NTNU
Det skapende universitet

Kvasikonforme avbildninger og anvendelser i holomorf dynamikk

Steffen Junge

Master i matematikk
Oppgaven levert: September 2007
Hovedveileder: Kari Hag, MATH

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne oppgaven er på mange måter en personlig milepæl. Både rent faglig men også mer generelt. Den markerer først og fremst avslutningen på mitt liv som student; et liv som begynnte så tidlig som i 1998 i Århus, der jeg begynnte å studere kjemi og fysikk, og som kulminerer nå i 2007 med denne masteroppgaven i matematikk. Rent faglig har oppgaven været litt av en kraftanstrengelse, der jeg har hatt bruk for mer eller mindre allt jeg har lært de siste årene. Det har vært lærerikt å fordype seg i et tema som anvender alle discipliner i den rene matematikken; helt fra analyse over topologi til algebra.

Studenttiden har vært en fin periode, og det er ikke uten vemod det nå er over. Først og fremst har mine medstuderende bidratt til at studietiden har vært en trivelig periode, og da spesiellt Vegard Aksnes, med hvem jeg har hatt mange drapelige bordtennisdyster og opplysende faglige diskusjoner. Videre en stor takk til post.doc. Ole Jacob Broch og førsteamanuensis Per Hag for alltid å vise interesse og ta seg tid til mine mer eller mindre intelligente spørsmål. Dessuten er det på sin plass å takke min veileder professor Kari Hag for alltid å være positivt innstillt til mine utallige plutselige innfald, og for sin store hjelp i alle slags spørsmål, hva enten de er av faglig eller mer allmen karakter.

Men frem for allt må jeg takke min familie; Anita Bech-Hanssen og vores tvillinger Kasper og Joakim for deres endeløse tålmodighet. Uten dem ville livet ikke riktig vært det samme.

Trondheim september 2007

Steffen Junge

Innhold

Innledning

Studiet av tallfølger og iterasjonsprosesser er ofte en del av ett innledende kurs i matematisk analyse. Stoffet egner seg godt for en illustrasjon i bruken av fullstendighetsprinsippet av de reelle tallene, for forståelse av grensebegrepet og for treningsoppgaver i induksjon, se [Lindstrøm, kap. 4.3-4.4]. Oppgavene i ett slikt kurs beveger seg sjeldent ut over de mest simple eksempler, og en får lett det inntrykket at temaet er "lett". Dette var også mitt inntrykk etter de første fem ukene av det innledende kurs i matematisk analyse ved Århus universitet. Skepsisen var derfor stor, da foreleser Ebbe-Thue Poulsen ga følgende uskyldig utseende oppgave som ukens nøtt:

For hvilke $x > 0$ konvergerer følgen $x, x^x, x^{x^x}, x^{x^{x^x}}, \cdots$?

Min første reaksjon var, at for $x > 1$ må følgen i allefall divergere mot ∞*. For $0 < x < 1$ var bildet ikke fullt så opplagt, og en del iterasjoner på datamaskin ble gjennomført for å få en idé om oppførselen. Resultatene, særlig for små x, var så sære at oppgaven etter kort tid ble lagt på hyllen med den konklusjon at der sikkert var en feil i algoritmen.

Et par år senere dukket følgen igjen opp, da jeg som studentassistent ved NTNU atter ble konfrontert med den av en, for øvrig svært oppvakt, student. Denne mente at følgen konvergerte på ett begrenset intervall (a, b) der $0 < a < 1 < b$. Litt mer velbevandret i matematiske resonnementer, lykkedes det denne gangen å bevise, at følgen konvergerer for $x \in [e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$, og divergerer mot ∞ for $x > e^{\frac{1}{e}}$. Senere ble jeg klar over at samme resultat var vist av Euler i 1783 og Eisenstein i 1844 [Wolfram]. For $0 < x < e^{-e}$ viste en simulering i matlab at følgen degenererer og splitter opp i én grense for verdiene etter et odde antall skritt og en annen grense etter et like antall skritt, se figur 1.

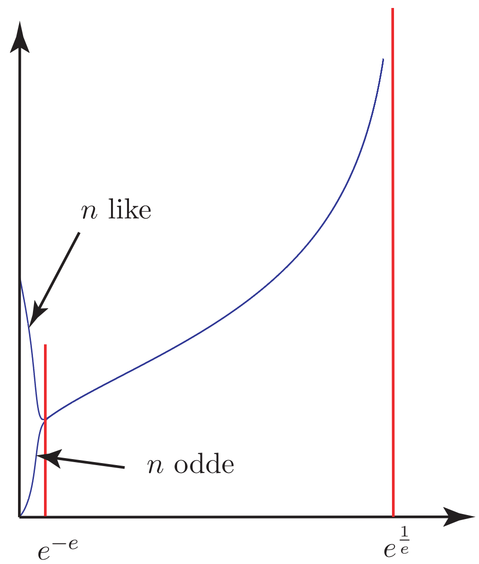
Inspirert av denne bisarre oppførselen var det naturlig å spørre seg selv for hvike *komplekse* tall z følgen

$$z, z^z, z^{z^z}, z^{z^{z^z}}, \cdots$$

konvergerer? Generaliseringen til komplekse tall er ikke uten videre triviell, men observeres det at følgen oppstår ved iterasjon av funksjonen $f(w) = e^{w \log z}$

*Dette er feil.

med startverdi i punktet $w = 0$, kan en ved å velge den prinsipale grenen av logaritmefunksjonen definere følgen meningsfullt.



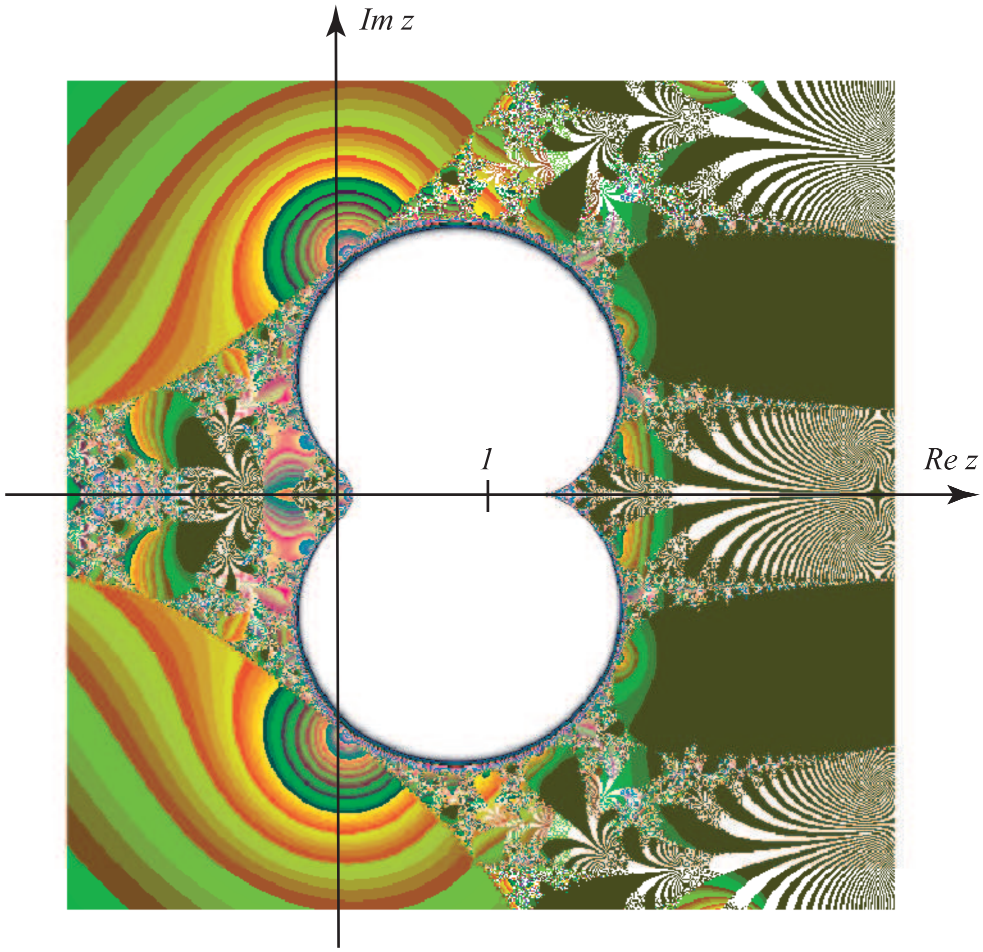
Figur 1: *Grafen viser verdien etter henholdsvis 200 og 201 skritt i følgen* $x, x^x, x^{x^x}, x^{x^{x^x}}, \cdots$. *Som en ser konvergerer følgen for* $e^{-e} < x < e^{\frac{1}{e}}$. *I intervallet* $0 < x < e^{-e}$ *degenererer følgen og splitter opp i én grenseverdi for verdiene etter et like antall skritt, og en annen grenseverdi for verdiene etter et odde antall skritt. Med andre er det et bifurkasjonspunkt ved* $x = e^{-e}$.

Bildet som fremkommer ved simulering av følgen for ulike startverdier er vist i figur 2, og viser en enorm kompleksitet. Følgen er ennå til dels svært dårlig forstått for komplekse verdier, og vi skal ikke her komme inn på noen videre resultat. Se for øvrig [Wolfram] for andre resultat og en fyldig referanseliste.

Hvor overfladisk det enn måtte høres ut er figur 2 mer eller mindre er opprinnelsen til min interesse for kompleks iterasjonsteori. Fascinasjon over disse fargerike illustrasjoner av fraktale mengder er jeg imidlertid ikke ene om, og det er netopp fremkomsten av disse, som tilskrives en stor del av æren for den generelt store interesse feltet har opplevd de seneste 40 år. Lars Ahlfors har for eksempel uttalt, at han før Mandelbrots første datagenererte bilder av mandelbrotmengden og ulike juliamengder anså kompleks iterasjonsteori som en "mørk avkrok" i kompleks analyse. Med Mandelbrots bilder innså han straks "viktigheten" av området.

Denne oppgaven

I denne oppgaven skal vi se mer generellt på de familier av dynamiske systemer, som oppstår ved iterasjon av rasjonale funksjoner på riemannsfæren.



Figur 2: *Bildet er et plott av differansen mellom skritt nummer 200 og 201 i følgen* $z, z^z, z^{z^z}, z^{z^{z^z}}, \cdots$. *Den hvite mengden midt i bildet er således området der følgen konvergerer. Bemerk at snittet med den reelle akse stemmer overens med konvergensen av* $x, x^x, x^{x^x}, x^{x^{x^x}}, \cdots$ *for* $e^{-e} < x < e^{\frac{1}{e}}$. *Bildet er for øvrig, som forfatteren i forbindelse med denne oppgaven er blitt oppmerksom på, en illustrasjon av parameterrommet for den komplekse familie av funksjoner* $f_\lambda(z) = e^{z \log \lambda}$ *der* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

A priori er disse, grunnet fraværet av essensielle singulariteter, vesentlig enklere enn de systemer som fremkommer ved iterasjon av hele funksjoner som eksponentialfunksjonen. Ikke desto mindre byr selv de enkleste systemer, generert av rasjonale funksjoner som for eksempel polynom av grad to og tre, på så store vanskeligheter, at bare systemer generert av kvadratiske polynom anses som nesten komplett beskrevet, selvom det også her finnes viktige uløste spørsmål.

Teorien for komplekse dynamiske systemer har historisk sett hatt to store perioder. Den første av disse består hovedsakelig av pionerarbeidet til G.Julia og P.Fatou, og begynner rundt 1900 og varer frem til rundt 1920. Resultatene fra denne perioden betegnes ofte som den klassiske teorien. Etter Fatou og Julia lå feltet mer eller mindre dødt i nærmere 60 år, med viktige unntak i arbeidene til eksempelvis Cremer, Siegel og Arnol'd, før feltet igjen ble svært aktivt i årenene rundt 1980. Som tidligere nevnt skyldes dette delvist fremveksten av datagenererte bilder, men kanskje like viktig en rekke store gjennombrudd på den matematiske fronten. Det største av disse var Dennis P. Sullivans bevis for Fatou's "no wandering domains" formodning, der Sullivan introduserer det viktigste verktøyet i den moderne teorien: kvasikonforme avbildninger.

Vi skal i denne oppgaven fokusere på anvendelsen av kvasikonforme avbildninger som et verktøy i rasjonal iterasjonsteori, og vi skal blandt annet gjennomføre Sullivans bevis for Fatous formodning. I tillegg gir vi moderne bevis for en rekke mer klassiske resultat; bevis som i flere tilfeller baserer seg på kvasikonforme avbildninger, og som forenkler de klassiske argumenter vesentlig. Arbeidet presenteres på ingen måte som originalt, men er nærmere et forsøk på å presentere stoffet på et nivå som er tilfredsstillende stringent, men samtidig ikke kræver svært store forkunnskaper. Et resultat av dette er at så godt som alle bevis er vesentlig lengre i forhold til fremstillingen gitt i kildene i referanselisten. En rekke påstander som typisk postuleres i andre kilder, opptrer her som lemmaer, og er skrevet ut i full lengde med bevis eller i visse tilfeller med presis referanse. Stoffet er søkt fremstilt slik at en leser med forfatterens forkunnskaper og bakgrunn skal kunne forstå oppgaven. I tillegg er det sannsynligvis første gang dette stoffet, og i særdeleshet dette valget av beviser, er presentert på norsk. Alle figurer er dessuten uten unntak egenproduserte, og er av en eller annen grunn så godt som fraværende i den øvrige litteraturen.

Et overblikk

Kapittel 1 Vi presiserer her hvilke forkunnskaper vi skal ta for gitt gjennom resten av oppgaven. Kapitlet er uten bevis siden stoffet antas kjent.

Kapittel 2 Vi gir her en kort beskrivelse at de grunnleggende definisjoner og grunnleggende resultater i rasjonal iterasjonsteori. Kapittelet er så godt som uten bevis, og det vil være en fordel med en viss kunnskap om stoffet fra tidligere. Målet med seksjonen er å formulere oppgavens overordnede målsetning på en meningsfylt måte.

Kapittel 3 I dette kapitlet innfører vi det viktigste redskap for bevisteknikkene videre i oppgaven, nemlig kvasikonforme avbildninger. Fokus er lagt på anvendelser, og stoffet presenteres derfor til dels heuristisk, men også med stringente bevis for en del resultat.

Kapittel 4 Her fører vi et stringent bevis for Fatous formodning om ikke-eksistensen av vandrende komponenter i fatoumengden til en rasjonal funksjon.

Vi følger fundamentalt beviset til Sullivan, men med enkelte forbedringer, som tilskrives Baker. Beviset hviler tungt på teorien for kvasikonforme avbildninger, som ble introdusert i kapittel tre.

Kapittel 5 Dette kapittelet er tatt med for fullstendighetens skyld, og er det eneste der vi følger teknikkene fra den klassiske teorien som utviklet av Fatou og Julia. Vi har mer presist skrevet ut et bevis for klassifikasjonssetningen 2.3.2, som for øvrig er å finne en del andre steder i litteraturen, men i til dels svært kort form.

Kapittel 6 og 7 I disse kapitlene beviser vi at klassifikasjonssetningen som er bevist i kapittel fem, virkelig fremstår i sin opptimale form. Vi gir moderne bevis for eksistensen av siegeldisker og hermanringer, se definisjon 2.3.1, og anvender også på disse punktene kvasikonforme avbildninger i stor utstrekning.

Kapittel 1

Forutsetninger

I dette kapittelet skal vi presisere hvilke forkunnskaper vi tar for gitt gjennom resten av denne teksten. Vi skal ved inntil flere anledninger benytte andre spesielle og mer spesifikke resultat, og i disse tilfellene vil vi postulere resultatet når det trengs.

1.1 Kompleks analyse

Vi skal gjennom hele oppgaven anta at leseren er fortrolig med kompleks analyse svarende til ett standard master-nivå kurs i kompleks analyse. For fullstendighetens skyld minner vi her om de mest brukte begreper og resultat i den forbindelse:

Vi skal i stor utstrekning snakke om følger av holomorfe funksjoner og konvergens av disse. I den forbindelse spiller begrepene normal konvergens og normale familier en sentral rolle.

1.1.1 Definisjon. *En følge f_n av holomorfe funksjoner definert på en felles åpen mengde U sies å konvergere normalt mot en grense f, dersom følgen f_n konvergerer uniformt mot f på alle kompakte mengder $K \subset U$.*

Normal konvergens har en rekke attraktive egenskaper der de viktigste er at klassen av holomorfe funksjoner er lukket under normal konvergens samt at derivasjon er kontinuerlig med hensyn på normal konvergens. Med kontinuitet mener vi, at dersom $f_n \to f$ normalt, da går $f_n' \to f'$ normalt.

Følgende resultat og dets korollar skal vi anvende inntil flere ganger:

1.1.2 Setning (HURWITZ)**.** *Anta f er en følge av holomorfe funksjoner på ett område D, som konvergerer normalt mot en funksjon f på D. Dersom f har ett nullpunkt av orden N i $z_0 \in D$, da eksisterer det en $\rho > 0$ og en $M \in \mathbb{N}$ slik at hvis $n \geq N$ da har f_n presis N nullpunkter, talt med multiplisitet, i disken $\mathbb{D}_\rho(z_0)$, og disse nullpunktene konvergerer mot z_0.*

1.1.3 Korollar. *Dersom en følge $f_n : U \to \mathbb{C}$ av univalente funksjoner konvergerer normalt mot en grense f, da er f enten konstant eller univalent på U.*

Ett nært beslektet begrep er *Normale familier* av funksjoner, og det er særlig dette begrepet som er sentralt for denne oppgaven:

1.1.4 Definisjon. *En familie $\mathfrak{F}$ av meromorfe funksjoner definert på ett område $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ kalles normal, hvis enhver følge $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ indeholder en normalt konvergent delfølge.*

Dette gir ved Arzelá-Ascoli følgende karakterisering av normale familier av meromorfe funksjoner.

1.1.5 Setning ([Gamelin] s. 317)**.** *En familie $\mathfrak{F}$ av meromorfe funksjoner $f_\alpha : U \to \hat{\mathbb{C}}$ er normal, hvis og bare hvis $\mathfrak{F}$ er ekvikontinuerlig sett som funksjoner fra U med den euklidske metrikken til $\hat{\mathbb{C}}$ med den sfæriske metrikken*

Spesiellt gjelder dette da for en normal familie av rasjonale funksjoner på ett område U. En kunne kanskje frykte at det ikke er spesiellt lett å avgjøre om en gitt familie er normal eller ikke. Dette er ikke nødvendigvis tilfellet, som følgende utrolige setning sier [Gamelin] s. 321:

1.1.6 Setning (MONTEL)**.** *En familie av meromorfe funksjoner på ett område U der alle medlemmer av familien unngår de samme tre verdier i $\hat{\mathbb{C}}$ er normal på U.*

Denne setningen, som for øvrig var det viktigste redskapet til Fatou og julia, skal vi gjøre utsrakt bruk av. Vi gir her ett par eksempler på typiske anvendelser:

1.1.7 Eksempel. *Anta en famile av rasjonale funksjoner er uniformt begrenset på en åpen mengde U, da er denne familien normal på U siden ingen verdier i en omegn rundt ∞ antas. Dette er for øvrig en mild versjon av Montels setning som Montel selv beviste i sin doktoravhandling, se [Gamelin] s. 308.*

1.1.8 Eksempel. *Anta en familie $\mathfrak{F}$ av rasjonale funksjoner* ikke *er normal på en åpen mengde U. Da består mengden*

$$\hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{f \in \mathfrak{F}} f(U)$$

av høyst to element.

Normal konvergens og Montels setning som i eksempel 1.1.7 spiller en sentral rolle i beviset for kanskje den mest berømte setningen innen kompleks analyse:

1.1.9 Setning (RIEMANNS AVBILDNINGSSATS)**.** *For enhver enkeltsammenhengende $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ der ∂U inneholder minnst tre punkt, eksisterer der en konform avbildning $\psi : U \to \mathbb{D}$.*

Denne setningen, som egentlig først ble bevist av Koebe, skal vi gjøre bruk av gjentatte ganger og vi skal ofte referere til avbildningen ψ som en *Riemann-avbildning*.

Vi runder av denne seksjonen med ett par resultat av mer geometrisk karakter.

1.1.10 Setning (KOEBES $\frac{1}{4}$-SETNING). *La f være innholdt i klassen $\mathcal{S}$ av univalente holomorfe funksjoner på enhetsdisken med $f(0) = 0$ og $f'(0) = 1$. Da dekker bildet $f(\mathbb{D})$ disken $\mathbb{D}_{\frac{1}{4}}$.*

1.1.11 Setning (SCHWARZ LEMMA). *La $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ være holomorf med $f(0) = 0$. Da er*

$$|f(z)| \leq |z| \quad , |z| < 1$$

Videre hvis likhet gjelder for bare ett punkt $z \in \mathbb{D}$ da er $f(z) = \lambda z$ der $\lambda \in \partial\mathbb{D}$.

Vi skal sjeldent anvende disse setningene i den direkte formen de er fremstillt her. For Schwarz lemma sitt vedkommende ser vi for eksempel, at dersom $f(z)$ er holomorf i en disk $\mathbb{D}_R(z_0)$ med $f(z_0) = 0$ $|f(z)| \leq K$ for alle $z \in \mathbb{D}_R(z_0)$, da oppfylder $h(\zeta) = \frac{f(R\zeta + z_0)}{K}$ kriteriene i Schwarz lemma, og dermed er $|h(\zeta)| \leq |\zeta|$ for $\zeta \in \mathbb{D}$. Men da er $|f(z)| \leq \frac{K}{R}|z - z_0|$, og vi har ett estimat av en umiddelbart mer fleksibel form.

1.2 Generell topologi

Vi skal anta at leseren er komfortabel med de grunnleggende definisjoner og resultater fra generell topologi. Her tenkes spesiellt på kompakthetsegenskaper, kontinuitet, og separasjonssetninger i normale topologiske rom, som for eksempel $\hat{\mathbb{C}}$ utstyrt med topologien generert av den sfæriske metrikken. Vi understreker i den forbindelse, at vi svært ofte skal utnytte det faktum, at den euklidske metrikken og den sfæriske metrikken er ekvivalente i enhver begrenset delmengde av $\mathbb{C}$, og derfor genererer den samme topologien her. For en grundig innføring i disse begrepene se [Munkres].

Vi skal videre anta at leseren har basalt kjennskap til overdekningsavbildninger (covering maps) og løft av kurver og homotopier, se [Munkres] kap. 54.

1.3 Differensialtopologi og Mangfoldigheter

Vi skal ikke anvende disse temaene i spesiellt stor utstrekking, men allikevel inngår en setning fra differensialtopologien på avgjørende vis i ett av hovedresultatene videre i oppgaven. Vi skal derfor anta at leseren kjenner til definisjonen av en glatt mangfoldighet og glatte avbildninger mellom slike. Det antas videre at leseren kjenner til definisjonen av undermangfoldigheter, tangentrom, tangentbunnter samt rangen til en glatt avbildning. Vi skal ikke på noe tidspunkt anvede noen dype resultater fra differensialtopologien, og våre anvendelser begrenser seg til følgende setning ([Lee] s. 182):

1.3.1 Setning. *Dersom M og N er glatte mangfoldigheter, og $f : M \to N$ er en glatt avbildning av konstant rang r da er enhver ikke-tom nivåmengde $f^{-1}(c)$ en glatt undermangfoldighet av M av dimensjon* $\dim M - r$.

Hva angår Riemannflater har vi prøvd å nedtone anvendelsen av disse i vår fremstilling av stoffet. Dette er analogt med tråden som følges i [Carleson] og [Steinmetz], der teorien for dynamiske systemer i høyere grad er skrevet fra ett analytisk perspektiv. Presentasjonen av stoffet i [Milnor] og til dels [Beardon] er kanskje mer elegant fra ett teoretisk synspunkt, men hviler i langt høyere grad på teorien for Riemannflater.

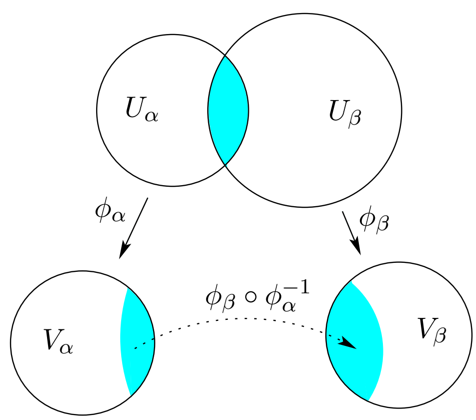
Vi skal således nøye oss med å angi definisjonen av en Riemannflate samt analytiske avbildninger mellom slike. Vi skal riktignok omtale Riemannflater i teksten, men vi skal ikke anvende noen dypere resultater, og vi skal bare anvende termen Riemannflate som navn på ett objekt med en struktur som gitt i definisjonen nedenfor.

1.3.2 Definisjon. *Med en Riemannflate U skal vi mene en Kompleks analytisk en-dimensjonal mangfoldighet. Det vil si U er et sammenhengende topologisk Hausdorffrom utstyrt med ett* atlas

$$\mathfrak{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha | U_\alpha \in U,\ V_\alpha \subset \mathbb{C} \text{ er åpne, } \phi_\alpha \text{ en homeomorfi og } \alpha \in A\}\}^*$$

som oppfylder følgende egenskaper:

1. $U \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$
2. *Dersom $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ da er $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ holomorf på $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, se figur 1.1.*



Figur 1.1:

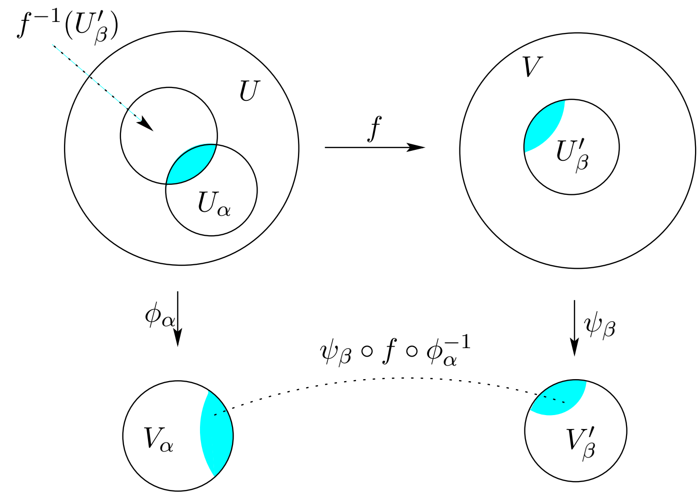
1.3.3 Definisjon. *La U og U' være Riemanflater. Vi sier at en kontinuerlig funksjon $f : U \to U'$ er analytisk, dersom vi for enhver $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ i atlasset for U og $\psi_\beta : U'_\beta \to V'_\beta$ i atlasset for U' med $U_\alpha \cap f^{-1}(U'_\beta) \neq \emptyset$ har at*

$$\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$$

er holomorf på $\phi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap f^{-1}(U'_\beta))$, se figur 1.2.

Vi skal i vid utstrekking se på funksjoner som er analytiske mellom Riemanflater og vi skal reservere termen *analytisk* for denne typen analytisitet. En analytisk avbildning i vanlig forstand skal vi omtale som holomorf.

$^*A$ er en indeksmengde.



Figur 1.2: *dersom* $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ *er holomorf er* f *analytisk*

Kapittel 2

Holomorf dynamikk

I dette kapittel skal vi gi en kort innføring i den nødvendige terminologien for komplekse dynamiske systemer. I hele kapittelet angir symbolet $\hat{\mathbb{C}}$ riemannssfæren utstyrt med den sfæriske metrikken. I tillegg antas det underforstått, hvis ikke annet eksplisitt er angitt, at alle rasjonale funksjoner $f = \frac{P}{Q}$, der P og Q er polynom, har grad to eller høyere. Graden i denne sammenheng er defineret som

$$d_f = \deg f = \max(\deg P, \deg Q)$$

og det antas kjent at enhver rasjonal funksjon er $d_f : 1$ på $\hat{\mathbb{C}}$. Videre definerer vi

$$\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ ganger}} = f^{\circ n}$$

og med notasjonen $O^+(z_0)$ skal vi mene banen til z_0 under iterasjon med f:

$$O^+(z_0) = \{f^{\circ n}(z_0)\}_{n=0}^{\infty}$$

Analogt definerer vi mengden av alle inverse bilder til et punkt ved

$$O^-(z_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{-1})^{\circ n}(z_0)$$

Bemerk at $O^-(z_0)$ typisk vil være et tre. Unionen $O^+(z_0) \cup O^-(z_0)$ skriver vi som $GO(z_0)$, der GO står får "Grand Orbit".

Videre skal vi kalle den deriverte $f'(z_0)$ i et fikspunkt z_0 for *multiplikatoren* til z_0, og med *kritiske* punkt skal vi mene punkt der $f'(z) = 0$. I tillegg sier vi at z_0 er *periodisk* dersom z_0 er fikspunkt for en $f^{\circ n}$, og *preperiodisk* dersom det eksisterer m, n slik at $f^{\circ m}(z_0)$ er fikspunkt for $f^{\circ n}$. Notasjonen vi anvender er i all hovedsak hentet fra [Milnor] og [Steinmetz].

2.1 Grunnleggende definisjoner og egenskaper

Holomorf dynamikk er studiet av diskrete dynamiske systemer som oppstår ved iterasjon av rasjonale funksjoner på riemannsfæren. Med andre ord ser vi på den asymptotiske oppførselen til følgene

$$z_0, f(z_0), f^{\circ 2}(z_0), \ldots \quad z_0 \in \hat{\mathbb{C}} \tag{2.1}$$

der $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ varierer. Disse dynamiske systemene utviser nesten alltid en svært komplisert oppførsel, noe som i en viss utstrekning skyldes to aspekter ved høyereordens itererte $f^{\circ n}$ som motarbeider hverandre. For det første ser vi at siden enhver rasjonal funksjon f overdekker $\hat{\mathbb{C}}$ presis d_f ganger, vil

$$\int_{\hat{\mathbb{C}}} |(f^{\circ n})'| d\mu = d_f^n$$

Der μ er det normaliserte flatemålet på $\hat{\mathbb{C}}$. Med andre ord vil høyere ordens itererte $f^{\circ n}$ i gjennomsnitt være ekspanderende over $\hat{\mathbb{C}}$. Motsatt vil $f^{\circ n}$ ha $2d_f^n + 2$ kritiske punkt der $f^{\circ n}$ er sterkt kontraherende. Det er spenningen mellom gjennomsnittlig ekspansjon og svært mange kritiske punkter, som gir opphav til den kaotiske oppførselen en ofte registrerer i rasjonal iterasjonsteori, [McMullen, s.1].

Teorien har sitt utspring i arbeidet til de to franskmennene Gaston Julia og Pierre Fatou, der sistnevnte tilskrives æren for følgende oppdeling av Riemannsfæren i en stabil og en kaotisk del.

2.1.1 Definisjon. *Fatoumengden $\mathcal{F}_f$ for en rasjonal funksjon f defineres som mengden av punkter $z \in \hat{\mathbb{C}}$, der familien $\{f^{\circ n}\}_{n=}^{\infty}$ er normal i en åpen omegn rundt z. Komplementet til $\mathcal{F}_f$ kalles juliamengden og skrives $\mathcal{J}_f$.*

Per definisjon er fatoumengden den største åpne mengde der familien av itererte $\{f^{\circ n}\}$ er normal, og følgelig er juliamengden en lukket og kompakt delmengde av $\hat{\mathbb{C}}$. Oppdelingen blir mer intuitiv, dersom vi noterer oss, at ved Arzelá-Ascolis setning er normaliteten av familien $\{f^{\circ n}\}$ på $\mathcal{F}_f$ ekvivalent med ekvikontinuitet av $\{f^{\circ n}\}$ i ethvert punkt i $\mathcal{F}_f$. Dette betyr, at bare vi velger punkter $z, w \in \mathcal{F}_f$ tilstrekkelig nært hverandre, vil banene $O^+(z)$ og $O^+(w)$ følge hverandre, så tett vi måtte ønske. Med andre ord er ikke banen $O^+(z)$ sensitiv med hensyn på små variasjoner i startpunktet $z \in \mathcal{F}_f$. Følgelig er fatoumengden også kjent som den *stabile* mengden og komponentene av $\mathcal{F}_f$ kalles *stabile komponenter*.

De viktigste elementære egenskapene til $\mathcal{F}_f$ og $\mathcal{J}_f$ er beskrevet i følgende setning:

2.1.2 Setning. *[Steinmetz, kap.2] Dersom $d_f \geq 2$ da gjelder*

1. $\mathcal{J}_f \neq \emptyset$
2. *$\mathcal{J}_f$ er en perfekt ikke tellbar mengde*
3. $f(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f = f^{-1}(\mathcal{F}_f)$ *og* $f(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_f = f^{-1}(\mathcal{J}_f)$
4. $f \circ g = g \circ f \Rightarrow \mathcal{F}_f = \mathcal{F}_g$ *og spesielt* $\mathcal{F}_{f^{\circ n}} = \mathcal{F}_f$
5. *$\mathcal{J}_f$ er inneholdt i tillukkingen av mengden av periodiske punkt for f.*

Hva angår størrelsen av $\mathcal{J}_f$ så forekommer tilfellet at $\mathcal{J}_f = \hat{\mathbb{C}}$, og første eksempel på dette fenomen ble gitt av Lattès i 1918 med funksjonen $\frac{z^2+1}{4z(z^2-1)}$. Omvendt er J_f som oftest *liten* i den forstand, at dersom $U \subset \mathcal{J}_f$ er åpen, da er ikke $\{f^{\circ n}\}$ pr. definisjon av $\mathcal{J}_f$ normal på U, og ved Montels setning dekker alle de fremoveritererte bilder av U hele riemannsfæren på nær høyst to punkter $\{z_1, z_2\}$. Men $\mathcal{J}_f$ er lukket og fremover invariant, så

$$\hat{\mathbb{C}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{\circ n}(U) \cup \{z_1, z_2\} \subset \overline{\mathcal{J}_f} = \mathcal{J}_f$$

Det vil si: Dersom $\mathcal{J}_f \neq \hat{\mathbb{C}}$ da er Juliamengden intetsteds tett, eller med symboler

$$\operatorname{int} \mathcal{J}_f = \emptyset$$

2.2 Konjugering

Et viktig begrep i holomorf dynamikk er *konjugering*. Mer presist skal vi betrakte to rasjonale funksjoner f og g som dynamisk ekvivalente hvis det eksisterer en Möbiustransformasjon $M : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ slik at

$$M \circ f \circ M^{-1} = g$$

Dersom en slik M eksisterer, skriver vi $f \sim g$. De viktigste egenskapene til $\sim$ er, at hvis $M \circ f \circ M^{-1} = g$, da er:

- $d_f = d_g$
- $f^{\circ n} \sim g^{\circ n}$
- $\mathcal{J}_g = M(\mathcal{J}_f)$ og $\mathcal{F}_g = M(\mathcal{F}_f)$.
- f har fikspunkt i z_0 hvis og bare hvis g har fikspunkt i $M(z_0)$, og $f'(z_0) = g'(M(z_0))$.

