NTNU
Det skapende universitet

Haarmål og høyreregulær representasjon på kompakte kvantegrupper

Vegard Steine Bertelsen

Master i fysikk og matematikk
Oppgaven levert: August 2006
Hovedveileder: Magnus B. Landstad, MATH

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Oppgavetekst

Oppgaven består i å se på sammenhengen mellom Toeplitz operatorer og kvantegrupper, spesielt de operatorene som inngår i Woronowicz^Ò konstruksjon av kvante-SU(2). I forbindelse med dette arbeidet må en se nærmere på noen artikler av A. Van Daele og L. Woronowicz, samt at en må sette seg inn i teorien for Toeplitz operatorer.

Oppgaven gitt: 20. mars 2006
Hovedveileder: Magnus B. Landstad, MATH

Sammendrag

I denne oppgaven vil vi definere og vise eksistens av haarmål på kompakte kvantegrupper, se på hvordan vi ved hjelp av haarmålet kan konstruere en høyreregulær representasjon. Vi vil så gjøre dette ganske eksplisitt for kvante-SU(2).

Innhold

Kapittel 1

Innledning

Denne oppgaven er skrevet våren og sommeren 2006 som avsluttning på masterstudiet i teknologi linje for fysikk og matematikk ved NTNU. Den skal representere 20 ukers arbeid, ikke inklusive helligdager. Oppgaven er ment som en fortsettelse av en prosjektoppgave [2], som ble skrevet høsten 2005 også som en del av masterstudiet.

1.1 Anbefalte forkunnskaper

Denne masteroppgaven er ment som en fortsettelse av et prosjekt [2] som ble gjennomført høsten 2005. Det vil derfor antas at leseren er fortrolig med de begrepene som ble innført der. Noen endringer vil vi likevel gjøre, og dette er kommentert i avsnitt 1.3. Ut over dette dett anbefales det å ha en viss bakgrunn i elementær funksjonalanalyse, elle enda bedre å ha vært litt borti grunnleggende begrep innen studiet av operatoralgebraer.

1.2 Notasjon

Her følger en liste med noen av de mest brukte symbolene, og hva de blir brukt om.

$\overline{z}$	Den komplekskonjugerte av det komplekse tallet z.
*	Involusjonen på en *-algebra, vi bruker normalt a^* om $^*(a)$.
A^*	Dualen til en kompakt kvantegruppe eller C^*-algebra A.
$*$	Konvolusjonsprodukt.
$\cdot^{op}$	Den motsatte multiplikasjonen, $a \cdot^{op} b = ba$.
$< x, y >$	Indreproduktet av x med y.
$< A >$	Idealet generert av mengden A.
$\|x\|$	Normen til et element x i et normert rom.
0	Den additive identiteten i et vektorrom.
1	Den multiplikative identiteten i en algebra, samme symbol vil bli brukt om identiteten i forskjellige algebraer.
1_A	Den multiplikative identiteten på algebraen A.
Δ	Diagonalavbildningen eller en komultiplikasjon, avklares i hvert enkelt tilfelle.
$A \otimes^c B$	Om A og B er C^*-algebraer, er $A \otimes^c B$ en C^*-algebra som inngår i et C^*-algebratensorprodukt av A med B.
$A \otimes^H B$	Om A og B er hilbertrom, er $A \otimes^H B$ et hilbertrom som inngår i et hilbertromtensorprodukt av A med B.
$B(\mathcal{H})$	C^*-algebraen av kontinuerlige lineæravbildninger fra og til hilbertrommet $\mathcal{H}$.
$B_0(\mathcal{H})$	C^*-algebraen av kompakte operatorer på hilbertrommet $\mathcal{H}$.
$\mathbb{C}$	De komplekse tallene.
$clin(X)$	Tillukningen til det lineære spennet til mengden X.
Id	Identitetsavbildningen på en eller annen mengde, samme symbol vil bli brukt om identiteten på forskjellige mengder.
Id_A	Identitetsavbildningen på mengden A.
$Im(f)$	Bildet til avbildningen f.
$Ker(f)$	Kjernen til avbildningen f.
$lin(X)$	Det lineære spennet til mengden X.
$M(A)$	Multiplikatoralgebraen til en algebra A.
$\mathbb{N}$	De naturlige tallene, vi inkluderer 0.
$\mathbb{R}$	De reelle tallene, her ser vi på de reelle tallene som mengden av komplekse tall med imaginærdel 0.
$\chi_{m,n}$	Den karakteristiske funksjonen til mengden $\{(m, n)\}$.

Så kan vi nevne noen antagelse vi gjør som vil gjelde i hele oppgaven.

Alle algebraer i hele oppgaven antas å ha et ikkedegenerert produkt.

For ethvert vektorrom V, hilbertrom $\mathcal{H}$ og for enhver C^*-algebra A vil vi alltid bruke $(V, \cdot)$, $(\mathcal{H}, \cdot)$ og $(A, \cdot)$ som tensorprodukt, hilbertromtensorprodukt, og C^*-algebratensorprodukt av V med $\mathbb{C}$, $\mathcal{H}$ med $\mathbb{C}$ og A med $\mathbb{C}$ der $\cdot$ i alle tilfellene er skalarmultiplikasjon.

Så kan vi definere følge og vise et eksempel på vår bruk av disse. En følge i en mengde X er en avbildning $f : \mathbb{N} \to X$. Vi kan i denne oppgaven for eksempel ha en følge g av avbildninger fra en algebra A til de komplekse tallene. I dette tilfellet vil vi skrive $g(n)(a)$ om det komplekse tallet vi får om vi evaluerer det *nte* elementet i følgen i elementet a i algebraen.

1.3 Definisjonsendring fra prosjektet

I prosjektet ble en kompakt kvantegruppe (A, Δ) definert som et par bestående av en unital C^*-algebra A og en komultiplikasjon $\Delta : A \to M(A \otimes^c A)$ på A, som oppfyller enkelte krav. Det ble også kommentert at siden alle algebraene i definisjonen var unitale, var de isomorfe med sin multiplikatoralgebra. Her vil vi la komultiplikasjonen ha et C^*-algebratensorprodukt av A med A som kodomene, og dermed droppe multiplikatoralgebraen. I prosjektoppgaven krevde vi videre av en komultiplikasjon at det eksisterte C^*-algebratensorprodukt $(A \otimes^c A, \phi)$ av A med A, $(A \otimes^c A \otimes^c A, \Psi')$ av $A \otimes^c A$ med A og $(A \otimes^c A \otimes^c A, \Psi'')$ av A med $A \otimes^c A$ slik at for alle $(a, b, c) \in A \times A \times A$ ville:

$$\Psi'(\phi(a, b), c) = \Psi''(a, \phi(b, c)) \tag{1.1}$$

$$(\Delta \otimes^c Id) \circ \phi = \Psi' \circ (\Delta \times Id) \tag{1.2}$$

$$(Id \otimes^c \Delta) \circ \phi = \Psi'' \circ (Id \times \Delta) \tag{1.3}$$

$$(\Delta \otimes^c Id) \circ \Delta = (Id \otimes^c \Delta) \circ \Delta. \tag{1.4}$$

Den endringen vi vil gjøre her er å definere en kompakt kvantegruppe som et trippel (A, Δ, ϕ) der A og Δ er som før, og $(A \otimes^c A, \phi)$ er et C^*-algebratensorprodukt av A med A slik at det eksisterer to balanserte avbildninger Ψ' og Ψ'' som oppfyller kravene 1.1-1.4.

Vi vil nå vise at for en gitt Δ avhenger eksistensen av tensorprodukt $(A \otimes^c A \otimes^c A, \Psi')$ og $(A \otimes^c A \otimes^c A, \Psi'')$ slik at kravene 1.1-1.4 er oppfyllt av valg av C^*-algebratensorprodukt $(A \otimes^c A, \phi)$.

Siden de eneste endringene vi kan gjøre med Ψ' eller Ψ'' slik at parene $(A \otimes^c A \otimes^c A, \Psi')$ og $(A \otimes^c A \otimes^c A, \Psi'')$ fremdeles er C^*-algebratensorprodukt, er å sette sammen med en automorfi på $A \otimes^c A \otimes^c A$, vil koassosiativiteten ikke avhenge av hvilke avbildninger Ψ' og Ψ'' vi velger, bare de oppfyller de kravene vi har stilt. Det at de eneste endringene vi kan gjøre er å sette sammen med en automorfi, er teorem 11.1.3 i [6].

Så kan vi se på et eksempel som viser at koassosiativiteten til Δ forutsetter noe om valg av balansert avbildning ϕ. La G være en kompakt gruppe, og $A = C(G)$, mengden av kontinuerlige avbildninger fra G til $\mathbb{C}$. Vi legger punktvise algebraoperasjoner på A og vi bruker punktvis komplekskonjugering som involusjon. Med tensorproduktet $(A \otimes^c A, \phi)$ der $A \otimes^c A \subseteq C(G \times G)$ og $\phi(f, g)(x, y) = f(x)g(y)$ for alle $(f, g) \in A \times A$, og komultiplikasjon $\Delta : A \to A \otimes^c A$ gitt ved at $\Delta(f)(x, y) = f(xy)$ med $f \in A$ og $(x, y) \in G \times G$, er Δ koassosiativ. Nå kan vi se hva som skjer om vi bytter ϕ med ϕ' gitt ved at $\phi'(f, g)(x, y) = f(x)g(y^{-1})$.

Da må vi bytte minst en av Ψ' og Ψ'' for at $\Psi' \circ (1 \times \phi') = \Psi'' \circ (\phi' \times 1)$ skal holde. Vi velger $A \otimes^c A \otimes^c A \subseteq C(G \times G \times G)$ og definerer $\Psi' : A \times (A \otimes^c A) \to A \otimes^c A \otimes^c A$ ved at for alle $(f, g) \in A \times (A \otimes^c A)$ og $(x, y, z) \in G \times G \times G$ er $\Psi'(f, g)(x, (y, z)) = f(x)g(y, z)$. Dermed må $\Psi'' : (A \otimes^c A) \times A \to A \otimes^c A \otimes^c A$ være slik at $\Psi''(g, f)((x, y), z) = g(x, y^{-1})f(z^{-1})$ for at $\Psi' \circ (Id \times \phi') = \Psi'' \circ (\phi' \times Id)$ skal være oppfylt. Nå kan vi legge merke til at med $f \in A \otimes^c A$ og $(x, y, z) \in G \times G \times G$ er $(\Delta \otimes^c Id)(f)(x, y, z) = f(xy^{-1}, z)$ og $(Id \otimes^c \Delta)(f)(x, y, z) = f(x, (yz)^{-1})$. Så er det bare å regne ut $((Id \otimes^c \Delta) \circ \Delta)(f)(x, y, z) = \Delta(f)(x, (yz)^{-1}) = f(x(yz)^{-1})$ mens $((\Delta \otimes^c Id) \circ \Delta)(f)(x, y, z) = \Delta(f)(xy^{-1}, z) = f(xy^{-1}z)$, og det eksisterer en kontinuerlig funksjon f fra en kompakt gruppe inn i $\mathbb{C}$ slik at det eksisterer element x, y og z med $f(xy^{-1}z) \neq f(x(yz)^{-1})$.

1.4 Kapitteloppbygging

Først i enkelte av kapittelene er det et avsnitt om valg og betingelser på C^*- og hilbertromtensorprodukt som vil bli brukt i kapittelet. Grunnen til at dette er samlet først i hvert kapittel og ikke der det kan være behov for denne informasjonen er at det ofte vil fremgå av sammenhengen hvilke betingelser som er gjort, og at valg av tensorproduk ofte ikke er hovedsaken der tensorproduktet brukes. Om det likevel skulle være uklart, er det mulig å slå opp i starten av kapittelet. Dersom det er uklart om det eksisterer valg som oppfyller kravene som stilles, vil dette vises eller sannsynliggjøres etter at alle betingelsene er stilt. Det anbefales ikke å lese valgavsnittene før man leser resten av kapittelet, men heller bruke det som oppslag om noe skulle være uklart. Derfor vil også symbolene som brukes i disse avsnittene ofte være definert der valget blir gjort, og ikke i valgavsnittet.

1.5 Takk til

Så vil jeg takke de som har hjulpet meg med denne oppgaven. Spesielt vil jeg nevne Sigurd Segtnan og Asgeir Steine som har hjulpet til med korekturlesing, og med nyttige diskusjoner underveis. Sist men ikke minst vil jeg takke min veileder Magnus B. Landstad som har gitt meg en interessant oppgave, og som har vært tilgjenngelig for spørsmål underveis.

Kapittel 2

Egenskaper ved C^*-algebraer og C^*-algebratensorprodukt

2.1 Valg

I definisjon 6 er $Id \otimes^c \xi$ og $\xi \otimes^c Id$ definert med hensyn på ϕ og skalarmultiplikasjon i A og $\xi \otimes^c \xi'$ med hensyn på ϕ og multiplikasjon i $\mathbb{C}$.

I utregningene etter definisjonen av konvolusjon er $Id \otimes^c g$ og $Id \otimes^c h$ definert med hensyn på ϕ og skalarmultiplikasjon i A, mens $f \otimes^c g$ og $h \otimes^c \eta$ er definert med hensyn på ϕ og multiplikasjon i $\mathbb{C}$.

2.2 Ordning og tensorprodukt av avbildninger

I dette avsnittet vil vi definere positive element i en C^*-algebra, og bruke dette til å definere en delvis ordning, utlede noen enkle egenskaper ved denne ordningen, samt å gjenngi noen resultater om generelle C^*-algebraer. Mye av innholdet i dette avsnittet er hentet fra [6] og [7].

Først tre definisjoner fra [6].

Definisjon 1 (positive element i en unital C^*-algebra). *Et positivt element i en unital C^*-algebra er et selvadjungert element hvis spekter er inneholdt i de ikkenegative reelle tallene.*

Definisjon 2 (positiv lineærfunksjonal). *En lineærfunksjonal ρ på en unital C^*-algebra A er positiv dersom $Im(\rho|_{\mathcal{M}^+}) \subseteq \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$, der $\mathcal{M}^+$ er de positive elementene i A.*

Definisjon 3 (hermitesk lineærfunksjonal). *En lineærfunksjonal ρ på en unital C^*-algebra A kalles hermitesk om $\rho(a) = \overline{\rho(a^*)}$ for alle $a \in A$.*

Definisjon 4 (tilstand). *En tilstand på en unital C^*-algebra A er en positiv lineærfunksjonal som sender 1_A på $1_{\mathbb{C}}$.*

Definisjon 5 (C^*-algebratensorprodukt av avbildninger). *La A, B, C og D være C^*-algebraer, C^*-algebratensorprodukt $(A \otimes^c B, \phi)$ av A med B og $(C \otimes^c D, \psi)$. Dersom vi har avbildninger $f : A \to C$ og $g : B \to D$ vil $f \otimes^c g$ definert med hensyn på ϕ og ψ være en avbildning $f \otimes^c g : A \otimes^c B \to C \otimes^c D$ slik at $(f \otimes^c g)(\phi(a, b)) = \psi(f(a), g(b))$ for alle $(a, b) \in A \times B$.*

I en del tilfeller vet vi at det eksisterer nøyaktig en avbildning som i definisjonen over, som oppfyller noen ekstra egenskaper. Vi skal bare ramse opp noen resultat som sier noe om eksistens og entydighet av slike. I alle tilfellene nedenfor er avbildninger av typen $f \otimes^c g$ som i definisjonen over definert med hensyn på de C^*-algebratensorproduktene som er nevnt og skalarmultiplikasjon om den ene algebraen er $\mathbb{C}$. I hele resten av oppgaven vil vi bare referere til avbildninger av typen $f \otimes^c g$, og da mene en avbildning som oppfyller de ekstra kravene som er gitt nedenfor. Meningen er at hvilke ekstra egenskaper det er snakk om skal avgjøres ut fra hvilken av de tre neste teoremene f og g oppfyller kravene til.

Først skriver vi ned et spesialtilfelle av korallar 3.2.7 i [3], beviset for resultatet er å finne i [3].

Proposisjon 1 (Korrolar 3.2.7 i [3]). *La $f \in A^*$ og $g \in B^*$ være kontinuerlige lineærfunksjonaler på C^*-algebraene A og B respektivt. Det eksisterer nøyaktig en kontinuerlig lineærfunksjonal $f \otimes^c g$ på $A \otimes^c B$. Normen til $f \otimes^c g$ er dessuten gitt ved $\|f \otimes^c g\| = \|f\|\|g\|$.*

Så et resultat som gir oss eksistens av såkalte "slice maps".

