

# Hilberttransformpar og negativ brytning

Øyvind Lind-Johansen

Master i fysikk og matematikk  
Oppgaven levert: Juli 2006  
Hovedveileder: Kristian Seip, MATH  
Biveileder(e): Johannes Skaar, IET



# Oppgavetekst

Oppgaven vil ta utgangspunkt i artikkelen: K. Seip og J. Skaar - An extremal problem related to negative refraction. Problemet består i å studere teoretisk og numerisk i hvilken grad en kan foreskrive realdelen til en hermitsk funksjon på et intervall, gitt at imaginærdelen skal være positiv for positive argumenter. Målet er å bestemme teoretiske begrensninger for negativ brytning.

Oppgaven gitt: 20. februar 2006  
Hovedveileder: Kristian Seip, MATH



## Forord

Denne oppgaven er min besvarelse i faget *TMA 4900 Masteroppgave* med en belastning på 30 studiepoeng, og oppsummerer arbeid jeg har gjort våren og sommeren 2006. Den markerer slutten på min mastergrad i industriell matematikk med spesialisering i analyse ved NTNU Gløshaugen.

Jeg begynte å studere negativ brytning og matematikken rundt dette i forbindelse med en prosjektoppgave høsten 2005. Denne masteroppgaven er en fortsettelse av arbeidet jeg gjorde da. En av utfordringene med arbeidet har vært at det ikke finnes noen enhetlig presentasjon av fysikken og matematikken på dette feltet, og denne oppgaven er tildels ment å være en slik.

Mine veiledere har vært professor Kristian Seip fra institutt for matematikk ved NTNU og professor Johannes Skaar fra institutt for elektronikk og telekommunikasjon ved NTNU. Jeg retter en stor takk til dem for meget god veiledning gjennom det knappe året jeg har drevet med dette. Det har vært svært lærerikt.

Øyvind Lind-Johansen, Trondheim 25. juli 2006



## Sammendrag

I løpet av de siste årene har det blitt mulig å lage medier som har permittivitet  $\epsilon_r = \chi_e + 1$  og permeabilitet  $\mu_r = \chi_m + 1$  med simultant negative realdeler. I slike medier vil man få negativ brytning og dette kan utnyttes til å lage en linse som i prinsippet kan få ubegrenset høy oppløsning for en frekvens. La  $\chi = u + iv$  stå for enten  $\chi_e$  eller  $\chi_m$ . Jeg viser at oppløsningen til linsa er gitt ved  $-\ln(|\chi + 2|/2)/d$  forutsatt at tykkelsen  $d$  på linsa er noe mindre enn en bølgelengde. Vi ser ut fra dette at oppløsningen er uendelig hvis  $u = -2$  og  $v = 0$  og at vi, for å få høyest mulig oppløsning, ønsker å minimere  $|\chi + 2| = \sqrt{(u + 2)^2 + v^2}$ .

Kausalitet fører til at  $\chi$  er element i rommet  $H^2$  av analytiske og kvadratisk integrerbare funksjoner i det øvre halvplan. Det følger av dette at  $u$  og  $v$  er hilberttransformpar. Videre vet vi at  $\chi$  er hermitsk og at  $v$  er positiv for positive argumenter som reflekterer passivitetsprinsippet for elektromagnetiske medier. Tilsammen setter dette grenser for hvor høy oppløsningen kan bli på et frekvensintervall. Nylig er det funnet en parametrisering av imaginærdelen til slike funksjoner på et frekvensintervall, gitt at realdelen er konstant på intervallet. Jeg identifiserer disse funksjonene som et element i en større klasse hermitske  $H^2$ -funksjoner hvor imaginærdelen kan parametriseres. Spesielt er det interessant å finne absolutte nedre grenser for den  $L^\infty$ -normen til  $|\chi + 2|$  på intervallet. Det viser seg at ved å sette realdelen lik  $x^2/b^2 - (a^2 + b^2)/(2b^2) - 2$  på intervallet kan man omtrent halvere denne nedre grensa i forhold til tilfellet hvor realdelen er konstant lik  $-2$ .