Generellt skal vi ikke skille mellom ekvivalente funksjoner, og vi skal ofte benytte, at vi kan velge en representant for ekvivalensklassen, som simplifiserer det aktuelle problem. For eksempel hvis z_0 er fikspunkt for f, kan vi, uten å miste generalitet, anta at $z_0 = 0$ siden

$$g = (z - z_0) \circ f \circ (z + z_0)$$

har fikspunkt i 0^*.

2.2.1 Eksempel.

Som eksempel på begrepene i denne og foregående seksjon tar vi her klassen av kvadratiske polynom. Som sagt ser vi på ekvivalensklasser av rasjonale avbildninger $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ der $f \sim g$ hvis og bare hvis der eksisterer en möbiusavbildning som konjugerer f til g. Klassen av kvadratiske polynom oppfører seg

*Dersom $z_0 = \infty$ konjugerer vi med $\frac{1}{z}$.

i denne henseende spesielt pent, da hver ekvivalensklasse har en entydig representant av formen $z \mapsto z^2 + c$.

Gitt et vilkårlig kvadratisk polynom $z \mapsto Az^2 + Bx + C$ kan vi konjugere med avbildningen $\frac{1}{A}(z - \frac{B}{2})$, og får ved en enkel utregning at

$$Az^2 + Bz + C \sim z^2 + c$$

der $c \in \mathbb{C}$. Mengden av ekvivalens-klasser står i 1-1 korrespondanse med $\mathbb{C}$, for dersom $z^2 + c_1 \sim z^2 + c_2$ via den affine avbildningen $\alpha z + \beta$ da er:

$$(\frac{1}{\alpha}z - \frac{\beta}{\alpha}) \circ (z^2 + c_1) \circ (\alpha z + \beta) = z^2 + c_2$$
$$\frac{1}{\alpha}(\alpha^2 z^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta z) + c_1 - \frac{\beta}{\alpha} = z^2 + c_2$$

Ved sammenligning av koeffisienter er da $\alpha = 1$ og $\beta = 0$ eller med andre ord: $c_1 = c_2$.

Altså representerer ulike c-verdier ulike ekvivalensklasser. Velger vi $c = 0$ ser vi at $\mathcal{J}_{z^2} \subset \partial\mathbb{D}$, siden

$$z \mapsto z^2 \mapsto z^4 \mapsto z^8 \mapsto \dots$$

konvergerer lokalt uniformt mot 0 på $\mathbb{D}$ og lokalt uniformt mot ∞ når $\{|z| > 1\}$. Dersom U er en åpen omegn til et punkt på enhetssirkelen, inneholder U både punkt som konvergerer mot 0 og punkt som konvergerer mot ∞. Derfor kan ikke de itererte av z^2 være normale i U, og dermed er $\partial\mathbb{D} = \mathcal{J}_{z^2}$. For nesten alle andre c er bildet atskillig mer komplisert, og vi må ty til andre metoder for å finne juliamengden. Derimot kan vi relativt enkelt komme med en del kvalitativ informasjon om juliamengdene til $P_c(z) = z^2 + c$. Først og fremst avbilder, som vi snart skal se i seksjon 2.3, P_c hver enkelt komponent i fatoumengden *på* en annen komponent. Siden $P_c(\infty) = \infty = P_c^{-1}(\infty)$ og $\infty \in \mathcal{F}_{P_c}$ betyr dette at komponenten $A(\infty)$, som inneholder ∞ er *fullstendig invariant*†. Dette betyr igjen, at ingen åpen mengde U kan snitte $\mathcal{J}_{P_c}$ uten i tillegg å snitte $A(\infty)$. For hvis $U \cap \mathcal{J}_{P_c} \neq \emptyset$ gir Montel at $\text{card}(O^+(U)) \leq 2$. Med andre ord må en annen komponent av $\mathcal{F}_{p_c}$ avbildes på $A(\infty)$, og dette motstrider at $A(\infty)$ er fullstendig invariant.

Derfor er $\mathcal{J}_{P_c} \subset \partial A(\infty)$ og dermed opplagt $\mathcal{J}_{P_c} = \partial A(\infty)$. Ytterligere ser vi, at siden tillukningen av et sammenhengende område er sammenhengende, er $\mathcal{J}_{P_c} \cup A(\infty)$ sammenhengengende. Men da er alle andre komponenter av fatoumengden enkeltsammenhengende. Vi bemerker dessuten, at disse kvalitative betraktninger holder for ethvert polynom av grad større enn eller lik to.

†En mengde E er fullstendig invariant med hensyn på en funksjon f hvis $f^{-1}(E) = E = f(E)$

Identiteten $A(\infty) = \mathcal{J}_{P_c}$ gir oss dessuten en måte å generere bilder av den *innfylte juliamengden* K_{P_c} til polynomene P_c.

$$K_{P_c} = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : O^+(z) \subset K, \text{ for en kompakt } K \subset \mathbb{C}\}$$

Som vi skal se i kapittel 5 er alle baner $O^+(z)$ ubegrensete i $A(\infty)$, og vi kan derfor danne oss ett billede av K_{P_c}, hvis vi klarer finne de punkter z, for hvilke $O^+(z)$ er begrenset. Rent teknisk tar vi et rutenett av punkter i planet og itererer P_c i hvert punkt N ganger. Heretter settes en prikk i hvert punkt farget etter størrelsen til $e^{-|P_c^{\circ N}|}$ i det gitte punktet. Siden alle punkter i $A(\infty)$ konvergerer mot ∞ under iterasjon med P_c, betyr dette at for store N[‡] vil punktene i $A(\infty)$ bli farget hvit, hvorimot alle andre fatoukomponenter vil få en annen farge, varierende med dynamikken som regjerer i den gitte komponent (mer om dette senere). På det endelige bildet vil Juliamengden fremstå som randen til de fargete områdene, se figur 2.1.

2.3 Stabile komponenter

I denne oppgave er vi først og fremst interessert i den globale strukturen av fatoumengden, og i den forbindelse er særlig punkt 3 i setning 2.1.2 ovenfor av betydning. Mer presist ser vi, at invariansen av fatoumengden med hensyn på f garanterer, at enhver stabil komponent U, avbildes av f over i en annen stabil komponent V. Men ∂U er indeholdt i Juliamengden som også er invariant med hensyn på f og sammen med kontinuitet av f betyr dette at ∂U avbildes på ∂V. Med andre ord er alle mengder i følgen

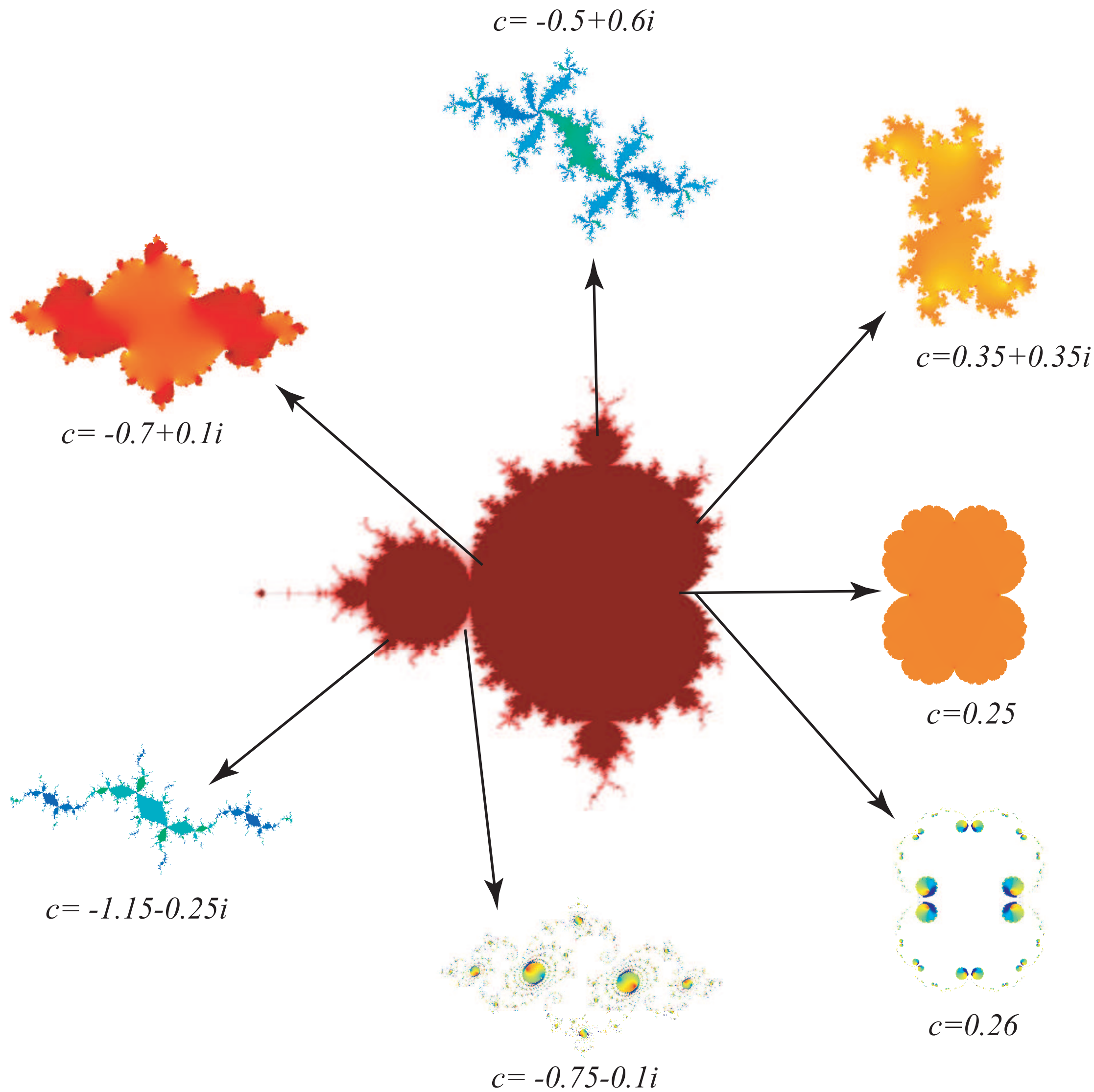
$$U, f(U), f^{\circ 2}(U), \ldots \tag{2.2}$$

komponenter av Fatoumengden [Steinmetz, s. 39]. Et naturlig spørsmål i den forbindelse er selvfølgelig den asymptotiske oppførselen til følgen 2.2: Enten er alle mengder i følgen disjunkte, og da sier vi U er *vandrende*, eller så faller følgen inn i en syklus etter et endelig antall skritt. Det er lett å konstruere eksempler[§] på periodiske komponenter, hvorimot eksistens eller ikke-eksistens av vandrende komponenter er mer vrient. Fatou betraktet dette problemet, men var ikke i stand til å finne noe svar. Han fremsatte derfor formodningen, at vandrende komponeneter ikke eksisterer for rasjonale funksjoner.

Det skulle gå over 60 år, og en rekke delvise resultat, før Dennis Sullivan i 1982 endelig klarte å bevise at formodingen til Fatou var rett. Beviset til Sullivan, som hviler tungt på teorien for kvasikonforme avbildninger og i særdeleshet den målbare avbildningssatsen, er berømt ikke bare for viktigheten av Fatous formoding, men også fordi det markerer begynnelsen av den moderne teorien for komplekse dynamiske systemer.

[‡]Til bildene i denne oppgaven er brukt $20 < N < 2000$ og gitter på typisk 500 ganger 500 punkter. Det vil si på det meste 50.000.000 iterasjoner på bilde.

[§]For eksempel $z \mapsto z^2$



Figur 2.1: *Polynomene P_c har alle to kritiske punkt; ett i* 0 *og ett i* ∞. *Punktet i* ∞ *er fiksert men* 0 *kan bevege seg under iterasjon. Det viser seg at dynamikken til* P_c *i høy grad er kontrollert av oppførselen til* 0. *Figuren i midten er mengden av vedier* c *for hvilke* $O^+(0)$ *er begrenset under iterasjon. Denne mengden ligger således i parameterplanet for familien* $P_c|_{c\in\mathbb{C}}$, *og er bedre kjent som Mandelbrot-mengden* $\mathcal{M}$. *Juliamengdene rundt om* $\mathcal{M}$ *representerer ulike parameterverdier* c. *Som figuren indikerer er juliamengdene sammenhengende når* $c \in \mathcal{M}$, *og eksploderer og blir fullstendig usammenhengende når* $c \notin \mathcal{M}$. *Som argumentert i eksempel 7 representerer alle parameterverdier ulike ekvivalensklasser.*

Siden dengang har området mottatt stor oppmerksomhet, og det er i dag umulig å snakke om temaet uten å komme inn på kvasikonforme avbildninger.

Antar vi for ett øyeblikk riktigheten av Fatous formodning, ser vi, at enhver komponent $U \subset \mathcal{F}_f$ enten er periodisk eller preperiodisk. Fra setning 2.1.2 har vi dessuten at $\mathcal{F}_f = \mathcal{F}_{f^{\circ n}}$ for alle n, og derfor fikseres enhver periodisk komponent av en eller annen $f^{\circ n}$. Sett i dette lyset vil en klassifisering av alle komponenter med $f(U) = U$ i en viss forstand være komplett. Det er en slik klassifisering som er hovedmålet for denne oppgaven. Med klassifisering skal vi mene følgende:

2.3.1 Definisjon. *Anta U er en komponent i fatoumengden med $f(U) = U$ der følgen $\{f^{\circ n}\}$ konvergerer mot et fikspunkt ξ med multiplikator λ. Da definerer vi:*

1. *Dersom $\xi \in U$ og $\lambda = 0$ kalles U et* böttcherområde.
2. *Dersom $\xi \in U$ og $0 < |\lambda| < 1$ kalles U et* schröderområde.
3. *Dersom $\xi \in \partial U$ og $\lambda = 1$ for en $p \in \mathbb{N}$ kalles U et* leauområde.

Dersom alle grensefunksjoner for delfølger av $\{f^{\circ n}\}$ er ikke-konstante på U kalles U et rotasjonsområde og

4. *U kalles en* siegeldisk, *dersom U er konformt konjugert til en irrasjonal*[¶] *rotasjon av enhetsdisken.*
5. *U kalles en* hermanring, *dersom U er konformt konjugert til en irrasjonal rotasjon av en annulus.*

Det bemerkelsesverdige er at dette er de *eneste* muligheter, og alle muligheter forekommer:

2.3.2 Setning. *[FATOU-CREMER-SULLIVAN-SIEGEL-HERMAN-ARNOL'D] Enhver fiksert komponent U av $\mathcal{F}_f$ er enten et böttcherområde, et schröderområde, et leauområde, en siegeldisk eller en hermanring, og alle tilfelleforekommer.*

Setningen har på mange måter en litt merkelig historie i den forstand, at Fatou i 1919 viste at dersom $f^{\circ n}$ konvergerer mot en konstant på en fikskomponent U, da er U enten et böttcher, schröder eller leauområde. Tilfellene, der $f^{\circ n}$ har ikke-konstant grense på U, ble bevist av Cremer i 1932 [Steinmetz, s. 54]. Cremer kunne dog ikke bevise *eksistensen* av rotasjonsområder, og han trodde angivelig at siegeldisker og hermanringer ikke eksisterte. Grunnen til dette var, at han klarte å bevise, at for en delmengde $\mathcal{C}$ av de irrasjonale tallene, tett i $(0, 1)$, kan ingen funksjon f besitte en Siegeldisk med rotasjonstall $\theta \in \mathcal{C}$.

Setningen var på denne måten allerede vist i 1932, men med den haken at man ikke visste hvorvidt vandrende komponenter eksisterte, eller hvorvidt

[¶] Dersom $g(z) = e^{2\pi i\theta}z$ kalles θ for rotasjonstallet til g. Dersom $\theta \in \mathbb{Q}$ kalles rotasjonen g rasjonal, , og dersom $\theta \notin \mathbb{Q}$ kalles rotasjonen irrasjonal.

rotasjonsområder utgjorde en reell mulighet. Spørsmålet om vandrende komponeneter måtte som sagt vente til 1982 for å få en løsning.

Hva angår siegeldisker, viste allerede Cremer, at eksistensen av disse bare avhenger av de algebraiske egenskapene til multiplikatoren λ i et gitt fikspunkt. Det store gjennombruddet i positiv retning kom i 1942 da C.F. Siegel beviste at for nesten alle $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, vil en rasjonal funksjon med fikspunkt z_0 og multiplikator λ, ha en siegeldisk sentrert i z_0. Siegel beviste, at det er tilstrekkelig, hvis $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ oppfyller følgende diofantiske betingelse:

Det eksisterer reelle tall $\delta > 0$ og m slik at for alle $p, q \in \mathbb{N}$ er

$$|\theta - \frac{p}{q}| \geq \frac{\delta}{q^{2+m}}$$

Denne betingelsen oppfyldes av nesten alle $\theta \in (0, 1)$. For å se dette negerer vi betingelsen, og får: Det eksisterer $p, q \in \mathbb{N}$ slik at for alle $\delta, m > 0$ er

$$|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{\delta}{q^{m+2}}$$

Velger vi en positiv $m > 1$, og setter $\delta = \frac{1}{m}$, gir dette

$$|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{mq^{m+2}} < \frac{1}{q} \tag{2.3}$$

Men da er $-1 \leq p \leq q + 1$ og lebesguemålet til de $\theta \in (0, 1)$ som oppfylder 2.3 må være mindre enn

$$(q + 1)\frac{2}{mq^{m+2}} < \frac{3}{mq^{m+1}}$$

Lar vi nå $m \to \infty$, ser vi at mengden av θ, som *ikke* oppfyller den diofantiske betingelsen har mål null[‖].

Siegels resultater er siden blitt forbedret av blandt andre Bryuno, Rüsmann og Yoccoz. For ytterligere informasjon rundt disse resultater se [Milnor, kap. 11] eller sist i kapittel 6 i denne oppgaven.

Vi skal som sagt i denne teksten bevise eksistensen av siegeldisker, men vi skal velge en noe annen fremgangsmåte enn Siegels eksplisitte bevis for mulige rotasjonstall. Vi skal i stedet følge ett ikke-konstruktivt bevis for at klassen av kvadratiske polynom $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ har en siegeldisk for nesten alle λ med $|\lambda| = 1$. Beviset, som ble funnet av Yoccoz i 1986, er å regne som elementært i forhold til alle tidligere bevis for eksistens av siegeldisker. Med hensyn på hermanringer skal vi også her føre et ikke-konstruktivt bevis. Beviset i dette tilfellet baserer seg, akkurat som tilfellet er for Sullivans bevis for Fatous formodning, på kvasikonforme avbildninger. Vårt første mål skal derfor være å innføre den nødvendige teori for disse.

[‖] Dette er oppgavene 4.1.3 og 4.1.4 i [Steinmetz].

Kapittel 3

Kvasikonforme avbildinger

I dette kapitlet introduserer vi klassen av kvasikonforme avbildinger i det komplekse planet. Disse har i løpet av de seneste 25 år utviket seg til et uunnværlig redskap i teorien for komplekse dynamiske systemer.

3.1 Metrisk definisjon

Gitt åpne mengder $U, V \subset \mathbb{C}$ og en retningsbevarende homeomorfi $f : U \to V$ sier vi, at f er konform på U dersom grensen

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

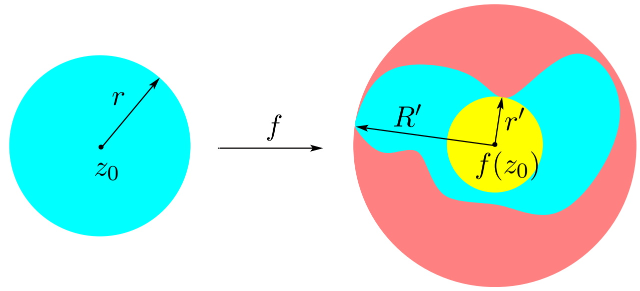
eksisterer for alle $z \in U$. Det er relativt opplagt ut i fra denne definisjonen, at enhver konform avbilding bevarer relative avstander på infinitesimalt nivå . En *kvasikonform* avbilding defineres som en retningsbevarende homeomorfi, som forandrer relative avstander på infinitesimalt nivå med høyst en begrenset faktor. Følgende definisjon kalles den *metriske* definisjonen av kvasikonform avbildinger, og har en klar geometrisk tolkning; se figur 3.1

3.1.1 Definisjon. *La $U, V \subset \mathbb{C}$ og $f : U \to V$ være en retningsbevarende homeomorfi. Da kalles f en kvasikonform avbilding hvis det eksisterer en konstant S slik at*

$$H_f(z_0) = \limsup_{r \to 0^+} \frac{\max_{|z-z_0|=r} |f(z) - f(z_0)|}{\min_{|z-z_0|=r} |f(z) - f(z_0)|} < S \quad , \forall z_0 \in U$$

Hvis $K = \inf\{K' : H_f(z) \leq K' \text{ n.o.}\}$ kalles f for K-kvasikonform.

Vanligvis kreves det ikke at $H_f(z)$ er uniformt begrenset, men derimot bare at $H_f(z)$ er endelig i ethvert punkt. Definisjonene er imidlertid ekvivalente ifølge et resultat av Mori [LV, s.106], som sier at for enhver K-kvasikonform avbildning f er $H_f(z)$ er uniformt begrenset av en konstant C, som bare avhenger av K. Vi velger den umiddelbart sterkere definisjonen fordi det forenkler beviset for 3.1.3 vesentlig.



Figur 3.1: $H_f(z_0) = \limsup_{r\to 0^+} \frac{R'}{r'}$

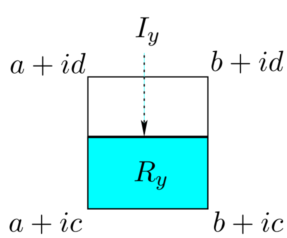
Den metriske definisjonen er bare én blant en rekke ekvivalente måter å definere kvasikonforme avbildninger på, men det er kanskje den letteste å forstå rent intuitivt. Ulempen er selvfølgelig, at den *a priori* gir null informasjon om de analytiske egenskapene til f. Faktisk kan det umiddelbart virke som om, definisjon 3.1.1 er utilstrekkelig til å gi *noen* informasjon om regulariteten til f. Dette er selvsagt ikke tilfellet, og vi skal i det følgende bruke en del krefter på å vise dette.

3.1.2 Definisjon. *En funksjon $\phi : U \to V$ kalles absolutt kontinuerlig på linjer (ACL) dersom restriksjonen av ϕ, til nesten alle horisontale og nesten alle vertikale linjer i etthvert rektangel $R \subset U$, er absolutt kontinuerlig. in*

3.1.3 Setning. *(GEHRING) Enhver kvasikonform avbilding $f : U \to V$ er ACL.*

Bevis. Vi presenterer her et lettere modifiseret bevis fra [LV, s. 178-180]. Avslutningen på beviset er forenklet en del grunnet vår sterkere, men ekvivalente, definisjon av kvasikonformitet.

La $R = \{x + iy : a < x < b, c < y < d\}$ være et åpent rektangel med $\bar{R} \subset U$ og la I_y være det horisontale linjesegmentet i R defineret ved $I_y = R \cap \{z : \mathrm{Im} z = y\}$. La videre R_y være delen av R som ligger under I_y; se figur 3.2.



Figur 3.2: *Definisjonen av I_y og R_y.*

Vi definerer $g : (c, d) \to \mathbb{R}_+$ ved $g(y) = \mathcal{A}(f(R_y))$ der $\mathcal{A}$ er todimensionalt lebesguemål. Da er $g(y)$ en monotont voksende funksjon og har derfor ikkenegativ derivert i nesten alle punkt $y \in (c, d)$. Det er derfor tilstrekkelig for vårt formål å fiksere en y der $g'(y)$ eksisterer og bevise at restriksjonen av f til denne I_y er absolutt kontinuerlig.

La derfor fra nå av en y der $g'(y)$ eksisterer være fiksert.

f er absolutt kontinuerlig på I_y hvis og bare hvis tilbaketrekningen, av det en-dimensjonale hausdorffmålet μ er absolutt kontinuerlig m.h.p. lebesguemålet m på I_y. Eller mer nøyaktig; for enhver $\epsilon > 0$ skal det finnes en $\delta > 0$ slik, at dersom $B \subset I_y$ er en borelmengde med $m\, B < \delta$, da er $\mu\, f(B) < \epsilon$ [LV, s. 117]. Helt konkret skal vi for enhver kompakt $F \subset I_y$ vise, at f opfyller et estimat av typen,

$$\mu(f(F))^2 \leq C\, mF$$

der C ikke avhenger av F. Heretter utnyttes indre regularitet av lebesguemålet, til å vise at det samme estimatet holder for alle borelmengder $B \subset I_y$.

La derfor $F \subset I_y$ være kompakt, og definer funkjonene

$$l_f(z, r) = \min_{|w-z|=r} |f(w) - f(z)|$$

$$L_f(z, r) = \max_{|w-z|=r} |f(w) - f(z)|$$

Dermed gjelder for alle $z \in \mathbb{C}$:

$$H_f(z) = \lim_{r \to 0^+} \sup \frac{L_f(z, r)}{l_f(z, r)} \leq S < \infty$$

For alle N større enn $\frac{1}{\mathrm{dist}(F, \partial R)}$, som er endelig, definerer vi mengdene F_N ved,

$$F_N = \left\{ z \in F : r \leq \frac{1}{N} \;\Rightarrow\; \frac{L_f(z, r)}{l_f(z, r)} \leq S + 1 \right\}$$

Siden $H_f(z) \leq S$ på I_y er F_N fra et visst trinn en voksende følge av ikke-tomme kompakte mengder. Derfor eksisterer det for alle F_N en endelig overdekning med disker $D_{\frac{1}{N}}(z_j)$, der $j = 1, 2, \ldots, M_N$ og $z_j \in F_N$. I tillegg velges denne overdekning slik at ingen punkt $z \in F_N$ er inneholdt i mer enn to av diskene $D_{\frac{1}{N}}(z_j)$; se figur 3.3.

3.1.4 Lemma. *La F_N og $D_{\frac{1}{N}}(z_j)$ være som beskrevet over og sett*

$$D_N = \bigcup_{j=1}^{M_N} D_{\frac{1}{N}}(z_j)$$

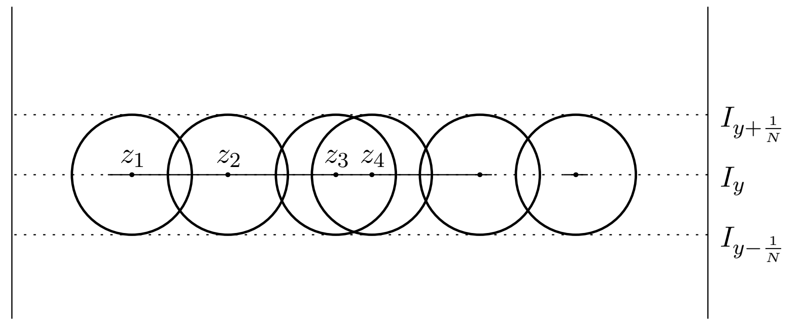
da gjelder

1. $\lim_{N \to \infty} \mu(f(F_N)) = \mu(f(F))$

2. $\lim_{N \to \infty} mF_N = mF$

3. $m(I_y \cap D_N) \geq \frac{M_N}{N}$

4. $\lim_{N\to\infty} m(I_y \cap D_N) = mF$



Figur 3.3: *Overdekning av F_N med diskene $D_{\frac{1}{N}}(z_j)$*

Bevis. 1+2) Dersom $z \in F \setminus \bigcup F_N$ da er $H_f(z) \geq S+1$ hvilket per antakelse er umulig. Derfor er $\bigcup F_N = F$ og $\bigcup f(F_N) = f(F)$. Kontinuitet nedenfra av målene m og μ gir da øyeblikkelig det ønskede

$$\lim_{N\to\infty} mF_N = mF \quad \text{og} \quad \lim_{N\to\infty} \mu(f(F_N)) = \mu(f(F))$$

3) Siden $m(D_{\frac{1}{N}}(z_j) \cap I_y) = \frac{2}{N}$ og diskene $D_{\frac{1}{N}}(z_j)$ overdekker hvert punkt i $D_N \cap I_y$ høyst to ganger, må

$$2m(D_N \cap I_y) \geq M_N \frac{2}{N} \;\Rightarrow\; m(D_N \cap I_y) \geq \frac{M_N}{N}$$

4) Dersom U er en åpen mengde i I_y med $F \subset U$, vil $D_N \cap I_y \subset U$ for store nok N, og derfor har vi:

$$\lim_{N\to\infty} m(D_N \cap I_y) \leq \inf_{F\subset U} mU = mF$$

Omvendt er, $mF_N \leq m(D_N \cap I_y)$ Så ved å la $N \to \infty$, og å bruke konklusjonen fra punkt *2* får vi:

$$mF \leq \lim_{N\to\infty} m(D_N \cap I_y)$$

Vi konkluderer:

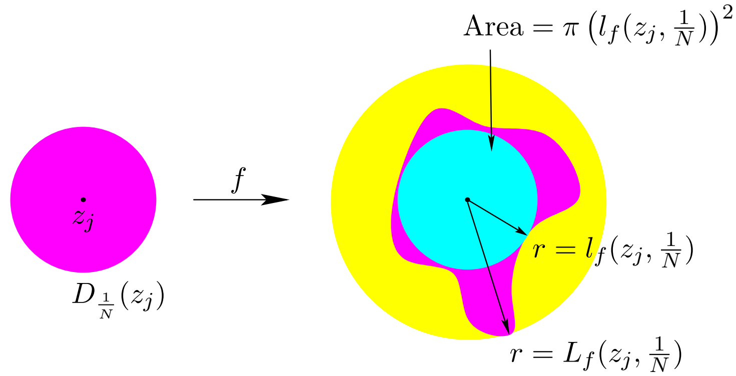
$$\lim_{N\to\infty} m(D_N \cap I_y) = mF$$

□

Med lemma 3.1.4 for hånden er vi nå klar til å starte det egentlige beviset for setning 3.1.3. Vi ser på bildene av diskene $D_{\frac{1}{N}}(z_j)$ under f:

Siden ingen z ligger i mer enn to av diskene $D_{\frac{1}{N}}(z_j)$, må:

$$\mathcal{A}f(D_N) \geq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M_N} \pi l_f(z_j, \frac{1}{N})^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{M_N} \left(l_f(z_j, \frac{1}{N})\right)^2$$



Figur 3.4: *Bildet av* $D_{\frac{1}{N}}(z_j)$ *under* f.

se også figur 3.4. Dessuten observerer vi at D_N er inneholdt i stripen mellom $I_{y-\frac{1}{N}}$ og $I_{y+\frac{1}{N}}$. Vi sammenfatter disse observasjonene i:

$$g(y+\frac{1}{N}) - g(y-\frac{1}{N}) \geq \mathcal{A}f(D_N) \geq \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^{M_N} \left(l_f(z_j, \frac{1}{N})\right)^2$$

Ved definisjonen av F_N gir dette følgende estimat:

$$g(y+\frac{1}{N}) - g(y-\frac{1}{N}) \geq \frac{\pi}{2(S+1)^2} \sum_{j=1}^{M_N} \left(L_f(z_j, \frac{1}{N})\right)^2$$

$$g(y+\frac{1}{N}) - g(y-\frac{1}{N}) \geq \frac{\pi}{2M_N(S+1)^2} \sum_{j=1}^{M_N} \left(L_f(z_j, \frac{1}{N})\right)^2 \sum_{j=1}^{M_N} 1^2$$

$$g(y+\frac{1}{N}) - g(y-\frac{1}{N}) \geq \frac{\pi}{2M_N(S+1)^2} \left(\sum_{j=1}^{M_N} L_f(z_j, \frac{1}{N})\right)^2$$

Fra lemma 3.1.4 fås at $m(I_y \cap D_N) \geq \frac{M_N}{N}$ og derfor

$$g(y+\frac{1}{N}) - g(y-\frac{1}{N}) \geq \frac{\pi}{2Nm(I_y \cap D_N)(S+1)^2} \left(\sum_{j=1}^{M_N} L_f(z_j, \frac{1}{N})\right)^2$$

$$m(I_y \cap D_N) \frac{g(y+\frac{1}{N}) - g(y-\frac{1}{N})}{2\frac{1}{N}} \geq \frac{\pi}{4(S+1)^2} \left(\sum_{j=1}^{M_N} L_f(z_j, \frac{1}{N})\right)^2 \qquad (3.1)$$

Venstresiden av dette uttrykket har vi god kontroll på siden g er deriverbar i y. Når $N \to \infty$ gir lemma 3.1.4 oss at $m(I_y \cap D_N) \to mF$, og vi ser at:

$$m(I_y \cap D_N) \frac{g(y+\frac{1}{N}) - g(y-\frac{1}{N})}{2\frac{1}{N}} \to mF\ g'(y)$$

Hva angår høyresiden er tingene litt mere kompliserte. Hausdorffmålet til $f(F_N)$ er defineret som [Folland, kap. 11]:

$$\mu f(F_N) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam} U_i : U_i \text{ er åpen}, \ f(F_N) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ og } \operatorname{diam} U_i < \delta \right\}$$

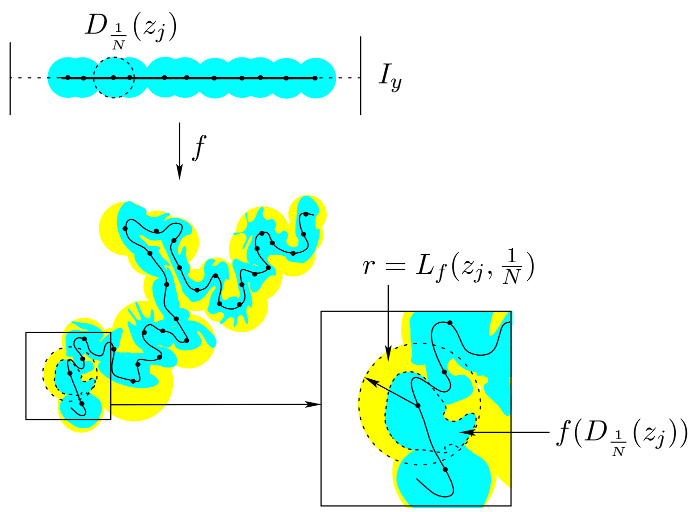
Siden f er uniformt kontinuerlig på $\overline{R}$, er:

$$\lim_{N\to\infty} \max_j L_f(z_j, \frac{1}{N}) = 0$$

og dette gir oss for ethvert naturlig tall N':

$$\mu f(F_{N'}) = \liminf_{N\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam} U_i : U_i \text{ er åpen}, \ f(F_{N'}) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \ \text{ og } \operatorname{diam} U_i < \max_j L_f(z_j, \frac{1}{N}) \right\}$$

Fikserer vi nå en N' og lar $N \geq N'$ slik at $F_{N'} \subset F_N$. Da er $f(F_{N'}) \subset f(F_N)$,



Figur 3.5: *$f(D_N)$ og dermed $f(F_N)$ er inneholdt i foreningen av åpne disker med sentrum i punktene $f(z_j)$ og radier $L_f(z_j, \frac{1}{N})$*

og $f(F_{N'})$ er inneholdt i foreningen av åpne disker med sentrum i punktene $f(z_j)$ og radier $L_f(z_j, \frac{1}{N})$ der $1 \leq j \leq M_N$; se figur 3.5. Men da er disse diskene bare én spesiell åpen overdekning av $f(F_{N'})$ og vi må ha:

$$\mu(f(F_{N'})) \leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{M_N} 2L_f(z_j, \frac{1}{N})$$

Dette er uavhengig av N' så vi kan la $N' \to \infty$ og lemma 3.1.4 gir

$$\mu(f(F)) \leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{M_N} 2L_f(z_j, \frac{1}{N})$$

Anvender vi dette til å estimere høyresiden av ligning (3.1) når $N \to \infty$, får vi:

$$\begin{aligned}\liminf_{N\to\infty} \frac{\pi}{4(S+1)^2}\left(\sum_{j=1}^{M_N} L_f(z_j, \frac{1}{N})\right)^2 &= \frac{\pi}{16(S+1)^2}\left(\liminf_{N\to\infty} 2\sum_{j=1}^{M_N} L_f(z_j, \frac{1}{N})\right)^2 \\ &\geq \frac{\pi}{16(S+1)^2}\mu(f(F))^2\end{aligned}$$

Kombinerer vi estimatene for høyre og venstresiden av ligning (3.1) ender vi opp med

$$mFg'(y) \geq \frac{\pi}{16(S+1)^2}\mu(f(F))^2 \tag{3.2}$$

Dette estimatet viser, at dersom en kompakt mengde F velges liten nok, kan $\mu(f(F))$ gjøres så liten vi enn måtte ønske. Med andre ord trenger vi bare å utvide dette resultatet til å gjelde for alle borelmengder.

