

Fourierhyperfunksjoner

Skartsæterhagen Maria Kristine

Master i matematikk
Oppgaven levert: Juni 2008
Hovedveileder: Eugenia Malinnikova, MATH

Oppgavetekst

Oppgaven går ut på å studere grunnleggende teori om hyperfunksjoner med vekt på fouriertransformasjon av hyperfunksjoner. Det skal skrives en oversiktlig introduksjon i teorien som kan være til hjelp i studiet av mer avansert litteratur. Fouriertransformasjon av hyperfunksjoner skal sammenlignes med noen tidligere definisjoner av generalisert transformasjon.

Forord

Denne oppgaven representerer mitt avsluttende arbeid med mastergraden i matematikk på NTNU. Det er nå snart fem år siden jeg startet på NTNU på linjen energi og miljø, men jeg hoppet over til matematikk bachelor etter kort tid. Deretter gikk veien videre til master i matematikk, med spesialisering i analyse.

Masteroppgaven har gått over to semestre, høst -07 og vår -08. Til tross for at jeg syntes et helt år med oppgaveskriving hørt skremmende ut, har det vært fint å kunne fordype seg i ett prosjekt i lang tid uten forstyrrende elementer som andre fag eller jobb. Mangelen på forelesninger og faste rammer har imidlertid ført til at en vanlig arbeidsdag denne våren har begynt mellom 12 og 18 og vart til 16 eller 04, alt ettersom. Idet innleveringsfristen nærmet seg, ble døgnet forsøkt utvidet med flere og flere nattetimer for å rekke alt jeg ikke hadde gjort tidligere.

Når jeg nå begynner å se slutten på arbeidet, vil jeg gjerne rette en takk til min gode venninne og medstudent Kjersti S. Eikrem for mange koselige lunsjpauser og opplysende diskusjoner, ettersom vi begge har hatt hyperfunksjoner som et gjennomgangstema dette året. I tillegg vil jeg selvfølgelig takke min flinke veileder Eugenia Malinnikova som har hjulpet meg tilbake på riktig spor når argumentasjonen eller integrasjonen har sporet litt av, og tålmodig svart på all slags spørsmål til alle døgnets tider.

Trondheim, mai 2008, Maria Skartsæterhagen

Sammendrag

Oppgaven handler om fouriertransformasjon av generaliserte funksjoner, med spesiell vekt på fouriertransformasjon av hyperfunksjoner. Transformasjonen på hyperfunksjoner er deretter sammenlignet med Carlemans fouriertransform, som er en av de tidlige generaliseringene av den klassiske fouriertransformen. Det er vist at begge transformene er symmetriske, det vil si at in-vers fouriertransform er også definert på samme rom. Videre vises det at begge transformene generaliserer både den klassiske fouriertransformen og Schwartz' fouriertransform av distribusjoner med kompakt support.

Innhold

1	Introduksjon	9
1.1	Oversikt og kildebruk	10
1.2	Bakgrunnsstoff fra analysen	11
2	Den klassiske fouriertransformen	15
2.1	Fouriertransformen på $L^1(\mathbb{R})$	15
2.2	Egenskaper	16
2.3	Utvidelser av fouriertransformen	17
3	Carlemans fouriertransform	19
3.1	Carlemantransformen	20
3.2	Egenskaper	26
3.3	Utregninger	37
4	Hyperfunksjoner	41
4.1	Definisjoner	41
4.2	Egenskaper	43
4.3	Eksempler	45
5	Fouriertransformasjon av hyperfunksjoner	51
5.1	Hyperfunksjoner med kompakt support	51
5.2	Eksponensielt avtagende hyperfunksjoner	54
5.3	Sakte voksende hyperfunksjoner	56

5.4	Sammenligning med Carlemans teori	59
-----	---	----

6	Konklusjon	63
----------	-------------------	-----------

Kapittel 1

Introduksjon

Fouriertransformen

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

ble introdusert av franskmannen Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) i begynnelsen av 1800-tallet [Kre06]. Fouriertransformen har mange anvendelser, blant annet innen løsning av partielle differensialligninger. Integralet i formelen setter imidlertid strenge krav til hvilke funksjoner den kan brukes på. I $L^1(\mathbb{R})$ er integralet veldefinert, men den transformerte funksjonen \widehat{f} ligger ikke nødvendigvis i $L^1(\mathbb{R})$, så for at den inverse transformen $\mathcal{F}^{-1}\widehat{f}$ skal gjelde, må flere krav oppfylles.

Mange har forsøkt å generalisere fouriertransformen til en større klasse av funksjoner, fortrinnsvis et rom der den inverse transformen også gjaldt. En av dem var svensken Torsten Carleman (1892-1949). Han konstruerte en transform som gjelder for komplekse funksjonspaar (f_1, f_2) som er holomorfe i henholdsvis øvre og nedre halvplan med visse vekstbetingelser. Denne transformen er symmetrisk; den sender tilbake på samme rom og har en invers. Carlemans teori ble publisert i 1944, selv om han hadde gitt forelesninger på temaet allerede ni år tidligere. [Lüt82]

I 1947-48 utvidet franskmannen Laurent Schwartz (1915-2002) fouriertransformen til å gjelde for tempererte distribusjoner. Fra [Lüt82]: ”En av de store fordelene med distribusjonsteorien er nettopp den enkle generaliseringen den gir av fouriertransformen.“ Det var også Schwartz som mellom 1945 og 1949 utviklet hovedtrekkene i teorien om distribusjoner som generaliserte funksjoner. Mange matematikere hadde brukt lignende konstruksjoner tidligere, men Schwartz samlet det i en helhetlig teori.

Til tross for at Carleman og Schwartz’ teorier begge omhandlet generaliseringer av fouriertransformen, gjorde de selv ingen forsøk på å knytte de to teoriene sammen [Lüt82]. Det ble senere vist at Carlemans transform er mer

generell enn Schwartz sin: Carlemans funksjonspår inneholder alle distribusjoner og det finnes også funksjonspår som ikke svarer til en distribusjon. Carlemans funksjonspår peker framover mot den teorien japaneren Mikio Sato (født 1928) introduserte i 1958; teorien om hyperfunksjoner.

Sato var ikke den første til å bruke konseptet hyperfunksjon; andre hadde tidligere forsøkt på det samme, men med ulik tilnærming. Sato regnes imidlertid som grunnleggeren av hyperfunksjonsteorien og betegnelsen *hyperfunksjon* stammer også fra ham [Sch87]. Hyperfunksjoner slik Sato definerte dem, er kort sagt ekvivalensklasser av holomorfe funksjoner på $\mathbb{C} \setminus V$, der $V \subseteq \mathbb{R}$, slik at to funksjoner er ekvivalente dersom differansen mellom dem er holomorf i hele \mathbb{C} .

En av motivasjonsfaktorene for utviklingen av hyperfunksjonene var ønsket om å generalisere fouriertransformen til en større klasse enn Schwartz' distribusjoner [Kan88]. Hyperfunksjonene definerer da også fouriertransformen på en større klasse av funksjoner enn de tempererte distribusjonene. At Carleman hadde arbeidet med å fouriertransformere lignende type funksjonspår rundt tjue år tidligere ble man ikke klar over før i 1961 [Lüt82].

Denne oppgaven har til hensikt å gi en oversikt over Carlemans fouriertransform og sammenligne den med fouriertransformasjon av hyperfunksjoner.

1.1 Oversikt og kildebruk

I **kapittel 2** blir den klassiske fouriertransformen definert på L^1 og L^2 . Enkelte egenskaper og teoremer er med, og vi ser hvilke svakheter den har. Sist i kapitlet defineres Schwartz fouriertransform på distribusjoner. Alt er hentet fra C. Gasquet and P. Witomski: *Fourier Analysis and Applications* [GW98], bortsett fra selve definisjonen. For å lettere kunne sammenligne den klassiske transformen med de utvidede versjonene har jeg valgt å bruke definisjonen fra Erwin Kreyszig: *Advanced Engineering Mathematics* [Kre06].

I **kapittel 3** blir det gitt en forholdsvis detaljert framstilling av Carlemans teori. Dette er det største kapitlet i oppgaven og også det jeg har brukt mest tid på, spesielt delen som handler om den inverse Carlemantransformen. Kildene har i hovedsak vært artikkelen av Christer O. Kiselman: *Generalized Fourier Transformations: The work of Bochner and Carleman viewed in the light of the theories of Schwartz and Sato* [Kis02] som gir en knapp beskrivelse av teorien. De fleste bevis har jeg derfor utledet selv, med noen unntak. Utledningen av den inverse Carlemantransformen er hentet fra Torsten Carleman: *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent : leçons professées à l'Institut Mittag-Leffler* [Car44]. For å gjøre stoffet mer oversiktlig er et par lange utregninger flyttet til en egen seksjon bakerst i kapitlet.

I **kapittel 4** introduseres konseptet med hyperfunksjoner som generaliserte funksjoner gjennom endel elementære egenskaper og eksempler. Det er lagt vekt på at kapitlet skal være oversiktlig og forståelig selv om man aldri har hørt om hyperfunksjoner før. Derfor er det mange eksempler og bare korte beviser med. Framstillingen er basert på artikkelen av Henrik Schlichtkrull: *Introduktion til hyperfunktioner* [Sch87] og til dels på boka Carlos A. Berenstein og Roger Gay: *Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis* [BG95].

Kapittel 5 har til formål å definere fouriertransformen på hyperfunksjoner. Boka av A. Kaneko: *Introduction to Hyperfunctions* [Kan88] er brukt som kildemateriale, men gir en svært formell framstilling av emnet. Jeg har forsøkt å gi en mer elementær omhandling med flere eksempler og uten store bevis. Vi definerer fouriertransformen først på hyperfunksjoner med kompakt support, før vi tar for oss mer generelle hyperfunksjoner. Til slutt er en sammenligning av det mest generelle fourierhyperfunksjonsrommet med Carlemans funksjonsrom.

1.2 Bakgrunnsstoff fra analysen

Jeg presenterer her en del definisjoner og resultater fra analysen som vil bli brukt i oppgaven.

1.2.1 Funksjonsrom

C^p -rom

La I være et intervall i \mathbb{R} og p være et naturlig tall. Rommet av funksjoner i $C^p(I)$ er definert ved

$$C^p(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}(\text{eller } \mathbb{C}) \mid f \text{ er } p \text{ ganger kontinuerlig deriverbar}\}.$$

Når $f \in C^p(I)$ sier vi at f er av klasse C^p .

En funksjon f sies å være uendelig deriverbar eller av klasse C^∞ på I hvis f er i $C^p(I)$ for alle $p \in \mathbb{N}$.

L^p -rom

La $p > 0$ være et positivt tall og la I være et intervall i \mathbb{R} . Da betegner $L^p(I)$ rommet av målbare funksjoner $f : I \rightarrow \mathbb{R}(\text{eller } \mathbb{C})$ slik at $|f(x)|^p$ er

integrererbar på I , det vil si

$$\int_I |f(x)|^p dx < +\infty.$$

$L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ betegner rommet av målbare funksjoner fra \mathbb{R} til \mathbb{R} eller \mathbb{C} slik at $|f|^p$ er integrererbar på alle begrensede intervall i \mathbb{R} . Det kan vises at

$$L^p(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}),$$

for alle $p \in \mathbb{N}$.

Rommet $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ betegner rommet av funksjoner i $C^\infty(\mathbb{R})$ som har begrenset support.

Rommet $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

En funksjon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sies å *avta raskt* hvis, for alle $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^p f(x)| = 0.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ betegner rommet av funksjoner $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ som har følgende to egenskaper:

1. f er uendelig deriverbar
2. f og alle dens deriverte avtar raskt

Rommet kalles *Schwartzrommet* etter matematikeren Laurent Schwartz.

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ er et underrom av $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1.2.2 Distribusjoner

Alt hentet fra [GW98].

Definisjon

En distribusjon er en avbildning $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ som er lineær og kontinuerlig.

Variabelen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ kalles en *testfunksjon*. Verdien av T i φ betegnes med $T(\varphi)$ eller $\langle T, \varphi \rangle$.

Rommet av alle distribusjoner betegnes med $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Distribusjoner som generaliserte funksjoner

Hvis $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ så er

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (1.1)$$

en distribusjon.

Avbildningen er veldefinert og en-til-en. Dermed kan vi identifisere $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ med bildet i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Derfor kalles distribusjonene for *generaliserte funksjoner*.

Tempererte distribusjoner

$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ betegner vektorrommet av kontinuerlige, lineære funksjonaler T definert på $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Elementene i $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ kalles *tempererte distribusjoner*.

Siden $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, er $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Det kan vises at funksjonene i $L^p(\mathbb{R})$ er tempererte distribusjoner for alle $p \in \mathbb{N}$.

1.2.3 Resultater fra reell analyse

Alt hentet fra [Mal].

Dominert konvergens

La $\{f_n\}$ være en følge av målbare funksjoner. Anta at $f_n \rightarrow f$ n.o. og at det finnes en $g \in L^1$ slik at $|f_n| \leq g$ n.o. for hver n . Da er $f \in L^1$ og

$$\int f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dm.$$

Korollar

Anta at $\{f_n\} \subset L^1$ og $\sum_n \int |f_n| dm < +\infty$. Da konvergerer $\sum_n f_n(x)$ n.o. til en funksjon $f \in L^1$ og

$$\int \sum_n f_n dm = \sum_n \int f_n dm.$$

Fubinis teorem

La $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være en integrerbar funksjon, det vil si

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f| dm_2 \left(= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dy \right) dx \right) < +\infty.$$

Da er

$$\int_{\mathbb{R}^2} f dm_2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dy.$$

1.2.4 Resultater fra kompleks analyse

Hentet fra [Kre06] og [Gam01].

Holomorfe funksjoner

En kompleks funksjon f sies å være *holomorf* i et åpent område $W \subset \mathbb{C}$ hvis den er kompleks deriverbar i hvert punkt av W . Vi betegner dette med $f \in \mathcal{O}(W)$. Begrepet *analytisk* brukes ofte om det samme, her bruker vi analytisk om de reelle funksjonene:

En reell funksjon g sies å være (reell) analytisk i et åpent område $V \subseteq \mathbb{R}$ hvis g har deriverte av alle orden og den stemmer med Taylorrekkeutviklingen i hvert punkt av V . Vi skriver da at $g \in \mathcal{A}(V)$.

Cauchys teorem og integralformel

Hvis $f(z)$ er holomorf funksjon på et enkeltsammenhengende område D og γ er en enkel lukket kurve i D , så har vi

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (\text{Cauchys teorem})$$

og hvis z ligger innenfor γ ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(t)}{t - z} dt \quad (\text{Cauchys integralformel}).$$

$f(z)$ har komplekse deriverte av alle ordner på D , gitt ved

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(t)}{(t - z)^{n+1}} dt.$$

Kapittel 2

Den klassiske fouriertransformen

I 1811 introduserte Fourier fourierintegralene

$$\phi(\mu) = \int_0^{\infty} f(x) \cos \mu x dx$$

og

$$\psi(\mu) = \int_0^{\infty} f(x) \sin \mu x dx$$

og deres inverser i sin publikasjon om varmediffusjon (heat diffusion) [Lüt82].
Fouriers cosinus- og sinustransformer og den komplekse fouriertransformen
kan enkelt utledes fra disse [Kre06]. Vi skal bruke den komplekse versjonen.