Proposisjon 2 (Teorem 1 i [9]). *La A og B være C^*-algebraer. For enhver kontinuerlig lineæravbildning $\phi : A \to \mathbb{C}$ og for enhver kontinuerlig lineæravbildning $\psi : B \to \mathbb{C}$ eksisterer det en kontinuerlig surjektiv lineæravbildning $R_\phi : A \otimes^c B \to B$ og en kontinuerlig surjektiv lineæravbildning $L_\psi : A \otimes^c B \to A$ slik at $R_\phi(\sum_{(a,b)\in D} \xi(a,b)) = \sum_{(a,b)\in D} \phi(a)b$ og $L_\psi(\sum_{(a,b)\in D} \xi(a,b)) = \sum_{(a,b)\in D} a\psi(b)$, der $(A \otimes^c B, \xi)$ er et C^*-algebratensorprodukt av A med B og D er en vilkårlig endelig delmengde av $A \times B$. Disse avbildningene vil dessuten kommutere, i den forstand at for alle $x \in A \otimes^c B$ er $(\phi \circ L_\psi)(x) = (\psi \circ R_\phi)(x) = \phi \otimes^c \psi(x)$. Vi har dessuten at for enhver ikkenull $x \in A \otimes^c B$ eksisterer det en tilstand ϕ på A og en tilstand ψ på B slik at $R_\phi(x) \neq 0 \neq L_\psi(x)$.*

Med R_ϕ og L_ψ som i proposisjonen over vil avbildningene R_ϕ vil herfra bli betegnet $\phi \otimes^c Id$ og L_ψ vil bli betegnet $Id \otimes^c \psi$.

Så et spesialtilfelle av proposisjon 11.1.3 i [6], beviset er å finne i [6].

Proposisjon 3 (Proposisjon 11.1.3 i [6]). *La A, B, C og D være C^*-algebraer og la $f : A \to C$ og $g : B \to D$ være *-homomorfier. Det eksisterer nøyaktig en *-homomorfi $f \otimes^c g$. Dersom både f og g er injektive er $f \otimes^c g$ også injektiv.*

Da kan vi merke oss at avbildninger på formen $(Id \otimes^c \rho)$ eller $(\rho \otimes Id)$ bevarer involusjon om ρ er hermitesk.

Så følger noen resultater om C^*-algebraer vi ikke vil bevise her, men referere disse til andre kilder.

Så gjengir vi proposisjon 5.2 og 5.3 fra [8, s. 21-22].

Proposisjon 4 (Proposisjon 5.2 i [8]). *Dersom $\pi : A \to B$ er en *-homomorfi fra en involutiv banachalgebra A inn i en C^*-algebra B, er $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ for alle $x \in A$.*

Proposisjon 5 (Proposisjon 5.3 i [8]). *La A være en C^*-algebra og B en involutiv banachalgebra. Om $\pi : A \to B$ er en injektiv *-homomorfi, er $\|\pi(x)\| \geq \|x\|$ for alle $x \in A$.*

Proposisjon 6 (Korolar 4.3.7 i [6]). *Alle kontinuerlige lineærfunksjonaler på en unital C^*-algebra kan skrives som en lineærkombinasjon av maksimalt 4 tilstander.*

Når vi i tillegg vet at dualen til ethvert banachrom skiller punkter i banachrommet, må tilstandene skille punkter i C^*-algebraen.

Proposisjon 7 (Teorem 4.3.2 i [6, s. 256-257]). *Om $\mathcal{M}$ er et selvadjungert underrom av en unital C^*-algebra A og $\mathcal{M}$ inneholder identiteten i A, er en lineær funksjonal ρ på $\mathcal{M}$ positiv hvis og bare hvis $\|\rho\| = \rho(Id)$.*

Proposisjon 8. *Alle positive lineærfunksjonaler er hermiteske.*

Bevis. Alle element $a \in A$ kan skrives på formen $a_1 + ia_2$ der a_1 og a_2 er selvadjungerte. Vi kan la $a_1 = \frac{1}{2}(a + a^*)$ og $a_2 = \frac{i}{2}(a^* - a)$. Dermed vil for enhver lineærfunksjonal ρ,

$$\begin{aligned}\rho(a) - \overline{\rho(a^*)} &= \rho(a_1) + i\rho(a_2) - \overline{\rho(a_1^*) - i\rho(a_2^*)} \\ &= \rho(a_1) + i\rho(a_2) - \overline{\rho(a_1) - i\rho(a_2)},\end{aligned}$$

som er null om imaginærdelen til $\rho(x)$ er null for alle selvadjungerte $x \in A$.

Dersom $a \in A$ er selvadjungert, ligger spekteret til a i intervallet $[-\|a\|, \|a\|]$, slik at $\|a\|1 - a$ er positiv.

Om ρ er positiv og a er selvadjungert vil derfor $\rho(a) = \frac{1}{2}\big(\rho(\|a\|1 + a) - \rho(\|a\|1 - a)\big) \in \mathbb{R}$, og ρ må være hermitesk. □

Her kommer en definisjon av konvolusjon, og noen enkle egenskaper. Vi følger [10].

2.3 Konvolusjonsprodukt

Definisjon 6 (konvolusjon). *La ξ og ξ' være kontinuerlige lineærfunksjonaler på den kompakte kvantegruppen (A, Δ, ϕ), og la $a \in A$. Nå kan vi definere*

$$\begin{aligned}\xi * a &= (Id \otimes^c \xi)(\Delta(a)) \\ a * \xi &= (\xi \otimes^c Id)(\Delta(a)) \\ \xi * \xi' &= (\xi \otimes^c \xi') \circ \Delta\end{aligned}$$

Uttrykkt ved konvolusjon blir definisjonen av et haarmål h på (A, Δ, ϕ) at for alle $a \in A$ er

$$a * h = h * a = h(a)Id.$$

La (A, Δ, ϕ) være en kompakt kvantegruppe og la F være mengden av avbildninger fra $A \times A$ til $\mathbb{C}$ med endelig støtte. Vi vet at det for alle $a \in A$ eksisterer en følge $x : \mathbb{N} \to F$ slik at $\lim_{n\to\infty} \sum_{(a_1,a_2)\in A\times A} x(n)(a_1, a_2)\phi(a_1, a_2) = \Delta(a)$. Nå følger en noe grisete utregning for å vise at for kontinuerlige lineærfunksjonaler f

og g på A er $f(g*a) = (g*f)(a)$ for alle $a \in A$,

$$\begin{aligned}
f(g*a) &= f((Id \otimes^c g)(\Delta(a))) \\
&= f((Id \otimes^c g)(\lim_{n\to\infty} \sum_{(a_1,a_2)\in A\times A} x(n)(a_1,a_2)\phi(a_1,a_2))) \\
&= \lim_{n\to\infty} f((Id \otimes^c g)(\sum_{(a_1,a_2)\in A\times A} x(n)(a_1,a_2)\phi(a_1,a_2))) \\
&= \lim_{n\to\infty} f(\sum_{(a_1,a_2)\in A\times A} x(n)(a_1,a_2)g(a_2)a_1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{(a_1,a_2)\in A\times A} f(x(n)(a_1,a_2)g(a_2)a_1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{(a_1,a_2)\in A\times A} x(n)(a_1,a_2)g(a_2)f(a_1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{(a_1,a_2)\in A\times A} x(n)(a_1,a_2)(f \otimes^c g)(\phi(a_1,a_2)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{(a_1,a_2)\in A\times A} (f \otimes^c g)x(n)(a_1,a_2)(\phi(a_1,a_2)) \\
&= \lim_{n\to\infty} (f \otimes^c g) \sum_{(a_1,a_2)\in A\times A} x(n)(a_1,a_2)(\phi(a_1,a_2)) \\
&= (f \otimes^c g) \lim_{n\to\infty} \sum_{(a_1,a_2)\in A\times A} x(n)(a_1,a_2)(\phi(a_1,a_2)) \\
&= (f \otimes^c g)\Delta(a) \\
&= (g*f)(a).
\end{aligned}$$

På tilsvarende måte blir $f(a*g) = (g*f)(a)$.

Dersom h er et haarmål på en kompakt kvantegruppe (A, Δ, ϕ) vil for enhver kontinuerlig lineærfunksjonal η og alle $a \in A$

$$\begin{aligned}
(\eta * h)(a) &= (\eta \otimes^C h)(\Delta(a)) \\
&= \eta(Id \otimes^C h)(\Delta(a)) \\
&= \eta(h(a)Id) \\
&= h(a)\eta(Id) \\
&= \eta(h \otimes^c Id)(\Delta(a)) \\
&= (h \otimes^C \eta)(\Delta(a)) \\
&= (h * \eta)(a)
\end{aligned}$$

Det vil altså si at

$$(\eta * h) = (h * \eta) = \eta(1)h. \tag{2.1}$$

2.4 GNS-konstruksjon

Vi vil hente innholdet i dette delkapittelet fra [6, s. 274-285].

Husk at en *-representasjon av en C^*-algebra A på et hilbertrom $\mathcal{H}$ er en *-homomorfi fra A til $B(\mathcal{H})$.

Definisjon 7. *La A være en C^*-algebra og $\mathcal{H}$ et hilbertrom. En *-representasjon $\pi : A \to B(\mathcal{H})$ kalles syklisk med syklisk vektor $\xi_0 \in \mathcal{H}$ om mengden $\{\pi(a)(\xi_0) \mid a \in A\}$ ligger tett i $\mathcal{H}$.*

Proposisjon 9. *La ρ være en tilstand på en C^*-algebra A, $\Delta : A \to A \times A$ være diagonalavbildningen, * være involusjonen på A og $\cdot^{op}$ være den motsatte multiplikasjonen på A, med dette mener jeg at $ab = b \cdot^{op} a$. La videre $y = \rho \circ \cdot^{op} \circ (Id \times ^*)$, dvs $y(a,b) = \rho(b^*a)$ for alle $(a,b) \in A \times A$.*

Da vil mengden $I = \{a \in A \mid \rho(a^*a) = 0\} = ker(y \circ \Delta)$ være et lukket venstreideal i A, og y induserer et indreprodukt på A/I.

Bevis. Siden $y(-,a) : A \to A$, definert ved at $y(-,a)(b) = y(b,a)$ for en gitt $a \in A$, er en sammensetning av lineære avbildninger er y lineær i første faktor. At et bytte av argumentene til y gir en komplekskonjugering er proposisjon 8. At $y(a,a) \in \mathbb{R}$ og $y(a,a) \geq 0$ følger av at a^*a er positiv og at ρ er positiv.

Nå vil I være lukket under venstremultiplikasjon fra A fordi Cauchy-Schwartz ulikheten, [6, s. 256], gir oss $|y(a,b)|^2 \leq y(a,a)y(b,b)$ for alle $b \in A$, og om $a \in I$ er dermed $y(a,b) = 0$. Spesielt gjelder dette om vi lar $b = c^*ca$ for en vilkårlig $c \in A$. Slik ser vi at $0 = y(a,b) = \rho(b^*a) = \rho(a^*c^*ca) = y(ca,ca) = (y \circ \Delta)(ca)$ og at ca ligger i I for alle $c \in A$.

At I er lukket kommer av at det er kjernen til en kontinuerlig avbildning. For å vise at I er et undervektorrom av A ser vi at $I_1 = \bigcap\{ker(y(-,a)) \mid a \in A\}$ er et vektorrom siden det er et snitt av kjerner til lineæravbildninger. Cauchy-Schwartz-ulikheten gir oss at om $b \in I$ er for alle $c \in A$, $|y(b,c)|^2 \leq y(b,b)y(c,c) = 0$ slik at $b \in I_1$. At $I_1 \subseteq I$ ser vi fordi om $b \in I_1$ er $y(b,a) = 0$ for alle $a \in A$ og spesielt for $a = b^*$, slik at $I = I_1$. Dermed er I et undervektorrom og et venstreideal. Nå induserer y en avbildning $\widehat{y}$ på A/I definert ved at $\widehat{y}([a]) = y(a)$ for alle $a \in A$. At $\widehat{y}$ er et indrepodukt på A/I følger nå siden vi har vist at y er lineær i første faktor, bytte av argumentene gir komplekskonjugering, $y(a,a) \geq 0$ og $y(a,a) = 0$ hvis og bare hvis $[a] = [0]$ i A/I der $[\ ]$ er restklasser i A/I. $\square$

Så la oss bare skrive ned et enkelt resultat om kvotientrom.

Proposisjon 10. *Gitt topologiske rom T og T', en ekvivalensrelasjon $\sim$ på T og en kontinuerlig avbildning $f : T/\sim \to T'$. Hvis avbildningen $\widetilde{f} : T \to T'$, definert ved at $\widetilde{f}(x) = f([x])$, er kontinuerlig, da er også f kontinuerlig.*

Bevis. La $p : T \to T/\sim$ være avbildningen slik at $p(t) = [t]$. En mengde A i $T/\sim$ er åpen hvis og bare hvis $p^{-1}(A)$ er åpen i T, dermed er en avbildning $g : T/\sim \to T'$ kontinuerlig hvis og bare hvis $g \circ p$ er kontinuerlig. Nå ser vi at $f \circ p = \widetilde{f}$ slik at f er kontinuerlig hvis og bare hvis $\widetilde{f}$ er kontinuerlig. $\square$

Så har vi endelig det vi trenger for å vise eksistensen av en GNS-representasjon.

Proposisjon 11. *GNS-Representasjon.*
Dersom ρ er en tilstand på en C^*-algebra A eksisterer det en syklisk representasjon $\pi : A \to B(\mathcal{H})$ på et hilbertrom $\mathcal{H}$ med syklisk vektor ξ der $\|\xi\| = 1$ slik at for alle $a \in A$ er $\rho(a) = <\pi(a)\xi, \xi>$.

Bevis. La $\widetilde{y} = \rho \circ \cdot^{op} \circ (Id \times ^*)$ der $\cdot^{op}$ er den motsatte multiplikasjonen i A. La $I = ker(\widetilde{y} \circ \Delta)$ der Δ er diagonalavbildningen. Nå blir, som i proposisjon 9, $\widetilde{\mathcal{K}} = A/I$ et indreproduktrom med y som indreprodukt, der y er avbildningen indusert av $\widetilde{y}$. Kompletteringen $\mathcal{K}$ av $\widetilde{\mathcal{K}}$ blir et hilbertrom. La nå $L(\widetilde{\mathcal{K}})$ være algebraen av lineære operatorer på $\widetilde{\mathcal{K}}$ med punktvis addisjon og skalarmultiplikasjon, samt sammensetning som multiplikasjon. Vi vil først vise at avbildningen $\widetilde{\pi} : A \to L(\widetilde{\mathcal{K}})$, definert ved at for alle $a \in A$ og $[b] \in \widetilde{\mathcal{K}}$ er $\widetilde{\pi}(a)([b]) = [ab]$, der $[\ ]$ er ekvivalensklasser, er en algebrahomomorfi. At $\widetilde{\pi}$ faktisk avbilder inn i $L(\widetilde{\mathcal{K}})$ følger av bilineariteten til produktet i A.

Lineariteten følger siden $\widetilde{\pi}(ax + cy)([z]) = [(ax + cy)z] = [axz] + [cyz] = (\widetilde{\pi}(ax) + \widetilde{\pi}(by))(z)$ for a og b i $\mathbb{C}$ og x, y og z i A, dette er distributiviteten av multiplikasjon i A. Multiplikativiteten holder siden $\widetilde{\pi}(xy)([z]) = [xyz] = \widetilde{\pi}(x)([yz]) = \widetilde{\pi}(x)(\widetilde{\pi}(y)([z])) = (\widetilde{\pi}(x) \circ \widetilde{\pi}(y))([z])$. På denne måten blir $\widetilde{\pi}$ en algebrahomomorfi. På grunn av at multiplikasjonen i A er kontinuerlig gir proposisjon 10, oss at alle elementene i $Im(\widetilde{\pi})$ er kontinuerlige og dermed kan utvides kontinuerlig til operatorer på $\mathcal{K}$. La $\pi : A \to B(\mathcal{K})$ sende $a \in A$ til den kontinuerlige utvidelsen av $\widetilde{\pi}(a)$ for alle $a \in A$. På denne måten blir π en kontinuerlig algebrahomomorfi. Før vi viser at π er en *-homomorfi ser vi på sammenhengen mellom ρ og indreproduktet på $\mathcal{K}$.

Vi kan bruke [1] som syklisk vektor. Siden ρ er en tilstand er $\|[1]\| = 1$. Vi har at $< \pi(a)([1]), [1] >=< [a], [1] >= \rho(a)$. Vi ser også at $< \pi(a)^*([x]), [y] >=< [x], \pi(a)([y]) >= \rho(y^*a^*x) =< \pi(a^*)([x]), [y] >$ og dermed $\pi(a)^* = \pi(a^*)$ på en tett delmengde og π er involusjonsbevarende.