Siden f er en homeomorfi, er avbildingen $B \mapsto f(B)$ en bijeksjon mellom σ-algebraene $\mathcal{B}_{I_y}$ og $\mathcal{B}_{f(I_y)}$. Eller sagt på en annen måte: $B \subset I_y$ er en borelmengde, hvis og bare hvis $f(B) \subset f(I_y)$ er en borelmengde. Uansett, gitt en Borel-mengde $B \subset I_y$ kan vi approximere $f(B)$ med en stigende* følge av kompakte delmengder $F_k \subset f(B)$ slik at

$$\lim \mu F_k = \mu(f(B))$$

De inverse bildene $f^{-1}(F_k)$ utgjør likeledes en stigende følge av kompakte delmengder inneholdt i B, og fra estimatet 3.2 får vi dermed:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{16(S+1)^2}\mu(f(B))^2 &= \lim_{k\to\infty} \frac{\pi}{16(S+1)^2}\mu F_k^2 \\ &\leq \lim_{k\to\infty} A'(y)m(f^{-1}(F_k)) \\ &\leq A'(y)mB\end{aligned}$$

og vi er ferdig. □

At kvasikonforme avbildinger er ACL, har en rekke umiddelbare konsekvenser. Først og fremst følger det direkte at de partiellderiverte eksisterer nesten overalt, og dermed gir følgende setning, at enhver kvasikonform avbilding er deriverbar nesten overalt.

3.1.5 Setning. *(GEHRING, LEHTO) La $U, V \subset \mathbb{R}^2$. Enhver kontinuerlig åpen avbilding $f : U \to V$ der de partiellderiverte eksisterer n.o. er deriverbar n.o.*

3.1.6 Korollar. *Enhver kvasikonform avbilding er deriverbar n.o.*

Dersom vi ønsker å undersøke oppførselen til en kvasikonform avbilding, gir det med andre ord god mening å se på punkter, der f er deriverbar. Som tidligere beskrevet er vi interessert i forandring av relative avstander lokalt, og vi ser derfor på bildet av infinitesimale sirkler rundt et regulært punkt z_0 under

* $F_k \subset F_{k+1}$

f.

I omegnen av et slikt punkt tilnærmes f av en lineær funksjon av formen $f(z_0) + D_f(z - z_0)$; eller på infinitesimalt nivå:

$$dw = D_f dz$$

Siden f er injektiv, er D_f invertibel, og ser vi på f som en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ og dz og dw som vektorer i planet, ser vi at:

$$|dz|^2 = (D_f^{-1}dw)^T D_f^{-1}dw = dw^T (D_f^{-1})^T D_f^{-1}dw$$

Matrisen $(D_f^{-1})^T D_f^{-1}$ er symmetrisk og derfor ortogonalt diagonaliserbar. Hva angår egenverdiene for $(D_f^{-1})^T D_f^{-1}$, ser vi, at dersom A er en invertibel matrise, er ikke bare egenverdiene for $A^T A$ forskjellig fra 0, men oppfylder i tillegg

$$A^T A = \lambda x \Rightarrow x^T A^T Ax = \lambda |x|^2 \Rightarrow |Ax|^2 = \lambda |x|^2 \Rightarrow \lambda > 0$$

Det vil si, der eksisterer positive λ_1, λ_2 og en rotasjon C av $\mathbb{R}^2$, slik at:

$$|dz|^2 = (Cdw)^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} (Cdw)$$

Innfører vi nye koordinater i dw-planet ved rotasjonen $dt = Cdw$, ender vi opp med

$$|dz|^2 = dt^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} dt = \lambda_1 dt_1^2 + \lambda_2 dt_2^2$$

Men siden λ_1 og λ_2 er positive, viser dette at infinitesimale sirkler rundt z_0 avbildes over i konsentriske infinitesimale ellipser rundt $f(z_0)$. Eksentrisiteten av disse er lik den sirkulære dilatasjon $H_f(z_0)$, og er entydig bestemt av λ_1 og λ_2. Det er selvfølgelig ønskelig å utrykke λ_1 og λ_2 ved hjelp av størrelser som relaterer seg til f, og den åpenlyse måte å gjøre dette på, er å forsøke å finne et uttrykk gitt ved de partiellderiverte for koordinatfunksjonene til f i punktet z_0. Dette er fuldt mulig å gjennomføre, men utregningene blir fort ganske uoversiktlige, og vi skal hellere innføre en mer bekvem notasjon.

Mer presist innfører vi to differensialoperatorer ∂ og $\overline{\partial}$

$$\partial = \frac{\partial_x - i\partial_y}{2} \quad , \quad \overline{\partial} = \frac{\partial_x + i\partial_y}{2}$$

Disse viser seg, ved direkte utregning, å oppfylle følgende to betingelser:

$$J_f = |\partial f|^2 - |\overline{\partial} f|^2 \tag{3.3}$$

$$dw = \partial f dz + \overline{\partial} f \overline{dz} \tag{3.4}$$

Siden f er orienteringsbevarende, er $J_f > 0$, og ligning 3.3 viser da at $|\partial f| > |\overline{\partial} f|$ og dermed

$$(|\partial f| - |\overline{\partial} f|)|dz| \leq |dw| \leq (|\partial f| + |\overline{\partial} f|)|dz|$$

Dette viser ikke overraskende at tilveksten $|dw|$ i retning dz er både oppover og nedover begrenset som funksjon av $|dz|$. Mer interessant er det, at i kombinasjon med ligning 3.4 ser vi, at den øvre skranken antas når $\partial f dz$ og $\overline{\partial} f \overline{dz}$ peker i samme retning; eller ekvivalent når

$$\frac{\overline{\partial} f \overline{dz}}{\partial f dz} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Arg } dz = \frac{1}{2}\text{Arg}\frac{\overline{\partial} f}{\partial f}$$

På samme måte antas den nedre grensen når $\partial f dz$ og $\overline{\partial} f \overline{dz}$ peker i motsatte retninger eller tilsvarende når

$$\frac{\overline{\partial} f \overline{dz}}{\partial f dz} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Arg } dz = \frac{1}{2}\text{Arg}\frac{\overline{\partial} f}{\partial f} + \frac{\pi}{2}$$

Dette viser, at i ethvert regulært punkt z_0 avbilder f infinitesimale sirkler over i infinitesimale konsentriske ellipser med eksentrisitet $H_f(z_0) = \frac{|\partial f| + |\overline{\partial} f|}{|\partial f| - |\overline{\partial} f|}$, og retningen der strekningen av sirklene er størst, er gitt ved halvparten av argumentet til $\frac{\overline{\partial} f}{\partial f}$. [Ahlfors, Kap. 1]

3.1.7 Bemerkning. *Selv om ovenstående argument synes å ha et "approksimativt" preg over seg, er dette ikke tilfellet. Ellipsene rundt z_0 og sirklene rundt $f(z_0)$ befinner seg egentlig i* tangentrommene *til $\hat{\mathbb{C}}$ i punktene z_0 og $f(z_0)$. Den deriverte D_f er da en lineærtransformasjon mellom disse tangentrommene; se også figur 3.6.*

3.2 Beltramiligningen

Størrelsen $\mu_f = \frac{\overline{\partial} f}{\partial f}$ kalles den komplekse dilatasjon for f, og spiller ikke overraskende en spesiell rolle, ettersom den både bestemmer retning og graden av strekning i ethvert regulært punkt.

Siden n.a. punkter er regulære, følger det umiddelbart at enhver kvasikonform avbilding $f : U \to V$ er en homeomorf løsning til en ligning av typen

$$\overline{\partial} f = \mu \partial f \tag{3.5}$$

der $\mu \in L^\infty(U, \mathbb{D})$ og $\|\mu\|_\infty < 1$. En ligning av typen 3.5 kaller vi en beltramiligning, og den komplekse dilatasjonen kalles også en beltramikoeffisient.

Siden f er en homeomorfi er målet $\mathcal{A}_f$ gitt ved $\mathcal{A}_f(E) = \mathcal{A}\, f(E)$ et Borelmål og endelig over enhver kompakt mengde. $\mathcal{A}_f$ har derfor en Lebesgue-Radon-Nikodym representasjon [Folland, s. 93-99]:

$$d\mathcal{A}_f = d\lambda + \mathcal{A}_f' d\mathcal{A} \quad , \quad \lambda \perp \mathcal{A} \text{ og } \lambda \geq 0$$

hvor $\mathcal{A}_f'$ er lik Jacobiandeterminanten til f n.o. Dette gir oss for en vilkårlig kompakt F

$$\infty > \mathcal{A}_f(F) = \int_F d\lambda + \int_F \mathcal{A}_f' d\mathcal{A} \geq \int_F J_f \, d\mathcal{A}$$

J_f er antatt positiv så dette viser at $J_f \in L^1_{loc}$, og ligning 3.3 gir oss da:

$$J_f = |\partial f|^2 - |\overline{\partial} f|^2 \Rightarrow |\partial f|^2 = \frac{J_f}{1 - |\mu_f|^2} \leq \frac{J_f}{1 - \|\mu_f\|^2_\infty} \in L^1_{loc}$$

Men hermed er ∂f og $\overline{\partial} f$ er i L^2_{loc}, og vi har bevist, at enhver kvasikonform avbildning har lokalt kvadratisk integrerbare partiellderiverte. Samtidig bemerker vi, at det følger fra standard distribusjonsteori, at de ordinære partiellderiverte og de partiellderiverte i distribusjonell forstand stemmer overens nesten overalt når f er ACL [Gasquet, s. 256]. Dette gir:

3.2.1 Setning. *Enhver kvasikonform homeomorfi $f : U \to V$ har lokalt kvadratisk integrerbare distribusjonelle partiellderiverte, og oppfyller en beltramiligning*

$$\overline{\partial} f = \mu \partial f$$

der $\|\mu\|_\infty < 1$.

Faktisk er egenskapene beskrevet i 3.2.1 tilstrekkelige for at en homeomorfi f er kvasikonform. Det vil si, enhver homeomorfi $f : U \to V$ med lokalt kvadratisk integrerbare distribusjonelle partiellderiverte som oppfyller en beltramiligning er kvasikonform. Dette kalles ofte for den *analytiske* definisjonen av kvasikonforme avbildninger. Vi utelater beviset for denne motsatte implikasjonen, se [LV] og [Hubbard].

Vi runder av denne seksjonen med en anvendelse av teorem 3.2.1, og beviser at enhver 1-kvasikonform avbildning er holomorf. Dette er trivielt i tilfellet der f er kontinuerlig deriverbar overalt, men er mindre trivielt i det generelle tilfellet.

3.2.2 Setning. *[WEYL] Hvis $f : U \to V$ er 1-kvasikonform, d.v.s. $\overline{\partial} f = 0$ n.o., da er f konform.*

Bevis. [Conway2, s. 190] Ideen bak beviset er at dersom ϕ_n er en regulariserende følge, da sikrer kontinuitet av f at følgen $f * \phi_n$ konvergerer lokalt uniformt mot f på U. Det er derfor tilstrekkelig å vise, at for enhver kompakt K kan vi, ved å velge n stor nok, garantere at $f * \phi_n$ er holomorf på K.

Vi minner om at en regulariserende følge oppfyller følgede

- supp $\phi_n \subset D_{\frac{1}{n}}(0)$
- $\|\phi_n\|_1 = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$
- Alle ϕ_n er rotasjon invariante; $|x| = |y| \Rightarrow \phi_n(y) = \phi_n(x)$.
- $\phi_n \in C^\infty$

Anta nå $K \subset U$ er kompakt, og velg en åpen W slik at $K \subset W$ og $\overline{W} \subset U$. Da har W positiv avstand δ til ∂U, og vi kan velge en n så stor at $\frac{1}{n} < \delta$. For slike n er konvolusjonen $f * \phi_n$ av klasse C^∞ på W.

La i det følgende $\psi \in C_c^\infty(W)$ være en vilkårlig testfunksjon.

$$\begin{aligned}
\int_W \psi\, \overline{\partial}(f * \phi_n)\, d(z) &= -\int_W (\overline{\partial}\psi)(f * \phi_n)\, d\mathcal{A}(z) \\
&= -\int_W \int_U (\overline{\partial}\psi) f(w)\phi_n(z-w)\, d\mathcal{A}(w)\, d\mathcal{A}(z) \\
&= \int_U f(w) \int_W \psi(z)\, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\phi_n(z-w)\, d\mathcal{A}(z)\, d\mathcal{A}(w) \\
&= -\int_U f(w) \int_W \psi(z)\, \frac{\partial}{\partial \bar{w}}\phi_n(z-w)\, d\mathcal{A}(z)\, d\mathcal{A}(w) \\
&= -\int_U f(w) \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \int_W \psi(z)\, \phi_n(w-z)\, d\mathcal{A}(z)\, d\mathcal{A}(w) \\
&= -\int_U f(w)\overline{\partial}(\psi * \phi_n)\, d\mathcal{A}(w) \\
&= \int_U (\overline{\partial} f)(\psi * \phi_n)\, d\mathcal{A}(w) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dette betyr at $\overline{\partial}(f * \phi_n) = 0$ n.o. som i kombinasjon med kontinuitet gir at $\overline{\partial}(f*\phi_n) \equiv 0$ på W. Dette er Cauchy-Riemanns betingelse, så $f*\phi_n$ er holomorf på W og dermed spesielt på K, som er presis det vi ønsket oss. □

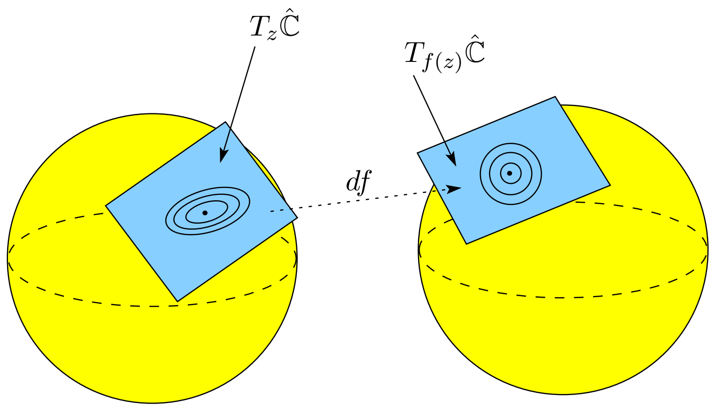
3.3 Den målbare avbildningssatsen - MRMT

Som beskrevet i forrige seksjon er en homeomorfi f kvasikonform, hvis og bare hvis f har lokalt kvadratisk integrerbare partiellderiverte ∂f og $\overline{\partial} f$, som i tillegg oppfyller en beltramiligning. Et naturlig spørsmål, som reiser seg umiddelbart, er for hvilke μ, det faktisk eksisterer en kvasikonform avbildning med beltramikoeffisient $\mu_f = \mu$. Det (kanskje) overraskende svaret er at dette er tilfellet for *alle* målbare funksjoner μ med $\|\mu\|_\infty < 1$. Følgende setning uttrykker dette faktum, og er bedre kjent som "the Measurable Riemann Mapping Theorem" - eller som vi skal forkorte det: MRMT.

3.3.1 Setning. *[MORREY-BOJARSKIJ-AHLFORS-BERS] For alle $\mu \in L^\infty(U)$, der $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ er åpen og $\|\mu\|_\infty < 1$, eksisterer det en kvasikonform avbildning $f : U \to U$ med $\mu_f = \mu$ n.o.*

Vi skal ikke bevise dette dype resultatet her, men derimot i høyere grad fokusere på anvendelser. Likevel skal vi i dette kapittelet studere nærmere egenskaper til familien av løsninger av en gitt beltramiligning. Det tradisjonelle beviset for 3.3.1 baserer seg på spesielle integraloperatorer definert på et L^p-rom, der $p > 2$, og på elementer fra Calderon-Zygmunds teori om integraloperatorer, se [Ahlfors, kap 5]. Andre bevis baserer seg på Poincaré-Koebes uniformiseringssetning, se [Hubbard, kap. 4], eller på "sewing"-teoremet, se [LV, kap III.5]. Nylig, i 2001, publiserte A.Douady et bevis som alene baserer seg på fouriertransformen på L^2 og dette er vel å regne som det mest elementære hittil, uten akkurat å kunne kalles elementært, se [Douady, s.307-324].

En nyttig måte å anskue MRMT på, er å tolke en beltramikoeffisient definert på en åpen mengde U, som et ellipse-felt i tangentbunnten $T(U)$. I hvert tangentplan T_zU definerer $\mu(z)$ en klasse av ellipser, der eksentrisitet og retningen til ellippseaksene er bestemt av $\mu(z)$ som beskrevet i foregående kapittel. MRMT sier da løst sagt, at det eksisterer en kvasikonform avbildning f, slik at lineær-avbildningene $df_z : T_zU \to T_{f(z)}f(U)$ sender ellipse-feltet i $T(U)$ over i ett sirkel-felt i $T(f(U))$, se figur 3.6.



Figur 3.6: *Kvasikonforme avbildninger sender ellipser i $T_z\hat{\mathbb{C}}$ over i sirkler i $T_{f(z)}\hat{\mathbb{C}}$.*

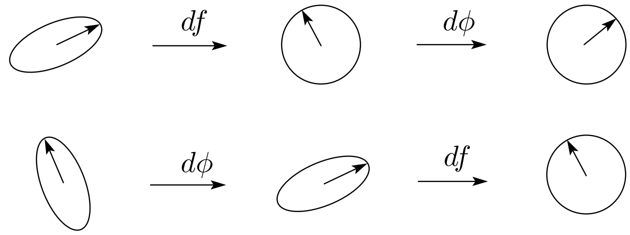
Styrken i MRMT ligger i svakheten av betingelsen $\|\mu\|_\infty < 1$. Ellipsefeltet kan være svært uregelmessig uten korrelasjon mellom ellipsene i ulike punkt - uansett hvor nært hverandre. Dette gjør MRMT til ett meget fleksibelt verktøy.

3.4 Sammensetning av kvasikonforme avbildninger

Vi skal i det følgende se nærmere på sammensetning av kvasikonforme avbildninger; både med andre kvasikonforme avbildninger og med konforme avbildninger. Lar vi $f : U \to V$ være kvasikonform, og ser på regulære punkter virker det intuitivt opplagt fra figur 3.7, at dilatasjonen ikke forandres ved postsammensetning med en konform avbildning. Derimot vil den komplekse dilatasjon forandres med en unimodulær faktor ved presammensetning med en konform avbildning.

Denne intuisjonen er korrekt. Mer presist kan en vise relativt lett, men ved rent *formell* regning, at når f og g er kvasikonforme da holder følgende transisjonsformeler formelt ([Lehto, s. 24] og [LV, s. 183]):

$$\mu_{f\circ g^{-1}}(g(z)) = \frac{\mu_f(z) - \mu_g(z)}{1 - \mu_f(z)\overline{\mu_g(z)}} \frac{\partial g(z)}{\overline{\partial g(z)}} \tag{3.6}$$



Figur 3.7: *Virkningen av post og presammensetning med en konform avbildning ϕ i et regulært punkt.*

$$\mu_{f\circ g}(z) = \frac{\mu_g(z) + \mu_f(g(z))\overline{\frac{\partial g(z)}{\partial g(z)}}}{1 + \mu_g(z)\mu_f(g(z))\overline{\frac{\bar{\partial} g(z)}{\bar{\partial} g(z)}}} \tag{3.7}$$

At formlene rent faktisk holder for n.a. z, der de gir mening, er ikke opplagt, og er ikke helt enkelt å vise. Grunnleggende skyldes det at en funksjon med lokalt kvadratisk integrerbare distribusjonelle partiellderiverte er absolutt kontinuerlig med hensyn på lebesguemålet på $\mathbb{C}$ (se [Hubbard, s.129]). I følge 3.2.1 inkluderer denne klassen de kvasikonforme avbildninger, og i forbindelse med for eksempel 3.7 betyr dette, at punktene z der g ikke er deriverbar eller f ikke er deriverbar i $g(z)$ har mål null, og formelen holder n.o.

Vi skal ta formel 3.6 og formel 3.7 for gitt, akkurat som vi skal ta det for gitt at komposisjonen $f \circ g$ er K_1K_2-kvasikonform når f og g er h.h.v K_1 og K_2-kvasikonforme, samt at inversen til en K-kvasikonform avbildning er K-kvasikonform, se [LV], [Hubbard] og [Ahlfors].

Validiteten av ligningene 3.6 og 3.7 i kombinasjon med Weyls lemma 3.2.2 gir oss umiddelbart følgende setning, som vi skal benytte utallige av ganger videre i denne oppgaven.

3.4.1 Setning. *[Entydighetssetningen, [Mercer]] La $f : U_1 \to U_2$, $g : U_1 \to U_3$ og*
$h : U_2 \to U_4$ alle være kvasikonforme. Da gjelder:

1. *$\mu_f = \mu_g$ n.o. hvis og bare hvis $f \circ g^{-1}$ er holomorf.*
2. *Hvis h er konform, da er $\mu_{h\circ f} = \mu_f$ n.o.*
3. *Hvis f er konform, da er $\mu_{h\circ f} = (\mu_h \circ f)\frac{\overline{f'}}{f'}$ n.o.*

Bevis. Vi beviser bare punkt en, siden to og tre følger direkte fra ligning 3.6 og 3.7.

Dersom $\mu_f = \mu_g$ n.o. da gir formel 3.6 at $\mu_{f\circ g^{-1}} = 0$ n.o.. Siden $f \circ g^{-1}$ er kvasikonform gir Weyl's lemma da at $f \circ g^{-1}$ er konform.

Hvis omvendt $f \circ g^{-1}$ antas konform, får vi fra 3.6 at $0 = \frac{\mu_f(z)-\mu_g(z)}{1-\mu_f(z)\overline{\mu_g(z)}} \frac{\overline{\partial g(z)}}{\partial g(z)}$ n.o. Den siste faktoren her kan ikke være null på en mengde E av positivt mål, for dersom dette var tilfellet ville $\partial g = 0$ på E, og dermed Jacobideterminanten $J_g = 0$ på E. Ved absolutt kontinuitet av g, er [Ahlfors, s.22]:

$$0 = \int_E J_g \, d\mathcal{A} = \mathcal{A}(g(E))$$

Men det vil si at g^{-1}, som også er kvasikonform, avbilder nullmengden $g(E)$ på en ikke-null mengde E, og det strider mot absolutt kontinuitet av g^{-1}.

Altså må $\mu_g - \mu_f = 0$ n.o., og konklusjonen følger. □

Bemerk spesielt at entydighetssetningen sier at to kvasikonforme avbildninger ϕ_1 og ϕ_2, som løser samme Beltramiligning på ett åpent område U, oppfyller at $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ er konform. Dersom $U = \hat{\mathbb{C}}$ må da $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ være en möbiusavbildning. Det følger direkte, at vi kan kreve at en løsning til en global beltramiligning fikserer 0, 1 og ∞, og at denne normalisering bestemmer løsningen entydig. Vi reformulerer derfor MRMT som følger:

3.4.2 Setning. *[MORREY-BOJARSKIJ-AHLFORS-BERS] For alle $\mu \in L^\infty(U)$, der $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ er åpen og $\|\mu\|_\infty < 1$, eksisterer det en kvasikonform avbildning $f : U \to U$ med $\mu_f = \mu$ n.o.. Dersom g er en annen slik løsning er $f \circ g^{-1}$ en konform avbildning.*

I tilfellet $U = \hat{\mathbb{C}}$ eksisterer dessuten en entydig kvasikonform avbildning h med $\mu = \mu_h$ n.o. som fikserer 0 1 *og* ∞.

Ahlfors og Bers beviste enda mer enn dette. De viste i tillegg, at hvis beltramikoeffisienten μ avhenger kontinuerlig, C^∞ eller holomorft av en parameter λ, avhenger den normaliserte løsningen av beltramiligningen på tilsvarende måte av parameteren λ. Vi trenger ikke denne setningen i sin fulle generalitet, og nøyer oss med å postulere følgende versjon: [Steinmetz, s.28]

3.4.3 Setning (AHLFORS, BERS)**.** *Anta μ_λ er en familie av beltramikoeffisienter som for fiksert z avhenger kontinuerlig (resp. C^∞, holomorft) av parameteren $\lambda \in \mathbb{C}^n, (\mathbb{R}^n)$, da avhenger den normaliserte kvasikonforme avbildning ϕ_λ med $\mu_{\phi_\lambda} = \mu_\lambda$ kontinuerlig (resp. C^∞, holomorft) av λ.*

3.5 Riemannflaten $U[\mu]$.

Vårt hovedmål med innføringen av kvasikonforme avbildninger i denne oppgaven er som tidligere nevnt anvendelser i holomorf dynamikk. Den helt sentrale observasjonen i den forbindelse er, at enhver beltramikoeffisient μ definert på en åpen mengde $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ definerer en riemannflate $U[\mu]$. Mer detaljert definerer vi et analytisk atlas $A(U[\mu])$ på U ved

$$A(U[\mu]) = \{\phi : U \to \hat{\mathbb{C}} | \phi \text{ er kvasikonform med } \mu_\phi = \mu \text{ n.o.}\}$$

$A(U[\mu])$ er ikke-tomt ved MRMT og entydighetssetningen sikrer, at for alle $\phi_1, \phi_2 \in A(U[\mu])$ er $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ konform. Med andre ord er $U[\mu]$ utstyrt med atlaset $A(U[\mu])$ en Riemannflate.[Beardon, s.181]

Vi skal etterhvert innlede ett nærmere studium av analytisitet mellom riemannflater av typen $U[\mu]$, da det er dette spørsmålet som er det sentrale aspektet i våre anvendelser av MRMT og kvasikonforme avbildninger. Før vi ser nærmere på dette temaet, gjør vi først en nyttig observasjon:

3.5.1 Bemerkning. *Når vi skal sjekke, om en funskjon $f : U[\mu] \to V[\nu]$ er analytisk mellom riemannflater, er det tilstrekkelig å sjekke at $\phi_1 \circ f \circ \psi_1^{-1}$ er holomorf for étt valg av kart $\phi_1 \in A(V[\nu])$ og $\psi_1 \in A(U[\mu])$. For dersom $\phi_2 \in A(V[\nu]$ og $\psi_2 \in A(U[\mu])$ er $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ og $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ begge holomorfe ved entydighetssetningen 3.4.1, og dermed er $\phi_2 \circ f \circ \psi_2^{-1} = (\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ f \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ \psi_2^{-1})$ holomorf, som ønsket.*

3.5.2 Proposisjon. *La $U, V \in \hat{\mathbb{C}}$ være åpne områder og $f : U \to V$ kvasikonform. Gitt beltramikoeffisient μ på V eksisterer det en entydig beltramikoeffisient ν på U slik at $f : U[\nu] \to V[\mu]$ er analytisk. Beltramikoeffisienten ν kalles tilbaketrekningen av μ med hensyn på f og vi skriver $\nu = f^*\mu$.*

Bevis. La $\phi : V \to \hat{\mathbb{C}}$ være kvasikonform med beltramikoeffisient μ. Da er $\phi \circ f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ kvasikonform med beltramikoeffisient $\mu_{\phi \circ f}$. Setter vi $\nu = \mu_{\phi \circ f}$, da påstår vi, at $f : U[\nu] \to V[\mu]$ er analytisk. Det vil si, gitt $\psi : U \to \hat{\mathbb{C}}$ i atlasset for $U[\nu]$, da er $\phi \circ f$ pr definisjon i samme atlas, og dermed er $\phi \circ f \circ \psi^{-1}$ konform, som ønsket. Entydigheten følger av setning 3.4.1. □

Med denne definisjon av tilbaketrekning av beltramikoeffisienter kan vi formulere MRMT som følger: [Ahlfors, s.124]

3.5.3 Setning (MRMT)**.** *For enhver beltramikoeffisient μ på $\hat{\mathbb{C}}$ eksisterer det en kvasikonform avbildning $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ med $f^*0 = \mu$. Hvis f fikserer $0, 1$ og ∞ er f entydig.*

Her har vi tatt det for gitt, at en avbildning $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ er kvasikonform med Beltramikoeffisient μ, hvis og bare hvis f er analytisk som funksjon fra $U[\mu]$ til $\hat{\mathbb{C}}[0]$, se [Beardon, s.181]. Symbolet 0 betegner for øvrig her beltramikoeffisienten $\mu \equiv 0$, og vi skal beholde denne konvensjonen resten av oppgaven. Det vil alltid fremgå av sammenhengen om vi mener Beltramikoeffisienten 0 eller tallet 0.

Sammen med proposisjon 3.5.2 danner følgende setning [Beardon, s.182], og i særdeleshet dens korollar, en stor del av grunnlaget for våre videre anvendelser av kvasikonforme avbildninger:

3.5.4 Setning. *La μ og ν være Beltramikoeffisienter definert på de åpne områdene U og V i $\hat{\mathbb{C}}$, og la $f : U \to V$ være holomorf og ikke-konstant. Da er $f : U[\mu] \to V[\nu]$ analytisk hvis og bare hvis $\nu(f(z)) = \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}\mu(z)$ for n.a. $z \in U$.*

Bevis. Først velger vi en $\psi \in A(V[\nu])$ og registrerer at formelen $\mu_{\psi\circ f}(z) = \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}\nu(f(z))$ holder på alle åpne mengder der f er lokalt konform. Med andre ord holder formelen på hele U minus mengden K_1 av kritiske punkt for f. Men de kritiske punkt kan, ved entydighetsprinsippet for analytiske funksjoner, ikke akkumulere i U, så K_1 er diskret og formelen holder for n.a. $\in U$.

