleggende definisjoner om graderte algebraer og moduler, og noen korte resultater om disse, før vi beviser at alle Koszul-algebraer er kvadratiske algebraer.

Vi ser så nærmere på Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra, og beviser at denne også er en Koszul-algebra. Så ser vi på hvordan vi kan regne ut den kvadratiske duale algebraen til en kvadratisk algebra, og hva dette gir oss for Koszul-algebraer.

Deretter ser vi at monomielle kvadratiske algebraer er Koszul-algebraer, og at en kvadratiske algebra med en kvadratisk Gröbnerbasis er en Koszul-algebra, før vi ser på et bevis av Backelin for at algebraen $kQ/(f)$, hvor f er kvadratisk, er en Koszul-algebra. Vi avslutter oppgaven med å anvende resultatene våre på to eksempler av algebraer for å se hvor stor andel av algebraene som er Koszul-algebraer.

Kapittel 2

Grunnleggende definisjoner og resultater

2.1 Grunnleggende definisjoner

I dette kapittelet kommer vi til å definere de grunnleggende begrepene i oppgaven. Vi beviser også noen grunnleggende resultater som bruker i resten av oppgaven.

Vi antar at leseren er kjent med abstrakt algebra, og blant annet vet hva algebraer, ringer og moduler er. I oppgaven kommer vi til å bruke endel representasjonsteori, og vi kommer også til å bruke litt homologisk algebra.

De fleste definisjonene er hentet fra artikkel [8]. Siden en Koszul-algebra er en spesiell type gradert algebra, trenger vi først å vite hva en gradert ring og en gradert algebra er.

Fra [1] har vi at en gradert ring er definert som følgende:

Definisjon. La Λ være en ring. En representasjon av den underliggende abelske gruppen til en sum $\coprod_{i \in \mathbb{N}} \Lambda_i$ kalles en *gradering av* Λ om for alle $i, j \in \mathbb{N}$ så er $\Lambda_i \Lambda_j \subset \Lambda_{i+j}$. En ring Λ sammen med en gradering blir kalt en *gradert ring.*

Hvis $\Lambda = \coprod_{i \in \mathbb{N}} \Lambda_i$ er en gradert ring blir undergruppen Λ_i kalt den *homogene komponenten av grad* i, og elementene i Λ_i er de *homogene elementene av* Λ *i grad* i. Vi lar alltid k være en kropp, og definerer en gradert algebra.

Definisjon. En *gradert* k*-algebra* er en gradert ring Λ hvor Λ_0 er en k-algebra.

Vi sier at en gradert k-algebra Λ er *generert i grad 1* hvis $\Lambda_k = \prod_{i=1}^{k} \Lambda_1$ for alle $k \geq 1$.

Vi definerer så en gradert modul, og vi har hentet definisjonen fra [10].

Definisjon. Vi sier at M er en *gradert* Λ*-modul* om M er en Λ-modul slik at $M = \coprod_{i \in \mathbb{Z}} M_i$, hvor hver M_i er en additiv undergruppe av M, og for alle $i, j \in \mathbb{Z}$ har vi $\Lambda_i M_j \subseteq M_{i+j}$.

Vi ser at $\Lambda_0 M_j \subseteq M_j$, og dermed er alle M_j en Λ_0-undermodul av M. Vi kaller elementene i M_i de *homogene elementene av* M, og vi sier at et ikkenull element $m \in M_i$ er *homogent av grad* i. Alle m i M kan bli unikt representert av en sum $m = \sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i$, hvor $m_i \in M_i$ og kun endelig mange av m_i-ene er forskjellige fra 0.

Kategorien av alle graderte moduler kaller vi $\mathrm{Gr}\,\Lambda$. Vi har at objektene i kategorien er de graderte Λ-modulene. For graderte Λ-moduler M og N definerer vi morfismene mellom M og N som

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}\,\Lambda}(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) \mid f(M_j) \subseteq N_i \text{ for alle } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Vi kaller morfismene som oppfyller kravet til $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}\,\Lambda}(M,N)$ for *grad* 0 *avbildninger*. Som for ugraderte moduler har vi også graderte simple moduler.

Definisjon. Vi sier at S er en *gradert simpel modul* om alle graderte undermoduler M av S enten er $M = (0)$ eller $M = S$.

Vi ser nå på en spesiell type graderte algebraer. Vi kommer til å bruke denne type algebraer når vi ser på Koszul-algebraer.

Definisjon. En gradert k-algebra Λ er en *splitt basisk endelig 1-generert* om de følgende tre betingelsene er oppfylt

1. algebraen Λ_0 er isomorf med et endelig produkt av kopier av kroppen k,
2. hver Λ_i har endelig lengde over Λ_0, og
3. Λ er generert i grad 1.

Nå repeterer vi kort litt representasjonsteori og vil henvise til [2] for utfyllende informasjon. Et kogger $Q = (Q_0, Q_1)$ er en orientert graf hvor Q_0 er hjørnene, og Q_1 er veiene. Vi antar at Q_0 og Q_1 er endelige mengder. En vei i et kogger er enten en orientert sekvens av piler $\rho = \alpha_n \dots \alpha_2\alpha_1$ hvor enden til α_i er lik starten til α_{i+1} for $i = 1, 2, \dots, n-1$ eller den trivielle veien i de forskjellige hjørnene.

La k være en kropp, da vil kQ være en veialgebra, og har basis bestående av alle veier i Q. Multiplikasjon av veiene p og q i veialgebraen er gitt ved sammensetning av pq om enden til q er lik starten til p. Ellers vil $pq = 0$.

Vi husker at veialgebraer er heriditære algebraer. Vi ser at vi kan betrakte kQ som en gradert k-algebra, om vi bruker den naturlige graderingen som oppstår ved å la $kQ = \coprod kQ_i$, hvor Q_0 er hjørnene, og Q_i er veier av lengde i. Vi ser at dette oppfyller definisjonen til å være en gradert algebra.

Veialgebraene er med i klassen av splitt basisk endelig 1-generert graderte algebraer fordi

1. Vi ser at $\Lambda_0 = ke_1 \coprod ke_2 \ldots \coprod ke_n$ hvor e_i er den trivielle veien i hjørnet i. Siden vi antar at antall hjørner i koggeret er endelig, får at Λ_0 er isomorf til et endelig antall kopier av kroppen k.

2. Vi prøver så å finne en endelig filtrasjon av $\Lambda_i = k\{\text{veier av lengde } i\}$ som en Λ_0-modul. Vi vet at dimensjonen til Λ_i er endelig over k siden antall veier av lengde i er endelig, og k er endelig. La M_i være en maksimal Λ_0-undermodul av M_{i-1}. Da ser vi at vi får en filtrasjon $\Lambda_i = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots$

   Siden M_i er en maksimal Λ_0-undermodul ser vi at

   $$\dim_k M_0 > \dim_k M_1 > \dim_k M_2 > \ldots$$

   Vi ser at dette stopper siden dimensjonen til Λ_i er endelig over k. Dermed må også filtrasjonen av Λ_i være endelig.

3. Basisen til en veialgebra er alle veiene i Q, og veiene er generert i grad 1 siden de er sammensetninger av piler.

De to klassene av algebraene vi ser på i Kapittel 6 er veialgebraer, og er dermed splitt basisk endelig 1-genererte algebraer. Vi har følgende resultat fra artikkel [8] som sier at alle splitt basisk endelig 1-generert graderte algebraer er kvotienter av veialgebraer.

Proposisjon 2.1. *La k være en kropp og la Λ være en splitt basisk endelig 1-generert gradert algebra. Da eksisterer det et endelig kogger Q og et gradert ideal I i kQ slik at $I \subseteq \sum_{n\geq 2}(kQ)_n$ og Λ er isomorf til kQ/I som en gradert k-algebra.*

Vi kommer dermed til å se på veialgebraer når vi jobber med teorien om Koszul-algebraer.

Nå ser vi litt mer på graderte moduler, og vi ser først på hva det betyr å være generert i grad j, og hvordan vi kan skifte denne graden til en grad som for våre formål er mer passende.

Definisjon. La Λ være en gradert k-algebra og la $M = \sum_{i=-\infty}^{\infty} M_i$ være en gradert Λ-modul. Vi sier M er *generert i grad j* hvis $M \neq (0)$ og $\Lambda_s M_j = M_{j+s}$ for alle s.

Definisjon. Om s er et heltall så er $M[s]$, *s-skiftet av M*, den graderte modulen $\sum_{i=-\infty}^{\infty} N_i$, hvor $N_i = M_{i-s}$.

Vi sier at M er *endeliggenerert* om det finnes en grad 0 på avbildning fra en endelig direkte sum av skift av Λ på M.

Vi legger merke til at når vi betrakter Λ som en graderte Λ-modul vil denne være generert i grad 0.

Nå ser vi på graderte projektive dekker av graderte moduler.

Definisjon. Anta at M er en endeliggenerert gradert Λ-modul og la $J = \Lambda_{\geq 1}$. Vi sier at $f \colon P \to M$ er et *gradert projektivt dekke* av M om P er en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul, f er en grad 0 avbildning, og $\mathrm{Ker}(f) \subset JP$.

Nå er vi klare til å definere to av de mest brukte begrepene i oppgaven, nemlig en lineær gradert projektiv oppløsning av en gradert modul, og hva det er å være en lineær gradert modul.

Definisjon. La M være en endeliggenerert gradert Λ-modul som er generert i grad 0. Vi antar at $P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ er en gradert projektiv oppløsning av M hvor P_i er endeliggenererte graderte projektive Λ-moduler. Vi sier at denne oppløsningen er *lineær av lengde* n om for $0 \leq i \leq n$, modulene P_i er generert i grad i og kjernen av $P_n \to P_{n-1}$ er generert i grad $n+1$.

Vi sier at M har en *gradert lineær projektiv oppløsning* om M har en gradert projektiv oppløsning $\ldots \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ som er lineær for hver $n \geq 0$. Har M en gradert lineær projektiv oppløsning er M en *lineær Λ-modul*.

I hele oppgaven vil Λ være en gradert k-algebra, hvor ringen $\Lambda = \coprod_{i \geq 0} \Lambda_i$, og k er en kropp. Vi antar at Λ er splitt basisk endelig 1-generert algebra. Vi definerer nå det oppgaven skal handle om, nemlig en Koszul-algebra.

Definisjon. Algebraen Λ er en *Koszul-algebra* om alle graderte simple Λ-moduler er lineære.

Vi ser så på et eksempel på en Koszul-algebra for å illustere definisjonene over.

Eksempel 1. Vi ser på algebraen $\Lambda = kQ/I$, hvor $k = \mathbb{Z}_2$, og koggeret Q er

$$1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2$$

og $I = (\alpha\beta)$. Vi ser at en basis for veialgebraen er $\{e_1, e_2, \alpha, \beta, \beta\alpha\}$ med virkningen fra Λ er gitt ved:

$$\begin{array}{cc} e_1 & e_2 \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \alpha & \beta \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} & \\ \beta\alpha & \end{array}$$

Her ser vi at vi har to simple moduler $S_1 = ke_1$ og $S_2 = ke_2$. Vi starter med å sjekke om S_1 har en lineær projektiv oppløsning. Vi vet at Λe_i er projektive graderte moduler. Vi kan dermed bruke disse til å dekke modulene. Vi bruker betegnelsen $\Omega^i_\Lambda(M)$ på kjernen til P_{i-1}. Vi ser at for S_1 vil $P_0 = \Lambda e_1$ og $P_1 = \Lambda e_2$. Vi viser den projektive gradrerte oppløsningen til S_1 under.

$$\begin{tikzcd} \Omega^2_\Lambda(S_1) \arrow[r, hook] & \Lambda e_2 \arrow[r, dotted] & \Omega^1_\Lambda(S_1) \arrow[r, hook] & \Lambda e_1 \arrow[r, dotted] & S_1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \text{Grad 0} & & & & e_1 \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\alpha"] & e_1 \\ \text{Grad 1} & & e_2 \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\beta"] & \alpha \arrow[r, hook] \arrow[d, "\beta"] & \alpha \arrow[d, "\beta"] & \\ \text{Grad 2} & 0 \arrow[r, hook] & \beta & \beta & \beta & \end{tikzcd}$$

Vi ser at S_1 har en lineær projektiv oppløsning siden $\Omega^1_\Lambda(S_1)$ er generert i grad 1, og $\Omega^2_\Lambda(S_1)$ er generert i grad 2. Så stopper den projektive oppløsningen. Vi ser at alle avbildningene er grad 0-avbildninger, og de projektive modulene og de tilhørende kjernene er generert i rett grad. Dermed er S_1 en lineær modul.

Vi ser så på S_2 og sjekker om den har en lineær projektiv oppløsning.

$$\begin{tikzcd} \Lambda e_1 \arrow[r, dotted] & \Omega^1_\Lambda(S_2) \arrow[r, hook] & \Lambda e_2 \arrow[r, dotted] & S_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \text{Grad 0} & & & e_2 \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\beta"] & e_2 \\ \text{Grad 1} & e_1 \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\alpha"] & \beta \arrow[r, hook] & \beta & \\ \text{Grad 2} & \alpha \arrow[d, "\beta"] & & & \\ \text{Grad 3} & \beta & & & \end{tikzcd}$$

Vi ser at $\Lambda e_1 \to \Omega^1_\Lambda(S_2)$ er starten på den lineære oppløsningen til S_1. Da er S_2 en lineær modul.

Dermed vil algebraen $\Lambda = kQ/I$ være en Koszul-algebra, siden alle de simple modulene har en lineær projektiv oppløsning.

Det er arbeids- og tidskrevende å sjekke om en algebra er en Koszul-algebra eller ikke, og vi ønsker å finne ut om det er noen betingelser som gir oss at en algebra er en Koszul-algebra. Det er dette vi kommer til å jobbe med i de kommende kapitlene.

Nå har vi definert mange av de viktigste begrepene i oppgaven, og vi er klare til å bevise endel resultater som kommer til å hjelpe oss når vi jobber med å finne et gradert projektivt dekke til en gradert modul.

2.2 Hjelperesultater

Vi starter med å bevise den graderte versjonen av Nakayamas Lemma. Vi kommer til å bruke dette når vi skal bevise at en avbildning f er på i Proposisjon 2.4, hvor vi jobber med å finne et gradert projektivt dekke av en gradert modul.

Lemma 2.2. (Nakayamas Lemma) *La Λ være en gradert algebra og M en endeliggenerert gradert Λ-modul. La $J = \Lambda_{\geq 1}$. Hvis $JM = M$, så er $M = (0)$.*

Bevis. Vi har at $M = \coprod_{i\in\mathbb{Z}} M_i$. Siden M er en endeliggenerert gradert Λ-modul vet vi at det eksisterer elementer $m_1, \ldots, m_t$, hvor $0 \neq m_i \in M$, som genererer M. Elementet m_i er av grad n_i. Vi kan anta at $n_1 \leq \ldots \leq n_t$ som gir at $M = M_{\geq n_1}$. Dermed ser vi at $JM \subseteq M_{\geq n_1+1}$. Vi antar at $JM = M$, det vil si at M og JM må være like i hver grad. Eneste mulighet for dette er om $M = (0)$. $\square$

For å kunne konstruere et gradert projektivt dekke av en gradert modul, er det viktig at vi kan finne grad 0 avbildninger mellom en gradert projektiv modul og en gradert modul. Vi starter med å vise at vi kan finne en slik avbildning når vi har forutsetningene under.

Lemma 2.3. *La R, B og C være endeliggenererte graderte Λ-moduler og la $h\colon R \to C$ og $\beta\colon B \to C$ være grad 0 Λ-avbildninger. La R være en gradert projektiv modul, og β være på. Da eksisterer det en grad 0 Λ-avbildning $\nu\colon R \to B$ slik at $\beta\nu = h$.*

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, dotted, "\nu"'] \arrow[d, "h"] & \\
B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Bevis. Siden R er projektiv, og β er på vil det eksistere en Λ-avbildning ν slik at $\beta\nu = h$. Vi ønsker å vise at ν kan velges til en grad 0 avbildning. Vi vet at $B = \coprod_{i\in\mathbb{Z}} B_i$ og tilsvarende at $R = \coprod_{i\in\mathbb{Z}} R_i$. Vi kan dermed sette opp følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & & & B_l & \\
R_i \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[urrr, bend left, "\nu_{i,l}"] \arrow[rrr, bend right, "\nu_{i,i}"'] & R \arrow[r, "\nu"] & B \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[ur, "\pi_l"] & B_i \arrow[r, "\lambda_i"] & B
\end{tikzcd}$$

Vi benevner $\pi_l\nu\mu_i = \nu_{i,l}$ og kaller $(\nu_{i,i}) = \tilde{\nu}$ og ser at $\tilde{\nu}\colon R \to B$. Vi starter med å vise at $\tilde{\nu}$ er en Λ-avbildning.

La $r_i \in R_i$ og la $\lambda \in \Lambda_j$. Da er $\mu_{i+j}(\lambda r_i) \in R$. Vi ser at $\nu(\mu_{i+j}(\lambda r_i)) \in B$ og siden $B = \coprod_{i\in\mathbb{Z}} B_i$ får vi at $\nu(\mu_{i+j}(\lambda r_i)) = (\pi_l\nu(\mu_{i+j}(\lambda_{r_i})))_{l\in\mathbb{Z}}$.

Tilsvarende får vi

$$\lambda\nu(\mu_i(r_i)) = \lambda(\pi_t\nu(\mu_i(r_i)))_{t\in\mathbb{Z}} = (\lambda\pi_t\nu(\mu_i(r_i)))_{t\in\mathbb{Z}}$$

og vi ser fordi $\nu(\mu_{i+j}(\lambda r_i)) = \lambda\nu(\mu_i(r_i))$ at

$$(\pi_l \nu(\mu_{i+j}(\lambda_{r_i})))_{l\in\mathbb{Z}} = (\lambda\pi_t\nu(\mu_i(r_i)))_{t\in\mathbb{Z}}.$$

Vi ser at $\pi_l\nu(\mu_{i+j}(\lambda r_i)) = \lambda\pi_{l-j}\nu(\mu_i(r_i))$ for alle $l \in \mathbb{Z}$. Vi lar så $l = i + j$. Da blir

$$\pi_{i+j}\nu(\mu_{i+j}(\lambda r_i)) = \lambda\pi_i\nu(\mu_i(r_i)) \text{ for alle } j \geq 0 \text{ og for alle } i \in \mathbb{Z}.$$

Vi ser dermed at for $i \in \mathbb{Z}$ og $\forall j \geq 0$ vil vi få at

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu}(\lambda(r_i)) = \tilde{\nu}(\lambda r_i) &= (\nu_{i+j,i+j})(\lambda r_i) \\
&= \pi_{i+j}\nu(\mu_{i+j}(\lambda r_i)) = \lambda\pi_i\nu(\mu_i(r_i)) \\
&= \lambda(\nu_{i,i})(r_i) = \lambda(v_{i,i}(r_i)) = \lambda\tilde{\nu}(r_i)
\end{aligned}$$

og vi ser at $\tilde{\nu}(\lambda r_i) = \lambda\tilde{\nu}(r_i)$.

Vi ser så at

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu}((r_i)_{i\in\mathbb{Z}} + (s_j)_{j\in\mathbb{Z}}) = \tilde{\nu}((r_i + s_i)_{i\in\mathbb{Z}}) &= (\pi_i\nu\mu_i(r_i + s_i))_{i\in\mathbb{Z}} \\
&= (\pi_i\nu\mu_i(r_i) + \pi_i\nu\mu_i(s_i))_{i\in\mathbb{Z}} \\
&= \pi_i\nu\mu_i(r_i)_{i\in\mathbb{Z}} + \pi_i\nu\mu_i(s_i)_{i\in\mathbb{Z}} \\
&= \tilde{\nu}((r_i)) + \tilde{\nu}(s_j)
\end{aligned}$$

for alle i og j i $\mathbb{Z}$. Dermed er $\tilde{\nu}$ en Λ-avbildning og vi legger merke til at $\tilde{\nu}$ er en grad 0 avbildning.

Så ønsker vi å vise at vi kan bruke $\tilde{\nu}$ istedet for ν slik at vi får en grad 0 avbildning. Vi velger $r_i \in R$ som er et homogent element av grad i. Da blir $h(r_i)$ i grad i i C. Vi ser også at $\nu(r_i)$ er i B. Dermed kan $\nu(r_i)$ deles opp i b_i og $\sum_{j\neq i} b_j$ hvor b_i er grad i komponenten av $\nu(r_i)$ og $\sum_{j\neq i} b_j$ er resten. Vi ser da at $\beta\nu(r_i) = \beta(b_i + \sum_{j\neq i} b_j) = \beta(b_i) + \beta(\sum_{j\neq i} b_j)$.

Vi vet at $h = \beta\nu$, og dermed må $\beta(\sum_{j\neq i} b_j) = 0$ siden $h(r_i)$ bare har bidrag fra grad i. Vi ser at $\beta(b_i) = h(r_i)$, og dermed ser vi at $h(r_i) = \beta\tilde{\nu}(r_i)$. Vi kan altså erstatte ν med $\tilde{\nu}$ og få diagrammet til å kommutere. □

Vi er nå klare til å se på hvordan man kan konstruere et gradert projektivt dekke av en gradert modul.

2.3 Eksistens av et gradert projektivt dekke

Denne proposisjonen er hentet fra artikkel [8] og vi har skrevet ut beviset, siden det viser oss en måte på hvordan vi kan konstruere et gradert projektivt dekke av en gradert modul.

Vi kommer til å bruke denne konstruksjonen i Kapittel 5.1 når vi ser at monomielle kvadratiske algebraer er Koszul-algebraer.

Proposisjon 2.4. *La $\Lambda = k\Gamma/I$ være en endelig 1-generert gradert splitt basisk k-algebra, med $J = \Lambda_{\geq 1}$. La M være en endeliggenerert gradert Λ-modul, og R en endeliggenerert projektiv gradert Λ-modul på formen $\coprod_{i=1}^{t} \Lambda e_{l_i}$.*

(i) La $\bar{f}\colon R/JR \to M_j$ være en Λ_0-avbildning. Da utvides $\bar{f}$ til en grad 0 avbildning $f\colon R[j] \to M$.

(ii) La $\bar{f}\colon R/JR \to M_j$ være en Λ_0-avbildning. Hvis M er generert i grad j, og $\bar{f}$ er på, så er f på.

(iii) La $\bar{f}\colon R/JR \to M_j$ være en Λ_0-avbildning. Hvis $\bar{f}$ er en isomorfi, så er $\operatorname{Ker}(f) \subseteq JR$.

(iv) Om M er generert i grad j, så eksisterer det et gradert projektivt dekke $f\colon P \to M$, hvor P er generert i grad j.

(v) M har et gradert projektivt dekke.

(vi) Om M har et gradert projektivt dekke $f\colon P \to M$ og det er en på Λ-avbildning $g\colon Q \to M$, hvor Q er en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul og $\operatorname{Ker}(g) \subseteq JQ$, så eksisterer det en isomorfi av graderte moduler $h\colon P \to Q$ slik at $gh = f$.

(vii) Anta at vi har en kort eksakt følge $0 \to A \to B \to C \to 0$ av endeliggenererte graderte moduler som alle er generert i grad j. Da eksisterer det endeliggenererte projektive moduler P, Q og R slik at det følgende diagrammet kommuterer

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"] & R \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

og slik at f, g og h er graderte projektive dekker.

Bevis.

(i) Det eksisterer naturlige projeksjoner $\pi_1\colon R \to R/JR$ og $\pi_2\colon M_{\geq j} \to M_j$. Vi vet at R er projektiv, og avbildningen π_2 en grad 0 avbildning og på. I tillegg er $\bar{f}$ er en Λ_0-avbildning, og π_1 en grad 0 Λ-avbildning.