$\square$

Kapittel 3

Haarmål

3.1 Valg

I definisjon 8 er avbildningene $h \otimes^c Id$ og $Id \otimes^c h$ definert slik at $(Id \otimes^c h)(\phi(a,b)) = ah(b)$ og $(h \otimes^c Id)(\phi(a,b)) = h(a)b$ for alle $(a,b) \in A \times A$.

I definisjon 10 og utregningen etter $\omega_1 \otimes^c \omega_2$, $\omega_1\omega_2 \otimes^c \omega_3$ og $\omega_1 \otimes^c \omega_2\omega_3$ definert med hensyn på ϕ og multiplikasjon i $\mathbb{C}$, $Id \otimes^c \Delta$ o $\Delta \otimes^c Id$ er definert med hensyn på et par av balanserte avbildninger Ψ og Ψ' slik at kravene i 1.1 til 1.4 i avsnitt 1.3 er oppfyllt, og $\omega_1 \otimes^c \omega_2 \otimes^c \omega_3$ er definert med hensyn på Ψ og multiplikasjon i $\mathbb{C}$.

I beviset for lemma 2 er $Id \otimes^c \Delta$ og $\Delta \otimes^c Id$ definert som kommentert først i beviset, $Id \otimes^c h$ og $Id \otimes^c \omega$ definert med hensyn på ϕ og skalarmultiplikasjon i A, $h \otimes^c \rho$ er definert med hensyn på ϕ og multiplikasjon i $\mathbb{C}$, $h \otimes^c \rho \otimes^c h$ er en kortform for $(h \otimes^c \rho) \otimes^c h$ som er definert med hensyn på Ψ og multiplikasjon i $\mathbb{C}$.

I beviset for teorem 1 er $\omega \otimes^c h$ definert med hensyn på ϕ og multiplikasjon i $\mathbb{C}$, mens $Id \otimes^c h$ er definert med hensyn på ϕ og skalarmultiplikasjon i a.

3.2 Haarmål

I dette avsnittet definerer vi haarmål på en kompakt kvantegruppe.

Vi henter først to definisjoner fra [1].

Definisjon 8 (invariant lineærfunksjonal). *La (A, Δ, ϕ) være en kompakt kvantegruppe. En lineærfunksjonal h er venstreinvariant om for alle $a \in A$, er $((Id \otimes^c h) \circ \Delta)(a) = h(a)1$, og høyreinvariant om for alle $a \in A$, er $((h \otimes^c Id) \circ \Delta)(a) = 1h(a)$.*

Definisjon 9 (haarmål). *En tilstand som er en venstreinvariant lineærfunksjonal kalles et haarmål.*

Definisjon 10 (dual). *La (A, Δ, ϕ) være en kompakt kvantegruppe. Da er A^* mengden av kontinuerlige lineærfunksjonaler på A. Vi gir A^* en vektorromsstruktur ved å gi den punktvis addisjon og punktvis skalarmultiplikasjon. Vi gjør så A^* til en algebra ved å legge på en multiplikasjon definert ved at for alle $(\omega_1, \omega_2) \in A^* \times A^*$ og $a \in A$ er $\omega_1\omega_2(a) = (\omega_1 \otimes^c \omega_2)(\Delta(a))$.*

For å vise at multiplikasjonen på den duale definerer en normert algebra med operatornorm må vi vise at de distributive lovene holder, at for alle $(\omega_1, \omega_2) \in A^* \times A^*$ vil $\|\omega_1\omega_2\| \leq \|\omega_1\|\|\omega_2\|$, samt at multiplikasjonen er assosiativ. Vi begynner med assosiativitet. Vi bruker de samme C^*-algebratensorproduktene som i proposisjonen.

Nå vil

$$\begin{aligned}(\omega_1\omega_2)\omega_3(a) &= (\omega_1\omega_2 \otimes^c \omega_3)(\Delta(a))\\ &= ((\omega_1 \otimes^c \omega_2 \otimes^c \omega_3) \circ (\Delta \otimes^c Id) \circ \Delta)(a)\\ &= ((\omega_1 \otimes^c \omega_2 \otimes^c \omega_3) \circ (Id \otimes^c \Delta) \circ \Delta)(a)\\ &= \omega_1 \otimes^c \omega_2\omega_3(\Delta(a))\\ &= \omega_1(\omega_2\omega_3)(a)\end{aligned}$$

for alle $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in A^* \times A^* \times A^*$ og $a \in A$ så multiplikasjonen er assosiativ.

De distributive lovene gjelder siden Δ er lineær, og avbildningen som sender (ω_1, ω_2) til $\omega_1 \otimes^c \omega_2$ er bilineær. Siden $\|\omega_1\omega_2\| = \|(\omega_1 \otimes^c \omega_2) \circ \Delta\| \leq \|\omega_1 \otimes \omega_2\| \|\Delta\| \leq \|\omega_1\| \|\omega_2\|$, ser vi at denne multiplikasjonen gjør den duale til en normert algebra.

Vi vil vise at venstremultiplikasjon med et element ω er en kontinuerlig avbildning også om vi bruker svak*-topologi følger av, proposisjon 2. Definer avbildningen $(\omega, -) : A^* \to A^*$ ved at $(\omega, -)(x) = \omega x$. Vi kan se på mengden $G = \{\{a \in A^* \mid g(y) \in T\} \mid y \in A \text{ og } T \text{ er åpen i } \mathbb{C}\}$. Vi vet at G er en underbasis for svak*-topologien på A^* og at inversbilde kommuterer både med snitt og union. Dermed holder det å vise at $(\omega, -)^{-1}(g) \in G$ for alle $g \in G$. La R_ω være avbildningen i proposisjon 2, og la $g = \{f \in A^* \mid f(x) \in T\}$. Siden $\omega h = (\omega \otimes^c h) \circ \Delta = h \circ R_\omega \circ \Delta$ for alle $h \in A^*$ må

$$\begin{aligned}(\omega, -)^{-1}(g) &= \{f \in A^* \mid \omega f(x) \in T\}\\ &= \{f \in A^* \mid (f \circ R_\omega \circ \Delta)(x) \in T\}\\ &= \{f \in A^* \mid f((R_\omega \circ \Delta)(x)) \in T\}.\end{aligned}$$

Dermed er $(\omega, -)$ kontinuerlig også om vi bruker svak*-topologi både i domene og kodomene. På tilsvarende måte kan vi vise at høyremultiplikasjon med gitt element er kontinuerlig.

Så noen mer trivielle resultat som vil brukes videre.

Proposisjon 12. *Mengden av tilstander på en unital C^*-algebra A er svak*-lukket.*

Bevis. La $\mathcal{M}^+$ være mengden av positive element i A og for enhver $a \in A$ la

$$\begin{aligned}f_a : A^* &\to \mathbb{C}\\ \omega &\mapsto \omega(a).\end{aligned}$$

Svak*-topologi er definert som den minste topologien som gjør alle disse funksjonene kontinuerlige. Nå vil de positive lineærfunksjonalene være

$$P = \bigcap\{f_m^{-1}(\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}) | m \in \mathcal{M}^+\}.$$

Dette blir en lukket mengde siden inversbildet til lukkede mengder under kontinuerlige funksjoner er lukket og vilkårlig snitt av lukkede mengder er lukket. Tilstandene vil være $P \bigcap f_{1_A}^{-1}(\{1_\mathbb{C}\})$ og dermed lukket. □

Vi kan så følge fremgangsmåten i [1], for å vise at det på enhver kompakt kvantegruppe eksisterer nøyaktig et haarmål. Begge lemmaene og teoremet er hentet fra [1].

Lemma 1. *La ω være en tilstand på en kompakt kvantepruppe (A, Δ, ϕ). Det eksisterer en tilstand h på (A, Δ, ϕ) slik at $h\omega = \omega h = h$.*

Bevis. Definer følgen $x : \mathbb{N} \to A^*$ der $x(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \omega^n$. Nå vil for alle $n \in \mathbb{N}$, $x(n)$ igjen være en tilstand. Detta ser vi fordi vi vet at $x(n)$ er en sum av positive lineærfunksjonaler og dermed positiv, og at $x(n)(1) = 1$, slik at $x(n)$ har norm 1 fra teorem 4.3.2 i [6]. At $\omega^n(1_A) = 1_{\mathbb{C}}$ viser vi induktivt. At $\omega(1_A) = 1_{\mathbb{C}}$ er allerede antatt. Dersom vi vet at $\omega^n(1_A) = 1_{\mathbb{C}}$ ser vi at

$$\begin{aligned}
\omega^{n+1}(1_A) &= (\omega \otimes^c \omega^n)(\Delta(1_A)) \\
&= (\omega \otimes^c \omega^n)(1_A) \\
&= 1_{\mathbb{C}} \cdot 1_{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

På grunn av at enhetsballen er kompakt i svak*-topologi (Banach-Alauglus teorem) må x ha en svak*-konvergent delfølge. La h være en svak*-grense av en slik konvergent delfølge. Nå ser vi at for alle $a \in A$ er

$$\begin{aligned}
|x(n)(a) - (x(n)\omega)(a)| &\leq \|x(n) - x(n)\omega\| \|a\| \\
&= \frac{1}{n}\|\omega^{n+1} - \omega\| \|a\| \\
&\leq \frac{2}{n}\|a\|
\end{aligned}$$

slik at i grensen er $h\omega = h$, og tilsvarende for venstremultiplikasjon med ω. $\square$

Lemma 2. *La ω og h være tilstander på den kompakte kvantegruppen (A, Δ, ϕ) slik at $h\omega = \omega h = h$. Dersom $\rho \in A^*$ og $0 \leq \rho \leq \omega$ så er $\rho(1)h = \rho h$.*

Bevis. Velg C^*-algebratensorprodukt $(A \otimes^c A \otimes^c A, \psi)$ av $A \otimes^c A$ med A og $(A \otimes^c A \otimes^c A, \psi')$ av A med $A \otimes^c A$ slik at: $\psi(\phi(a, b), c) = \psi'(a, \phi(b, c))$, $(\Delta \otimes^c Id) \circ \phi = \psi \circ (\Delta \times Id)$, $(Id \otimes^c \Delta) \circ \phi = \psi' \circ (Id \times \Delta)$, $(\Delta \otimes^c Id) \circ \Delta = (Id \otimes^c \Delta) \circ \Delta$.

La $a \in A$ og definer $b = (Id \otimes^c h)(\Delta(a))$. I utregningene som kommer vil det være praktisk å velge en avbildning f fra $A \times \mathbb{N}$ til mengden av avbildninger med endelig støtte fra $A \times A$ til de komplekse tallene, slik at for alle $a \in A$ vil $\Delta(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{(a', a'') \in A \times A} f(a, n)(a', a'')\phi(a', a'')$.

Nå vil

$$
\begin{aligned}
(Id \otimes^c \omega)(\Delta(b)) &= (Id \otimes^c \omega)(\Delta((Id \otimes^c h)(\Delta(a)))) \\
&= (Id \otimes^c \omega)(\Delta((Id \otimes^c h)(\lim_{n\to\infty} \sum_{(a',a'')\in A\times A} \\
&\quad f(a,n)(a',a'')\phi(a',a'')))) \\
&= (Id \otimes^c \omega)(\Delta(\lim_{n\to\infty} \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(a,n)(a',a'')a'h(a''))) \\
&= \lim_{n\to\infty}(Id \otimes^c \omega) \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(a,n)(a',a'')h(a'')\Delta(a') \\
&= \lim_{n\to\infty}(Id \otimes^c \omega)\Big(\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(a,n)(a',a'')h(a'') \\
&\quad \lim_{m\to\infty} \sum_{(d',d'')\in A\times A} f(a',m)(d',d'')\phi(d',d'')\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \sum_{(a',a'',d',d'')\in A\times A\times A\times A} \\
&\quad f(a,n)(a',a'')f(a',m)(d',d'')h(a'')(Id \otimes^c \omega)(\phi(d',d'')) \\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \sum_{(a',a'',d',d'')\in A\times A\times A\times A} \\
&\quad f(a,n)(a',a'')f(a',m)(d',d'')h(a'')\omega(d'')d' \\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(Id \otimes^c \omega \otimes^c h) \sum_{(a',a'',d',d'')\in A\times A\times A\times A} \\
&\quad f(a,n)(a',a'')f(a',m)(d',d'')\psi(\phi(d',d''),a'')) \\
&= \lim_{n\to\infty}(Id \otimes^c \omega \otimes^c h) \sum_{(a',a'')\in A\times A} \\
&\quad f(a,n)(a',a'')\psi(\lim_{m\to\infty} \sum_{(d',d'')\in A\times A} f(a',m)(d',d'')\phi(d',d''),a'') \\
&= \lim_{n\to\infty}(Id \otimes^c \omega \otimes^c h)(\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(a,n)(a',a'')\psi(\Delta(a'),a'')) \\
&= (Id \otimes^c \omega \otimes^c h) \circ (\Delta \otimes^c Id) \lim_{n\to\infty}(\sum_{(a',a'')\in A\times A} \\
&\quad f(a,n)(a',a'')\phi(a',a'')) \\
&= ((Id \otimes^c \omega \otimes^c h) \circ (\Delta \otimes^c Id) \circ \Delta)(a) \\
&= ((Id \otimes^c \omega \otimes^c h) \circ (Id \otimes^c \Delta) \circ \Delta)(a) \\
&= (Id \otimes^c \omega h)(\Delta(a)) \\
&= (Id \otimes^c h)(\Delta(a)) \\
&= b.
\end{aligned}
$$

Vi har også at

$$
\begin{aligned}
&(Id \otimes^c \omega)((\Delta(b) - \phi(b,1))^*(\Delta(b) - \phi(b,1))) \\
&= (Id \otimes^c \omega)(\Delta(b^*b) - \phi(b^*,1)\Delta(b) - \Delta(b^*)\phi(b,1) + \phi(b^*b,1)) \\
&= (Id \otimes^c \omega)(\Delta(b^*b)) - (Id \otimes^c \omega)(\phi(b^*,1)\Delta(b)) - (Id \otimes^c \omega)(\Delta(b^*)\phi(b,1)) + b^*b \\
&= (Id \otimes^c \omega)(\Delta(b^*b)) - (Id \otimes^c \omega)(\phi(b^*,1) \lim_{n\to\infty} \sum_{(a',a'')\in A\times A} \\
&\quad f(b,n)(a',a'')\phi(a',a'')) - (Id \otimes^c \omega)(\lim_{m\to\infty} \sum_{(b',b'')\in A\times A} \\
&\quad \overline{f(b,n)(b',b'')}\phi((b')^*,(b'')^*)\phi(b,1)) + b^*b \\
&= (Id \otimes^c \omega)(\Delta(b^*b)) - (Id \otimes^c \omega) \lim_{n\to\infty}(\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(b,n)(a',a'')\phi(b^*a',a''))- \\
&\quad (Id \otimes^c \omega)(\lim_{m\to\infty} \sum_{(b',b'')\in A\times A} f(b,n)(b',b'')\phi((b')^*b,(b'')^*)) + b^*b \\
&= (Id \otimes^c \omega)(\Delta(b^*b)) - \lim_{n\to\infty}(\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(b,n)(a',a'')b^*a'\omega(a''))- \\
&\quad \lim_{m\to\infty}(\sum_{(b',b'')\in A\times A} \overline{f(b,n)(b',b'')}(b')^*b\omega((b'')^*)) + b^*b \\
&= (Id \otimes^c \omega)(\Delta(b^*b)) - b^*(Id \otimes^c \omega)(\Delta(b)) - (Id \otimes^c \omega)(\Delta(b^*))b + b^*b \\
&= (Id \otimes^c \omega)(\Delta(b^*b)) - b^*b.
\end{aligned}
$$