($\Rightarrow$):

Anta at $f : U[\mu] \to V[\nu]$ er analytisk mellom riemannflater og velg en $\phi \in A(U[\mu])$. Da er $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ per definisjon av analytisitet mellom Riemannflater holomorf, og derfor lokalt konform utenom en diskret mengde i $K_2 \subset U$. Det betyr ifølge entydighetssetningen 3.4.1, anvendt lokalt, at ϕ og $\psi \circ f$ har samme beltramikoeffisient n.o. og spesielt, at

$$\mu(z) = \mu_{\psi\circ f}(z) = \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}\nu(f(z))$$

på $U \setminus \{K_1 \cup K_2\}$ eller m.a.o. nesten overalt på U - som ønsket.

($\Leftarrow$)

Anta at $\mu(z) = \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}\nu(f(z))$ nesten overalt på U. Det betyr, at $\psi \circ f$ er lokalt kvasikonform med beltramikoeffisient μ i en omegn om hvert punkt $z \in U \setminus K_1$. Gitt $\phi \in A(U[\mu])$ er hermed $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ lokalt konform i $\phi(U \setminus K_1)$. Men K_1 er diskret og $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ er kontinuerlig, så ved Riemanns setning om hevbare singulariteter er $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ holomorf i hele $\phi(U)$, og dermed er $f : U[\mu] \to V[\nu]$ analytisk mellom riemannflater. $\square$

3.5.5 Korollar. *La U, V være åpne områder i $\hat{\mathbb{C}}$ og la $g : U \to V$ være holomorf og surjektiv. Dersom μ er en Beltramikoeffisient på V, da eksisterer det en entydig Beltramikoeffisient ν på U slik at $f : U[\nu] \to V[\mu]$ er analytisk. Koeffisienten ν kaller vi tilbaketrekningen av μ med hensyn på f og vi skriver denne som $f^*\mu$.*

Bevis. Sett $\nu(z) = f^*\mu(z) = \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}\mu(f(z))$ og setning 3.5.4 gir resultatet. $\square$

Måten vi skal anvende disse setningene, er som følger: Anta vi har en surjektiv holomorf eller kvasikonform avbildning f som, for en gitt beltramikoeffisient $\mu \in L^\infty(\hat{\mathbb{C}})$, er analytisk sett som funksjon fra riemannflaten $\hat{\mathbb{C}}[\mu]$ til seg selv. Da kan vi, per definisjon av analytisitet, konkludere, at for enhver ϕ i atlasset for $\hat{\mathbb{C}}[\mu]$ er konjugeringen $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ holomorf. Altså har vi en ikke-konform konjugering av f til en rasjonal funksjon. Dersom en beltramikoeffisient μ oppfyller at $f : \hat{\mathbb{C}}[\mu] \to \hat{\mathbb{C}}[\mu]$ er analytisk mellom riemannflater, kaller vi for øvrig μ for f-invariant.

3.6 Kvasiregulære avbildninger

For anvendelsene i Sullivans "no wandering domains"-setning er setning 3.5.4 og korollar 3.5.5 alt vi trenger. Derimot får vi bruk for ett siste begrep til, i sammenheng med beviset for eksistens av hermanringer i kapittel 7, nemlig *kvasiregulære avbildninger*.

3.6.1 Definisjon. *En kvasiregulær avbildning definerer vi her som en sammensetning $f \circ \phi$ av en kvasikonform avbildning ϕ og en rasjonal funksjon f.*

Vi bemerker med en gang, at en kvasiregulær avbildning opplagt er lokalt kvasikonform utenom en endelig punktmengde i definisjonsområdet. Derfor definerer enhver kvasiregulær avbildning, akkurat som enhver kvasikonform avbildning, en beltramikoeffisient, hvis tilhørende Beltramiligning den kvasiregulære avbildningen løser. Følgende setning gir oss ett kriterium for å avgjøre, om en avbildning er kvasiregulær:

3.6.2 Lemma. *[[LV, s.240]] Anta $g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ er kontinuerlig og lokalt kvasikonform utenom en endelig mengde K. Hvis $\|\mu_g\|_\infty < 1$ da er g kvasiregulær.*

Bevis. La ϕ være en kvasikonform løsning til beltramiligningen tilknyttet μ_g, og sett $f = g \circ \phi^{-1}$. Da er f lokalt i $\hat{\mathbb{C}} \setminus \phi(K)$ en sammensetning av kvasikonforme avbildninger og derfor lokalt kvasikonform. Videre løser g og ϕ den samme beltramiligningen lokalt i $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$, så f er lokalt konform i $\hat{\mathbb{C}} \setminus \phi(K)$. Men f er kontinuerlig, så ved Riemanns setning om hevbare singulariteter er f holomorf i hele $\hat{\mathbb{C}}$, og dermed rasjonal. Siden $g = f \circ \phi$ er vi ferdig. □

Vi skal, akkurat som tilfellet var for kvasikonforme og holomorfe funksjoner, få bruk for å trekke tilbake beltramikoeffisienter med hensyn på kvasiregulære avbildninger. Som tidligere gjør vi dette for å sikre analytisitet mellom riemannflater av den gitte avbildning.

3.6.3 Setning. *La g være kvasiregulær. Dersom $g : U \to V$ er surjektiv, og ν en beltramikoeffisisent på V, da eksisterer det en entydig beltramikoeffisient μ på U slik at $g : U[\mu] \to V[\nu]$ er analytisk mellom riemannflater. Beltramikoeffisienten μ skriver vi som $g^*\nu$, og kaller den tilbaketrekningen av ν under g.*

Bevis. Beviset er lett, for vi har allerede gjort hele jobben. Dersom $g = f \circ \phi$ setter vi ganske enkelt $\mu = \phi^*(f^*\nu)$ og registrerer, at g avbilder som:

$$U[\phi^*(f^*\nu)] \xrightarrow{\phi} \phi(U)[f^*\nu] \xrightarrow{f} V[\nu]$$

Dermed er $g : U[\mu] \to V[\nu]$ en sammensetning av analytiske avbildninger, og er derfor analytisk (mellom riemannflater). □

Kapittel 4

Sullivans setning

I dette kapittelet er vårt primære mål å vise, at ingen Fatoumengde for noen rasjonal funksjon inneholder en vandrende komponent. Det vil si, gitt en rasjonal funksjon f vil enhver komponent $V \subset \mathcal{F}_f$ utvise egenskapen at følgen,

$$V, f(V), f^{\circ 2}(V), \dots$$

består av et endelig antall mengder. Beviset føres ved motstrid i den forstand, at vi skal anta ovenstående følge består av parvis disjunkte mengder, og derved utlede en logisk selvmotsigelse. Sullivans originale bevis var relativt langt og vanskelig, men har siden blitt forenklet vesentlig av bl.a. N. Baker og C.T. McMullen. Vi skal her benytte oss av forenklingene vil Baker, der den første (og viktigste) av disse er, at det er tilstrekkelig å se på tilfellet, der V er enkeltsammenhengende.

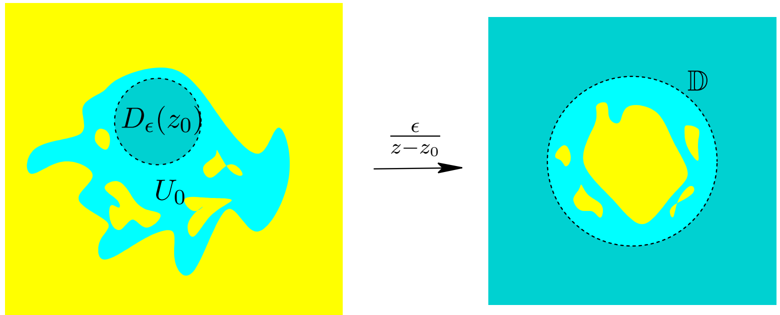
4.1 En reduksjon

4.1.1 Lemma (BAKER, 1991)**.** *Dersom f har en vandrende komponent V da har f også en enkeltsammenhengende vandrende komponent U_0 hvorpå alle itererte $f^{\circ n}$ er univalente.*

Bevis. I dette beviset følger vi i all hovedsak [Carleson] og [Zakeri].

La V være en vandrende komponent av $\mathcal{F}_f$. Siden f bare har et endelig antall kritiske punkt, eksisterer det et naturlig tall N, slik at $f^{\circ n}(V)$ ikke inneholder noen kritiske punkter når $n \geq N$. Setter vi $U_0 = f^{\circ N}(V)$ da er mengdene $U_n = f^{\circ n}(U_0)$ innbyrdes disjunkte, og inneholder ingen kritiske punkter for f. Med andre ord er $f^{\circ n}$ en overdekningsavbildning fra U til U_n for alle n. Vårt første mål er å vise, at U_0 er enkeltsammenhengende eller ekvivalent; at enhver lukket kurve $\gamma \subset U_0$ er nullhomotopisk.

Siden konjugering med en möbiustransformasjon ikke forandrer dynamikken til f, kan vi uten tap av generalitet anta at $\infty \in U_0$ og at $U_j \subset \mathbb{D}$ for alle $j \geq 1$ se figur 4.1



Figur 4.1: *For enhver möbiustransformasjon T er $\mathcal{F}_{T\circ f\circ T^{-1}} = T(\mathcal{F}_f)$, og funksjonene $T\circ f\circ T^{-1}$ og f er dynamisk ekvivalente. Derfor kan vi anta at $\infty \in U_0$ og $U_1, U_2, \dots \in \mathbb{D}$.*

Med denne antakelsen er $\bigcup_1^\infty U_n \subset \mathbb{D}$ og vi må ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}(U_n) < \infty \tag{4.1}$$

Familien $\{f^{\circ n}\}$ er normal på U_0, så det eksisterer en delfølge $f^{\circ n_j}$, som konvergerer lokalt uniformt på U mot en analytisk funksjon g definert på U_0. Dersom g ikke er konstant, eksisterer det en $z \in U_0$ slik at $g'(z) \neq 0$ og

$$\lim_{n\to\infty} |(f^{\circ n_j})'(z)| = |g'(z)| > 0$$

Men da er alle verdiene $|(f^{\circ n_j})'(z)|$ uniformt begrenset bort fra 0, og ved Koebes $\frac{1}{4}$-setning inneholder alle U_{n_j} en liten åpen disk av radius $\epsilon > 0$. Dette strider mot ligning 4.1, og vi konkluderer, at g er konstant.

Gitt en lukket kurve $\gamma \subset U_0$, da konvergerer $f^{\circ n_j}$ uniformt mot en konstant verdi på γ, slik at

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{diam} f^{\circ n_j}(\gamma) = 0$$

og dermed, ved ekvikontinuitet av familien $f^{\circ n}$ på U_0:

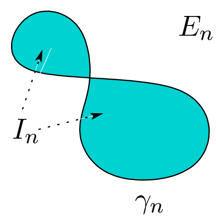
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} f^{\circ n}(\gamma) = 0$$

Vi definerer nå $\gamma_n = f^{\circ n}(\gamma)$ og

- I_n som unionen av de begrensete komponentene til $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma_n$
- E_n som den ubegrensete komponeneten av $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma_n$

Siden f er en $d_f : 1$ avbildning på $\hat{\mathbb{C}}$, vil høyst d_f komponenter av fatoumengden avbildes inn i U_0. Vi kan derfor velge N så stor, at I_n umulig kan inneholde noen av disse d_f komponentene.

4.1.2 Lemma. $\partial f(I_n) \subset f(\partial I_n)$



Figur 4.2: diam $\gamma_n \to 0$ og dermed diam $I_n \to 0$ når $n \to \infty$

Bevis. La $y \in \partial f(I_n)$. Da eksisterer en følge $x_n \in I_n$ med $f(x_n) \to y$. Siden $\overline{I}_n$ er kompakt finns en konvergent delfølge $x_{n_j} \to x$ der $x \in \overline{I}_n$ og $f(x) = y$. Men f er åpen så $\partial f(I_n) \cap f(I_n) = \emptyset$ og dermed $x \notin I_n$. Eneste gjenværende mulighet er $x \in \partial I_n$ og vi har vist at $\partial f(I_n) \subset f(\partial I_n)$. □

4.1.3 Lemma. *Når $n \geq N$ er $f(I_n) \subset I_{n+1} \cup \gamma_{n+1}$.*

Bevis. Ved lemma 4.1.2 er $\partial f(I_n) \subset f(\partial I_n) \subset f(\gamma_n) = \gamma_{n+1}$ og dermed er snittet $E_{n+1} \cap \partial f(I_n)$ tomt. Derfor, hvis E_{n+1} møter $f(I_n)$ da er $E_{n+1} \subset f(I_n)$ og dermed $U_0 \subset f(I_n)$, noe som er umulig når $n \geq N$. Vi konkluderer, at når $n \geq N$ er

$$f(I_n) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus E_{n+1} = (\gamma_{n+1} \cup I_{n+1})$$

□

Vi kan nå fullføre beviset for lemma 4.1.1. Ved lemma 4.1.3 avbildes alle I_n inn i $(\gamma_{n+1} \cup I_{n+1}) \subset \mathbb{D}$ når $n \geq N$. Men da er $f^{\circ n}(I_N) \subset \mathbb{D}$ for alle $m \geq 1$, og ved Montels setning er familien $\{f^{\circ n}\}$ normal på hele I_N. Med andre ord er $I_N \subset U_N$, og γ_N er nullhomotopisk på U_N; se [Munkres, kap.54]. Siden $f^{\circ N}$ er en overdekningsavbildning av U_0 over U_N, løfter denne homotopien til U_0, og vi har vist at U_0 er enkeltsammenhengende. Samme argument viser at alle U_n er enkeltsammenhengende. Dette viser at $f^{\circ n}$ er en holomorf avbildning mellom enkeltsammenhengende områder U_0 og U_n, og vi kan anvende Riemann-Hurwitz formel [Steinmetz]:

Riemann-Hurwitz formel. *Dersom f er en holomorf avbildning av grad k fra et m-sammenhengende område D til et n-sammenhengede område G, med presis r kritiske punkt i D, talt med multiplisitet. Da er*

$$m - 2 = k(n-2) + r$$

Setter vi, som tilfellet er, $n = m = 1$ og $r = 0$ får vi at $k = 1$, og dermed er alle $f^{\circ n}$ univalente på U_0. □

4.2 Sullivans bevis for Fatous formodning

Med lemma 4.1.1 er vi nå klar for det egentlige beviset for Fatous formodning. Beviset vi presenterer her, er essensielt Sullivans originale, men som sagt med en del tekniske forandringer. Vi har hentet ulike deler av beviset fra [Carleson], [Steinmetz], [Zakeri], [Milnor], og [Beardon]. Enkelte steder har vi tilpasset argumentene en litt svakere bakgrunn enn de ovennevnte kildene forutsetter, og delvis derfor er beviset her en del lengre enn alle de ovennevnte.

4.2.1 Setning (SULLIVAN, 1985)**.** *Dersom f er rasjonal inneholder $\mathcal{F}_f$ ingen vandrende komponenter.*

Bevis. Vi begynner med et par viktige antakelser: Først og fremst antar vi f *har* en vandrende komponent U_0 som, ifølge lemma 4.1.1, kan antas å være enkeltsammenhengende. Videre kan vi, ved eventuelt å foreta en möbiuskonjugering, anta at alle poler og alle nullpunkter for f ligger i det endelige planet $\mathbb{C}$, samt at $f(0) = 1$ [Beardon, s.190].

Beviset begynner med den fundamentalt viktigste del; nemlig at eksistensen av en vandrende komponent tillater oss å utvide enhver beltramikoeffisient på U_0 til en f-invariant beltramikoeffisient på hele $\hat{\mathbb{C}}$.

Konstruksjonen går som følger: Siden U_0 er enkeltsammenhengende, eksisterer der ved Riemanns avbildningssats en konform avbildning $\psi : U_0 \to \mathbb{D}$. Lar vi $B(\mathbb{D})$ betegne rommet av beltramikoeffisienter på $\mathbb{D}$, kan vi nå definere tilbaketrekningen av elementene i $B(\mathbb{D})$ til $B(U_0)$ med hensyn på ψ:

$$B(U_0) \ni \eta = \psi^* \mu$$

Videre, gitt $\eta \in B(U_0)$ kan vi, siden f er univalent på $U_0, U_1, U_2, \ldots$, suksessivt skyve fremover beltramikoeffisienten η til $O^+(U_0)$ ved hjelp av f:

$$f_* : B(U_n) \to B(U_{n+1})$$

Helt presist setter vi $\eta(f(z)) = \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)} \mu(z)$, og setning 3.5.4 sikrer da at

$$f : U_n \to U_{n+1}$$

er analytisk mellom riemannflater. Tilsvarende kan vi utvide η til $O^-(U_0)$ ved tilbaketrekninger med hensyn på f. Bemerk forøvrig, at dette er veldefinert, siden alle U_n $-\infty < n < \infty$ er disjunkte, og at utvidelsen av η virkelig er en beltramikoeffisient. Dette skyldes f er holomorf, for derved forandres ikke $\|\eta\|_\infty$ under tilbaketrekninger og fremoverskyvinger.

Mer skjematisk ser konstruksjonen slik ut:

$$\begin{tikzcd}
 & B(U_1) \arrow[r, "f_*"] & B(U_2) \arrow[r, "f_*"] & B(U_3)\cdots \\
B(\mathbb{D}) \arrow[r, "\psi^*"] & B(U_0) \arrow[u, "f_*"] \arrow[d, "f^*"'] & & \\
 & B(U_{-1}) \arrow[r, "f^*"'] & B(U_{-2}) \arrow[r, "f^*"'] & B(U_{-3})\cdots
\end{tikzcd}$$

Dette gir en avbildning

$$B(U_0) \ni \mu \mapsto \eta \in B(GO(U_0))$$

der η er f-invariant pr. konstruksjon. Setter vi $\eta \equiv 0$ på $\hat{\mathbb{C}} \setminus GO(U_0)$, har vi en avbildning fra rommet av beltramikoeffisienter på $\mathbb{D}$ inn i rommet av f-invariante beltramikoefisienter på $\hat{\mathbb{C}}$. Da eksisterer ved MRMT, for alle η, en normalisert kvasikonform avbildning, ϕ_η med

$$\phi_\eta^* 0 = \eta$$

slik at $\phi_\eta \circ f \circ \phi_\eta^{-1}$ er holomorf på $\hat{\mathbb{C}}$.

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{C}}[\eta] & \xrightarrow{f} & \hat{\mathbb{C}}[\eta] \\ \phi_\eta^{-1} \Big\uparrow & & \Big\downarrow \phi_\eta \\ \hat{\mathbb{C}}[0] & \longrightarrow & \hat{\mathbb{C}}[0] \end{array}$$

Siden ϕ_η er en homeomorfi, avbilder $\phi_\eta \circ f \circ \phi_\eta^{-1}$ riemannsfæren $d_f : 1$ på seg selv og er derfor rasjonal av grad d_f. Med andre ord gir alle $\mu \in B(\mathbb{D})$ opphav til en rasjonal funksjon av grad d_f på $\hat{\mathbb{C}}$.

Ideen videre er nå, at siden $\dim B(\mathbb{D}) = \infty$, og rommet av rasjonale funksjoner av grad d_f har reel dimensjon $4d_f + 2$*, må en stor delmengde av $B(\mathbb{D})$ avbildes på den samme rasjonale funksjonen. Vi vil konstruere familie av essensielt forskjellige beltramikoeffisienter på $\mathbb{D}$, der en stor delmengde av disse gir opphav til samme funksjon, og derved oppnå en selvmotsigelse.

Følgende lemma definerer denne familie av beltramikoeffisienter. Lemmaet er av rent teknisk karakter, og beviset inneholder ingen dype ideer. Beviset har liten sammenheng med vår overordnede strategi, og kan derfor med fordel hoppes over ved en første lesning.

4.2.2 Lemma. *For alle tilstrekkelig store m eksisterer det en familie av avbildninger $h : \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{K}^m \to \overline{\mathbb{D}}$ † slik at følgende punkt er oppfyldt:*

- *For alle faste $\mathbf{t}_0 \in \mathbb{K}^m$ er $h_{\mathbf{t}_0}(z)$ en kvasikonform homeomorfi fra $\mathbb{D}$ inn i $\mathbb{D}$.*
- *For alle $\delta > 0$ eksisterer det en N slik at $m \geq N$ medfører $\|\mu_{\mathbf{t}}\|_\infty = \|\mu_{h_{\mathbf{t}_0}}\|_\infty < \delta$ for alle $\mathbf{t}_0 \in \mathbb{K}^m$.*
- *For alle $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ er avbildningen $\mathbf{t} \mapsto \mu_{\mathbf{t}}(z_0)$ C^∞-glatt.*
- *Dersom $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathbb{K}^m$ med $\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2$, da er $h_{\mathbf{t}_1} \neq h_{\mathbf{t}_2}$ på $\partial\mathbb{D}$.*

---

* f avhenger av $4d_f + 2$ relle parametre, eller en kan se på rommet av rasjonale funksjoner som ineholdt i det komplekst projektive rommet $\mathbb{CP}^{2d_f+1}$.

† $\mathbb{K}^m = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m : -1 < t_j < 1 \text{ for alle } 1 \leq j \leq m\}$

Bevis. For alle $\sigma > 0$ definerer vi funksjonen $g_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$g_\sigma(z) = \begin{cases} \sigma^2 e^{\frac{\sigma^2}{x^2-\sigma^2}} & , \text{ når } |x| < \sigma \\ 0 & , \text{ når } |x| \geq \sigma \end{cases}$$

Alle g_σ er uendelig mange ganger deriverbare og en ser lett ved symmetri at alle g_σ har maksimum $\frac{\sigma^2}{e}$ i $x = 0$. Videre finner en ved vanlig derivasjon at for $|x| < \sigma$ er:

$$g'_\sigma(x) = -2\sigma^2 g_\sigma(x) \frac{x}{(x^2-\sigma^2)^2} \quad , \quad g''_\sigma(x) = 2\sigma^2 g_\sigma(x) \frac{3x^4 - \sigma^4}{(x^2-\sigma^2)^4}$$

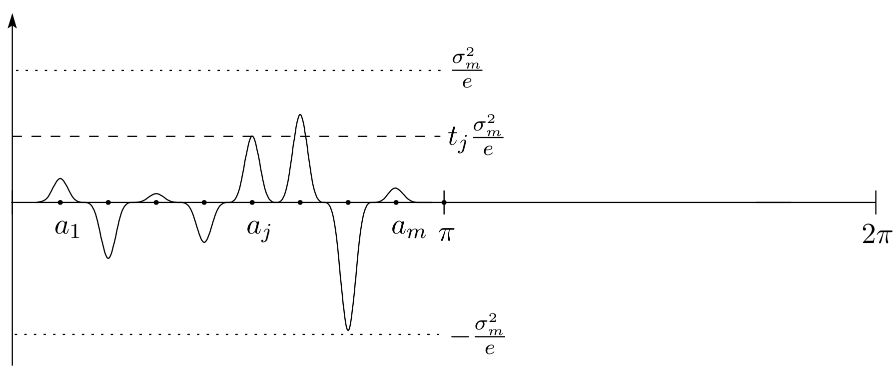
Som forteller oss at $|g'_\sigma|$ har maksimum i $|x| = \frac{\sigma}{\sqrt{\sqrt{3}}}$. Maksverdien er:

$$|g'_\sigma(\frac{\sigma}{\sqrt{\sqrt{3}}})| = \frac{2\sigma^5 3^{-\frac{1}{4}}}{e\sigma^4(1 - 3^{-\frac{1}{4}})} = k\sigma$$

Det essensielle her er, at der eksisterer en familie av funksjoner $g_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R})$ slik at, $\operatorname{supp} g_\sigma \subset \{|x| < \sigma\}$ og $g_\sigma, |g'_\sigma| \to 0$ når $\sigma \to 0$.

Lar vi nå $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_m < a_{m+1} = \pi$ være ekvidistante punkter, da definerer vi funksjonen $G_m : [0, 2\pi] \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{R}$ ved:

$$G_m(\theta, \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{m} t_i g_{\sigma_m}(\theta - a_i) \quad , \sigma_m = \frac{1}{2(m+1)}$$



Figur 4.3: *Kurve for G_m for en fiksert t. For hver a_j tegnes en $t_j g_{\sigma_m}$-"klokke" symmetrisk rundt a_j. Høyde og retning bestemmes av t_j. Funksjonen er 0 for $\pi \leq x \leq 2\pi$. Videre vil G_m og G'_m gå uniformt mot 0 når $m \to \infty$.*

Avbildningen $h_\mathbf{t} : \mathbb{C} \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{D}$ definert ved

$$h_\mathbf{t}(z) = z e^{G_m(\arg z, \mathbf{t})}$$

er da for tilstrekkelig store m, og alle fikserte $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$, en diffeomorfi $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$[‡]. Mer utdypende må vi for gitt $w = r_1 e^{i\Phi} \in \mathbb{C}$ finne entydig $z = r_2 e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ slik at $h_{\mathbf{t}_0}(z) = w$. Siden $|h_{\mathbf{t}_0}(z)| = |z|$ reduserer dette til å løse ligningen

$$\Phi = \theta + G_m(\theta, \mathbf{t}_0) \tag{4.2}$$

Velger vi m så stor at $|\frac{\partial G_m}{\partial \theta}| < 1$, da er $\theta + G_m(\theta, \mathbf{t}_0)$ en strengt voksende funksjon av θ, som fikserer 0 og 2π. Ved skjæringssetningen har da ligning 4.2 entydig løsning for alle $\Phi \in [0, 2\pi)$, og $h_{\mathbf{t}_0}(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er en diffeomorfi.

I nedre halvplan $\mathbb{H}^- = \{\mathrm{Im} z < 0\}$ er $\pi < \theta < 2\pi$ og derfor $G_m(\theta, t_0) = 0$. Men da er $h_{\mathbf{t}_0} \equiv z$ i $\mathbb{H}^-$, og $h_{\mathbf{t}_0}$ er dermed orienteringsbevarende. Hva angår dilatasjonen $\|\mu_{\mathbf{t}_0}\|_\infty$ vet vi, at når $m \to \infty$ nærmer G_m seg 0 uniformt, og dermed er $h_{\mathbf{t}_0}$ "nesten" identiteten på $\mathbb{C}$. Vi forventer derfor at $\|\mu_{\mathbf{t}_0}\|_\infty \to 0$ når $m \to \infty$.

For å vise dette uttrykker vi den komplekse dilatasjonen $\mu = \frac{\overline{\partial}}{\partial}$ ved $r, \theta, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$, der r, θ angir polare koordinater. Utregningene er elementær kalkulus, men ganske omfattende, så vi nøyer oss med resultatet:

$$\mu(re^{i\theta}) = \frac{\overline{\partial}}{\partial} = \frac{e^{2i\theta}(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \theta})}{r\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\partial}{\partial \theta}}$$

For $h_{\mathbf{t}_0}(z) = ze^{iG_m(\arg z, \mathbf{t}_0)} = re^{i(\theta + G_m(\theta, \mathbf{t}_0))}$ gir dette:

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathbf{t}_0}(re^{i\theta}) &= \frac{e^{2i\theta}\left[re^{i(\theta+G_m(\theta,\mathbf{t}_0))} + ire^{i(\theta+G_m(\theta,\mathbf{t}_0))}(1 + \frac{\partial G_m}{\partial \theta})i\right]}{\left[re^{i(\theta+G_m(\theta,\mathbf{t}_0))} - ire^{i(\theta+G_m(\theta,\mathbf{t}_0))}(1 + \frac{\partial G_m}{\partial \theta})i\right]} \\
&= \frac{e^{2i\theta}(1 + i(1 + \frac{\partial G_m}{\partial \theta})i)}{1 - i(1 + \frac{\partial G_m}{\partial \theta})i} \\
&= \frac{-e^{2i\theta}\frac{\partial G_m}{\partial \theta}}{2 + \frac{\partial G_m}{\partial \theta}}
\end{aligned}$$

Dette uttrykket går, som forventet, mot null når $m \to \infty$. I tillegg ser vi, at $\|\mu_{\mathbf{t}_0}\|_\infty < 1$ så alle $h_{\mathbf{t}}$ er kvasikonforme. Videre ser vi av uttrykket for $\mu_{\mathbf{t}_0}$, at $\mu_{\mathbf{t}}(z_0)$ er C^∞-glatt med hensyn på $\mathbf{t}$, når $z = z_0$ er konstant.

Til slutt noterer vi, at dersom $\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2$ da vil $h_{\mathbf{t}_1} \neq h_{\mathbf{t}_2}$ i et punkt på enhver sirkel med sentrum i origo. For dersom $h_{\mathbf{t}_1} = h_{\mathbf{t}_2}$ da er

$$\begin{aligned}
h_{\mathbf{t}_1}(re^{i\theta}) &= h_{\mathbf{t}_2}(re^{i\theta}) \\
re^{i(\theta+G_m(\theta,\mathbf{t}_1))} &= re^{i(\theta+G_m(\theta,\mathbf{t}_2))}
\end{aligned}$$

Men siden $\theta + G_m(\theta, \mathbf{t}_0)$ er strengt voksende fra 0 til 2π, betyr dette at

$$G_m(\theta, \mathbf{t}_1)) = G_m(\theta, \mathbf{t}_2))$$

[‡]Funksjonen $h_{\mathbf{t}}$ avhenger opplagt av m men av notasjonsmessige hensyn utelater vi å innkorporere m i symbolet for funksjonen. Det essensielle vil hele tiden være at vi kan velge m "stor nok".

Dermed er $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$, se også figur 4.3. Poenget er viktig, for det er netopp denne egenskapen ved familien $h_{\mathbf{t}}(z)$, som i siste ende gir motstriden i hovedbeviset vårt.

Restringerer vi $h_{\mathbf{t}}(z)$-ene til $\mathbb{D} \times \mathbb{K}^m$ har nå fullført beviset for lemma 4.2.2. □

Som tidligere beskrevet kan enhver beltramikoeffisient $\mu \in B(\mathbb{D})$ løftes til U_0 og deretter utvides til en f-invariant beltramikoeffisient η definert over hele $\hat{\mathbb{C}}$. Det samme gjelder da selvfølgelig for alle $\mu_{\mathbf{t}}(z)$ i lemma 4.2.2. Vi ønsker å vise, at for alle faste $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ er avbildningen,

$$\mathbf{t} \mapsto \mu_{\mathbf{t}}(z_0) \mapsto \eta_{\mathbf{t}}(w_0) \mapsto \phi_{\mathbf{t}}(w_0) \quad , \text{der } \phi_{\mathbf{t}}^* 0 = \eta_{\mathbf{t}} \tag{4.3}$$

en glatt funksjon av $\mathbf{t}$. Ser vi på avbildningen $\mathbf{t} \mapsto \eta_{\mathbf{t}}(w_0)$, er denne opplagt glatt i $\mathbf{t}$ når $w_0 \in \hat{\mathbb{C}} \setminus GO(U_0)$, siden $\eta_{\mathbf{t}} \equiv 0$ i dette området. Dersom $w_0 \in GO(U_0)$, d.v.s. $w_0 = f^{\circ n} \circ \psi(z_0)$ for passende $n \in \mathbb{Z}$, da observerer vi at avbildningen $\mu_{\mathbf{t}}(z_0) \mapsto \eta_{\mathbf{t}}(w_0)$, blott er multiplikasjon med en unimodulær faktor, som *ikke* avhenger av $\mathbf{t}$. Dette fordi ψ og f er holomorfe. Uansett er $\mathbf{t} \mapsto \eta_{\mathbf{t}}(z_0)$ en glatt funksjon for alle $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, og ved Ahlfors-Bers' setning 3.4.3 om variable beltramikoeffisienter, er derfor $\mathbf{t} \mapsto \phi_{\mathbf{t}}(z_0)$ en glatt funksjon for alle faste z_0.

Spesiellt har vi, at dersom $\alpha_1, \cdots, \alpha_{d_f} \in \mathbb{C}$ betegner nullpunktene og $\beta_1, \cdots, \beta_{d_f} \in \mathbb{C}$ polene til f[§], da er avbildningen $\Xi : \mathbb{K}^m \to \hat{\mathbb{C}}^{2d_f}$, gitt ved:

$$\Xi(t) = (\phi_{\mathbf{t}}(\alpha_1), \cdots, \phi_{\mathbf{t}}(\alpha_{d_f}), \phi_{\mathbf{t}}(\beta_1), \cdots, \phi_{\mathbf{t}}(\beta_{d_f}))$$

glatt med hensyn på $\mathbf{t}$. Videre definerer $\Xi(\mathbf{t})$ entydig den rasjonale avbildningen $f_{\mathbf{t}} = \phi_{\mathbf{t}} \circ f \circ \phi_{\mathbf{t}}^{-1}$: For eksempel har vi for enhver α_j:

$$f_{\mathbf{t}}(\phi_{\mathbf{t}}(\alpha_j)) = \phi_{\mathbf{t}} \circ f \circ \phi_{\mathbf{t}}^{-1}(\phi_{\mathbf{t}}(\alpha_j)) = \phi_{\mathbf{t}} \circ f(\alpha_j) = \phi_{\mathbf{t}}(0) = 0$$

Tilsvarende finner vi at $f_{\mathbf{t}}(\phi_{\mathbf{t}}(\beta_j)) = \infty$ for alle $j = 1, \cdots, d_f$. Med andre ord bestemmer vektoren $\Xi(\mathbf{t})$ alle nullpunkter og alle poler for $f_{\mathbf{t}}$. I tillegg er normaliseringen nedarvet fra f:

$$f_{\mathbf{t}}(0) = \phi_{\mathbf{t}} \circ f \circ \phi_{\mathbf{t}}^{-1}(0) = \phi_{\mathbf{t}} \circ f(0) = \phi_{\mathbf{t}}(1) = 1$$

Eneste mulighet er at

$$f_{\mathbf{t}}(z) = \prod_{j=1}^{d_f} \frac{z - \phi_{\mathbf{t}}(\alpha_j)}{z - \phi_{\mathbf{t}}(\beta_j)}$$

Spesielt betyr dette, at for fast $\mathbf{t}$ vil alle $\mathbf{s} \in \Xi^{-1}(\Xi(\mathbf{t}))$ oppfylde $f_{\mathbf{s}} \equiv f_{\mathbf{t}}$. Idéen videre er nå å vise, at ved å velge m i lemma 4.2.2 større enn eller lik $4d_f + 1$ vil mengden $\Xi^{-1}(\Xi(\mathbf{t}))$, for passende $\mathbf{t}$, være "stor".