# Innhold

<b>1</b>	<b>Introduksjon</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Bakgrunnsstoff fra analysen</b>	<b>2</b>
2.1	$L^p$ -rom . . . . .	2
2.2	Fouriertransformen . . . . .	3
2.3	Harmoniske funksjoner . . . . .	5
2.4	Poissonintegraler . . . . .	6
2.5	Ikke-tangensielle grenser og Fatous teorem . . . . .	9
2.6	Konjugerte funksjoner . . . . .	10
2.7	Hardyrom . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Hilberttransformen</b>	<b>13</b>
3.1	Hilberttransformen på den reelle aksene . . . . .	13
3.2	Den endelige hilberttransformen . . . . .	15
3.3	Den endelige hilberttransformen av odde funksjoner på symmetriske intervaller . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Bakgrunnsstoff fra optikken</b>	<b>18</b>
4.1	Maxwells ligninger . . . . .	18
4.2	Elektromagnetiske bølger og brytning . . . . .	20
4.3	Fresnels ligninger . . . . .	21
4.4	Kramers-Kronig-relasjonene . . . . .	22
4.5	Egenskaper ved brytningsindeksen . . . . .	23
<b>5</b>	<b>En perfekt linse</b>	<b>24</b>
5.1	Negativ brytning . . . . .	25
5.2	Veselago-Pendry-linsa . . . . .	27
5.3	Transmisjon av evanescente felt . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Parametriseringer av imaginærdelen</b>	<b>32</b>
6.1	Introduksjon . . . . .	32
6.2	Tilfellet at realdelen er konstant . . . . .	33
6.3	Tilfellet at realdelen er en funksjon . . . . .	37
6.4	Diskusjon . . . . .	41
<b>7</b>	<b>Oppløsning</b>	<b>42</b>
7.1	Grenser for oppløsning . . . . .	42
7.2	Superposisjon . . . . .	45
<b>8</b>	<b>Konklusjon</b>	<b>50</b>



# 1 Introduksjon

Når elektromagnetiske bølger går fra et medium til et annet blir de brutt. Hvor mye de blir brutt avhenger av forskjellen i brytningsindeksen til de to mediene. Naturlige medier har positiv brytningsindeks, men allerede tidlig på 1900-tallet ble det vist at medier med negativ brytningsindeks kan eksistere uten å bryte fysikkens lover. Dette forutsetter at permittiviteten  $\epsilon_r$  og permeabiliteten  $\mu_r$  begge har negative realdeler. Den russiske fysikeren Victor Veselago var den første som gjorde et systematisk studie av de elektromagnetiske egenskapene til slike medier og hans resultater ble publisert på slutten av 1960-tallet[14]. En av de tingene han forutså var at slike medier kan brukes til å fokusere elektromagnetiske bølger. I begynnelsen tiltrakk resultatene hans endel oppmerksomhet, men siden medier med negativ brytningsindeks ikke fantes, sank interessen snart.

Fysikeren J.B. Pendry foreslo rundt årtusenskiftet hvordan man kunne lage medier med negativ brytningsindeks ved hjelp av såkalte metamaterialer[9]. Dette er kunstige medier med mikroskopiske mønstre av to eller flere materialer. Ikke lenge etter klarte fysikere på University of California i San Diego og fremstille slike medier, som gjerne kalles venstrehendte medier siden fasehastigheten og energistrømmen til bølgene går i motsatte retninger. For detaljer om debatten som fulgte refererer jeg til [8]. Iallefall ble det klart at disse mediene virkelig hadde negativ brytningsindeks og man kunne begynne å forske på hva slike medier kan brukes til. Pendry var også interessert i de venstrehendte mediens evne til å fokusere elektromagnetiske bølger, og han viste i artikkelen [9] hvordan man kan lage en linse som unnslipper den fundamentale grensen for oppløsning på en bølgelengde som vanlige linser er underlagt. Faktisk viser det seg at for en enkelt frekvens er oppløsningen kun begrenset av tapet i mediet slik at man i prinsippet kan få ubegrenset høy oppløsning ved å lage gode nok medier. Derfor har denne linsa gjerne blitt kalt en perfekt linse.