2.1 Fouriertransformen på $L^1(\mathbb{R})$

2.1.1 Definisjon

Gitt $f \in L^1(\mathbb{R})$ har vi

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx. \quad (2.1)$$

Hvis også $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ har vi

$$\mathcal{F}^{-1}\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi = f(x) \quad \text{n.o.} \quad (2.2)$$

$\mathcal{F}f = \widehat{f}$ kalles fouriertransformen til f og $\mathcal{F}^{-1}f$ kalles den inverse fouriertransformen til f .

Fordi $|e^{\pm i\xi x}| = 1$ ser vi at disse integralene er veldefinerte for $f \in L^1(\mathbb{R})$.

2.1.2 Eksempel

La $f = \chi_{[-1,1]}$ være den karakteristiske funksjonen til intervallet $[-1, 1]$. Vi bruker definisjonen og finner fouriertransformen til f :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_{-1}^1 = \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{i\xi\sqrt{2\pi}}$$

Fordi $e^{i\xi} = \cos \xi + i \sin \xi$ og $e^{-i\xi} = \cos \xi - i \sin \xi$ får vi at $e^{i\xi} - e^{-i\xi} = 2i \sin \xi$ og svaret kan skrives som

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi},$$

som forøvrig ikke ligger i $L^1(\mathbb{R})$.

Eksempelen viser at det finnes funksjoner i L^1 der den transformerte ikke er i L^1 , og hvor (2.2) følgelig ikke kan brukes. Vi trenger en utvidelse av fouriertransformen som gjelder for alle L^1 -funksjoner, slik at vi alltid har en invers som kan brukes til å rekonstruere den opprinnelige funksjonen. Vi skal i slutten av dette kapitlet se en slik utvidelse.

2.2 Egenskaper

2.2.1 Linearitet

Siden integrasjon er en lineær operasjon, er fouriertransformen en lineær operator: La $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ og $a, b \in \mathbb{C}$. Da eksisterer fouriertransformen av $af + bg$ og

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

2.2.2 Deriverte

Hvis $f \in C^n(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ og alle de deriverte $f^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$ er i $L^1(\mathbb{R})$, så er

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{f}(\xi),$$

for $k = 1, 2, \dots, n$.

Hvis $x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ for $k = 0, 1, 2, \dots, n$, så er

$$\mathcal{F}(x^k f(x))(\xi) = i^k \widehat{f^{(k)}}(\xi),$$

for $k = 1, 2, \dots, n$.

2.2.3 Translasjon

Den translaterte $\tau_a f$ av f er definert ved $\tau_a f(x) = f(x - a)$. For $f \in L^1(\mathbb{R})$ har vi

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-ia\xi} \widehat{f}(\xi).$$

2.2.4 Konvolusjon

Konvolusjon av to funksjoner f og g er gitt ved

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)du.$$

Hvis $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ så er $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ og

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$$

for alle $\xi \in \mathbb{R}$.

2.3 Utvidelser av fouriertransformen

2.3.1 Fouriertransformen for L^2

Fouriertransformen \mathcal{F} og dens invers \mathcal{F}^{-1} kan utvides til å gjelde for funksjoner i L^2 . Til forskjell fra fouriertransformen på L^1 så ligger \widehat{f} i L^2 hvis $f \in L^2$. Derfor gjelder den inverse transformen uten flere antagelser.

$L^1(\mathbb{R})$ er imidlertid ikke inneholdt i $L^2(\mathbb{R})$, men på $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ er utvidelsen og fouriertransformen (2.1) like.

2.3.2 Fouriertransform av distribusjoner

For å kunne fouriertransformere distribusjoner trenger vi et rom av testfunksjoner φ slik at $\widehat{\varphi}$ ligger i samme rom. Dette er ikke tilfelle for $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Schwartzrommet $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ er imidlertid invariant under fouriertransform $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Vi kan altså definere fouriertransformen på de tempererte distribusjonene $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Anta at $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Fouriertransformen på T defineres ved

$$\text{SF}(T)(\varphi) = \langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle \quad (2.3)$$

for alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Transformen sender tilbake på seg selv; $SF(T)(\varphi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ og den inverse transformen er gitt ved

$$SF^{-1}(T)(\varphi) = \langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle.$$

For alle $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ gjelder,

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}T = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T = T.$$

Vi kaller denne fouriertransformen $SF(T)$ for *Schwartz' fouriertransform* etter Laurent Schwartz. Siden funksjonene i L^1 og L^2 er tempererte distribusjoner, ser vi at Schwartz' fouriertransform er en utvidelse av den klassiske fouriertransformen til et større rom.

[GW98, Kis02]

Kapittel 3

Carlemans fouriertransform

Fouriertransformen (2.1) gjelder for funksjoner i L^1 og L^2 . Har vi isteden en funksjon $f \in L^1_{\text{loc}}$ kan vi ikke ta fouriertransformen av denne på vanlig måte. Men hvis f oppfyller betingelsen

$$\int_0^x |f(x)|dx = O(|x|^\kappa) \quad x \rightarrow \pm\infty$$

der $\kappa \in \mathbb{N}$, kan vi definere to nye funksjoner

$$g_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-izy} f(y) dy \quad (3.1)$$

og

$$g_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-izy} f(y) dy. \quad (3.2)$$

g_1 er veldefinert i øvre halvplan og g_2 i nedre halvplan siden $e^{-izy} f(y) = e^{-i\text{Re}(z)y} e^{\text{Im}(z)y} f(y)$. Dette er integrerbart hvis $\text{Im}(z) > 0$ og $y \leq 0$ eller motsatt (se 3.3.1). Begge funksjonene er holomorfe.

Hvis $f \in L^1$ kan vi fra g_1 og g_2 finne den vanlige fouriertransformen ved å la $v = \text{Im}(z) \rightarrow 0$:

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} g_1(u + iv) - g_2(u - iv) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} f(y) dy.$$

Likheten kan vises ved å bruke dominert konvergensteoremet, se 3.3.3.

Så fouriertransformen av $f \in L^1$ kan skrives som grenseverdien av en differanse av to holomorfe funksjoner g_1 og g_2 , definert i hvert sitt halvplan. Carleman brukte dette til å utvikle en fouriertransform som tok inn et par (f_1, f_2) av holomorfe funksjoner definert i hvert sitt halvplan og ga ut et annet par (g_1, g_2) av samme type.

3.1 Carlemanstransformen

3.1.1 Definisjon av Carlemanpar

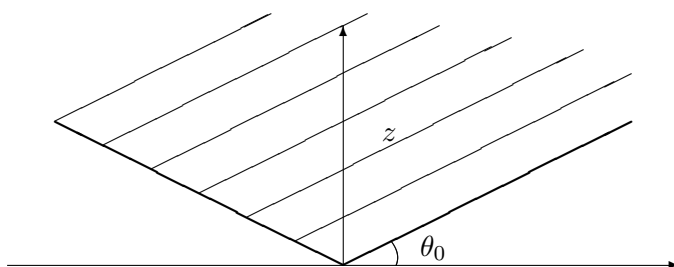
La f_1 og f_2 være holomorfe funksjoner definert for henholdsvis $\text{Im}z > 0$ og $\text{Im}z < 0$. Anta at det finnes $\alpha, \beta \geq 0$ og $A(\theta_0)$ for $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ slik at

$$|f_1(re^{i\theta})| < A(\theta_0)(r^\alpha + r^{-\beta}) \quad \text{for } r > 0, \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0 \quad (3.3)$$

og

$$|f_2(re^{i\theta})| < A(\theta_0)(r^\alpha + r^{-\beta}) \quad \text{for } r > 0, -\pi + \theta_0 < \theta < -\theta_0 \quad (3.4)$$

α er for å sikre at funksjonene ikke vokser ubegrenset mot uendelig, mens β er for å sikre at de ikke vokser ubegrenset mot origo. (f_1, f_2) kalles et *Carlemanpar av klasse (α, β)* eller sies å være *Carleman av klasse (α, β)* .



Figur 3.1: Området hvor f_1 må oppfylle betingelsen 3.3

3.1.2 Definisjon av G og H

Vi antar foreløpig at $\beta < 1$. De holomorfe funksjonene G og H er gitt ved

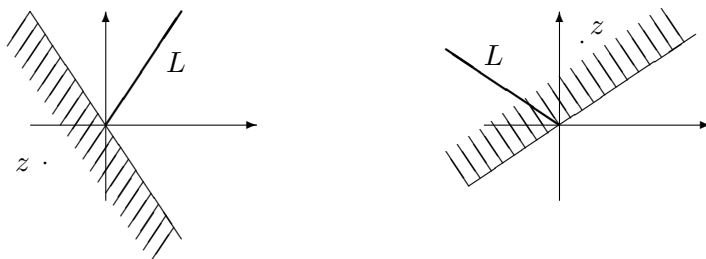
$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{-izy} f_1(y) dy \quad (3.5)$$

og

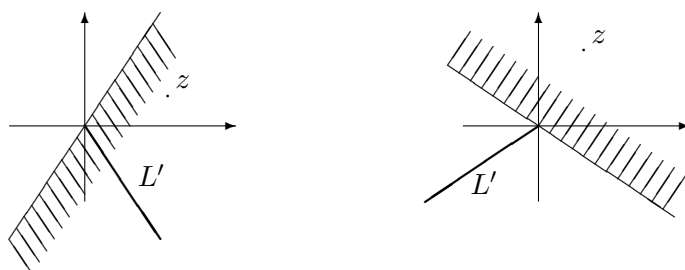
$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L'} e^{-izy} f_2(y) dy, \quad (3.6)$$

der L er en linje i øvre halvplan som starter i origo og samme med L' i nedre halvplan. Vi skal i neste avsnitt se hvor z ligger.

Definisjonsområder for G :



Definisjonsområder for H :



Figur 3.2: Definisjonsområder for G og H med ulike stråler L og L'

3.1.3 Påstand: G og H er veldefinerte for $\text{Im}(zy) < 0$

Vi viser at uttrykkene ovenfor er veldefinerte når $\text{Im}(zy) < 0$. La z være gitt ved

$$z = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

og L parametrisert ved

$$y = \rho e^{i\phi} = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$$

der $\phi \in (0, \pi)$.

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{-izy} f_1(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-ir\rho(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)} f_1(\rho e^{i\phi}) e^{i\phi} d\rho \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{r\rho\sin(\theta+\phi)} e^{-ir\rho\cos(\theta+\phi)} f_1(\rho e^{i\phi}) e^{i\phi} d\rho \end{aligned}$$

For at integralet skal være definert, må $e^{r\rho\sin(\theta+\phi)} < 1$. Det betyr at $r\rho\sin(\theta+\phi) < 0$, som er akkurat det samme som at $\text{Im}(zy) < 0$.

Siden $\beta < 1$, blir absoluttverdien av integranden

$$|e^{r\rho \sin(\theta+\phi)} f_1(\rho e^{i\phi})| < A(\theta_0) e^{r\rho \sin(\theta+\phi)} (\rho^\alpha + \rho^{-\beta})$$

som er integrerbar ved 3.3.1.

For $H(z)$ blir uttrykket det samme som for $G(z)$ bortsett fra at $\phi \in (\pi, 2\pi)$ og f_1 byttes ut med f_2 . Definisjonsområdet for G og for H er vist i figur 3.2.

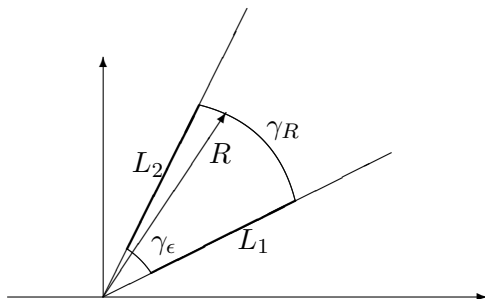
3.1.4 Påstand: G er uavhengig av linjen L

Vi vil ha at

$$\int_{L_1} e^{-izy} f(y) dy = \int_{L_2} e^{-izy} f(y) dy$$

der L_1 og L_2 er linjer i øvre halvplan som starter i origo. Vi velger θ_0 slik at begge linjene ligger i området mellom θ_0 og $\pi - \theta_0$. Da må z ligge i området der både $\text{Im}(y_1 z) < 0$ og $\text{Im}(y_2 z) < 0$ for $y_1 \in L_1$ og $y_2 \in L_2$.

For å kunne bruke Cauchys teorem konstruerer vi to sirkelbuer γ_R og γ_ϵ , som vist i figur 3.3. Vi lar D være området avgrenset av strålene L_1 og L_2 og sirkelbuene γ_R og γ_ϵ .



Figur 3.3: Strålene L_1 og L_2 og sirkelbuene γ_R og γ_ϵ danner en lukket kurve.

Cauchys teorem sier at $\int_{dD} e^{-izy} f(y) dy = 0$ dersom $e^{-izy} f(y)$ er holomorf på området D . $f(y)$ er holomorf for $\text{Im}y > 0$ per antagelse, dermed er $e^{-izy} f(y)$ også holomorf på dette området og vi får

$$\begin{aligned} \int_{dD} e^{-izy} f(y) dy &= \\ &= \int_{L_1} e^{-izy} f(y) dy + \int_{\gamma_R} e^{-izy} f(y) dy - \int_{L_2} e^{-izy} f(y) dy + \int_{\gamma_\epsilon} e^{-izy} f(y) dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nå trenger vi bare å vise at sirkelbueintegralene går mot null når R går mot uendelig og ϵ går mot null. Vi regner ut integralet over γ_R når z og y er parametrisert ved

$$z = Re^{i\theta} = R(\cos \theta + i \sin \theta)$$

og

$$y = \rho e^{i\phi} = \rho(\cos \phi + i \sin \phi).$$

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_R} e^{-izy} f(y) dy \right| &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\phi_1}^{\phi_2} e^{-irR(\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi))} f(Re^{i\phi}) Rie^{i\phi} d\phi \right| \\ &\leq A(\theta_0) \lim_{R \rightarrow \infty} (R^{\alpha+1} + R^{1-\beta}) \int_{\phi_1}^{\phi_2} e^{rR\sin(\theta+\phi)} d\phi \\ &\leq A(\theta_0) \lim_{R \rightarrow \infty} (R^{\alpha+1} + R^{1-\beta}) e^{Rr\eta} (\phi_2 - \phi_1) \\ &\leq A(\theta_0)(\phi_2 - \phi_1) \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{\alpha+1}}{e^{-Rr\eta}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

der $\eta = \max_{\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2} \sin(\theta + \phi)$. Siden både $\sin(\theta + \phi_1)$ og $\sin(\theta + \phi_2)$ er negative, følger det at for alle verdier av $\phi \in (\phi_1, \phi_2)$ så er $\sin(\theta + \phi) < 0$. Dermed er $\eta < 0$.