[§]Multiple nullpunkter og poler opptrer det samme antall ganger i følgene α_j, β_j som deres multiplisitet tilsier.

Velger vi $m \geq 4d_f + 1$, da er

$$\dim \mathbb{K}^m = m \geq 4d_f + 1 > 4d_f = \dim \mathbb{C}^{2d_f}$$

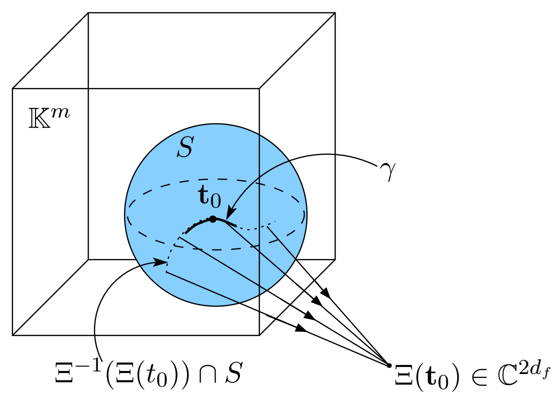
For alle $\mathbf{t} \in \mathbb{K}^m$ er rangen til lineæravbildningen

$$d_{\mathbf{t}} f : T_{\mathbf{t}}(\mathbb{K}^m) \to T_{\Xi(\mathbf{t})}\mathbb{C}^{2d_f}$$

mindre enn eller lik $\max(\mathbb{K}^m, \mathbb{C}^{2d_f}) = 4d_f$ og antar sitt maksimum r i et punkt $\mathbf{t}_0 \subset \mathbb{K}^m$. Siden rangen $rk\,(\Xi, \mathbf{t}_0)$ ikke kan minke i en åpen m-ball S (se [Dundas, s.73]) rundt $\mathbf{t}_0$, må $rk\,(\Xi, \mathbf{t})\big|_{\mathbf{t}\in S} = r$. Vi ønsker å vise, at $\left[\Xi^{-1}(\Xi(\mathbf{t}_0))\right] \cap S$ er en undermangfoldighet av S av dimensjon $m - r > 0$.

Men dette følger av, at Ξ er en glatt avbildning av konstant rang fra S inn i $\mathbb{C}^{2d_f}$, og at mengden $\Xi^{-1}(\Xi(\mathbf{t}_0))$ er ikke-tom. Dermed følger det, siden $\dim S = m > r$, direkte av setning 1.3.1 at nivåmengden $\Xi^{-1}(\Xi(\mathbf{t}_0)) \cap S$ er en glatt undermanfoldighet av S av positiv dimensjon.

Men da eksisterer det en ikke-konstant kurve $\gamma : [0,1] \to \Xi^{-1}(\Xi(\mathbf{t}_0)) \cap S \subset \mathbb{K}^m$, se figur 4.4, med den egenskapen at $\Xi(\gamma(r)) = \Xi(\mathbf{t}_0)$ for alle $r \in [0,1]$. Punktet $\Xi(\mathbf{t}_0) \in \mathbb{C}^{2d_f}$ bestemmer, som tidligere argumentert, entydig den



Figur 4.4: *Nivåmengden* $\Xi^{-1}(\Xi(\mathbf{t}_0))$ *har positiv dimensjon, og inneholder derfor en ikke-konstant kurve* γ.

rasjonale avbildningen $f_{\mathbf{t}_0}$, og dermed er:

$$f_{\gamma(r)} = \phi_{\gamma(r)} \circ f \circ \phi_{\gamma(r)}^{-1} = f_{\mathbf{t}_0} \quad \forall r \in [0,1]$$

Det vil si; vi har klart å konstruere en familie $\phi_{\gamma(r)}$, der $r \in [0,1]$, som alle konjugerer f til en og samme funksjon $f_{\mathbf{t}_0}$. Spesielt kommuterer følgende diagram:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{C}}[\eta_{\gamma(r)}] & \xrightarrow{f} & \hat{\mathbb{C}}[\eta_{\gamma(r)}] \\ \phi_{\gamma(r)} \big\downarrow & & \big\downarrow \phi_{\gamma(r)} \\ \hat{\mathbb{C}}[0] & \xrightarrow{f_{\mathbf{t}_0}} & \hat{\mathbb{C}}[0] \\ \phi_{\gamma(0)} \big\uparrow & & \big\uparrow \phi_{\gamma(0)} \\ \hat{\mathbb{C}}[\eta_{\gamma(0)}] & \xrightarrow{f} & \hat{\mathbb{C}}[\eta_{\gamma(0)}] \end{array} \tag{4.4}$$

Følger vi diagrammet langs ytre kant, ser vi umiddelbart at funksjonen

$$\Gamma_r = \phi_{\gamma(0)}^{-1} \circ \phi_{\gamma(r)}$$

konjugerer f til seg selv, og følgelig må fatou og juliamengden for f være invariant under alle Γ_r. Videre noterer vi oss, at triviellt er $\Gamma_0 = \phi_{\gamma(0)}^{-1} \circ \phi_{\gamma(0)} \equiv z$, og avbildningen som tar

$$r \overset{\gamma}{\mapsto} \gamma(r) \overset{4.3}{\mapsto} \phi_{\gamma(r)}(z_0) \overset{\phi_{\gamma(0)}^{-1}}{\mapsto} \Gamma_r(z_0)$$

er *kontinuerlig*¶ for alle faste z_0. Men da ligger, for gitt $z_0 \in \mathcal{F}_f$, alle $\Gamma_r(z_0)$ på en sammenhengende kurve, som går fra $\Gamma_0(z_0) = z_0$ til $\Gamma_1(z_0)$. Siden $\mathcal{F}_f$ er Γ_r-invariant uansett r, må hele denne kurve ligge i den samme fatoukomponent. Eneste måte dette lar seg gjøre på, er at alle Γ_r, fikserer alle komponenter i fatoumengden for f.
På juliamengden $\mathcal{J}_f$ er aksjonen til Γ_r enda penere, siden Γ_r her faktisk er lik identiteten.

For å vise dette la $p \geq 1$ og anta c er et element i fikspunktmengden F_p for $f^{\circ p}$. Da er også $\Gamma_r(c)$ fikspunkt for $f^{\circ p}$ - uansett r:

$$f^{\circ p}(\Gamma_r(c)) = \Gamma_r \circ f^{\circ p} \circ \Gamma_r^{-1}(\Gamma_r(c)) = \Gamma_r \circ f^{\circ p}(c) = \Gamma_r(c)$$

Men $r \mapsto \Gamma_r(c)$ er kontinuerlig, og en kontinuerlig funksjon $g : [0,1] \to \hat{\mathbb{C}}$ som bare kan ta et endelig antall verdier må være konstant. Derfor‖ må $\Gamma_r(c) = \Gamma_0(c) = c$ for alle $r \in [0,1]$, alle $c \in F_p$ og alle $p \geq 1$. Det vil si, at $\Gamma_r(z) = z$ på mengden

$$P = \bigcup_{p=1}^{\infty} F_p$$

Ved kontinuitet av Γ_r, er også $\Gamma_r \equiv Id$ på $\overline{P}$ for alle $r \in [0,1]$. Men P er mengden av periodiske punkter for f, og ved setning 2.1.2 punkt 5 er $\mathcal{J}_f \subset \overline{P}$. Dermed er, for alle $r \in [0,1]$, $\Gamma_r \equiv Id$ på juliamengden for f.

Situasjonen er nå den, at vi har en familie av kvasikonforme avbildninger Γ_r, som konjugerer f til seg selv på $\hat{\mathbb{C}}$, og som fikserer alle *punkter* i $\mathcal{J}_f$ og

¶Dette følger av Ahlfors-Bers' setning om variable beltramikoeffisienter 3.4.3, og er identisk med beviset for glatthet av avbildningen i ligning 4.3.

‖$|F_p| \leq (d_f + 1)^p < \infty$

alle *komponenter* i $\mathcal{F}_f$. Spesielt er da $\Gamma_r(U_0) = U_0$ og $\Gamma_r\big|_{\partial U_0} = Id$. Vi ønsker, ved hjelp av den konforme korrespondansen $\psi : U_0 \to \mathbb{D}$, å overføre denne pene randbetingelsen til de kvasikonforme avbildningene $\Upsilon_r : \mathbb{D}[\mu_{\gamma(r)}] \to \mathbb{D}[\mu_{\gamma(0)}]$ definert ved:

$$\Upsilon_r = \psi \circ \Gamma_r \circ \psi^{-1}$$

Generelt har vi, at enhver kvasikonform avbildning $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$, og hermed spesielt alle Υ_r, utvider homeomorft til $\overline{\mathbb{D}}$ [Ahlfors, s.30]. Vi ønsker å vise at for denne utvidelsen er $\Upsilon_r\big|_{\partial\mathbb{D}} = Id$, og for dette ønsker vi å bevise, at det hyperbolske avviket fra identiteten på $\mathbb{D}$

$$\varrho_{\mathbb{D}}(z, \Upsilon_r(z))$$

er er uniformt begrenset av, si d. Dette er tilstrekkelig, for gitt $\{z_n\}_1^\infty \in \mathbb{D}$ med $z_n \to z \in \partial\mathbb{D}$, garanterer dette, at den *euklidske* avstanden fra z_n til $\Upsilon_r(z_n)$ går mot 0 når $z_n \to z$. Ved kontinuitet av Υ_r i punktet z må da $\Upsilon_r(z) = z$, som ønsket.

Det gjenstår selvsagt å bevise en slik begrensning. A priori har vi liten kontroll på oppførselen til Υ_r, men følgende to fakta indikerer, hvordan vi kan overkomme dette problemet ved å jobbe i U_0 med Γ_r i stedet:

1. ψ er en isometri mellom $(\mathbb{D}, \varrho_{\mathbb{D}})$ og (U_0, ϱ_{U_0}).
2. For gitt $\delta > 0$ kan vi ved å velge m stor nok garantere at dilatasjonen til Γ_r ikke overstiger δ.**

Det signifikante i punkt 2. ligger i at setning 4.6 i [Lehto] garanterer, at for enhver $\epsilon > 0$, eksisterer det en $\delta > 0$ slik at, hvis $\|\mu\|_\infty < \delta$ da vil enhver g, som fikserer $0, 1, \infty$ med $g^*\mu = \mu_0$ oppfylle $\|\sigma(g(z), z)\|_\infty < \epsilon$, der σ er den sfæriske metrikken. Men den sfæriske metrikken og den euklidske metrikken er ekvivalente i alle kompakte delmengder av $\mathbb{C}$, så vi kan spesielt sikre at $|z - g(z)| < \epsilon$ på enhver gitt endelig mengde, bare vi velger $\|\mu\|_\infty$ liten nok. Helt presist tar vi $\epsilon = \frac{1}{2}$, og velger m så stor, at hvis $\|\mu\|_\infty = \|\mu_{\Gamma_r}\|_\infty$†† da er $|z - g(z)| < \frac{1}{2}$ på disken $\{|z| < 2\}$, når g fikserer $0, 1, \infty$ og $g^*0 = \mu$.

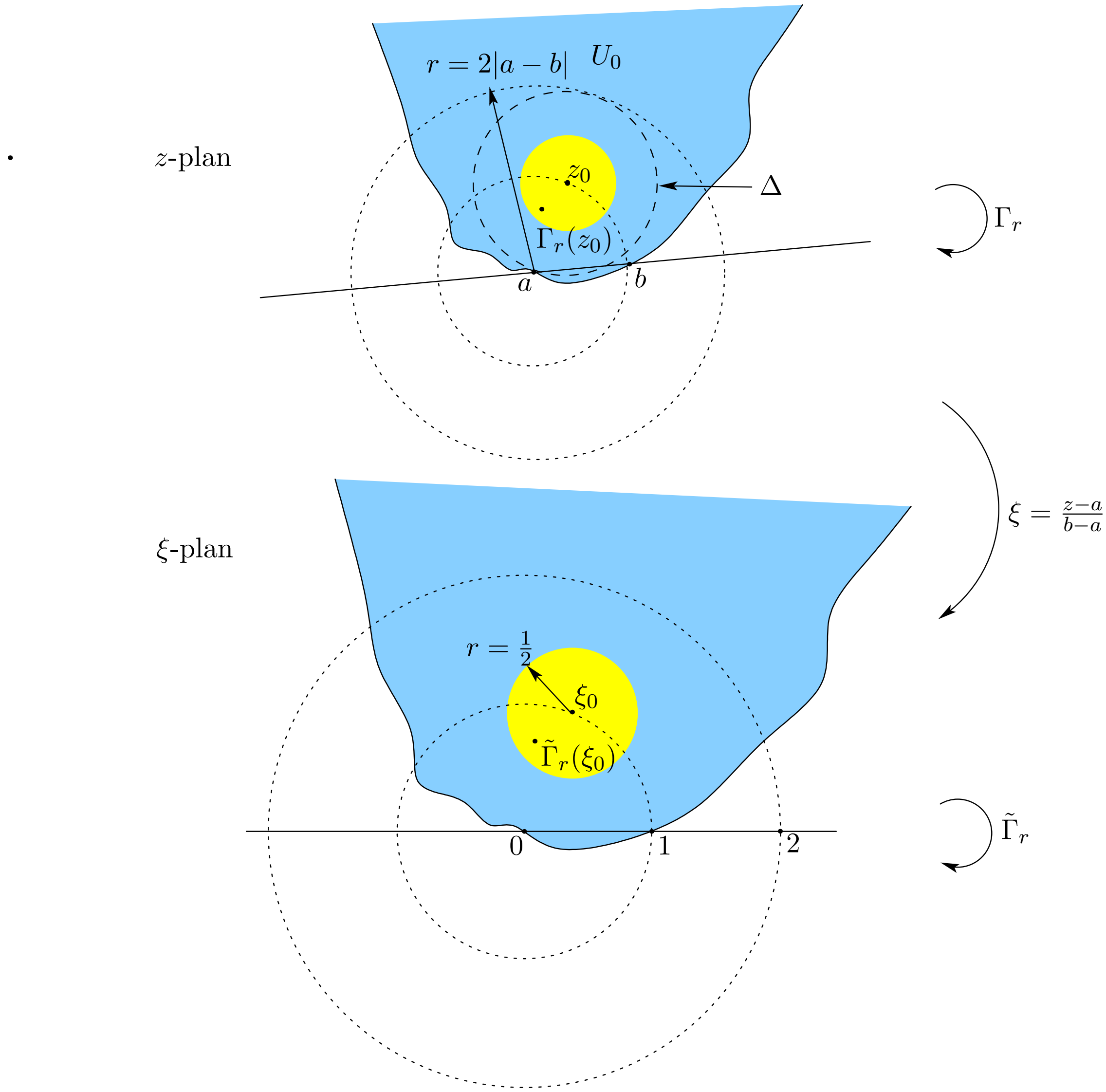
Argumentet for begrensningen av $\varrho_{U_0}(z, \Gamma_r)$ i U_0 går da som følger: Vi kan, ved eventuelt å foreta en forutgående konjugering med en möbiustransformasjon, uten tap av generalitet anta at $\infty \in \partial U_0$. Da gir følgende konstruksjon mening: La $z_0 \in U_0$ være gitt og la $a \in \partial U_0$ minimere $\text{dist}(z_0, \partial U_0)$. Da eksisterer $b \in \partial U_0$ med $|a - b| = |a - z_0|$, se figur 4.5.

Vi innfører nå nye koordinater ved den euklidske similariteten $\xi = \frac{z-a}{b-a}$ slik, at $\Gamma_r(z)$ i ξ-koordinater blir

$$\tilde{\Gamma}_r(\xi) = \left(\frac{z-a}{b-a}\right) \circ \Gamma_r \circ \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^{-1}(\xi) = \frac{\Gamma_r(a + \xi(b-a)) - a}{b-a}$$

**Γ_r avhenger riktignok av m, men for alle tilstrekkelig store m eksisterer en familie Γ_r med alle egenskapene vi har beskrevet. Vi kan derfor fritt fiksere en "stor nok" m.

††$K_{\Gamma_r} = K_{\phi^{-1}_{\gamma(0)} \circ \phi_{\gamma(r)}} \leq K_{\phi_{\gamma(0)}} K_{\phi_{\gamma(r)}} \to 1$ når $m \to \infty \Rightarrow \|\mu_{\Gamma_r}\|_\infty \to 0$ når $m \to \infty$.



Figur 4.5: *Similariteten* $\frac{z-a}{b-a}$ *gjør ikke annet, enn at den roterer skalerer og translaterer så linjen gjennom* a *og* b *avbildes på den reelle akse, med* $a \mapsto 0$ *og* $b \mapsto 1$*. Alle sirkler i* z*-planet avbildes til sirkler i* ξ*-planet, og radius skaleres med en faktor* $\frac{1}{|b-a|}$.

Siden Γ_r fikserer ∂U_0 fikserer den spesiellt a, b, ∞, og dermed fikserer $\tilde{\Gamma}_r$ punktene $0, 1, \infty$. Siden dilatasjon ikke forandres ved konjugering med en konform avbildning, vil $\|\mu_{\tilde{\Gamma}_r}\|_\infty = \|\mu_{\Gamma_r}\|_\infty$. Dersom vi setter $\xi_0 = \frac{z_0-a}{b-a}$, garanterer vårt valg av m, at $|\tilde{\Gamma}_r(\xi_0) - \xi_0| < \frac{1}{2}$ siden $|\xi_0| = 1 < 2$. Men det betyr igjen at $|z_0 - \Gamma_r(z_0)| < \frac{|a-b|}{2}$ i z-planet, se figur 4.5.

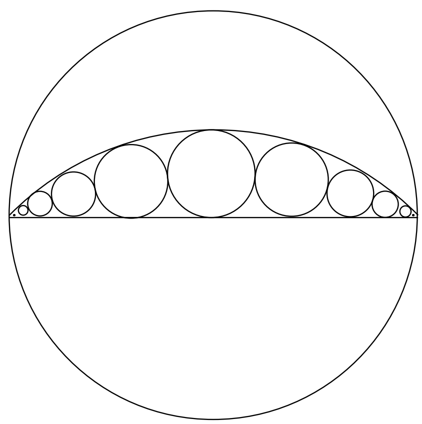
Spesielt har vi at $\Gamma_r(z_0) \in \Delta = \{|z - z_0| < |a-b|\}$. Vi utnytter nå to velkjente fakta. For det første følger det av Schwarz-Picks lemma, at for enhver analytisk avbildning $g : U \to V$, der U, V er enkeltsammenhengende, er $\varrho_V(f(z_1), f(z_2)) \leq \varrho_U(z_1, z_2)$ [Gamelin, kap.IX.2]. Tar vi $i : \Delta \to U_0$ der i er inklusjonsavbildningen, følger det direkte at $\varrho_\Delta(z_1, z_2) \geq \varrho_{U_0}(z_1, z_2)$. For det andre utnytter vi, at i enhetsdisken har vi det eksplisitte uttrykket $\varrho_\mathbb{D}(0, z) = \log \frac{1+|a|}{1-|a|}$. Vi får:

$$\varrho_{U_0}(z_0, \Gamma_r(z_0)) \leq \varrho_\Delta(z_0, \Gamma_r(z_0)) = \log \frac{1 + \frac{|z_0 - \Gamma_r(z_0)|}{|a-b|}}{1 - \frac{|z_0 - \Gamma_r(z_0)|}{|a-b|}} \leq \log \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \log 3$$

Men som tidligere nevnt er ψ en isometri mellom $(\mathbb{D}, \varrho_\mathbb{D})$ og (U_0, ϱ_{U_0}), og når $\zeta_0 = \psi(z_0)$ er dermed

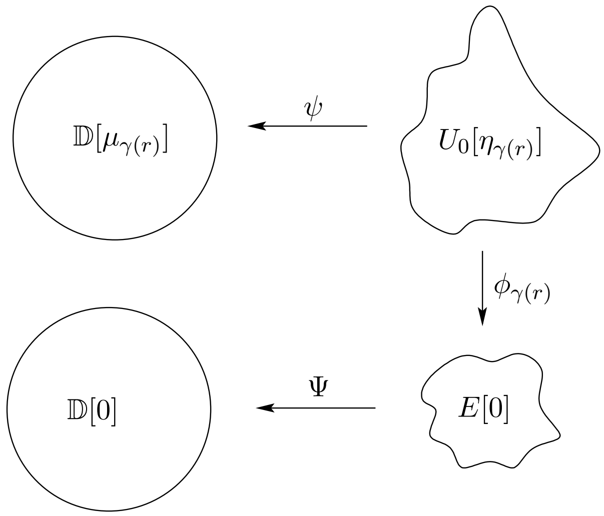
$$\begin{aligned}\varrho_\mathbb{D}(\zeta_0, \Upsilon_r(\zeta_0)) &= \varrho_{U_0}(z_0, \psi^{-1}(\Upsilon_r(\zeta_0)) = \varrho_{U_0}(z_0, \Gamma_r(\psi^{-1}(\zeta_0)) \\ &= \varrho_{U_0}(z_0, \Gamma_r(z_0)) \leq \log 3\end{aligned}$$

Dette betyr, som tidligere nevnt, at den euklidske avstanden mellom ζ_0 og $\Upsilon_r(\zeta_0)$ går mot null når $|\zeta_0| \to 1$, se figur 4.6. Dermed er $\Upsilon_r \equiv Id$ på $\partial\mathbb{D}$.



Figur 4.6: *Sirkler av lik hyperbolsk radius*

Vi er nå klar for det avsluttende argument. Situasjonen er avbildet i figur 4.7. Siden $\Gamma_r = \phi_{\gamma(0)}^{-1} \circ \phi_{\gamma(r)}$ fikserer U_0, må alle $\phi_{\gamma(r)}$ avbilde U_0 på det samme enkeltsammenhengende område $E = \phi_{\gamma(0)}(U_0)$, som ved Riemanns avbildningsats er konformt ekvivalent med $\mathbb{D}$ via en konform avbildning $\Psi : E \to \mathbb{D}$. Dette leder naturlig frem til nok en familie av homeomorfier $\Omega_r = \Psi \circ \phi_{\gamma(r)} \circ \psi^{-1} : \mathbb{D}[\mu_{\gamma(r)}] \to \mathbb{D}[0]$, hvis sammenheng med resten av konstruksjonen vår er vist i nedenstående kommutative diagram, der alle avbildninger er analytiske mellom riemannflater, og bølgete piler angir avbildninger som i tillegg er konforme i



Figur 4.7:

"vanlig" forstand.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}[\mu_{\gamma(r)}] \arrow[drr, "\Omega_r"] \arrow[dd, "\Upsilon_r"'] & & & & U_0[\eta_{\gamma(r)}] \arrow[llll, squiggly, "\psi"'] \arrow[dl, "\phi_{\gamma(r)}"'] \arrow[dd, "\Gamma_r"] \\
& & \mathbb{D}[0] & E[0] \arrow[l, squiggly, "\Psi"'] & \\
\mathbb{D}[\mu_{\gamma(0)}] \arrow[urr, "\Omega_0"'] & & & & U_0[\eta_{\gamma(0)}] \arrow[llll, squiggly, "\psi"] \arrow[ul, "\phi_{\gamma(0)}"]
\end{tikzcd} \tag{4.5}$$

Siden enhver kvasikonform automorfi på $\mathbb{D}$, som tidligere nevnt, utvider kontinuerlig til $\partial\mathbb{D}$, gjelder det samme for alle Ω_r. Av diagrammet 4.5 ser vi dessuten at i $\mathbb{D}$ er $\Omega_0^{-1} \circ \Omega_r = \Upsilon_r$. Hermed må Υ_r og $\Omega_0^{-1} \circ \Omega_r$ ved kontinuitet ha samme utvidelse til $\partial\mathbb{D}$, og siden $\Upsilon_r \equiv Id$ på $\partial\mathbb{D}$ må

$$\Omega_0^{-1} \circ \Omega_r \big|_{\partial\mathbb{D}} \equiv Id$$

Videre ser vi av diagram 4.5 at $\Omega_r^* 0 = \mu_{\gamma(r)}$, og det betyr at Ω_r og $h_{\gamma(r)}$ løser den samme beltramiligning på $\mathbb{D}$. Det eksisterer da en möbiusavbildning $M_r \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ slik, at på $\overline{\mathbb{D}}$ er

$$\Omega_r = M_r \circ h_{\gamma(r)}$$

Men på $\partial\mathbb{D}$ har vi da:

$$Id = \Omega_0^{-1} \circ \Omega_r = h_{\gamma(0)}^{-1} \circ M_0^{-1} \circ M_r \circ h_{\gamma(r)} \Rightarrow \boxed{M_0 \circ h_{\gamma(0)} = M_r \circ h_{\gamma(r)}}$$

På nedre halvsirkel er både $h_{\gamma(r)}$ og $h_{\gamma(0)}$ lik identiteten, og dermed er $M_0 = M_r$ her. Ved entydighetsprinsippet for holomorfe funksjoner er da $M_0 = M_r$ globalt. Det betyr at $h_{\gamma(r)} = h_{\gamma(0)}$ på hele $\partial\mathbb{D}$, og dette strider mot konstruksjonen av familien $h_{\mathbf{t}}$. Vi konkluderer at fatoumengden for f ikke har noen vandrende komponeter. $\square$

Kapittel 5

Klassifikasjonssetningen

Som beskrevet i seksjon 2.3 er vårt overordnede mål i denne oppgaven å bevise klassifikasjonssetningen for fikserte komponenter av fatoumengden $\mathcal{F}_f$ for en rasjonal funksjon f. Vi skal som tidligere nevnt bevise at alle fikserte komponenter faller i en av de fem kategorier listet i definisjon 2.3.1.

Ikke overraskende, sett i lyset av definisjon 2.3.1, utspringer setningen av en nærmere analyse av funksjonene i klassen $\mathfrak{F}_U$ av mulige grensefunksjoner til normalt konvergente delfølger av $\{f^{\circ n}\}_{n=1}^{\infty}$ på en gitt fiksert komponent U^*.

5.1 Konstante grensefunksjoner

Vi skal dele opp i flere tilfeller, etter hvorvidt $\mathfrak{F}_U$ inneholder ikke-konstante funksjoner eller ikke. Tilfellet der $\mathfrak{F}_U$ bare inneholder konstante funksjoner behandles først, og dette simplifiseres kraftig av følgende lemma.

5.1.1 Lemma. *[Beardon, s.162] Dersom $\mathfrak{F}_U$ bare inneholder konstante funksjoner, da inneholder $\mathfrak{F}_U$ bare en funksjon med verdi c, der c er ett fikspunkt for f. Videre konvergerer følgen av alle itererte lokalt uniformt mot c.*

Bevis. Vi viser først, at verdien c til enhver konstant funksjon $g \in \mathfrak{F}_U$ er et fikspunkt for f: La $f^{\circ n_k}$ konvergere lokalt uniformt på U mot $c \in \overline{U}$. Da gir kontinuiteten av f:

$$c = \underbrace{\lim_{n_k \to \infty} f^{\circ n_k} = \lim_{n_k \to \infty} f^{\circ n_k} \circ f}_{f(U)=U} = f\left(\lim_{n_k \to \infty} f^{\circ n_k}\right) = f(c)$$

Dette viser at c er et fikspunkt for f. For å fullføre beviset for lemmaet trenger vi bare vise, at det bare eksisterer ett slik fikspunkt.

Siden fikspunktene til f er gitt som løsningene til $0 = z - f(z)$, kan det høyst eksistere $d_f + 1$ slike, og vi kan separere disse med åpne disjunkte mengder D_j,

*Det kan være greit å notere seg at $\mathfrak{F}_U$ selvsagt ikke er tom siden familien av $f^{\circ n}$ er normal på U.

der $1 \leq j \leq d_f + 1$. Velger vi en tilfeldig kompakt $K \subset U$ kan vi, ved å eventuellt forstørre K, anta at K er sammenhengende og inneholder ett punkt $\bar{z}_0$ slik at $f(z_0) \in K$. Da er

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{\circ n}(K)$$

sammenhengende og det samme er alle

$$K_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} f^{\circ n}(K)$$

Vi påstår nå at hvis N er stor nok vil $K_N \subset D_k$ for en eller annen k mellom 1 og $d_f + 1$. For å se dette antar vi først uten tap av generalitet at en delfølge $f^{\circ n_j} \to c_1$ på K; d.v.s. $k = 1$. Dersom ingen $K_N \subset D_1$ vil det, siden alle K_N er sammenhengende, eksistere uendelig mange n slik at $f^{\circ n}(K)$ snitter

$$\hat{\mathbb{C}} \setminus (D_1 \cup \cdots \cup D_{d_f+1})$$

Men for en delfølge av disse n må de tilsvarende itererte konvergere uniformt på K mot en av c_j-ene, og det er umulig. Vi konkluderer at for store N vil $K_N \subset c_1$, og dermed er c_1 verdien til det eneste element i $\mathfrak{F}_U$, og hele følgen av itererte $f^{\circ n}$ konvergerer lokalt uniformt mot c_1. $\square$

Med bare ett fikspunkt som mulig grense splitter vi nå opp i to tilfeller ettersom $c \in U$ eller $c \in \partial U$.

5.1.2 Setning. *[FATOU] Dersom $c \in U$ er U enten en schröderkomponent eller en böttcherkomponent.*

Bevis. Gitt at $c \in U$ eksisterer, siden U er åpen, en $\epsilon > 0$ slik at $c \in \overline{D_\epsilon(c)} \subset U$. $\overline{D_\epsilon(c)}$ er kompakt så for en delfølge $f^{\circ n_j}$ vil $f^{\circ n_j} \to c$ på $\overline{D_\epsilon(c)}$, og for et naturlig tall m er $f^{\circ m}(\overline{D_\epsilon(c)}) \subset D_{\frac{\epsilon}{2}}(c)$. Ved Schwarz' lemma er da $|(f^{\circ m})'(c)| < 1$, og siden c er et fikspunkt, er $(f^{\circ m})'(c) = f'(c)^m$, og dermed: $|f'(c)| < 1$. $\square$

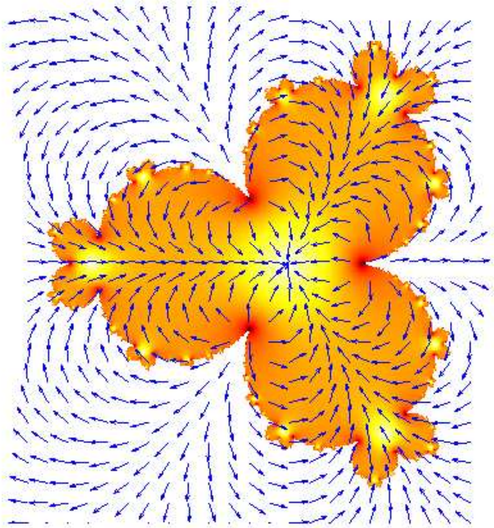
5.1.3 Eksempel. *Newtons metode*

Newtons metode angis ofte som opprinnelsen til studiet av rasjonal iterasjonsteori. Som kjent benyttes metoden til å finne nullpunkt for funksjoner der det ikke er mulig å løse problemet eksplisitt, for eksempel for polynom av grad større enn fem. Metoden er gitt ved det iterative skjemaet

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

der det er velkjent at hvis startverdien z_0 velges tilstrekkelig tett på en gitt løsning så konvergerer metoden mot den rette løsningen. Ett problem her er at dette krever et kvalifisert førstegjetning, noe som ikke alltid er like lett.

Opp gjennom tiden har mange, blant andre Cayley, betraktet spørsmålet: For hvilke startverdier konvergerer Newtons metode mot en gitt løsning? Ser vi



Figur 5.1: *Bildet viser schröderkomponenten til* $z^4 + \frac{1}{2}z$. *Pilene indikerer i hvilken retning ett gitt punkt blir sendt av* f. *Som pilene indikerer tiltrekkes alle punkt mot det tiltrekkende fikspunktet i* 0, *der multiplikatoren er lik* $\frac{1}{2}$. *Bemerk også at fikspunktene* $\pm\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{e^{\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$ *er frastøtende med multiplikator lik* $\frac{3}{2}$.

på problemet i kompleks dynamisk setting, ser vi at verdien etter n iterasjoner med Newtons metode, og startverdi z_0, er lik $\mathcal{N}_f^{\circ n}(z_0)$, der

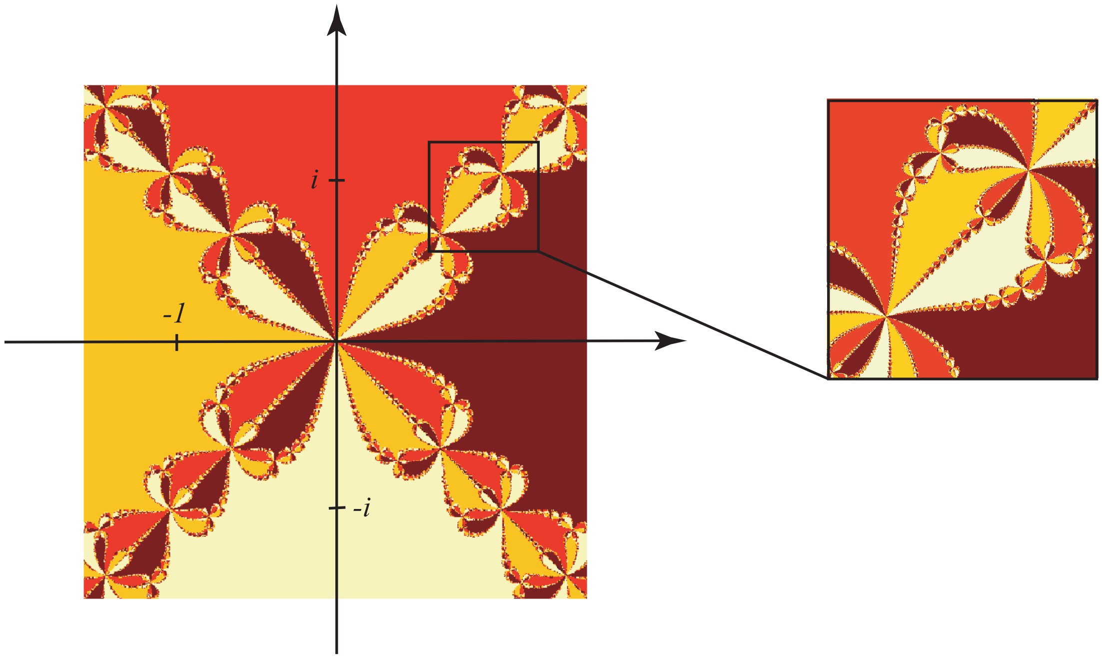
$$\mathcal{N}_f(z) = \frac{zf'(z) - f(z)}{f'(z)}$$

kalles newtonfunksjonen til f. Dersom z_0 er et nullpunkt for f med $f'(z_0) \neq 0$, da er

$$\mathcal{N}_f(z_0) = z_0 \quad \text{og} \quad \mathcal{N}_f'(z) = 1 - \frac{f''(z_0)f(z_0) + f'(z_0)^2}{f'(z_0)^2} = 0$$

Altså er z_0 fikspunkt i en böttcherkomponent U_{z_0} for $\mathcal{N}_f$, og ved setning 5.1.2 konverger Newtons metode mot z_0 for alle $z \in U_{z_0} \cup O^-(U_{z_0})$. Siden ∂U_{z_0} typisk er av fraktal natur, forklarer dette hvorfor problemet med å finne start verdier kan være være vanskelig. Denne observasjon er interessant i numerisk øyemed siden det viser at metoden kan være svært ømfindtlig for valg av startverdier. Figur 5.2 viser böttcherkomponentene for newtonfunksjonen til fjerdegradspolynomet $z^4 - 1$, og illusterer dette poenget tydelig.