Vi tar et element x i grad k i R. Vi ser at $\bar{f}\pi_1(x)$ vil være i grad $k+j$ i M_j. For at $\bar{f}\pi_1$ skal være en grad 0 Λ-avbildning må vi skifte R til $R[j]$. Vi ser dermed fra Lemma 2.3 at det eksisterer en grad 0 Λ-avbildning $h\colon R[j] \to M_{\geq j}$ slik at $\pi_2 h = \bar{f}\pi_1$. Vi har også inklusjonen $i\colon M_{\geq j} \to M$.

$$\begin{tikzcd}
 & R[j] \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[ddl, dotted, "\exists h"'] & \\
 & R/JR[j] \arrow[d, "\bar{f}"] & \\
M_{\geq j} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, hook, "i"] & M_j \arrow[r] & 0 \\
M & &
\end{tikzcd}$$

Vi lar $f = ih$ og vi ser at $f\colon R[j] \to M$. La x være et homogent element av grad k i R. Da har x grad $k+j$ i $R[j]$. Vi ser at $h(x)$ vil være et homogent element av grad $j+k$ i $M_{\geq j}$ siden h er en grad 0 avbildning. Inklusjonen $i\colon M_{\geq j} \to M$ forandrer ikke graden til $h(x)$ og dermed vil $f(x)$ være et element av grad $j+k$ i M som ønsket. Vi ser altså at f er en grad 0 Λ-avbildning.

(ii) Vi vil vise at f er på. Nakayama Lemma gir at om $J(M/\operatorname{Im} f) = M/\operatorname{Im} f$ vil $M/\operatorname{Im} f = 0$. Da vil $M = \operatorname{Im} f$ og f være på. Vi vet at $J(M/\operatorname{Im} f) \subseteq M/\operatorname{Im} f$. Vi ønsker å sjekke om $J(M/\operatorname{Im} f) \supseteq M/\operatorname{Im} f$.

La $m + \operatorname{Im} f$ være i $M/\operatorname{Im} f$. Siden M er generert i grad j vet vi at $m \in M$ kan skrives som $m = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i m_i$ hvor $\lambda_i \in \Lambda$ og $m_i \in M_j$. Vi vet at det eksisterer r_i i R slik at elementet $m_i - f(r_i) \in M_{\geq j+1} = JM$. Dermed kan vi se at

$$m - \sum_{i=1}^{t} \lambda_i f(r_i) = \sum_{i=1}^{t} (\lambda_i m_i - \lambda_i f(r_i)) = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i (m_i - f(r_i)) \in JM.$$

Siden $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i f(r_i) \in \operatorname{Im} f$ vil vi få at

$$m + \operatorname{Im} f = m - \sum_{i=1}^{t} \lambda_i f(r_i) + \operatorname{Im} f \in J(M/\operatorname{Im} f)$$

som gir at $J(M/\operatorname{Im} f) \supseteq M/\operatorname{Im} f$. Dermed vil f være på.

(iii) Vi ønsker å vise at $\operatorname{Ker}(f) \subseteq JR$. La $x \in \operatorname{Ker} f$. Det vil si at $f(x) = 0$. Siden R er en gradert modul vil $x = r_0 + r_1 + \ldots + r_n$, hvor $r_i \in R_i$. Om $f(x) = 0$ må $f(r_0) = 0, f(r_1) = 0, \ldots, f(r_n) = 0$. Siden $f(r_0) = \bar{f}(r_0)$, og $\bar{f}$ er en isomorfi må $r_0 = 0$. Det vil si at $x \in R_1 \coprod R_2 \coprod \ldots \subseteq JR$.

(iv) Nå ønsker vi å vise at det eksisterer et gradert projektivt dekke $f\colon P \to M$ hvor P er generert i grad j. Siden Λ_0 er semisimpel, vil alle Λ_0-moduler være projektive, og dermed vil M_j være projektiv som Λ_0-modul. Vi ønsker først å sjekke at tensorproduktet $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$ er projektivt.

Vi vet at tensorproduktet er en projektiv Λ-modul om $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j, -)$ er eksakt. Vi bruker Adjungeringsisomorfien og får at

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j, -) &\cong \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(M_j, \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, -)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(M_j, -) \cdot \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, -).\end{aligned}$$

Siden Λ er en projektiv Λ-modul, får vi at $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes_{\Lambda_0 M_j}, -)$ er produkt av to eksakte funktorer, og er dermed eksakt selv. Da er $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$ en projektiv Λ-modul.

Vi lar $f\colon \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j \to M$, hvor $f(\lambda \otimes m) = \lambda m$, være vår kandidat til det graderte projektive dekket. Vi må sjekke at f er en grad 0 avbildning, $\mathrm{Ker}(f) \subseteq JP$ og at $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$ er generert i grad j.

Vi starter med å finne generatorene til $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$. Vi vet at M_j er endeliggenerert av $\{m_i\}_{i=1}^t \subseteq M_j$ som Λ_0-modul. Det vil si at alle $m \in M_j$ kan skrives som $m = \sum_{i=1}^t \lambda_{0i} m_i$ hvor $\lambda_{0i} \in \Lambda_0$ og $m_i \in M_j$. Vi ser på hva som skjer med et element $\lambda \otimes m \in \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$ hvor $\lambda \in \Lambda$ og $m \in M_j$. Vi får

$$\begin{aligned}\lambda \otimes m = \lambda \otimes \sum_{i=1}^t \lambda_{0i} m_i &= \sum_{i=1}^t \lambda \otimes \lambda_{0i} m_i \\ = \sum_{i=1}^t \lambda\lambda_{0i} \otimes m_i &= \sum_{i=1}^t \lambda\lambda_{0i}(1_\Lambda \otimes m_i)\end{aligned}$$

og vi ser at $\{1_\Lambda \otimes m_i\}_{i=1}^t$ genererer $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$ og dermed at den er generert i grad j.

Vi velger oss et element $\lambda \otimes m$ av grad i i $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$ og ser hva det blir sendt på i M. Siden $\lambda \otimes m$ har grad i og $m \in M_j$ må λ være av grad $i - j$. Da blir $f(\lambda \otimes m) = \lambda m$ i grad $(i - j) + j = i$ som ønsket. Vi ser dermed at f er en grad 0 avbildning.

Vi sjekker så at f er en på avbildning. Vi har at M er generert i grad j slik at alle $m \in M$ vil kunne skrives som $m = \sum_{i=1}^t \lambda_i m_i$ hvor $\lambda_i \in \Lambda$ og $m_i \in M_j$. Vi har at $f(\lambda_i \otimes m_i) = \lambda_i m_i$. Dermed vil $m = \sum_{i=1}^t \lambda_i m_i = \sum_{i=1}^t f(\lambda_i \otimes m_i) = f(\sum_{i=1}^t \lambda_i \otimes m_i)$ og f må være på.

Vi vil nå sjekke at $\mathrm{Ker}(f) \subseteq JP$. Vi lar $\bar{f}\colon \Lambda_0 \otimes_{\Lambda_0} M_j \to M_j$ være f restringert til grad j. Vi ser om vi kan vise at $\bar{f}$ er en Λ_0-avbildning, og $\bar{f}$ er en isomorfi vil $\mathrm{Ker}(f) \subseteq JP$ som ønsket fra punkt (iii).

Vi ser at $\Lambda_0 \otimes_{\Lambda_0} M_j \cong M_j$. Vi vet at M_j er Λ_0-modul, og dermed er $\bar{f}$ en Λ_0-avbildning. Vi ser at $\bar{f} \colon M_j \to M_j$ og det gir oss at $f|_j = \bar{f} = 1_{M_j}$. Og dermed er $\bar{f}$ en isomofi. Da blir $\operatorname{Ker}(f) \subseteq JP$, og vi får at $f \colon \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j \to M$ er det graderte projektive dekke til M.

(v) Vi vet at M er en endeliggenerert Λ-modul og dermed eksisterer det $\{m_1, \ldots, m_n\}$ homogene element fra M_{r_i} som genererer M. Det vil si $m_i \in M_{r_i}$, for alle $i = 1, \ldots, n$, som genererer M som Λ-modul. Vi kan anta at $r_1 \leq \ldots \leq r_n$. Vi ser da at $M = M_{r_1} \coprod M_{r_1+1} \coprod \ldots$ Vi har fra (iv) at M_{r_1} har et gradert projektivt dekke $\phi'_{r_1} \colon \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1} \to M_{r_1}$.

Vi vet at vi har følgende diagran, hvor ϕ_{r_1} er en grad 0 avbildning, og vi ønsker å sjekke om ϕ_{r_1} er et projektivt dekke av M.

$$\begin{tikzcd} & \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1} \arrow[dl, "\phi_{r_1}"'] \arrow[d, "\phi'_{r_1}"] & \\ M \arrow[r, two heads] & M_{r_1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Om $\operatorname{Coker} \phi_{r_1} = 0$ ønsker vi å sjekke om $\phi_{r_1} \colon \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1} \to M$ er et projektivt dekke av M. Vi ser at ϕ_{r_1} er en grad 0 på avbildning, og at $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1}$ er projektiv. Vi må sjekke at $\operatorname{Ker} \phi_{r_1} \subseteq J(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1})$. Da vil ϕ_{r_1} være et projektivt dekke av M.

Vi ser at vi har følgende kommutative diagram med eksakte rader, hvor vi har satt $P = \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1}$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(\phi_{r_1}) \arrow[r, "\delta"] & P \arrow[r, "\phi_{r_1}"] \arrow[d, two heads, "\pi_1"] & M \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\pi_2"] & 0 \\ & & P/JP \arrow[r, "\overline{\phi_{r_1}}"] & M/JM \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Vi ser at om $\pi_1 \delta = 0$ vil $\operatorname{Ker}(\phi_{r_1}) \subseteq J(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1})$ som ønsket. Vi har at $\overline{\phi_{r_1}} \pi_1 \delta = \pi_2 \phi_{r_1} \delta$ og at $\phi_{r_1} \delta = 0$. Siden π_2 er på, vil dermed $\pi_2 \phi_{r_1} \delta = 0$. Dermed ser vi at $\pi_1 \delta = 0$ om $\overline{\phi_{r_1}}$ er en monomorfi.

Vi ser at $\overline{\phi_{r_1}}$ er restringsjonen av ϕ_{r_1} til grad r_1. I grad r_1 er $(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1})_{r_i} = (\Lambda_0 \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1}) \cong M_{r_1}$ og $(M)_{r_1} = M_{r_1}$. Vi ser at $\overline{\phi_{r_1}}$ er en isomorfi, og dermed en monomorfi. Da vil $\phi_{r_1} \colon \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1} \to M$ være et gradert projektivt dekke av M.

Om $\operatorname{Coker} \phi_{r_1} \neq 0$. La $M / \operatorname{Im} \phi_{r_1} = N$. Da vil N være en endeliggenerert Λ-modul. Dermed eksisterer det $\{n_1, \ldots, n_t\}$ homogene element i N slik at $n_i \in N_{s_i}$ for alle $i \in 1, \ldots, t$ genererer N som en Λ-modul og $r_1 < s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_t$. Vi ser da at $N = N_{s_1} \coprod N_{s_1+1} \ldots$. Vi kan dermed tilsvarende ta $\psi\colon \Lambda \otimes_{\Lambda_0} N_{s_1} \to N$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \Lambda \otimes_{\Lambda_0} N_{s_1} \arrow[dll, "\exists \tilde{\psi}"'] \arrow[d, "\psi"] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im}\phi_{r_1} \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi"'] & M/\operatorname{Im}\phi_{r_1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & (M/\operatorname{Im}\phi_{r_1})/\operatorname{Im}\psi \cong M/(\operatorname{Im}\tilde{\psi} + \operatorname{Im}\phi_{r_1}) \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Siden $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} N_{s_1}$ er projektiv, og π er på, vet vi fra Lemma 2.3 at det eksisterer en grad 0 avbildning $\tilde{\psi}$ slik at diagrammet over kommuterer. Dermed blir $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}\tilde{\psi}/\operatorname{Im}\phi_{r_1} = (\operatorname{Im}\tilde{\psi} + \operatorname{Im}\phi_{r_1})/\operatorname{Im}\phi_{r_1}$. Vi ser at

$$\begin{aligned}
(M/\operatorname{Im}\phi_{r_1})/\operatorname{Im}\psi &= (M/\operatorname{Im}\phi_{r_1})/((\operatorname{Im}\tilde{\psi} + \operatorname{Im}\phi_{r_1})/\operatorname{Im}\phi_{r_1}) \\
&\cong M/(\operatorname{Im}\tilde{\psi} + \operatorname{Im}\phi_{r_1}).
\end{aligned}$$

Om $\operatorname{Coker}(\phi_{r_1}, \tilde{\psi}) = 0$ ser vi at $(\phi_{r_1}, \tilde{\psi})$ er på siden $\operatorname{Coker}(\phi_{r_1}, \tilde{\psi}) = 0$ og at $(\tilde{\psi}, \phi_{r_1})$ er en grad 0 avbildning, siden både ϕ_{r_1} og $\tilde{\psi}$ er grad 0 avbildninger. Vi vet også at $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1} \coprod \Lambda \otimes_{\Lambda_0} N_{s_1}$ er projektiv. Må dermed bare sjekke om $\operatorname{Ker}(\phi_{r_1}, \tilde{\psi}) \subseteq J(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1} \coprod \Lambda \otimes_{\Lambda_0} N_{s_1})$.

Vi kaller $(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1} \coprod \Lambda \otimes_{\Lambda_0} N_{s_1})$ for P og $(\phi_{r_1}, \tilde{\psi})$ for α. Vi har dermed følgende kommutative diagram med eksakte rader.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(\alpha) \arrow[r, "\delta"] & P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi_1"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2"] & 0 \\
 & & P/JP \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & M/JM \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Vi ser at om $\pi_1\delta = 0$ vil $\operatorname{Ker}(\alpha) \subseteq J(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1} \coprod \Lambda \otimes_{\Lambda_0} N_{s_1})$ som ønsket. Tilsvarende som før ser vi at $\pi_1\delta = 0$ om $\bar{\alpha}$ er en monomorfi. Vi ser at $M/JM = M_{r_1} \coprod N_{s_1}$. Da blir $\bar{\alpha}$ er restringsjonen av $\phi_{r_1}, \tilde{\psi}$ i grad henholdsvis grad r_1 og s_1. Vi vet at $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1}$ i grad r_1 er M_{r_1} og $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} N_{s_1}$ i grad s_1 er N_{s_1}, og vi ser at $\bar{\alpha}$ vil være en isomorfi.

Dermed må $\bar{\alpha}$ være en monomorfi, og vi får at $\operatorname{Ker}(\phi_{r_1}, \tilde{\psi}) \subseteq J(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1} \coprod \Lambda \otimes_{\Lambda_0} N_{s_1})$ som ønsket.

Om $\operatorname{Coker}(\phi_{r_1}, \tilde{\psi}) \neq 0$ må man gjenta samme konstruksjon. Siden M er endeliggenerert vil denne konstruksjonen stoppe opp.

(vi) Siden P er en gradert projektiv modul, og g er på, eksisterer det $h\colon P \to Q$ slik at $gh = f$, hvor h er en grad 0 avbildning fra Lemma 2.3. Vi får også siden Q er en gradert projektiv modul, og f er på fordi $f\colon P \to M$ er et gradert projektivt dekke, vil det eksistere $h'\colon Q \to P$

slik at $fh' = g$, hvor h' er en grad 0 avbildning fra Lemma 2.3.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, dotted, shift left, "h"] & & 0 \\
& M \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
Q \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, dotted, shift left, "h'"] & & 0
\end{tikzcd}$$

Vi får at $fh' = (gh)h' = g$ som gir at $g - ghh' = 0$. Dermed blir $g(1_Q - hh') = 0$ og vi ser at $\operatorname{Im}(1_Q - hh') \subseteq \operatorname{Ker} g \subseteq JQ$. La $q \in Q$. Da blir $(1_Q - hh')(q) = q - hh'q \in JQ$ som gir $Q/\operatorname{Im} h = J(Q/\operatorname{Im} h)$ og vi får fra Nakayamas Lemma at $Q/\operatorname{Im} h = (0)$. Vi ser dermed at $\operatorname{Im} h = Q$ som gir at h er på. Kan vise tilsvarende at h' er på.

Vi vet at h og h' er grad 0 avbildninger, og vi kan dermed se på restringsjonen av h til grad i, som vi kaller h_i. Vi ser at $h_i \colon P_i \to Q_i$. Vi vet at P_i og Q_i er endeliggenererte semisimple Λ_0-moduler, og dermed venstre artinske. Dermed kan vi måle lengden av P_i og Q_i.

Vi husker at en modul A har endelig lengde om det eksisterer en endelig filtrasjon $A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n = (0)$, hvor A_n er undermoduler av A slik at $A_i/A_{i+1} = (0)$, eller en simpel modul S. Lengden av A er definert til lengden av komposisjonsserien, når A_i/A_{i+1} er en simpel modul S. Vi sier at lengden, $l(A)$, til A er n om komposisjonsserien har lengde n.

Siden h_i er på er $l(Q_i) \leq l(P_i)$, og tilsvarende siden h'_i er på er $l(P_i) \leq l(Q_i)$. Dette gir oss at $l(P_i) = l(Q_i)$. Vi vet dermed at h_i må være en isomorfi, og dermed blir også h en isomorfi.

(vii) Vi vet fra (iv) at A og C har henholdsvis projektive graderte dekker $f \colon P \to A$ og $h \colon R \to C$ generert i grad j. Vi kan lage to kort eksakte følger $0 \to K \to P \to A \to 0$ og $0 \to M \to R \to C \to 0$, hvor $K = \ker(f)$ og $M = \ker h$. Siden R er projektiv eksisterer det en grad 0 avbildning $\nu \colon R \to B$ slik at $\beta\nu = h$.

Hesteskolemmaet gir at det eksisterer en projektiv oppløsning Q av B, og kjedeavbildninger s og t slik at kolonnene danner en eksakt følge av komplekser. La $s = \begin{pmatrix} 1_P \\ 0 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 0 & 1_R \end{pmatrix}$ og $Q = (P \coprod R)$. Da er $0 \to P \to Q \to R \to 0$ eksakt. Vi ser at Q er endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul, siden P og R er det. La $g = \begin{pmatrix} \alpha f & \nu \end{pmatrix}$. Vi sammenfatter opplysningene i et diagram:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "\binom{1_P}{0}"] \arrow[d, "f"] & P\coprod R \arrow[r, "(0\ 1_R)"] \arrow[d, "(\alpha f\ \nu)"'] & R \arrow[r] \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dotted, "\nu"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Vi ser at Q vil være en projektiv oppløsningen av B. Fra Slangelemmaet får vi at $\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} g \to \operatorname{Ker} h \to \operatorname{Coker} f \to \operatorname{Coker} g \to \operatorname{Coker} h$. Vi ser at $\operatorname{Coker} g = 0$ som gir at g er på og at $\operatorname{Coker} f = 0$ som gir at $L \to M$ er på. Siden $P \to Q$ er injektiv, så er $\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} g$ injektiv. Vi vet at sammensetningen $g = \begin{pmatrix}\alpha f & \nu\end{pmatrix}$ er en grad 0 Λ-avbildning fordi αf er er sammensatt av to grad 0 Λ-avbildninger og ν er en grad 0 Λ-avbildning fra Lemma 2.3.

La $\binom{p}{r} \in \operatorname{Ker} g$. Vil vise at $\operatorname{Ker} g \subseteq JQ = J(P \coprod R)$. Ser at

$$ht\tbinom{p}{r} = h(r) = \beta g\tbinom{p}{r} = \beta(0) = 0.$$

Da er $r \in \operatorname{Ker} h \subseteq JR$ siden $h\colon R \to C$ er projektivt dekke. Siden $g\binom{0}{r} \in \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha$ eksisterer det $a \in A$ slik at $\alpha(a) = g\binom{0}{r}$.

Siden f er på eksisterer det $p' \in P$ slik at $f(p') = a$. Det vil si at $\alpha f(p') = gs(p') = g\binom{p'}{0} = \alpha(a)$. Vi ser at $g\binom{0}{r} = g\binom{p'}{0} = \alpha(a)$.

Dermed vil $g\binom{0}{r} - g\binom{p'}{0} = g(\binom{0}{r} - \binom{p'}{0}) = 0$ som gir at $\binom{0}{r} - \binom{p'}{0} \in \operatorname{Ker} g$. Da vil

$$
\begin{aligned}
&\tbinom{p}{r} - [\tbinom{0}{r} - \tbinom{p'}{0}] = \\
&\quad \tbinom{p}{r} - \tbinom{0}{r} + \tbinom{p'}{0} = \tbinom{p+p'}{0} \in \operatorname{Ker} g.
\end{aligned}
$$

Vi ser at $\alpha f(p + p') = g(s(p + p')) = 0$. Siden α er 1-1, vil $p + p' \in \operatorname{Ker} f \subseteq JP$. Fordi $r \in \operatorname{Ker} h \subseteq JR$ vil $b' = \nu(r) \in \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha \subseteq JB$ som gir $a \in JA$ slik at $\alpha(a) = \nu(r) = b'$.

Vi kan velge $p' \in JP$ s.a. $f(p') = a$. Vi har at $p' + p \in JP$ og $p' \in JP$ som gir $p \in JP$ og dermed at $\binom{p}{r} \in J(P \coprod R)$.

□

Vi er nå klare til å bevise at en Koszul-algebra er en kvadratisk algebra. Dette resultatet gjør at vi kan konsentrere oss om kvadratiske algebraer, for en algebra som ikke er kvadratisk vil ikke være en Koszul-algebra.

Kapittel 3

Kvadratiske algebraer

I dette kapittelet definerer vi hva en kvadratisk algebra er, og beviser at alle Koszul-algebraer er kvadratiske algebraer. Vi viser også et eksempel på en kvadratisk algebra som ikke er en Koszul-algebra.

Resultatet som gir oss at alle Koszul-algebraer er kvadratiske algebraer, er utgangspunktet for Kapittel 6 hvor vi har sett på to klasser kvadratiske algebraer over endelige kropper. For disse har vi talt antall algebraer som ikke er Koszul-algebraer.

3.1 Koszul-algebraer er kvadratiske algebraer

For å bevise at alle Koszul-algebraer er kvadratiske algebraer, trenger vi først å vite hva en kvadratisk algebra er. Så vi starter med å definere en kvadratisk algebra, og vi har hentet definisjonen fra artikkel [8].

Definisjon. Vi har en algebra $\Lambda = kQ/I$, hvor Q er et endelig kogger, og I er et gradert ideal inneholdt i J^2. Idealet J er generert av pilene til Q. Vi sier at Λ er en *kvadratisk algebra* hvis I er generert av relasjoner $\rho = \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_i\beta_i$ hvor α_i og β_i er piler og $c_i \in k^*$. Veiene $\alpha_i\beta_i$ har samme start og slutthjørner for $i = 1, \ldots, m$.

Vi trenger også følgende resultat fra homologisk algebra for å kunne bevise at alle Koszul-algebraer er kvadratiske algebraer.

Proposisjon 3.1. *La R være en ring og la M være en R-modul. La I være et ideal i M. Da vil $R/I \otimes_R M \cong M/IM$.*

Vi definerer nå hva det er å være en minimal projektiv presentasjon, og er så klare for å vise hovedteoremet i dette kapittelet.

Definisjon. La M være en Λ-modul, og la følgen $\ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ være en projektive oppløsning av M. Vi kaller $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ den *minimale projektive presentasjonen* til M hvis $f_0\colon P_0 \to M$ er det projektive dekket til M og P_1 er det projektive dekket til $\operatorname{Ker} f_0$.

Vi har tilsvarende for graderte moduler, og vi sier altså at $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ er den *minimale graderte projektive presentasjonen* til M hvis $f_0 \colon P_0 \to M$ er det graderte projektive dekket til M og P_1 er det graderte projektive dekket til $\operatorname{Ker} f_0$.

Dermed er vi klare til å bevise at alle Koszul-algebraer er kvadratiske algebraer. Vi kommer til å bruke dette teoremet som utgangspunkt for Kapittel 6.

Teorem 3.2. *La $\Lambda = kQ/I$ være en gradert algebra og la $I \subseteq J^2$. Hvis Λ er en Koszul-algebra, vil Λ være en kvadratisk algebra.*

Bevis. Vi beviser først at $\Lambda_0 = kQ/J$ har den minimale projektive graderte presentasjonen under.

$$\begin{tikzcd}
 & & J/IJ \arrow[rr] \arrow[dr] & & kQ/I \arrow[r] & kQ/J \arrow[r] & 0 \\
 & I/IJ \arrow[ur] & & J/I \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Først ønsker vi å vise at J/IJ er en projektiv Λ-modul. Vi vet at $J \subseteq kQ$, og at kQ er en heriditær ring. Siden kQ er projektiv vil J være projektiv som kQ-modul. Det at J er projektiv som kQ-modul er ekvivalent med at $\operatorname{Hom}_{kQ}(J, -)$ er eksakt. Dermed ønsker vi å sjekke om $\operatorname{Hom}_\Lambda(J/IJ, -)$ er eksakt. Adjungeringsisomorfien og Proposisjon 3.1 gir oss at

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_\Lambda(J/IJ, -) &\cong \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes_{kQ} J, -) \cong \operatorname{Hom}_{kQ}(J, \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda, -)) \\
&= \operatorname{Hom}_{kQ}(J, -) \cdot \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda, -).
\end{aligned}$$

Vi vet at Λ alltid er en projektiv Λ-modul og at $\operatorname{Hom}_{kQ}(J, -)$ er eksakt. Dermed får vi at J/IJ er en projektiv Λ-modul.