For et frekvensintervall blir imidlertid situasjonen annerledes. Vanskeligheten ligger da i at alle medier dispersive, som vil si at brytningsindeksen varierer med frekvensen. Sammen med energitapet, som manifesterer seg i imaginærdelen til brytningsindeksen, setter dette grenser for hva man kan oppnå på et frekvensintervall. På starten av 1900-tallet fant H.A. Kramers og R. de L. Kronig generelle sammenhenger mellom real- og imaginærdelene til susceptibilitetene  $\chi_e = \epsilon_r - 1$  og  $\chi_m = \mu_r - 1$ . Disse sammenhengene følger av at de elektromagnetiske feltene er underlagt kausalitetsprinsippet, og identifiserer real- og imaginærdelene til susceptibilitetene som hilberttransformpar. I tillegg er susceptibilitetene hermitske som betyr at realdelene er like funksjoner og imaginærdelene er odde funksjoner. Brytningsindeksen  $n$  er direkte avhengig av susceptibilitetene ved sammenhengene  $n^2 = \epsilon_r \mu_r$ . Det følger at  $n - 1$  også er hermitsk, og har real- og imaginærdeler som er hilberttransformpar.

I artikkelen [10] har mine veiledere Kristian Seip og Johannes Skaar funnet løsningen på et interessant ekstremalproblem i forbindelse med Veselagos og Pendrys linse. De har sett på tilfellet at realdelen til en slik hermitsk funksjon er konstant på et frekvensintervall, og med utgangspunkt i Kramers-Kronig-relasjonene funnet en parametrisering av imaginærdelen på intervallet. Deretter har de funnet en nedre grense for den maksimale

verdien til imaginærdelen på intervallet. Min hovedproblemstilling i denne oppgaven har vært å se om man kan komme noe videre med denne innfallsvinkelen. Jeg ønsker spesielt å finne parametriseringer av imaginærdelen på et intervall, gitt at realdelen er foreskrevet på intervallet. Målet er å studere teoretiske grenser for oppløsningen til linsa. Jeg presenterer det jeg har funnet ut i seksjon 6.

Det andre jeg ønsker å få til med denne oppgaven er å samle relevant matematikk og fysikk rundt negativ brytning på en enhetlig og oversiktelig måte. I seksjon 2 presenterer jeg standard matematikk som ligger til grunn for det som kommer senere. Særlig viktige er hardyrommene som gir oss et praktisk rammeverk for å beskrive flere sentrale funksjoner. Disse funksjonsrommene blir sentrale allerede i seksjon 3 som omhandler hilberttransformen. Et nøkkelresultat her er Marcel Riesz teorem som beskriver de nevnte hilberttransformparane. I denne seksjonen diskuterer jeg også den noe mindre kjente endelige hilberttransformen og resultatene om inversjon av denne er hovedbyggestenen i arbeidet med å finne parametriseringer av imaginærdelene på et frekvensintervall. I seksjon 4 presenterer jeg så standard resultater fra optikken med spesiell vekt på å knytte disse sammen med matematikken fra de tidligere seksjonene.

Deretter går jeg i seksjon 5 videre til å se på fenomenet negativ brytning. Først diskuterer jeg dette generelt før jeg spesielt ser på Veselagos og Pendrys perfekte linse. Denne kan altså få uendelig høy oppløsning under idealiserte betingelser, men i praksis må vi altså forholde oss til at passive medier er dispersive og har tap. En av de tingene det er mest interessant å finne ut av er på hvilken måte oppløsningen er begrenset av dette. I delseksjon 5.3 finner jeg under enkelte antakelser et uttrykk for hvor høy oppløsningen blir som funksjon av real- og imaginærdelene til susceptibilitetene. I seksjon 7 legger jeg så dette resultatet til grunn for en diskusjon av teoretiske grenser for oppløsningen til linsa, i lys av parametriseringene i seksjon 6.

## 2 Bakgrunnsstoff fra analysen

Jeg presenterer her standard matematisk analyse som ligger til grunn for det som følger. Fremstillingen er hovedsaklig basert på fremstillingene i [1] og [2], og i noe mindre grad på [3].