Figur 5.2 synes å indikere at Newtons metode konvergerer mot en eller annen rot for nesten alle startverdier. Dette er ofte riktig, men ikke alltid. Ser en på familien av kubiske polynom av typen $f_A(z) = z^3 + (A-1)z - A$, eksisterer der en ikke-nullmengde $U \subset \mathbb{C}$ med den egenskapen, at for alle $A \in U$



Figur 5.2: *Hvert av nullpunktene* $\pm 1, \pm i$ *til* $f(z) = z^4 - 1$ *ligger i hver sin böttcherkomponent til Newtonfunksjonen* $\mathcal{N}_f$. *Områdene langs diagonalene er inverse bilder av disse. Velges startverdier i Juliamengden til* $\mathcal{N}_f$ *konvergerer ikke Newtons metode.*

eksisterer det en ikke-nullmengde V_A, slik at Newtons metode *ikke* konvergerer når initialverdien velges i V_A. Dette fenomenet knytter seg til eksistensen av p-*periodiske* shröderkomponenter i fatoumengden for $\mathcal{N}_{f_A}$. En komponent U i $\mathcal{F}_{\mathcal{N}_{f_A}}$ er en p-periodisk schröderkomponent hvis $p > 1$ er det minnste tallet slik at U er en schröderkomponent for $\mathcal{N}_{f_A}^{\circ p}$. En slik komponent refereres ofte til som en "extraneous" eller fremmed sykkel, og det er opplagt at newtons metode ikke kan konvergere hvis en slik eksisterer, da det impliserer eksistensen av p åpne områder som permuteres av newtonfunksjonen.

Dersom vi antar

$$V_0 \overset{\mathcal{N}_{f_A}}{\to} V_1 \overset{\mathcal{N}_{f_A}}{\to} V_2 \overset{\mathcal{N}_{f_A}}{\to} \cdots \overset{\mathcal{N}_{f_A}}{\to} V_{p-1} \overset{\mathcal{N}_{f_A}}{\to} V_0$$

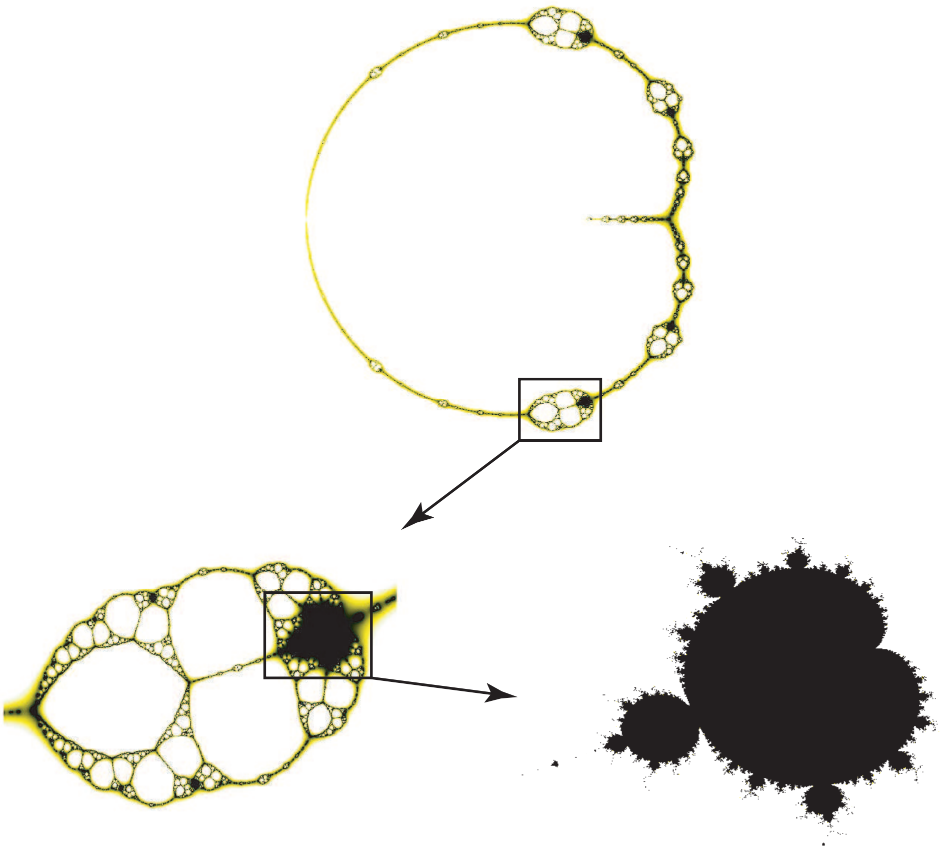
er en syklus av p-periodiske schröderkomponenter da inneholder hver V_i ved 5.1.1 og 5.1.2 presis ett tiltrekkende fikspunkt z_i for $\mathcal{N}_{f_A}^{\circ p}$. Disse fikspunktene danner det vi kaller en *tiltrekkende* p-sykkel $C = \{z_0, \ldots, z_{p-1}\}$ der,

$$z_0 \overset{\mathcal{N}_{f_A}}{\mapsto} z_1 \overset{\mathcal{N}_{f_A}}{\mapsto} \cdots \overset{\mathcal{N}_{f_A}}{\mapsto} z_{p-1} \overset{\mathcal{N}_{f_A}}{\mapsto} z_0 \tag{5.1}$$

og dist $(C, f^{\circ n}(z)) \to 0$ når $n \to \infty$ for alle

$$z \in GO(V_0) = \bigcup_{-\infty}^{p-1} \mathcal{N}_{f_A}^{\circ n}(V_0)$$

$GO(V_0)$ er med andre ord mengden av alle punkter, som tiltrekkes mot sykkelen C, og denne mengden inneholder alltid minnst ett kritisk punkt for $\mathcal{N}_{f_A}$, se([McMullen, s.3]). Et nødvendig, men *ikke* tilstrekkelig, kriterium for eksistens av en slik tiltrekkende fremmed sykkel er med andre ord, at minnst ett kritisk punkt for $\mathcal{N}_{f_A}$ *ikke* konvergerer mot et nullpunkt for f_A.



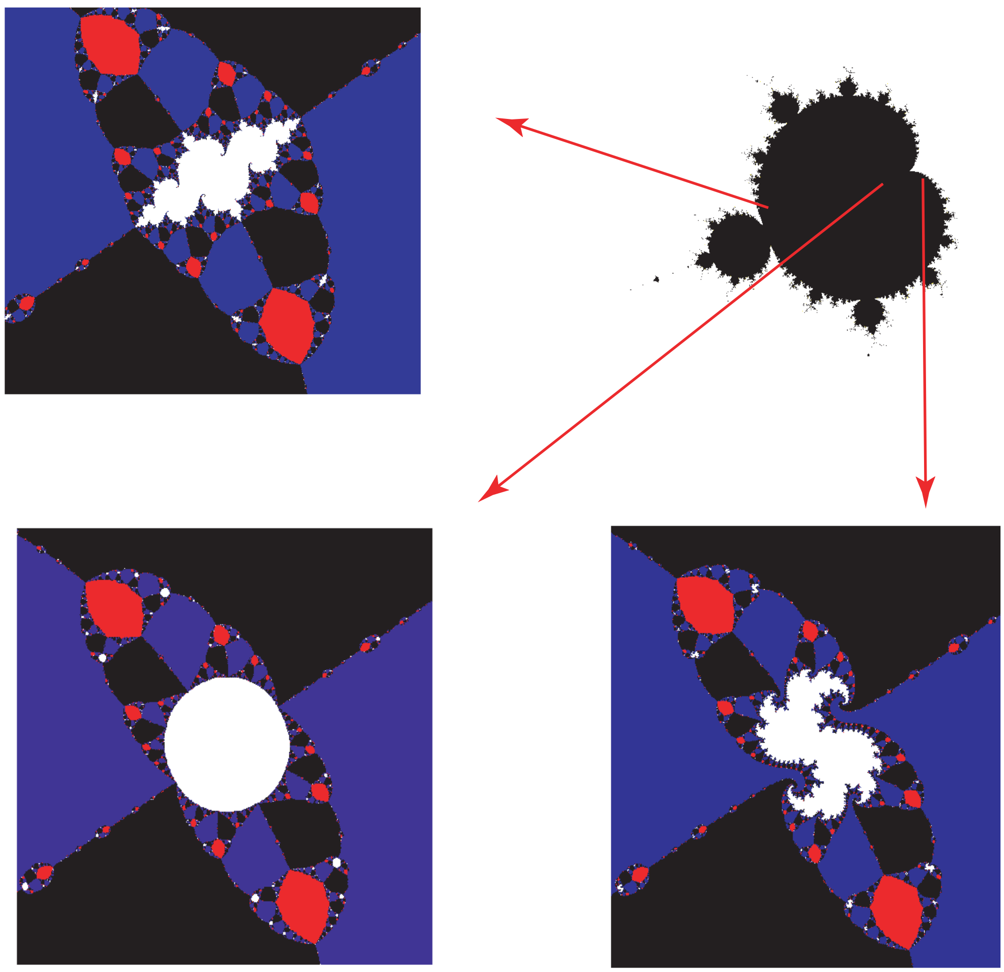
Figur 5.3: *Plott av de parameterverdier* A *der det kritiske punktet* 0 *ikke konvergerer. Bildene er produsert ved å avsette en prikk i de punktene der* $|\mathcal{N}_{f_A}^{\circ N}(0) - \mathcal{N}_{f_A}^{\circ(N+1)}(0)| < 0.001$ *for store* N. N *varierer avhengig av ønsket oppløsning.*

Avbildningen $\mathcal{N}_{f_A}$ har grad 3 og dermed $2 \cdot 3 - 2 = 4$ kritiske punkt. Tre av disse ligger, som tidligere argumentert, i nullpunktene til f_A, og det fjerde må ligge i 0 siden

$$\mathcal{N}'_{f_A}(z) = \frac{f_A(z) f''_A(z)}{f'_A(z)^2}$$

og $f''_A(z) = 6z$. Hvis en fremmed sykkel skal eksistere, kreves det derfor at $O^+(0)$ ikke konvergerer. Figur 5.3 viser et plott av de A-verdier der dette er tilfellet, og er én måte å illustrere parameterrommet for familien f_A.

Bemerk at ikke alle verdier avbildet gir opphav til en fremmed sykkel. For eksempel angir noen A-verdier i figur 5.3 bare at 0 ligger i juliamengden til $\mathcal{N}_{f_A}$. Derimot vil alle f_A med A liggende i den mandelbrot-formede regionen i figur 5.3 fremvise en fremmed sykkel [Kriete, s.90]. Figur 5.4 viser $\mathcal{F}_{\mathcal{N}_{f_A}}$ for tre av disse kubiske polynom f_A med ”dårlig” oppførsel. Bemerk likheten mellom de innfyllte juliamengdene i figur 2.1 for kvadratiske polynom $x^2 + c$, og de p-periodiske schröderkomponenter for $\mathcal{N}_{f_A}$ i figur 5.4, når parameterverdiene c og A velges korresponderende steder i mandelbrotmengden.



Figur 5.4: *Plott av $\mathcal{F}_{\mathcal{N}_{f_A}}$ for ulike A valgt i den mandelbrotlignende mengden fra figur 5.3. Områdene der Newtons metode ikke fungerer er hvite.*

Parameterrommet for familien f_A er for øvrig nøye beskrevet av blant andre H. Kriete og Von Haeseler [Kriete], ved utstrakt bruk av ”holomorfe bevegelser” og en teknikk kallet kvasikonform kirurgi. En enkel form av kvasikonform kirurgi skal vi se på i siste kapittel i denne oppgaven i forbindelse med beviset for eksistens av hermanringer.

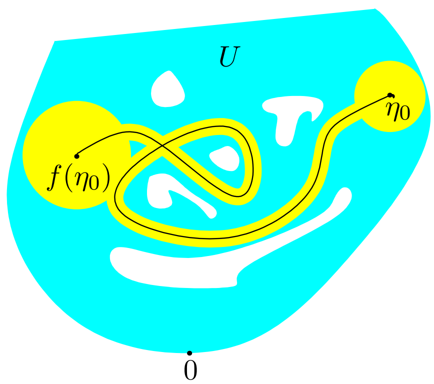
* * *

Returnerer vi til beviset for klassifikasjonssetningen, og spesiellt tilfellet der alle funksjoner i $\mathfrak{F}_U$ er konstante, gjenstår det å behandle tilfellet der $c \in \partial U$.

5.1.4 Setning. *Dersom $c \in \partial U$, da er U en leaukomponent.*

Bevis. Vi begynner med en enkel observasjon. Vi antar som sagt at $c \in \partial U \subset \mathcal{J}_f$, så hvis $|f'(c)| < 1$ gir Banachs kontraksjonssetning at $c \in \mathcal{F}_f$, som er umulig. Tilsvarende hvis $|f'(c)| > 1$ da er f^{-1} en kontraksjon i c, og f er lokalt frastøtende. Punktet c kan dermed ikke være uniform grenseverdi på U. Så $|f'(c)| = 1$ og det gjenstår "bare" å vise at $f'(c) = 1$.

Først og fremst kan vi, ved eventuelt å konjugere f med en möbiustransformasjon, anta at $c = 0$ og $\infty \in \partial U$. Deretter velger vi en tilfeldig $\eta_0 \in U$ og en relativt prekompakt og sammenhengende åpen mengde $E_0 \subset U$, som inneholder både η_0 og $f(\eta_0)$, se figur 5.5.



Figur 5.5: *Vi kan konstruere mengden E_0 ved å forbinde to disker rundt henholdsvis η_0 og $f(\eta_0)$ med en tynn ϵ-korridor langs en kurve γ som forbinder de to punktene.*

Når $|f'(0)| = 1$, må f være univalent i en disk $\mathbb{D}_r$, og siden $f^{\circ n} \to 0$ uniformt på $\overline{E_0}$, må mengden $f^{\circ N}(E)$ være inneholdt i $D_r(0)$ for tilstrekkelig store N. Derfor kan vi, siden vi bare er interessert i oppførselen til høyere ordens itererte, anta at alle $f^{\circ n}$ er univalente på E_0.

Med E_0 som ovenfor er mengden

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{\circ n}(E_0)$$

en sammenhengende åpen mengde med $f^{\circ n}(E) \subset E \subset U$ og $f^{\circ n}$ er univalent på E for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi definerer en familie av hjelpefunksjoner $g_n : E \to \hat{\mathbb{C}}$ ved

$$g_n(z) = \frac{f^{\circ n}(z)}{f^{\circ n}(\eta)}$$

En kan lure på hvorfor vi definerer g_n akkurat slik, og svaret er ikke så enkelt. Funksjonene fremkommer mer naturlig i forbindelse med beviset for Leau's "blomstersetning", som omhandler lokal holomorf konjugering til en spesiell normalform i ethvert parabolsk fikspunkt†, se [Steinmetz],[Beardon] og [Carleson].

Siden alle $f^{\circ n}$ er univalente på E gjelder det samme for alle g_n. Spesielt antas verdien 1 i $z = \eta_0$ av alle g_n og *bare* her. Videre er $\{0, \infty\} \in \partial U$ så ingen av disse verdiene antas på E av noen g_n. Men da antar ikke følgen $\{g_n\}$ noen av verdiene $\{0, 1, \infty\}$ på $E \setminus \{\eta_0\}$, og må være normal her ved Montels setning. Vi ønsker å vise at denne normaliteten utvider fra $E \setminus \{\eta_0\}$ til E. For dette er det tilstrekkelig å vise at familien $\{g_n\}$ er uniformt begrenset i en omegn av η_0.

Så la $\delta > 0$ være så liten at $\mathbb{D}_\delta(\eta_0) \subset E$ og definer funksjonen $h_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ved

$$h_n(z) = \frac{g_n(\eta_0 + \delta z) - 1}{\delta g_n'(\eta_0)}$$

Da er h_n univalent i $\mathbb{D}$ og

$$h_n(0) = \frac{g_n(\eta_0) - 1}{\delta g_n'(\eta_0)} = 0 \quad , \quad h_n'(0) = \frac{g_n'(\eta_0)\delta}{\delta g_n'(\eta_0)} = 1$$

Med andre ord er alle h_n i klassen $\mathcal{S}$ av univalente funksjoner på enhetsdisken, som fikserer 0, og har $f'(0) = 1$. Ved Koebes $\frac{1}{4}$-setning dekker da bildet av $\mathbb{D}$ under h_n disken $\mathbb{D}_{\frac{1}{4}}$. Siden ingen g_n tar verdien null antar h_n ikke verdien $\frac{-1}{\delta g_n'(\eta_0)}$ og derfor må:

$$\frac{1}{|\delta g_n'(\eta_0)|} \geq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \delta |g_n'(\eta_0)| \leq 4$$

Men $\mathcal{S}$ er en normal familie [Pommerenke, s.9] så $\{h_n\} \subset \mathcal{S}$ er normal på $\mathbb{D}$, og derfor uniformt begrenset av en $M < \infty$ på $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$. Hvis nå $|z - \eta_0| < \frac{\delta}{2}$ da er $z = \delta w + \eta_0$ for en $w \in \{|z| < \frac{1}{2}\}$, og vi har spesielt at

$$|g_n(z - \eta_0)| = |g_n(\eta_0 + \delta w)| \leq |\delta g_n'(\eta_0)||h_n(w)| + 1 \leq 4M + 1$$

Med andre ord er g_n-ene uniformt begrenset av $4M + 1$ i den åpne disken $\{|z - \eta_0| < \frac{\delta}{2}$, og dermed er $\{g_n\}$ normal på hele E.

Dette betyr, at mengden $\mathfrak{G}_E$ av grensefunksjoner for normalt konvergente delfølger av $\{g_n\}$ er ikke-tom. For ethvert element i $g \in \mathfrak{G}_E$ har vi en delfølge $g_{n_k} \to g$, og dermed:

$$\begin{aligned} g_{n_k}(f(z)) = \frac{f^{\circ n_k}(f(z))}{f^{\circ n_k}(\eta_0)} &= \frac{f^{\circ n_k}(f(z))}{f^{\circ n_k}(\eta_0)} \frac{f^{\circ n_k}(z)}{f^{\circ n_k}(z)} \\ &= g_{n_k}(z) \frac{f(f^{\circ n_k}(z)) - f(0)}{f^{\circ n_k}(z) - 0} \\ &\overset{n_k}{\to} g(z) f'(0) \end{aligned}$$

†Ett fikspunkt med multiplikater λ, der λ er en enhetsrot kalles parabolsk.

Men ved kontinuitet har vi dessuten $g_{n_k}(f(z)) \stackrel{n_k}{\to} g \circ f(z)$. Kombinerer vi disse grenseverdiene får vi:

$$g \circ f = f'(0)g \tag{5.2}$$

Som nevnt er alle g_n univalente, og dermed er enhver $g \in \mathfrak{G}_E$ enten konstant eller univalent. Dersom bare én funksjon i $\mathfrak{G}_E$ er konstant må verdien av denne være lik en, siden alle g_n tar verdien en i η_0. I dette tilfellet følger det umiddelbart fra ligning 5.2 at $f'(0) = 1$ som ønsket.

Den andre muligheten er at *alle* funksjoner i $\mathfrak{G}_E$ er univalente i E. Vi skal bevise at dette tilfellet ikke kan forekomme.

I dette tilfellet har alle g en invers, og lar vi $\alpha = f'(0)$ gir ligning 5.2, at:

$$g \circ f \circ g^{-1} = \alpha z \quad \Rightarrow \quad g \circ f^{\circ n} \circ g^{-1} = \alpha^n z \quad \Rightarrow \quad f^{\circ n} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ (\alpha^n z)$$

Siden $g^{-1}(1) = \eta_0$ impliserer dette at,

$$f^{\circ n}(\eta_0) = g^{-1}(\alpha^n) \tag{5.3}$$

Dersom α er en enhetsrot gir ligning 5.3 at η_0 er et periodisk punkt, og det strider mot at $f^{\circ n}(\eta_0) \to 0$. Eneste gjenværende mulighet er, at $\alpha = \mathrm{e}^{2\pi i\theta}$ med θ irrasjonal, eller ekvivalent: $\overline{\{\alpha^n : n \in \mathbb{N}\}} = \partial\mathbb{D}$.

På dette punktet velger vi Fatous originale argument som gjengitt i [Carleson]. Det eksisterer andre argumenter som er vesentlig kortere, men argumentet vi velger her viser virkelig hva som går galt når rotasjonstallet til multiplikatoren i null er irrasjonal. Se for øvrig [Steinmetz] eller [Beardon] for kortere men mindre transperante argument.

Først observerer vi at hvis en delfølge g_{n_k} oppfyller at $|g'_{n_k}(\eta_0)| \to 0$, da har grense funksjonen g derivert lik null i η_0, og kan *ikke* være univalent i E. Men alle element i $\mathfrak{G}_E$ er, i dette tilfellet , antatt univalente, så verdiene $|g'_n(\eta_0)|$ kan ikke akkumulere i 0. Ved Koebes $\frac{1}{4}$-setning eksisterer derfor $\rho > 0$ slik at disken $\{|z-1| < \rho\}$ er inneholdt i $g_n(E)$ for *alle* n. Hvis vi nå setter $\eta_n = f^{\circ n}(\eta_0)$, da får vi:

$$\mathbb{D}_\rho(1) \subset g_n(E) = \frac{f^{\circ n}(E)}{f^{\circ n}(\eta_0)} = \frac{f^{\circ n}(E)}{\eta_n} \subset \frac{1}{\eta_n}E$$

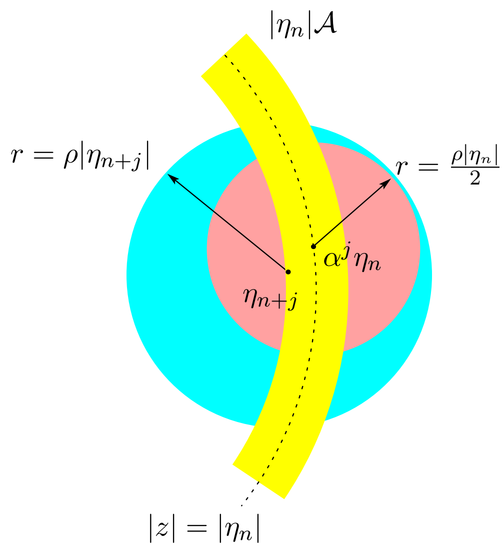
Med andre ord er hver η_n inneholdt i en $\rho|\eta_n|$-disk inneholdt i E.

Som nevnt er $\overline{\{\alpha^n : n \in \mathbb{N}\}} = \partial\mathbb{D}$, så vi kan velge N så stor, at de åpne diskene sentrert i α^j, $j = 0, \ldots, N$, og radius $\frac{\rho}{2}$ dekker en åpen annulus $\mathcal{A}$, som igjen dekker enhetssirkelen.
Siden $\eta_{n+1} = \alpha\eta_n + \mathcal{O}(|\eta_n|^2)$ og $\eta_n \to 0$ går forholdet $\frac{|\alpha\eta_n - \eta_{n+1}|}{|\eta_n|}$ mot null, og vi kan derfor velge en indeks M så stor, at hvis $n \geq M$ da er følgende egenskaper oppfyldt.

- $\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots, \eta_{n+N} \in |\eta_n|\mathcal{A}$

- $\sup_{1\leq j\leq N} |\alpha^j \eta_n - \eta_{n+j}| < \frac{\rho|\eta_n|}{4}$

Så vi velger oss $n \geq M$ og noterer at annulusen $|\eta_n|\mathcal{A}$ er dekket av disker, alle med radius $\frac{\rho|\eta_n|}{2}$ og sentre i $\alpha^j\eta_n$, $0 \leq j \leq N$. Men hver av disse diskene er igjen dekket av disken sentrert i η_{n+j} og med radius $\rho|\eta_{n+j}|$, se figur 5.6 og argumentet under.



Figur 5.6: *Avstanden fra η_{n+j} til $\alpha^j\eta_n$ er mindre enn $\frac{\rho|\eta_n|}{4}$, og radien $\rho|\eta_{n+j}|$ er større enn $\frac{3\rho|\eta_n|}{4}$.*

Men da er (se figur 5.7),

$$|\eta_n|\mathcal{A} \subset \bigcup_{j=0}^{N} \{|z - \eta_{n+j}| < \rho|\eta_{n+j}|\} \subset E \subset U$$

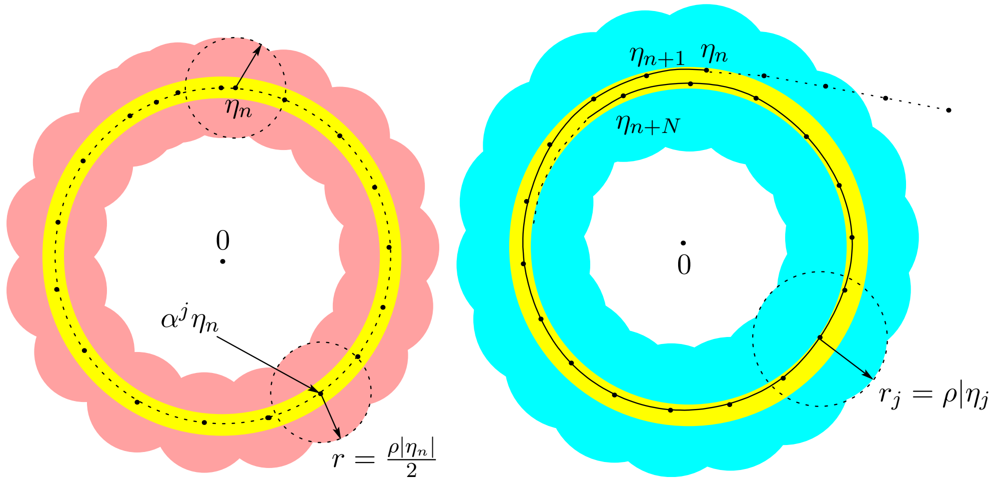
Spesielt har vi, at for tilstrekkelig store n, inneholder U en åpen annulus, som inneholder η_n og η_{n+1}. Men $\eta_n \to 0$, så dette betyr at U inneholder en punktert disk sentrert i 0. Med andre ord er 0 ett isolert punkt i $\mathcal{J}_f$, og det er umulig, siden juliamengden er perfekt.

Vi har nå dekket alle muligheter i tilfellet $|f'(0)| = 1$, og dermed har vi vist at $f'(c) = 1$, som ønsket. $\square$

Summerer vi opp har vi nå behandlet alle tilfeller der $\mathfrak{F}_U$ består av bare konstante funksjoner. Det gjenstår bare å behandle tilfellet, der $\mathfrak{F}_U$ inneholder ikke-konstante funksjoner for å ha utfylt alle muligheter.

5.2 Ikke-konstante grensefunksjoner

5.2.1 Setning. *Dersom $\mathfrak{F}_U$ inneholder ikke-konstante funksjoner da er U enten en siegeldisk eller en hermanring.*



Figur 5.7: *Resultatet at $g_n \to 1$ kalles ofte "snegle"-lemmaet. Grunnen til denne nomenklaturen ser vi av ovenstående bilde.*

Bevis. I dette tilfellet eksisterer en delfølge $f^{\circ n_j}$, som konvergerer lokalt uniformt mot en ikke-konstant funksjon ϕ. Setter vi $m_j = n_{j+1} - n_j$, er familien $f^{\circ m_j}$ en underfamilie av $f^{\circ n}$, og inneholder derfor en lokalt uniformt konvergent delfølge, som vi ved omindeksering like gjerne skriver som $f^{\circ m_j}$. Dersom $f^{\circ m_j} \to \psi$ får vi:

$$f^{\circ n_{j+1}} = f^{\circ n_j} \circ f^{\circ m_j} = f^{\circ m_j} \circ f^{\circ n_j} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{kontinuitet}} \phi = \phi \circ \psi = \psi \circ \phi$$

Det vil si: $\psi = Id|_U$. Derfor har vi opplagt at $f^{\circ(m_j+1)} = f^{\circ m_j} \circ f \to f$ på U. Videre, siden $m_j \geq 1$, er familien $f^{\circ(m_j-1)}$ en delfamilie av $f^{\circ n}$ og har derfor en normalt konvergent delfølge $f^{\circ(m_{j_k}-1)}$, som konvergerer mot en grense g. Ved kontinuitet gir dette:

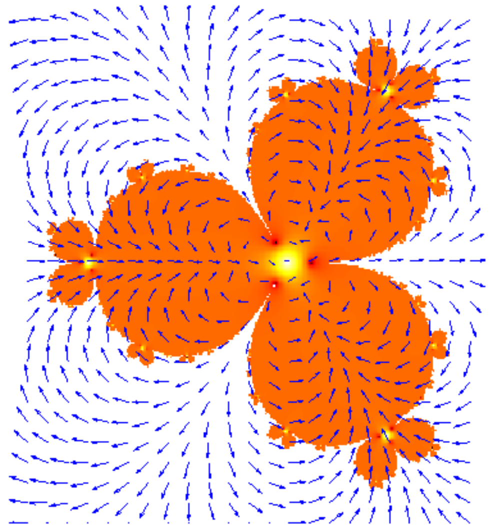
$$f^{\circ(m_{j_k}-1)} \circ f = f \circ f^{\circ(m_{j_k}-1)} = f^{\circ m_{j_k}} \Rightarrow f \circ g = g \circ f = Id|_U$$

Men da er $g = f^{-1}$ på U, og $f : U \to U$ er konform. Dersom U er enkeltsammenhengende, betyr dette, at f er konjugerert til en automorfi M på $\mathbb{D}$, der

$$M(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad a \in \mathbb{D}$$

Hvis M ikke er elliptisk[‡] gir Denjoy-Wolff's setning [Carleson], at $M^{\circ n} \to z_0 \in \partial\mathbb{D}$ lokalt uniformt i $\mathbb{D}$. Dette betyr, at $f^{\circ n}$ konvergerer mot en $z_0' \in \partial U$, og hermed kan ikke $\mathfrak{F}_U$ indeholde ikke-konstante funksjoner, i motstrid med antakelsen vår. Altså må M være elliptisk, og vi kan, ved en eventuell forutgående möbiuskonjugering, anta at $M(0) = 0$. Men da er M en rotasjon av $\mathbb{D}$, og $f|_U$ er konjugert til en rotasjon av enhetsdisken. Rotasjonstallet må være irrasjonal, for hvis ikke er $f^{\circ n} = Id_U$ for en eller annen n, og ved entydighetsprinsippet er

[‡]D.v.s. ikke har fikspunkt i $\mathbb{D}$



Figur 5.8: *Bilde av de tre de tre leaukomponenter for funksjonen $z^4 - z$. Pilene angir retningen ett gitt punkt blir sendt av f. Dynamikken rundt fikspunktet* 0 *er atskillig mer komplisert, enn tilfellet er for schröder og böttcherkomponenter*

da $f^{\circ n} = Id_{\hat{\mathbb{C}}}$. Dette strider mot at $d_{f^{\circ n}} = d_f^n$ og $d_f \geq 2$.

Dersom U ikke er enkeltsammenhengende er bildet atskillig mer komplisert, og vi skal her nøye oss med å referere til følgende resultat fra [Steinmetz, s.11].

5.2.2 Setning. *Dersom ett hyperbolsk*[§] *område A har ikke-diskret Automorfigruppe i topologien generert av lokal uniform konvergens på A, da er A konformt ekvivalent til enhetsdisken $\mathbb{D}$ eller en annulus $\mathcal{A}_{1,r}$.*

Som vist over er alle $f^{\circ n} \in \mathrm{Aut}(U)$ og der eksisterer en følge $f^{\circ m_j} \to Id|_U$. Dermed er ikke automorfigruppen på U diskret, og setningen gir oss at U er konformt ekvivalent med en annulus. Det betyr, at f er konformt konjugeret til en automorfi på en annulus, og dermed konjugert til en irrasjonal rotasjon [Beardon, s.170]. □

Hermed har vi fullført beviset for klassifikasjonssetningen. Status så langt er at vi har vist at alle fatou-komponenter er enten periodiske eller preperiodiske og vi har gitt en utfyllende liste av mulige periodiske komponenter. For å vise setning 2.3.2 gjenstår det å vise, at siegeldisker og hermanringer rent faktisk eksisterer. Dette problemet er ikke akkurat trivielt, og vi skal beskjeftige oss med dette spørsmålet i de to siste kapitlene.