Vi har at $0 \to \operatorname{Ker} g \to kQ/I \xrightarrow{g} kQ/J \to 0$ er en kort eksakt følge og $\operatorname{Ker} g = J/I$. Dermed er $0 \to J/I \to kQ/I \to kQ/J \to 0$ en kort eksakt følge. Tilsvarende er $0 \to \operatorname{Ker} f \to J/IJ \xrightarrow{f} J/I \to 0$ er en kort eksakt følge og $\operatorname{Ker} f = I/IJ$. Dermed er $0 \to I/IJ \to J/IJ \to J/I \to 0$ en kort eksakt følge.

Så sjekker vi at dette er den minimale projektive graderte presentasjonen til Λ_0. Vi sjekker at $J/IJ \xrightarrow{f} J/I$ er det graderte projektive dekket til J/I. Vi vet at J/IJ er projektiv, så må sjekke om $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \mathfrak{J}(J/IJ)$ og at f er en grad 0 Λ-avbildning. Vi ser at $\mathfrak{J}(J/IJ) = J^2/IJ \supseteq I/IJ = \operatorname{Ker}(f)$.

Vi ser så på om f er en grad 0 avbildning. Vi velger en $q \in (J/IJ)$ av grad i, og ser at $f(\bar{q}+IJ) = \bar{q}+I$. Vi ser siden $\bar{q}$ er en sum av veier av lengde

i vil f være en grad 0 avbildning som ønsket. Vi får dermed at $J/IJ \xrightarrow{f} J/I$ er det graderte projektive dekket.

Tilslutt sjekker vi at $kQ/I \xrightarrow{g} kQ/J$ er det graderte projektive dekket til kQ/J. Vi har at $\mathrm{Ker}(g) = J/I$, og vil sjekke om $J \cdot (kQ/I)$ er inneholdt i J/I. Vi ser at $J \cdot (kQ/I) = J \cdot kQ/I = (J \cdot kQ + I)/I = (J + I)/I = J/I$ siden J er et ideal i kQ.

Vi sjekker så at g er en grad 0 avbildning. Vi velger en $q \in kQ/I$ av grad i, og ser at $g(\bar{q} + I) = \bar{q} + J$. Vi ser siden $\bar{q}$ er en sum av veier av lengde i vil g være en grad 0 avbildning som ønsket.

Dermed vil $kQ/I \xrightarrow{g} kQ/J$ være det graderte projektive dekket til kQ/J og vi ser at den graderte projektive presentasjonen er minimal og vi får diagrammet over.

Modulen I/IJ vil være generert i grad 2 siden Λ er en Koszul-algebra og Λ_0 har den minimale projektive graderte presentasjonen vist over. Siden I er et gradert ideal vil $I = I_2 + I_3 + I_4 + \ldots$ og $IJ = (IJ)_2 + (IJ)_3 + (IJ)_4 + \ldots$. Vi vet at

$$IJ = \{ \sum_{\text{end. sum}} i_t j_t \mid i_t \in I, j_t \in J\}$$

For å finne $(IJ)_n$ må vi ta $i_t \in I_m$ og $j_t \in J_{m'}$ slik at $m + m' = n$. Dermed ser vi at $(IJ)_2 = (0)$, $(IJ)_3 = I_2J_1$, $(IJ)_4 = I_2J_2 + I_3J_1$ og generelt at $(IJ)_n = \sum_{n=m+m'} I_m J_{m'}$. Da blir

$$I/IJ \cong I_2 \coprod I_3/I_2J_1 \coprod I_4/(I_2J_2 + I_3J_1) \coprod \ldots$$

Vi ønsker å vise at $x \in I$ er generert av I_2. Hvis $x \in I_2$, følger påstanden automatisk.

Bruker induksjon for å se på $x \in I_n$. Antar at $x \in I_i$ medfører at x er generert av I_2 for $i < n$. La $x \in I_n$ og la $\bar{x} = x + IJ$. Siden x er homogen av grad n vil $\bar{x} \in I_n/(I_2J_{n-2} + I_3J_{n-3} + \ldots + I_{n-1}J_1)$. Siden $I_n/(I_2J_{n-2} + I_3J_{n-3} + \ldots + I_{n-1}J_1) \subseteq I/IJ$ eksisterer det $l_i \in J_{n-2}$ og $r_i \in I_2$ slik at $\bar{x} = \sum_{i=1}^{t} l_i r_i + IJ$. Dermed vil

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \sum_{i=1}^{t} l_i r_i + (I_2J_{n-2} + I_3J_{n-3} + \ldots + I_{n-1}J_1) \\
&= x + (I_2J_{n-2} + I_3J_{n-3} + \ldots + I_{n-1}J_1) \\
&\Rightarrow x - \sum_{i=1}^{t} l_i r_i \in I_2J_{n-2} + I_3J_{n-3} + \ldots + I_{n-1}J_1 \\
&\Rightarrow x \in I_2J_{n-2} + I_3J_{n-3} + \ldots + I_{n-1}J_1 + J_{n-2}I_2.
\end{aligned}$$

Fra induksjonshypotesen ser vi at x er generert av I_2, og dermed at alle Koszul-algebraer er kvadratiske algebraer. □

Vi så at alle Koszul-algebraer er kvadratiske algebraer. Dermed får vi at en algebra som ikke er en kvadratisk algebra ikke er en Koszul-algebra. Vi kan altså konsentrere oss om kvadratiske algebraer når vi skal finne Koszul-algebraer.

3.2 En kvadratisk algebra som ikke er en Koszul-algebra

Det er lett finne et eksempel på en kvadratisk algebra som ikke er en Koszul-algebra, og vi ser nå på et slikt eksempel. Vi ser dermed at ikke alle kvadratiske algebraer er Koszul-algebraer.

Eksempel 2. Vi lar $\Lambda = kQ/I$, for kroppen $k = \mathbb{Z}_2$, hvor Q er koggeret

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

La $I = (\alpha^2, \alpha\beta + \beta^2)$. Da blir en basis for veialgebraen $\{e_1, \alpha, \beta, \beta\alpha, \alpha\beta, \alpha\beta\alpha\}$ med virkning fra Λ gitt ved:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & e_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
\alpha \arrow[d, "\beta"'] & & \beta \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] \\
\beta\alpha \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & & \alpha\beta \\
\alpha\beta\alpha & &
\end{tikzcd}$$

Her ser vi at $\Lambda_0 = S_1$ og at det projektive dekket er $\pi\colon \Lambda e_1 \to S_1$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \Omega^1_\Lambda(S_1) \arrow[rr, hook] & & \Lambda e_1 \arrow[rr, dotted] & & S_1 \\
\text{grad } 0: & & & & & e_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[rr, dotted] & & e_1 \\
\text{grad } 1: & \alpha \arrow[d, "\beta"] & \coprod & \beta \arrow[r, hook] \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & \alpha \arrow[d, "\beta"'] & & \beta \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & \\
\text{grad } 2: & \beta\alpha \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & & \alpha\beta & \beta\alpha \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & & \alpha\beta & \\
\text{grad } 3: & \alpha\beta\alpha & & & \alpha\beta\alpha & & &
\end{tikzcd}$$

Siden $\Omega^1_\Lambda(S_1)$ består av en direktesum, $A_1 \coprod B_1$, kan vi se på A_1 og B_1 hver for seg. Dermed vil en basis for A_1 være $\{\alpha, \beta\alpha, \alpha\beta\alpha\}$ og en basis for B_1 være $\{\beta, \alpha\beta\}$, hvor virkningen er vist over. Her ser vi at $\pi_{A_1}\colon \Lambda e_1 \to A_1$ er det projektive dekket til A_1.

$$
\begin{tikzcd}
\Omega^1_\Lambda(A_1) \arrow[r, hook] & \Lambda e_1 \arrow[r, dotted] & A_1
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\text{grad 1:} & & & e_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & \alpha \arrow[d, "\beta"] \\
\text{grad 2:} & \alpha \arrow[d, "\beta"] & \alpha \arrow[d, "\beta"] & & \beta \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & \beta\alpha \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] \\
\text{grad 3:} & \beta\alpha \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & \beta\alpha \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & & \alpha\beta & \alpha\beta\alpha \\
\text{grad 4:} & \alpha\beta\alpha & \alpha\beta\alpha & & &
\end{tikzcd}
$$

Da er $\Omega^1_\Lambda(A_1)$ isomorf med A_1, og $\Omega^1_\Lambda(A_1)$ vil ha en lineær projektiv oppløsning.

Så ser vi at $\pi_{B_1} \colon \Lambda e_1 \to B_1$ er det projektive dekket til B_1 og vi får at basisen til $\operatorname{Ker} \pi_{B_1}$ er $X_4 = \alpha + \beta, X_5 = \beta\alpha, X_6 = \alpha\beta$ og $X_7 = \alpha\beta\alpha$. Dette gir oss modulen B_2, og vi ser at $\pi_{B_2} \colon \Lambda e_1 \to B_2$ er det projektive dekket.

$$
\begin{tikzcd}
\Omega^1_\Lambda(B_2) \arrow[r, hook] & \Lambda e_1 \arrow[r, dotted] & B_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\text{grad 2:} & & & e_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[rrr, dotted] & & & \alpha+\beta \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
\text{grad 3:} & & \alpha \arrow[d, "\beta"] & & \beta \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & \alpha\beta & & \beta(\alpha+\beta) \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] \\
\text{grad 4:} & \beta\alpha \arrow[r, hook] \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left] & \beta\alpha \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & & \alpha\beta & & & \alpha\beta\alpha \\
\text{grad 5:} & \alpha\beta\alpha & \alpha\beta\alpha & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Her ser vi at oppløsningen ikke er lineær siden $\Omega^1_\Lambda(B_2)$ er generert i grad 4. Vi har dermed at Λ er en kvadratisk algebra, men ikke en Koszul-algebra.

Vi kommer i Kapittel 6 til å se på flere eksempler på dette når vi teller antall Koszul-algebraer av to klasser av kvadratiske algebraer over endelige kropper.

Kapittel 4

Yoneda-algebraer

I dette kapittelet starter vi med å se på noen generelle resultater om moduler som skal hjelpe oss i beviset for hovedresultatet i kapittelet, nemlig at Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra er selv en Koszul-algebra. Deretter definerer vi en Yoneda-algebra, og ser hvordan denne er en gradert algebra.

Vi beviser så at Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra er en Koszul-algebra, og vi ser på hvordan vi kan regne ut det kvadratiske dualet til en kvadratisk algebra. Om algebraen er en Koszul-algebraen vil det kvadratiske dualet være Yoneda-algebraen til Koszul-algebraen. Dette komme vi til å bruke i Kapittel 6.

4.1 Innledende resultater

Før vi starter med å se på Yoneda-algebraer ser vi på noen resultater som skal hjelpe oss i beviset for at Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra selv er en Koszul-algebra.

Vi starter med noen generelle proposisjoner hvor vi har at X, Y, Z, U og M er Λ-moduler og avbildninger mellom dem er Λ-avbildninger.

Proposisjon 4.1. *Vi har følgende diagram hvor $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ er en eksakt følge, og $hf = 0$ for $h\colon Y \to U$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & Z \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "t"] & 0 \\ & U & & \end{tikzcd}$$

Da eksisterer det en entydig avbildning $t\colon Z \to U$, slik at $tg = h$.

Bevis. Vi har at $Z \cong Y/\operatorname{Im} f = Y/\operatorname{Ker} g$. La $z \in Z$. Siden g er på eksisterer det en $y_z \in Y$ slik at $g(y_z) = z$. Vi lar $t\colon Z \to U$ være gitt ved $t(z) = h(y_z)$ og ønsker å vise at t er veldefinert. Derfor antar vi at også $g(y'_z) = z$. Da vil

$g(y_z) - g(y'_z) = g(y_z - y'_z) = 0$ som gir at $y_z - y'_z \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ og dermed at $h(y_z - y'_z) = 0$ siden $hf = 0$. Dermed vil t være veldefinert.

Vi legger merke til at $g(y_{z_1} + y_{z_2}) = g(y_{z_1}) + g(y_{z_2}) = z_1 + z_2$ som gir oss at $y_{z_1+z_2}$ kan velges som $y_{z_1} + y_{z_2}$. Da ser vi at $t(z_1 + z_2) = h(y_{z_1+z_2}) = h(y_{z_1} + y_{z_2}) = h(y_{z_1}) + h(y_{z_2}) = t(z_1) + t(z_2)$.

Vi ser også at $g(y_{\lambda z}) = \lambda z$ og at $g(\lambda y_z) = \lambda g(y_z) = \lambda z$. Vi kan dermed tilsvarende velge $y_{\lambda z}$ som λy_z. Da blir $\lambda t(z) = \lambda h(y_z) = h(\lambda y_z) = h(y_{\lambda z}) = t(\lambda z)$. Vi ser dermed at t er en Λ-homomorfi.

Så sjekker vi at t er entydig. Antar at $t' \colon Z \to U$ slik at $t'g = h$. Da blir $h = t'g = tg$ og vi ser at $t'g - tg = 0$ og dermed at $(t' - t)g = 0$. Siden g er på, må $t' - t = 0$, slik at $t = t'$ og dermed er t en entydig Λ-avbildning. $\square$

Vi kan så bruke denne proposisjonen og bevise følgende resultat. Vi kommer til å bruke resultatet i beviset for Proposisjon 4.10, hvor vi beviser at om M er en lineær modul vil $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) = (\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0))^i \operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0)$ for alle i.

Proposisjon 4.2. *Vi har et ideal $I \subseteq \Lambda$, og lar Y være en Λ-modul slik at $I \cdot Y = (0)$. La $X \xrightarrow{h} Y$ og la π være den naturlige projeksjonen $X \to X/IX$. Da eksisterer det en entydig avbildning $\bar{h} \colon X/IX \to Y$ slik at følgende diagram kommuterer.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/IX \arrow[ur, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd}$$

Bevis. Vi har at $IX \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/IX \to 0$ er eksakt, og at $hi = 0$ fordi $hi(IX) = h(IX) = Ih(X) \subseteq IY = (0)$. Vi kan dermed bruke Proposisjon 4.1, og vi får at det eksisterer en entydig $\bar{h} \colon X/IX \to Y$ slik at $\bar{h}\pi = h$. $\square$

Vi ser så på en proposisjon vi kommer til å bruke i beviset for Proposisjon 4.10. Vi kommer også til å bruke den i beviset for hovedteoremet i dette kapittelet, nemlig at Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra er en Koszul-algebra.

Proposisjon 4.3. *Vi har at et ideal $I \subseteq \Lambda$, og lar Y være en Λ-modul slik at $I \cdot Y = (0)$. Da er $\operatorname{Hom}_\Lambda(X/IX, Y) \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(X, Y)$.*

Bevis. V vet at følgen $0 \to IX \xhookrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/IX \to 0$ er eksakt. Vi anvender $\operatorname{Hom}_\Lambda(-, Y)$ på følgen, og får en eksakt følge $0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(X/IX, Y) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(X, Y) \xrightarrow{t} \operatorname{Hom}_\Lambda(IX, Y) \to \operatorname{Ext}^1_\Lambda(X/IX, Y) \to \operatorname{Ext}^1_\Lambda(X, Y) \to \dots$

Vi ønsker altså å vise at avbildningen $t\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(X, Y) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(IX, Y)$ er nullavbildningen. La $h\colon X \to Y$ og vi ser at $t(h) = hi\colon IX \to Y$. Vi ser at $hi(IX) = h(IX) = Ih(X) \subseteq IY = (0)$ og dermed vil $t(h) = 0$ for alle h og vi får $\operatorname{Hom}_\Lambda(X/IX, Y) \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(X, Y)$. $\square$

Vi legger merke til at om Λ er en gradert algebra kan vi velge $I = J$ og $Y = \Lambda_0$, hvor vi sier at $J = \Lambda_{\geq 1}$. Da vil $J \subseteq \Lambda$, og $J\Lambda_0 = (0)$ som i forutsetningene for Proposisjon 4.2 og Proposisjon 4.3.

Vi ser så på noen resultater om pushout og pullback som vil hjelpe oss i beviset for Proposisjon 4.6, hvor vi beviser at om $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, A)\cdot\mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(C, Z) = \mathrm{Ext}^i_\Lambda(C, A)$, og $Z \in \mathrm{add}\,\Lambda_0$ vil Yoneda-produktet oppføre seg ekstra pent.

I det beviset skal vi regne ut Baersummen av følger. Da er det en hjelp å vite når et diagram er en pushout eller pullback. Vi ønsker nemlig at spesifikke følger er en pushout eller en pullback i Baersummen.

Lemma 4.4. *Vi har følgende kommutative diagram med eksakte rader.*

$$\begin{tikzcd}
\Phi'\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\Phi\colon & 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\delta'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Da vil Φ være pushouten av Φ' langs f.

Bevis. Vi ser at ϕ vil være pushouten av ϕ' langs f om følgende diagram kommuterer, og om det for alle β og β' som gjør at $\beta' f = \beta\alpha$, det eksisterer en unik t som gjør hele diagrammet kommutativt.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\
A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[drr, bend right, "\beta'"'] & B' \arrow[dr, dotted, "\exists! t"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

Først ser vi at følgen $\eta\colon 0 \to A \xrightarrow{\binom{\alpha}{-f}} B \coprod A' \xrightarrow{(f'\ \alpha')} B' \to 0$ eksakt. Vi ser at $(f'\ \alpha')\binom{\alpha}{-f} = f'\alpha - \alpha' f = 0$ siden diagrammet kommuterer. Dermed vil $\mathrm{Im}\binom{\alpha}{-f} \subseteq \mathrm{Ker}\,(f'\ \alpha')$.

Vi velger $\binom{b}{a'} \in \mathrm{Ker}\,(f'\ \alpha')$. Da vil $(f'\ \alpha')\binom{b}{a'} = f'(b) + \alpha'(a') = 0$ og vi ser at $f'(b) = -\alpha'(a')$. Vi ser også at $\delta'(f'(b)+\alpha'(a')) = \delta'(f'(b)) = \delta'(0) = 0$. Dermed er $0 = \delta' f'(b) = \delta(b)$. Vi får at $b \in \mathrm{Ker}\,\delta = \mathrm{Im}\,\alpha$ og dermed eksisterer det en $a \in A$ slik at $\alpha(a) = b$.

Vi ser så at $\alpha'(-f(a)) = -\alpha'(f(a)) = -f'(\alpha(a)) = -f'(b) = \alpha'(a')$. Dermed vil $\alpha'(-f(a)) - \alpha'(a') = \alpha'(-f(a) - a') = 0$ og siden α' er en monomorfi må dermed $-f(a) - a' = 0$ og vi får at $a' = -f(a)$. Vi får dermed at $b = \alpha(a)$ og $a' = -f(a)$, og at $\mathrm{Im}\binom{\alpha}{-f} \supseteq \mathrm{Ker}\,(f'\ \alpha')$ som ønsket.

Vi ser at $\binom{\alpha}{-f}$ er en monomorfi siden α er en monomorfi. Vi viser så at $(f'\ \alpha')$ er en epimorfi. Vi velger $b' \in B'$. Da vil $\delta'(b') \in C$. Vi vet at δ er på, og det eksisterer dermed en $b \in B$ slik at $\delta(b) = \delta'(b')$. Vi ser at $\delta'(b' - f'(b)) = 0$

og dermed at $(b' - f'(b)) \in \operatorname{Ker} \delta' = \operatorname{Im} \alpha'$. Dermed eksisterer det en $a' \in A'$ slik at $\alpha'(a') = b' - f'(b)$ og som ønsket vil $b' = \alpha'(a') + f'(b)$.

Vi kan da sette opp følgende diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\binom{\alpha}{-f}"] & B \coprod A' \arrow[r, "(f' \; \alpha')"] \arrow[d, "(\beta \; \beta')"'] & B' \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "\exists ! t"] & 0 \\ & & X & & \end{tikzcd}$$

Vi ser at $(\beta \; \beta')\binom{\alpha}{-f} = \beta\alpha - \beta' f = 0$ og vi kan dermed bruke Proposisjon 4.1, og får at det eksisterer en unik t slik at $t(f' \; \alpha') = (\beta \; \beta')$. Dette gir at $\beta = f't$ og $\beta' = \alpha' t$ som ønsket. $\square$

Vi har tilsvarende lemma for pullback, som har dualt bevis.

Lemma 4.5. *Vi har følgende kommutative diagram med eksakte rader.*

$$\begin{tikzcd} \Phi' : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \\ \Phi : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & B' \arrow[r] \arrow[u] & C' \arrow[r] \arrow[u, "f"] & 0 \end{tikzcd}$$

Da vil Φ være pullbacken av Φ' langs f.

Vi er nå klare til å se nærmere på Yoneda-algebraer.

4.2 Yoneda-algebra

Vi definerer her en Yoneda-algebra, og ser på endel resultater som kommer til å hjelpe oss med å bevise hovedteoremet i dette kapittelet, nemlig at Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra er selv en Koszul-algebra.

Vi vet at det er en sammenheng mellom Ext-funktorer og utvidelser. For $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, C)$ eksisterer det en bijektiv korrespondanse mellom ekvivalensklassene av utvidelser $0 \to C \to B \to A \to 0$, som vi kaller $e(A, C)$, og elementene i $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, C)$.

Vi definerer tilsvarende de høyere $e^n_\Lambda(A, C)$ som ekvivalensklasser av n-utvidelser $0 \to C \to X_n \to \ldots \to X_1 \to A \to 0$ under ekvivalensrelasjonen generert ved relasjonen som identifiserer de to utvidelsene

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & X_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r] & X'_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X'_1 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \text{og}$$

hvis det er avbildninger $X_m \to X'_m$ for alle $m \in 1, 2, \ldots n$ slik at hvert resulterende kvadrat kommuterer eller tilsvarende at det eksisterer avbildninger

$X'_m \to X_m$ for alle $m \in 1, 2, \dots n$ slik at hvert kvadrat kommuterer. Vi betegner mengden av alle ekvivalensklassene av n-utvidelser ved $e^n_\Lambda(C, A)$, og ser at $e^1_\Lambda(C, A) = e(C, A)$.

Vi ser litt nærmere på sammenhengen mellom $e^n(C, A)$ og $\operatorname{Ext}^n_\Lambda(C, A)$. Vi husker at elementene i $\operatorname{Ext}^n_\Lambda(C, A) = \operatorname{Ker} d^*_{n+1}/\operatorname{Im} d^*_n$ er på formen $\alpha + \operatorname{Im} d^*_n$, hvor $\alpha \in \operatorname{Ker} d^*_{n+1}$. La $P_n \to \dots \to P_1 \to P_0 \to C$ være en projektiv oppløsning av C. La α være en avbildning fra $P_n \to A$, hvor $\alpha \in \operatorname{Ker} d^*_{n+1}$. Da blir det indusert en avbildning $\bar{\alpha}\colon \Omega^n_\Lambda(C) \to A$. Vi får altså følgende diagram:

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
& 0 & \to & \Omega^n_\Lambda(C) & \to & P_{n-1} & \to & P_{n-2} & \to & \cdots & \to & P_0 & \to & C & \to & 0 \\
& & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\alpha}} & & \downarrow & & \| & & & & \| & & \| & & \\
\phi\colon & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E_{n-1} & \to & P_{n-2} & \to & \cdots & \to & P_0 & \to & C & \to & 0
\end{array}$$

Vi ser at ϕ er et element i $e^n_\Lambda(C, A)$. Og vi ser at vi kan fra et element $\alpha + \operatorname{Im} d^*_n \in \operatorname{Ext}^n_\Lambda(C, A)$ gå til et element ϕ i $e^n(C, A)$.