### 2.1 $L^p$ -rom

La  $f$  være en kompleks målbar funksjon på et målrom  $X$  med et positivt mål  $\mu$ . Vi definerer “normen”:

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

for  $0 < p < \infty$ , og

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_X |f|,$$

for  $p = \infty$ .

*Ekvivalensklasser* av funksjoner består av funksjoner hvor de punkter hvor funksjonene er ulike hverandre har mål null. Vi sier da at de er like hverandre *nesten overalt*. Vi definerer rommet  $L^p(\mu)$  til å bestå av alle ekvivalensklasser av funksjoner  $f$  hvor

$$\|f\|_p < \infty,$$

og vi kaller  $\|f\|_p$  for  $L^p$ -normen til  $f$ . Jeg skal i det følgende for enkelhets skyld omtale ekvivalensklasser av funksjoner bare som funksjoner.

Her vil målet  $\mu$  alltid være lebesguemålet og jeg bruker derfor isteden notasjonen  $L^p(X)$ . Er  $X$  er hele den reelle aksene  $\mathbb{R}$  skriver jeg bare  $L^p$ . Jeg skriver også  $dx$  når jeg mener lebesguemålet på  $\mathbb{R}$  og  $dxdy$  når jeg mener lebesguemålet på  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.2 Fouriertransformen

Jeg bruker denne konvensjonen for *fouriertransformen* av en funksjon  $f(t) \in L^1$ :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{it\omega} dt. \quad (1)$$

Dette er en lineær og begrenset operator som er en-til-en og på. Det gjelder også dens invers som er gitt ved:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-it\omega} dt. \quad (2)$$

Den fouriertransformerte av den deriverte av en funksjon  $f$  er knyttet til funksjonen selv på denne måten:

$$\widehat{f'}(\omega) = -i\omega \hat{f}(\omega),$$

forutsatt at den deriverte av  $f$  eksisterer. Hvis  $f$  er  $k$  ganger deriverbar kan argumentet gjentas og vi får sammenhengen:

$$\widehat{f^{(k)}}(\omega) = (-i\omega)^k \hat{f}(\omega),$$

som reflekterer at jo glattere funksjonen  $f$  er jo raskere går dens fouriertransform mot 0 når  $\omega$  går mot uendelig.

Det følger direkte ved innsetting i definisjonen (1) at hvis

$$g(t) = \overline{f(t)},$$

så er

$$\hat{g}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}.$$

Dette fører til at hvis  $h(t)$  er en reell funksjon slik at  $h(t) = \overline{h(t)}$ , da gjelder:

$$\hat{h}(\omega) = \overline{\hat{h}(-\omega)}, \quad (3)$$

slik at realdelen til  $\hat{h}$  er en like funksjon og imaginærdelen til  $\hat{h}$  er en odde funksjon. Vi kaller funksjoner som oppfyller dette for *hermitske*, og slike er svært sentrale i denne oppgaven.

En annen viktig egenskap ved fouriertransformen er at den fouriertransformerte av en konvolusjon er produktet av fouriertransformene til funksjonene. Vi kaller dette *konvolusjonsteoremet*:

**Teorem 2.1.** *Anta  $g(t), f(t) \in L^1$  og la  $h(t) = f(t) * g(t)$ . Da er  $h(t) \in L^1$  og*

$$\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

*Bevis.* Dette beviset er en anvendelse av Fubinis teorem som sier at integrasjonsrekkefølgen kan byttes om:

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau e^{i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{i\omega(t-\tau)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt = \hat{g}(\omega)\hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

□

At fouriertransformer er definert for funksjoner i  $L^2$  er ikke opplagt. At dette er tilfelle er noe av innholdet i det følgende viktige resultatet kalt *Plancherels teorem*. Jeg refererer til [1] s.187-189 for et fullstendig bevis på dette teoremet. Her viser jeg kun punkt 2 for  $f \in L^1 \cup L^2$ . Dette beviset må utvides til å gjelde alle  $f \in L^2$ , men det tar jeg ikke med her.