Tilsvarende for γ_ϵ :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\gamma_\epsilon} e^{-izy} f(y) dy \right| &< A(\theta_0)(\phi_2 - \phi_1) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1-\beta} e^{r\epsilon\eta} \quad \eta \text{ definert som ovenfor} \\ &= 0 \end{aligned}$$

siden $\epsilon^{1-\beta} \rightarrow 0$ når $\epsilon \rightarrow 0$ og $\beta < 1$.

Dette betyr at forskjellige L gir samme funksjon G , men med ulike definisjonsområder. Det samme er tilfelle for H . Ved å lime sammen disse definisjonsområdene får vi at G er definert på til sammen hele $\mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$, mens H blir definert på $\mathbb{C} \setminus \{-\infty, 0\}$. Dermed er $H - G$ definert på $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

3.1.5 Problemet når $\beta \geq 1$

Hvis $\beta \geq 1$ vil ikke G og H være veldefinerte slik det er gjort ovenfor. For å bøte på dette definerer vi de m -te deriverte av G og H som følger

$$G^{(m)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{-izy} (-iy)^m f_1(y) dy \quad (3.7)$$

og

$$H^{(m)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L'} e^{-izy} (-iy)^m f_2(y) dy, \quad (3.8)$$

der $m > \beta - 1$.

$G^{(m)}$ og $H^{(m)}$ er veldefinerte, da $(-iy)^m$ opphever singulariteten som β skapte. Når $\beta \geq 1$ bruker vi $G^{(m)}$ og $H^{(m)}$ istedenfor G og H .

3.1.6 Definisjon av Carlemanstransformen

Carlemans fouriertransform $\text{CF}(f_1, f_2)$ av Carlemanparet (f_1, f_2) er parett (g_1, g_2) definert ved

$$g_1(z) = H(z) - G(z) \text{ for } \text{Im}z > 0 \quad (3.9)$$

og

$$g_2(z) = H(z) - G(z) \text{ for } \text{Im}z < 0. \quad (3.10)$$

Dersom $\beta \geq 1$ regner vi først ut $g_1^{(m)}$ og $g_2^{(m)}$ via $G^{(m)}$ og $H^{(m)}$. Ved å integrere m ganger får vi g_1 og g_2 , som er unike opp til et polynom av grad $m - 1$.

I neste seksjon viser vi at Carlemanstransformen også er et Carlemanpar.

3.1.7 Påstand: (g_1, g_2) er et Carlemanpar

Vi må vise at g_1 og g_2 er holomorfe funksjoner som tilfredsstillter lignende ulikheter som de for f_1 og f_2 . Først finner vi estimer for $|G(re^{i\theta})|$ og $|H(re^{i\theta})|$.

Gitt vilkårlig θ , setter vi θ_0 slik at $\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0$. Vinkelen ϕ til linjen L velger vi til å være $\phi = \pi - \frac{\theta_0}{2}$. Da er $\theta + \phi > \pi$, som medfører at $\sin(\theta + \phi) < 0$.

Dersom $\beta < 1$ regner vi ut $|G(re^{i\theta})|$ slik:

$$\begin{aligned} |G(re^{i\theta})| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_0^\infty e^{r\rho \sin(\theta+\phi)} e^{-ir\rho \cos(\theta+\phi)} f_1(\rho e^{i\phi}) e^{i\phi} d\rho \right| \\ &< \frac{A(\theta_0)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-r\rho\mu} (\rho^\alpha + \rho^{-\beta}) d\rho \\ &= \frac{A(\theta_0)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(r\mu)^{\alpha+1}} + \frac{\Gamma(1-\beta)}{(r\mu)^{1-\beta}} \right) \\ &\leq B(\theta_0) r^{-\beta'} \end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned} \mu &= \inf_{\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0} |\sin(\theta + \phi)| = \sin \frac{\theta_0}{2}, \\ \beta' &= \max\{\alpha, -\beta\} + 1 \end{aligned}$$

og

$$B(\theta_0) = \frac{A(\theta_0)}{\sqrt{2\pi}} 2 \frac{\Gamma(\beta')}{(\mu)^{\beta'}}.$$

Vi får samme ulikhet for $|H(re^{i\theta})|$. Dersom $\beta \geq 1$ må vi bruke (3.7) og (3.8). Det vil gi $\beta' = \alpha + m + 1$, der $m < \beta - 1$ som i 3.1.5.

Nå kan vi finne estimater for g_1 og g_2 :

$$|g_1(re^{i\theta})| \leq |H(re^{i\theta})| + |G(re^{i\theta})| < 2B(\theta_0)r^{\beta'} \quad (3.11)$$

for $r > 0, \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0$ og

$$|g_2(re^{i\theta})| \leq |H(re^{i\theta})| + |G(re^{i\theta})| < 2B(\theta_0)r^{\beta'} \quad (3.12)$$

for $r > 0, -\pi + \theta_0 < \theta < -\theta_0$.

Det betyr at (g_1, g_2) er et Carlemanpar av klasse $(0, \beta')$.

Siden vi hadde antatt $\beta < 1$ for (f_1, f_2) , fikk vi et Carlemanpar (g_1, g_2) av klasse (α', β') hvor α' alltid er null. I det generelle tilfellet vil vi få et Carlemanpar der α' kan være større enn null.

3.1.8 Eksempel: deltafunksjonen

Vi skal senere se at Diracs deltafunksjon kan uttrykkes som et par av holomorfe funksjoner, gitt ved

$$\begin{aligned} f_1(z) &= -\frac{1}{2\pi iz} \quad \text{for } \text{Im}z > 0 \\ f_2(z) &= -\frac{1}{2\pi iz} \quad \text{for } \text{Im}z < 0. \end{aligned}$$

Det er lett å se at dette er et Carlemanpar av klasse $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. Vi regner ut Carlemantransformen av (f_1, f_2) . Fordi $\beta = 1$, må vi bruke G' og H' . Når vi skal finne g_1 ligger z i øvre halvplan. La $z = re^{i\theta}$ og $y = \rho e^{i\varphi}$, der

$\varphi > \max\{\theta, \frac{\pi}{2}\}$, slik at φ er en vinkel i øvre, venstre kvadrant.

$$\begin{aligned}
 G'(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{-izy} (-iy) f_1(y) dy \\
 &= -\frac{1}{2\pi i \sqrt{2\pi}} \int_L e^{-izy} (-iy) \frac{1}{y} dy \\
 &= \frac{1}{2\pi \sqrt{2\pi}} \int_L e^{-izy} dy \\
 &= \frac{e^{i\varphi}}{2\pi \sqrt{2\pi}} \int_L e^{-i\rho r e^{i(\varphi+\theta)}} dy \\
 &= \frac{e^{i\varphi}}{2\pi \sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{a} e^{-a\rho} \right]_0^\infty \quad a = -ir e^{i(\varphi+\theta)} \\
 &= \frac{1}{2\pi i \sqrt{2\pi} z}
 \end{aligned}$$

For H' får vi akkurat det samme, bare φ er byttet ut med $-\varphi$ siden L' skal ligge i nedre halvplan:

$$H'(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{2\pi} z}.$$

Når z ligger i nedre halvplan, velger vi linjer L og L' i høyre halvplan, men vi får samme resultat for G' og H' . Så integrerer vi for å finne G og H :

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{2\pi}} (\log |z| + i \arg z) \quad \text{for } 0 < \arg z < 2\pi$$

og

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{2\pi}} (\log |z| + i \arg z) \quad \text{for } -\pi < \arg z < \pi$$

$H(z)$ gjør et sprang på $-2\pi i$ idet man beveger seg fra øvre til nedre halvplan over \mathbb{R}_- , mens $G(z)$ gjør et tilsvarende positivt sprang idet man beveger seg fra øvre til nedre halvplan over \mathbb{R}_+ . Det gir

$$g_1(z) = 0 \quad \text{og} \quad g_2(z) = -\frac{2\pi i}{2\pi i \sqrt{2\pi}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Siden (g_1, g_2) begge er konstanter er dette et Carlemanpar av klasse $(0, 0)$.

3.2 Egenskaper

3.2.1 Carlemantransformen er lineær

La (f_1, f_2) og (h_1, h_2) være Carlemanpar av klasse (α_1, β_1) og (α_2, β_2) henholdsvis og la a, b være skalarer. Da er $a(f_1, f_2) + b(h_1, h_2)$ Carleman av klasse $(\max\{\alpha_1, \alpha_2\}, \max\{\beta_1, \beta_2\})$ og

$$\text{CF}(a(f_1, f_2) + b(h_1, h_2)) = a \text{CF}(f_1, f_2) + b \text{CF}(h_1, h_2)$$

siden integralet er en lineær operator.

3.2.2 $\mathbf{CF}(f_1 + P, f_2 + P) = \mathbf{CF}(f_1, f_2)$

Vi vil vise at paret $(f_1 + P, f_2 + P)$, der P er et polynom, gir samme transform som (f_1, f_2) . Siden Carlemantransformen er lineær så holder det å vise at $\mathbf{CF}(P, P) = (0, 0)$ for $P(y) = y^n$, der $n \in \mathbb{N}$. Alle andre polynomer kan da skrives som en lineærkombinasjon av denne.

Regner ut G og H for $P(y) = y^n$:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{-izy} P(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{-izy} y^n dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{za} (ia)^n i da \quad y = ia \\ &= \frac{i^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty a^n e^{za} da \\ &= \frac{i^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} (-1)^{n+1} \frac{n!}{z^{n+1}} \quad \text{ved 3.3.1 med } b = -z \\ &= \frac{n!(-i)^{n+1}}{\sqrt{2\pi}z^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L'} e^{-izy} y^n dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\infty} e^{za} (ia)^n i da \quad y = ia \\ &= -\frac{i^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 a^n e^{za} da \\ &= -\frac{i^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}} \quad \text{ved 3.3.1 med } b = -z \\ &= \frac{n!(-i)^{n+1}}{\sqrt{2\pi}z^{n+1}} \end{aligned}$$

Siden G blir lik H vil både g_1 og g_2 bli lik null, det vil si at transformen blir $(0, 0)$.

3.2.3 $\mathbf{CF}(f_1, f_2) = \mathcal{F}(f)$ når $f \in L^1$

Her kommer vi tilbake til noe av det dette kapitlet startet med; om vi lager et Carlemanpar av en funksjon i L^1 , så vil Carlemantransformen bli den

samme som den klassiske fouriertransformen:

La $f \in L^1$. Definerer f_1 og f_2 ved Cauchy-transformen:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt && \text{for } \operatorname{Im} z > 0 \\ f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt && \text{for } \operatorname{Im} z < 0 \end{aligned}$$

(f_1, f_2) er et Carlemanpar av klasse $(0, 1)$ siden begge funksjonene er holomorfe og

$$\begin{aligned} |f_1(re^{i\theta})| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t - re^{i\theta}|} dt && \text{når } \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0 \\ &< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{r \sin \theta} dt \\ &\leq A(\theta_0) r^{-1} \end{aligned}$$

der $A(\theta_0) = \frac{1}{2\pi \sin \theta_0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \frac{\text{konst}}{2\pi \sin \theta_0}$. På samme måte blir

$$|f_2(re^{i\theta})| < A(\theta_0) r^{-1} \quad \text{når } -\pi + \theta_0 < \theta < -\theta_0.$$

Vi vil vise at Carlemantransformen av (f_1, f_2) er (g_1, g_2) gitt ved (3.1) og (3.2). Regner først ut $g_1(z)$. z må da ligge i øvre halvplan. Siden $\beta = 1$ bruker vi G' og H' istedenfor G og H i den videre utregningen.

$$\begin{aligned} G'(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{-izy} (-iy) f_1(y) dy \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi} 2\pi} \int_L e^{-izy} y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-y} dt dy \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi} 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_L \frac{e^{-izy} y}{t-y} dy dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L'} e^{-izy} (-iy) f_2(y) dy \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi} 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{L'} \frac{e^{-izy} y}{t-y} dy dt \end{aligned}$$

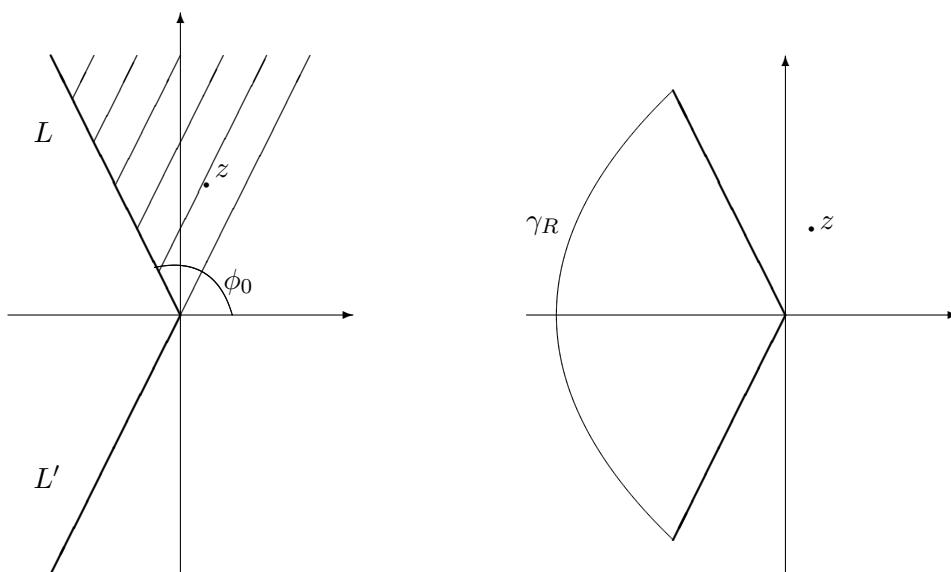
I siste linje av begge utregningene brukes Fubinis teorem til å bytte rekkefølge på integralene: Vi parametriserer z ved $z = re^{i\theta}$. Vet fra 3.1.4 at G og H ikke avhenger av linjene L og L' . Det samme gjelder for G' og H' . Vi bruker

to spesifikke linjer:

$L : y = \rho e^{i\phi_0}$ og $L' : y = \rho e^{-i\phi_0}$, der $\frac{\pi}{2} \leq \phi_0 \leq \pi$ og $\phi_0 > \theta$.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| e^{-iz\rho e^{i\phi_0}} (i\rho e^{i\phi}) \frac{f(t)}{t - \rho e^{i\phi_0}} e^{i\phi_0} \right| dt d\rho \\
 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{r\rho \sin(\theta+\phi_0)} \rho \frac{|f(t)|}{|t - \rho e^{i\phi_0}|} dt d\rho \\
 &\leq \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{r\rho \sin(\theta+\phi_0)} \rho \frac{|f(t)|}{\rho \sin \phi_0} dt d\rho \\
 &= \frac{1}{\sin \phi_0} \int_0^\infty e^{r\rho \sin(\theta+\phi_0)} d\rho \int_{-\infty}^\infty |f(t)| dt \\
 &= \frac{1}{\sin \phi_0} K_1 K_2 \\
 &< \infty
 \end{aligned}$$

der K_1, K_2 er konstanter. Dette betyr at det er uproblematisk å bytte rekkefølge på integralene.