Vi kan også velge oss en $\phi \in e^n(C, A)$ og finne et element i $\operatorname{Ext}^n_\Lambda(C, A)$. Vi lar igjen $\dots \to P_{n+1} \to P_n \to \dots \to P_1 \to P_0 \to C$ være en projektiv oppløsning av C. Ved Comparison Lemma vet vi at det finnes avbildninger mellom den projektive oppløsningen og ϕ. Vi ser vi får følgende diagram:

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
& P_{n+1} & \to & P_n & \to & P_{n-1} & \to & P_{n-2} & \to & \cdots & \to & P_0 & \to & C & \to & 0 \\
& \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \| & & \\
\phi\colon & 0 & \longrightarrow & A & \to & E_{n-1} & \to & E_{n-2} & \to & \cdots & \to & E_0 & \to & C & \to & 0
\end{array}$$

Vi ser at $\alpha \in \operatorname{Ker} d^*_{n+1}$, og vi klarte dermed å gå fra et element i $e^n(C, A)$ til et element i $\operatorname{Ext}^n_\Lambda(C, A)$.

Vi definerer

$$\Delta\colon C \to C \coprod C \dots \coprod C \text{ ved } c \mapsto (c, c, \dots, c) \text{ og}$$
$$\nabla\colon C \coprod C \dots \coprod C \to C \text{ ved } (c_1, c_2, \dots, c_n) \mapsto (c_1 + c_2 + \dots + c_n).$$

Tilsvarende som for $e(C, A)$ kan vi definerer Baersum i $e^n_\Lambda(C, A)$ ved at $[\gamma] + [\gamma'] = [\nabla(\gamma \coprod \gamma')\Delta]$ hvor γ og γ' er i $e^n_\Lambda(A, C)$. Vi får at Baersum er en abelsk gruppeoperasjon på mengden av ekvivalensklasser av n-utvidelser.

Vi kan gange sammen ekstensjoner ved hjelp av *Yoneda-produktet.* Vi tenker da på $\operatorname{Ext}^n_\Lambda(B, A)$ som en følge som starter i A og ender i B. Denne kan settes sammen med $\operatorname{Ext}^m_\Lambda(C, B)$ ved å erstatte

$$\dots \to X_1 \xrightarrow{f_1} B \to 0 \quad \text{og} \quad 0 \to B \xrightarrow{f_2} Y_m \to \dots$$

med

$$\dots \to X_1 \xrightarrow{f} Y_m \to \dots$$

hvor f er sammensetningen av f_1 og f_2.

Vi har at Λ er en gradert algebra. Vi definerer *Yoneda-algebraen til* Λ som

$$E(\Lambda) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \coprod \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \coprod \mathrm{Ext}^2_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \coprod \dots$$

og vi lar Baersum være addisjonen til algebraen, og vi har at multiplikasjonen er gradert og gitt ved Yoneda-produktet definert over for Ext^i_Λ hvor $i \geq 1$. For $i = 0$ får vi et spesialtilfelle, og vi lar $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$ og $\nu \in \mathrm{Ext}^n_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$. Vi definerer $f \cdot \nu$ som pushouten til ν langs f slik:

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
\nu\colon & 0 & \to & \Lambda_0 & \to & E_1 & \to & \cdots & \to & E_n & \to & \Lambda_0 & \to & 0 \\
& & & \downarrow f & & \downarrow & & & & \downarrow & & \| & & \\
f \cdot \nu\colon & 0 & \to & \Lambda_0 & \to & E'_1 & \to & \cdots & \to & E'_n & \to & \Lambda_0 & \to & 0
\end{array}$$

Og tilsvarende $\nu \cdot f$ som pullbacken til ν langs f slik:

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
\nu\colon & 0 & \to & \Lambda_0 & \to & E_1 & \to & \cdots & \to & E_n & \to & \Lambda_0 & \to & 0 \\
& & & \| & & \uparrow & & & & \uparrow & & f\uparrow & & \\
\nu \cdot f\colon & 0 & \to & \Lambda_0 & \to & E''_1 & \to & \cdots & \to & E''_n & \to & \Lambda_0 & \to & 0
\end{array}$$

Yoneda-algebraen blir en gradert algebra når vi betrakter $\mathrm{Hom}(\Lambda_0, \Lambda_0)$ som elementene av grad 0 og $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$ som elementene av grad i.

Vi lar $\mathcal{E} = \coprod_{i \geq 0} \mathrm{Ext}^i_\Lambda(-, \Lambda_0)\colon \mathrm{Gr}\,\Lambda \to \mathrm{Gr}\,E(\Lambda)$ og $\mathcal{L}(\Lambda)$ være den fulle underkategorien av $\mathrm{Gr}(\Lambda)$ bestående av lineære Λ-moduler.

Vi ser at funktoren $\mathcal{E}$ assosierer en gradert Λ-modul M til en gradert $E(\Lambda)$-modul $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0) \coprod \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0) \coprod \dots$.

For hver morfisme $f\colon M \to N$, hvor M og N er graderte moduler, vil funktoren $\mathcal{E}(f)\colon \coprod_{i \geq 0} \mathrm{Ext}^i_\Lambda(N, \Lambda_0) \to \coprod_{i \geq 0} \mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$ være gitt ved følgende pullbackdiagram:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & \Lambda_0 & \to & E_1 & \to & \cdots & \to & E_{i-1} & \to & E' & \to & M & \to & 0 \\
& & \| & & \| & & & & \| & & \downarrow & & \downarrow f & & \\
0 & \to & \Lambda_0 & \to & E_1 & \to & \cdots & \to & E_{i-1} & \to & E_i & \to & N & \to & 0
\end{array}$$

Vi kommer til å se nærmere på egenskapene til $\mathcal{E}$ litt senere i kapittelet.

Vi starter med å se nærmere på egenskapene til $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(C, A)$. Vi har at om $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, A) \cdot \mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(C, Z) = \mathrm{Ext}^i_\Lambda(C, A)$ og $Z \in \mathrm{add}\,\Lambda_0$ vil Yoneda-produktet oppføre seg ekstra pent, og vi beviser følgende proposisjon.

Proposisjon 4.6. *Hvis* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, A) \cdot \mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(C, Z) = \mathrm{Ext}^i_\Lambda(C, A)$ *for* $i \geq 1$ *og* $Z \in \mathrm{add}\,\Lambda_0$*, vil* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A) \cdot \mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(C, \Lambda_0) = \mathrm{Ext}^i_\Lambda(C, A)$.

Bevis. Vi ser først på hva som skjer i $\mathrm{Ext}^1_\Lambda \cdot \mathrm{Ext}^1_\Lambda$. Vi vet at elementene i $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, A) \cdot \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, Z)$ er på formen $\delta_1\gamma_1 + \delta_2\gamma_2 + \ldots + \delta_t\gamma_t$ hvor δ_i er i $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, A)$ og γ_i er i $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, Z)$. Dermed ser vi at om κ er i $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(C, A)$ vil $\kappa = \delta_1\gamma_1 + \delta_2\gamma_2 + \ldots + \delta_t\gamma_t$. Vi ser at det er nok å vise at $\delta_i \cdot \gamma_i$ er et element i $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A) \cdot \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, \Lambda_0)$.

Vi vet at vi alltid har at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A) \cdot \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, \Lambda_0) \subseteq \operatorname{Ext}^2_\Lambda(C, A)$ og vi ønsker å vise at inklusjonen også går andre vei. Siden $Z \in \operatorname{add} \Lambda_0$ vet vi at det eksisterer Z' og n slik at $Z \coprod Z' = \Lambda_0^n$. Vi har følgene $0 \to A \xrightarrow{t} E \xrightarrow{f_1} Z \to 0$ og $0 \to Z \xrightarrow{f_2} F \xrightarrow{s} C \to 0$ som ved hjelp av Yoneda-produktet gir oss følgen

$$\begin{tikzcd}
\phi_1\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "t"] & E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & F \arrow[r, "s"] & C \arrow[r] & 0 \\
& & & & Z \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[dr] & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

som er et element i $\operatorname{Ext}^2_\Lambda(C, A)$. Vi kan også ved å addere på Z' på E, Z og F få følgende eksakte følge

$$\begin{tikzcd}
\phi_2\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "(t\ 0)"] & E \coprod Z' \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "f_1'"'] & & F \coprod Z' \arrow[r, "(s\ 0)"] & C \arrow[r] & 0 \\
& & & & Z \coprod Z' \arrow[ur, "f_2'"'] \arrow[dr] & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

hvor $f_1' = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 1_{Z'} \end{pmatrix}$ og $f_2' = \begin{pmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & 1_{Z'} \end{pmatrix}$. Vi ser at ϕ_2 også er et element i $\operatorname{Ext}^2_\Lambda(C, A)$. Vi ønsker å sjekke om $\phi_1 = \phi_2$. Vi kan sette opp følgende diagram

$$\begin{tikzcd}
\phi_1\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\binom{1_E}{0}"'] & F \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\binom{1_F}{0}"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\phi_2\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\binom{t}{0}"] & E \coprod Z' \arrow[r, "f'"] & F \coprod Z' \arrow[r, "(s\ 0)"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

og vi ser at diagrammet kommuterer, og dermed vil $\phi_1 = \phi_2$. Vi får dermed at

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}^2_\Lambda(C, A) &= \operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z, A) \cdot \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, Z) \\ &= \operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z \coprod Z', A) \cdot \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, Z \coprod Z'). \end{aligned}$$

Vi velger oss $\phi_2 = \nu \cdot \mu \in \operatorname{Ext}^2_\Lambda(C, A)$ hvor $\nu \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, A)$ og $\mu \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, \Lambda_0^n)$. Vi ser på $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, A)$ og lar $n = 3$. Ved å ta pullback fra Λ_0 til Λ_0^3 via den i-te inklusjonen fra Λ_0 får vi følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
\nu\colon & 0 \arrow[rr] & & A \arrow[rrr, "\binom{t}{0}"] & & & E \coprod Z' \arrow[rrr, "f_1'"] & & & \Lambda_0^3 \arrow[rr] & & 0 \\
\nu_1\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[ur, equal] \arrow[rrr, "g_1"] & & & E_1 \arrow[ur, "h_1"] \arrow[rrr, "h_1'"] & & & \Lambda_0 \arrow[ur, "\lambda_1"] \arrow[rrr] & & & 0 \\
\nu_2\colon & 0 \arrow[rr] & & A \arrow[uu, equal] \arrow[rrr, "g_2"] & & & E_2 \arrow[uu, "h_2"] \arrow[rrr, "h_2'"] & & & \Lambda_0 \arrow[uu, "\lambda_2"] \arrow[rr] & & 0 \\
\nu_3\colon & 0 \arrow[rrr] & & & A \arrow[uuul, equal] \arrow[rrr, "g_3"] & & & E_3 \arrow[uuul, "h_3"] \arrow[rrr, "h_3'"] & & & \Lambda_0 \arrow[uuul, "\lambda_3"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Vi ser at ν_i er element i $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A)$.

Vi kan gjøre tilsvarende for $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, \Lambda_0^3)$. Vi tar pushout fra Λ_0^3 til Λ_0 via den i-te projeksjonen og får dermed følgende diagram:

$$
\begin{tikzcd}
\mu\colon & 0 \arrow[rr] & & \Lambda_0^3 \arrow[rrr, "f_2'"] \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dd, "\pi_2"] \arrow[dddr, "\pi_3"] & & & F \coprod Z' \arrow[rrr, "(s\ 0)"] \arrow[dl, "\beta_1"'] \arrow[dd, "\beta_2"] \arrow[dddr, "\beta_3"] & & & C \arrow[rr] \arrow[dl, equal] \arrow[dd, equal] \arrow[dddr, equal] & & 0 \\
\mu_1\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[rrr, "\alpha_1"] & & & F_1 \arrow[rrr, "\delta_1"] & & & C \arrow[rrr] & & & 0 \\
\mu_2\colon & 0 \arrow[rr] & & \Lambda_0 \arrow[rrr, "\alpha_2"] & & & F_2 \arrow[rrr, "\delta_2"] & & & C \arrow[rr] & & 0 \\
\mu_3\colon & 0 \arrow[rrr] & & & \Lambda_0 \arrow[rrr, "\alpha_3"] & & & F_3 \arrow[rrr, "\delta_3"] & & & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Vi ser at μ_j er elementer i $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, \Lambda_0)$.

Vi ganger sammen ν_i med μ_i og får tre følger $\nu_i \cdot \mu_i \in \operatorname{Ext}^2_\Lambda(C, A)$. Vi ser at vi får

$$
\begin{tikzcd}
\nu_i \cdot \mu_i\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E_i \arrow[rr] \arrow[dr] & & F_i \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \\
& & & & \Lambda_0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Vi ser at følgende diagram er kommutative med eksakte rader

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^3 \arrow[r, "\coprod g_i"] \arrow[d, "\nabla"'] & E_1 \coprod E_2 \coprod E_3 \arrow[r, "\coprod h_i'"] \arrow[d, "\nabla \coprod h_i"] & \Lambda_0^3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"] & E \coprod Z' \arrow[r, "f_1'"] & \Lambda_0^3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

og

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda_0^3 \arrow[r, "\coprod \alpha_i"] \arrow[d, equal] & F_1 \coprod F_2 \coprod F_3 \arrow[r, "\coprod \delta_i"] & C^3 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0^3 \arrow[r, "f_2'"] & F \coprod Z' \arrow[r, "(s\ 0)"] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{smallmatrix}\right)"] & C \arrow[r] \arrow[u, "\Delta"'] & 0
\end{tikzcd}
$$

Vi ser at det første diagrammet har eksakte rader, siden vi vet at $0 \to A \xrightarrow{g_i} E_i \xrightarrow{h_i'} \Lambda_0 \to 0$ er eksakt, og dermed vil summen også være eksakt. Vi ser at $\nabla \coprod h_i \coprod g_i = \nabla \coprod h_i g_i = \nabla \coprod \left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ som ønsket. Vi ser også at $f_1' \nabla \coprod h_i = f_1' \sum h_i = \coprod f_1' h_i = \coprod \lambda_i h_i' = \coprod \lambda_i \coprod h_i' = 1_{\Lambda_o^n} \coprod h_i'$.

Vi ser tilsvarende at det andre diagrammet har eksakte rader og kommuterer. Vi kan dermed bruke Lemma 4.4 og 4.5 og får at Baersummen av

$\nu_i \cdot \mu_i$, som vi kaller $\nu\mu_B$, er:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 0 \arrow[r] & A^3 \arrow[r] \arrow[dd, "\nabla"] & E_1 \coprod E_2 \coprod E_3 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & F_1 \coprod F_2 \coprod F_3 \arrow[r] \arrow[dd, equal] & C^3 \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
 & & & & \Lambda_0^3 \arrow[ur] \arrow[dd, equal] & & & \\
 & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[dd, equal] & E \coprod Z' \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, equal] & & F_1 \coprod F_2 \coprod F_3 \arrow[r] & C^3 \arrow[r] & 0 \\
 & & & & \Lambda_0^3 \arrow[ur] \arrow[dd, equal] & & & \\
\nu\mu_B\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \coprod Z' \arrow[rr] \arrow[dr] & & F \coprod Z' \arrow[r] \arrow[uu] & C \arrow[r] \arrow[uu, "\Delta"'] & 0 \\
 & & & & \Lambda_0^3 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Da vil $\nu\mu_B = \phi_2$. Vi ser at vi kan ta elementer fra $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A)$ og $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, \Lambda_0)$ og legge sammen ved hjelp av en endelig Baersum og få et nytt element i $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(C, A)$. Dermed er $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(C, A) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A) \cdot \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, \Lambda_0)$ som ønsket.

Vi kan gjøre tilsvarende for alle n, og får dermed at for $Z \in \operatorname{add} \Lambda_0$ vil $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(C, A) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, A) \cdot \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, Z) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, A) \cdot \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, \Lambda_0^n) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A) \cdot \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, \Lambda_0)$.

Tilsvarende kan vi gjøre for $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, A) \cdot \mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(C, Z) = \mathrm{Ext}^i_\Lambda(C, A)$, hvor $i \geq 3$, og $Z \in \operatorname{add} \Lambda_0$. Vi vil dermed få at $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A) \cdot \mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(C, \Lambda_0) = \mathrm{Ext}^i_\Lambda(C, A)$ for $i \geq 2$.

Vi ser på tilfelle $i = 1$ til slutt. Det vil altså si $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, A) \operatorname{Hom}_\Lambda(C, Z) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$, hvor $Z \in \operatorname{add} \Lambda_0$. Vi ønsker å vise at vi kan få $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A) \operatorname{Hom}_\Lambda(C, \Lambda_0)$.

Vi har alltid at $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A) \supseteq \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A) \operatorname{Hom}_\Lambda(C, \Lambda_0)$ og ønsker å vise at det holder også andre veien.

Vi vet at elementene i $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, A) \cdot \operatorname{Hom}_\Lambda(C, Z)$ er på formen $\delta_1 g_1 + \delta_2 g_2 + \ldots + \delta_t g_t$ hvor δ_i er i $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, A)$ og g_i er i $\operatorname{Hom}_\Lambda(C, Z)$. Dermed ser vi at om κ er i $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ vil $\kappa = \delta_1 g_1 + \delta_2 g_2 + \ldots + \delta_t g_t$. Vi ser at det er nok å vise at $\delta_i \cdot g_i$ er et element i $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A) \cdot \operatorname{Hom}_\Lambda(C, \Lambda_0)$.

La $h \in \operatorname{Hom}_\Lambda(C, Z)$ og la $\phi \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, A)$. Vi vet da at $\phi \cdot h = \phi'$ fra antagelsene våre. Og vi ser at ϕ' er et element i $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$. Siden $Z \in \operatorname{add} \Lambda_0$ eksiterer det Z' slik at $Z \coprod Z' = \Lambda_0^n$. Vi ser vi får følgende kommutative diagram:

$$
\begin{tikzcd}
\phi\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & E \arrow[r, "\beta"] & Z \arrow[r] & 0 \\
\phi' = \phi \cdot h\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[u, "h'"] \arrow[d, "\binom{0}{h'}"] & C \arrow[r] \arrow[u, "h"] \arrow[d, "\binom{0}{h}"] & 0 \\
\phi''\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\binom{0}{\alpha}"'] & Z' \coprod E \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1_{Z'} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}"'] & Z' \coprod Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Vi benevner $\begin{pmatrix} 0 \\ h' \end{pmatrix}$ med $\bar{h}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$ med $\tilde{h}$. Vi ser at $\tilde{h} \in \operatorname{Hom}_\Lambda(C, \Lambda_0^n)$, og vi ser at $\phi'' \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, A)$ og vi lar $\tilde{E} = Z' \coprod E$. Tilsvarende kaller vi $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \tilde{\alpha}$ og $\begin{pmatrix} 1_{Z'} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \tilde{\beta}$.

Vi tar i-te inklusjon og lager pullbacker av ϕ'' via λ_i og betegner denne ϕ_i.

$$\begin{tikzcd}
\phi'': & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & \tilde{E} \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \Lambda_0^n \arrow[r] & 0 \\
\phi_i: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f_i"] \arrow[u, equal] & E_i \arrow[r, "f_i'"] \arrow[u, "g_i"] & \Lambda_0 \arrow[r] \arrow[u, "\lambda_i"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Vi ser at $\phi_i \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A)$. Vi lager den i-te projeksjonen av $\begin{pmatrix} 0 & h \end{pmatrix} \colon C \to \Lambda_0^n$ og ser at $h_i : C \to \Lambda_0$ er $h_i = \pi_i \tilde{h}$.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[rr, bend right, "h_i"'] & \Lambda_0^n \arrow[r, "\pi_i"] & \Lambda_0
\end{tikzcd}$$

Vi legger merke til at $\phi_i \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A)$ og $h_i \in \operatorname{Hom}(C, \Lambda_0)$. Om vi kan summe disse følgene og se at dette gir oss et element i $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ vil vi se at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A) \subseteq \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A) \operatorname{Hom}(C, \Lambda_0)$ som ønsket. Vi tar Yoneda-produktet $\phi_i h_i$ og får

$$\begin{tikzcd}
\phi_i: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f_i"] & E_i \arrow[r, "f_i'"] & \Lambda_0 \arrow[r] & 0 \\
\phi_i h_i: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[u, equal] & E_i' \arrow[r, "\gamma'"'] \arrow[u, "h_i'"] & C \arrow[r] \arrow[u, "h_i"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Først beviser vi at følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, "\coprod \gamma"] \arrow[d, equal] & \coprod E_i' \arrow[d, "\coprod h_i'"] \\
A^n \arrow[r, "\coprod f_i"] \arrow[d, "\nabla"'] & \coprod E_i \arrow[d, "\nabla(\coprod g_i)"] \\
A \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & \tilde{E}
\end{tikzcd}$$

Vi ser lett at $(\coprod h_i')(\coprod \gamma) = \coprod h_i' \gamma = \coprod f_i$ og vi ser at $\tilde{\alpha} \nabla = \sum \tilde{\alpha} = \sum g_i f_i = \nabla(\coprod g_i)(\coprod f_i)$. Dermed vil diagrammet være kommutativt som ønsket.

Vi er da klare til å ta Baersummen av $\phi_i h_i$ og vi får følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
\coprod \phi_i h_i: & 0 \arrow[rr] & & A^n \arrow[rr, "\coprod \gamma"] \arrow[d, "\nabla"] & & \coprod E_i' \arrow[rr, "\coprod \gamma'"] \arrow[d] \arrow[ddl, "t"'] & & C^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & 0 \arrow[rr] & & A \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dl, equal] \arrow[dd, equal] & & F \arrow[rr, "\delta'"] \arrow[dl, dotted, "b"] & & C^n \arrow[r] \arrow[dl, "t'"'] & 0 \\
\phi'' & 0 \arrow[r] & A \arrow[rr, "\tilde{\alpha}"] & & \tilde{E} \arrow[rr, "\tilde{\beta}"] & & \Lambda_0^n \arrow[rr] & & 0 \\
Baersummen: & 0 \arrow[rr] & & A \arrow[rr, "\omega"'] \arrow[ul, dotted, "m"] & & F' \arrow[rr, "\omega'"'] \arrow[uu, "a"] \arrow[ul, dotted] & & C \arrow[r] \arrow[uu, "\Delta"'] \arrow[ul, "\tilde{h}"] & 0
\end{tikzcd}$$

Vi har benevnt $\nabla(\coprod g_i)(\coprod h_i) = t$ i diagrammet. Vi vet fra det kommutative diagrammet foran at $\tilde{\alpha}\nabla = t(\coprod \gamma) = \nabla(\coprod g_i)(\coprod h_i)(\coprod \gamma)$ og dermed vet vi at det eksisterer en entydig avbildning $b\colon F \to \tilde{E}$. Har også latt $t' = \coprod h_i$.

Vi kan finne en avbildning fra $F' \to \tilde{E}$. Vi ser at $\tilde{h}\omega' = t'\Delta\omega' = t'\delta' a = \tilde{\beta} ba$ og dermed kan vi få en avbildning $ba\colon F' \to \tilde{E}$. Vi vet derfor at det eksisterer en avbildning fra $m\colon A \to A$ og vi ønsker å vise at m kan velges til å være identiteten på A. Vi ser at $\tilde{\alpha}m = ba\omega = b\delta 1_A = \tilde{\alpha}1_A 1_A$ og vi kan velge $m = 1_A$.

Dermed ser vi at Baersummen er pullback av ϕ'' via $\tilde{h}$, og vi husker at ϕ' var pullbacken av ϕ'' via $\tilde{h}$. Dermed ser vi at $\phi' \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ vil være ekvivalent til Baersummen av $\phi_i h_i$, og vi får dermed at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A) \subseteq \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, A) \cdot \operatorname{Hom}_\Lambda(C, \Lambda_0)$ som ønsket. $\square$

Vi husker at vi definerte en Koszul-algebra som en gradert algebra hvor alle de simple modulene hadde en gradert lineær projektiv oppløsning. Det er dermed nyttig å vite mer om hvordan en lineær modul oppfører seg.

Vi beviser en proposisjon som vi kommer til å bruke når vi beviser Proposisjon 4.8, som sier at om M er en lineær Λ-modul vil også $M_{\geq n}[n]$ være en lineær Λ-modul. Vi kommer til å bruke Proposisjon 4.8 når vi beviser at Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra er en Koszul-algebra.