[§]D.v.s. har $\mathbb{D}$ som sin universelle overdekningsflate.

Kapittel 6

Eksistens av siegeldisker

Vi skal i dette og det neste kapitlet bevise at siegeldisker og hermanringer eksisterer, og dermed fullføre setning 2.3.2.Hva angår siegeldisker, skal vi følge et ikke-konstruktivt bevis funnet av Yoccoz i 1986, som er vesentlig mer elementært enn alle tidligere bevis. Prisen er selvfølgelig at det ikke gir stort annen informasjon enn eksistens. For vårt formål er dette dog tilstrekkelig. For konkrete eksempler må vi refere til Siegels opprinnelige eksistensbevis eller senere og skarpere resultat, se eksempel 6.2.4.

6.1 Koenigs setning

Eksistensen av rotasjonsområder knytter seg ikke overaskende til begrepet *linearisering*. En funksjon f sies å være lineariserbar i et fikspunkt, dersom det finns et lokalt bytte av konforme koordinater, som konjugerer f til sin egen lineære del i fikspunktet. I praksis kan vi alltid anta, at dette fikspunktet ligger i 0, og linearisering betyr da at i en liten omegn rundt null, eksisterer en konform avbildning ϕ med $\phi(0) = 0$ og $\phi'(0) = 1$ slik at,

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1} = \lambda z$$

der $\lambda = f'(0)$.

Følgende setning er av fundamental betydning for Yoccoz' bevis, og var kjent over 100 år før Yoccoz. Vi tar med et bevis for dette kjente resultatet som bygger på kvasikonforme avbildninger, siden dette er vårt hovedfokus i denne oppgaven.

6.1.1 Setning. *[G. KOENIGS, 1884] Dersom* 0 *er et tiltrekkende fikspunkt for* $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$*, da er* f *lineariserbar i* 0.

Det eksisterer inntil flere essensielt ulike bevis for dette resultat, og vi skal her følge Lyubich, og presentere et bevis skissert i [Lyubich].

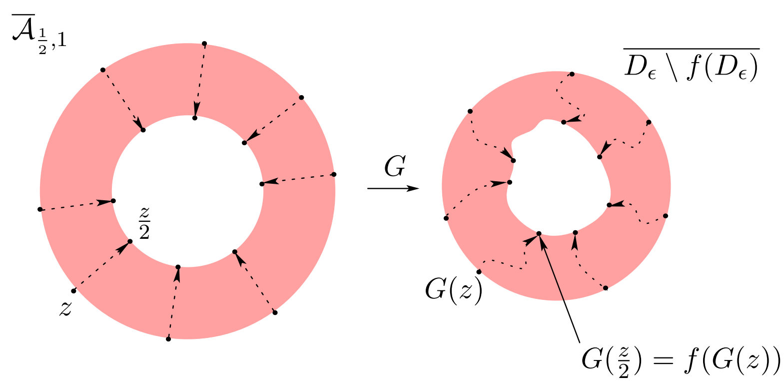
Vi skal først ta følgende resultat for gitt, [Mercer, s.34].

6.1.2 Lemma. *La U_1 og U_2 være enkeltsammenhengende områder i $\mathbb{C}$ begrenset av analytiske jordankurver γ_1 og γ_2. Anta ytterligere at $\overline{U}_1 \subset U_2$. Gitt C^∞-homeomorfier $f_j : \gamma_j \to \{|z| = r_j\}$ der $j = 1, 2$ og $r_1 < r_2$, som er orienteringsbevarende, da eksisterer en C^∞-homeomorfi $G : \overline{U_2 \setminus U_1} \to \overline{A(0; r_1, r_2)}$ som utvider både g_1 og g_2. Videre utvider alle G's partiellderiverte kontinuerlig til tillukningen $\overline{U_2 \setminus U_1}$. I tillegg eksister $\eta > 0$ (som avhenger av $r_1, r_2, g_1, g_2, U_1, U_2$) slik at $J_G(z) > \eta$ for alle $z \in \overline{U_2 \setminus U_1}$.*

Lemmaet sier med andre ord at dersom $U_1, U_2, g_1, g_2, r_1, r_2$ er som beskrevet over da eksisterer en glatt *kvasikonform* avbildning $G : \overline{U_2 \setminus U_1} \to \overline{A(0; r_1, r_2)}$ som utvider g_1 og g_2.

Bevis for setning 6.1.1. La $f(0) = 0$ og $\lambda = f'(0)$ der $0 < |\lambda| < 1$. Da kan vi velge $\epsilon > 0$ så liten, at f er univalent iD_ϵ og $\overline{f(D_\epsilon)} \subset D_\epsilon$. Med henvisning til notasjonen i lemma 6.1.2 lar vi nå $g_2 : \{|z| = 1\} \to \partial D_\epsilon$ være gitt ved $g_2(z) = \epsilon z$, og $g_1 : \{|z| = \frac{1}{2}\} \to f(\partial D_\epsilon)$ være gitt ved $g_1(z) = f(g_2(2z))$. Ved lemma 6.1.2 eksisterer da en glatt kvasikonform avbildning fra annulusen $\mathcal{A}_{\frac{1}{2},1}$ inn i $\overline{D_\epsilon \setminus f(D_\epsilon)}$, som utvider g_1 og g_2. Ved definisjonen av g_1 har vi oppfyllt randbetingelsen:

$$f(G(z)) = G(\frac{z}{2}) \quad , \forall z \in \mathcal{S}^1$$



Figur 6.1: *G velges så for alle $z \in \mathcal{S}^1$ er $G(\frac{z}{2}) = f(G(z))$.*

Vi utvider nå G implisitt til hele $\mathbb{D}$ ved

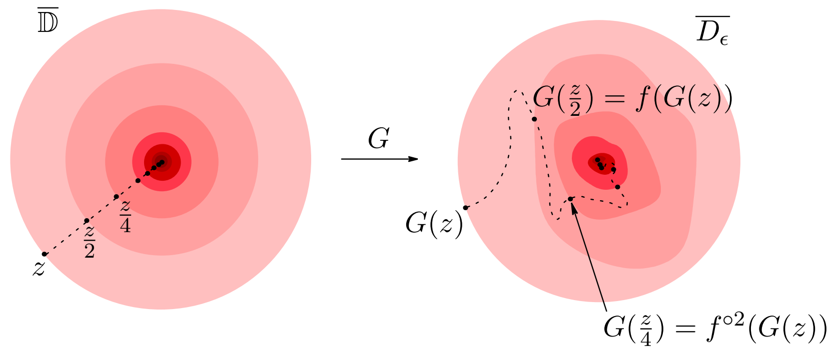
$$G(\frac{z}{2^n}) = f^{\circ n}(G(z)), \text{ og } G(0) = 0$$

se figur 6.2

Denne utvidelsen G er opplagt en homeomorfi og deriverbar n.o. Dersom $w = \frac{z}{2^n}$ får vi i tillegg:

$$\mu_G(w) = \mu_G \circ (\frac{z}{2^n}) = \mu_{G \circ (\frac{z}{2^n})}(z) \frac{\overline{2^n}}{2^n} = \mu_{f^{\circ n} \circ G}(z) = \mu_G(z)$$

Dette viser både at dilatasjonen i $\mathbb{D}$ ikke overstiger dilatasjonen i $\mathcal{A}_{\frac{1}{2},1}$, m.a.o at G er kvasikonform i $\mathbb{D}$, samt at den komplekse dilatasjon μ_G er invariant med



Figur 6.2: *G avbilder konsentriske annuli $\mathcal{A}_{\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^{n+1}}}$ glatt på ring-områdene $f^{\circ n}(D_\epsilon) \setminus f^{\circ(n+1)}(D_\epsilon)$. Randkorrespondansene nedarves fra g_1 og g_2.*

hensyn på den lineære kontraksjon $L(z) = \frac{z}{2}$. Vi utvider nå μ_G induktivt til hele $\mathbb{C}$ ved suksessive tilbaketrekninger av μ_G under L:

$$\mu_G(2^n z)) = \mu_G(z)$$

Da er μ_G per definisjon invariant med hensyn på L. Lar vi ψ_{μ_G} være den normaliserte kvasikonforme avbildning med $\psi^*_{\mu_G} 0 = \mu_G$ gitt ved MRMT, da er $\Psi = \psi_{\mu_G} \circ L \circ \psi^{-1}_{\mu_G} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konform;

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[\mu_G] \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\psi_{\mu_G}"'] & \mathbb{C}[\mu] \arrow[d, "\psi_{\mu_G}"] \\
\mathbb{C}[0] \arrow[r, "\Psi"'] & \mathbb{C}[0]
\end{tikzcd}$$

Men en konform automorfi på $\mathbb{C}$ er affin, så Ψ er affin. Siden $\psi_{\mu_G}(0) = 0$ er $\Psi(0) = 0$, og dermed er $\Psi(z) = kz$ for en $k \in \mathbb{C}^*$.

På $\mathbb{D}$ er både G og ψ_{μ_G} løsninger av den samme beltramiligningen, og derfor er $\phi = \psi_{\mu_G} \circ G^{-1} : D_\epsilon \to D_\epsilon$ holomorf i D_ϵ. Vi har:

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1} = \psi_{\mu_G} \circ \underbrace{G^{-1} \circ f \circ G}_{G \circ L = f \circ G} \circ \psi^{-1}_{\mu_G} = \psi_{\mu_G} \circ L \circ \psi^{-1}_{\mu_G} = kz$$

og ved kjerneregelen er $k = \lambda$. Dette viser, at ϕ lineariserer f i D_ϵ.

Hva angår entydighet ser vi, at dersom ϕ_1 og ϕ_2 begge lineariserer f da kommuterer $\phi_1^{-1} \circ \phi_2$ med $z \mapsto \lambda z$ i en omegn rundt 0:

$$\begin{tikzcd}
D_\epsilon \arrow[r, "\lambda z"] \arrow[d, "\phi_1^{-1}"'] \arrow[rrdd, Rightarrow, bend left] & D_\epsilon \arrow[d, "\phi_1^{-1}"'] & \\
D_\epsilon \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[rd, "\phi_2"'] & D_\epsilon \arrow[rd, "\phi_2"] & \\
& D_\epsilon \arrow[r, "\lambda z"'] & D_\epsilon
\end{tikzcd}$$

Men lar vi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være Taylorkoeffisientene i 0 til $\phi_1^{-1} \circ \phi_2$, da gir dette i en liten omegn rundt 0:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n z^n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$$

Ved entydighet av Taylorkoeffisienter er da $\lambda a_n = \lambda^n a_n$ for alle $n \geq 1$. Men husker vi at $0 < |\lambda| < 1$, betyr dette at $a_n = 0$ for alle $n \geq 2$. Så $\phi_1^{-1} \circ \phi_2 = a_n Id$ og dermed $\phi_1 = \phi_2$ i en omegn rundt 0 dersom vi krever, at løsningene ϕ_1, ϕ_2 er normaliseret ved $\phi'(0) = 1$. $\square$

Passende normalisert kaller vi funksjonen ϕ *koenigsfunksjonen* til f. Koenigsfunksjonen kan utvides til hele det *tiltrekkende bassenget*

$$\mathcal{B} = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : f^{\circ n}(z) \to 0 \text{ når } n \to \infty\}$$

Første skritt er å finne et eksplisitt uttrykk for ϕ i en liten omegn D_ϵ rundt 0. Vi vet at f er lineariserbar her, slik at:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{\phi \circ f^{\circ n}(z)}{\lambda^n} \\ &= \underbrace{\frac{\phi \circ f^{\circ n}(z) - \phi \circ f^{\circ n}(0)}{f^{\circ n}(z) - f^{\circ n}(0)}}_{\sharp} \frac{f^{\circ n}(z)}{\lambda^n} \\ &\to \phi'(0) \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\circ n}(z)}{\lambda^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\circ n}(z)}{\lambda^n} \end{aligned}$$

Uttrykket $\sharp$ går lokalt uniformt i D_ϵ mot 1, så grensen $\frac{f^{\circ n}(z)}{\lambda^n} \to \phi(z)$ må og være lokalt uniform i D_ϵ. Siden enhver kompakt $K \subset \mathcal{B}$ etter et endelig antall iterasjoner avbildes inn i D_ϵ eksisterer ovenstående grense lokalt uniformt i hele $\mathcal{B}$ og ϕ utvider til en holomorf funksjon i $\mathcal{B}$.

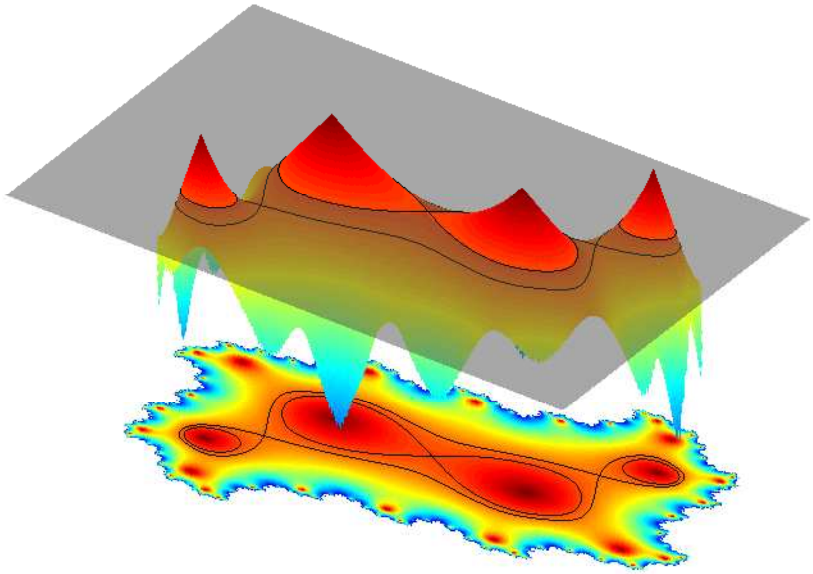
Ser vi på kritiske punkt for ϕ, bemerker vi at normal konvergens impliserer normal konvergens av deriverte, så ved kjerneregelen er

$$\phi'(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(f^{\circ n})'(z)}{\lambda^n} = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{f'(f^{\circ j}(z))}{\lambda} = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{f'(f^{\circ j}(z))}{\lambda}$$

Dette gir umiddelbart at ϕ har kritiske punkt i alle inverse bilder av kritiske punkter for f i $\mathcal{B}$. Det er selvsagt, på nåværende stadium, et åpent spørsmål om $\mathcal{B}$ i det hele tatt inneholder kritiske punkt for f. Dette er som neste setning sier, *alltid* tilfellet. Mer presist inneholder det *umiddelbare tiltrekkende basseng* $\mathcal{B}_0$, definert som den sammenhengende komponenten av $\mathcal{B}$ som inneholder det tiltrekkende fikspunktet 0, alltid et kritisk punkt for f.

6.1.3 Proposisjon. *[FATOU, 1906] Det umiddelbare tiltrekkende basseng $\mathcal{B}_0$ for et tiltrekkende fikspunkt inneholder et kritisk punkt for f.*

For bevis se [Beardon, s.172].



Figur 6.3: *Illustrasjon av koenigsfunksjonen for funksjonen* $z \mapsto \frac{4}{5}iz + z^2$. *Mengden avbildet nederst er det tiltrekkende bassenget* $\mathcal{B}$ *for fikspunktet* 0. *Grafen som henger over er et utsnitt av grafen for* $z \mapsto e^{-|\phi(z)|}$. *De røde kjegletoppene er således nullpunkter for* ϕ. *Fargene går igjen i planet, og vi ser at oppførselen til* ϕ *er helt ute av kontroll nær randen til* $\mathcal{B}$. *De svarte kurvene er nivå-kurvene* $\{|\phi(z)| = |\phi(c)|\}$ *og* $\{|\phi(z)| = |\frac{\phi(c)}{\lambda}|\}$, *der* $c = -\frac{2}{5}i$ *er det kritiske punktet i* $\mathcal{B}$. c *selv ligger i sentrum av* $\mathcal{B}$ *der ottetalskurven skjærer seg selv. Kritiske punkt for* ϕ *er i alle skjæringspunkter for nivåkurvene* $\{|\phi(z)| = |\frac{\phi(c)}{\lambda^n}|\}$. *Se i [Milnor, s.77] for et bilde med flere nivåkurver angitt. Fikspunktet* 0 *er nullpunktet til venstre for* c.

6.2 Yoccoz' bevis

Yoccoz' bevis for eksistensen av siegeldisker for nesten alle polynom av typen $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$, der $|\lambda| = 1$, baserer seg på et nærmere studie av oppførselen til Koenigs funksjon ϕ_λ, evaluert i det kritiske punktet $c = -\frac{\lambda}{2}$. Det vil si: vi ser på funksjonen $\Upsilon : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definert ved:

$$\Upsilon(\lambda) = \phi_\lambda(-\frac{\lambda}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\circ n}(-\frac{\lambda}{2})}{\lambda^n} \tag{6.1}$$

6.2.1 Setning (YOCCOZ, 1986)**.** *For n.a.* $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ *har polynomet*

$$z \mapsto \lambda z + z^2$$

en siegeldisk sentrert i 0.

Bevis. Den vesentligste vanskelighet i Yoccoz bevis er å vise at funksjonen Υ er holomorf og begrenset i hele enhetsdisken. Vi følger på dette punktet Henriksen, Buff og Hubbard i [Buff] samt [Milnor].

Begrensning: Som tidligere diskutert er z_0 et kritisk punkt for Koenigs-funksjonen ϕ_λ hvis og bare hvis $f_\lambda^{\circ n}(z_0) = -\frac{\lambda}{2}$ for en eller annen $n \geq 0$. Men da er

$$\phi_\lambda(z_0) = \frac{\phi_\lambda \circ f^{\circ n}(z_0)}{\lambda^n} = \frac{\Upsilon(\lambda)}{\lambda^n}$$

Dette viser at de kritiske *verdiene* for ϕ_λ er gitt ved $\frac{\Upsilon(\lambda)}{\lambda^n}$ der $n = 0, 1, 2, \ldots$. Men $|\lambda| < 1$, så i disken $\mathbb{D}_{|\Upsilon(\gamma)|}$ har ϕ_λ ingen kritiske verdier og dermed har, siden $\mathbb{D}_{|\Upsilon(\gamma)|}$ er enkeltsammenhengende, ϕ_λ^{-1} en gren $h_\lambda : \mathbb{D}_{|\Upsilon(\gamma)|} \to \mathcal{B}$ med $h_\lambda(0) = 0$. Avbildningen h_λ er injektiv over $\mathbb{D}_{|\Upsilon(\gamma)|}$, fikserer 0, og tar verdier i $\mathcal{B}$. Men $\mathcal{B} \subset \mathbb{D}_2$ siden $\{|z| > 2\} \subset A(\infty)$;

$$|z| \geq 2 \Rightarrow |\lambda z + z^2| \geq |z||\lambda + z| > 2|2 - 1| = 2$$

Med andre ord er $h_\lambda(\mathbb{D}_{|\Upsilon(\gamma)|}) \subset \mathbb{D}_2$ og $h'_\lambda(0) = \frac{1}{\phi'_\lambda(0)} = 1$. Schwarz lemma gir oss da:

$$\Upsilon(\lambda) < 2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$$

Holomorf: Vi skriver her ut et argument skissert i [Milnor]. La K være en kompakt delmengde av den punkterte disken $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, som er inneholdt i $\subset \{\delta^2 < |\lambda| < \delta\}$ for en δ mellom 0 og 1. Da eksisterer en åpen disk $\mathbb{D}_r$ rundt 0, der

$$|f_\lambda(z)| \leq \delta|z|$$

for alle $z \in \mathbb{D}_r$ og alle $\lambda \in K$. Da har vi opplagt at $|f_\lambda^{\circ n}(z)| \leq \delta^n r$. Siden $|f_\lambda(z) - \lambda z| \in \mathcal{O}(z^2)$ betyr dette at det eksisterer en endelig positiv konstant C slik at

$$|f_\lambda^{\circ(n+1)}(z) - \lambda f_\lambda^{\circ n}(z)| \leq C|f_\lambda^{\circ n}(z)|^2 \leq C\delta^{2n}r^2$$

Men dette gir videre

$$|\frac{f_\lambda^{\circ(n+1)}(z)}{\lambda^{n+1}} - \frac{f_\lambda^{\circ n}(z)}{\lambda^n}| \leq \frac{C\delta^{2n}r^2}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{Cr^2}{|\lambda|}\left(\frac{\delta^2}{|\lambda|}\right)^n$$

Siden $K \subset \{\delta^2 < |\lambda| < \delta\}$ er brøken $\frac{\delta^2}{|\lambda|}$ uniformt mindre enn en konstant $\alpha < 1$ på K og vi ender opp med det uniforme estimatet:

$$|\frac{f_\lambda^{\circ(n+1)}(z)}{\lambda^{n+1}} - \frac{f_\lambda^{\circ n}(z)}{\lambda^n}| \leq \frac{Cr^2}{\delta^2}\alpha^n$$

Dette betyr at for fast $z \in \mathbb{D}_r$ konvergerer $\frac{f_\lambda^{\circ n}(z)}{\lambda^n}$ uniformt med hensyn på λ på K. Hermed avhenger ϕ_λ holomorft av λ i ringen $\{\delta^2 < |z| < \delta\}$ og det samme gjelder i hele $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ siden enhver kompakt delmengde her kan overdekkes av et endelig antall ringer av samme type. Vi konkluderer at Υ er holomorf i $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Det er hermed bevist at Υ er begrenset og holomorf på $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, og ved Riemanns sats om hevbare singulariteter er da Υ analytisk og begrenset over hele enhetsdisken $\mathbb{D}$. Vi kan derfor anvende følgende setning fra [Pommerenke, s.140].

6.2.2 Setning. *[F. RIESZ, M. RIESZ, PRIVALOV] Dersom $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ er begrenset, holomorf og ikke-konstant. Da er*

$$\lim_{r \nearrow 1} f(re^{i\theta}) \neq 0$$

for nesten alle $\theta \in [0, 2\pi)$.

Med andre ord er

$$\lim_{r \nearrow 1} \Upsilon(re^{i\theta}) \neq 0 \tag{6.2}$$

nesten overalt. Det signifikante i dette ligger i, at dersom $\lambda_0 = e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ oppfylder ligning 6.2, og $\lambda_k \nearrow \lambda_0$ radielt, da er alle $h_{\lambda_k} : \mathbb{D}_{|\Upsilon(\lambda_k)|} \to \mathbb{D}_2$, fra et visst trinn K, definert på en felles disk av positiv radius R.

Men familien $\{h_{\lambda_k}\}_{k>K}$ er begrenset og derfor normal på $\mathbb{D}_R$, og har dermed en normalt konvergent delfølge, som vi ved eventuell omindeksering kan skrive som h_{λ_k}. Alle h_{λ_k} er univalente på $\mathbb{D}_R$, så enten er grensefunksjonen $H = \lim_k h_{\lambda_k}$ konstant 0 eller univalent. Tilfellet $H \equiv 0$ forekommer ikke siden alle h_{λ_k} har derivert lik 1 i 0.

For alle h_{λ_k} har vi nå i $\mathbb{D}_R$:

$$f_{\lambda_k} \circ h_{\lambda_k} = h_{\lambda_k}(\lambda_k z)$$

Ved kontinuitet går $f_{\lambda_k} \to f_{\lambda_0}$ og $h_{\lambda_k} \to H$ når $k \to \infty$, slik at:

$$f_{\lambda_0} \circ H = H(\lambda_0 z)$$

Men H er univalent, så H^{-1} eksisterer og lineariserer f_{λ_0} i $H(\mathbb{D}_R)$:

$$H^{-1} \circ f_{\lambda_0} \circ H = \lambda_0 z$$

Vi konkluderer at for nesten alle $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ lineariseres f_λ i 0. Ved klassifikasjonssetningen må da nesten alle f_λ ha en siegeldisk sentrert i 0. □

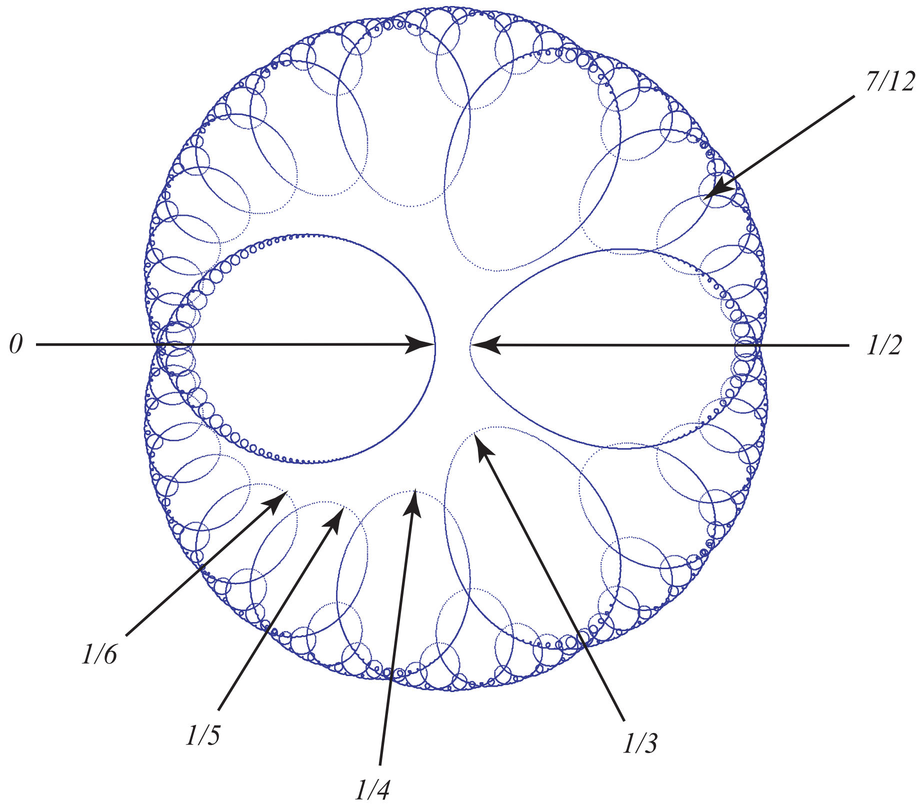
Som vi ser var det sentrale poenget i Yoccoz bevis at dersom den radielle grensen

$$\lim_{r \nearrow 1} \Upsilon(re^{i\theta}) \neq 0$$

så har f_λ en Siegeldisk. Videre ser vi av beviset at det er tilstrekkelig hvis verdiene $\Upsilon(\lambda_k)$ akkumulerer ved en ikke-null verdi, så vi kan konkludere at for alle $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ der f_λ ikke har en Siegeldisk, er

$$\lim_{r \nearrow 1} \Upsilon(re^{i\theta}) = 0$$

Figur 6.4 illustrerer denne egenskapen ved funksjonen der bildet av sirklen $r\partial\mathbb{D}$ for $r = 0.999$ er avbildet. Løkkene som strekker seg innover vil i grensen $r \nearrow 1$ rekke inn i null.



Figur 6.4: *Bilde av sirklen* $\{0.999e^{2\pi i\theta} : \theta \in [0,1]\}$ *under avbildningen* $\Upsilon(\lambda)$. *Pilene angir bildet for rekke rasjonale* θ*-verdier. Som bildet indikerer, og som vi utnyttet i Yoccoz' bevis, går* $\Upsilon(re^{2\pi i\theta})$ *mot null når* $r \to 1$ *og* θ *er rasjonal. Det samme skjer for en ikke-tellbar mengde irrasjonale tall. Fikspunkt som har et av disse irrasjonale tallene som rotasjonstall kalles cremerpunkter, og svært lite vites om dynamikken rundt disse. Det er heller ikke per dags dato laget noen brukbare bilder av juliamengden nært et cremerpunkt. Se for øvrig [Buff] for bilde med* $r = 0.9999$, *og andre resultat vedrørende funksjonen* Υ *og rasjonale tall.*

Bryuno og Yoccoz har dessuten løst problemet med eksistens av siegeldisker for familien $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ fullstendig. For å kunne formulere resultatet til Bryuno og Yoccoz trenger vi først et par resultat fra teorien for kjedebrøker.

Ethvert irrasjonalt tall η er bestemt entydig ved en tallfølge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ der $a_n \in \mathbb{N}$. Relasjonen mellom a_n-ene og η er gitt ved grenseverdien når $n \to \infty$ til den n'te konvergent:

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \frac{1}{a_{n-1}}}}}$$

Det vil si $\frac{p_n}{q_n} \to \eta$ når $n \to \infty$. Den n'te konvergent er det rasjonale tall med nevner mindre enn eller lik q_n som approksimerer η best. Se for øvrig [Niven] for ytterligere resultat om kjedebrøker.

6.2.3 Setning. *[BRYUNO (1972), YOCCOZ (1987)] La $f(z) = \lambda z + z^2$ der $\lambda = e^{2\pi i\theta}$. Hvis $\frac{p_n}{q_n}$ er den n'te konvergenten til θ, da har f_λ en siegeldisk sentrert i 0 hvis og bare hvis*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(q_{n+1})}{q_n} < \infty$$

Bryuno beviste tilstrekkeliheten av betingelsen i 6.2.3 og Yoccoz nødvendigheten.

6.2.4 Eksempel. *"Det gylne snitt"-Siegeldisken*

Vi ser på rotasjonstallet θ, som i setning 6.2.3, gitt ved tallfølgen $\{1, 1, 1, 1, \cdots\}$. Beregner vi de første konvergenter aner vi raskt ett mønster:

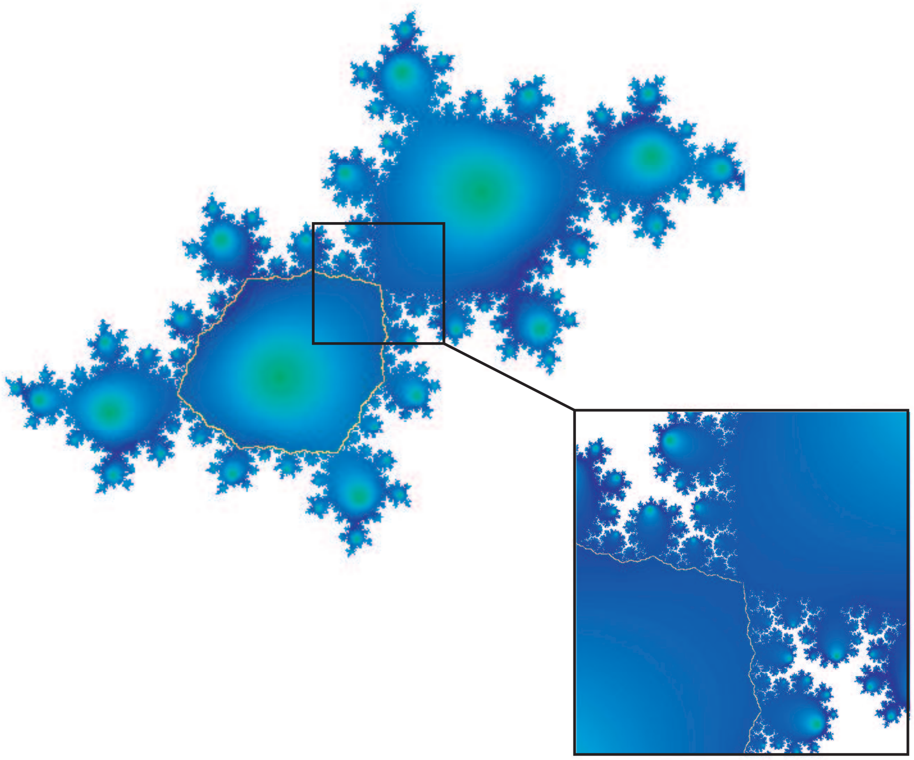
$$\begin{aligned}
\frac{p_0}{q_0} &= 1 \\
\frac{p_1}{q_1} &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\
\frac{p_2}{q_2} &= \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \\
\frac{p_3}{q_3} &= \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \\
&\vdots \\
\frac{p_n}{q_n} &= \frac{1}{1+\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}} = \frac{q_{n-1}}{q_{n-1}+p_{n-1}} = \frac{q_{n-1}}{q_{n-1}+q_{n-2}}
\end{aligned}$$

Det vil si at q_n er gitt som det n'te Fibonacci-tall og p_n er gitt som det $(n-1)$'te Fibonacci-tall. Dersom F_n angir det n'te Fibonacci-tall ser vi med andre ord at

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

Der $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ er det gylne snitt. Det er velkjent at F_n er gitt eksplisitt ved uttrykket ([Saff] s. 210):

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \frac{1}{\varphi^{n+1}}\right)$$



Figur 6.5: *Bildet viser den innfyldte juliamengden for polynomet* $z \mapsto e^{2\pi i \frac{1}{\varphi}} z + z^2$ *der* φ *er lik det gyldne snitt* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Randen på siegeldisken er angitt ved den gule kurven.*

Men $q_n = F_n$ så setter vi dette inn i betingelsen fra setning 6.2.3, og husker at $\varphi > 1$, får vi:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} &= k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{n+1} - \frac{1}{\varphi^{n+1}}} + k' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(\varphi^{n+2} - \frac{1}{\varphi^{n+2}})}{\varphi^{n+1} - \frac{1}{\varphi^{n+1}}} \\ &< k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{n+1} - \frac{1}{\varphi^{n+1}}} + k'' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\varphi^{n+1} - \frac{1}{\varphi^{n+1}}} < \infty\end{aligned}$$

Hvilket vil si, at f_φ har en siegeldisk, se figur 6.5

Kapittel 7

Eksistens av hermanringer

I dette siste kapittelet skal vi bevise eksistensen av hermanringer. Dette er på mange måter vanskeligere enn å bevise eksistensen av Siegeldisker. Dels fordi vi ikke har noe fikspunkt å jobbe med, og dels fordi Hermanringer ikke forekommer for polynom. Grunnen til dette er gitt i eksempel , der vi argumenterte for at alle fatoukomponenter utenom Böttcher-komponenten $A(\infty)$ er enkeltsammenhengende.