Figur 3.4: Til venstre definisjonsområdet til g_1 med de valgte strålene L og L' , til høyre konstruksjon av sirkelbuen γ_R

Vi regner deretter ut g'_1 ,

$$g'_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \int_s \frac{e^{-izy} y}{t - y} dy dt,$$

der s er sammensetningen av $-L'$ og L .

Vi bruker Cauchys integralformel på $\int_s \frac{e^{-izy}y}{t-y} dy$, siden ye^{-izy} er holomorft som funksjon av y .

Så konstruerer vi sirkelbuen γ_R som vist i figur 3.4. Når $R \rightarrow \infty$ vil γ_R sammen med s gi en lukket kurve i venstre halvplan.

$$\int_s \frac{e^{-izy}y}{t-y} dy + \int_{\gamma_R} \frac{e^{-izy}y}{t-y} dy = \begin{cases} 2\pi i(-te^{-itz}) & \text{hvis } t \in D \\ 0 & \text{hvis } t \notin D \end{cases}$$

der D er området avgrenset av den lukkede kurven $\gamma_R + s$.

Fordi integralet over sirkelbuen γ_R går mot null når $R \rightarrow \infty$ (dette vises nedenfor) og $t \in \mathbb{R}$, får vi

$$\int_s \frac{e^{-izy}y}{t-y} dy = \begin{cases} -2\pi i t e^{-itz} & \text{hvis } t < 0 \\ 0 & \text{hvis } t > 0. \end{cases}$$

Setter inn i g'_1 :

$$\begin{aligned} g'_1(z) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)2\pi i t e^{-izt} dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(t) i t e^{-izt} dt \end{aligned}$$

$g'_2(z)$ regnes ut på lignende vis: z ligger da i nedre halvplan og L og L' er linjer i høyre halvplan. Følger ellers samme prosedyre som for $g'_1(z)$. Det gir

$$g'_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) i t e^{-izt} dt$$

Vi integrerer for å finne g_1 og g_2 :

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \int g'_1(z) dz \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int_{-\infty}^0 f(t) i t e^{-izt} dt dz \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(t) i t \int e^{-izt} dz dt && \text{ved Fubinis teorem} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(t) i t \frac{e^{-izt}}{-it} dz dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-izt} dt \\ g_2(z) &= \int g'_2(z) dz \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) e^{-izt} dt \end{aligned}$$

Ser at g_1 og g_2 er akkurat som i 3.1 og 3.2, som var det vi ønsket å vise.

Nå gjenstår bare argumentasjonen for at

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\xi e^\xi}{\xi - (-itz)} d\xi = 0.$$

Vi parametriserer γ_R ved $\xi = Re^{i\theta} = R(\cos \theta + i \sin \theta)$, $\frac{\pi}{2} < \alpha_0 \leq \theta \leq 2\pi - \alpha_0 < \frac{3\pi}{2}$. Ser at for alle θ er $\cos \theta < 0$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} \frac{\xi e^\xi}{\xi - (-itz)} d\xi \right| &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{Re^{i\theta} e^{R(\cos \theta + i \sin \theta)}}{R(\cos \theta + i \sin \theta) - (-itz)} Rie^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_{\alpha_0}^{2\pi - \alpha_0} \frac{Re^{R \cos \theta}}{R} R d\theta \\ &= \int_{\alpha_0}^{2\pi - \alpha_0} Re^{R \cos \theta} d\theta \\ &\leq Re^{R \cos \alpha_0} (2\pi - 2\alpha_0) \quad \text{ML-estimat} \end{aligned}$$

Når så $R \rightarrow \infty$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} Re^{R \cos \alpha_0} (2\pi - 2\alpha_0) = 0.$$

3.2.4 Invers fouriertransformasjon

Carlemanstransform har også en invers CF^{-1} som sender paret (g_1, g_2) tilbake til (f_1, f_2) . Fra seksjon 3.1.7 vet vi at (g_1, g_2) er et Carlemanpar av klasse (α', β') . Dermed er det mulig å ta Carlemanstransformen av (g_1, g_2) . For å få (f_1, f_2) tilbake må vi imidlertid gjøre om litt på (g_1, g_2) først.

Paret (g_1, g_2) er gitt som tidligere ved,

$$(g_1, g_2) = (H(z) - G(z), H(z) - G(z)),$$

som definert i seksjon 3.1.6.

La

$$T((g_1, g_2)) = (\overline{g_2(\bar{z})}, \overline{g_1(\bar{z})}) = (h_1, h_2).$$

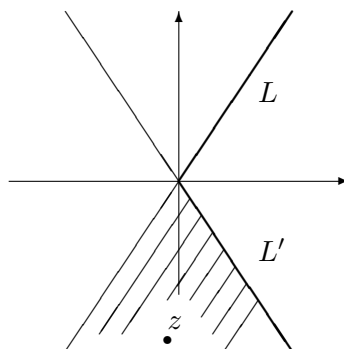
Definerer

$$(j_1, j_2) = T(CF((h_1, h_2))) = (\overline{H^*(\bar{z})} - \overline{G^*(\bar{z})}, \overline{H^*(\bar{z})} - \overline{G^*(\bar{z})}) \quad (3.13)$$

hvor H^* og G^* er definert som i seksjon 3.1.5 med h_1 og h_2 istedenfor f_1 og f_2 , det vil si:

$$\begin{aligned}
G^{*(m)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{-izy} (-iy)^m h_1(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{-izy} (-iy)^m (\overline{H(\bar{y})} - \overline{G(\bar{y})}) dy \\
&= \frac{(-i)^m}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{-izy} y^m (\overline{H(\bar{y})} - \overline{G(\bar{y})}) dy \\
H^{*(m)}(z) &= \frac{(-i)^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{L'} e^{-izy} y^m (\overline{H(\bar{y})} - \overline{G(\bar{y})}) dy
\end{aligned}$$

Vi skal vise at $(j_1, j_2) = (f_1, f_2)$, altså at (j_1, j_2) er den inverse transformen til (g_1, g_2) . Bruker de m -te deriverte av G^* og H^* fordi β' kan være større enn 1. m er derfor et heltall større enn $\beta' - 1$. Linjene L og L' velger vi til å ligge i høyre halvplan slik at L' er L speilet om den reelle aksen.



Figur 3.5: Linjene L og L' og definisjonsområdet til G^* og H^*

Ved å sette inn \bar{z} for z i uttrykkene over og ta konjugerte på begge sider, får vi:

$$\begin{aligned}
\overline{G^{*(m)}(z)} &= \frac{i^m}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{iz\bar{y}} \bar{y}^m (H(\bar{y}) - G(\bar{y})) d\bar{y} \\
&= \frac{i^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{L'} e^{izy} y^m (H(y) - G(y)) dy
\end{aligned}$$

og

$$\overline{H^{*(m)}(z)} = \frac{i^m}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{izy} y^m (H(y) - G(y)) dy.$$

Nå kan vi regne ut $j_1^{(m)}$:

$$\begin{aligned} j_1^{(m)}(z) &= \frac{d^m}{dz^m} (\overline{H^*(\bar{y})} - \overline{G^*(\bar{y})}) \\ &= \frac{i^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{L+(-L')} e^{izy} y^m (H(y) - G(y)) dy \end{aligned}$$

Fordi H er holomorf i høyre halvplan kan det vises at

$$\int_{L+(-L')} e^{izy} y^m H(y) dy = 0.$$

Dette er begrunnet i seksjon 3.3.4.

Dermed kan $j_1^{(m)}$ reduseres til

$$j_1^{(m)}(z) = -\frac{i^m}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{izy} y^m G(y) dy + \frac{i^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{L'} e^{izy} y^m G(y) dy = J_1 + J_2.$$

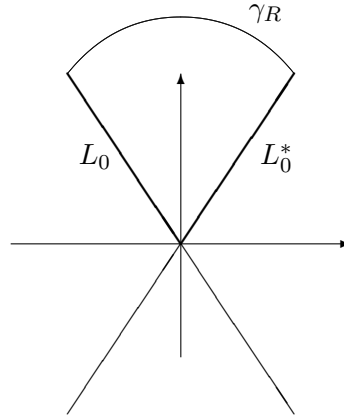
Nå støter vi imidlertid på problemet med at vi ikke vet hvilken Carleman-klasse (α, β) som (f_1, f_2) er i og dermed ikke hvordan G ble definert. Vi starter med det enkleste og antar at $\beta < 1$ før vi ser på det generelle tilfellet.

Utregning av (j_1, j_2) når $\beta < 1$

For at J_1 skal være definert, må $G(y)$ ligge i øvre halvplan. Det betyr at linjen som ble brukt til å definere G bør ligge i venstre kvadrant i øvre halvplan. Vi kaller denne linja L_0 . For J_2 må $G(y)$ ligge i nedre halvplan. Følgelig bør linjen som definerer G , og som vi kaller L_0^* , ligge i høyre kvadrant av øvre halvplan. L_0^* er L_0 speilet om den imaginære akse, som vist i figuren.

Vi skriver først ut $G(y)$, deretter bytter vi rekkefølge på integralene ved hjelp av Fubinis teorem.

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{i^m}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{izy} y^m G(y) dy \\ &= -\frac{i^m}{2\pi} \int_L e^{izy} y^m \int_{L_0} e^{-iyt} f_1(t) dt dy \\ &= -\frac{i^m}{2\pi} \int_{L_0} f_1(t) \int_L e^{-iy(t-z)} y^m dy dt \\ &= -\frac{i^m}{2\pi} \int_{L_0} f_1(t) \frac{m!}{(i(t-z))^{m+1}} dt = -\frac{m!}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{f_1(t)}{(t-z)^{m+1}} dt \end{aligned}$$

Figur 3.6: Linjene L_0 og L_0^*

Den siste linja holder for $\operatorname{Re}(-iy(t-z)) > 0$, som betyr $\operatorname{Im}(y(t-z)) > 0$ ved seksjon 3.3.2.

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \frac{i^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{L'} e^{izy} y^m G(y) dy \\
 &= \frac{i^m}{2\pi} \int_{L'} e^{izy} y^m \int_{L_0^*} e^{-iyt} f_1(t) dt dy \\
 &= \frac{i^m}{2\pi} \int_{L_0^*} f_1(t) \int_{L'} e^{-iy(t-z)} y^m dy dt \\
 &= \frac{i^m}{2\pi} \int_{L_0^*} f_1(t) \frac{m!}{(i(t-z))^{m+1}} dt = \frac{m!}{2\pi i} \int_{L_0^*} \frac{f_1(t)}{(t-z)^{m+1}} dt
 \end{aligned}$$

Den siste linja holder for $\operatorname{Im}(y(t-z)) > 0$ ved seksjon 3.3.2.

Ved Cauchys integralformel får vi

$$J_1 + J_2 = \frac{m!}{2\pi i} \int_{-L_0 + L_0^*} \frac{f_1(t)}{(t-z)^{m+1}} dt = f^{(m)}(a)$$

siden integralet over sirkelbuen $\gamma_R \rightarrow 0$ når radien $R \rightarrow \infty$ ved en tilsvarende utregning som den i slutten av seksjon 3.2.3. γ_R er her sirkelbuen som knytter L_0 sammen med L_0^* , som vist i figuren.

Ved å integrere m ganger finner vi $j_1(z)$:

$$j_1(z) = f_1(z) + p(z),$$

der $p(z)$ er et polynom av grad $m-1$. Tilsvarende får vi at

$$j_2(z) = f_2(z) + p(z).$$

Ved seksjon 3.2.2 får vi at $(j_1, j_2) = (f_1, f_2)$, som var det vi ville vise.

Utrekning av (j_1, j_2) når $\beta \geq 1$

Når $\beta \geq 1$ er G gitt ved den n -te integrerte av

$$G^{(n)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{-izy} (-iy)^n f_1(y) dy,$$

for $n > \beta - 1$. Derfor bruker vi likheten

$$G(y) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^y (y-\xi)^{n-1} G^{(n)}(\xi) d\xi$$

i den videre utregningen.

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{i^m}{\sqrt{2\pi}(n-1)!} \int_L e^{izy} y^m \int_0^y (y-\xi)^{n-1} G^{(n)}(\xi) d\xi dy \\ &= \frac{(-1)^{n+1} i^{m+n}}{2\pi(n-1)!} \int_L e^{izy} y^m \int_0^y (y-\xi)^{n-1} \int_{L_0} e^{-i\xi t} t^n f_1(t) dt d\xi dy \\ &= \frac{(-1)^{n+1} i^{m+n}}{2\pi(n-1)!} \int_{L_0} t^n f_1(t) \int_L e^{-i\xi t} \left[\int_\xi^\infty e^{izy} y^m (y-\xi)^{n-1} dy \right] d\xi dt \end{aligned}$$

ved Fubinis teorem. Vi ser først på det innerste integralet. Bruker variabelbyttet $w = y - \xi$. Videre bruker vi binomialformelen $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ og teoremet for dominert konvergens:

$$\begin{aligned} \left[\int_\xi^\infty e^{izy} y^m (y-\xi)^{n-1} dy \right] &= e^{iz\xi} \int_0^\infty e^{izw} (w+\xi)^m w^{n-1} dw \\ &= e^{iz\xi} \int_0^\infty e^{izw} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \xi^{m-j} w^j w^{n-1} dw \\ &= e^{iz\xi} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \xi^{m-j} \int_0^\infty e^{izw} w^{j+n-1} dw \\ &= e^{iz\xi} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \xi^{m-j} \frac{(j+n-1)!}{(-iz)^{j+n}} \end{aligned}$$

Den siste likheten holder når $\text{Im}(zw) > 0$. Dette er begrunnet i seksjon 3.3.2.

Setter så inn i det midterste integralet, også her bruker vi dominert konver-

gens og resultatet fra 3.3.2, som holder når $\text{Im}((z-t)\xi) > 0$:

$$\begin{aligned}
& \int_L e^{-i\xi t} \left[\int_\xi^\infty e^{izy} y^n (y-\xi)^{n-1} dy \right] d\xi \\
&= \frac{(-1)^n}{i^n} \int_L e^{i(z-t)\xi} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{i^j} \binom{m}{j} \xi^{m-j} \frac{(j+n-1)!}{z^{j+n}} d\xi \\
&= \frac{(-1)^n}{i^n} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{i^j} \binom{m}{j} \frac{(j+n-1)!}{z^{j+n}} \int_L e^{i(z-t)\xi} \xi^{m-j} d\xi \\
&= \frac{(-1)^n}{i^n} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{i^j} \binom{m}{j} \frac{(j+n-1)!}{z^{j+n}} \frac{(m-j)!}{(-i(z-t))^{m-j+1}} \\
&= \frac{(-1)^{n+m+1}}{i^{n+m+1}} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{(j+n-1)!}{z^{j+n}} \frac{(m-j)!}{(z-t)^{m-j+1}}
\end{aligned}$$

Til slutt kan vi regne ut J_1 , igjen ved hjelp av dominert konvergens:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{(-1)^m}{2\pi i (n-1)!} \int_{L_0} t^n f_1(t) \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{(j+n-1)!}{z^{j+n}} \frac{(m-j)!}{(z-t)^{m-j+1}} dt \\
&= \frac{(-1)^m}{2\pi i (n-1)!} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{(j+n-1)!}{z^{j+n}} \int_{L_0} \frac{(m-j)!}{(z-t)^{m-j+1}} t^n f_1(t) dt \\
&= \frac{(-1)^m}{2\pi i} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \frac{d^j}{dz^j} \left(\frac{1}{z^n} \right) \int_{L_0} \frac{(m-j)!}{(z-t)^{m-j+1}} t^n f_1(t) dt
\end{aligned}$$

Den siste likheten kommer av at

$$\frac{d^j}{dz^j} \left(\frac{1}{z^n} \right) = (-1)^j \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!} \frac{1}{z^{n+j}}.$$

Deretter regner vi ut J_2 på tilsvarende måte,

$$J_2 = \frac{(-1)^{m+1}}{2\pi i} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \frac{d^j}{dz^j} \left(\frac{1}{z^n} \right) \int_{L_0^*} \frac{(m-j)!}{(z-t)^{m-j+1}} t^n f_1(t) dt,$$

der L_0^* er strålen L_0 speilet om den imaginære akse.