Proposisjon 4.7. *La A, B, C være graderte Λ-moduler. Hvis $0 \to A \to B \to C \to 0$ er eksakt, og Λ-modulene A, B, C er generert i grad 0 og $A, B \in \mathcal{L}(\Lambda)$, så er $C \in \mathcal{L}(\Lambda)$.*

Bevis. Fra Proposisjon 2.4 vet vi at det eksisterer endeliggenererte projektive moduler P, Q og R slik at følgende diagram kommuterer, og f, g og h er graderte projektive dekker.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "g"] & R \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Siden A og $B \in \mathcal{L}(\Lambda)$ er A' og B' generert i grad 1. Avbildningen α er på, og dermed vil en generatormengde for B' generere C'. Siden generatormengden for B' er i grad 1, vil C' bli generert i grad 1 som ønsket. Ser så på den projektive oppløsningen av C' for å se om denne er lineær i første steg. Vi kan skifte $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$ til grad 0, og ser dermed at vi er i samme situasjon som vi startet i. Dermed vil vi ved induksjon se at $C \in \mathcal{L}(\Lambda)$. □

Vi er nå klare for å bevise følgende nyttige egenskap ved lineære graderte moduler.

Proposisjon 4.8. *Hvis $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$, så er $M_{\geq n}[n] \in \mathcal{L}(\Lambda)$ for alle $n \geq 0$.*

Bevis. La $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$. Vi viser først at $M_{\geq 1}[1] \in \mathcal{L}(\Lambda)$. Vi vet at $0 \to M_{\geq 1} \to M \to M/M_{\geq 1} \to 0$ er eksakt. Vet fra Proposisjon 2.4 at M har et projektivt dekke, P_0, og får følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & K_1 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{\geq 1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & M_{\geq 1} \arrow[r] & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Slangelemmaet gir oss den korte eksakte følgen $0 \to X_1 \to K_1 \to M_{\geq 1} \to 0$. Siden M og $M_0 \in \mathcal{L}(\Lambda)$ vil X_1 og K_1 være generert i grad 1 og siden $K_1 \to M_{\geq 1}$ er på, vil også $M_{\geq 1}$ være generert i grad 1. Dermed blir $0 \to X_1[1] \to K_1[1] \to M_{\geq 1}[1] \to 0$ eksakt, og generert i grad 0. Modulene $X_1[1]$ og $K_1[1]$ er i $\mathcal{L}(\Lambda)$, og vi får dermed fra Proposisjon 4.7 at $M_{\geq 1}[1]$ er lineær.

Vi får at $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$ medfører at $M_{\geq 1}[1] \in \mathcal{L}(\Lambda)$. Vi bruker induksjon for å vise at $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$ medfører at $M_{\geq n}[n] \in \mathcal{L}(\Lambda)$. Vi antar at $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$ medfører at $M_{\geq n-1}[n-1] \in \mathcal{L}(\Lambda)$ og kaller $M_{\geq n-1}[n-1] = M'$. Da vil $M' \in \mathcal{L}(\Lambda)$ medføre at $M'_{\geq 1}[1] \in \mathcal{L}(\Lambda)$ og dermed blir

$$M'_{\geq 1}[1] = (M_{\geq n-1}[n-1])_{\geq 1}[1] = M_{\geq n}[n] \in \mathcal{L}(\Lambda)$$

som ønsket. □

Vi har også et resultat som sier oss hvor syzygyene, $\Omega^i_\Lambda(M) = \operatorname{Ker} f_{i-1}$, til en projektiv oppløsning av M vil befinne seg.

Proposisjon 4.9. *La $\Lambda = kQ/I$ for et ideal I. La M være en endeliggenerert gradert Λ-modul som er generert i grad 0. La*

$$\nu\colon\quad \begin{tikzcd}
P_n \arrow[rr, "f_n"] \arrow[dr] & & P_{n-1} \arrow[rr, "f_{n-1}"] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& \Omega^n_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Omega^{n-1}_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Omega^1_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

være en gradert Λ-projektiv oppløsning av M og la ν være en lineær oppløsning av lengde n. Da vil $\Omega^{i+1}_\Lambda(M) \subseteq JP_i$ og $J\Omega^{i+1}_\Lambda(M) = J^2P_i \cap \Omega^{i+1}_\Lambda(M)$ for alle $0 \leq i \leq n$.

Bevis. Vi vet at oppløsningen er lineær. Det vil si at for $0 \leq i \leq n$ vil P_i være generert i grad i. Siden ν er eksakt vil $f_i(P_i) = \Omega^i_\Lambda(M)$. Dermed ser vi at $\Omega^{j+1}_\Lambda(M)$ er generert i grad $j+1$ for $0 \leq j \leq n-1$. Men P_j er generert i grad j slik at elementene av grad $j+1$ må være i JP_j. Dermed vil $\Omega^{j+1}_\Lambda(M) \subseteq JP_j$.

Vi ser tilsvarende at $J\Omega^{j+1}_\Lambda(M) \subseteq J^2P_j$. Vi vet at $J\Omega^{j+1}_\Lambda(M) \subseteq \Omega^{j+1}_\Lambda(M)$ og får dermed at $J\Omega^{j+1}_\Lambda(M) \subseteq J^2P_i \cap \Omega^{j+1}_\Lambda(M)$. Vi ønsker så å vise den motsatte inklusjonen.

La x i $J^2P_j \cap \Omega^{j+1}_\Lambda(M)$ være et homogent element av grad i, og vi ser at $i \geq j+2$. Vi ønsker å vise at x er i $J\Omega^{j+1}_\Lambda(M)$. Hvis x ikke er i $J\Omega^{j+1}_\Lambda(M)$ vil x være en generator for $\Omega^{j+1}_\Lambda(M)$. Men $\Omega^{j+1}_\Lambda(M) = f_{j+1}(P_{j+1})$ er generert i grad $j+1$, som gir en motsigelse mot at $i \geq j+2$. Vi ser dermed at $J\Omega^{i+1}_\Lambda(M) = J^2P_i \cap \Omega^{i+1}_\Lambda(M)$ for $0 \leq i \leq n$. □

4.3 En generator for $\mathcal{E}(M)$

Vi har en siste egenskap ved lineære graderte moduler som vil være til hjelp for å bevise at Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra selv er en Koszul-algebra. Vi husker at $\mathcal{E} = \coprod_{i\geq 0} \operatorname{Ext}^i_\Lambda(-, \Lambda_0)\colon \operatorname{Gr}\Lambda \to \operatorname{Gr}E(\Lambda)$. Vi beviser at $\mathcal{E}(M)$ er generert i grad 0 som en $E(\Lambda)$-modul. I tillegg viser vi at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)^i\mathcal{E}(M)_0 = \mathcal{E}(M)_i$ når M er en lineær Λ-modul.

Dette vil være nyttig når vi ser på om de simple modulene i Yoneda-algebraen er lineære. Siden vi antar at Λ er en Koszul-algebra vet vi at Λ_0 er lineære Λ-moduler, og vi kan dermed velge $M = \Lambda_0$.

Teorem 4.10. *La $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$. Da vil $[\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)]^i \cdot \operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$ for alle i.*

Bevis. Vi viser det først for tilfelle $i > 1$, og ser tilslutt på $i = 1$. La $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$ og la $\Omega^i_\Lambda(M)$ være den i'te syzygyen til M. Da får vi en eksakt følge $0 \to \Omega^i_\Lambda(M) \to P_{i-1} \to \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \to 0$. Vi anvender $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \Lambda_0)$ på følgen og får at $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(M)), \Lambda_0) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega^{i-1}(M), \Lambda_0)$. Dermed får vi ved dimensjonsskift og Proposisjon 4.3 at

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) &\cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega^{i-1}_\Lambda(M), \Lambda_0)\\ &\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(M), \Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(M)/J\Omega^i_\Lambda(M), \Lambda_0).\end{aligned}$$

Vi vet at $0 \to \Omega^i_\Lambda(M) \xrightarrow{\mu_i} P_i \xrightarrow{\pi_i} \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \to 0$ er eksakt. Fra Proposisjon 2.4 og eksakthet vet vi at $\mathrm{Ker}\,\pi_i = \mathrm{Im}\,\mu_i \subseteq JP_{i-1}$. La g være et element i $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(M), \Lambda_0)$ og la t være projeksjonen fra $\Omega^i_\Lambda(M) \to \Omega^i_\Lambda(M)/J\Omega^i_\Lambda(M)$. Fra Proposisjon 4.2 vet vi at det eksisterer en avbildning $\bar{g}\colon \Omega^i_\Lambda(M)/J\Omega^i_\Lambda(M) \to \Lambda_0$ slik at $g = \bar{g}t$ og diagrammet kommuterer. Vi kan dermed sette opp følgende diagram Ψ.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[d, equal] & P_{i-1} \arrow[r, "\pi_i"] & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[r] & 0 \\
& \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r, hook, "\nu"] \arrow[d, two heads, "t"] \arrow[ddl, phantom] \arrow[dd, bend right=80, "g"'] & JP_{i-1} \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads, "q"] & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^i_\Lambda(M)/J\Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r, shift left, "\bar{\nu}"] \arrow[d, "\bar{g}"] & JP_{i-1}/J^2P_{i-1} \arrow[l, dotted, shift left, "\omega"] & & \\
& \Lambda_0 & & &
\end{tikzcd}$$

Vi beviser først at $\bar{\nu}$ er en monomorfi. La $x \in \Omega^i_\Lambda(M)/J\Omega^i_\Lambda(M)$. Siden t er på vet vi det eksisterer x' slik at $t(x') = x$. Vi antar at $\bar{\nu}(x) = 0$ og vil vise at $x = 0$. Vi ser at $\bar{\nu}(x) = \bar{\nu}t(x') = q\nu(x') = 0$. Det vil si at $\nu(x')$ er et element i J^2P_{i-1}. Siden ν er en grad 0 inklusjon vil dermed $x' \in J^2P_{i-1}$. Vi ser dermed at $x' \in \Omega^i_\Lambda(M) \cap J^2P_{i-1}$ og vi får fra Proposisjon 4.9 at $x' \in J\Omega^i_\Lambda(M)$. Dermed blir $x = 0$, og $\bar{\nu}$ er en monomorfi.

Siden $\bar{\nu}$ er en monomorfi og JP_{i-1}/J^2P_{i-1} er en semisimpel Λ_0-modul vil $\bar{\nu}$ splitte. Dermed vil det eksistere $\omega\colon JP_{i-1}/J^2P_{i-1} \to \Omega^i_\Lambda(M)/J\Omega^i_\Lambda(M)$ og vi kan sette opp følgende diagram hvor vi har tatt pushout av JP_{i-1} via

$\bar{g}\omega q$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[d, hook, "\nu"] \arrow[dddd, bend right=60, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & JP_{i-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "q"] & P_{i-1} \arrow[r] \arrow[ddd, "g'"] & P_{i-1}/JP_{i-1} \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & 0 \\
 & JP_{i-1}/J^2P_{i-1} \arrow[d, "\omega"] & & & \\
 & \Omega^i_\Lambda(M)/J\Omega^i_\Lambda(M) \arrow[d, "\bar{g}"] & & & \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E \arrow[r] & P_{i-1}/JP_{i-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Siden diagrammet er kommutativt og har eksakte rader vil det eksistere en unik f som får diagrammet til å kommutere. Dermed kan vi forenkle hele diagrammet, og sette $P_{i-1}/JP_{i-1} = Z$, og få følgende kommutative diagram:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & P_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Vi kan da lage pushout av $\Omega^{i-1}_\Lambda(M)$ via f og

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & P_{i-2} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{i-2}_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & \Omega^{i-2}_\Lambda(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

sette dette sammen med den projektive oppløsningen av M.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z \arrow[r] & E_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{i-3} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & & \Omega^{i-2}_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}
$$

Denne følgen vil være et element i $\mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(M,Z)$. Vi setter dette sammen med den nederste linja i det kommutative diagrammet og får en eksakt følge som vil være et element i $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,\Lambda_0)$ gitt ved Yoneda sammensetningen $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z,\Lambda_0)\cdot\mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(M,Z)$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_2 \arrow[r] & P_{i-3} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & & Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Vi kan også lage pushout fra $\Omega^i_\Lambda(M)$ via g og

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & P_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "g''"] & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

setter dette sammen med den projektive oppløsningen av M, og får dermed

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{i-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

Denne eksakte følgen vil være et element i $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$.

Vi ønsker å vise at disse to elementene i $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$ er like ved å se på om de er i samme ekvivalensklasse.

$$\begin{tikzcd}
\ldots P_{i+1} \arrow[r] & P_i \arrow[rr] \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[ddd, dotted] & & P_{i-1} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddd, dotted, "g''"] & & P_{i-2} \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & P_{i-3} \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & M \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & 0 \\
& & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddl, dotted, "g"] & & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddd, equal] & & & & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & & \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{i-2} \arrow[r] & P_{i-3} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & &
\end{tikzcd}$$

Vi vil fylle inn diagrammet slik at det kommuterer, og vi får en avbildning $P_i \to \Lambda_0$. Vi kan sette på $g''\colon P_{i-1} \to E_1$ og $g\colon \Omega^i_\Lambda(M) \to \Lambda_0$. Dermed kan vi gå fra $P_i \to \Lambda_0$ ved $P_i \xrightarrow{\mu_i} \Omega^i_\Lambda(M) \xrightarrow{g} \Lambda_0$.

$$\begin{tikzcd}
\ldots P_{i+1} \arrow[r] & P_i \arrow[rr] \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[ddd, dotted] & & P_{i-1} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddd, dotted, "g'"] & & P_{i-2} \arrow[r] \arrow[ddd, dotted, "f'"] & P_{i-3} \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & M \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & 0 \\
& & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddl, dotted, "g"] & & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dddd, dotted, "f"] & & & & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & & \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[rr] & & E \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_2 \arrow[r] & P_{i-3} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & & Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & &
\end{tikzcd}$$

Vi kan fylle inn diagrammet slik at det kommuterer med $P_{i-2} \xrightarrow{f'} E_2$, $\Omega_\Lambda^{i-1}(M) \xrightarrow{f} Z$, $P_{i-1} \xrightarrow{g'} E$ og $\Omega^i_\Lambda(M) \xrightarrow{g} \Lambda_0$ og ser at $P_i \to \Lambda_0$ er sammensatt av $P_i \xrightarrow{\mu_i} \Omega^i_\Lambda(M) \xrightarrow{g} \Lambda_0$.

Da er begge følgene i $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$ representert av samme avbildning fra $P_i \to \Lambda_0$, og er dermed like. Vi får altså at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0) \cdot \operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z) = \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$ for $i > 1$.

Vi vet at $Z = P_{i-1}/JP_{i-1} \in \operatorname{add} \Lambda_0$ og vi bruker Proposisjon 4.6 og ser at for $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$ vil $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \cdot \operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$ for alle $i > 1$ som ved induksjon gir at $[\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)]^{i-1} \cdot \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$.

Vi ønsker så å vise det for $i = 1$. Vi vet at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda) \operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0) \subseteq \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0)$, og ønsker å vise inklusjonen andre veien. Vi vet at M er en lineær Λ-modul, og har et projektivt dekke, P_0. Vi kan da sette opp følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
\epsilon: & 0 \arrow[r] & \Omega^1_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\phi: & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Vi ser at ϕ er i $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0)$, og ønsker å vise at denne er bygget opp av $\sum \nu_i h_i$ hvor $\nu_i \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$ og $h_i \in \operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0)$. Vi får tilsvarende tilfellet $i > 1$ diagrammet Ψ og vi kan med tilsvarende begrunnelser sette opp følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \Omega^1_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] \arrow[dd, bend right=60, "g"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & JP_0 \arrow[r] \arrow[d, "\bar{g}\omega q"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0/JP_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\phi': & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E \arrow[r] & P_0/JP_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Vi lar $Z = P_0/JP_0$ og ser at vi kan få følgende diagram hvor ϕ'' er pullback av ϕ' langs f, og vi ønsker å vise at de stiplede avbildningene r og s eksisterer.

$$\begin{tikzcd}
\epsilon: & 0 \arrow[rr] & & \Omega^1_\Lambda(M) \arrow[rr] \arrow[dd, "g"] \arrow[dl, dotted, "r"'] & & P_0 \arrow[rr, "a"] \arrow[dd, "b"] \arrow[dl, dotted, "s"'] & & M \arrow[r] \arrow[dd, "f"] \arrow[dl, equal] & 0 \\
\phi'': & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[rr] \arrow[dr, equal] & & E'' \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "e"'] & & M \arrow[rr] \arrow[dr, "f"] & & 0 \\
\phi': & 0 \arrow[rr] & & \Lambda_0 \arrow[rr] & & E \arrow[rr, "d'"'] & & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Vi ser at $f1_Ma = fa = d'b$ og vi får fra pullbackegenskapene til E'' at det eksisterer en unik s slik at $es = b$ og $ds = 1_Ma$. Da eksisterer en entydig avbildning r slik at diagrammet kommuterer og vi ser at $r = g$.

Vi ser at ϕ'' er pushouten av ϵ langs g, og vi husker at ϕ var pushouten av ϵ langs g. Vi ser dermed at $\phi'' \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0)$. Siden ϕ'' er pullbacken av ϕ' langs f vil $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0) \subseteq \operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0) \cdot \operatorname{Hom}_\Lambda(M, Z)$.

Vi vet at $Z = P_{i-1}/JP_{i-1} \in \operatorname{add}\Lambda_0$ og vi bruker Proposisjon 4.6 og ser at for $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$ vil $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \cdot \operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0)$ og vi fullfører induksjonen som vi startet på for tilfelle $i > 1$ og får at $[\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)]^i \cdot \operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$ som ønsket. □

Vi har nå lagt grunnlaget for å kunne bevise hovedteoremet i dette kapittelet, nemlig at Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra selv er en Koszul-algebra. Dette er et resultat vi kommer til å bruke i Kapittel 6 når vi sjekker hvor stor andel av de to klassene av algebraer som er Koszul-algebraer.

4.4 Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra

I dette kapittelet bruker det vi har bevist i de foregående kapitlene for å bevise at Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra selv er en Koszul-algebra.

Teorem 4.11. *La Λ være en Koszul-algebra. Da er Yoneda-algebraen $E(\Lambda)$ en Koszul-algebra.*

Bevis. Fra definisjonen får vi at $E(\Lambda)$ er en Koszul-algebra om $E(\Lambda)_0 = \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$ har en lineær gradert projektiv oppløsning. Vi beviser at $\mathcal{E}(M)$ er generert i grad 0 som en $E(\Lambda)$-modul for $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$, og viser så at $\mathcal{E}(M)$ er en lineær modul. Dette gir oss at $E(\Lambda)_0$ er en lineær modul.

La $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$. Avbildningene $\operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0)$ er i grad 0 i $\mathcal{E}(M)$. Siden vi i Teorem 4.10 fikk at $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)^i \cdot \operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0)$ og $\mathcal{E}(M)$ er en venstre modul over $E(\Lambda)$ ser vi at $\mathcal{E}(M)$ er generert i grad 0 som gradert $E(\Lambda)$-modul.

La $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$ og la $J = \Lambda_{\geq 1}$. Da blir $JM = M_{\geq 1}$ og vi får den kort eksakte følgen $\eta\colon 0 \to M_{\geq 1} \to M \to M_0 \to 0$. Vi anvender funktoren $\operatorname{Hom}_\Lambda(-, \Lambda_0)$ på følgen η og får en lang eksakt følge

$$\begin{aligned}\psi\colon 0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(M_0, \Lambda_0) &\xrightarrow{\phi_0} \operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(M_{\geq 1}, \Lambda_0) \to \\ \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M_0, \Lambda_0) &\xrightarrow{\phi_1} \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0) \to \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M_{\geq 1}, \Lambda_0) \to \dots\end{aligned}$$

La $\mathcal{E}(M_0) \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}(M)$ være $E(\Lambda)$-modulavbildningen sammensatt av ϕ_i. Vi ønsker å vise at ϕ er på. Fra Proposisjon 4.3 vet vi at ϕ_0 er en isomorfi, og dermed på. Vi velger $\mu \in \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$. Siden vi i Teorem 4.10 fikk at $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)^i \cdot \operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0)$ eksisterer det κ_j, ν_j slik at $\mu = \sum_{j=1}^t \kappa_j \cdot \nu_j$ hvor $\kappa_j \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)^i$ og $\nu_j \in \operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0)$.

Siden ϕ_0 er på vil det eksistere $\nu'_j \in \operatorname{Hom}_\Lambda(M_0, \Lambda_0)$ slik at $\phi_0(\nu'_j) = \nu_j$. Da vil $\mu = \sum_{j=1}^t \kappa_j \cdot \nu_j = \sum_{j=1}^t \kappa_j \cdot \phi_0(\nu'_j) = \sum_{j=1}^t \phi(\kappa_j \cdot \nu'_j) = \sum_{j=1}^t \phi_i(\kappa_j \cdot \nu'_j)$ og vi ser at $\kappa_j \cdot \nu'_j \in \mathcal{E}(M_0)_i = \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M_0, \Lambda_0)$. Dermed blir alle ϕ_i på, og ϕ blir en på $E(\Lambda)$-modulavbildning.

Siden ϕ_i er på, og vi har den lang eksakte følgen ψ får vi følgende eksakte følger:

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \xrightarrow{\phi_0} \mathrm{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0) \to 0 \\
0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M_{\geq 1},\Lambda_0) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \xrightarrow{\phi_1} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,\Lambda_0) \to 0 \\
0 \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M_{\geq 1},\Lambda_0) \to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \xrightarrow{\phi_2} \mathrm{Ext}^2_\Lambda(M,\Lambda_0) \to 0 \\
0 \to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(M_{\geq 1},\Lambda_0) \to \mathrm{Ext}^3_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \xrightarrow{\phi_3} \mathrm{Ext}^3_\Lambda(M,\Lambda_0) \to 0 \\
\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

Vi ser dermed at følgen $0 \to \mathcal{E}(M_{\geq 1})[1] \to \mathcal{E}(M_0) \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}(M) \to 0$ er eksakt.

Vi husker at $E(\Lambda) = \coprod_{i\geq 0} \mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)$. Vi vet at $E(\Lambda)$ er en fri $E(\Lambda)$-modul. Siden Λ_0 er en semisimpel Λ_0-modul vet vi at Λ_0 er en sum av simple moduler. Vi har at e_i er den trivielle veien i hjørnet i og at simple Λ_0-moduler er på formen $\Lambda_0 e_i$. Dermed vil $\Lambda_0 = \Lambda_0 e_1 \coprod \Lambda_0 e_2 \coprod \dots \coprod \Lambda_0 e_n$ og vi kan skrive

$$\begin{aligned}
E(\Lambda) &= \coprod_{i\geq 0} \mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0) \\
&= \coprod_{i\geq 0} \mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0 e_1 \coprod \Lambda_0 e_2 \coprod \dots \coprod \Lambda_0 e_n, \Lambda_0) \\
&\cong \coprod_{l=1}^{n} (\coprod_{i\geq 0} \mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0 e_l,\Lambda_0)) = \coprod_{l=1}^{n} \mathcal{E}(\Lambda_0 e_l).
\end{aligned}$$

Vi ser dermed at $\mathcal{E}(\Lambda_0 e_l)$ er summander av en fri modul, og dermed er $\mathcal{E}(\Lambda_0 e_l)$ projektive $E(\Lambda)$-moduler. Vi har at M_0 er en semisimpel Λ_0-modul, og da er $M_0 \cong (\Lambda_0 e_1)^{m_1} \coprod (\Lambda_0 e_2)^{m_2} \coprod \dots \coprod (\Lambda_0 e_n)^{m_n}$. Vi får

$$\mathcal{E}(M_0) \cong \mathcal{E}((\Lambda_0 e_1)^{m_1} \coprod (\Lambda_0 e_2)^{m_2} \coprod \dots \coprod (\Lambda_0 e_n)^{m_n}) \cong \coprod_{l=1}^{n} \mathcal{E}(\Lambda_0 e_l)^{m_l}$$

og dermed at $\mathcal{E}(M_0)$ er en direktesum av projektive $E(\Lambda)$-moduler. Da blir $\mathcal{E}(M_0)$ en projektiv $E(\Lambda)$-modul.