Husk at proposisjon 2 gir oss at $h \circ (Id \otimes^c \omega) = \omega \circ (h \otimes^c Id) = (h \otimes^c \omega)$ Slik vil

$$
\begin{aligned}
h((Id \otimes^c \omega)((\Delta(b) - \phi(b,1))^*(\Delta(b)) - \phi(b,1))) &= h((Id \otimes \omega)(\Delta(b^*b)) - b^*b) \\
&= h((Id \otimes \omega)(\Delta(b^*b))) - h(b^*b) \\
&= (h \otimes \omega)(\Delta(b^*b)) - h(b^*b) \\
&= h\omega(b^*b) - h(b^*b) \\
&= h(b^*b) - h(b^*b) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Siden $\rho \leq \omega$ vil

$$
\begin{aligned}
&\rho((h \otimes^c Id)(\Delta(b) - \phi(b,1))^*(\Delta(b) - \phi(b,1))) \\
&\leq \omega((h \otimes^c Id)(\Delta(b) - \phi(b,1))^*(\Delta(b) - \phi(b,1))) \\
&= (h \otimes^c \omega)(\Delta(b) - \phi(b,1))^*(\Delta(b) - \phi(b,1)) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Cauchy-Schwarz-ulikheten (se for eksempel teorem 4.3.1 i [6, s. 256]) gir oss nå at for alle c i A er

$$
\begin{aligned}
&|(h \otimes^c \rho)(\phi(c,1)^*(\Delta(b) - \phi(b,1)))|^2 \\
&\leq (h \otimes^c \rho)((\Delta(b) - \phi(b,1))^*(\Delta(b) - \phi(b,1)))(h \otimes^c \rho)(\phi(c,1)\phi(c,1))^* \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

det vil si at $(h \otimes^c \rho)(\phi(c,1)^*(\Delta(b) - \phi(b,1))) = 0$. Dersom vi putter inn for $b =$

$(Id \otimes^c h)(\Delta(a))$, får vi at

$$
\begin{aligned}
0 =& (h \otimes^c \rho)(\phi(c^*, 1)(\Delta(b) - \phi(b, 1)))\\
=& (h \otimes^c \rho)(\phi(c^*, 1)(\Delta((Id \otimes^c h)\Delta(a)) - \phi((Id \otimes^c h)(\Delta(a)), 1)))\\
=& (h \otimes^c \rho)(\phi(c^*, 1)\Delta((Id \otimes^c h)(\Delta(a))))-\\
& (h \otimes^c \rho)(\phi(c^*, 1)\phi((Id \otimes^c h)(\Delta(a)), 1))\\
=& (h \otimes^c \rho)(\phi(c^*, 1)\Delta((Id \otimes^c h)(\lim_{n\to\infty} \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(a,n)(a',a'')\phi(a',a''))))-\\
& (h \otimes^c \rho)(\phi(c^*, 1)\phi((Id \otimes^c h)(\lim_{n\to\infty} \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(a,n)(a',a'')\phi(a',a''), 1)))\\
=& (h \otimes^c \rho)(\phi(c^*, 1)\Delta(\lim_{n\to\infty} \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(a,n)(a',a'')a'h(a'')))\\
& - (h \otimes^c \rho)(\phi(c^*, 1)\phi(\lim_{n\to\infty} \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(a,n)(a',a'')a'h(a''), 1))\\
=& (h \otimes^c \rho)(\lim_{n\to\infty} \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(a,n)(a',a'')\phi(c^*, 1)\Delta(a')h(a''))-\\
& \lim_{n\to\infty} \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(a,n)(a',a'')h(c^*a')\rho(1)h(a'')\\
=& (h \otimes^c \rho \otimes^c h)(\psi(\phi(c,1),1)(\Delta \otimes^c Id)(\Delta(a))) - \rho(1)(h \otimes^c h)(\phi(c,1)\Delta(a)),
\end{aligned}
$$

på denne måten blir

$$
(h \otimes^c \rho \otimes^c h)(\psi(\phi(c,1),1)(\Delta \otimes^c Id)(\Delta(a))) = \rho(1)(h \otimes^c h)(\phi(c,1)\Delta(a)). \quad (3.1)
$$

Siden

$$
\begin{aligned}
\psi(\phi(c,1),1)((\Delta \otimes^c Id)(\Delta(a))) &= (\psi(\phi(c,1),1)((Id \otimes^c \Delta)(\Delta(a))))\\
&= (Id \otimes^c \Delta)((\phi(c,1))\Delta(a)),
\end{aligned}
$$

og element på formen $\phi(c,1)\Delta(a)$ ligger tett i enhver kompakt kvantegruppe og $(Id \otimes^c \Delta)$ er kontinuerlig vil likheten (3.1) gjelde også for alle element på formen $\phi(1,q)$. Vi setter inn $\phi(1,q)$ for $\phi(c,1)\Delta(a)$ og får

$$
(h \otimes^c \rho \otimes^c h)(Id \otimes^c \Delta)(\phi(1,q))) = \rho(1)(h \otimes^c h)\phi(1,q)
$$

og da $h(1) = 1$ vil

$$
(\rho \otimes^c h)(\Delta(q)) = \rho(1)h(q)
$$

for enhver $q \in A$. □

Teorem 1. *For enhver kompakt kvantegruppe (A, Δ, ϕ) eksisterer det nøyaktig et haarmål. Haarmålet er også høyreinvariant.*

Bevis. Igjen henter vi beviset fra [1]. For enhver positiv $\omega \in A^*$ la $K_\omega = \{h \in A^* \mid h$ er en tilstand og $\omega h = \omega(1)h\}$. La videre P være mengden av tilstander på A. Nå vil $K_\omega = f_\omega^{-1}(0) \cap P$ der

$$
\begin{aligned}
f_\omega : A^* &\to A^*\\
h &\mapsto \omega h - \omega(1)h.
\end{aligned}
$$

På denne måten blir K_ω en svak*-lukket delmengde av den lukkede enhetsballen, og dermed svak*-kompakt. På grunn av lemma 1 vil det for enhver positiv $\omega \neq 0$ eksistere en tilstand h slik at $\frac{\omega h}{\omega(1)} = h$ da $\frac{\omega}{\omega(1)}$ er en tilstand, og dermed er K_ω ikketom.

Lemma 2 sier oss at om $0 \leq \rho \leq \omega$ er $K_\omega \subseteq K_\rho$. Dermed vil $K_{\omega_1+\omega_2} \subseteq K_{\omega_1} \cap K_{\omega_2}$ for alle positive ω_1 og ω_2. På denne måten er $\cap A \neq \emptyset$ for alle endelige delmengder A av $\{K_\omega \mid \omega$ er en positiv lineærfunksjonal på $A\}$, og siden enhetsballen er kompakt medfører dette at snittet av alle er ikketomt. Dermed har vi at det eksisterer en $h \in \bigcap\{K_\omega | \omega \in A^*,\ \omega \geq 0\}$ slik at $(\omega \otimes^c h) \circ \Delta = \omega(1)h$ for alle positive lineærfunksjonaler ω. Og siden positive lineærfunksjonaler skiller punkter i A betyr dette at for alle $a \in A$ er $(Id \otimes^c h) \circ \Delta(a) = h(a)1_A$, og dette definerer venstreinvarians. Vi har dermed vist at det eksisterer minst en venstreinvariant tilstand. På tilsvarende måte kan vi vise at det eksisterer en høyreinvariant tilstand, la $L_\omega = \{h \in A^* \mid h$ er en tilstand og $h\omega = \omega(1)h\}$. Snittet av alle L_ω er ikketomt av samme årsak som for K_ω så vi må ha minst en høyreinvariant tilstand. La h være en venstreinvariant og h' en høyreinvariant tilstand. Nå må $h \in L_{h'}$ så $hh' = h'(1)h = h$ og $h' \in K_h$ så $hh' = h(1)h' = h'$ og $h = h'$. $\square$

Kapittel 4

Høyreregulær representasjon

Dette delkapittelet er hentet fra kapittel 5 i [1], forskjellen er først og fremst at bevisene her gjøres i litt mindre steg og at vi her ikke går fullt så langt. Vi vil nå innføre en del symboler for dette kapittelet. La $\pi_{\mathcal{K}} : A \to B(\mathcal{K})$ være en kontinuerlig injektiv *-homomorfi slik at $Im(\pi_{\mathcal{K}})$ har en ikkedegenerert virkning på hilbertrommet $\mathcal{K}$. La (A, Δ, Ψ) være en kompakt kvantegruppe, der C^*-algebratensorproduktet $(A \otimes^c A, \Psi)$ er definert med hensyn på $\pi_{\mathcal{K}}$ i begge faktorene og hilbertromtensorproduktet $(\mathcal{K} \otimes^H \mathcal{K}, \phi')$. La videre $\pi_{\mathcal{H}}$ være en GNS-representasjon med hensyn på haarmålet h, av A på $\mathcal{H}$ med syklisk vektor ξ_0, og I være den naturlige inklusjonen av $B_0(\mathcal{H})$ i $B(\mathcal{H})$.

Da vi definerte C^*-algebratensorprodukt i [2], hentet fra [6], definerte vi tensorprodukt med hensyn på injektive representasjoner av hver faktor og valg av hilbertromtensorprodukt.

Nå kan vi velge hilbertromtensorprodukt

$(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K}, \phi)$	av $\mathcal{H}$ med $\mathcal{K}$
$(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K} \otimes^H \mathcal{K}, \Theta)$	av $\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K}$ med $\mathcal{K}$
$(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K} \otimes^H \mathcal{K}, \Theta')$	av $\mathcal{H}$ med $\mathcal{K} \otimes^H \mathcal{K}$

slik at for alle $(\xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ er $\Theta(\phi(\xi, \eta_1), \eta_2) = \Theta'(\xi, \phi'(\eta_1, \eta_2))$. At det eksisterer slike valg følger av "assosiativiteten" til tensorproduktet som blant annet er vist i [6, s. 847].

Dersom vi nå definerer C^*-algebratensorproduktene

C^*-algebratensorprodukt:		med hensyn på
$(B(\mathcal{H}) \otimes^c B(\mathcal{K}), \Lambda)$	av $B(\mathcal{H})$ med $B(\mathcal{K})$	$Id,\ Id$ og $(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K}, \phi)$
$(B(\mathcal{H}) \otimes^c A, \Omega)$	av $B(\mathcal{H})$ med A	$Id,\ \pi_{\mathcal{K}}$ og $(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K}, \phi)$
$(B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A, \Omega\|_{B_0(\mathcal{H}) \times A})$	av $B_0(\mathcal{H})$ med A	I, $\pi_{\mathcal{K}}$ og $(\mathcal{H} \otimes^c \mathcal{K}, \phi)$
$(B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A \otimes^c A, \zeta')$	av $B_0(\mathcal{H})$ med $A \otimes^c A$	I, $\pi_{\mathcal{K}} \otimes^H \pi_{\mathcal{K}}$ og $(B_0(\mathcal{H}) \otimes^H A \otimes^H A, \Theta')$.
$(B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A \otimes^c A, \zeta)$	av $B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$ med A	$I \otimes^c \pi_{\mathcal{K}}$, $\pi_{\mathcal{K}}$ og $(B_0(\mathcal{H}) \otimes^H A \otimes^H A, \Theta)$

La til slutt $(A \otimes^c A \otimes^c A, \Psi')$ være et C^*-algebratensorprodukt av $A \otimes^c A$ med A, og $(A \otimes^c A \otimes^c A, \Psi'')$ et C^*-algebratensorprodukt av A med $A \otimes^c A$ med A slik at kravene 1.1-1.4 i avsnitt 1.3 er oppfyllt.

Alle utvidelser av par av avbildninger $(f : B \to D, g : C \to E)$ mellom par av algebraer eller hilbertrom forskjellig fra $\mathbb{C}$ blir gjort med hensyn på tensorproduktene som er valgt over, og vil bli betegnet $(f \otimes^{H/c} g) : B \otimes^{H/c} C \to D \otimes^{H/c} E$. Der superskriptet til $\otimes$ er avhengig av om det er C^*-algebra- eller hilbertromtensorprodukt vi utvider til.

Nå kan vi merke oss at med våre valg er følgende oppfyllt for alle $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi' \in \mathcal{H}$, $\eta \in \mathcal{K}$, $\eta_1 \in \mathcal{K}$ $\eta_2 \in \mathcal{K}$, $a \in A$, $a' \in A$, $a'' \in A$, $x \in B(\mathcal{H})$, $y \in B(\mathcal{K})$ og $x_0 \in B_0(\mathcal{H})$:

1. $A \otimes^c A \subseteq B(\mathcal{K} \otimes^H \mathcal{K})$
2. $(\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})\Psi(a, a')(\phi(\xi, \eta)) = \phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)(\xi), \pi_{\mathcal{K}}(a')(\eta))$
3. $B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A \subseteq B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K})$
4. $\Omega(x, a)(\phi(\xi, \eta)) = \phi(x\xi, \pi_{\mathcal{K}}(a)\eta)$
5. $B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A = \text{clin}(Im(\Omega|_{B_0(\mathcal{H})\times A}))$
6. $B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A \otimes^c A \subseteq B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K} \otimes^H \mathcal{K})$
7. $\zeta'(x_0, \Psi(a, a'))(\Theta(\phi(\xi, \eta_1), \eta_2)) = \Theta(\phi(x_0\xi, \pi_{\mathcal{K}}(a)\eta_1), \pi_{\mathcal{K}}(a')\eta_2)$
8. $\zeta(\Omega(x_0, a), a') = \zeta'(x_0, \Psi(a, a'))$
9. $\Lambda(x, \pi_{\mathcal{K}}(a)) = \Omega(x, a)$
10. $\Theta(\phi(\xi, \eta_1), \eta_2) = \Theta'(\xi, \phi'(\eta_1, \eta_2))$
11. $\Lambda(x, y)(\phi(\xi, \eta_1)) = \phi(x\xi, y\eta_1)$
12. $\Psi'(\Psi(a, a'), a'') = \Psi''(a, \Psi(a', a''))$
13. $(\Delta \otimes^c Id) \circ \Delta = (Id \otimes^c \Delta) \circ \Delta$
14. $< \phi(\xi, \eta_1), \phi(\xi', \eta_2) >=< \xi, \xi' >< \eta_1, \eta_2 >$

og det er disse egenskapene vi vil bruke videre.

Vi vil så gjenta definisjonen av multiplikatoralgebra fra [2].

Definisjon 11 (Multiplikatoralgebra). *Multiplikatoralgebraen $M(A)$ til en algebra A er mengden av par (ρ_1, ρ_2) av lineæravbildninger fra og til A slik at for enhver $(a, b) \in A \times A$ er $a\rho_1(b) = \rho_2(a)b$ med punktvis addisjon og skalarmultiplikasjon og multiplikasjon definert ved at for alle multiplikatorer (ρ_1, ρ_2) og (σ_1, σ_2) er*

$$(\rho_1, \rho_2)(\sigma_1, \sigma_2) = (\rho_1 \circ \sigma_1, \sigma_2 \circ \rho_2)$$

og involusjon definert ved at

$$(\rho_1, \rho_2)^* = (\sigma_1, \sigma_2)$$

der $\sigma_1(a) = \rho_2(a^*)^*$ og $\sigma_2(a) = \rho_1(a^*)^*$ for alle $a \in A$.

Vi vil bruke $M(A)$ om multiplikatoralgebraen til en algebra A. Om vi har en algebrahomomorfi f fra A til en algebra B vil vi bruke $M(f)$ om algebrahomomorfien fra $M(A)$ til $M(B)$ som oppfyller at for alle $a \in A$ er $M(f)(\rho_1, \rho_2) = (\widetilde{\rho_1}, \widetilde{\rho_2})$ der ρ_1 er venstremultiplikasjon med a og ρ_2 er høyremultiplikasjon med a, $\widetilde{\rho_1}$ er høyremultiplikasjon med $f(a)$ og $\widetilde{\rho_2}$ er venstremultiplikasjon med $f(a)$. Dersom B er unital vil vi bruke $m(f)$ om avbildningen fra $M(A)$ til B som oppfyller at $m(f)(\rho_1, \rho_2) = f(a)$ for alle $a \in A$.

Dette var all den kapittelspesifikke notasjonen, nå vil vi hente noen resultater fra [1]. Bevisene er hentet rett fra kilden, men vi gjør ting i litt mindre steg.

Proposisjon 13. *Det eksisterer nøyaktig en unitær operator u på $\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K}$ slik at*

$$u(\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0, \eta)) = (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a))(\phi(\xi_0, \eta)) \tag{4.1}$$

for alle $a \in A$ og $\eta \in \mathcal{K}$.

Bevis. Siden $\pi_{\mathcal{H}}$ er syklisk med syklisk vektor ξ_0 er mengden $\{\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0 \mid a \in A\}$ tett i $\mathcal{H}$. Dermed ligger $lin(\{\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0, \eta) \mid (a,\eta) \in A \times \mathcal{K}\})$ tett i $\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K}$. På denne måten kan det maksimalt være en unitær operator slik at (4.1) er oppfyllt.