**Teorem 2.2.** *La  $f \in L^2$ . Da finnes en funksjon  $\hat{f} \in L^2$  slik at det følgende holder:*

1. Hvis  $f \in L^1 \cap L^2$ , da eksisterer  $\hat{f}$ , den fouriertransformerte av  $f$ , gitt i ligning (1).
2. For enhver  $f \in L^2$  gjelder  $\frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ .
3. Avbildingen  $f \rightarrow \hat{f}$  er en hilbertromisomorfisme av  $L^2$  på  $L^2$ .
4. Hvis

$$\varphi_A(\omega) = \int_{-A}^A f(x)e^{i\omega t} dt,$$

og

$$\psi_A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \hat{f}(x)e^{-i\omega t} dt.$$

Da gjelder

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \|\varphi_A - \hat{f}\|_2 = 0,$$

og

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \|\psi_A - f\|_2 = 0$$

*Bevis.* Merk først at translasjonen  $f_a(x) = f(x-a)$  er i  $L^p$  for  $1 \leq p < \infty$  hvis  $f$  er i  $L^p$  ([1] s.183-184). Anta nå at  $f \in L^1 \cup L^2$  og la  $g(x) \equiv f(x) * \overline{f(-x)}$ . Vi får da

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\overline{f(-y)}dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\overline{f(y)}dy = (f_{-x}, f),$$

som er et indreprodukt, tatt i hilbertrommet  $L^2$ . *Schwarz ulikhet* gir nå at:

$$|g(x)| \leq \|f_{-x}\|_2 \|f\|_2,$$

slik at  $g$  er begrenset. I tillegg har vi at  $g \in L^1$  siden  $f(x), \overline{f(-x)} \in L^1$  og at  $g$  er kontinuerlig fordi translasjonen er kontinuerlig.

La nå  $H(t) = e^{-|t|}$  og la  $h_\lambda(x)$  være den inverse fouriertransformerte av  $H(\lambda t)$ . Vi vet at siden  $g \in L^1$  så er:

$$(g * h_\lambda)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\hat{g}(t)dt. \quad (4)$$

Det kan også vises at  $\lim_{\lambda \rightarrow 0}(g * h_\lambda)(x) = 2\pi g(x)$  siden  $g$  er kontinuerlig og begrenset. Vi får da:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0}(g * h_\lambda)(0) = 2\pi g(0) = 2\pi \|f\|_2^2. \quad (5)$$

Videre har vi at  $\hat{g} = |\hat{f}|^2 \geq 0$ . Siden  $H(\lambda t) \rightarrow 1$  når  $\lambda \rightarrow 0$  får vi, ved det monotone konvergensteoremet, at:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\hat{g}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2 dt. \quad (6)$$

Ved å kombinere (4),(5) og (6) får vi nå  $\|\hat{f}\|_2/(2\pi) = \|f\|_2$  som vi er ute etter. Dette viser forøvrig også at  $\hat{f} \in L^2$ .  $\square$

Noe av det Plancherels teorem sier er at hvis  $f \in L^2$  så er  $\hat{f}$  entydig definert som et element i hilbertrommet  $L^2$ , men som en punktfunksjon er den bare bestemt nesten overalt. Dette er en viktig forskjell fra fouriertransformen for funksjoner i  $L^1$  som er definert i alle punkt.

Viktigheten av fouriertransformer ligger blant annet i at de transformerer funksjoner fra tidsdomenet og over i frekvensdomenet. F.eks vil man ved å fouriertransformere elektromagnetiske bølger få en funksjon som angir amplituden til bølgene som en funksjon av frekvensen. Denne kalles spektret til bølgene.