Vi vet at $0 \to \mathcal{E}(M_{\geq 1})[1] \to \mathcal{E}(M_0) \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}(M) \to 0$ er eksakt. Vi ser at $\mathrm{Ker}\,\phi = \mathcal{E}(M_{\geq 1})[1] \subseteq J\mathcal{E}(M_0) = \mathcal{E}(M_0)_{\geq 1}$, vi vet at ϕ er på, og at $\mathcal{E}(M_0)$ er en gradert projektiv modul. Vi ser at ϕ er bygget opp av ϕ_i og at ϕ_i tar elementer i grad i til grad i. Dermed blir ϕ en grad 0 avbildning, og $\mathcal{E}(M_0) \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}(M)$ er det graderte projektive dekket.

Siden Λ er en projektiv Λ-modul vil $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda,\Lambda_0) = 0$ for $i \geq 1$ og vi ser at $\mathcal{E}(\Lambda) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,\Lambda_0) \coprod \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda,\Lambda_0) \coprod \dots = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,\Lambda_0)$. Vi har også fra

Proposisjon 4.3 at $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, \Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/J\Lambda, \Lambda_0) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/J, \Lambda_0) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$. Vi ser dermed at $\mathcal{E}(\Lambda) = \mathcal{E}(\Lambda_0)_0 = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$. Det holder dermed å vise at $\mathcal{E}(\Lambda)$ er en lineær $E(\Lambda)$-modul.

Fra Proposisjon 4.8 vet vi at om M er en lineær Λ-modul vil $M_{\geq n}[n]$ være en lineær Λ-modul for alle $n \geq 0$. Vi vet at Λ er en lineær Λ-modul, og dermed vil $\Lambda_{\geq n}[n]$ være en lineær Λ-modul for alle $n \geq 0$.

Vi vet at $0 \to \mathcal{E}(\Lambda_{\geq 1})[1] \to \mathcal{E}(\Lambda_0) \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}(\Lambda) \to 0$ er en eksakt følge og at $\mathcal{E}(\Lambda_0) \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}(\Lambda)$ er det projektive dekket. Vi ønsker å se hvordan den graderte projektive oppløsningen av $\mathcal{E}(\Lambda)$ fortsetter og ser dermed på hva som er det graderte projektive dekket til $\mathrm{Ker}\,\phi = \mathcal{E}(\Lambda_{\geq 1})[1]$.

Vi ser at $(\Lambda_{\geq 1})[1]$ er en lineær Λ-modul, og kan da tilsvarende få at $0 \to \mathcal{E}(\Lambda_{\geq 2})[1] \to \mathcal{E}(\Lambda_1) \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}((\Lambda_{\geq 1})) \to 0$ er en eksakt følge. Vi ser dermed ved induksjon at $0 \to \mathcal{E}(\Lambda_{\geq n+1})[1] \to \mathcal{E}(\Lambda_n) \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}((\Lambda_{\geq n})) \to 0$ er en eksakt følge.

Ved å skifte $\mathcal{E}(\Lambda_{\geq 2})[1]$ til $\mathcal{E}(\Lambda_{\geq 2})[2]$ og bruke Yoneda-produktet vil vi få en lineær projektiv oppløsning av lengde 2. Vi kan skifte $\mathcal{E}(\Lambda_{\geq i})[1]$ til $\mathcal{E}(\Lambda_{\geq i})[i]$ for alle $1 \leq i \leq n$ og ser at vi får en lineær projektiv oppløsning av lengde n. Dermed vil $\mathcal{E}(\Lambda)$ være en lineær $E(\Lambda)$-modul. $\square$

Vi har nå bevist hovedteoremet vårt, og vi ønsker å finne en måte å regne ut Yoneda-algebraen til en gradert algebra Λ.

4.5 Utregning av Yoneda-algebra

Vi så at om Λ er en Koszul-algebra vil $E(\Lambda)$ være en Koszul-algebra. Dermed vil vi gjerne ha en måte å regne ut Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra. Vi kommer til å bruke dette i Kapittel 6 når vi for to klasser av kvadratiske algebraer sjekker hvor stor andel av algebraene som er Koszul-algebraer.

La $\Lambda = kQ/I$ være en kvadratisk algebra. Vi kan da regne ut den kvadratiske duale algebraen til Λ. Vi kaller den kvadratiske duale algebraen $\Lambda^!$ og den vil være på formen $kQ/I^!$.

Vi viser en måte fra artikkel [8] for å den kvadratiske duale algebraen til en algebra.

Vi antar at I er generert av kvadratiske elementer. Vi kan konstruerer $I^!$ fra de kvadratiske generatorene til I. La I_2 være k-vektorrommet generert av en mengde kvadratiske generatorerer av I og la V_2 være k-vektorrommet med basis veier av lengde 2 i Q. Dermed vil $I_2 \subseteq V_2$. La $V_2^* = \mathrm{Hom}_k(V_2, k)$ og la $\{p^*\}$ betegne den duale basisen til basisen for V_2 bestående av veiene $\{p\}$ av lengde 2 i Q. Det vil si at hvis p, q er elementer i V_2 vil

$$p^*(q) = \begin{cases} 0, & \text{hvis } p \neq q, \\ 1, & \text{hvis } p = q. \end{cases}$$

La $v \in V_2$. Da vil $v = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i$ hvor $a_i \in k$ og p_i er en vei av lengde 2 i Q. Vi definerer $f_v \colon V_2 \to k$ ved $f_v = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i^*$, og $I^!$ er idealet generert av alle kvadratiske elementene ω slik at $f_v(\omega) = 0$ for alle $v \in I_2$.

Vi ser på et eksempel på utregningen av den kvadratiske duale algebraen til en algebra for å gjøre det klarere.

Eksempel 3. Vi ser på $\Lambda = kQ/I$, for kroppen $k = \mathbb{Z}_2$ hvor Q er koggeret

$$\alpha \circlearrowleft 1 \circlearrowright \beta$$

og $I = (\alpha^2)$.

Vi ser at $V_2 = k\{\alpha^2, \alpha\beta, \beta\alpha, \beta^2\}$ og da er $V_2^* = k\{(\alpha^2)^*, (\alpha\beta)^*, (\beta\alpha)^*, (\beta^2)^*\}$. La $\omega = a_1\alpha^2 + a_2\alpha\beta + a_3\beta\alpha + a_4\beta^2$. Da blir

$$f_{\alpha^2}(\omega) = ((\alpha^2)^*)(\omega) = ((\alpha^2)^*)(a_1\alpha^2 + a_2\alpha\beta + a_3\beta\alpha + a_4\beta^2) = a_1$$

som gir at $a_1 = 0$. Vi får tre frie variabler, nemlig a_2, a_3 og a_4. Vi får at $I' = (\alpha\beta, \beta\alpha, \beta^2)$ og dermed vet vi at $kQ/(\alpha\beta, \beta\alpha, \beta^2)$ er den duale kvadratiske algebraen.

Men vi ønsket å finne ut hva Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra var. Vi har et teorem som gir oss følgende viktige sammenheng:

Teorem 4.12. *La Λ være en Koszul-algebra. Da er $\Lambda^! \cong E(\Lambda)$.*

Vi kommer til å se i Kapittel 6 at algebraen i Eksempel 3 er en Koszul-algebra. Vi vet dermed at den duale kvadratiske algebraen også er en Koszul-algebra.

Siden $E(\Lambda)$ er en Koszul-algebra kan vi også se på Yoneda-algebraen til $E(\Lambda)$. Vi har fra [8] følgende teorem.

Teorem 4.13. *La $\Lambda = kQ/I$ være en Koszul-algebra med I generert av kvadratiske elementer. Da er $E(E(\Lambda))$ isomorf til Λ som gradert algebraer.*

Siden vi har at Yoneda-algebraen, $E(\Lambda)$, til en Koszul-algebra, Λ, er en Koszul-algebra, har vi at om Yoneda-algebraen ikke er en Koszul-algebra, vil algebraen ikke være en Koszul-algebra.

Vi vet at hvis den kvadratiske dualen til en algebra ikke er en Koszul-algebra vil heller ikke den opprinnelige algebraen være en Koszul-algebra. Vi viser to eksempler på utregning av det kvadratiske dualet til algebraer som ikke er Koszul-algebraer.

Eksempel 4. La $\Lambda = kQ/I$, for kroppen $k = \mathbb{Z}_2$, hvor Q er koggeret

$$\alpha \circlearrowleft 1 \circlearrowright \beta$$

og $I = (\alpha^2, \alpha\beta + \beta^2)$. Dette er samme algebra som vi så på i Eksempel 2, og vi husker at dette ikke er en Koszul-algebra. Dermed vil heller ikke $kQ/I^!$ være en Koszul-algebra.

Her er $V_2 = k\{\alpha^2, \alpha\beta, \beta\alpha, \beta^2\}$ og da blir $V_2^* = k\{(\alpha^2)^*, (\alpha\beta)^*, (\beta\alpha)^*, (\beta^2)^*\}$. La $\omega = a_1\alpha^2 + a_2\alpha\beta + a_3\beta\alpha + a_4\beta^2$. Da blir

$$f_{\alpha^2}(\omega) = ((\alpha^2)^*)(\omega) = ((\alpha^2)^*)(a_1\alpha^2 + a_2\alpha\beta + a_3\beta\alpha + a_4\beta^2) = a_1$$

som gir at $a_1 = 0$. Tilsvarende blir $f_{\alpha\beta+\beta^2}(\omega) = ((\alpha\beta)^* + (\beta^2)^*)(\omega) = ((\alpha\beta)^*+(\beta^2)^*))(a_1\alpha^2+a_2\alpha\beta+a_3\beta\alpha+a_4\beta^2) = a_2+a_4$. Dermed må $a_2 = -a_4$, og a_3 er en fri variabel. Vi får dermed at $I^! = (\beta\alpha, \alpha\beta - \beta^2)$ over $\mathbb{Z}_2$ er lik $I^! = (\beta\alpha, \alpha\beta + \beta^2)$.

Eksempel 5. Vi kommer i Kapittel 6 til å se at for tilsvarende betingelser som over, men med idealet $I = (\beta\alpha, \alpha^2 + \alpha\beta)$, vil Λ ikke være en Koszul-algebra.

Vi ser da at $f_{\beta\alpha}(\omega) = ((\beta\alpha)^*)(a_1\alpha^2 + a_2\alpha\beta + a_3\beta\alpha + a_4\beta^2) = a_3$ og $f_{\alpha^2+\alpha\beta}(\omega) = ((\alpha^2)^* + (\alpha\beta)^*))(a_1\alpha^2 + a_2\alpha\beta + a_3\beta\alpha + a_4\beta^2) = a_1 + a_2$. Vi ser at $a_3 = 0$ og $a_1 = -a_2$, som gir oss $I^! = (\beta^2, \alpha^2 - \alpha\beta)$, og dermed blir den kvadratiske dualen $\mathbb{Z}_2Q/(\beta\alpha, \alpha^2 + \alpha\beta) = \mathbb{Z}_2Q/(\beta^2, \alpha^2 + \alpha\beta)$.

Så vi får altså at $\mathbb{Z}_2Q/(\beta^2, \alpha^2 + \alpha\beta)$ ikke er en Koszul-algebra.

Vi har altså sett at Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra selv er en Koszul-algebra, og funnet en måte å finne den duale kvadratiske algebraen til en kvadratisk algebra. Dette kommer vi til å bruke i Kapittel 6. Vi ser så på noen andre resultater om hvilke algebraer som er Koszul-algebraer.

Kapittel 5

Flere resultater om Koszul-algebraer

I dette kapittelet beviser vi først at alle monomielle kvadratiske algebraer er Koszul-algebraer, før vi ser at en algebra som har en kvadratisk Gröbnerbasis er en Koszul-algebra. Til slutt ser vi kort på et resultat fra Backelin som sier at en algebra $\Lambda = kQ/(f)$, hvor f er kvadratisk, er en Koszul-algebra.

Vi kommer til å bruke disse resultatene i Kapittel 6 når vi for to klasser av algebraer finner ut hvor stor andel av algebraene som er Koszul-algebraer.

5.1 Monomielle kvadratiske algebraer

Vi vil bevise at alle monomielle kvadratiske algebraer er Koszul-algebraer, og vi starter med å vise en ekvivalent betingelse av å være en Koszul-algebra. Vi definerer så hva en monomiell algebra er, og beviser tilslutt at alle monomielle kvadratiske algebraer er Koszul-algebraer. I dette beviset bruke vi den ekvivalente betingelsen av å være en Koszul-algebra.

Vi starter med å bevise en ekvivalent definisjon av å være en Koszul-algebra. Vi husker at vi definerte at en algebra Λ er en Koszul-algebra om alle simple graderte Λ-moduler er lineære Λ-moduler.

Proposisjon 5.1. *La k være en kropp, Q et endelig kogger, og kQ veialgebraen. La I være et ideal inneholdt i idealet J^2 og la $\Lambda = kQ/I$. Følgende utsagn er ekvivalente.*

1. *Λ er en Koszul-algebra,*
2. *Yoneda-algebraen, $E(\Lambda)$, er 1-generert.*

Bevis. Vi ser først at (1) medfører (2). Vi så i Teorem 4.10 at for $i \geq 1$ vil $[\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)]^i \cdot \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0) = \mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$ for $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$. Vi antar at Λ er en Koszul-algebra. Da vil $\Lambda_0 \in \mathcal{L}(\Lambda)$ siden Λ er en Koszul-algebra. Vi ser dermed at $[\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)]^i \cdot \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0) = \mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)$ som gir oss at $E(\Lambda)$ er 1-generert.

Vi sjekker så at (2) medfører (1). Vi antar at $E(\Lambda)$ er 1-generert, det vil si at $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)$ genererer alle høyere ekstensjoner av grupper under Yoneda-produktet. Vi starter med å finne en lineær oppløsning av grad 0. La Λ være en algebra generert i grad 0. Vi vet at Λ_0 er alle de simple graderte modulene, og at $\Lambda \xrightarrow{f} \Lambda_0$ er et minimalt gradert projektivt dekke. Vi ser at $\mathrm{Ker}(f) = \Lambda_{\geq 1}$ og vi vet at $\Lambda_{\geq 1}$ er generert i grad 1. Vi har vist i Proposisjon 2.4 at $\Lambda_{\geq 1}$ har et gradert projektivt dekke $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1$. Dette er generert i grad 1. Dermed vil $(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1)[1] \to \Lambda \to \Lambda_0 \to 0$ være en lineær oppløsning av Λ_0 av lengde 0. Vi fortsetter ved induksjon.

Anta at vi har konstruert en lineær oppløsning av lengde n,

$$P_n \xrightarrow{f_n} \ldots \to P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

av M, hvor M er en simpel Λ-modul. Vi trenger å konstruere $f_{n+1}\colon P_{n+1} \to P_n$ slik at P_{n+1} er generert i grad $n+1$ og kjernen til f_{n+1} er generert i grad $n+2$. Vi sjekker først at P_{n+1} er generert i grad $n+1$.

Fra induksjonshypotesen er $\mathrm{Ker}\, f_n = \Omega^{n+1}_\Lambda(M)$ generert i grad $n+1$, og vi lar $P_{n+1} \to \Omega^{n+1}_\Lambda(M)$ være det graderte projektive dekket som vi fra Proposisjon 2.4 vet eksisterer. Vi lar f_{n+1} være sammensetningen av dette graderte projektive dekket med inklusjonen fra $\Omega^{n+1}_\Lambda(M) \to P_n$. Siden $\mathrm{Ker}(f_n) = \Omega^{n+1}_\Lambda(M)$ er generert i grad $n+1$ vil også P_{n+1} være generert i grad $n+1$ som ønsket.

Vi må så vise at $\mathrm{Ker}(f_{n+1}) = \Omega^{n+2}_\Lambda(M)$ er generert i grad $n+2$. La $P_{n+2} \to \Omega^{n+2}_\Lambda(M)$ være et projektivt dekke. Hvis P_{n+2} er generert i grad $n+2$ vil vi få at $\Omega^{n+2}_\Lambda(M)$ er generert i $n+2$ som ønsket. Vi antar at P_{n+2} ikke er generert i grad $n+2$. Da vil det eksisterer en projektiv summand $\Lambda e[m]$ hvor e er en primitiv idempotent av Λ_0 og $m \geq n+3$. Vi har altså følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & P_{n+2} \arrow[rr, "f_{n+2}"] \arrow[dr, "\delta_{n+2}"'] & & P_{n+1} \arrow[r] & {} \\
& & \Omega^{n+2}_\Lambda(M) \arrow[ur, "\lambda_{n+1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Det vil si at i P_{n+2} vil e ha grad større enn $n+2$. La $x = \delta_{n+2}(e)$ i $\Omega^{n+2}_\Lambda(M)$. Da har x grad m og er en generator av $\Omega^{n+2}_\Lambda(M)$. Siden P_{n+1} er generert i grad $n+1$ vil $x \in J^2 P_{n+1}$ som et element i P_{n+1}.

Vi vet ved dimensjonsskift at $\mathrm{Ext}^{n+2}_\Lambda(M,\Lambda_0) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega^{n+1}_\Lambda(M),\Lambda_0)$, og vi husker at $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega^{n+1}_\Lambda(M),\Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^{n+2}_\Lambda(M),\Lambda_0)$ når vi anvender $\mathrm{Hom}(-,\Lambda_0)$ på den eksakte følgen $0 \to \Omega^{n+2}_\Lambda(M) \to P_{n+1} \to \Omega^{n+1}_\Lambda(M) \to 0$. Vi får at $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^{n+2}_\Lambda(M),\Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^{n+2}_\Lambda(M)/J\Omega^{n+2}_\Lambda(M),\Lambda_0)$ fra Proposisjon 4.3. Vi viser først at det eksisterer $g\colon \Omega^{n+2}_\Lambda(M) \to \Lambda_0$ slik at $g(x) \neq 0$.

Siden x er en generator for $\Omega_\Lambda^{n+2}(M)$ vil $\bar{x} \neq 0$ i $\Omega_\Lambda^{n+2}(M)/J\Omega_\Lambda^{n+2}(M)$. Vi vet at $\Omega_\Lambda^{n+2}(M)/J\Omega_\Lambda^{n+2}(M)$ er en semisimpel Λ_0-modul, og dermed er en projektiv Λ_0-modul. Dermed er $\Omega_\Lambda^{n+2}(M)/(J\Omega_\Lambda^{n+2}(M))$ en summand av en fri Λ_0-modul, og vi har altså at det eksisterer en Λ_0-modul M' slik at $(\Omega_\Lambda^{n+2}(M)/(J\Omega_\Lambda^{n+2}(M)) \coprod M') = \Lambda_0^t$ for en $t \geq 1$.

Inklusjonen $\lambda\colon \Omega_\Lambda^{n+2}(M)/(J\Omega_\Lambda^{n+2}(M)) \to \Omega_\Lambda^{n+2}(M)/(J\Omega_\Lambda^{n+2}(M) \coprod M')$ gir oss følgende diagram.

$$\begin{tikzcd}
\Omega_\Lambda^{n+2}(M)/(J\Omega_\Lambda^{n+2}(M)) \arrow[r, hook, "\lambda"] & \Lambda_0^t \arrow[d, "\pi"] \\
& \Lambda_0
\end{tikzcd}$$

Vi ser at $\lambda(\bar{x})$ i $\Omega_\Lambda^{n+2}(M)/(J\Omega_\Lambda^{n+2}(M)) \coprod M' \cong \Lambda_0^t$ vil være forskjellig fra 0. Vi kan så ta projeksjonen π ned på en kopi av Λ_0, og få et ikkenull element i Λ_0.

Vi får en avbildning $\bar{g}$ slik at $\bar{g}(\bar{x}) \neq 0$ for en $\bar{g}\colon \Omega_\Lambda^{n+2}(M)/(J\Omega_\Lambda^{n+2}(M)) \to \Lambda_0$. Vi ser at vi kan gå $\Omega_\Lambda^{n+2}(M) \xrightarrow{\pi'} \Omega_\Lambda^{n+2}(M)/(J\Omega_\Lambda^{n+2}(M)) \xrightarrow{\bar{g}} \Lambda_0$ og vi velger $g = \bar{g}\pi'$ som gir $g(x) \neq 0$.

Vi viser at om vi ser på g som et element i $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+2}(M, \Lambda_0)$, vil g ikke være et element i $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(\Lambda_0, \Lambda_0) \cdot \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(M, \Lambda_0)$. Dette gir oss en motsigelse siden vi har antatt at $E(\Lambda)$ er 1-generert.

Vi identifiserer $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(M, \Lambda_0)$ med $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega_\Lambda^{n+1}(M), \Lambda_0)$ og vi vet at $\Omega_\Lambda^{n+1}(M) = \mathrm{Ker}\, f_n$. Vi vet at elementene i $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(\Lambda_0, \Lambda_0) \cdot \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(M, \Lambda_0)$ er på formen $\sum_{i=1}^t \theta_i \cdot \nu_i$ hvor $\nu_i \in \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(M, \Lambda_0)$ og $\theta_i \in \mathrm{Ext}_\Lambda^1(\Lambda_0, \Lambda_0)$. Tilsvarende som tidligere holder det å sjekke et element $\theta_i \nu_i$.

Vi velger et element $\nu_i \in \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(M, \Lambda_0)$ og ser at det er gitt ved et element $b_i \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega_\Lambda^{n+1}(M), \Lambda_0)$. Vi kan sette opp følgende diagram hvor alle avbildningene er grad 0 avbildninger:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_\Lambda^{n+1}(M) \arrow[r] \arrow[d, "b_i"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "b_i'"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0[n+1] \arrow[r] & E' \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tilsvarende kan vi for et element $\theta_i \in \mathrm{Ext}_\Lambda^1(\Lambda_0, \Lambda_0)$ få en avbildning $a_i \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega_\Lambda^1(\Lambda_0), \Lambda_0)$ slik at vi får følgende diagram hvor alle avbildningene er grad 0 avbildninger:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_\Lambda^1(\Lambda_0) \arrow[r] \arrow[d, "a_i"] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, "a_i'"] & \Lambda_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0[1] \arrow[r] & E'' \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Så setter vi diagrammene sammen, og passer på å skifte gradene til modulene slik at avbildningene blir grad 0 avbildninger.

$$
\begin{tikzcd}
P_{n+2} \arrow[rr] \arrow[dr, "\delta_{n+2}"'] & & P_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddd, dotted, "t"] & & P_n \arrow[r] \arrow[dd, "b_i'"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \cdots \\
& \Omega_\Lambda^{n+2}(M) \arrow[ur, "\lambda_{n+1}"'] \arrow[dd, dotted, "\tilde{b_i}"] & & \Omega_\Lambda^{n+1}(M) \arrow[ur] \arrow[dd, "b_i"] & & & \\
0 \arrow[ur] & & & & E' \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Omega_\Lambda^1(\Lambda_0)[n+1] \arrow[r, "\lambda_0"] \arrow[d, "a_i"] & \Lambda[n+1] \arrow[r] \arrow[d, "a_i'"] & \Lambda_0[n+1] \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[ur] & 0 & & \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0[n+2] \arrow[r] & E''[n+1] \arrow[r] & \Lambda_0[n+1] \arrow[r] & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Vi bruker Comparison Theorem og får avbildningen t. Siden avbildningene λ_{n+1} og λ_0 er monomorfier, vil det eksistere en unik avbildning $\tilde{b_i}$ slik at diagrammet kommuterer. Vi ser at $a_i\tilde{b_i}(x) = 0$ for alle $i = 1, \ldots, t$ siden x er i grad $m > n+2$. Da blir $\tilde{b_i}(x)$ i grad $m > n+2$ i $\Omega_\Lambda^1(M)[n+1]$ og vi ser at $a_i\tilde{b_i}(x)$ vil være i grad $m > n+3$ i $\Lambda_0[n+2]$ og må dermed være 0.

Vi ser at $a_i\tilde{b_i}\delta_{n+2} \in \operatorname{Ker} f_{n+3}$ siden $\delta_{n+2}f_{n+3} = 0$, og vi husker at $\operatorname{Ext}_\Lambda^{n+2}(\Lambda_0, M) = \operatorname{Ker} f_{n+3}^*/\operatorname{Im} f_{n+2}^*$. Vi har sett at $\sum_{i=1}^t \theta_i \cdot \nu_i$ kan representeres som $\sum_{i=1}^t a_i\tilde{b_i}\delta_{n+2} + \operatorname{Im} f_{n+2}^*$ og vi ønsker å sjekke om dette er det samme som $g\delta_{n+2} + \operatorname{Im} f_{n+2}^*$.