For å vise at det eksisterer minst en lineær avbildning som oppfyller (4.1) ser vi først på $lin(Im(\phi))$. Vi kan velge en vektorromsbasis B_K for $\mathcal{K}$, og velge en delmengde B_A av A slik at $B_H = \{\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0 \mid a \in B_A\}$ er en basis for det tette underrommet $\{\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0 \mid a \in A\}$ av $\mathcal{H}$. Her vil $Im(\phi|_{B_H \times B_K})$ være en basis for $lin(Im(\phi))$. Dermed vet vi at det eksisterer en lineær avbildning $\widehat{u} : lin(Im(\phi|_{lin(B_H)\times B_{\mathcal{K}}})) \to \mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K}$ slik at $\widehat{u}(\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0, \eta)) = (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a))(\phi(\xi_0, \eta))$ for alle $(a, \eta) \in B_A \times B_K$.

Dersom $f : B_A \to \mathbb{C}$ og $g : B_K \to \mathbb{C}$ har endelig støtte vil

$$
\begin{aligned}
&\widehat{u}(\phi(\sum_{a\in B_A} f(a)\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0, \sum_{\eta\in B_K} g(\eta)\eta)) \\
&= \widehat{u}(\sum_{(a,\eta)\in B_A\times B_K} f(a)g(\eta)\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0, \eta)) \\
&= \sum_{(a,\eta)\in B_A\times B_K} f(a)g(\eta)\widehat{u}\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0, \eta) \\
&= \sum_{(a,\eta)\in B_A\times B_K} f(a)g(\eta)(\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a))(\phi(\xi_0, \eta)) \\
&= \sum_{(a,\eta)\in B_A\times B_K} (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(f(a)a))(\phi(\xi_0, g(\eta)\eta)) \\
&= (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(\sum_{a\in B_A} f(a)a))(\phi(\xi_0, \sum_{\eta\in B_K} g(\eta)\eta))
\end{aligned}
$$

slik at (4.1) holder på $lin(Im(\phi|_{lin(B_H)\times\mathcal{K}}))$ som ligger tett i $\mathcal{H}\otimes^H\mathcal{K}$. Dermed holder det å vise at det eksister en kontinuerlig $\widehat{u}$.

Vi kan så vise at det eksisterer en isometrisk $\widehat{u}$. La N være en endelig delmengde av $lin(B_A)\times\mathcal{K}$. La også for alle a og a' i A, $f_{aa'}$ være en følge av endelige delmengder av $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ slik at $\Delta((a')^* a) = \lim_{m\to\infty} \sum_{(x,y)\in f_{aa'}(m)} \Psi(x,y)$. Nå vil

$$
\begin{aligned}
&\|\widehat{u}(\sum_{(a,\eta)\in N} (\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0, \eta)))\|^2 \\
=&\|\sum_{(a,\eta)\in N} (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a))\phi(\xi_0,\eta)\|^2 \\
=&\left\langle \sum_{(a,\eta)\in N} (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a))\phi(\xi_0,\eta), \sum_{(a',\eta')\in N} (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a'))\phi(\xi_0,\eta') \right\rangle \\
=&\sum_{((a,\eta),(a',\eta'))\in N\times N} \langle (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a))\phi(\xi_0,\eta), (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a'))\phi(\xi_0,\eta')\rangle \\
=&\sum_{((a,\eta),(a',\eta'))\in N\times N} \langle (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta((a')^*a))\phi(\xi_0,\eta), \phi(\xi_0,\eta')\rangle \\
=&\lim_{m\to\infty} \sum_{((a,\eta),(a',\eta'))\in N\times N} \sum_{(x,y)\in f_{aa'}(m)} \langle (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Psi(x,y))\phi(\xi_0,\eta), \phi(\xi_0,\eta)\rangle \\
=&\lim_{m\to\infty} \sum_{((a,\eta),(a',\eta'))\in N\times N} \sum_{(x,y)\in f_{aa'}(m)} \langle \pi_{\mathcal{H}}(x)\xi_0, \xi_0\rangle \langle \pi_{\mathcal{K}}(y)\eta, \eta'\rangle \\
=&\lim_{m\to\infty} \sum_{((a,\eta),(a',\eta'))\in N\times N} \sum_{(x,y)\in f_{aa'}(m)} h(x) \langle \pi_{\mathcal{K}}(y)\eta, \eta'\rangle \\
=&\lim_{m\to\infty} \sum_{((a,\eta),(a',\eta'))\in N\times N} \sum_{(x,y)\in f_{aa'}(m)} \langle \pi_{\mathcal{K}}((h \otimes^c Id)(\Psi(x,y)))\eta, \eta'\rangle \\
=&\sum_{((a,\eta),(a',\eta'))\in N\times N} \langle \pi_{\mathcal{K}}(((h \otimes^c Id)\circ\Delta)((a')^*a))\eta, \eta'\rangle \\
=&\sum_{((a,\eta),(a',\eta'))\in N\times N} h((a')^*a)\langle \eta, \eta'\rangle \\
=&\|\sum_{(a,\eta)\in N} \phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0, \eta)\|^2
\end{aligned}
$$

der den siste likheten kommer av måten vi definerte indreproduktet på i GNS-representasjonen. Dermed er $\widehat{u}$ isometrisk og har dermed en kontinuerlig utvidelse til en lineær isometri u på hele $\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K}$.

Vi vet, fra 2.4.6 i [6], at en operator på et hilbertrom er unitær hvis og bare hvis den er normbevarende og surjektiv. Siden enhvær komplett delmengde av et komplett metrisk rom er lukket, se for eksempel teorem 1.4-7 i [4], og isometrisk bilde av en komplett mengde er komplett, må bildet til en isometri mellom to komplette metriske rom være komplett. Derfor holder det å vise at bildet til u ligger tett. Nå har vi fra definisjonen av kompakt kvantegruppe at mengden $lin(\{\Delta(a)\Psi(1,b) \mid (a,b) \in A \times A\})$ ligger tett i $A \otimes^c A$, og siden $\pi_{\mathcal{H}}$ er syklisk med syklisk vektor ξ_0, ligger mengden $\{\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0, b) \mid (a,\eta) \in A \times \mathcal{K}\}$ tett i $\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K}$. Slik ser vi at $(\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Psi(a,1))(\phi(\xi_0,\eta))$ kan tilnærmes med lineærkombinasjoner av element på formen $((\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(b)\Psi(1,c)))(\phi(\xi_0,\eta)) = (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(b))(\phi(\xi_0, \pi_{\mathcal{K}}(c)\eta))$ der b og c ligger i A og η ligger i $\mathcal{K}$. Da $(\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(b))(\phi(\xi_0, \pi_{\mathcal{K}}(c)\eta)) = u(\pi_{\mathcal{H}}(b)\xi_0, \pi_{\mathcal{K}}(c)\eta)$ må $\{\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0, \pi_{\mathcal{K}}(b)\eta) \mid (a,b) \in A \times A\}$ ligge i tillukkningen til $Im(u)$ og bildet til u må ligge tett. Men siden bildet til u er lukket må dermed u være surjektiv og dermed uninær da u er normbevarende. □

Proposisjon 14. *Med u som i proposisjon 13 ligger paret (ρ_1, ρ_2), der $\rho_1 : B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A \to B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$ er definert ved at $\rho_1(x) = ux$ og $\rho_2 : B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A \to B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$ er definert på tilsvarende måte ved at $\rho_2(x) = xu$, i multiplikatoralgebraen til $B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$.*

Bevis. Husk at $B_0(\mathcal{H})$ er tillukningen av det lineære spennet til mengden av rang-1-operatorer på $\mathcal{H}$.

Definer så $\widetilde{\rho_1} : B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K}) \to B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K})$ som venstremultiplikasjon med u og $\widetilde{\rho_2} : B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K}) \to B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K})$ som høyremultiplikasjon med u.

Vi må vise at definisjonen av ρ_1 og ρ_2 gir mening, altså at om $y \in B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$ ligger uy og yu i $B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$. Dette er ekvivalent med at $Im(\widetilde{\rho_1}|_{B_0(\mathcal{H})\otimes^c A}) \subseteq B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$ og $Im(\widetilde{\rho_2}|_{B_0(\mathcal{H})\otimes^c A}) \subseteq B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$.

La x være en rang-1-operator på $\mathcal{H}$, a et element i A og ξ_1 et element i $\mathcal{H}$ slik at for alle $\xi \in \mathcal{H}$ er $x\xi =< \xi, \xi_1 > \pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0$ der ξ_0 er den sykliske vektoren med hensyn på GNS-representasjonen som nevnt i starten av delkapittelet.

Vi viser først at $\widetilde{\rho_1}(\Omega(x,b)) \in B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$ for alle $b \in A$. Vi har at for alle $b \in A$, $\xi \in \mathcal{H}$ og $\eta \in \mathcal{K}$ gjelder

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\rho_1}(\Omega(x,b)))(\phi(\xi,\eta)) &= u(\Omega(x,b))(\phi(\xi,\eta)) \\
&= u(\phi(< \xi, \xi_1 > \pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0, \pi_{\mathcal{K}}(b)\eta)) \\
&=< \xi, \xi_1 > u(\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0, \pi_{\mathcal{K}}(b)\eta)) \\
&=< \xi, \xi_1 > (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a))(\phi(\xi_0, \pi_{\mathcal{K}}(b)\eta)) \\
&=< \xi, \xi_1 > (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a)\Psi(1,b))(\phi(\xi_0, \eta)).
\end{aligned}$$

Siden $lin(Im(\Psi))$ ligger tett i $A \otimes^c A$ kan vi velge en følge f av avbildninger med endelig støtte fra $A \times A$ til de komplekse tallene slik at $\Delta(a)\Psi(1,b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Psi(a',a'')$. La $y_{a'}\xi =< \xi, \xi_1 > \pi_{\mathcal{H}}(a')\xi_0$ da vil

$$\begin{aligned}
&< \xi, \xi_1 > (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a)\Psi(1,b))(\phi(\xi_0, \eta)) \\
&=< \xi, \xi_1 > \lim_{n\to\infty} \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')(\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Psi(a',a''))(\phi(\xi_0,\eta)) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')(\Omega(y_{a'}, a''))(\phi(\xi,\eta))).
\end{aligned}$$

Nå kan vi legge merke til at for alle par $(\xi,\eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ og alle $n \in \mathbb{N}$ er

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{\rho_1}((\Omega(x,b)))(\phi(\xi,\eta)) - \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Omega(y_{a'},a'')(\phi(\xi,\eta))\| \\
&= \Big\| < \xi, \xi_1 > (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a)\Psi(1,b))(\phi(\xi_0,\eta)) - \\
&\quad < \xi, \xi_1 > \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')(\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Psi(a',a''))(\phi(\xi_0,\eta))\Big\| \\
&= | < \xi, \xi_1 > | \Big\| \Big((\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}}) \big(\Delta(a)\Psi(1,b) - \\
&\quad \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Psi(a',a'')\big)\Big)(\phi(\xi_0,\eta))\Big\| \\
&\le \|\xi\|\|\xi_1\| \Big\| (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}}) \Big(\Delta(a)\Psi(1,b) - \\
&\quad \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Psi(a',a'')\Big)\Big\| \|\phi(\xi_0,\eta)\| \\
&\le \|\xi\|\|\xi_1\|\|\xi_0\|\|\eta\|\|(\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})\| \Big\| \Delta(a)\Psi(1,b) - \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Psi(a',a'')\Big\| \\
&= \|\xi_1\|\|\xi_0\|\|\phi(\xi,\eta)\|\|(\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})\| \Big\| \Delta(a)\Psi(1,b) - \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Psi(a',a'')\Big\|
\end{aligned}$$

og siden normen til $(\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})$ er 1 har vi nå at for alle $n \in \mathbb{N}$ er

$$\begin{aligned}
&\Big\|\widetilde{\rho}_1((\Omega(x,b))) - \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')(\Omega(y_{a'},a''))\Big\| \\
&\leq \|\xi_1\|\|\xi_0\|\Big\|\Delta(a)\Psi(1,b) - \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Psi(a',a'')\Big\|.
\end{aligned}$$

Siden $y_{a'}$ har rang en for alle a', har vi nå en følge g av element i $B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$ som konvergerer mot $u((\Omega(x,b)))$. På grunn av at $B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$ er komplett, medfører dette at $u(\Omega(x,b)) \in B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$.

Siden alle rang-1 operatorer x på $\mathcal{H}$ kan skrives på formen $x\xi =< \xi, \xi_1 > \xi_2$ for en eller annen $(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ og mengden $Te = \{\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0 \mid a \in A\}$ ligger tett i $\mathcal{H}$, ligger mengden $\{x \in B(\mathcal{H}) \mid$ det eksisterer $a \in A$ og $\xi_1 \in \mathcal{H}$ slik at for alle $\xi \in \mathcal{H}$ er $x\xi =< \xi, \xi_1 > \pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0\}$ tett i mengden av rang-1 operatorer. Dette kan vi se ved å merke oss at om vi har en rang-1 operator x med norm 1 gitt ved at $x\xi =< \xi, \xi_1 > \xi_2$ og en følge z i Te som konvergerer mot ξ_2 vil $\|x\xi- < \xi, \xi_1 > z(n)\| \leq | < \xi, \xi_1 > (\xi_2 - z(n))| \leq \|\xi\|\|\xi_1\||(\xi_2 - z(n)|)$ som går mot null. Siden venstremultiplikasjon med u er en kontinuerlig avbildning og $B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$ er lukket, må $u(\Omega(x,b)) \in B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$ for alle rang-1 operatorer x.

La y være en rang-1 operator på $\mathcal{H}$, da eksisterer det $(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ slik at for alle $\xi \in \mathcal{H}$ er $y\xi =< \xi, \xi_1 > \xi_2$. Nå vil y^* være gitt ved at $y^*\xi =< \xi, \xi_2 > \xi_1$ også være en rang-1 operator.

Vi vil vise at $\widetilde{\rho}_2(\Omega(y,b)) \in B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$ for alle rang-1 operatorer y og alle $b \in A$. Da $\widetilde{\rho}_2(\Omega(y,b)) = \Omega(y,b)u = (u^*\Omega(y^*,b^*))^*$ og $B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$ er *-invariant holder det å vise at $u^*(\Omega(y,b)) \in B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$ for alle rang-1 operatorer y og for alle $b \in A$.

La igjen x være en rang-1 operator på $\mathcal{H}$ som sender alle $\xi \in \mathcal{H}$ til $< \xi, \xi_1 > \pi_{\mathcal{K}}(a)\xi_0$ for en eller annen $\xi_1 \in \mathcal{H}$ og $a \in A$. Definisjonen av x gir oss at for alle $b \in A$ er

$$\begin{aligned}
u^*(\Omega(x,b))(\phi(\xi,\eta)) &=< \xi, \xi_1 > u^*(\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0, \pi_{\mathcal{K}}(b)\eta)) \\
&=< \xi, \xi_1 > u^*((\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Psi(a,b))\phi(\xi_0,\eta)).
\end{aligned}$$

På grunn av at mengden $lin(\{\alpha \in A \otimes A \mid$ det eksisterer $(a', a'') \in A \times A$ slik at $\alpha = \Delta(a')\Psi(a'',1)\})$ ligger tett i $A \otimes^c A$ kan vi velge en følge f av avbildninger med endelig støtte fra $A \times A$ til de komplekse tallene slik at $\Psi(a,b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Delta(a')\Psi(1,a'')$. Når vi i tillegg vet at u er unitær slik at $u^* = u^{-1}$, kan vi sette inn dette inn i ligningen over og får at for alle $n \in \mathbb{N}$ er

$$\begin{aligned}
&< \xi, \xi_1 > u^* \sum_{(a',a'')\in A\times A} (f(n)(a',a''))(\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a')\Psi(1,a''))(\phi(\xi_0,\eta)) \\
&=< \xi, \xi_1 > u^* \sum_{(a',a'')\in A\times A} (f(n)(a',a''))(\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a'))(\phi(\xi_0, \pi_{\mathcal{K}}(a'')\eta)) \\
&=< \xi, \xi_1 > \sum_{(a',a'')\in A\times A} (f(n)(a',a''))\phi(a'\xi_0, a''\eta) \\
&= \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')(\Omega(y_{a'},a''))\phi(\xi,\eta)
\end{aligned}$$

der $y_{a'}(\xi) =< \xi, \xi_1 > \pi_{\mathcal{H}}(a')\xi_0$ slik at $y_{a'}$ er en rang-1 operator for enhver a'. Nå kan vi merke oss at for alle $(\xi,\eta)\in\mathcal{H}\times\mathcal{K}$ og $n\in\mathbb{N}$ gjelder

$$
\begin{aligned}
&\Big\|u^*(\Omega(x,b))(\phi(\xi,\eta))-\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')(\Omega(y_{a'},a''))\phi(\xi,\eta)\Big\|\\
=&\Big\|u^*<\xi,\xi_1>(\pi_{\mathcal{H}}\otimes^c\pi_{\mathcal{K}})(\Psi(a,b))\phi(\xi_0,\eta)\\
&-<\xi,\xi_1>u^*\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')(\pi_{\mathcal{H}}\otimes^c\pi_{\mathcal{K}})\Delta(a')\Psi(1,a'')\phi(\xi_0,\eta)\Big\|\\
\leq&\|\xi\|\|\xi_1\|\|\phi(\xi_0,\eta)\|\|(\pi_{\mathcal{H}}\otimes^c\pi_{\mathcal{K}})\|\Big\|u^*\Psi(a,b)-\\
&u^*\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Delta(a')\Psi(1,a'')\Big\|\\
\leq&\|\xi\|\|\xi_1\|\|\xi_0\|\|\|\eta\|\Big\|u^*(\Psi(a,b)-\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Delta(a')\Psi(1,a''))\Big\|\\
\leq&\|\phi(\xi,\eta)\|\|\xi_1\|\|\xi_0\|\|\|u^*\|\Big\|\Psi(a,b)-\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Delta(a')\Psi(1,a'')\Big\|
\end{aligned}
$$

slik at når vi vet at $\|u^*\|=1$ er

$$
\begin{aligned}
&\Big\|u^*(\Omega(x,b))-\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')(\Omega(y_{a'},a''))\Big\|\\
&\leq\|\xi_1\|\|\xi_0\|\|\Big\|\Psi(a,b)-\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Delta(a')\Psi(1,a'')\Big\|.
\end{aligned}
$$

Dermed har vi en følge av element i $B_0(\mathcal{H})\otimes^c A$ som konvergerer mot $u^*(\Omega(x,b))$. Siden $B_0(\mathcal{H})\otimes^c A$ er komplett betyr dette at $u^*(\Omega(x,b))\in B_0(\mathcal{H})\otimes^c A$ og dermed at $(\Omega(x^*,b^*))u\in B_0(\mathcal{H})\otimes^c A$.