Når vi skal regne ut $J_1 + J_2$ merker vi oss at

$$(-1)^{m-j} \frac{(m-j)!}{2\pi i} \int_{L_0-L_0^*} \frac{t^n f_1(t)}{(z-t)^{m-j+1}} dt = [z^n f_1]^{(m-j)}(z)$$

ved Cauchys integralformel.

$$\begin{aligned} j_1^{(m)}(z) = J_1 + J_2 &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{d^j}{dz^j} \left(\frac{1}{z^n} \right) \frac{d^{m-j}}{dz^{m-j}} (z^n f_1(z)) \\ &= \left(\frac{1}{z^n} z^n f_1(z) \right)^{(m)} = f_1^{(m)}(z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow j_1(z) = f_1(z) + p(z) \quad \text{og} \quad j_2(z) = f_2(z) + p(z),$$

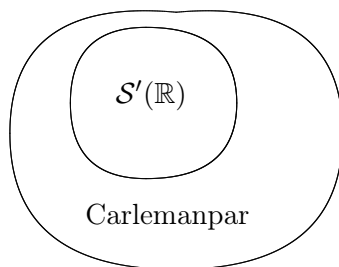
som i forrige delseksjon. Dette gir at $(j_1, j_2) = (f_1, f_2)$.

3.2.5 Distribusjoner og Carlemanpar

Det kan vises at de tempererte distribusjonene, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ er Carleman: Hvis $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ er en distribusjon, kan T representeres ved et Carlemanpar, (f_1, f_2) . Da er Carlemantransformen og Schwartz fouriertransform like,

$$\text{CF}(f_1, f_2) = \text{SF}(T).$$

([Kis02], teorem 9.1)



Figur 3.7: Diagram som viser rommet av tempererte distribusjoner inneholdt i Carlemanparene

3.3 Utregninger

Denne seksjonen inneholder et par lange utregninger fra tidligere seksjoner i kapitlet, i tillegg til noen mye brukte resultater.

$$\mathbf{3.3.1} \quad \int_0^\infty t^a e^{-bt} dt = \frac{a!}{b^{a+1}} \text{ for } b > 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^a e^{-bt} dt &= \int_0^\infty \left(\frac{s}{b}\right)^a e^{-s} \frac{dt}{b} \quad bt = s \\ &= \frac{1}{b^{a+1}} \int_0^\infty s^a e^{-s} ds \\ &= \frac{\Gamma(a+1)}{b^{a+1}} \\ &= \frac{a!}{b^{a+1}} \quad \text{hvis og bare hvis } a \text{ er et heltall} \end{aligned}$$

$$\mathbf{3.3.2} \quad \int_L z^a e^{-bz} dz = \frac{a!}{b^{a+1}} \text{ for } \operatorname{Re}(bz) > 0$$

Her viser vi at 3.3.1 også gjelder for komplekse integral, der L er en stråle som starter i origo. Vi bruker delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} \int_L z^a e^{-bz} dz &= [z^a \left(\frac{-1}{b}\right) e^{-bz}]_L - \int_L az^{a-1} \left(\frac{-1}{b}\right) e^{-bz} dz \\ &= 0 + \frac{a}{b} \int_L z^{a-1} e^{-bz} dz \\ &= \dots \\ &= \frac{a!}{b^a} \int_L z^0 e^{-bz} dz \\ &= \frac{a!}{b^{a+1}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{3.3.3} \quad \lim_{v \rightarrow 0^+} g_1(u+iv) - g_2(u-iv) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-iuy} f(y) dy$$

Vi bruker dominert konvergensteoremet til å vise likheten.

Har

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0^+} g_1(u+iv) - g_2(u-iv) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{v \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-i(u+iv)y} f(y) dy + \int_0^\infty e^{-i(u-iv)y} f(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-i(u+\frac{i}{n})y} f(y) dy + \int_0^\infty e^{-i(u-\frac{i}{n})y} f(y) dy \right) \end{aligned}$$

der $n = \frac{1}{v}$ og vi vil ta grenseverdien inni integralene.

Siden

$$\begin{aligned}
 a) \quad & e^{-i(u+\frac{i}{n})y} f(y) \rightarrow e^{-iuy} f(y) \\
 & e^{-i(u-\frac{i}{n})y} f(y) \rightarrow e^{-iuy} f(y) \\
 b) \quad & \left| e^{-i(u+\frac{i}{n})y} f(y) \right| = \left| e^{\frac{y}{n}} f(y) \right| \leq |f(y)| \quad \forall y < 0 \\
 & \left| e^{-i(u-\frac{i}{n})y} f(y) \right| = \left| e^{-\frac{y}{n}} f(y) \right| \leq |f(y)| \quad \forall y > 0
 \end{aligned}$$

så kan vi skrive

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-i(u+\frac{i}{n})y} f(y) dy + \int_0^{\infty} e^{-i(u-\frac{i}{n})y} f(y) dy \right) = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-i(u+\frac{i}{n})y} f(y) dy + \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-i(u-\frac{i}{n})y} f(y) dy \right) \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-iuy} f(y) dy + \int_0^{\infty} e^{-iuy} f(y) dy \right) \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} f(y) dy
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{3.3.4} \quad \int_{L+(-L')} e^{izy} y^m H(y) dy = 0$$

Fordi H er holomorf i høyre halvplan kan det vises at

$$\int_{L+(-L')} e^{izy} y^m H(y) dy = 0,$$

der L og L' er stråler som starter i origo og ligger i henholdsvis øvre og nedre kvadrant i høyre halvplan slik at $\bar{L} = L'$ (se figur 3.5).

Til dette bruker vi Cauchys teorem. Vi konstruerer en sirkelbue som knytter sammen L og $-L'$, $\Lambda : y = Re^{i\phi}$, $R \rightarrow \infty$. Vi viser at integralet over Λ blir lik null:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Lambda} e^{izy} y^m H(y) dy \right| = 0$$

Først regner vi ut integralet ved å bruke parametriseringen $z = \rho(\cos \theta +$

$i \sin \theta$) og estimat for $|H(Re^{i\phi})|$ fra seksjon 3.1.7:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Lambda} e^{izy} y^m H(y) dy \right| &= \\
 &= \left| \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} e^{i\rho R(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \phi + i \sin \phi)} R^m e^{im\phi} H(Re^{i\phi}) i Re^{i\phi} d\phi \right| \\
 &\leq R^{m+1} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} e^{-R\rho \sin(\theta+\phi)} |H(Re^{i\phi})| d\phi \\
 &< R^{m+1-\gamma} B(\theta_0) \Gamma(\gamma) \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} e^{-R\rho a(\theta)} d\phi \\
 &= R^{m-\gamma} e^{-R\rho a(\theta)} K,
 \end{aligned}$$

der K er en konstant og $a(\theta) = \min_{-\alpha_0 < \phi < \alpha_0} \sin(\theta + \phi) > 0$. Ved å la $R \rightarrow \infty$ får vi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{m-\gamma} e^{-R\rho a(\theta)} K = 0.$$

Kapittel 4

Hyperfunksjoner

Som student lot Sato seg imponere av Schwarts nye teori; distribusjonsteorien. Han var imidlertid ikke helt fornøyd med rommet av testfunksjoner, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, siden elementer i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ har begrenset support og dermed ikke kan være analytiske. Noen år senere var han framme ved sin egen versjon; teorien om hyperfunksjoner. En av fordelene med hyperfunksjonene i forhold til distribusjonene er nettopp at resultater fra kompleks analyse kan brukes.

Hyperfunksjoner kan betraktes fra to forskjellige synsvinkler: som randverdier av holomorfe funksjoner eller som analytiske funksjonaler. Satos forgjengere hadde brukt analytiske funksjonaler, mens Sato selv - som antageligvis ikke kjente til de tidligere arbeidene - definerte sine hyperfunksjoner som randverdier av holomorfe funksjoner. Det er den versjonen vi skal bruke her.

Vi skal holde oss til hyperfunksjoner i en variabel og vi skal se at mange av disse også er Carlemanpar.

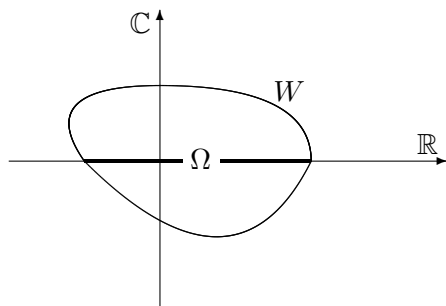
4.1 Definisjoner

4.1.1 Kompleks omegn

La Ω være et åpent intervall i \mathbb{R} . La $W \subseteq \mathbb{C}$ være en åpen mengde slik at $W \cap \mathbb{R} = \Omega$. Da kaller vi W en *kompleks omegn* av Ω , se figur 4.1.

4.1.2 Hyperfunksjoner

La $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. La W_1 og W_2 være komplekse omegner av Ω og la f_1 og f_2 være holomorfe funksjoner på henholdsvis $W_1 \setminus \Omega$ og $W_2 \setminus \Omega$. Parene (W_1, f_1) og (W_2, f_2) kalles ekvivalente hvis det finnes en holomorf funksjon g på $W_1 \cap W_2$

Figur 4.1: Kompleks omegn av Ω

slik at $f_1 - f_2 = g$ på $W_1 \cap W_2$. Mengden av alle ekvivalente par (W_i, f_i) kalles en *hyperfunksjon*.

Det kan imidlertid være enklere å tenke på hyperfunksjonen som “spranget” over Ω , det vil si det hoppet en representant f gjør idet den krysser Ω . Alle representantene vil gjøre det samme hoppet ettersom differansen mellom hver av dem er en holomorfe funksjon.

4.1.3 Eksempel: Nullfunksjonen

$(W, 0)$ er en representant for hyperfunksjonen som består av alle funksjoner som er holomorfe i en kompleks omegn om Ω , altså som er holomorfe også på Ω . Dette er “nullfunksjonen” blant hyperfunksjoner, for spranget over Ω vil være lik null.

Dette var derfor et trivielt eksempel. Det er først og fremst funksjonene som ikke er holomorfe på Ω som er interessante når det er snakk om hyperfunksjoner.

4.1.4 Eksempel: Evivalente representanter

La

$$f(z) = \begin{cases} 2 & \text{for } \text{Im}(z) > 0 \\ 0 & \text{for } \text{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

og

$$g(z) = \begin{cases} 1 & \text{for } \text{Im}(z) > 0 \\ -1 & \text{for } \text{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

Da representerer (\mathbb{R}, f) og (\mathbb{R}, g) samme hyperfunksjon.

Den komplekse omegnen har ingen betydning for hvilken hyperfunksjon man ender opp med, som vist i proposisjon 1.2.2 i [BG95]. To ulike komplekse omegner av Ω gir altså akkurat samme hyperfunksjon. Det er Ω som er av betydning. Mengden av alle hyperfunksjoner på Ω betegnes derfor med $\mathcal{B}(\Omega)$.

4.2 Egenskaper

Når vi skal utføre operasjoner på en hyperfunksjon $F \in \mathcal{B}(\Omega)$ skjer det som regel ved å utføre operasjonen på en tilfeldig representant $f \in \mathcal{O}(W \setminus \Omega)$. Resultatet blir uavhengig av valget av representant.

4.2.1 Addisjon

La $F_1, F_2 \in \mathcal{B}(\Omega)$ med representantene $f_1 \in \mathcal{O}(W_1 \setminus \Omega)$ og $f_2 \in \mathcal{O}(W_2 \setminus \Omega)$.

Definerer addisjon ved

$$F_1 + F_2 = (W_1, f_1) + (W_2, f_2) = (W_1 \cap W_2, f_1 + f_2) = F_3$$

der F_3 er en ny hyperfunksjon.

Definisjonen er uavhengig av valg av representanter: La $g_1 \in \mathcal{O}(V_1 \setminus \Omega)$ og $g_2 \in \mathcal{O}(V_2 \setminus \Omega)$ være to andre representanter for F_1 og F_2 .

$$\Rightarrow F_1 + F_2 = (V_1, g_1) + (V_2, g_2) = (V_1 \cap V_2, g_1 + g_2) = F_4$$

Fra definisjonen av hyperfunksjon vet vi at $f_1 - g_1 = h$ og $f_2 - g_2 = s$ der h og s er holomorfe funksjoner. Dette gir at $(f_1 + f_2) - (g_1 + g_2) = h + s$ som er holomorf på $(W_1 \cap W_2) \cap (V_1 \cap V_2)$, noe som betyr at F_3 og F_4 er en og samme hyperfunksjon.

4.2.2 Multiplikasjon

Vi kan ikke multiplisere hyperfunksjoner med hverandre, men vi kan multiplisere en hyperfunksjon med en analytisk funksjon:

La $F \in \mathcal{B}(\Omega)$ være representert ved (W, f) . La ϕ være en reell analytisk funksjon, $\phi \in \mathcal{A}(\Omega)$. Da finnes det en $\Phi \in \mathcal{O}(U)$ slik at $\Phi|_{\Omega} = \phi$, der U er en kompleks omegn av Ω .

Produktet ϕF defineres ved

$$\phi F = (U \cap W, \Phi f)$$

og er en ny hyperfunksjon som er uavhengig av valg av representanter.

4.2.3 Linearitet

Ved 2.1 og 2.2 går det fram at $\mathcal{B}(\Omega)$ er en lineær modul med hensyn på analytiske funksjoner.

4.2.4 Derivasjon

Den deriverte av en hyperfunksjon $F \in \mathcal{B}(\Omega)$ defineres til å være den deriverte av representanten $f \in \mathcal{O}(W \setminus \Omega)$, det vil si

$$\frac{d}{dz}F = f'(z)$$

Den deriverte er en ny hyperfunksjon som er uavhengig av valg av representanter.