Anta at de to elementene er like. Da vil $\sum_{i=1}^t a_i\tilde{b_i}\delta_{n+2} - g\delta_{n+2} \in \operatorname{Im} f_{n+2}^*$. Vi ser at

$$
\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^t a_i\tilde{b_i}\delta_{n+2} - g\delta_{n+2})(e) &= \sum_{i=1}^t a_i\tilde{b_i}\delta_{n+2}(e) - g\delta_{n+2}(e) \\
&= \sum_{i=1}^t a_i\tilde{b_i}(x) - g(x) \\
&= -g\delta_{n+2}(e) = -g(x) \neq 0
\end{aligned}
$$

Vi viser nå at $\alpha(x) = 0$ for alle $\alpha \in \operatorname{Im} f_{n+2}^*$. Vi har den graderte projektive oppløsningen $P_{n+3} \xrightarrow{f_{n+3}} P_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} P_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \ldots$ og anvender $\operatorname{Hom}_\Lambda(-, \Lambda_0)$ på denne, og får følgende:

$$
\operatorname{Hom}_\Lambda(P_{n+1}, \Lambda_0) \xrightarrow{f_{n+2}^*} \operatorname{Hom}_\Lambda(P_{n+2}, \Lambda_0) \xrightarrow{f_{n+3}^*} \operatorname{Hom}_\Lambda(P_{n+3}, \Lambda_0) \rightarrow
$$

Vi lar $h \in \operatorname{Hom}_\Lambda(P_{n+1}, \Lambda_0)$ og ser at $f_{n+2}^*(h) = hf_{n+2}$. Dermed vil $\operatorname{Im} f_{n+2}^*$ være på formen hf_{n+2} hvor $h \in \operatorname{Hom}_\Lambda(P_{n+1}, \Lambda_0)$. Vi har altså følgende diagram:

$$
\begin{tikzcd}
P_{n+2} \arrow[r, "f_{n+2}"] \arrow[d] & P_{n+1} \arrow[dl, "h"] \\
\Lambda_0 &
\end{tikzcd}
$$

Vi anvender hf_{n+2} på e og ser hva som skjer. Vi vet at e har grad $m > n+2$, og dermed vil $f_{n+2}(e) = x$ ha grad m i P_{n+1}. Men vi vet at P_{n+1} er generert i $n+1$. Dermed vil $h(x) = 0$ siden alle elementer av grad større enn $n+1$ vil bli sendt på 0 ved h. Vi ser at vi får en motsigelse, for $g\delta_{n+2}(e)$ er ikke 0. Da er $\Omega_\Lambda^{n+2}(M)$ generert i grad $n+2$ som ønsket, og vi får at om $E(\Lambda)$ er 1-generert vil Λ være en Koszul-algebra. $\square$

Vi definerer så hva en monomiell algebra er, før vi beviser at alle monomielle kvadratiske algebraer er Koszul-algebraer.

Definisjon. La k være en kropp og Q et kogger. Vi sier at et ideal I i kQ er *monomielt* om I er generert av veier i kQ. En algebra Λ er *monomiell*, hvis $\Lambda \cong kQ/I$, hvor Q er et endelig kogger, og I er et monomielt ideal.

Vi kan nå bevise at alle monomielle kvadratiske algebraer er Koszul-algebraer, og vi starter med å innføre litt notasjon hentet fra artikkel [9].

Vi ser på monomielle algebraer, og lar Q være et endelig kogger, og lar $\rho = \{\rho_1, ..., \rho_n\}$ være en endelig mengde av veier i Q slik at ingen ρ_i er en undervei av en annen ρ_j. Vi antar videre at hver ρ_i har lengde minst 2. Vi lar $\Lambda = kQ/I$, hvor $I = \langle \rho \rangle$. La $\mathcal{M} = \{p \text{ vei i } Q \mid \text{ bildet av } p \text{ i } kQ/I \text{ er ikkenull}\}$. Vi sier at Q_0 er hjørnene til koggeret, Q_1 er pilene til koggeret og Q_2 er ρ.

Vi definerer induktivt Q_{i+1} for $i \geq 2$. Vi kaller en vei p i Q en *i-forkjede* hvis $p = qrs$ hvor $q \in Q_{i-1}$ og $qr \in Q_i$. La s være en ikketriviell vei i $\mathcal{M}$, og la rs inneholde en undervei fra Q_2. Da er Q_{i+1} mengden av alle i-forkjeder som har egenskapen at ingen ekte startundervei er en i-forkjede. Vi ser på et eksempel for å gjøre det litt mer klart:

Eksempel 6. La $\Lambda = kQ/\rho$, hvor $k = \mathbb{Z}_2$, og Q er koggeret

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, "b"'] \arrow[l, bend left, "c"] \end{tikzcd}$$

og $\rho = (aba, ca)$. Vi ser at hjørnene er $Q_0 = (1, 2)$, pilene er $Q_1 = (a, b, c)$ og relasjonene er $Q_2 = (aba, ca)$.Vi ønsker å finne Q_3. Vi har da tre tilfeller å sjekke, nemlig $q = a, q = b$ og $q = c$.

Vi ser først på $q = a$. Da skal $qr \in Q_2$. Vi ser at vi kan velge $r = ba$. Da skal $rs = bas$ inneholde en undervei i Q_2. Vi ser at den korteste muligheten er $s = ba$. Dermed får vi $p = qrs = ababa$.

Siden det ikke er noen element i Q_2 som ender i b vil ikke den gi noe bidrag til Q_3. Ser så på $q = c$. Da skal $qr = cr \in Q_2$. Vi ser at vi kan velge $r = a$. Da skal $rs = as$ inneholde en undervei i Q_2. Vi ser at den korteste muligheten er $s = ba$. Dermed får vi $p = qrs = caba$. Vi ser så at $Q_3 = (ababa, caba)$.

Vi finner så Q_4. Da kan vi velge $q = aba$ eller $q = ca$. Vi ser først på $q = aba$. Vi vet at $qr = abar$ skal være i Q_3, så r kan være ba. Da skal

$rs = bas$ inneholde en undervei i Q_2. Vi ser at det korteste valget er $s = ba$. Da blir $p = qrs = abababa$.

Vi ser på $q = ca$. Vi vet at $qr = car$ skal være i Q_3, så da må r være ba. Da kan vi velge $s = ba$, som gir oss $p = qrs = cababa$. Dermed blir $Q_4 = (abababa, cababa)$.

Vi kan tilsvarende finne Q_i for $i \geq 5$.

Vi legger merke til at hvis relasjonen ρ er monomiell og kvadratisk vil elementene i Q_{i+1} bare være et hakk lengre (en pil ekstra) enn elementene i Q_i siden rs skal inneholde en undervei som er i $Q_2 = (\rho)$ og s skal være så liten som mulig. Dermed vil alle Q_i være generert av pilene som utgjør veiene i Q_2. Vi ser også at en vei p er i høyst en Q_i.

Vi har fra artikkel [9] et teorem som skal hjelpe oss i beviset for at monomielle kvadratiske algebraer er Koszul-algebraer. Vi kan nemlig finne en multiplikativ basis for Yoneda-algebraen.

Teorem 5.2. *La Λ være en monomiell endeliggenerert gradert algebra, og la $E(\Lambda)$ være Yoneda-algebraen til Λ. Da er mengden $\{e_p\}_{p \in Q_i i=0,1,2\ldots}$ en multiplikativ k-basis av $E(\Lambda)$.*

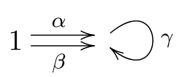
Bevis. Se [9] for bevis. □

Vi er nå klare til å bevise hovedresultatet vårt i dette kapittelet. Vi lar $\mathcal{M}_2$ være mengden av alle veier av lengde 2 i koggeret til Λ, og lar Q_2 være mengden av monomielle relasjoner som definerer Λ.

Teorem 5.3. *La I være et monomielt ideal generert av veier av lengde 2. Da vil $\Lambda = kQ/I$ være en Koszul-algebra.*

Bevis. La Q være koggeret til Λ. La $\mathcal{A} \subseteq Q_1$ være mengden av piler i Q som ved sammensetning gir oss relasjonene i Q_2. Hvis p er en vei i Q slik at $p \in Q_i$ for $i \geq 2$, så er p en sammensetning av i piler fra $\mathcal{A}$ siden alle relasjonene av Q_2 har lengde 2. Vi husker fra Teorem 5.2 at $\{e_p\}_{p \in Q_i i=0,1,2\ldots}$ er en multiplikativ k-basis av $E(\Lambda)$ og vi ser at alle veiene i Q_i for $i \geq 2$ er generert av Q_1. Da vil $E(\Lambda)$ være endelig generert som en k-algebra, og $\{e_p\}_{p \in Q_1}$ er en mengde av generatorer. Dermed vil $E(\Lambda)$ være en Koszul-algebra fra Proposisjon 5.1. □

Vi har altså at alle monomielle kvadratiske algebraer er Koszul-algebraer. Men det eksisterer Koszul-algebraer som ikke er monomielle algebraer. Vi ser i Kapittel 6 i Eksempel 8 at for $\Lambda = kQ/I$, hvor $k = \mathbb{Z}_2$ og Q er koggeret



vil Λ være en Koszul-algebra for $I = (\gamma\alpha + \gamma\beta)$.

5.2 Gröbnerbasis

Vi ønsker å bevise at en algebra som har en kvadratisk Gröbnerbasis er en Koszul-algebra. Vi starter med å innføre litt notasjon før vi definerer hva en Gröbnerbasis er. Vi ser så på en algoritme for å finne en Gröbnerbasis, før vi beviser et teorem som sier når et ideal I er en Gröbnerbasis. Tilslutt ser vi på et teorem som sier at en algebra med kvadratisk Gröbnerbasis vil være en Koszul-algebra.

Vi starter med å se hva en velordning er. Vi har et vektorrom V med en k-basis $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i \in I}$. Vi sier at $<$ er en *velordning* på $\mathcal{B}$ hvis $<$ er en ordning på $\mathcal{B}$, og alle ikketomme undermengder av $\mathcal{B}$ har et minimalt element.

Et av poengene med en velordning er å kunne si hvilket basiselement i en vektor som er størst. Om $v = \sum_{i \in I} \alpha_i b_i$ sier vi at b_i *opptrer i* v om $\alpha_i \neq 0$. Vi har følgende viktige definisjon:

Definisjon. La $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i \in I}$ være en basis for et vektorrom V og $<$ en velordning på $\mathcal{B}$. Hvis $v = \sum_{i \in I} \alpha_i b_i$ er et ikkenull element i V, sier vi at b_i er *tuppen* til v hvis b_i opptrer i v, og $b_i \geq b_j$ for alle b_j som opptrer i v.

Vi sier at *tuppen* til v er $\mathrm{Tip}(v)$. Hvis X er en undermengde av V sier vi at

$$\mathrm{Tip}(X) = \{b \in \mathcal{B} \mid b = \mathrm{Tip}(x) \text{ for en ikkenull } x \in X\}.$$

Vi ser at mengden $\mathrm{Tip}(X)$ er avhengig av valget av velordning. Koeffisienten til tuppen til en vektor v vil vi kalle $C\,\mathrm{Tip}(v)$.

Vi husker at $Q = (Q_0, Q_1)$ er et kogger. Vi lar $\mathcal{B}$ være mengden av endelig orienterte veier i Q, inkludert hjørnene som vi betrakter som veier av lengde 0. Som en k-algebra har kQ mengden $\mathcal{B}$ som k-basis.

Vi ønsker oss en ordning på $\mathcal{B}$ som passer sammen med den multiplikative strukturen på $\mathcal{B}$. Vi kan da bruke følgende definisjon:

Definisjon. Vi har at $<$ er en *tillatelig* (admissible) *ordning* på $\mathcal{B}$ om $<$ er en velordning, og den oppfyller de følgende kravene hvor $p, q, r, s \in \mathcal{B}$:

1. Hvis $p < q$, så er $pr < qr$, hvis både $pr \neq 0$ og $qr \neq 0$.
2. Hvis $p < q$, så er $sp < sq$, hvis både $sp \neq 0$ og $sq \neq 0$.
3. Hvis $p = qr$, så er $p > q$ og $p > r$.

Med en tillatelig ordning kan vi si hvilke basiselement som er størst. Når vi ser på tillatelige ordninger kommer vi til å bruke den *venstrelengde-leksiografisk ordningen.*

Start med å ordne hjørnene og pilene tilfeldig, og sett hjørnene mindre enn pilene. Om p og q er veier av lengde minst 1, setter vi $p < q$ hvis lengden til q er større enn lengden til p.

Om lengden til p og q er lik, ser vi på sammensetningen til $p = a_r \dots a_1$ og $q = a'_r \dots a'_1$ ved hjelp av pilene. Vi sier at $p < q$ hvis vi for noen $1 \leq i \leq r$ har at $a_j = a'_j$ for $j < i$ og $a_i < a'_i$.

For å bevise at alle algebraer som har en kvadratisk Gröbnerbasis er Koszul-algebraer trenger vi å vite hva en Gröbnerbasis er. La Λ være en k-algebra med multiplikativ basis $\mathcal{B}$ og tillatelig ordning $<$. La I være et ideal i Λ.

Definisjon. Vi sier at en mengde $\mathcal{G} \subseteq I$ er en Gröbnerbasis for I med hensyn på $<$ hvis $\langle \mathrm{Tip}(\mathcal{G}) \rangle = \langle \mathrm{Tip}(I) \rangle$.

Det vil si at det tosidige idealet generert av tuppene til $\mathcal{G}$ er lik det tosidige idealet generert av tuppene til I.

Vi ser på en divisjonsalgoritme for ringene vi ser på. Vi har en k-algebra Λ med en basis $\mathcal{B}$ og en tillatelig ordning $<$. Om vi har en ordnet mengde av elementer $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ av Λ og et annet element y av Λ kan vi 'dele' y med mengden.

Først finner vi tuppene til x_i og y. Vi starter algoritmen med å se på $i = 1$. La u og v være i $\mathcal{B}$. Om $\mathrm{Tip}(y) = u\,\mathrm{Tip}(x_i)v$ erstatter vi y med $y' = y - [C\,\mathrm{Tip}(y)/C\,\mathrm{Tip}(x_i)]ux_iv$. Om $\mathrm{Tip}(y) \neq u\,\mathrm{Tip}(x_i)v$ setter vi $y = y'$. Vi setter så $y' = y$ og gjentar for $i = 2, ..., n$. Vi kommer da til å få at $y = u_1x_1v_1 + u_2x_2v_2 + \dots + u_nx_nv_n + r$, hvor u_i og v_i kan være 0. Se divisjonsalgoritmen i [7] for nærmere beskrivelse. Vi kaller r for *resten til y ved divisjon av X*.

Hvis vi har en mengde elementer X og y er delt ut med denne mengden, benevner vi resten r ved $y \Rightarrow_X r$.

Vi ser så på hva det er å være en overlappingsrelasjon. Overlappingsrelasjoner er et viktig begrep i algoritmen vi har for å finne en Gröbnerbasis for et ideal, og når vi skal sjekke om et ideal I har en kvadratisk Gröbnerbasis.

Vi lar Λ være en k-algebra med en multiplikativ basis $\mathcal{B}$, og vi har en tillatelig ordning $<$ for $\mathcal{B}$. Vi har følgende definisjon:

Definisjon. La $f, g \in \Lambda$ og anta at det finnes elementer $b, c \in \mathcal{B}$ slik at

- $\mathrm{Tip}(f)c = b\,\mathrm{Tip}(g)$
- $\mathrm{Tip}(f)$ deler ikke b og $\mathrm{Tip}(g)$ deler ikke c

Da er overlappingsrelasjonen av f og g med b, c

$$o(f, g, b, c) = (1/C\,\mathrm{Tip}(f))fc - (1/C\,\mathrm{Tip}(g))bg$$

Vi ser at $\mathrm{Tip}(o(f, g, b, c)) < \mathrm{Tip}(f)c = b\,\mathrm{Tip}(g)$.

For å få litt mer følelse med hva en overlappingsrelasjon er ser vi på et eksempel.

Eksempel 7. La $\Lambda = kQ/I$ for kroppen $k = \mathbb{Z}_2$, hvor Q er koggeret

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

og $I = (\alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha)$. Vi velger at $\alpha < \beta$ for venstrelengde-leksiografisk ordning. Vi ser at $\mathrm{Tip}(\alpha^2) = \alpha^2$ og $\mathrm{Tip}(\alpha\beta + \beta\alpha) = \alpha\beta$. Vi må dermed regne ut $o(\alpha^2, \alpha^2, \alpha, \alpha)$ og $o(\alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha, \alpha, \beta)$.

Vi ser at $o(\alpha^2, \alpha^2, \alpha, \alpha) = (1/1)\alpha^2\alpha - (1/1)\alpha\alpha^2 = \alpha^3 - \alpha^3 = 0$ og tilsvarende at $o(\alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha, \alpha, \beta) = (1/1)\alpha^2\beta - (1/1)\alpha(\alpha\beta + \beta\alpha) = \alpha^2\beta - \alpha^2\beta - \alpha\beta\alpha = -\alpha\beta\alpha = \alpha\beta\alpha$.

Vi har nå sett på overlappingsrelasjoner og trenger litt mer notasjon og definisjoner før vi er klare for å se på teoremet som gir oss en måte å sjekke om et ideal I har en kvadratisk Gröbnerbasis.

Definisjon. Vi sier at en mengde av elementer X er *tuppredusert* om vi for forskjellige elementer $x, y \in X$ har at $\mathrm{Tip}(x)$ ikke deler $\mathrm{Tip}(y)$.

Definisjon. Vi sier at et element $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$, hvor $\alpha_i \in k^*$ og $b_i \in \mathcal{B}$, er *venstre uniformt* hvis for alle $c \in \mathcal{B}$ enten $cb_i = 0$ for alle i eller $cb_i \neq 0$ for alle i, hvor $1 \leq i \leq n$.

Vi har tilsvarende definisjon for å være *høyre uniformt*, og vi sier at et element er *uniformt* om det er både venstre og høyre uniformt.

Fra artikkel [7] får vi en algoritme som gir oss en måte å konstruere en Gröbnerbasis på.

Start med generatorene for I. Kall disse $\mathcal{G}$. For hvert par av elementer i $\mathcal{G}$ regner man ut overlappingsrelasjonen r. Om overlappingsrelasjonen $\Rightarrow_{\mathcal{G}} r \neq 0$ sier vi at $\mathcal{G} = \mathcal{G} \cup r$. Start så med å sjekke overlappingsrelasjonen for hvert par av elementer igjen. Når alle overlappsrelasjonene lar seg redusere til 0 har vi en Gröbnerbasis for I. Se algoritme 2.4.1 i [7].

Vi viser først et eksempel på algoritmen ved å fortsette på Eksempel 7. Vi så at overlappingsrelasjonen $o(\alpha^2, \alpha^2, \alpha, \alpha) = 0$ slik at vi ikke trenger å gjøre noe mer med denne.

Men for $o(\alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha, \alpha, \beta) = \alpha\beta\alpha$ må vi redusere videre. Vi ser at $\mathrm{Tip}(\alpha\beta\alpha) = \alpha\beta\alpha$ og vi regner ut $o(\alpha\beta + \beta\alpha, \alpha\beta\alpha, 1, \alpha) = ((\alpha\beta + \beta\alpha)\alpha - 1(\alpha\beta\alpha)) = \beta\alpha^2$. Vi kan redusere en gang til og ser at $o(\beta\alpha^2, \alpha^2, \beta, 1) = \beta\alpha^2 - \beta\alpha^2 = 0$. Vi ser dermed at $o(f, g, b, c) \Rightarrow_I 0$ for alle f og g i I. Da vil I være en Gröbnerbasis for Λ.

Vi har et teorem som ved hjelp av overlappingsreduksjoner sier oss om vi har en Gröbnerbasis.

Teorem 5.4. *La Λ være en k-algebra med multiplikativ basis $\mathcal{B}$ og en tillatelig ordning $<$. Anta at $\mathcal{G}$ er en mengde av uniforme, tuppreduserte elementer av Λ. Anta at for alle overlappingsrelasjoner*

$$o(g_1, g_2, p, q) \Rightarrow_{\mathcal{G}} 0$$

for g_1 og $g_2 \in \mathcal{G}$. Da er $\mathcal{G}$ en Gröbnerbasis for $\langle \mathcal{G} \rangle$.

Bevis. Se [7] for bevis. □

Vi ser litt videre på Eksempel 7. Vi ser at I er en mengde av uniforme tuppreduserte elementer av Λ. Vi fikk ved den venstrelengde-leksiografiske ordningen $\alpha < \beta$ at alle overlappingsrelasjonene ble redusert til 0. Dermed kan vi nå si at $I = (\alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha)$ vil være en Gröbnerbasis for Λ.

Vi får fra [7] følgende teorem.

Teorem 5.5. *La I være et kvadratisk ideal i en veialgebra kQ. La $<$ være en tillatelig ordning på veiene slik at I har en kvadratisk Gröbnerbasis. Da er kQ/I en Koszul-algebra.*

Bevis. Se [6] for bevis. □

Vi ser dermed at algebraen i Eksempel 7 vil være en Koszul-algebra siden I har en kvadratisk Gröbnerbasis. I kapittel 6 kommer vi til å se flere eksempler på algebraer som har en kvadratisk Gröbnerbasis.

5.3 $kQ/(f)$ er en Koszul-algebra

Vi ønsker å se at alle kvadratiske algebraer på formen $kQ/(f)$ er Koszul-algebraer når vi antar at koggeret Q har ett hjørne. Da vil vi i kapittel 6 få færre algebraer å sjekke når vi skal se på andelen av Koszul-algebraer i de to klassene av kvadratiske algebraer. Vi starter med å innføre litt notasjon fra [3], og ser på et teorem hentet fra samme sted, før vi oversetter det til det språket vi bruker i denne oppgaven.

Vi ser på hva et gitter er, siden beviset for at $kQ/(f)$ er en Koszul-algebra bruker teorien om gittere. Vi har at et *gitter (lattice)* L er en mengde med to binære operasjoner $\wedge$ og $\vee$ slik at følgende relasjoner holder for alle x, y og z i gitteret L.

$$
\begin{aligned}
&x \vee y = y \vee x \text{ og } x \wedge y = y \wedge x,\\
&x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z) \text{ og } x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \text{ og}\\
&x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y).
\end{aligned}
$$

Vi sier at et gitter L er *distributivt* om følgende ekvivalente betingelser er oppfylt:

1. For alle $x, y \in L$ er $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
2. For alle $x, y \in L$ er $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,
3. For alle $x, y \in L$ er $(x \vee y) \wedge z \leq x \vee (y \wedge z)$.

Vi har et et gitter kan bli assosiert til en algebra Λ.

Definisjon. Vi sier at *gitteret assosiert til* $\Lambda = kQ/I$ er

$$L(\Lambda) = [\{J^\alpha I^\gamma J^\beta \mid \alpha, \gamma, \beta \geq 0\}] \subseteq \{(\text{underrom av } kQ\}; +, \cap)$$

Fra hovedteoremet i artikkel [5] har vi at om f er et vilkårlig homogent element i en algebra $\Lambda = kQ/I$, hvor $I = kQfkQ$, vil mengden $\{kQ^\alpha fkQ^\beta \mid \alpha, \beta \geq 0\}$ generere et distributivt gitter av underrom i Λ.

Vi ser dermed at når Λ er en veialgebra på formen kQ/I, hvor $I = f$ for en $f \in kQ$, så er $L(\Lambda)$ distributiv.

Vi forklarer først hvordan $\mathrm{Tor}_i^\Lambda(k,k)$ er en gradert modul over $k = \Lambda_0$. Hvis $\ldots \to P_n \to \ldots \to P_2 \to P_1 \to k \to 0$ er en minimal gradert projektiv oppløsning av k, så vil $\mathrm{Tor}_i^\Lambda(k,k) \cong P_i \otimes_\Lambda k \cong P_i/JP_i$. Siden P_i er en gradert Λ-modul, så har P_i/JP_i en indusert gradering der $(P_i/JP_i)_j = (P_i)_j/(JP_i)_j$. Dette gir $\mathrm{Tor}_i^\Lambda(k,k)$ som et gradert vektorrom over k.

Vi vet fra artikkel [4] at vi har en ekvivalent definisjon av å være en Kosul-algebra. Vi sier at en gradert algebra Λ er en *Koszul algebra* om $(\mathrm{Tor}_i^\Lambda(k,k))_j = 0$ hvis $i \neq j$.