Siden alle rang-1 operatorer på $\mathcal{H}$ kan skrives på formen $x\xi=<\xi,\xi_1>\xi_2$ for en eller annen $(\xi_1,\xi_2)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ og mengden $\{\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0\mid a\in A\}$ ligger tett i $\mathcal{H}$, ligger mengden $\{x\in B(\mathcal{H})\mid$ det eksisterer $a\in A$ og $\xi_1\in\mathcal{H}$ slik at for alle $\xi\in\mathcal{H}$ er $x\xi=<\xi,\xi_1>\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0\}$ tett i mengden av rang-1 operatorer. Og siden høyre-multiplikasjon med u er en kontinuerlig avbildning må $(\Omega(x,b))u\in B_0(\mathcal{H})\otimes^c A$ for alle rang-1 operatorer x.

Vi vet at alle operatorer på $\mathcal{H}$ av endelig rang ligger i det lineære spennet til rang-1 operatorene, og at $B_0(\mathcal{H})\otimes^c A$ er et vektorrom. Dermed må $\widetilde{\rho_2}((\Omega(x,b)))\in B_0(\mathcal{H})\otimes^c A$ for alle x av endelig rang. Da operatorene av endelig rang ligger tett i $B_0(\mathcal{H})$ og $B_0(\mathcal{H})\otimes^c A$ er lukket vil $Im(\widetilde{\rho_1}|_{B_0(\mathcal{H})\otimes^c A})\subseteq B_0(\mathcal{H})\otimes^c A$ og $Im(\widetilde{\rho_2}|_{B_0(\mathcal{H})\otimes^c A})\subseteq B_0(\mathcal{H})\otimes^c A$.

Da har vi vist at kravet i proposisjonen gir mening, og $\rho_1=\widetilde{\rho_1}|_{B_0(\mathcal{H})\otimes^c A}$ og $\rho_2=\widetilde{\rho_2}|_{B_0(\mathcal{H})\otimes^c A}$.

□

Proposisjon 15. *Med ρ_1 og ρ_2 som i proposisjon 14, og u som i proposisjon 13 vil for alle $a\in A$,*

$$(\pi_{\mathcal{H}}\otimes^c\pi_{\mathcal{K}})\Delta(a)=(\rho_1\circ\rho_2^*)((\pi_{\mathcal{H}}\otimes^c\pi_{\mathcal{K}})\Psi(a,1))$$

Bevis. Med $(a,b)\in A\times A$ og $\eta\in\mathcal{K}$ er

$$
\begin{aligned}
\rho_1((\pi_{\mathcal{H}}\otimes^c\pi_{\mathcal{K}})\Psi(a,1))(\phi(b\xi_0,\eta))&=(\pi_{\mathcal{H}}\otimes^c\pi_{\mathcal{K}})\Delta(ab)\phi(\xi_0,\eta)\\
&=(\pi_{\mathcal{H}}\otimes^c\pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a)\circ\Delta(b))(\phi(\xi_0,\eta))\\
&=(\pi_{\mathcal{H}}\otimes^c\pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a)\circ u)(\phi(b\xi_0,\eta))
\end{aligned}
$$

slik at $u(\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})\Psi(a,1) = (\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})\Delta(a)u$. Her kan vi sette sammen med $u^* = u^{-1}$ på begge sider av likhetstegnet å få $(\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})\Delta(a) = u(\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})\Psi(a,1)u^* = \rho_1 \circ \rho_2^*((\pi_{\mathcal{H}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})\Psi(a,1))$. □

Nå ønsker vi at $v = (\rho_1, \rho_2)$ der ρ_1 og ρ_2 er som i proposisjon 14, skal være en representasjon. La f_{12} være avbildningen fra $B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K})$ til $B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K} \otimes^H \mathcal{K})$ som sender enhver avbildning $x \in B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K})$ til den kontinuerlige lineæravbildningen x_{12} som oppfyller at $x_{12}(\Theta(\phi(\xi,\eta_1),\eta_2)) = \Theta(x(\phi(\xi,\eta_1)),\eta_2)$ for alle $(\xi,\eta_1,\eta_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K} \times \mathcal{K}$. La videre $T : \mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K} \otimes^H \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K} \otimes^H \mathcal{K}$ definert ved at $T(\Theta(\phi(\xi,\eta_1),\eta_2)) = \Theta(\phi(\xi,\eta_2),\eta_1)$ og definer $f_{13} : B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K}) \to B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K})$ ved at for alle $x \in B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K})$ er $f_{13}(x) = T \circ f_{12}(x) \circ T$. Vi vil bruke u_{12} om $f_{12}(u)$ og u_{13} om $f_{13}(u)$. Om vi husker definisjonen av representasjon fra [2], ser vi at det som mangler er å vise at $M(Id \otimes^c \Delta)(v) = v_{(12)}v_{(13)}$.

Proposisjonen under har jeg ikke greid å bevise i det generelle tilfellet. Om vi antar at det eksisterer en $w \in B(\mathcal{K} \otimes^H \mathcal{K})$ slik at $(\pi_{\mathcal{K}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})(\Delta(a)) = w(\pi_{\mathcal{K}} \otimes^c \pi_{\mathcal{K}})\Psi(a,1)w^*$ kan vi vise det. Det vil bli kommentert etter beviset av dette spesialtilfellet hvor dette beviset bryter sammen i det generelle tilfellet, selv om det nok er ganske klart.

Proposisjon 16. *Multiplikatoren $v = (\rho_1, \rho_2)$ der ρ_1 og ρ_2 er som i proposisjon 14, er en representasjon av (A, Δ, Ψ) på $\mathcal{H}$.*

Bevis. Det som må vises er som nevnt før proposisjonen at $M(Id \otimes^c \Delta)(v) = v_{(12)}v_{(13)}$ der v er definert som i proposisjon 14.

Definer $C \subseteq B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K})$ ved at $C = \Big\{x \in B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K}) \mid$ for alle $y \in B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A)$ er $xy \in B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A$ og $yx \in B_0(\mathcal{H} \otimes^c A\Big\}$ og $D \subseteq B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K} \otimes^H \mathcal{K})$ ved at $D = \Big\{x \in B(\mathcal{H} \otimes^H \mathcal{K} \otimes^H \mathcal{K}) \mid$ for alle $y \in B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A \otimes^c A)$ er $xy \in B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A \otimes^c A$ og $yx \in B_0(\mathcal{H} \otimes^c A \otimes^c A)\Big\}$. Vi har nå inklusjoner I_C av C i $M(B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A)$ og I_D av D i $M(B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A \otimes^c A)$, som sender ethvert element i C eller D til venstre- og høyremultiplikasjon med dette elementet. Dersom u_{12} og u_{13} ligger i D kan vi legge merke til identiteten holder alt invariant, og at C og D dermed er unitale, dermed vil $M(\Delta \otimes^c Id) = I_D \circ m(\Delta \otimes^c Id)$, slik at det holder å vise $u_{(12)}u_{(13)} = m(\Delta \otimes^c Id)(I_C(u))$.

Nå bør vi først vise at $Im(f_{12}|_C) \subseteq D$ og $Im(f_{13}|_C) \subseteq D$. Vi ser først at med $(x,y,z) \in B_0(\mathcal{H}) \times A \times A$ er $u_{12}\zeta(\Psi(x,y),z) = \zeta(u\Psi(x,y),z) \in B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A \otimes^c A$ og $\zeta(\Psi(x,y),z)u_{12} = \zeta(\Psi(x,y)u,z) \in B_0(\mathcal{H}) \otimes^c A \otimes^c A$, slik at $Im(f_{12}|_C) \subseteq D$ og siden $T \in D$ må også $Im(f_{13}|_C) \subseteq D$.

Da ser vi at med u som i proposisjon 13 er $v = I_C(u)$. Nå er v_{12} definert som $v_{12} = I_D(u_{12})$ og v_{13} definert som $v_{13} = I_D(u_{13})$.

Da kan vi begynne å vise at $u_{(12)}u_{(13)} = m(\Delta \otimes^c Id)(I_C(u))$. La f være en følge av avbildninger med endelig støtte fra $A \otimes^c A$ til de komplekse tallene slik at

$\Delta(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Psi(a',a'')$, da har vi at

$$\begin{aligned}
&u_{12}u_{13}(\Theta(\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0,\eta_1),\eta_2)) \\
&= u_{12}(T(u_{12}(T(\Theta(\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0,\eta_1),\eta_2))))) \\
&= u_{12}(T(\Theta(u\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a)\xi_0,\eta_2),\eta_1))) \\
&= u_{12}(T(\Theta((\pi_{\mathcal{H}}\otimes^c\pi_{\mathcal{K}})\Delta(a)\phi(\xi_0,\eta_2),\eta_1))) \\
&= u_{12}(T(\Theta((\pi_{\mathcal{H}}\otimes^c\pi_{\mathcal{K}})(\lim_{n\to\infty}\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Psi(a',a''))\phi(\xi_0,\eta_2),\eta_1))) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')u_{12}(T(\Theta(\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a')\xi_0,\pi_{\mathcal{K}}(a'')\eta_2),\eta_1))) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')u_{12}(\Theta(\phi(\pi_{\mathcal{H}}(a')\xi_0,\eta_1),\pi_{\mathcal{K}}(a'')\eta_2)) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')\Theta((\pi_{\mathcal{H}}\otimes^c\pi_{\mathcal{K}})\Delta(a')\phi(\xi_0,\eta_1),\pi_{\mathcal{K}}(a'')\eta_2) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{(a',a'')\in A\times A} f(n)(a',a'')(\zeta(\Delta(a'),a''))(\Theta(\phi(\xi_0,\eta_1),\eta_2)) \\
&= ((\Delta\otimes^c Id)\circ\Delta)(a)(\Theta(\phi(\xi_0,\eta_1),\eta_2)).
\end{aligned}$$

Og siden vi har antatt at det eksisterer en $w \in B(\mathcal{K}\otimes^H\mathcal{K})$ slik at $(\pi_{\mathcal{K}}\otimes^c\pi_{\mathcal{K}})\Delta(a) = w(\pi_{\mathcal{K}}\otimes^c\pi_{\mathcal{K}})(\Psi(a,1))w^*$ vil

$$\begin{aligned}
&((\Delta\otimes^c Id)\circ\Delta)(a)(\Theta(\phi(\xi_0,\eta_1),\eta_2)) \\
&= ((Id\otimes^c\Delta)\circ\Delta)(a)(\Theta(\phi(\xi_0,\eta_1),\eta_2)) \\
&= w_{23}(\Delta(a)\otimes^c Id)w_{23}^*\Theta(\phi(\xi_0,\eta_1),\eta_2) \\
&= w_{23}u_{12}\Theta'(a\xi_0,w^*\phi'(\eta_1,\eta_2)) \\
&= w_{23}u_{12}w_{23}^*\Theta(\phi(a\xi_0,\eta_1),\eta_2) \\
&= (Id\otimes^c\Delta)\Theta'(a\xi_0,\phi'(\eta_1,\eta_2)) \\
&= (Id\otimes^c\Delta)\Theta(\phi(a\xi_0,\eta_1),\eta_2)
\end{aligned}$$

slik at proposisjonen er bevist i dette spesialtilfellet.

□

Det er naturligvis i denne siste utregningen der vi viser at

$$((\Delta\otimes^c Id)\circ\Delta)(a)(\Theta(\phi(\xi_0,\eta_1),\eta_2)) = (Id\otimes^c\Delta)\Theta(\phi(a\xi_0,\eta_1),\eta_2)$$

beviset bryter sammen om vi ikke har antatt eksistensen av en slik w. I [1] er denne likheten brukt uten å anta noe om en slik w, men jeg har ikke greid å verifisere det som er gjort der. Jeg vil likevel anta resultatet i kapittel 5.2.

Kapittel 5

Kvante-SU(2)

5.1 Haarmålet på kvante-SU(2)

Vi vil i dette avsnittet finne en eksplisitt formel for haarmålet på kvante-SU(2), og vil hente resultatene fra [10]. Først innfører vi litt lokal notasjon for dette kapittelet og kapittel 5.2.

La $\widetilde{A_0}$ være en unital *-algebra, med $B = \{\alpha, \gamma\} \subset \widetilde{A_0}$ en undermengde av $\widetilde{A_0}$ slik at for enhver avbildning $x : B \to K$ der K er en unital *-algebra, eksisterer nøyaktig en *-homomorfi $y : \widetilde{A_0} \to K$ slik at $y(1) = 1$ og $y|_B = x$. Videre vil $\lambda \in (0,1) \subset \mathbb{R}$, $A_0 = \widetilde{A_0}/\big\langle\{\alpha\alpha^* + \lambda^2\gamma\gamma^* - 1, \alpha^*\alpha + \gamma\gamma^* - 1, \gamma\gamma^* - \gamma^*\gamma, \alpha\gamma^* - \lambda\gamma^*\alpha, \alpha\gamma - \lambda\gamma\alpha\}\big\rangle$ og vi definerer en norm på A_0 ved at for alle $a \in A_0$ er $\|a\| = \sup\{\|\zeta(a)\| \mid \zeta$ er en *-representasjon av A_0 på en C^*-algebra$\}$. Da kan vi definere A som kompletteringen av A_0, $(A \otimes^c A, \phi)$ som et C^*-algebratensorprodukt av A med A. La videre $\Delta : A \to A \otimes^c A$ være den kontinuerlige *-homomorfien som oppfyller at $\Delta(1) = 1$, $\Delta(\alpha) = \phi(\alpha, \alpha) - \lambda\phi(\gamma^*, \gamma)$ og $\Delta(\gamma) = \phi(\gamma, \alpha) + \phi(\alpha^*, \gamma)$. På denne måten blir Δ en komultiplikasjon, og (A, Δ, ϕ) blir en kompakt kvantegruppe, bevis for dette er å finne [2] som egentlig er antatt kjent i denne oppgaven. I resten av denne oppgaven vil dessuten $\pi : A \to B(L^2(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}))$ være *-representasjonen gitt ved at

$$\pi(\alpha)(\chi_{m,n}) = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad m = 0 \\ \sqrt{1-\lambda^{2m}}\chi_{m-1,n} & \text{om} \quad m > 0 \end{cases}$$
$$\pi(\gamma)(\chi_{m,n}) = \lambda^m \chi_{m,n+1}$$

der $\chi_{m,n}$ er den ekvivalensklassen som inneholder den karakteristiske funksjonen til $\{(m,n)\}$. Her vil

$$\pi(\alpha^*)(\chi_{m,n}) = \sqrt{1-\lambda^{2(m+1)}}\chi_{m+1,n}$$
$$\pi(\gamma^*)(\chi_{m,n}) = \lambda^m \chi_{m,n-1}.$$

Proposisjonene 4 og 5 sier oss at π er normbevarende, og dermed en isomorfi mellom A og $Im(\pi)$.