## 2.3 Harmoniske funksjoner

En funksjon  $u(x, y)$  kalles *harmonisk* hvis den har kontinuerlige første- og andreordens partiellderiverte og oppfyller *Laplace-ligningen*:

$$\Delta u = 0,$$

hvor  $\Delta$  er *laplaceoperatoren*. Vi skal jobbe med funksjoner definert på det komplekse plan, altså funksjoner av to variable. I to dimensjoner er laplaceoperatoren gitt ved:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Det er en nær sammenheng mellom analytiske og harmoniske funksjoner. Hvis en funksjon  $f = u + iv$  er analytisk så er  $u$  og  $v$  *harmoniske konjugerte*. Dette betyr at de er harmoniske og oppfyller *Cauchy-Riemann-ligningene*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Vi definerer et *område* til å være en sammenhengende åpen mengde. Hvis  $u(z)$  er en harmonisk funksjon på et område  $D$ , og hvis disken  $\{|z - z_0| < \rho\}$  er inneholdt i  $D$ , da gjelder:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

for  $0 < r < \rho$ . Dette kalles *middelverdiegenskapen*. Middelverdiegenskapen tas noen ganger for å være definisjonen av harmoniske funksjoner, og denne definisjonen er ekvivalent med definisjon jeg har brukt.

## 2.4 Poissonintegraler

La  $u(z)$  være en harmonisk funksjon på enhetsdisken  $\mathbb{D}$  som kan utvides kontinuerlig til den lukkede enhetsdisken  $\overline{\mathbb{D}}$ . Da vil  $u$  ha middelverdiegenskapen på enhets sirkelen:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) d\theta.$$

La nå  $\tau$  være *möbiusavbildingen*  $\tau(z) = (z - z_0)/(1 - \overline{z_0}z)$ , som sender  $z_0$  til 0. En möbiusavbildning er en *konform avbildning* av enhetsdisken på seg selv. Jeg refererer til [3], kap 11, for mer om konforme avbildninger. Randen av enhets sirkelen er invariant under  $\tau(z)$  slik at vi kan skrive  $\tau(e^{i\theta}) = e^{i\varphi}$ . Derivasjon gir da:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{i\theta} - z_0|^2} \equiv P_{z_0}(\theta),$$

og vi kaller  $P_{z_0}(\theta)$  *poissonkjerna* for punktet  $z_0 \in \mathbb{D}$ . Siden  $u(\tau^{-1}(z))$  også er harmonisk på  $\mathbb{D}$  får vi fra middelverdiegenskapen:

$$u(z_0) = u(\tau^{-1}(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau^{-1}(e^{i\varphi})) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{z_0}(\theta) u(e^{i\theta}) d\theta,$$

som kalles *Poissons integralformel*.



Jeg overfører nå disse resultatene til det øvre halvplan  $\mathbb{H}$ . Til det trenger vi funksjonen  $z(w) = i(1-w)/(1+w)$  som er en konform avbildning av enhetsdisken på det øvre halvplan. Denne avbildningen sender randen av enhets sirkelen til den reelle aksen ( $-1$  sendes til  $\infty$ ), dvs at hvis vi har et punkt  $w = e^{i\theta}$  ( $w \neq -1$ ) så er  $z(w) = t \in \mathbb{R}$ . Fikserer vi et punkt  $w_0 \in \mathbb{D}$  slik at  $z_0 = x_0 + iy_0 = z(w_0)$  så har vi at:

$$\frac{1}{2\pi} P_{w_0}(\theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{y_0}{(x_0 - t)^2 + y_0^2} \equiv P_{z_0}(t),$$

hvor  $P_{z_0}(t)$  kalles *poissonkjerna i det øvre halvplan*. Setter vi inn i integralformelen for enhetsdisken får vi *Poissons integralformel i det øvre halvplan*:

$$u(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{z_0}(t) u(t) dt,$$

forutsatt at  $u(z)$  er kontinuertlig på  $\overline{\mathbb{H}} \cup \{\infty\}$  og harmonisk på  $\mathbb{H}$ .