4.2.5 Restriksjon

La $\Omega' \subset \Omega \subset \mathbb{R}$ og la $F \in \mathcal{B}(\Omega)$ være en hyperfunksjon på Ω med representant (W, f) . For å definere restriksjonen av F til Ω' , bruker vi $W' = (W \setminus \Omega) \cup \Omega'$ som kompleks omegn. Restriksjonen blir definert ved paret (W', f) og betegnes med $F|_{\Omega'}$.

4.2.6 Support

En hyperfunksjon $F \in \mathcal{B}(\Omega)$ sies å ha support $K \subset \Omega$ dersom K er den minste lukkede mengde slik at $F|_{\Omega \setminus K} = 0$.

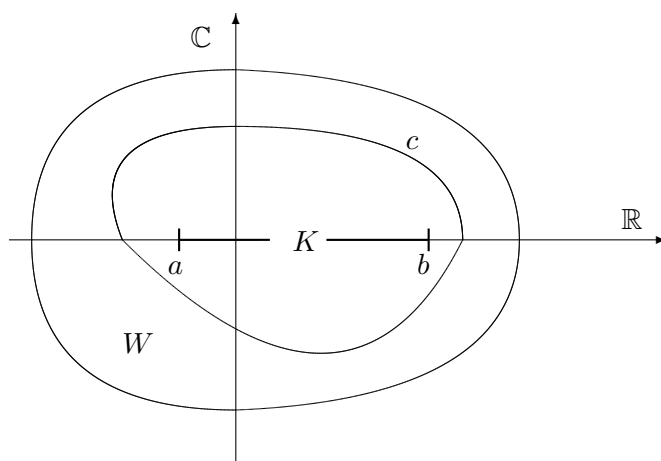
4.2.7 Integrasjon

La $F \in \mathcal{B}(\Omega)$ og (W, f) en representant for F . Anta at F har support inneholdt i intervallet $[a, b] = K \subset \Omega$. Da har f en holomorf utvidelse til $W \setminus K$. Vi betegner denne med \tilde{f} . La c være en lukket sammenhengende kurve som omslutter K og er inneholdt i W , som vist i figur 4.2.

Nå kan vi definere integralet av F :

$$\int_a^b F dx = - \int_c \tilde{f} dz.$$

Det følger av Cauchys teorem at integralet av F er uavhengig både av valgene av representanter og av kurven c . Dette er imidlertid ikke en hyperfunksjon, men et tall.

Figur 4.2: Integrasjon over $[a, b]$

4.3 Eksempler

4.3.1 Carlemanpar

Carlemanparene består av holomorfe funksjoner i øvre og nedre halvplan og representerer derfor en hyperfunksjon. Definisjon av Carlemanpar står i seksjon 3.1.1. Vi vil i de neste eksemplene sjekke om hyperfunksjonen også er et Carlemanpar.

4.3.2 Enhetsfunksjoner

Definerer

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\},$$

$$\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 0\},$$

$$\mathbb{C}^\# = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad \text{og}$$

$$\tilde{\Omega} = \mathbb{C}^\# \cup \Omega.$$

La χ_A være den karakteristiske funksjonen til mengden A . Da er $(\tilde{\Omega}, \chi_{\mathbb{C}^+})$ og $(\tilde{\Omega}, \chi_{\mathbb{C}^-})$ hyperfunksjoner på Ω som betegnes med henholdsvis 1_Ω^+ og 1_Ω^- .

Fordi

$$(\tilde{\Omega}, \chi_{\mathbb{C}^+}) + (\tilde{\Omega}, \chi_{\mathbb{C}^-}) = (\tilde{\Omega}, \chi_{\mathbb{C}^\#}) = (\tilde{\Omega}, 0)$$

så er

$$1_\Omega^+ = -1_\Omega^-.$$

Begge enhetsfunksjonene oppfyller dessuten kravene til Carlemanpar:

$$\chi_{\mathbb{C}^+} < A(\theta_0)(z^\alpha + z^{-\beta})$$

der $\alpha = \beta = 0$ og $A(\theta_0)$ er en positiv konstant.

4.3.3 Analytiske funksjoner

Hvis φ er en analytisk funksjon på Ω , så finnes en kompleks omegn U av Ω og en holomorf funksjon Φ slik at $\Phi|_\Omega = \varphi$.

Definerer

$$\phi = \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(z) & \text{for } \text{Im}(z) > 0 \\ -\frac{1}{2}\Phi(z) & \text{for } \text{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

Ekvivalensklassen til (U, ϕ) er da en hyperfunksjon.

Dersom φ er et polynom av grad n vil ϕ være et Carlemanpar av klasse $(\alpha, \beta) = (n, 0)$.

4.3.4 Integrerbare funksjoner

La $f \in L^1(\mathbb{R})$. Definerer $F_f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ ved

$$F_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{t-z} dt.$$

Da er ekvivalensklassen til (\mathbb{C}, F_f) en hyperfunksjon.

Fordi

$$|F_f(z)| \leq \max_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{|t-z|} \|f\|_1 = \frac{1}{\text{Im}(z)} \|f\|_1$$

får vi at for $z = re^{i\theta}$ og $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ så er

$$|F_f(re^{i\theta})| < \frac{1}{r \sin \theta_0} \|f\|_1 = A(\theta_0)r^{-1},$$

der $A(\theta_0) = \frac{1}{\sin \theta_0} \|f\|_1$. Dermed er F_f et Carlemanpar av klasse $(\alpha, \beta) = (0, 1)$.

4.3.5 Distribusjoner med kompakt support

La $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ der $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ betegner rommet av distribusjoner på \mathbb{R} med kompakt support. Definerer $F_S \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ ved

$$F_S(z) = S(\varphi_z) \quad \text{for } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

der φ_z er en C^∞ -funksjon gitt ved

$$\varphi_z(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t-z} \quad \text{for } t \in \mathbb{R}$$

Ekvivalensklassen til (\mathbb{C}, F_S) er en hyperfunksjon.

Vi kan identifisere distribusjonen S med hyperfunksjonen gitt ved F_S dersom avbildningen $S \mapsto F_S$ er en-til-en: La $h \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$. Siden integralet av en distribusjon over en lukket kurve c er gitt ved $\int_c \langle S, \psi \rangle = \langle S, \int_c \psi \rangle$, som vist nedenfor, får vi

$$\begin{aligned} \int_a^b h(z) F_S(z) dz &= - \int_c h(z) F_S(z) dz = - \int_c h(z) \langle S, \varphi_z \rangle dz \\ &= \langle S, - \int_c h(z) \varphi_z dz \rangle = S(h) \end{aligned} \quad (4.1)$$

der den siste likheten kommer fra

$$\int_c h(z) \varphi_z(t) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{h(z)}{t-z} dz = -h(t)$$

ved Cauchys teorem.

Nå kan vi vise at $S \mapsto F_S$ er en-til-en: la $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Via ligning (4.1) får vi

$$F_T = F_S \Rightarrow T = S,$$

for alle $h \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$. Siden S og T er distribusjoner med kompakt support er det nok å vise dette når h er holomorf.

$\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ er Carleman

Enhver hyperfunksjon som svarer til en distribusjon med kompakt support gir et Carlemanpar, fordi den kan skrives som endelig kombinasjon av deriverte av kontinuerlige funksjoner (teorem 31.4.3 i [GW98]): Hvis $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, har vi

$$T = \sum_{j=1}^p f_j^{(n_j)}$$

der f_j er kontinuerlige funksjoner med kompakt support.

Ved å bruke denne representasjonen får vi

$$\begin{aligned} F_S(z) &= \langle S, \varphi_z \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^p f_j^{(n_j)}, \varphi_z \right\rangle = \sum_{j=1}^p \langle f_j^{(n_j)}, \varphi_z \rangle = \sum_{j=1}^p \langle f_j, \varphi_z^{(n_j)} \rangle \\ &= \sum_{j=1}^p \frac{(-1)^{n_j}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f_j(t) \frac{1}{(t-z)^{n_j+1}} dt. \end{aligned}$$

Ettersom $f_j \in L^1(\mathbb{R})$, er summen ovenfor en sum av hyperfunksjoner av samme type som i 4.3.4, bortsett fra at det er de deriverte av f_j vi starter med. For $f_j^{(k)}$ vil vi finne at den tilsvarende hyperfunksjonen er Carleman av klasse $(\alpha, \beta) = (0, k + 1)$. Det betyr at F_S er Carleman av klasse $(\alpha, \beta) = (0, \max_j n_j + 1)$.

Bevis for at $\int_c \langle S, \psi \rangle = \langle S, \int_c \psi \rangle$

Vi skriver det bestemte integralet som et Riemann-integral og siden distribusjoner er kontinuerlige kan vi flytte grenseverdien utenfor.

$$\begin{aligned} \langle S, \int_c \psi dz \rangle &= \langle S, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \psi(z_i^*) (z_i - z_{i-1}) \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \langle S, \psi(z_i^*) \rangle (z_i - z_{i-1}) = \int_c \langle S, \psi(z) \rangle \end{aligned}$$

4.3.6 Deltafunksjonen

Siden $\delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ kan vi bruke forrige eksempel til å finne deltafunksjonens hyperfunksjon. La $\Omega = \mathbb{R}$ og den komplekse omegnen være hele \mathbb{C} . Hyperfunksjonen er definert ved (\mathbb{C}, F) der $F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z}$.

Som vist i eksempel 3.1.8 er dette også et Carlemanpar med $\alpha = 0$ og $\beta = 1$.

4.3.7 Distribusjoner

Distribusjoner uten kompakt support er også hyperfunksjoner, da enhver distribusjon kan skrives som en sum av distribusjoner med kompakt support (side 283 i [BG91]).

Det finnes imidlertid hyperfunksjoner som ikke er distribusjoner, se eksempel nedenfor.

4.3.8 Tillmanns vekstbetingelse

Vi ønsker å bestemme for hvilke funksjoner $f \in \mathcal{O}(W \setminus \Omega)$ den tilsvarende hyperfunksjon på Ω er en distribusjon. *H. Tillmann* viste at distribusjonene karakteriseres ved følgende vekstbetingelse på f :

For alle kompakte delmengder $K \subset \Omega$ finnes $C > 0$, $\epsilon > 0$ og $N > 0$ slik at

$$\sup_{x \in K} |f(x + iy)| < C|y|^{-N} \quad \text{for } 0 < |y| < \epsilon.$$

4.3.9 En hyperfunksjon som hverken er Carleman eller distribusjon

La $\Omega = \mathbb{R}$ og den komplekse omegnen være \mathbb{C} . Funksjonen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ gitt ved $f(z) = e^{-\frac{1}{iz}}$ er ikke en distribusjon:

La $z = x + iy$. Vi bruker Tillmanns vekstbetingelse med $K = \{0\}$

$$\sup_{x \in K} |e^{-\frac{1}{iz}}| = e^{\frac{1}{y}} > C|y|^{-N}$$

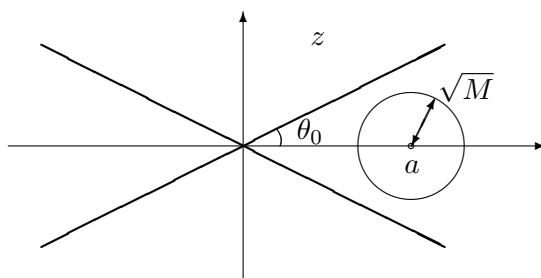
for alle C, N når $0 < |y| < \epsilon$ og ϵ er liten nok.

f er ikke Carleman siden den ikke er begrenset av et polynom i origo.

$$|f(re^{i\theta})| \leq e^{\frac{1}{r}} \rightarrow \infty, \quad \text{når } r \rightarrow 0$$

Hadde det fantes en holomorf funksjon $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ slik at $f + h$ oppfylte (3.3) og (3.4), ville hyperfunksjonen til f også vært Carleman, men vi ser at h må være av samme form som f og dermed ikke holomorf i origo.

4.3.10 En hyperfunksjon som er Carleman, men ikke en distribusjon



Figur 4.3: Hvordan finne M

La $F(z) = e^{-\frac{1}{i(z-a)}}$ for $a \in \mathbb{R}$ og $z \neq a$.

Først viser vi at F er Carleman: La $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $z = x + iy = re^{i\theta}$, der $\theta \in (\theta_0, \pi - \theta_0)$ og la M være en konstant slik at $0 < M < (x-a)^2 + y^2$. Fordi $z \neq a$ og $\text{Im}(z) = y = 0$ bare i origo, kan vi alltid finne en slik M .

Da får vi:

$$F(z) = e^{-\frac{1}{i(x-a)-y}} = e^{\frac{i(x-a)+y}{(x-a)^2+y^2}}$$

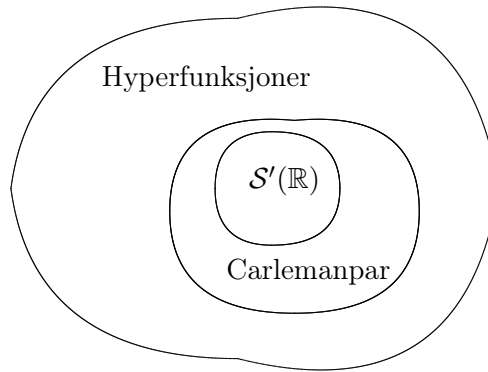
$$|F(z)| = e^{\frac{y}{(x-a)^2+y^2}} \leq e^{\frac{|y|}{(x-a)^2+y^2}} \leq e^{\frac{1}{\sqrt{M}}}$$

$$\Rightarrow |F(re^{i\theta})| < A(\theta_0) \quad \text{der } A(\theta_0) = Ke^{\frac{1}{\sqrt{M}}}, K < 0$$

Derfor er F Carleman med $\alpha = \beta = 0$. Samme resultat fås for nedre halvplan. F oppfyller imidlertid ikke Tillmanns vekstbetingelse. For $K = \{a\}$ får vi

$$\sup_{x \in K} \left| e^{-\frac{1}{i(z-a)}} \right| = \left| e^{\frac{1}{y}} \right|$$

som ved 4.3.9 ikke er en distribusjon.



Figur 4.4: Diagram som viser sammenheng mellom distribusjoner, Carlemanpar og hyperfunksjoner

De to foregående eksemplene antyder at vi har følgende inklusjoner: distribusjoner ($\mathcal{S}'(\mathbb{R})$) \subset Carlemanpar \subset hyperfunksjoner, som illustrert i figur 4.4.

Kapittel 5

Fouriertransformasjon av hyperfunksjoner

I forrige kapittel så vi at hyperfunksjonene utgjør et rom som er større enn både distribusjonene og Carlemanparene. Fra kapittel 2 og 3 vet vi at både de tempererte distribusjonene og Carlemanparene har en fouriertransform og en invers fouriertransform. Nå gjenstår det å se på hvilke hyperfunksjoner fouriertransformen og dens invers er definert, og om dette rommet utgjør et større rom enn Carlemanparene.