Vi vil, for å forenkle notasjonen noe bruke α, α^*, γ og γ^* både om de nevnte elementene i $\widetilde{A_0}$, om ekvivalensklassene i A eller A_0. På samme måte vil vi bruke $\chi_{m,n}$ både om den karakteristiske funksjonen til $\{(m,n)\}$ og om ekvivalensklassen i $L^2(\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$. Så er det bare å håpe på at dette ikke vil føre til misforståelser.

Et bevis for at dette definerer en kompakt kvantegruppe er å finne i [2].

Proposisjon 17. *Mengden*

$$B = \{\alpha^k(\gamma^*)^m\gamma^n \mid (k,m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\} \cup \{(\alpha^*)^k(\gamma^*)^m\gamma^n \mid (k,m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$$

er lineært uavhengig.

Bevis. Det holder å vise at $Im(\pi|_B)$ er lineært uavhengig. La oss først vise at mengden $M = \{\pi(\gamma^{*^m}\gamma^n) \mid (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ er lineært uavhengig. La f være en avbildning $f : M \to \mathbb{C}$ med endelig støtte slik at $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(\pi(\gamma^{*^m}\gamma^n))\pi(\gamma^{*^m}\gamma^n) = 0$. Dette medfører at $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(\pi(\gamma^{*^m}\gamma^n))\pi(\gamma^{*^m}\gamma^n)(\chi_{i,j}) = 0$ for alle i og j. Vi kan evaluere,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(\pi((\gamma^*)^m\gamma^n))\pi((\gamma^*)^m\gamma^n)(\chi_{i,j}) \\
&= \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \lambda^{mni} f(\pi((\gamma^*)^m\gamma^n))\chi_{i,j+n-m} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{i,j+k} \sum_{x\geq\max(0,-k)} f(\pi((\gamma^*)^x\gamma^{x+k})\lambda^{x(x+k)i}
\end{aligned}$$

Siden de karakteristiske funksjonene til ettpunktsmengder er lineært uavhengig er alle de innerste summene null, og dermed er også

$$\sum_{x\geq\max(0,-k)} \lambda^{x(x+k)i} f(\pi((\gamma^*)^x\gamma^{x+k})) = 0$$

for alle $i \in \mathbb{N}$ og $k \in \mathbb{Z}$. Dette betyr at for alle $k \in \mathbb{Z}$ er λ^i en rot for polynomet $\sum_{x\geq\max(0,-k)} f(\pi((\gamma^*)^x\gamma^{x+k}))y^{x(x+k)}$ i $\mathbb{C}$. Siden mengden $\{\lambda^{x(x+k)} \mid x \geq \max(0,k)\}$ ikke er endelig må f definere koeffisientene til polynom i variabelen y i $\mathbb{C}$ med uendelig mange røtter så $f = 0$.

La $B_{\alpha^k} = \{\pi(\alpha^k\gamma^{*^m}\gamma^n) \mid (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ og $B_{\alpha^{*k}} = \{\pi(\alpha^{*^k}\gamma^{*^m}\gamma^n) \mid (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$. La $f : B \to \mathbb{C}$ ha endelig støtte og anta at $\sum_{b\in B} g(b)b = 0$. Siden $\pi(\alpha)$ og $\pi(\alpha^*)$ skifter førsteargumentet til de karakteristiske funksjonene hver sin veg, og bare en av $\pi(\alpha)$ og $\pi(\alpha^*)$ kan være med i hver summand, har vi at for alle $k \in \mathbb{N}$ må $\sum_{b\in B_{\alpha^k}} g(b)b = \sum_{b\in B_{\alpha^{*k}}} g(b)b = 0$. Om vi lar $\tilde{} : B \to B$ være definert ved at $\tilde{}(\pi(\alpha^{*^k}\gamma^{*^m}\gamma^n)) = \tilde{}\pi((\alpha^k\gamma^{*^m}\gamma^n)) = \pi(\gamma^{*^m}\gamma^n)$, og bruker notasjonen $\widetilde{b}$ om $\tilde{}(b)$, får vi at $\sum_{b\in B_{\alpha^k}} g(b)b = \pi(\alpha^k)\sum_{b\in B_{\alpha^k}} g(b)\widetilde{b}$ og $\sum_{b\in B_{\alpha^{*k}}} g(b)b = \pi(\alpha^{*^k})\sum_{b\in B_{\alpha^{*k}}} g(b)\widetilde{b}$. Dersom det eksisterer en χ_{ij} slik at $\sum_{b\in B_{\alpha^k}} g(b)\widetilde{b}(\chi_{i,j}) \neq 0$ vet vi at $\sum_{b\in B_{\alpha^k}} g(b)b(\chi_{i+k,j}) = \prod_{r=i}^{i+k}\sqrt{1-\lambda^{2r}}\sum_{b\in B_{\alpha^k}} g(b)\widetilde{b}(\chi_{i,j}) \neq 0$ og $\pi(\alpha^*)$ er injektiv.

Dermed må $\sum_{b\in B_{\alpha^k}} g(b)\widetilde{b} = 0$ og $\sum_{b\in B_{\alpha^{*k}}} g(b)\widetilde{b} = 0$. Da mengden $\{\pi(\gamma^{*^m}\gamma^n) \mid (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ er lineært uavhengig må $f = 0$. □

Proposisjon 18. *Mengden* $B = \{\alpha^k\gamma^{*^m}\gamma^n \mid (k,m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\} \cup \{\alpha^{*^k}\gamma^{*^m}\gamma^n \mid (k,m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ *er en basis for et tett underrom av* A.

Bevis. Proposisjon 17 sier at B er lineært uavhengig så det holder å vise at det er en generatormengde. Vi vet at det lineære spennet til mengden P av produkt av element i mengden $G = \{\alpha, \alpha^*, \gamma, \gamma^*\}$ er tett i A. Vi vet at $G \subseteq B$ og dermed ligger i spennet til B. Nå må vi bare vise at $\mathrm{lin}(B)$ er lukket under høyremultiplikasjon fra G. At B er lukket under høyremultiplikasjon med γ og γ^* er klart da de kommuterer. Vi ser så på høyremultiplikasjon med α og α^*,

$$\alpha^k\gamma^{*^m}\gamma^n\alpha = \frac{1}{\lambda^n}\alpha^k\gamma^{*^m}\alpha\gamma^n = \frac{1}{\lambda^{mn}}\alpha^{k+1}\gamma^{*^m}\gamma^n$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^k {\gamma^*}^m \gamma^n \alpha^* &= \lambda^n \alpha^k {\gamma^*}^m \alpha^* \gamma^n \\
&= \lambda^{mn} \alpha^k \alpha^* {\gamma^*}^m \gamma^n \\
&= \left\{ \begin{array}{cr} \lambda^{mn} \alpha^* {\gamma^*}^m \gamma^n & k = 0 \\ \lambda^{mn} \alpha^{k-1}(1 - \lambda^2 \gamma\gamma^*) {\gamma^*}^m \gamma^n & k > 0 \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{cr} \lambda^{mn} \alpha^* {\gamma^*}^m \gamma^n & k = 0 \\ \lambda^{mn} \alpha^{k-1} {\gamma^*}^m \gamma^n - \lambda^{mn+2} \alpha^{k-1} {\gamma^*}^{m+1} \gamma^{n+1} & k > 0 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{*^k} {\gamma^*}^m \gamma^n \alpha &= \frac{1}{\lambda^n} {\alpha^*}^k {\gamma^*}^m \alpha \gamma^n \\
&= \frac{1}{\lambda^{mn}} {\alpha^*}^k \alpha {\gamma^*}^m \gamma^n \\
&= \left\{ \begin{array}{cr} \frac{1}{\lambda^{mn}} \alpha {\gamma^*}^m \gamma^n & k = 0 \\ \frac{1}{\lambda^{mn}} {\alpha^*}^{k-1} (1 - \gamma^*\gamma) {\gamma^*}^m \gamma^n & k > 0 \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{cr} \frac{1}{\lambda^{mn}} \alpha {\gamma^*}^m \gamma^n & \\ \frac{1}{\lambda^{mn}} \alpha^{k-1} {\gamma^*}^m \gamma^n - \frac{1}{\lambda^{mn}} \alpha^{k-1} {\gamma^*}^{m+1} \gamma^{n+1} & \begin{array}{r} k = 0 \\ k > 0 \end{array} \\ k > 0 & \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$$
{\alpha^*}^k {\gamma^*}^m \gamma^n \alpha^* = \lambda^n {\alpha^*}^k {\gamma^*}^m \alpha^* \gamma^n = \lambda^{mn} {\alpha^*}^{k+1} {\gamma^*}^m \gamma^n.
$$

Dermed er $\mathrm{lin}(P) \subseteq \mathrm{lin}(B)$ og siden $\mathrm{lin}(P)$ ligger tett må $\mathrm{lin}(B)$ ligge tett. $\square$

Vi kan som Woronowicz innføre notasjonen

$$
a_{kmn} = \left\{ \begin{array}{lll} \alpha^k {\gamma^*}^m \gamma^n & \text{om} & k \geq 0 \\ {\alpha^*}^{-k} {\gamma^*}^m \gamma^n & \text{om} & k < 0 \end{array} \right. \tag{5.1}
$$

der k er et heltall, og m og n er naturlige tall, denne notasjonen vil bli brukt ut dette kapittelet.

Vi vet at vi har et haarmål på kvante-SU(2), siden det er en kompakt kvantegruppe, vi skal nå følge fremgangsmåten i [10] og se hva dette gjør med element i denne basisen.

La $\widetilde{f} : \widetilde{A_0} \to \mathbb{C}$ være $*$-homomorfien gitt ved at $\widetilde{f}(1) = 1$, $\widetilde{f}(\alpha) = \lambda^{-i}$ og $\widetilde{f}(\gamma) = 0$ der $i = \sqrt{-1}$. Her vil $\widetilde{f}(\alpha^*) = \lambda^i$ og $\widetilde{f}(\gamma^*) = 0$ slik at

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f}(\alpha\alpha^* + \lambda^2 \gamma\gamma^* - 1) &= \lambda^{-i}\lambda^i - 1 = 0 \\
\widetilde{f}(\alpha^*\alpha + \gamma\gamma^* - 1) &= \lambda^i \lambda^{-i} - 1 = 0 \\
\widetilde{f}(\gamma\gamma^* - \gamma^*\gamma) &= 0 \\
\widetilde{f}(\alpha\gamma^* - \lambda\gamma^*\alpha) &= 0 \\
\widetilde{f}(\alpha\gamma - \lambda\gamma\alpha) &= 0
\end{aligned}
$$

dermed induserer $\widetilde{f}$ en *-homomorfi $\widehat{f} : A_0 \to \mathbb{C}$ og på grunn av vårt valg av norm er alle *-homomorfier inn i C^*-algebraer kontinuerlige slik at $\widehat{f}$ har en entydig utvidelse til en kontinuerlig *-homomorfi $f : A \to \mathbb{C}$.

Nå kan vi se på konvolusjonsprodukt,

$$
\begin{aligned}
f * \alpha &= (Id \otimes^C f)(\Delta(\alpha)) \\
&= (Id \otimes^C f)(\phi(\alpha, \alpha) - \lambda\phi(\gamma^*, \gamma)) \\
&= \alpha\lambda^{-i} \\
f * \alpha^* &= (Id \otimes^C f)(\Delta(\alpha^*)) \\
&= (Id \otimes^C f)(\phi(\alpha^*, \alpha^*) - \lambda\phi(\gamma, \gamma^*)) \\
&= \alpha^*\lambda^i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f * \gamma &= (Id \otimes^C f)(\Delta(\gamma)) \\
&= (Id \otimes^C f)(\phi(\gamma, \alpha) + \phi(\alpha^*, \gamma)) \\
&= \gamma \lambda^{-i} \\
f * \gamma^* &= (Id \otimes^C f)(\Delta(\gamma^*)) \\
&= (Id \otimes^C f)(\phi(\gamma^*, \alpha^*) + \phi(\alpha, \gamma^*)) \\
&= \gamma^* \lambda^i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha * f &= (f \otimes^c Id)(\Delta(\alpha)) \\
&= (f \otimes^c Id)(\phi(\alpha, \alpha) - \lambda \phi(\gamma^*, \gamma)) \\
&= \lambda^{-i} \alpha \\
\alpha^* * f &= (f \otimes^c Id)(\Delta(\alpha^*)) \\
&= (f \otimes^c Id)(\phi(\alpha^*, \alpha^*) - \lambda \phi(\gamma, \gamma^*)) \\
&= \lambda^i \alpha^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma * f &= (f \otimes^c Id)(\Delta(\gamma)) \\
&= (f \otimes^c Id)(\phi(\gamma, \alpha) + \phi(\alpha^*, \gamma)) \\
&= \lambda^i \gamma \\
\gamma^* * f &= (f \otimes^c Id)(\Delta(\gamma^*)) \\
&= (f \otimes^c Id)(\phi(\gamma^*, \alpha^*) + \phi(\alpha, \gamma^*)) \\
&= \lambda^{-i} \gamma^*
\end{aligned}
$$

Siden $(Id \otimes^C f) \circ \Delta$ er en algebrahomomorfi vil $f * a_{kmn} = \lambda^{(-k+m-n)i} a_{kmn}$ og $a_{kmn} * f \lambda^{(-k-m+n)i}$. Da $f(1) = 1$ gir ligning (2.1) oss at $(h * f) = h$ slik at $h(a) = (h * f)(a) = h(f * a) = \lambda^{(-k+m-n)i} h(a)$ og $h(a) = (f * h)(a) = h(a * f) = \lambda^{(-k-m+n)i} h(a)$. Dermed må $h(a_{kmn}) = 0$ om ikke $-k + m - n = -k - m + n = 0$ altså $m = n$ og $k = 0$.

Så vil vi for første gang i dette avsnittet avvike litt fra det Woronowicz gjorde. Her brukte Woronowicz et teorem vi ikke har innført, men vi vil vise resten på en mer direkte måte. For å finne ut hva haarmålet gjør med a_{0mm} ser vi på noen av konsekvensene av å være venstreinvariant. Vi vil evaluere $(h \otimes^c Id)(\Delta((\gamma^* \gamma)^m))$, så la oss se litt på $\Delta((\gamma^* \gamma)^m)$ først. Siden Δ er en algebrahomomorfi er

$$
\begin{aligned}
\Delta((\gamma^* \gamma)^m) =& \Delta((\gamma^* \gamma))^m \\
=& (\Delta(\gamma) \Delta(\gamma^*))^m \\
=& ((\phi(\gamma, \alpha) + \phi(\alpha^*, \gamma))(\phi(\gamma^*, \alpha^*) + \phi(\alpha, \gamma^*)))^m \\
=& (\phi(\gamma\gamma^*, \alpha\alpha^*) + \phi(\gamma\alpha, \alpha\gamma^*) + \phi(\alpha^*\gamma^*, \gamma\alpha^*) + \phi(\alpha^*\alpha, \gamma\gamma^*))^m \\
=& (\phi(\gamma^*\gamma, 1 - \lambda^2 \gamma^*\gamma) + \frac{1}{\lambda} \phi(\alpha\gamma, \alpha\gamma^*) + \\
& \lambda \phi(\alpha^*\gamma^*, \alpha^*\gamma) + \phi(1 - \gamma\gamma^*, \gamma\gamma^*))^m \\
=& (\phi(\gamma^*\gamma, 1) - \lambda^2 \phi(\gamma^*\gamma, \gamma^*\gamma) + \frac{1}{\lambda} \phi(\alpha\gamma, \alpha\gamma^*) + \lambda \phi(\alpha^*\gamma^*, \alpha^*\gamma) + \\
& \phi(1, \gamma\gamma^*) - \phi(\gamma^*\gamma, \gamma^*\gamma))^m \\
=& (\phi(\gamma^*\gamma, 1) + \phi(1 - (1 + \lambda^2)\gamma^*\gamma, \gamma^*\gamma) + \frac{1}{\lambda} \phi(\alpha\gamma, \alpha\gamma^*) + \\
& \lambda \phi(\alpha^*\gamma^*, \alpha^*\gamma))^m.
\end{aligned}
$$

Da haarmålet skal være venstreinvariant må

$$h((\gamma^*\gamma)^m)1 = ((h \otimes^c Id) \circ \Delta)((\gamma^*\gamma)^m).$$