Vi skal følge ett ikke-konstruktivt bevis gitt av Shishikura i hans masteravhandling fra 1985. Beviset hviler tungt på teorien for kvasikonforme avbildninger, og igjen spesiellt på MRMT. Beviset vi gir her er i all hovedsak hentet fra fremgangsmåten skissert [Zakeri], men enkelte elementer er også hentet fra Shishikuras originalartikel [Shishikura] og [Carleson, s.104].

7.1 Shishikuras Bevis

7.1.1 Setning. *[SHISHIKURA, 1985]Anta f har en siegeldisk med rotasjonstall θ. Da eksisterer en rasjonal funksjon R av grad $2d_f - 1$, som har en hermanring med rotasjonstall θ.*

Bevis. Vi kan anta f har en siegeldisk U med sentrum i 0 og rotasjonstall θ. Da er

$$\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

rasjonal, og $\tilde{f}$ har en siegeldisk $\tilde{U}$ sentrert i 0, men med rotasjonstall $-\theta$. Det eksisterer da konforme avbildninger $\phi : U \to \mathbb{D}_2(0)$ og $\tilde{\phi} : \tilde{U} \to \mathbb{D}_2(0)$, som lineariserer f og $\tilde{f}$:

$$\phi \circ f = e^{2\pi i\theta}\phi \qquad , \qquad \tilde{\phi} \circ \tilde{f} = e^{-2\pi i\theta}\tilde{\phi}$$

Definerer vi for alle $0 < r < 2$ de lukkede analytiske kurvene γ_r og $\tilde{\gamma}_r$ ved

$$\gamma_r = \{z \in U : |\phi(z)| = r\}$$

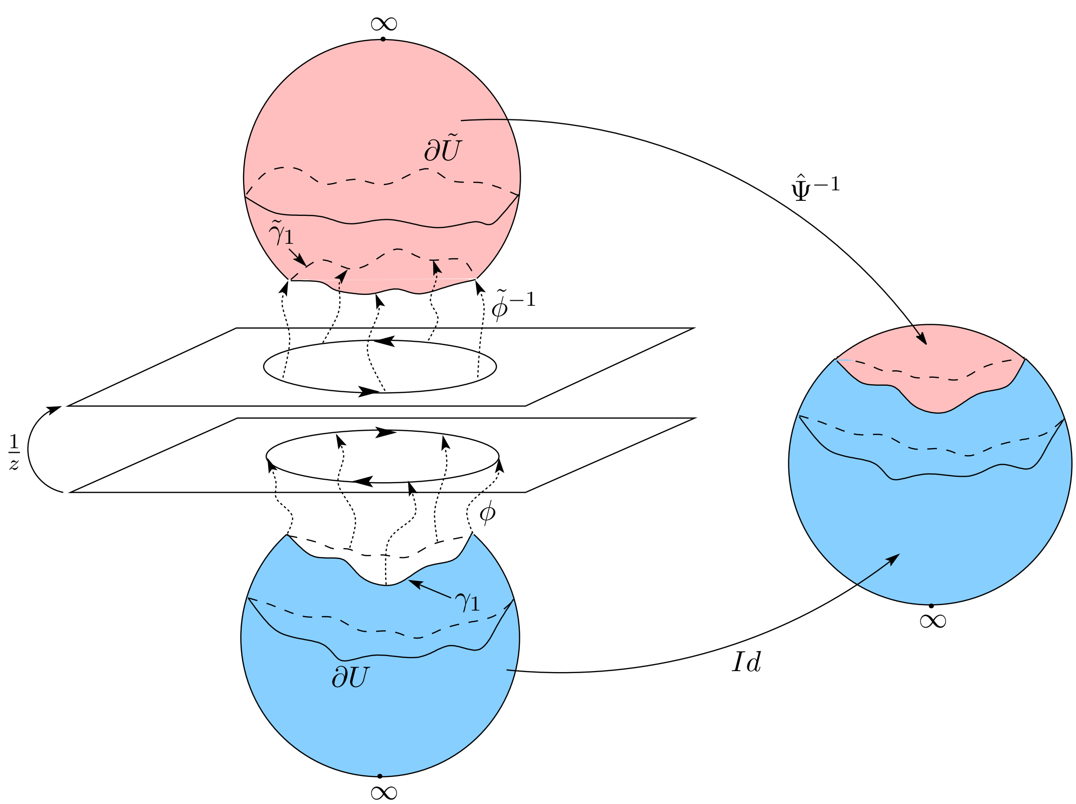
da er alle γ_r inneholdt i U og er invariante m.h.p. f. Dessuten består mengdene $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma_r$ av to enkeltsammenhengende komponenter; $ext\,\gamma_r$ som inneholder ∞ , og $int\,\gamma_r$ som inneholder 0. Helt analogt defineres $\tilde{f}$-invariante kurver

$$\tilde{\gamma}_r = \{z \in U : |\tilde{\phi}(z)| = r\}$$

som deler opp $\hat{\mathbb{C}}$ i to enkeltsammenhengenende komponenter $ext\,\tilde{\gamma}_r$ og $int\,\tilde{\gamma}_r$.

På enhetssirkelen er inversjon og kompleks konjugering samme operasjon, så avbildningen $\Psi : \gamma_1 \to \tilde{\gamma}_1$ definert ved $\Psi = \tilde{\phi}^{-1} \circ \frac{1}{z} \circ \phi$ er glatt, og konjugerer f til $\tilde{f}$ på γ_1:

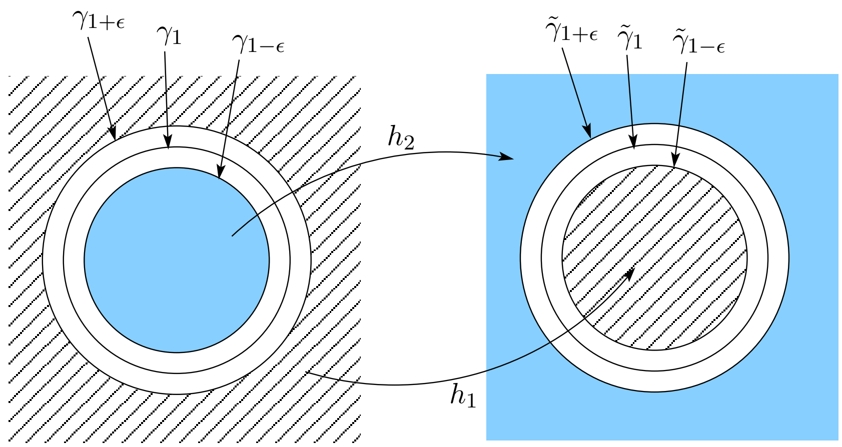
$$\Psi \circ f = \tilde{\phi}^{-1} \circ \frac{1}{\phi \circ f} = \tilde{\phi}^{-1} \circ \frac{1}{e^{2\pi i\theta}\phi} = \underbrace{\tilde{\phi}^{-1} \circ (e^{-2\pi i\theta} z)}_{\tilde{f} \circ \tilde{\phi}^{-1}} \circ \frac{1}{z} \circ \phi = \tilde{f} \circ \Psi$$



Figur 7.1: *Figuren indikerer hvorfor teknikken i beviset kalles kvasikonform kirurgi. Vi "skjærer" ut to invariante disker inneholdt siegeldiskene U og $\tilde{U}$. Deretter "syr" vi sammen de to gjenværende biter ved hjelp av homeomorfien $\hat{\Psi}$. I overgangen mellom sfærene er f konjugert til $\tilde{f}$.*

7.1.2 Lemma. Ψ *utvider til en kvasikonform homeomorfi* $\hat{\Psi} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ *slik at* $\hat{\Psi}(int\,\gamma_1) = ext\,\tilde{\gamma}_1$ *og* $\hat{\Psi}(ext\,\gamma_1) = int\,\tilde{\gamma}_1$. *Videre kan* $\hat{\Psi}$ *velges konform i en omegn av* $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{U \cap \hat{\Psi}^{-1}(\tilde{U})\}$.

Bevis for lemma 7.1.2. Siden alle enkeltsammenhengende åpne områder på $\hat{\mathbb{C}}$ er konformt ekvivalente ved Riemanns avbildningssats, kan vi velge konforme avbildninger $h_1 : ext\,\gamma_{1+\epsilon} \to int\,\tilde{\gamma}_{1-\epsilon}$ og $h_2 : int\,\gamma_{1-\epsilon} \to ext\,\tilde{\gamma}_{1+\epsilon}$, se figur 7.2 Videre, siden alle $\gamma_r, \tilde{\gamma}_r$ er analytiske kurver, utvider h_1 analytisk til $\gamma_{1-\epsilon}$ og h_2



Figur 7.2:

utvider analytisk til $\tilde{\gamma}_{1-\epsilon}$ ([Nehari] s 184). I de annulære regionene mellom $\gamma_{1+\epsilon}$ og γ_1, og γ_1 og $\gamma_{1-\epsilon}$ sikrer lemma 6.1.2 at det eksisterer glatte kvasikonforme avbildninger, h_3 i rommet mellom $\gamma_{1+\epsilon}$ og γ_1, og h_4 i rommet mellom γ_1 og $\gamma_{1-\epsilon}$, som utvider h_1, h_2 og Ψ diffeomorft. Funksjonen $\hat{\Psi} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ definert ved h_1, h_2, h_3 og h_4 i deres respektive domener er da kvasikonform. Videre finner vi ved De Morgans lover:

$$\hat{\mathbb{C}} \setminus \{U \cap \hat{\Psi}^{-1}(\tilde{U})\} = U^c \cup \hat{\Psi}^{-1}(\tilde{U}^c) \subset ext\,\gamma_{1+\epsilon} \cup \hat{\Psi}^{-1}(ext\,\tilde{\gamma}_{1+\epsilon}) = ext\,\gamma_{1+\epsilon} \cup int\,\gamma_{1-\epsilon}$$

Men $ext\,\gamma_{1+\epsilon}$ er domenet til h_1 og $int\,\gamma_{1-\epsilon}$ er domenet til h_2 som begge er konforme. Så $\hat{\Psi}$ er konform i en omegn til $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{U \cap \hat{\Psi}^{-1}(\tilde{U})\}$. $\square$

Homeomorfien $\hat{\Psi}$ er konstruert så funksjonen $F : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ definert ved

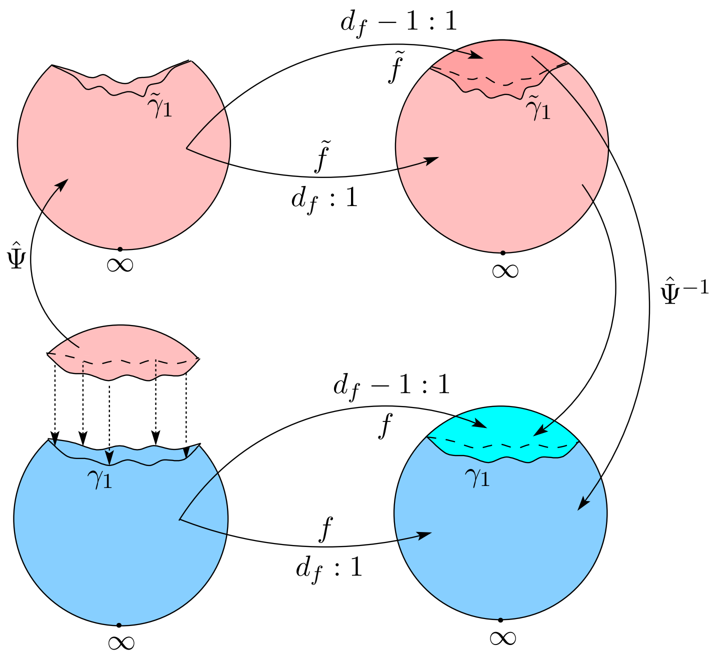
$$F(z) = \begin{cases} f(z) & , z \in \gamma_1 \cup ext\,\gamma_1 \\ \hat{\Psi}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \hat{\Psi} & , z \in int\,\gamma_1 \end{cases}$$

overfører dynamikken fra f på $ext\,\gamma_1$ og $\tilde{f}$ på $ext\,\tilde{\gamma}_1$ til den sammensatte sfæren på figur 7.1.

7.1.3 Observasjon. *Funksjonen F oppfyller følgende fakta:*

1. *Funksjonen F avbilder riemannsfæren $(2d-1):1$ på seg selv.*
2. *Det annulære området $E = U \cap \hat{\Psi}^{-1}(\tilde{U})$ er F-invariant.*
3. *F er kvasiregulær.*
4. *F er holomorf i en omegn av $\hat{\mathbb{C}} \setminus F^{-1}(E)$.*

For de to første påstandene se figur 7.3 og 7.4 og teksten under disse. Hva angår påstanden at F er kvasiregulær, bemerker vi at $\hat{\Phi}$ er kvasikonform, så F er opplagt lokalt kvasikonform i $\hat{\mathbb{C}}$ utenom en diskret mengde K, der K består av unionen av de kritiske punktene til f og mengden $\hat{\Phi}^{-1}(C)$ der C er de kritiske punktene til $\tilde{f}$. Lemma 3.6.2 gir oss da at F er kvasiregulær. Til slutt noterer vi at F er holomorf i en omegn av $\hat{\mathbb{C}} \setminus F^{-1}(E)$ fordi $\hat{\Phi}$ er konform i en omegn av $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$.



Figur 7.3: *Siden* $int\,\gamma_1$ *er* f*-invariant avbildes* $ext\,\gamma_1$ d_f *ganger på seg selv og* $d_f - 1$ *ganger på* $int\,\gamma_1$*. Tilsvarende gjelder for* $\tilde{f}$ *og mengdene* $ext\,\tilde{\gamma}_1$*,* $int\,\tilde{\gamma}_1$*. Men* $\hat{\Psi}$ *bytter rundt på int og ext så alle punkter treffes presis* $d_f + d_f - 1 = 2d_f - 1$ *ganger av* $F : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$*.*

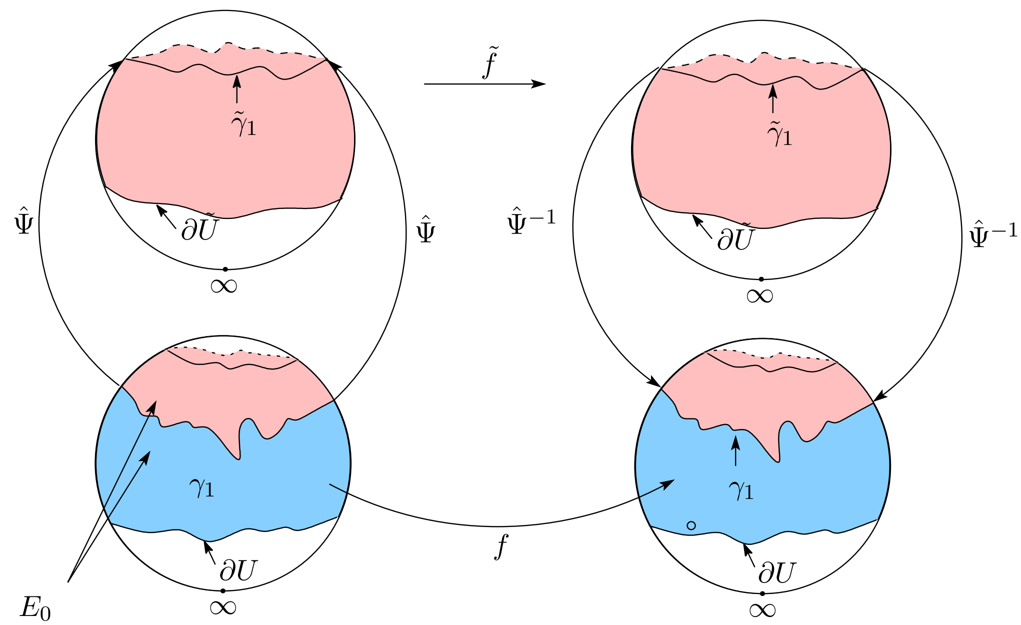
Vi ønsker å konjugere F til en rasjonal funksjon av grad $2d_f - 1$. Dette gjør vi ved å definere en beltramikoeffisient μ på $\hat{\mathbb{C}}$ slik at $F : \hat{\mathbb{C}}[\mu] \to \hat{\mathbb{C}}[\mu]$ er analytisk. Dersom ϕ_μ er en løsning av beltramiligningen for μ på $\hat{\mathbb{C}}$, da er ϕ_μ i atlaset for $\hat{\mathbb{C}}[\mu]$, og $R = \phi_\mu \circ F \circ \phi_\mu^{-1}$ er holomorf ved definisjonen av analytisistet mellom riemannflater. Siden F er $2d_f - 1 : 1$, er R dermed rasjonal av grad $2d - 1$ på $\hat{\mathbb{C}}$. Det gjenstår selvsagt å definere en slik μ.

Vi definerer først μ n.o. (utenom γ_1 som har mål null) på E ved:

$$\mu(z) = \begin{cases} 0 \quad , & z \in E \cap ext\,\gamma_1 \\ \hat{\Psi}^* 0 \quad , & z \in E \cap int\,\gamma_1 \end{cases}$$

F er opplagt analytisk på $E \cap ext\,\gamma_1$ og på $E \cap int\,\gamma_1$ er

$$\hat{\Psi}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \hat{\Psi} : \hat{\mathbb{C}}[\hat{\Psi}^* 0] \xrightarrow{\hat{\Psi}} \hat{\mathbb{C}}[0] \xrightarrow{\tilde{f}} \hat{\mathbb{C}}[0] \xrightarrow{\hat{\Psi}^{-1}} \hat{\mathbb{C}}[\hat{\Psi}^* 0]$$



Figur 7.4: *Figuren viser virkningen til F på den annulære regionen E. Regionen mellom ∂U og γ_1 er per konstruksjon av γ_1 f invariant. Tilsvarende er regionen mellom $\partial\tilde{U}$ og $\tilde{\gamma}_1$ $\tilde{f}$-invariant. Dette gjør E invariant m.h.p. F.*

Dette er en sammensetning av analytiske funksjoner og dermed analytisk (mellom riemannflater). Vi utvider nå først μ til $F^{-1}(E_0)$ ved tilbaketrekning under F. Det har ingen betydning at $F^{-1}(E)$ og E overlapper, for i overlappen vet vi at $F^*\mu = \mu$. På akkurat samme måte utvider vi $\mu|_{F^{-1}(E)}$, denne gang til $(F^{\circ 2})^{-1}(E)$ ved $F^*\mu|_{F^{-1}(E)}$. Fortsetter vi induktivt, utvider vi μ til hele $O^-(E)$, og vi noterer oss at ved enhver tilbaketrekning til $(F^{\circ n})^{-1}(E)$, der $n \geq 2$, øker ikke $\|\mu\|_\infty$. Dette fordi F er holomorf i en omegn av $\hat{\mathbb{C}} \setminus F^{-1}(E)$. Setter vi $\mu = 0$ på $\hat{\mathbb{C}} \setminus O^-(E)$ er $\|\mu\|_\infty < 1$ og $F : \hat{\mathbb{C}}[\mu] \to \hat{\mathbb{C}}[\mu]$ er analytisk mellom riemannflater.

Dersom ϕ_μ er den kvasikonforme avbildningen gitt ved MRMT, med $\phi_\mu * 0 = \mu$, da er $R = \phi_\mu \circ \hat{\Psi} \circ \phi_\mu^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ holomorf og rasjonal av grad $2d_f - 1$.

Det annulære området $\phi_\mu(E)$ er R-invariant:

$$R(\phi_\mu(E)) = \phi_\mu \circ F \circ \phi_\mu^{-1}(\phi_\mu(E)) = \phi_\mu(F(E)) = \phi_\mu(E)$$

og kan derfor ved Montels setning ikke snitte juliamengden for R. Videre er R kvasikonformt konjugert til en rotasjon på $\phi_\mu(\gamma_1)$:

$$(\phi \circ \phi_\mu) \circ R \circ (\phi \circ \phi_\mu)^{-1} = \underbrace{\phi \circ F \circ \phi^{-1}}_{F=f \text{ på } \gamma_1} = e^{2\pi i\theta} z$$

Følgen $R^{\circ n}(z)$ konvergerer dermed ikke for noen $z \in \phi_\mu(\gamma_1)$, og $\phi_\mu(E)$ må være inneholdt i enten en siegeldisk eller en hermanring for R. Dersom $\phi_\mu(E)$ er en siegeldisk er familien av itererte $\{R^{\circ n}\}$ ekvikontinuerlig i en av de to komponentene til $\hat{\mathbb{C}} \setminus \phi_{\hat{\mu}}(\gamma_1)$. På den ene av disse er R kvasikonformt konjugert til $f\big|_{ext\,\gamma_1}$ og på den andre kvasikonformt konjugert til $\tilde{f}\big|_{ext\,\tilde{\gamma}_1}$. Men enhver kvasikonform avbildning på $\hat{\mathbb{C}}$ er uniformt kontinuerlig så ekvikontinuitet bevares under disse konjugeringer. Så enten er $ext\,\gamma_1 \subset \mathcal{F}_f$ eller $ext\,\tilde{\gamma}_1$. M.a.o. er enten $U = \hat{\mathbb{C}}$ eller $\tilde{U} = \hat{\mathbb{C}}$, og dette er opplagt umulig siden juliamengden aldri er tom. Vi konkluderer at R har en hermanring med rotasjonstall θ og $\deg_R = 2d_f - 1$.

□

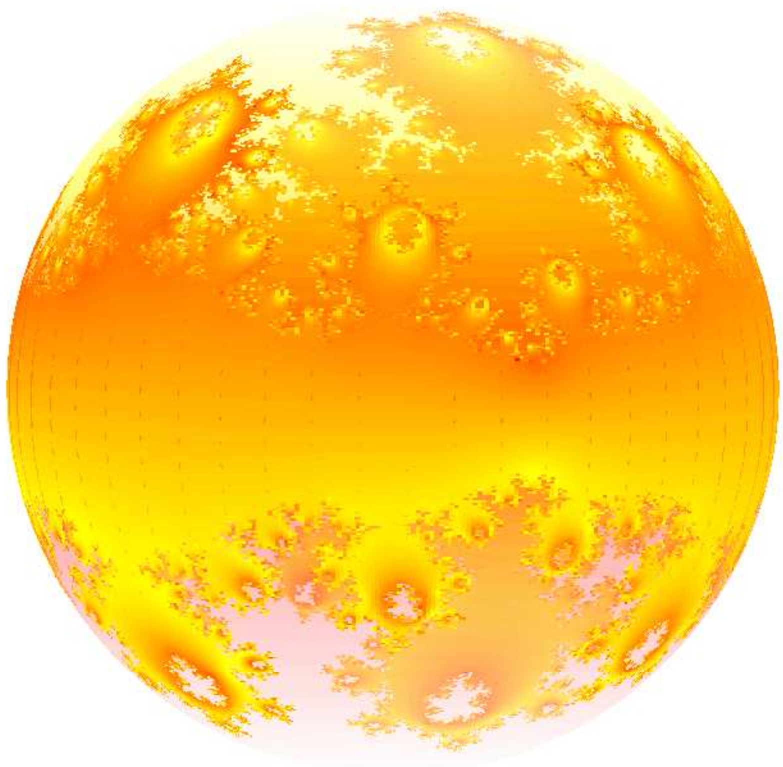
Dersom vi tar et kvadratisk polynom f som har en siegeldisk, gir Shishikuras setning en rasjonal funksjon av grad 3 hvis fatoumengde ineholder en Hermanring. Dette er i en viss forstand det enkleste mulige tilfellet siden Shishikura, i samme masteravhandling som forrige bevis er tatt fra, beviste at antallet av hermanringer er mindre enn eller lik $d_f - 2$. En avbildning av grad to kan med andre ord ikke fremvise en hermanring.

7.1.4 Eksempel. *Et eksplisitt eksempel på en hermanring*

Shishikuras konstruksjon er den ene av to måter å bevise eksistensen av hermanringer på. Den andre er tilskrevet Arnol'd og Herman og er av konstruktiv natur. Beviset baserer seg på et dyptgående studium av sirkelhomeomorfier, og vi skal ikke her forsøke å gi noen detaljer rundt dette. Vi nøyer oss med å notere at en på denne måten kan bevise at for "rette" velg av $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ og $a \in \mathbb{C}$ har blaschkeproduktet

$$z \mapsto \lambda z^2 \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \tag{7.1}$$

en Hermanring. Figur 7.5 viser Hermanringen for funksjonen av typen 7.1 med $\lambda = e^{2\pi i \frac{1}{\varphi}}$, der φ er det gylne snitt, og $a = 4$. Figuren er laget ved å definere 36000 uniformt fordelte punkt på sfæren. Disse sendes ved stereografisk projeksjon ned i det komplekse planet der iterasjonen av $R(z) = e^{2\pi i \frac{1}{\varphi}} z^2 \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ utføres 1200 ganger i hvert punkt. Heretter *slettes* alle punkt med $|R^{\circ 1200}(z)| < 0.1$ og $|R^{\circ 1200}(z)| > 100$, og de resterende punkt sendes tilbake på Riemannsfæren der de fargelegges etter størrelsen til $|R^{\circ 1200}(z)|$. Ved å slette punktene med $|R^{\circ 1200}(z)| < 0.1$ og $|R^{\circ 1200}(z)| > 100$ fjerner vi alle punkter som konvergerer mot 0 og ∞: det vil si böttcherkomponentene sentrert i 0 og ∞. Bildet viser derfor bare Hermanringen og dens inverse bilder.



Figur 7.5: *Funksjonen* $R(z) = e^{\pi i(\sqrt{5}-1)} z^2 \frac{4-z}{1-4z}$ *har en hermanring, som slynger seg rundt ekvator på Riemannsfæren. Symmetrien i bildet stammer fra det faktum* $\frac{1}{\bar{z}}$ *konjugerer* R *til seg selv. Dette betyr at Både juliamengden og Fatoumengden til* R *er invariant med hensyn på den lineære transformasjonen* $\frac{1}{\bar{z}}$.

Avslutning

Jeg satte meg som mål i innledningen av denne oppgaven å presentere et fullstendig bevis for klassifikasjonssetningen 2.3.2 i en mer tilgjengelig form enn det som er tilfellet i en stor del av litteraturen. Hvorvidt dette har lykkes, finnes det vel ikke noe entydig svar på. Faktum er i allefall at alle bevis er skrevet ut i vesentlig større detalj enn tilfellet er i de vanligste kildene. Jeg har videre, med hensyn til eksistensen siegeldisker og hermanringer, gitt betraktelig lettere bevis enn de konstruktive eksistensbevis som ellers er å finne i litteraturen. Omvendt har jeg i arbeidet med oppgaven måttet innse at enkelte tema ganske enkelt *er* vanskelige, og kanskje ikke lar seg forenkle under et visst nivå. Beviset for Fatous formodning om vandrende komponenter inneholder for eksempel så mange ikke-trivielle overganger, at det må anses som umulig å fremstille beviset i sin nåværende form på en lett forståelig måte. Hva angår Shishikuras bevis for eksistens av hermanringer er selve idéen, når man først har forstått den, relativt enkel. Her mener jeg selv å ha bidratt vesentlig til å lette forståelsen av beviset, bl.a. ved å konstruere brukbare figurer som illustrerer den grunnleggende idéen i beviset. At slike figurer ikke finnes annetsteds i litteraturen virker merkelig, siden konstruksjonen Shishikura anvender har en klar geometrisk tolkning.

Hva angår videre arbeid innen feltet, er det mye enklere å si hva jeg *har* gjort i denne oppgaven, enn hva vi *ikke* har gjort. Jeg har egentlig, for å si det annerledes, bare såvidt berørt det enorme feltet holomorf dynamikk i dag utgjør. For eksempel er jeg bare enkelte ganger kommet inn på betydningen av oppførselen til kritiske punkter, og jeg har heller ikke i særlig stor grad diskutert parameterrom. Begge disse temaene er helt sentrale i dagens teori, og de henger intimt sammen.

Derimot er teknikkene jeg har anvendt i denne oppgaven, og i særdeleshet deres videreutviklinger, sentrale verktøy i dagens forskning, og legger slik sett et fundament, for det Ph.D.-studium jeg nå skal påbegynne under veiledning av Kari Hag og Bodil Branner.

Notasjonsliste

Her følger en liste over notasjon som brukes gjennom hele oppgaven:

- $\mathcal{A}$ E: Todimensjonalt lesbesguemål
- $\mathcal{A}_{r,R}$: Ringen $\{r < |z| < R\}$
- $\mathbb{C}$: Det komplekse plan
- $\hat{\mathbb{C}}$: riemannsfæren $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
- $\mathbb{D}$: Enhetsdisken
- $\mathbb{D}_r(z_0)$: $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z - z_0| < r\}$
- $\mathbb{D}_r$: $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$
- σ: Den sfæriske metrikken på $\hat{\mathbb{C}}$.
- ϱ_U Den hyberbolske metrikken på U
- ∂, f_z: Derivert med hensyn på z
- $\overline{\partial}, f_{\bar{z}}$: Derivert med hensyn på $\bar{z}$
- $f^{\circ n}$: $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ ganger}}$
- $O^+(z_0)$: Banen til z_0 under f, $\{f^{\circ n}(z_0)\}_{n=0}^{\infty}$
- $O^-(z_0)$: Det inverse treet til z_0 under f, $\bigcup_{n=0}^{\infty}(f^{-1})^{\circ n}(z_0)$
- $GO(z_0)$: "Grand Orbit" til z_0, $O^+(z_0) \cup O^-(z_0)$
- d_f: Graden til en rasjonal avbildning: $\operatorname{card} f^{-1}(z_0)$ for alle $z_0 \in \mathbb{C}$.
- $\mathcal{J}_f$: Juliamengden til f
- $\mathcal{F}_f$: Fatoumengden til f
- $\mathbb{K}^m$: $\{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : -1 < x_j < 1\}$

Bibliografi

[Ahlfors] L.V. Ahlfors et al. Lectures on Quasiconformal Mappings, 2'nd edition, American Mathematical Society 2006.

[Ahlfors2] L.V. Ahlfors, Complex Analysis, 3'rd edition, McGraw Hill 1979.

[Beardon] A.F. Beardon, Iteration of Rational Functions, Graduate Texts in Mathematics no. 132, Springer 1991.

[Buff] X. Buff, C. Henriksen, J.H. Hubbard, Farey Curves, Experimantal Mathematics, Vol 10(2001), No 4 s.481-486.

[Carleson] L. Carleson, T.W. Gamelin, Complex Dynamics, Springer 1993.

[Conway1] J.B. Conway, Functions of One Complex Variable: Vol. I, 2'nd edition, Graduate Texts in Mathematics no. 11, Springer 1978

[Conway2] J.B. Conway, Functions of One Complex Variable: Vol. II, 1'st edition, Graduate Texts in Mathematics no. 159, Springer 1995

[Douady] A. Douady, X. Buff,"Le Théorème d'intégrabilité des structures presque complexes" The Mandelbrot set, Theme and Variations, Cambridge university press 2001.

[Dundas] B.I. Dundas, Differential Topology - lecture notes 2002.

[Folland] G.B. Folland, Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications, 2'nd edition, Wiley interscience 1999.

[Gamelin] T.W. Gamelin, Complex analysis, Springer 2000.

[Gasquet] C. Gasquet, P. Witomski, "Fourier Analysis and Applications" Springer 1991.

[Hubbard] J.H. Hubbard, Teichmüller Theory Vol. 1, Matrix editions 2006.

[Kriete] H. Kriete, Holomorphic motions in the parameter space for the relaxed Newton Method, Kodai Journal og Mathematics, s.89-107 (2002).

[Lee] J.M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, GTM no. 218, Springer 2000.

[LV] O. Lehto, K. Virtanen, Quasiconformal Mappings in the Plane, 2'nd edition, Springer 1973.

[Lehto] O. Lehto, Univalent Functions and Teichmüller spaces, GTM no. 109, Springer 1987.

[Lindstrøm] T. Lindstrøm, Kalkulus 3. utg, Universitetsforlaget 2006.

[Lyubich] M. Lyubich, The dynamics of rational transforms - the topological picture, Russian math surveys 41(1986) s.43-117.

[McMullen] Curtis T. McMullen, "Frontiers in complex analysis", http://www.math.harvard.edu/ ctm/papers/home/text/papers/front/front.pdf (2006)

[Mercer] N. Mercer, R. Stankewitz, Introduction to Quasiconformal Mappings in the plane, with an application to quasiconforml surgery- preprint (Ball State University).

[Milnor] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable, 2'nd edition, Vieweg 2000.

[Munkres] J. Munkres, Topology, 2.nd edt., Prentice Hall, 1975.

[Nehari] Z. Nehari, Conformal Mapping, McGraw Hill, 1952.

[Niven] I. Niven, Irrational numbers, Carus Monographs, 1956.

[Pommerenke] C. Pommerenke, Boundary Behaviour of Conformal Maps, Sphringer 1991.

[Saff] A.D. Snider, E.B. Saff, Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science and engineering. second edt., Prentice Hall, 1993.

[Shishikura] M. Shishikura, On the quasiconformal surgery of rational functions, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 20(1987),s. 1-29.

[Steinmetz] N. Steinmetz, Rational Iteration - Complex Analytic Dynamical Systems, W-De-G (Walter De Gruyter) 1993.

[Zakeri] S. Zakeri, "Holomorphic Dynamics - Very brief

[Wolfram] http://mathworld.wolfram.com/PowerTower.html notes", Lecture notes at Stony brook 2003.