Hvis Λ er en kvadratisk endeliggenerert gradert k-algebra med ett hjørne får vi fra [3] følgende teorem.

Teorem 5.6. *La Λ være en kvadratisk endeliggenerert gradert algebra med ett hjørne. Følgende er ekvivalent:*

1. *$L(\Lambda)$ er distributiv,*
2. *For alle $i, j \geq 0$ har vi at $(\mathrm{Tor}_i^\Lambda(k,k))_j \neq 0$ medfører at $i = j$.*

Vi ser dermed at om Λ er en kvadratisk algebra med ett hjørne og $L(\Lambda)$ er distributiv, er Λ en Koszul-algebra. Når vi omformer dette til språket vi bruker får vi følgende teorem:

Teorem 5.7. *La $\Lambda = kQ/(f)$, hvor f er kvadratisk og Q består av ett hjørne. Da vil Λ være en Koszul-algebra.*

Vi er nå klare for å bruke alle resultatene vi har funnet, og sjekke om kvadratiske algebraer er Koszul-algebraer eller ikke.

Kapittel 6

Eksempler

I de foregående kapitlene har vi funnet ulike kriterier som gir oss at Λ er en Koszul-algebra. I dette kapittelet skal vi bruke denne kunnskapen til å se på to klasser av kvadratiske algebraer, og se hvilken andel av disse som er Koszul-algebraer.

Vi husker at alle Koszul-algebraer er kvadratiske fra Kapittel 3.1, og at alle kvadratiske monomielle algebraer er Koszul-algebraer fra Kapittel 5.1. I Kapittel 4.4 lærte vi at om Λ er en Koszul-algebra vil Yoneda-algebraen, $E(\Lambda)$, også være en Koszul-algebra. Vi så også at om en algebra ikke var en Koszul-algebra, ville det kvadratiske dualet heller ikke være en Koszul-algebra.

I Kapittel 5.2 lærte vi at om Λ har en kvadratisk Gröbnerbasis, vil Λ også være Koszul-algebra, og vi har sett i Kapittel 5.3 at $\Lambda = kQ/(f)$, hvor f er kvadratisk, vil Λ være en Koszul-algebra.

6.1 Vår første klasse av algebraer

Vi starter med et eksempel på en klasse av algebraer hvor alle algebraene er Koszul-algebraer. Vi kommer til å bruke resultatene vi har fått i de foregående kapitlene for å sjekke om algebraene er Koszul-algebraer, og de algebraene som ikke passer inn i noen av resultatene kommer vi til å sjekke manuelt.

Eksempel 8. Vi lar være $\Lambda = kQ/I$, for kroppen $k = \mathbb{Z}_2$, hvor Q er koggeret

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & 2 \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

og vi får at et kvadratisk ideal for Λ er kombinasjoner av $\gamma\alpha, \gamma\beta$ og $\gamma\gamma$. Vi får dermed $2^3 - 1 = 7$ elementer. Vi har ved direkte inspeksjon sett at disse kan kombineres til 9 unike idealer.

$I_1 = (\gamma\alpha)$	$I_2 = (\gamma\beta)$	$I_3 = (\gamma\gamma)$
$I_4 = (\gamma\alpha + \gamma\beta)$	$I_5 = (\gamma\alpha, \gamma\beta)$	$I_6 = (\gamma\alpha, \gamma\gamma)$
$I_7 = (\gamma\beta, \gamma\gamma)$	$I_8 = (\gamma\gamma, \gamma\alpha + \gamma\beta)$	$I_9 = (\gamma\alpha, \gamma\beta, \gamma\gamma)$

Her ser vi at det er 7 monomielle ideal, slik at algebraene generert av dem er Koszul-algebraer. Vi sitter dermed igjen med 2 algebraer som må sjekkes, $\Lambda = kQ/I_4$ og $\Lambda = kQ/I_8$.

Vi ser at $\Lambda = kQ/I_4 = kQ/(\gamma\alpha+\gamma\beta)$ har to projektive graderte moduler

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda e_1\colon & & e_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & \Lambda e_2\colon & e_2 \arrow[d, "\gamma"] \\
& \alpha \arrow[dr, "\gamma"'] & & \beta \arrow[dl, "\gamma"] & & \gamma \arrow[d, "\gamma"] \\
& & \gamma\alpha \arrow[d, "\gamma"] & & & \gamma^2 \arrow[d, "\gamma"] \\
& & \gamma^2\alpha \arrow[d, "\gamma"] & & & \gamma^3 \arrow[d, "\gamma"] \\
& & \vdots & & & \vdots
\end{tikzcd}
$$

og 2 graderte simple Λ-moduler, S_1 og S_2.

Under har vi stilt opp begynnelsen på den projektive oppløsningen $\mathbb{P}_2$ sammen med syzygyene til S_2 og vi ser at S_2 har en lineær oppløsning som stopper i P_1.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_2\colon & \Omega^2_\Lambda(S_2) \arrow[r, hook] & P_1 = \Lambda e_2 \arrow[r, dotted] & \Omega^1_\Lambda(S_2) \arrow[r, hook] & P_0 = \Lambda e_2 \arrow[r, dotted] & S_2 \\
\text{grad } 0\colon & & & & e_2 \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\gamma"] & e_2 \\
\text{grad } 1\colon & 0 & e_2 \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\gamma"] & \gamma \arrow[r, hook] \arrow[d, "\gamma"] & \gamma \arrow[d, "\gamma"] & \\
\text{grad } 2\colon & 0 & \gamma \arrow[d, "\gamma"] & \gamma^2 \arrow[d, "\gamma"] & \vdots & \\
\text{grad } 3\colon & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{tikzcd}
$$

Vi har så gjort tilsvarende for S_1 og ser at den første syzygyen er:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_1\colon & & \Omega^1_\Lambda(S_1) \arrow[rrr, hook] & & & P_0 \arrow[rr, dotted] & & S_1 \\
\text{grad } 0\colon & & & & & e_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[rr, dotted] & & e_1 \\
\text{grad } 1\colon & \alpha \arrow[dr, "\gamma"'] & & \beta \arrow[dl, "\gamma"] \arrow[r, hook] & \alpha \arrow[dr, "\gamma"'] & & \beta \arrow[dl, "\gamma"] & \\
\text{grad } 2\colon & & \gamma\alpha \arrow[d, "\gamma"] & & & \gamma\alpha \arrow[d, "\gamma"] & & \\
\text{grad } 3\colon & & \gamma^2\alpha \arrow[d, "\gamma"] & & & \gamma^2\alpha \arrow[d, "\gamma"] & & \\
\text{grad } 4\colon & & \vdots & & & \vdots & &
\end{tikzcd}
$$

Vi ser så på hvordan det går med $\Omega^1_\Lambda(S_1)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_1\colon & & & \Omega^2_\Lambda(S_1) \arrow[rrr, hook] & & & P_1 \arrow[rr, dotted] & & \Omega^1_\Lambda(S_1) & \\
\text{grad } 1\colon & & & & e_2 \arrow[d, "\gamma"'] & \coprod & e_2 \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\gamma"] & \alpha \arrow[dr, "\gamma"'] & & \beta \arrow[dl, "\gamma"] \\
\text{grad } 2\colon & \gamma \arrow[d, "\gamma"] & \coprod & \gamma \arrow[r, hook] \arrow[d, "\gamma"] & \gamma \arrow[d, "\gamma"] & & \gamma \arrow[d, "\gamma"] & & \gamma\alpha \arrow[d, "\gamma"] & \\
\text{grad } 3\colon & \gamma^2 \arrow[d, "\gamma"] & \coprod & \gamma^2 \arrow[d, "\gamma"] & \gamma^2 \arrow[d, "\gamma"] & & \gamma^2 \arrow[d, "\gamma"] & & \gamma^2\alpha \arrow[d, "\gamma"] & \\
\text{grad } 4\colon & \vdots & \coprod & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

og ser at $\Omega^2_\Lambda(S_1) = S_2 \coprod S_2$. Dermed vil også S_1 har en lineær oppløsning. Dermed vil I_4 gi at Λ er en Koszul-algebra.

Vi ser at $\Lambda = kQ/I_8 = kQ/(\gamma\gamma, \gamma\alpha + \gamma\beta)$ har to projektive moduler

$$\begin{tikzcd}
\Lambda e_1\colon & & e_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & \Lambda e_2\colon & e_2 \arrow[d, "\gamma"] \\
& \alpha \arrow[dr, "\gamma"'] & & \beta \arrow[dl, "\gamma"] & & \gamma \\
& & \gamma\alpha & & &
\end{tikzcd}$$

og 2 simple Λ-moduler, S_1 og S_2.

Under har vi stilt opp begynnelsen på den projektive oppløsningen $\mathbb{P}_2$ sammen med syzygyene til S_2 og vi ser at S_2 har en lineær oppløsning.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_2\colon & & \Omega^2_\Lambda(S_2) \arrow[r, hook] & P_1 = \Lambda e_2 \arrow[r, dotted] & \Omega^1_\Lambda(S_2) \arrow[r, hook] & P_0 = \Lambda e_2 \arrow[r, dotted] & S_2 \\
\text{grad } 0\colon & & & & & e_2 \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\gamma"] & e_2 \\
\text{grad } 1\colon & & & e_2 \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\gamma"] & \gamma \arrow[r, hook] & \gamma & \\
\text{grad } 2\colon & \cdots & \gamma \arrow[r, hook] & \gamma & & &
\end{tikzcd}$$

Vi har så gjort tilsvarende for S_1. Vi ser under at første syzygy er generert i rett grad.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_1\colon & & \Omega^1_\Lambda(S_1) \arrow[rrr, hook] & & & P_0 = \Lambda e_1 \arrow[rr, dotted] & & S_1 \\
\text{grad } 0\colon & & & & & e_1 \arrow[rr, dotted] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & e_1 \\
\text{grad } 1\colon & \alpha \arrow[dr, "\gamma"'] & & \beta \arrow[dl, "\gamma"] \arrow[r, hook] & \alpha \arrow[dr, "\gamma"'] & & \beta \arrow[dl, "\gamma"] & \\
\text{grad } 2\colon & & \gamma\alpha & & & \gamma\alpha & &
\end{tikzcd}$$

Ser så på den projektive oppløsningen til den første syzygyen.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_1: & & & \Omega^2_\Lambda(S_1) \arrow[rrr, hook] & & & P_1 \arrow[rr, dotted] & & \Omega^1_\Lambda(S_1) & \\
\text{grad } 0: & & & & & & & & & \\
\text{grad } 1: & & & & e_2 \arrow[d, "\gamma"'] & \coprod & e_2 \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\gamma"] & \alpha \arrow[dr, "\gamma"'] & & \beta \arrow[dl, "\gamma"] \\
\text{grad } 2: & \gamma & \coprod & \gamma \arrow[r, hook] & \gamma & & \gamma & & \gamma\alpha &
\end{tikzcd}$$

og ser at $\Omega^2_\Lambda(S_1) = S_2 \coprod S_2$. Dermed vil også S_1 har en lineær oppløsning. Dermed vil I_8 gi at Λ er en Koszul-algebra. Vi ser at alle kvadratiske algebraer i $\Lambda = kQ/I$, for kroppen $k = \mathbb{Z}_2$, hvor Q er koggeret

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & {} \arrow[loop right, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

vil være Koszul-algebraer.

6.2 Vår andre klasse av algebraer

Vi ser så på en klasse av algebraer hvor ikke alle algebraene er Koszul-algebraer. Vi kommer også her til å bruke resultatene vi har fått tidligere for å minske antall algebraer som vi må manuelt sjekke om er Koszul-algebraer.

Eksempel 9. Vi lar være $\Lambda = kQ/I$, for kroppen $k = \mathbb{Z}_2$, hvor Q er koggeret

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

og vi får at et kvadratisk ideal for Λ er kombinasjoner av $\alpha\alpha, \alpha\beta, \beta\alpha$ og $\beta\beta$. Vi får dermed $2^4 - 1 = 15$ elementer.

Vi husker at vi benevnte $V_2 = k\{\text{veier av lengde } 2\}$ og at I_2 er et undervektorrom av V_2 som består av elementer av grad 2 i I. Vi kommer til litt unøyaktig å telle idealer ved 'dimensjoner', og vi mener da $\dim_k(I_2)$. For eksempel vil $I = (\alpha^2)$ være et ideal av dimensjon 1, og $I = (\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta)$ være et ideal av dimensjon 3.

Da ser vi ved direkte inspeksjon at vi får ett ideal i dimensjon 0, 15 idealer i dimensjon 1, 35 idealer i dimensjon 2, 15 idealer i dimensjon 3 og ett ideal i grad 4.

Vi har fra Teorem 5.7 at alle algebraer $kQ/(f)$, hvor f er kvadratisk, vil være Koszul-algebraer, og vi ser dermed at de 15 idealene i dimensjon 1 vil være Koszul-algebraer. Siden de 15 idealene i dimensjon 3 er Yoneda-algebraen til hver sin algebra i dimensjon 1 vil disse også være Koszul-algebraer.

I dimensjon 0 har vi følgende eksakte følge: $0 \to J \to kQ \to kQ/J \to 0$, hvor vi ser at $kQ/J = \Lambda_0$ og at J er generert i grad 1. Siden kQ er en heriditær algebra vil J være en projektiv modul. Vi ser dermed at Λ vil ha en lineær projektiv oppløsning, og dermed være en Koszul-algebra. Siden algebraen i dimensjon 4 er Yoneda-algebraen til algebraen i dimensjon 0 vil denne også være en Koszul-algebra.

Vi har 35 unike idealer i dimensjon 2, nemlig:

$I_{16} = (\alpha^2, \alpha\beta)$	$I_{17} = (\alpha^2, \beta\alpha)$
$I_{18} = (\alpha^2, \alpha\beta)$	$I_{19} = (\alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha)$
$I_{20} = (\alpha^2, \alpha\beta + \beta^2)$	$I_{21} = (\alpha^2, \beta\alpha + \beta^2)$
$I_{22} = (\alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2)$	$I_{23} = (\alpha\beta, \beta\alpha)$
$I_{24} = (\alpha\beta, \beta^2)$	$I_{25} = (\alpha\beta, \alpha^2 + \beta\alpha)$
$I_{26} = (\alpha\beta, \alpha^2 + \beta^2)$	$I_{27} = (\alpha\beta, \beta\alpha + \beta^2)$
$I_{28} = (\alpha\beta, \alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2)$	$I_{29} = (\beta\alpha, \beta^2)$
$I_{30} = (\beta\alpha, \alpha^2 + \alpha\beta)$	$I_{31} = (\beta\alpha, \alpha^2 + \beta^2)$
$I_{32} = (\beta\alpha, \alpha\beta + \beta^2)$	$I_{33} = (\beta\alpha, \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
$I_{34} = (\beta^2, \alpha^2 + \alpha\beta)$	$I_{35} = (\beta^2, \alpha^2 + \beta\alpha)$
$I_{36} = (\beta^2, \alpha\beta + \beta\alpha)$	$I_{37} = (\beta^2, \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha)$
$I_{38} = (\alpha^2 + \alpha\beta, \alpha^2 + \beta\alpha)$	$I_{39} = (\alpha^2 + \alpha\beta, \alpha^2 + \beta^2)$
$I_{40} = (\alpha^2 + \alpha\beta, \beta\alpha + \beta^2)$	$I_{41} = (\alpha^2 + \alpha\beta, \alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2)$
$I_{42} = (\alpha^2 + \beta\alpha, \alpha^2 + \beta^2)$	$I_{43} = (\alpha^2 + \beta\alpha, \alpha\beta + \beta^2)$
$I_{44} = (\alpha^2 + \beta\alpha, \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$	$I_{45} = (\alpha^2 + \beta^2, \alpha\beta + \beta\alpha)$
$I_{46} = (\alpha^2 + \beta^2, \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha)$	$I_{47} = (\alpha\beta + \beta\alpha, \alpha\beta + \beta^2)$
$I_{48} = (\alpha\beta + \beta\alpha, \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$	$I_{49} = (\alpha\beta + \beta^2, \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha)$
$I_{50} = (\beta\alpha + \beta^2, \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha)$	

Vi sjekker hvilke av kQ/I_i for $i = 16, ..., 50$ som er Koszulalgebraer. Vi ser først at koggeret Q er symmetrisk, og vi kan dermed bytte om på α og β i idealene uten om at algebraen de genererer vil bli forskjellig. Vi ser at det blir endel like algebraer, nemlig 24-17, 25-32, 26-31, 27-30, 28-33, 29-16, 34-21, 35-20, 36-19, 37-22, 42-39, 47-38, 49-44 og 50-41.

Vi har dermed igjen 21 algebraer som må sjekkes, kQ/I_i for $i = 16$, ..., 23, 30, ..., 33, 38, ..., 41, 43, ..., 46, 48. Vi ser at I_i for i=16, 17, 18 og 23 er monomielle ideal, og dermed vil kQ/I_i være Koszul-algebraer.

Av de gjenstående har vi regnet ut at I_i, for $i = 19$, 22, 38, 40, 43, 45, 46 og 48, har en kvadratisk Gröbnerbasis. I Eksempel 7 regnet vi ut at I_{19} har en kvadratisk Gröbnerbasis. Vi viser et eksempel til på hvordan utregningen er gjort.

Vi ser på I_{38} og bruker den venstrelengde-leksiografiske ordningen og lar $\alpha < \beta$, og ser at $\mathrm{Tip}(\alpha^2+\alpha\beta) = \alpha\beta$ og $\mathrm{Tip}(\alpha^2+\beta\alpha) = \beta\alpha$. Dermed må vi se på overlappingsrelasjonene $o(\alpha^2+\alpha\beta, \alpha^2+\beta\alpha, \alpha, \alpha) = (\alpha^2+\alpha\beta)\alpha - \alpha(\alpha^2+\beta\alpha) = 0$ og $o(\alpha^2+\beta\alpha, \alpha^2+\alpha\beta, \beta, \beta) = (\alpha^2+\beta\alpha)\beta - \beta(\alpha^2+\alpha\beta) = \alpha^2\beta - \beta\alpha^2$.

Vi ser at $\mathrm{Tip}(\alpha^2\beta - \beta\alpha^2) = \alpha^2\beta$, og regner så ut $o(\alpha^2\beta + \beta\alpha^2, \alpha^2 + \alpha\beta, \alpha, 1) = \beta\alpha^2 - \alpha^3$.

Vi ser igjen at $\mathrm{Tip}(\beta\alpha^2 - \alpha^3) = \beta\alpha^2$, og vi regner ut $o(\alpha^2 + \beta\alpha, \beta\alpha^2 + \alpha^3, 1, \alpha) = 0$. Tilsvarende vil kQ/I_i for $i = 19$, 22, 38, 40, 43, 45, 46 og 48 ha en kvadratisk Gröbnerbasis og dermed være Koszul-algebraer fra Teorem 5.5.

Vi har dermed 9 stykker vi må regne ut manuelt, nemlig kQ/I_i for i=20, 21, 30, 31, 32, 33, 39, 41 og 44. I Eksempel 2 regnet vi ut kQ/I_{20}, og så at denne ikke er en Koszul-algebra. Vi regnet ut i Eksempel 4 at den kvadratiske dualen til kQ/I_{20} er kQ/I_{32}, og dermed vil også kQ/I_{32} ikke være en Koszul-algebra.

Vi ser at for I_{31} får vi følgende start på den projektive oppløsningen:

$$\begin{tikzcd} \Omega^1_\Lambda(S_1) \arrow[r, hook] & \Lambda e_1 \arrow[r, dotted] & S_1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{grad } 0: & & & & e_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[rr, dotted] & & e_1 \\
\text{grad } 1: & \alpha \arrow[d, "\alpha"] & \beta \arrow[dl, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[r, hook] & 1 \arrow[d, "\alpha"] & & 1 \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dll, "\beta"] & \\
\text{grad } 2: & \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha^2 & & \alpha\beta &
\end{tikzcd}$$

Vi ser at $\Omega^1_\Lambda(S_1)$ har $\Lambda e_1 \coprod \Lambda e_1$ som projektivt dekke, og vi ønsker å finne en basis for den andre syzygyen til S_1. Vi velger følgende basis

$$x_1\colon (\alpha, \beta), x_2\colon (\beta, 0), x_3\colon (\alpha^2, 0), x_4\colon (\alpha\beta, 0), x_5\colon (0, \alpha^2) \text{ og } x_6\colon (\alpha^2, \alpha\beta).$$

Vi ser dermed at den andre syzygyen til S_1 er:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& x_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & & & x_2 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
x_6 & & x_5 & \coprod & x_3 & & x_4
\end{tikzcd}$$

Vi dekker disse med Λe_1 igjen, og ser at den tredje syzygyen til S_1 vil være generert i grad 4, og vi får at $\Lambda = kQ/I_{31}$ ikke er en Koszul-algebra.

Må sjekke I_{21}, I_{30}, I_{33}, I_{39}, I_{41} og I_{44}. Vi har sett i Eksempel 5 at den kvadratiske dualen til kQ/I_{30} er kQ/I_{21}, slik at det holder å sjekke kQ/I_{21}. Vi ser at utregningene på de 5 siste vil gå helt parallelt til de over, og vi fikk at alle 5 ikke er Koszul-algebraer.

Dermed ser vi at det er 18 algebraer som ikke er Koszul-algebraer, nemlig kQ/I_i for i = 20, 21, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 39, 41, 42, 44, 49 og 50.

Vi har tilsammen 67 unike kvadratiske idealer, ett i dimensjon 0, 15 i dimensjon 1, 35 i dimensjon 2, 15 i dimensjon 3 og ett i dimensjon 4. Av disse har vi funnet ut at det er 18 kvadratiske algebraer ikke er Koszul-algebraer. Vi får dermed at det er 18/67=26,9% av algebraene som ikke er Koszul-algebraer, for $\Lambda = \mathbb{Z}_2 Q/I_i$.

Kapittel 7

Oppsummering

Vi har studert Koszul-algebraer og sett ulike betingelser for at en algebra er en Koszul-algebra. Vi beviste at alle Koszul-algebraer er kvadratisk algebraer, og så på to klasser av kvadratiske algebraer for å se hvor stor andel av algebraene som er Koszul-algebraer.

Vi har bevist at Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra er en Koszul-algebra. Vi har også funnet resultater som sier at alle monomielle kvadratiske algebraer er Koszul-algebraer, og at algebraer som har en kvadratisk Gröbnerbasis er Koszul-algebraer. Vi har også et resultat fra Backelin som sier at algebraer på formen $kQ/(f)$ er Koszul-algebraer.

Vi brukte disse forskjellige resultatene på to klasser av algebraer. Da fant vi ut at den ene klassen bare besto av Koszul-algebraer. For den andre klassen av algebraer fant vi algebraer som ikke er Koszul-algebraer. Vi så at at ca 25% av algebraene ikke var Koszul-algebraer.

Bibliografi

[1] Maurice Auslander and David A. Buchsbaum. *Groups, Rings, Modules.* Harper & Row, 1974.

[2] Maurice Auslander, Idun Reiten, and Sverre O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras.* Cambridge University Press, 1997.

[3] Jörgen Backelin. *A Distributiveness Property of Augmented Algebras, and Some Related Homological Results.* PhD thesis, Stockholms Universitet, 1984.

[4] R. Fröberg. Koszul Algebras. *Lecture notes in pure and applied mathematics 205*, pages 337–350, 1999.

[5] V. N. Gerasimov. Distributive Lattices of Subspaces and the Equality Problem for Algebras With a Single Relation. *Algebra and Logic 15*, pages 238–274, 1977.

[6] Edward Green and Rosa Q. Huang. Projective Resolutions of Straightening Closed Algebraes Generated by Minors. *Advances in Mathematics 110*, 1995.

[7] Edward L. Green. Noncommutative Gröbner Bases, and Projective Resolutions. *Progress in Mathematics, Vol. 173*, pages 29–60, 1999.

[8] Edward L. Green and Roberto Martínez-Villa. Koszul and Yoneda Algebras. *Canadian Math. Soc. 18*, pages 247–298, 1995.

[9] Edward L. Green and D. Zacharia. The Cohomology Ring of a Monomial Algebra. *Manuscripta Math. 85*, 1994.

[10] Constantin Năstăsescu and Freddy Van Oystaeyen. *Methods of Graded Rings.* Springer-Verlag, 2004.