5.1 Hyperfunksjoner med kompakt support

5.1.1 Definisjon

Vi kan definere fouriertransformasjonen av hyperfunksjoner med kompakt support på følgende måte: La $F \in \mathcal{B}(\Omega)$ være en hyperfunksjon med support $K = [a, b]$,

$$\hat{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ix\xi} F(x) dx. \quad (5.1)$$

5.1.2 Eksempel: deltafunksjonen

La F være hyperfunksjonen til Diracs deltafunksjon,

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z}.$$

Vi regner ut fouriertransformen ved hjelp av (5.1),

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\xi) &= -\frac{1}{2\pi i\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ix\xi} \frac{1}{x} dx \quad \text{for } a < 0 < b \\ &= \frac{1}{2\pi i\sqrt{2\pi}} \int_c \frac{e^{-ix\xi}}{x} dx = \frac{e^{-i0\xi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

ved Cauchys integralformel. c er en lukket kurve i \mathbb{C} som omslutter $[a, b]$.

5.1.3 Når F er en distribusjon med kompakt support

Hvis F kommer fra en distribusjon med kompakt support, $F = F_S$, så er $\widehat{F} = SF(S)$, der $SF(S)$ er Schwartz fouriertransform på distribusjoner. Fra 4.3.5 vet vi at

$$\widehat{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ix\xi} F_S(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S(e^{-ix\xi}).$$

Teorem 31.5.1 i [GW98] gir oss fouriertransformen på $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, hvis $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$,

$$\widehat{T}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle T_x, e^{-ix\xi} \rangle,$$

der T_x indikerer at integrasjonen er med hensyn på x .

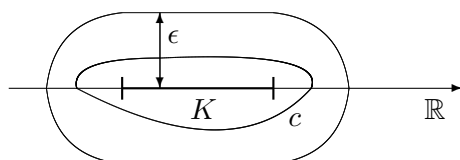
Det betyr at den distribusjonsmessige transformen sammenfaller med transformen på hyperfunksjonene.

5.1.4 Paley-Wiener-Ehrenpreis' teorem

Fouriertransformen av en hyperfunksjon $F(x)$ med support inneholdt i en kompakt mengde, $K = [a, b]$, er en hel funksjon, og for alle $\epsilon > 0$ finnes $C_\epsilon > 0$ slik at

$$|\widehat{F}(\xi)| \leq C_\epsilon e^{\epsilon|\xi| + H_K(\text{Im}(\xi))}, \quad (5.2)$$

der $H_K(\eta) = \sup_{a \leq x \leq b} x\eta$.



Figur 5.1: Illustrasjon av integrasjonskurven c

Bevis:

At $\widehat{F}(\xi)$ er hel følger av at e^z er hel. For å vise ulikheten antar vi at kurven c ligger i en ϵ -omegn av K . Vi skriver $z = x_0 + \delta$ der $x_0 \in [a, b]$ og $|\delta| \leq \epsilon$.

$$\begin{aligned} |\widehat{F}(\xi)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c e^{-iz\xi} F(z) dz \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c |e^{-iz\xi}| |F(z)| dz \\ &\leq \mathcal{C}(c) \max_{z \in c} |e^{-iz\xi}| \\ &= \mathcal{C}(c) \exp\{\max_{z \in c} (x_0 \operatorname{Im}(\xi) + \operatorname{Im}(\delta\xi))\} \\ &\leq \mathcal{C}(c) \exp\{H_K(\operatorname{Im}(\xi)) + \epsilon|\xi|\} \end{aligned}$$

der $\mathcal{C}(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}(c) \max_{z \in c} |F(z)|$. Vi vet at maksimumsverdien eksisterer fordi funksjonen er kontinuerlig, real-valuert og definert på en kompakt mengde (teorem side 39 i [Gam01]). $\mathcal{L}(c)$ betegner her lengden av kurven c .

Merknad

Den motsatte implikasjonen gjelder også.

5.1.5 Egenskaper

Det kan vises at fouriertransformen (5.1) har de samme egenskapene som den klassiske fouriertransformen i kapittel 2:

1. $\mathcal{F}\left(\frac{d^a}{dx^a} F\right) = (i\xi)^a \widehat{F}$
2. $\mathcal{F}(x^a F) = i^a \frac{d^a}{d\xi^a} \widehat{F}$
3. $\mathcal{F}(F(x - a)) = e^{-ia\xi} \widehat{F}$
4. $\mathcal{F}(F * G) = \widehat{F} \widehat{G}$

5.1.6 Ulemper

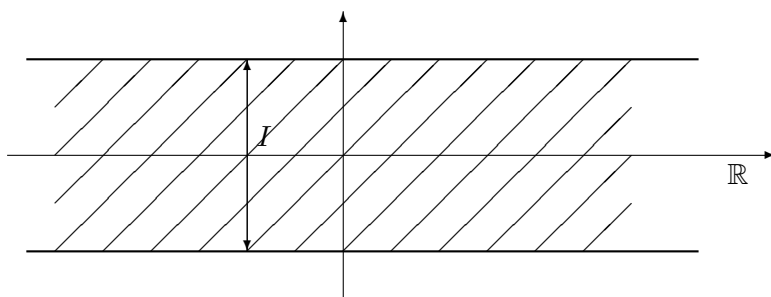
En av de viktige egenskapene de generaliserte fouriertransformene bør inneha, er invers transform. Fra teorem 5.1.4 (Paley-Wiener-Ehrenpreis') kan vi imidlertid slutte at det ikke eksisterer noen invers fouriertransform på rommet av hyperfunksjoner med kompakt support.

5.2 Eksponensielt avtagende hyperfunksjoner

5.2.1 Definisjon av raskt avtagende reelle analytiske funksjoner

La $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R} \times I)$ og la $\delta > 0$. f sies å *avta eksponensielt med type $-\delta$* hvis det for hver kompakte delmengde $K \subset I$ og hver $\epsilon > 0$ finnes en $C_{K,\epsilon} > 0$ slik at

$$|f(z)| \leq C_{K,\epsilon} e^{-(\delta-\epsilon)|\operatorname{Re}(z)|} \quad z \in \mathbb{R} \times K. \quad (5.3)$$



Figur 5.2: Området $\mathbb{R} \times I$

Jo større δ , jo raskere avtar f langs den reelle aksene. Mengden av slike funksjoner betegnes med $\tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\mathbb{R} \times I)$.

\mathcal{P}_* kalles *rommet av raskt avtagende reelle analytiske funksjoner* og er definert som

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_* &= \bigcup_{I \ni 0} \bigcup_{\delta > 0} \tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\mathbb{R} \times I) = \\ &= \{f \text{ slik at } f \in \mathcal{O}(\mathbb{R} \times I_0) \text{ for en } I_0 \ni 0 \text{ og } \exists \delta > 0 \\ &\quad \text{slik at } |f(z)| \leq C_{K,\epsilon} e^{-(\delta-\epsilon)|\operatorname{Re}(z)|} \quad z \in \mathbb{R} \times K.\} \end{aligned}$$

5.2.2 Eksempel: e^{-z^2}

Funksjonen $f(z) = e^{-z^2}$ er holomorf i hele det komplekse plan. Når $\operatorname{Re} z$ er stor og $\operatorname{Im} z$ begrenset har vi $\operatorname{Re} z^2 \geq |\operatorname{Re} z|$, som gir

$$|e^{-z^2}| = e^{-\operatorname{Re} z^2} \leq e^{-|\operatorname{Re} z|}.$$

For at ulikheten også skal gjelde når $\operatorname{Re} z$ er liten, velger vi

$$C_{K,\epsilon} = e^{k^2} \quad \text{for } k = \max_{y \in K} y,$$

der K er en hvilken som helst kompakt delmengde av \mathbb{R} . Da får vi

$$e^{-z^2} \leq C_{K,\epsilon} e^{-|\operatorname{Re}z|} \quad \forall z \in \mathbb{R} \times K.$$

Det betyr at $f \in \tilde{\mathcal{O}}^{-1}(\mathbb{C})$; f avtar eksponensielt med type -1 .

5.2.3 Proposisjon

1. $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\mathbb{R} \times (-\gamma, \gamma))) = \tilde{\mathcal{O}}^{-\gamma}(\mathbb{R} \times (-\delta, \delta))$
2. $\mathcal{F}(\mathcal{P}_*) = \mathcal{P}_*$

Det er klart at 2) følger av 1). Bevis for 1) er gitt i proposisjon 8.2.2 i [Kan88].

5.2.4 Definisjon av eksponensielt avtagende hyperfunksjoner

La $F = (f_+, f_-)$ der $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Anta at $f_+ \in \tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\mathbb{R} \times (0, b))$ og $f_- \in \tilde{\mathcal{O}}^{-\delta}(\mathbb{R} \times (a, 0))$ der $a < 0 < b$.

F kalles en *eksponensielt avtagende hyperfunksjon med type $-\delta$* . Rommet av alle F betegnes med $\tilde{\mathcal{L}}^{-\delta}$.

5.2.5 Integrasjon

Integral på $\tilde{\mathcal{L}}^{-\delta}$ kan defineres som

$$\int_{\mathbb{R}} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_+(x + iy) dx - \int_{\mathbb{R}} f_-(x - iy) dx \quad (5.4)$$

for $y < \min\{-a, b\}$. Definisjonen er uavhengig av y : La $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ slik at $0 < y_1 < y_2$ og la $l \in \mathbb{R}$. Da er

$$\int_{-l}^l f_+(x + iy_2) dx + \int_{y_2}^{y_1} f_+(l + iy) dy + \int_l^{-l} f_+(x + iy_1) dx + \int_{y_1}^{y_2} f_+(-l + iy) dy = 0$$

ved Cauchys teorem. Når vi lar $l \rightarrow \infty$ vil integralene langs den imaginære akse gå mot null, ettersom f_+ da går mot null. Det fører til at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_+(x + iy_2) dx = - \int_{\infty}^{-\infty} f_+(x + iy_1) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_+(x + iy_1) dx.$$

5.2.6 Fouriertransform

Vi kan da definere fouriertransformen på rommet:

$$\widehat{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} F(x) dx \quad \xi \in \mathbb{C} \quad (5.5)$$

5.2.7 Teorem

Fouriertransformen av en eksponensielt avtagende hyperfunksjon er en sakte voksende funksjon.

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{L}}^{-\delta}) = \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R} \times (-\delta, \delta))$$

(teorem 8.2.6 i [Kan88])

5.2.8 Ulemper

Teorem 5.2.7 viser at heller ikke på dette rommet kan vi finne en invers fouriertransform.

5.3 Sakte voksende hyperfunksjoner

5.3.1 Definisjon av sakte voksende funksjoner

$f \in \mathcal{O}(\mathbb{R} \times \mathbb{I})$ kalles *sakte voksende* dersom det for hver kompakte delmengde $K \subset \mathbb{I}$ og hver $\epsilon > 0$ finnes en $C_{K,\epsilon} > 0$ slik at

$$|f(z)| \leq C_{K,\epsilon} e^{\epsilon |\operatorname{Re}(z)|} \quad z \in \mathbb{R} \times K. \quad (5.6)$$

Betegnes $\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R} \times \mathbb{I})$ og er det samme som å sette $\delta = 0$ i definisjon 5.2.1.

5.3.2 Eksempel: $\sin z$

Funksjonen $\sin z$ er holomorf i hele \mathbb{C} og

$$|\sin z| = \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right| \leq \frac{1}{2} (e^{-y} + e^y),$$

så for $C_{K,\epsilon} = \frac{2}{e^{-b} + e^a}$ der $a = \max_{y \in I} y$ og $b = \min_{y \in I} y$, er

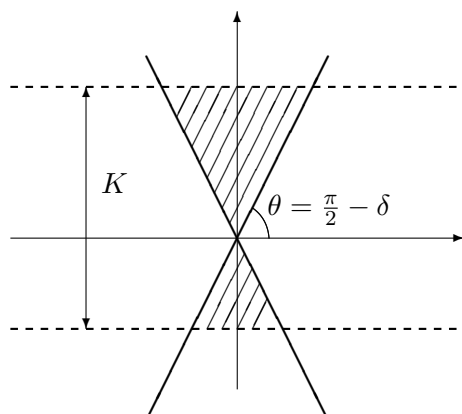
$$|\sin z| \leq C_{K,\epsilon} e^{\epsilon |\operatorname{Re}(z)|}$$

og dermed sakte voksende.

5.3.3 Eksempel: polynomer

La p være et polynom av grad n og la M være en positiv konstant slik at $|p(z)| \leq M |z^n|$. La $\epsilon > 0$. Vi må finne hva $C_{K,\epsilon}$ skal være for følgende ulikhet skal gjelde,

$$M |z^n| = M r^n \leq C_{K,\epsilon} e^{\epsilon |\operatorname{Re} z|} = C_{K,\epsilon} e^{\epsilon |\cos \theta| r} \quad \forall z \in \mathbb{R} \times K$$

Figur 5.3: Oppdeling av $\mathbb{R} \times I$ for å finne $C_{K,\epsilon}$

Når $\theta \notin [\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta] \cup [-\frac{\pi}{2} - \delta, -\frac{\pi}{2} + \delta]$ for $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ vil $1 > |\cos \theta| > m$, for en konstant m . I dette området vil vi kunne finne en verdi for $C_{K,\epsilon}$ som gjelder helt uavhengig av K . Vi kaller denne foreløpige verdien av $C_{K,\epsilon}$ for C_0 . Ved å løse ulikheten ovenfor med hensyn på $C_{K,\epsilon}$ og deretter finne maksverdien får vi at

$$C_0 = b\left(\frac{n}{m\epsilon}\right), \quad \text{der } b(r) = \exp\{\ln M + n \ln r - \epsilon m r\}.$$

Når $\theta \in [\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta] \cup [-\frac{\pi}{2} - \delta, -\frac{\pi}{2} + \delta]$ bruker vi det kompakte intervallet K til å finne maksimumsverdien for p . Vi kaller området begrenset av vinklene $\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta$ og K for D . D er det skraverte området i figur 5.3.

$$\max_{z \in D} p(z) = M \max_{z \in D} |z|^n = \sqrt{2}M \max_{y \in K} y = C_1 (= \text{konst})$$

Ved å velge $C_{K,\epsilon} = \max\{C_0, C_1\}$ har vi vist at $p(z)$ er sakte voksende i hele \mathbb{C} .

5.3.4 Eksempel: rasjonale funksjoner

La $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, der vi for enkelhetss skyld antar at alle nullpunktene til q ligger i origo. Anta at p er av grad m og q er av grad n slik at $n > m$. La M være en positiv konstant slik at det følgende gjelder:

$$|f(z)| = \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^{n-m}} = \frac{M}{r^{n-m}}.$$

f er holomorfe i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, så vi må velge intervallet $I \subset \mathbb{R}_+$ eller $I \subset \mathbb{R}_-$. Vi ser at $|f(z)|$ vil være begrenset i hele det komplekse plan, bortsett fra

når r nærmer seg origo. Der vokser funksjonen mot ∞ . Siden det bare en nødvendig at (5.6) holder for hver kompakte delmengde $K \subset I$, vil vi oppfylle denne ved å la

$$C_{K,\epsilon} \geq \frac{M}{k^{n-m}}, \quad \text{der } k = \min_{y \in K} y.$$

I det generelle tilfellet der vi ikke setter noen krav til q , vil $\frac{p(z)}{q(z)}$ være sakte voksende i alle områder $\mathbb{R} \times I$ som ikke inneholder noen av nullpunktene til q .