Begge sidene av likhetstegnet kan uttrykkes ved basisen fra proposisjon 18, og det holder for oss å se på koeffisienten forran $\gamma^*\gamma$. Nå er

$$\Delta(\gamma^*\gamma)^m = (\underbrace{\phi(\gamma^*\gamma, 1)}_{=b} + \underbrace{\phi(1-(1+\lambda^2)\gamma^*\gamma, \gamma^*\gamma)}_{=c} + \underbrace{\frac{1}{\lambda}\phi(\alpha\gamma, \alpha\gamma^*)}_{=d} + \underbrace{\lambda\phi(\alpha^*\gamma^*, \alpha^*\gamma)}_{=e})^m$$

summen over alle produkt av m instanser av de fire elementene b, c, d og e. Nå kan vi evaluere $(h \otimes^c Id)$ i summen av alle produkt av m element i b, c, d og e. De eneste produktene som kan gi bidrag til koeffisienten forran $\gamma^*\gamma$ er de med $m-1$ instanser av b og en instans av c eller $m-2$ instanser av b og en instans av hver av d og e. Nå ser vi at $bc = cb$ siden γ og γ^* kommuterer, la oss se på de noen andre relasjoner,

$$\begin{aligned}
bd =& \phi(\gamma^*\gamma, 1)\frac{1}{\lambda}\phi(\alpha\gamma, \alpha\gamma^*) \\
=& \frac{1}{\lambda}\phi(\gamma^*\gamma\alpha\gamma, \alpha\gamma^*) \\
=& \frac{1}{\lambda^2}\phi(\gamma^*\alpha\gamma^2, \alpha\gamma^*) \\
=& \frac{1}{\lambda^3}\phi(\alpha\gamma^*\gamma^2, \alpha\gamma^*) \\
=& \frac{1}{\lambda^3}\phi(\alpha\gamma\gamma^*\gamma, \alpha\gamma^*) \\
=& \frac{1}{\lambda^2}db
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
be =& \phi(\gamma^*\gamma, 1)\lambda\phi(\alpha^*\gamma^*, \alpha^*\gamma) \\
=& \lambda\phi(\gamma^*\gamma\alpha^*\gamma^*, \alpha^*\gamma) \\
=& \lambda^2\phi(\gamma^*\alpha^*\gamma^*\gamma, \alpha^*\gamma) \\
=& \lambda^3\phi(\alpha^*(\gamma^*)^2\gamma, \alpha^*\gamma) \\
=& \lambda^2 eb.
\end{aligned}$$

På denne måten ser vi at $bde = deb$. Siden det er m måter å plassere c på i et produkt av m element vil de produktene med en instans av c gi et bidrag $m(h \otimes^c Id)(cb^{m-1}) = m(h((\gamma^*\gamma)^{m-1}) - (1+\lambda^2)h((\gamma^*\gamma)^m))\gamma^*\gamma$. For en instans av hver av d og e deler vi opp i to tilfeller, der d er lengst til venstre, og der e er lengst til venstre. I hvert av tilfellene er det $m-i-1$ måter å plassere d og e med i instanser av b imellom. Dermed blir koeffisienten forran $\gamma^*\gamma$ i utrykket $((h \otimes^c Id) \circ \Delta)((\gamma^*\gamma)^m)$ lik

$$\begin{aligned}
& m(h((\gamma^*\gamma)^{m-1}) - (1+\lambda^2)h((\gamma^*\gamma)^m)) + \\
& \sum_{i=0}^{m-2}(m-i-1)\lambda^{-2(i+1)}(h((\gamma^*\gamma)^{m-1}) - h((\gamma^*\gamma)^m)) + \\
& \sum_{i=0}^{m-2}(m-i-1)\lambda^{2(i+1)}(h((\gamma^*\gamma)^{m-1}) - \lambda^2 h((\gamma^*\gamma)^m))
\end{aligned}$$

men siden $((h \otimes^c Id) \circ \Delta)((\gamma^*\gamma)^m) = h((\gamma^*\gamma)^m)1$ må koeffisienten forran $\gamma^*\gamma$ være null. Da får vi en ligning å løse med hensyn på $h((\gamma^*\gamma)^m)$. Dette gir oss at $h((\gamma^*\gamma)^m) = \frac{m+\sum_{i=0}^{m-2}(m-i-1)\left(\lambda^{-2(i+1)}+\lambda^{2(i+1)}\right)}{(1+\lambda^2)m+\sum_{i=0}^{m-2}(m-i-1)\left(\lambda^{-2(i+1)}+\lambda^{2(i+2)}\right)} h((\gamma\gamma^*)^{m-1})$, og Maple sier oss at

$$\frac{m+\sum_{i=0}^{m-2}(m-i-1)\left(\lambda^{-2(i+1)}+\lambda^{2(i+1)}\right)}{(1+\lambda^2)m+\sum_{i=0}^{m-2}(m-i-1)\left(\lambda^{-2(i+1)}+\lambda^{2(i+2)}\right)} = \frac{1-\lambda^{2m}}{1-\lambda^{2(m+1)}}$$

er en noe enklere formulering av det samme utrykket. Siden $h(1) = 1$ må dermed $h((\gamma^*\gamma)^m) = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{1-\lambda^{2m}}{1-\lambda^{2(m+1)}} = \frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^{2(m+1)}}$.

For å oppsummere, vi har et haarmål h på (A, Δ, ϕ) og

$$h(a_{kmn}) = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad k \neq 0 \text{ eller } m \neq n \\ \frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^{2(m+1)}} & \text{om} \quad k = 0 \text{ og } m = n. \end{cases} \tag{5.2}$$

Da ønsker vi å vise at haarmålet er trofast og følger fremgangsmåten foreslått i [5], selv om han refererer til [10] for det meste av beviset.

Først kan vi vise at for alle $a \in A$ er $h(a) = (1-\lambda^2)\lim_{j\to\infty}\sum_{i=0}^{j}\lambda^{2i} < \chi_{(i,0)}, \pi(a)\chi_{(i,0)} >$. Vi kan se at dette stemmer ved å regne ut dette utrykket for $a = a_{kmn}$,

$$\begin{aligned} &(1-\lambda^2)\lim_{j\to\infty}\sum_{i=0}^{j}\lambda^{2i} < \chi_{(i,0)}, \pi(a_{kmn})\chi_{(i,0)} > \\ &= (1-\lambda^2)\lim_{j\to\infty}\sum_{i=0}^{j} < \chi_{(i,0)}, \pi(a_{km0})\lambda^{i(n+2)}\chi_{(i,n)} > \\ &= (1-\lambda^2)\lim_{j\to\infty}\sum_{i=0}^{j} < \chi_{(i,0)}, \lambda^{i(m+n+2)}\pi(a_{k00})\chi_{(i,n-m)} > . \end{aligned}$$

Nå ser vi at om $k \neq 0$ eller $m \neq n$ vil alle indreproduktene bli null fordi $\chi_{(j+k,m-n)}$ og $\chi_{j,0}$ er ortogonale for alle i. Dersom $k = 0$ og $m = n$ blir dette

$$\begin{aligned} (1-\lambda^2)\lim_{p\to\infty}\sum_{i=0}^{p} < \chi_{(i,0)}, \lambda^{i(m+n+2)}\pi(a_{k00})\chi_{(i,n-m)} > &= (1-\lambda^2)\lim_{p\to\infty}\sum_{i=0}^{p}\lambda^{2i(m+1)} \\ &= \frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^{2(m+1)}}. \end{aligned}$$

Legg merke til at denne formen av h gir oss at for enhver positiv $a \in A$ med haarmål 0 må $< \chi_{(m,0)}, \pi(a)\chi_{(m,0)} >= 0$ for alle m. Nå vil vi vise at for enhver positiv, og dermed selvadjungert, $a \in A$ slik at $h(a) = 0$ må $\pi(a)\chi_{m0} = 0$ for alle heltall m. Vi kan vise dette ved en motsigelse, anta at a er positiv, $h(a) = 0$ og at det eksisterer en m slik at $\pi(a)\chi_{(m,0)} \neq 0$. Vi vet at det eksisterer en følge f av avbildninger med endelig støtte fra $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ til de komplekse tallene slik at $\pi(a)\chi_{(m,0)} = \lim_{p\to\infty}\sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i$. Siden a er positiv vil ϵa være positiv for enhver ikkenegativ ϵ. Nå vil

$$
\begin{aligned}
&< \chi_{(m,0)} - \epsilon \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i, \epsilon\pi(a)(\chi_{(m,0)} - \epsilon \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i) > \\
&=< \chi_{(m,0)}, \epsilon\pi(a)\chi_{(m,0)} > - < \chi_{(m,0)}, \epsilon\pi(a)\epsilon \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i > \\
&\quad - < \epsilon \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i, \epsilon\pi(a)\chi_{(m,0)} > + \\
&\quad < \epsilon \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i, \epsilon\pi(a)\epsilon \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i > \\
&=< \chi_{(m,0)}, \epsilon\pi(a)\chi_{(m,0)} > - < \epsilon \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i, \epsilon \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i > - \\
&\quad < \epsilon \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i, \epsilon \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i > + \\
&\quad < \epsilon \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i, \epsilon\pi(a)\epsilon \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i > \\
&= -2\epsilon^2 \| \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i\|^2 + \\
&\quad \epsilon^3 < \pi(a) \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i, \lim_{p\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} f(p)(i)\chi_i > \\
&\leq (\epsilon^3\|\pi(a)\|^2 - 2\epsilon^2)\|\pi(a)\chi_{(m,0)}\|^2
\end{aligned}
$$

og dette er negativt for alle $0 < \epsilon < \frac{2}{\|a\|}$, og vi har en motsigelse siden vi har funnet et element $y \in A$ slik at $< y, \pi(a)y > \leq 0$ og positive element forblir positive under en injektiv *-homomorfi. Dermed må antagelsen at det eksisterer en positiv $a \in A$, og $m \in \mathbb{N}$ slik at $h(a) = 0$ og $a\chi_{(m,0)} \neq 0$ må være gal.

Så kan vi legge merke til at operatoren D som sender $\chi_{(m,n)}$ til $\chi_{(m,n+1)}$ kommuterer med $\pi(\alpha), \pi(\gamma), \pi(\gamma^*)$ og $\pi(\alpha^*)$ og dermed med alle $\pi(a)$, der $a \in A$. Da får vi at om $h(a) = 0$ er $\pi(a)\chi_{(m,n)} = aD^n\chi_{(m,0)} = D^n a\chi_{(m,0)} = 0$ slik at $a = 0$. Dermed har vi vist at kjernen til haarmålet restriktert til de positive elementene i A er $\{0\}$ og haarmålet er trofast.

5.2 Høyreregulær representasjon på kvante-SU(2)

Nå som vi vet hvordan haarmålet ser ut på kvante-SU(2) kan vi gjøre den samme konstruksjonen på kvante-SU(2), som vi har beskrevet generelt i kapittel 4.

La i hele dette kapittelet (A, Δ, ϕ) være den kvante-SU(2) som i forrige kapittel, h være haarmålet på kvante-SU(2) som beskrevet i kapittel 5, og la $y = h \circ \cdot^{op} \circ (^* \times Id)$ der $\cdot^{op}$ er den motsatte multiplikasjonen på A, og * er involusjonen.

La så K være en ortonormal basis for $L^2(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})$ bestående av de karakteristiske funksjonene til ettpunktsmengder, og B en basis for et tett underrom av A bestående av $\{a_{kmn} \mid (k, m, n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ der a_{kmn} er som i ligning 5.1.

Nå blir A et hilbertrom med y som indreprodukt, la oss kalle dette hilbertrommet $\mathcal{H}$. Representasjonen ρ av A på $\mathcal{H}$ er avbildningen som sender ethvert element $a \in A$ på venstremultiplikasjon med a. Videre er 1_A en syklisk vektor i $\mathcal{H}$. La $(\mathcal{H} \otimes^H L^2(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}), \psi)$ være et hilbertromtensorprodukt av $\mathcal{H}$ med $L^2(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})$. Vi lar $\pi : A \to B(L^2(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}))$ være den samme representasjonen her som i forrige kapittel.

Nå kan vi regne ut hva u som i proposisjon 13 gjør med element på formen $\psi(a_{kmn}, \chi_{xy})$, der χ_{xy} er den karakteristiske funksjonen til mengden $\{(x, y)\} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ og a_{kmn} er som i ligning 5.1. Med den forenklingen at $\#$ er * om k er ikkepositiv og identiteten om k er positiv får vi at

$$\begin{aligned}
&u(\psi(a_{kmn}, \chi_{xy})) \\
&= (\rho \otimes^c \pi)\Delta(a_{kmn})\psi(1, \chi_{xy}) \\
&= (\rho \otimes^c \pi)\Delta(a_{k00})\Delta(a_{0m0})\Delta(a_{00n})\psi(1, \chi_{xy}) \\
&= (\rho \otimes^c \pi)\Delta(a_{sign(k)00})^{|k|}\Delta(a_{010})^m\Delta(a_{001})^n\psi(1, \chi_{xy}) \\
&= (\rho \otimes^c \pi)\big((\phi(\alpha, \alpha) - \lambda\phi(\gamma^*, \gamma))^{|k|}\big)^{\#}\big((\phi(\gamma, \alpha) + \phi(\alpha^*, \gamma))^m\big)^* \\
&\quad (\phi(\gamma, \alpha) + \phi(\alpha^*, \gamma))^n\psi(1, \chi_{xy}),
\end{aligned}$$

så kan vi for alle $(k, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ la E^k være mengden av strenger av lengde $|k|$ i de to symbolene $(\rho \otimes^c \pi)\phi(\alpha, \alpha)$ og $(\rho \otimes^c \pi) - \lambda\phi(\gamma^*, \gamma)$, og F^m være mengden av strenger av lengde m i de to symbolene $(\rho \otimes^c \pi)\phi(\gamma, \alpha)$ og $(\rho \otimes^c \pi)\phi(\alpha^*, \gamma)$. Identifiser så enhver streng av element i $A \otimes^c A$ med produktet av elementene. Da vil

$$\begin{aligned}
&(\rho \otimes^c \pi)\big((\phi(\alpha, \alpha) - \lambda\phi(\gamma^*, \gamma))^{|k|}\big)^{\#}\big((\phi(\gamma, \alpha) + \phi(\alpha^*, \gamma))^m\big)^* \\
&\quad (\phi(\gamma, \alpha) + \phi(\alpha^*, \gamma))^n\psi(1, \chi_{xy}) \\
&= \sum_{(a,b,c) \in E^k \times F^m \times F^n} a^{\#}b^*c\psi(1, \chi_{xy}).
\end{aligned}$$

Slik vil u evaluert i et vilkårlig element

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{(a', a'') \in B \times K} f(p)(a', a'')\phi(a_{kmn}, \chi_{xy})$$

bli

$$\begin{aligned}
&u(\lim_{p \to \infty} \sum_{(a', a'') \in B \times K} f(p)(a', a'')\phi(a_{kmn}, \chi_{xy})) \\
&= \lim_{p \to \infty} \sum_{(a', a'') \in B \times K} f(p)(a', a'')u(\phi(a_{kmn}, \chi_{xy})) \\
&= \lim_{p \to \infty} \sum_{(a', a'') \in B \times K} f(p)(a', a'') \sum_{(a,b,c) \in E^k \times F^m \times F^n} a^{\#}b^*c\phi(1, \chi_{xy}).
\end{aligned}$$

Bibliografi

[1] Ann Maes and Alfons Van Daele, *Notes on Compact Quantum Groups*, arXiv:math.FA/9803122 v1, 1998.

[2] Vegard Bertelsen, *Toeplitzoperatorer og kvantegrupper*, 2005.

[3] Li Bing-Ren, *Introduction to operator algebras*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1992.

[4] Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1989.

[5] P. Podles, *Quantum spheres*, Letters in Mathematical Mhysics **14** (1987), 193–202.

[6] Richard V. Kadison and John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, Academic Press. INC., 1986.

[7] Shôichirô Sakai, *C^*-algebras and W^*-algebras*, Springer-Verlag, 1998.

[8] Masamichi Takesaki, *Theory of operator algebras i*, Springer-Verlag, 1979.

[9] Jun Tomiyama, *Applications Of Fubini Type Theorem To The Tensor Products Of C^*-Algebras*, Tôhuku Mathematical Journal **19** (1967), 213–226.

[10] S. L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroup*, Communications in Mathematical Physics **111** (1987), 613 – 665.

I hele oppgaven brukes $(\mathbb{C}, \cdot)$ som tensorprodukt av $\mathbb{C}$ med $\mathbb{C}$. Antar alle algebraer har ikkedegenerert produkt.

En virkning av en C^*-algebra på et hilbertrom kalles trofast om alle elementene i C^*-algebraen har forskjellig virkning på hilbertrommet.

En virkning av en C^*-algebra $\mathcal{A}$ på et hilbertrom $\mathcal{H}$ kalles ikkedegenerert om $\overline{\bigcup\{Im(a) \mid a \in \mathcal{A}\}} = \mathcal{H}$.