5.3.5 Definisjon av sakte voksende hyperfunksjoner

La $F = (f_+, f_-)$ der $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Anta at $f_+ \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R} \times (0, b))$ og $f_- \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R} \times (a, 0))$ der $a < 0 < b$.

F kalles en *sakte voksende hyperfunksjon*. Rommet av alle F kalles \mathcal{L} .

5.3.6 Fouriertransform

Siden f_+ og f_- ikke behøver å avta mot uendelig er det tydelig at vi ikke kan bruke definisjon 5.5 her, da dette integralet ville blitt uendelig. I stedet kan vi definere den slik:

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\xi) = & \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_-} f_+(x+iy)e^{-i\xi(x+iy)} - f_-(x-iy)e^{-i\xi(x-iy)} dx, \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} f_-(x-iy)e^{-i\xi(x-iy)} - f_+(x+iy)e^{-i\xi(x+iy)} dx \right) \end{aligned}$$

I motsetning til 5.5 er \widehat{F} her en hyperfunksjon.

5.3.7 \widehat{F} er en sakte voksende hyperfunksjon

Fouriertransformen sender \mathcal{L} tilbake på seg selv:

$$\mathcal{F} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$$

(lemma 8.3.3 i [Kan88])

Resultatet impliserer at \mathcal{L} er et rom hvor den inverse fouriertransformen eksisterer. Fra teorem 8.3.4 i [Kan88] har vi at

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \text{id}$$

holder for sakte voksende hyperfunksjoner.

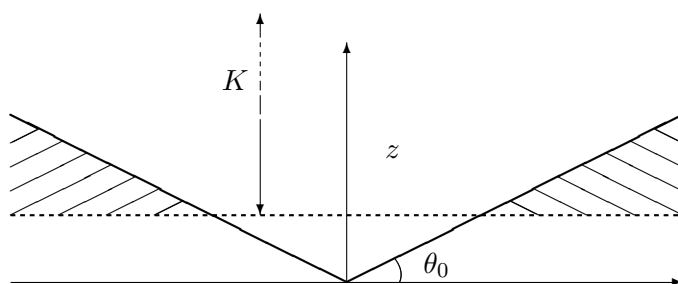
5.4 Sammenligning med Carlemans teori

Vi skal nå se nærmere på likheter og forskjeller mellom de sakte voksende hyperfunksjonene og Carlemansparene.

5.4.1 \mathcal{L} versus Carlemanpar

Det nevnes i [Kis02], seksjon 6, at hyperfunksjoner med infra-eksponensial vekst (= sakte voksende hyperfunksjoner) er mer generelle en Carlemans funksjonspaar. Å vise dette er verre. I og med at Carlemanparene er definert på et annet område enn de sakte voksende hyperfunksjonene, er de vanskelige å sammenligne.

For at et Carlemanpar (f_1, f_2) av klasse (α, β) skal ligge i \mathcal{L} , må vi ha at $f_1 \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{C}_+)$ og $f_2 \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{C}_-)$. Mellom vinklene θ_0 og $\pi - \theta_0$ følger dette av eksemplene 5.3.3 og 5.3.4. Det vil imidlertid alltid være et område utenfor disse vinklene som vi ikke vet noe om, se figur 5.4.



Figur 5.4: De skraverte områdene viser hvor Carlemanparene ikke trenger oppfylle vekstbetingelsene

Enklere er det å vise at *hvis* Carlemanparene er inneholdt i \mathcal{L} , så er det en ekte inklusjon: Fra delseksjon 4.3.9 vet vi at funksjonen $f(z) = e^{-\frac{1}{iz}}$ ikke er Carleman. Vi viser at f er sakte voksende:

La $\epsilon > 0$

$$|e^{-\frac{1}{iz}}| \leq e^{\frac{1}{r}} \leq C_{K,\epsilon} e^{\epsilon |\operatorname{Re} z|}$$

for

$$C_{K,\epsilon} \geq e^{\frac{1}{m}}, \quad \text{der } m = \min_{y \in K} y,$$

der K er et kompakt intervall i \mathbb{R}_+ (eller \mathbb{R}_-).

Det finnes altså funksjoner i \mathcal{L} som ikke er Carleman.

5.4.2 Fouriertransformasjon

Vi starter med å se tilbake på hva vi vet fra før om sammenhengen mellom Carlemantransformen og fouriertransformen på \mathcal{L} . I seksjon 5.1.3 viser vi at for en distribusjon med kompakt support, vil fouriertransformen av den tilsvarende hyperfunksjonen sammenfalle med Schwartz' fouriertransform av distribusjoner. I seksjon 3.2.5 finner vi samme resultat for Carlemantransformen på de tempererte distribusjonene. Siden $\mathcal{E}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ betyr dette at de to transformene i hvert fall er like på $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

Vi vil imidlertid gjerne gjøre en mer generell sammenligning og starter med å se på definisjonene:

Hvis (f_1, f_2) er et Carlemanpar, så er Carlemantransformen gitt ved,

$$(g_1(z), g_2(z)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L'_1} e^{-izy} f_2(y) dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L_1} e^{-izy} f_1(y) dy, \right. \\ \left. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L'_2} e^{-izy} f_2(y) dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L_2} e^{-izy} f_1(y) dy \right)$$

der L_1 og L'_1 er linjer i venstre halvplan slik at $\overline{L_1} = L'_1$, tilsvarende for L_2 og L'_2 i høyre halvplan.

Hvis (f_1, f_2) også er i \mathcal{L} , så er fouriertransformen av $F = (f_1, f_2)$ som hyperfunksjon gitt ved,

$$\widehat{F}(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_- + iq} f_1(y) e^{-izy} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_- - iq} f_2(y) e^{-izy} dy, \right. \\ \left. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+ - iq} f_2(y) e^{-izy} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+ + iq} f_1(y) e^{-izy} dy \right)$$

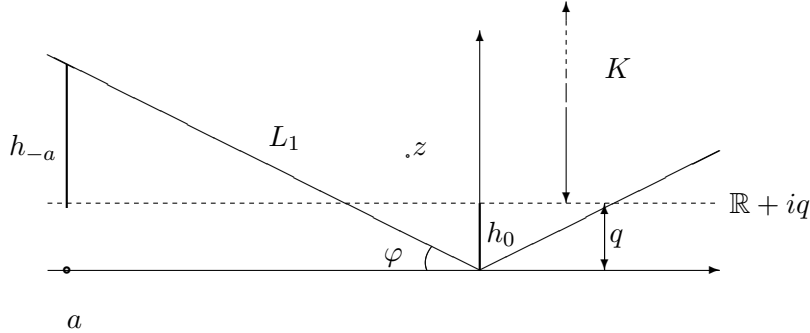
for $q \in \mathbb{R}_+$. I denne seksjonen kaller vi \widehat{F} for (j_1, j_2) for å gjøre sammenligningen med (g_1, g_2) enklere.

Det går tydelig fram at definisjonene er like med unntak av hvilken linje i hver kvadrant man integrerer over. Vi vil forsøke å vise at fouriertransformen er uavhengig av hvilken av de to definisjonene vi bruker, det vil si at

$$(g_1(z), g_2(z)) = (j_1(z), j_2(z)) + w(z),$$

der w er en holomorf funksjon i hele \mathbb{C} .

La (f_1, f_2) være et Carlemanpar som også er i \mathcal{L} . Anta at $f_2(z) = 0$. (Det generelle Carlemanparet kan deretter skrives som en lineærkombinasjon av $(f_1, 0)$ og $(0, f_2)$.) La L være en linje i øvre halvplan, venstre kvadrant. K er en kompakt delmengde av \mathbb{R}_+ .



Figur 5.5: Tilfellet for venstre, øvre kvadrant

Siden det er snakk om integrasjon av holomorfe funksjoner vil vi bruke Cauchy's teorem i hver kvadrant. Figur 5.5 viser tilfellet for øvre, venstre kvadrant.

Det vi trenger å vise er at integralet over de to horisontale linjene h_0 og h_{-a} (når $a \rightarrow \infty$) blir lik null eller lik en holomorf funksjon. Integralet over h_0 blir det samme for g_1 og g_2 , så det faller bort. Det gjenstår å se hva integralet over h_{-a} blir.

La $z = s + it \in \mathbb{C}_+$. Velger L_1 og q slik at z ligger til høyre eller ovenfor disse linjene, se figur 5.5. La $y = -a + ib$, der $a \rightarrow \infty$ og $k < b < \infty$. Siden vi skal integrere over et område som ligger utenfor vinkelen $(\theta_0, \pi - \theta_0)$ kan vi ikke bruke estimatet av $|f_1(z)|$ for Carlemanpar (3.3). Isteden bruker vi estimatet for sakte voksende funksjoner i øvre halvplan, $|f_1(z)| \leq C_{K,\epsilon} e^{\epsilon|\operatorname{Re}z|}$. Vi starter med å regne ut integralet når a er endelig. Da er øvre grense for b gitt ved $a \tan \varphi$, der φ er vinkelen mellom \mathbb{R}_- og L_1 .

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{h_{-a}} e^{-izy} f_1(y) dy \right| &\leq \int_q^{a \tan \varphi} e^{sb-ta} |f_1(a+ib)| db \\
 &\leq C_{K,\epsilon} e^{-ta} e^{\epsilon a} \int_k^{a \tan \varphi} e^{sb} db \\
 &= C_{K,\epsilon} e^{-(t-\epsilon)a} \frac{1}{s} (e^{sa \tan \varphi} - e^{sq}) \\
 &= \frac{C_{K,\epsilon}}{s} (e^{-(t-s \tan \varphi - \epsilon)a} - e^{sk} e^{-(t-\epsilon)a})
 \end{aligned}$$

Nå lar vi $a \rightarrow \infty$,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{C_{K,\epsilon}}{s} (e^{-(t-s \tan \varphi - \epsilon)a} - e^{sk} e^{-(t-\epsilon)a}) = 0,$$

som gjelder når $t > s \tan \varphi + \epsilon$. Men det er samme krav som at z skal ligge til høyre for linja L_1 og det har vi allerede antatt oppfylt. Dermed blir integralet over h_{-a} når $a \rightarrow \infty$ lik null.

Med bruk av en litt sterkere betingelse enn sakte voksende, har vi vist at Carlemanstransformen og fouriertransformen er like når vi starter med et element som er inneholdt i både \mathcal{L} og i Carlemanparene. Betingelsen sakte voksende betyr mindre enn eksponensiell vekst på alle kompakte intervaller av den imaginære akse, vi har brukt at funksjonen er sakte voksende på et intervall som ikke er kompakt.

Eksempel: polynom

Hvis vi starter med et polynom $p(z) = z^n$, så er det vist i seksjon 3.2.2 at Carlemanstransformen av (p, p) blir $(0, 0)$. Siden polynomer er holomorfe i hele \mathbb{C} , er $F = (p, p) = (0, 0)$ som hyperfunksjon. Det betyr at den fouriertransformerte av F er $(0, 0)$.

Eksempel: deltafunksjonen

Fra 4.3.6 vet vi at deltafunksjonen er en hyperfunksjon gitt ved

$$\begin{aligned} f_1(z) &= -\frac{1}{2\pi iz} \quad \text{for } \operatorname{Im}z > 0 \\ f_2(z) &= -\frac{1}{2\pi iz} \quad \text{for } \operatorname{Im}z < 0. \end{aligned}$$

Fouriertransformen av (f_1, f_2) som hyperfunksjon er regnet ut i eksempel 5.1.2 og funnet lik $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Carlemanstransformen av (f_1, f_2) er regnet ut i eksempel 3.1.8, hvor vi fikk $g_1(z) = 0$ og $g_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, som medfører at differansen er $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ som ovenfor.

Kapittel 6

Konklusjon

Teorien om hyperfunksjoner er i matematisk historie en forholdsvis ny gren. Den representerer en generalisering av Schwartz' distribusjoner, definert ved holomorfe funksjoner heller enn Schwartz sine noe oppkonstruerte rom av testfunksjoner. Det gjør at sterke resultater fra kompleks analyse, som blant annet Cauchys teorem, kan anvendes på hyperfunksjonene og gjør dem enklere å arbeide med. Fouriertransformen er definert på alle sakte voksende hyperfunksjoner; det er rommet av funksjoner som vokser saktere enn enhver eksponensialfunksjon og som blant annet inneholder alle polynomer.

En av de tidligere generaliseringene av fouriertransformen var det Torsten Carleman som sto for. Carlemantransformen gir en metode for å fouriertransformere en klasse funksjoner som er større enn Schwartz' distribusjoner, selv om sammenhengen med distribusjonene ikke ligger helt i dagen. Til gjengjeld er det lett å se at konstruksjonen av Carlemanpar har mye til felles med hyperfunksjonene. Ut fra definisjonen er Carlemanparene en undermengde av hyperfunksjonene og jeg har vist mange eksempler på hyperfunksjoner som er Carleman, men også eksempler som ikke er Carleman, så de to funksjonsrommene er ikke like.

Det er ikke lett å sammenligne de sakte voksende hyperfunksjonene, \mathcal{L} , med Carlemanparene. Den eneste av kildene som sa noe om begge disse rommene, [Kis02], konstaterte at Carlemanparene var en undermengde av den andre. Jeg er ikke sikker på om dette stemmer, da rommene er definert på forskjellige områder som gjør påstanden vanskelig å bevise. Det som er sikkert er at \mathcal{L} inneholder funksjoner som ikke er noe Carlemanpar.

Fouriertransformen på henholdsvis Carlemanpar og hyperfunksjonene \mathcal{L} ser svært like ut av definisjon og jeg har også med en litt sterkere betingelse vist at dette er tilfelle.

Bibliografi

- [BG91] Carlos A. Berenstein and Roger Gay. *Complex Variables*. Springer-Verlag, 1991.
- [BG95] Carlos A. Berenstein and Roger Gay. *Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis*. Springer, 1995.
- [Car44] Torsten Carleman. *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent : leçons professées à l'Institut Mittag-Leffler*. 1944.
- [Gam01] Theodore W. Gamelin. *Complex analysis*. Springer, 2001.
- [GW98] C. Gasquet and P. Witomski. *Fourier Analysis and Applications*. Springer, 1998.
- [Kan88] A. Kaneko. *Introduction to Hyperfunctions*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [Kis02] Christer O. Kiselman. Generalized fourier transformations: The work of bochner and carleman viewed in the light of the theories of schwartz and sato. *World Scientific*, 2002.
- [Kre06] Erwin Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley, 2006.
- [Lüt82] Jesper Lützen. *The Prehistory of the Theory of Distributions*. Springer, 1982.
- [Mal] Eugenia Malinnikova. Forelesningsnotater til faget analysens grundlag, høst 2006.
- [Sch87] Henrik Schlichtkrull. Introduktion til hyperfunktioner. *Normat*, 3:110–120, 1987.