Poissonkjerna i det øvre halvplan kan også skrives på formen:

$$P_z(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{t - z} \right),$$

og vi ser at  $P_z(t)$  er harmonisk funksjon av  $z$  på  $\mathbb{H}$  for fikserte  $t \in \mathbb{R}$ . Videre har vi at  $P_z(t) \leq c_z/(1+t^2)$  hvor  $c_z$  er en konstant som avhenger av  $z$ . Dermed er  $P_z(t)$  i  $L^q$  for  $1 \leq q \leq \infty$  slik at funksjonen:

$$u(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t) f(t) dt$$

er harmonisk på  $\mathbb{H}$  hvis  $f(t) \in L^p$  for  $1 \leq p \leq \infty$ . Siden  $P_{z_0}(t) = P_{y_0}(x_0 - t)$  kan dette integralet uttrykkes som en konvolusjon:

$$u(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x - t) f(t) dt = (P_y * f)(x).$$

som reflekterer at rommet av harmoniske funksjoner i det øvre halvplan er invariant under translasjoner  $z \rightarrow z + x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Jeg skal i det følgende holde meg til det øvre halvplan slik at  $P_{z_0}(t)$  refererer til poissonkjerna der.

Jeg viser nå to viktige egenskaper ved poissonintegraler. Bevisene er hentet fra [2], kap 1.3.

**Teorem 2.3.** 1. Hvis  $1 \leq p < \infty$  og hvis  $f(x) \in L^p$ , da gjelder

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|P_y * f - f\|_p = 0.$$

2. La  $u(z)$  være en harmonisk funksjon i det øvre halvplan og la  $1 < p \leq \infty$ . Da er  $u(z)$  poissonintegralet av en funksjon i  $L^p$  hvis og bare hvis

$$\sup_y \|u(x, y)\|_p < \infty. \quad (7)$$

*Bevis.* Hovedingrediensen i beviset for punkt 1 er kontinuitet av translasjoner i  $L^p$  for  $1 \leq p < \infty$ . Det vil si at hvis  $f_t(x) = f(x - t)$  så har vi at  $\|f_t - f\|_p \rightarrow 0$  når  $t \rightarrow 0$ .

La  $f \in L^p$  for  $1 \leq p < \infty$ . Da er:

$$P_y * f(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(t)(f(x - t) - f(x))dt,$$

og ved Minkowskis ulikhet (for integraler) får vi:

$$\|P_y * f - f\|_p \leq \int_{-\infty}^{\infty} P_y(t)\|f_t - f\|_p dt,$$

fordi  $P_y \geq 0$ . For  $\delta > 0$  har vi nå:

$$\|P_y * f - f\|_p \leq \int_{|t| \leq \delta} P_y(t)\|f_t - f\|_p dt + \int_{|t| > \delta} P_y(t)\|f_t - f\|_p dt.$$

Siden  $\int P_y(t)dt = 1$  gir kontinuitet av translasjoner at det første leddet er vilkårlig lite hvis man velger  $\delta$  vilkårlig liten. Fra definisjonen av  $P_y(t)$  følger det at:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{|t| > \delta} P_y(t)dt = 0,$$

slik at:

$$\int_{|t| > \delta} P_y(t)\|f_t - f\|_p dt \leq 2\|f\|_p \int_{|t| > \delta} P_y(t)dt \rightarrow 0,$$

når  $y \rightarrow 0$ . Vi har da vist punkt 1.

At betingelsen i punkt 2 er nødvendig følger direkte av Minkowskis ulikhet. Anta nå at  $u(z)$  oppfyller betingelsen. Jeg bruker nå et estimat, vist i [2] s. 18, som følger av Hölders ulikhet:

$$|u(z)| \leq \left(\frac{2}{\pi y}\right)^{1/p} \sup_{\eta > 0} \|u(x, \eta)\|_{L^p}.$$

Dette viser at  $u(z)$  er begrenset på  $y > y_n > 0$ . Videre har vi at hvis en funksjon er harmonisk og begrenset på det øvre halvplan  $\mathbb{H}$  og kontinuerlig på  $\overline{\mathbb{H}}$  så er den lik poissonintegralet av sin grensefunksjon på den reelle akse (se [2] s. 17 for beviset på dette). Dette fører til at:

$$u(z + iy_n) = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x - t)u(t + iy_n)dt.$$

La nå  $y_n$  gå mot 0. Da er følgen  $f_n(t) = u(t + iy_n)$  begrenset i  $L^p$  hvis  $1 < p \leq \infty$ . Dette gir:

$$u(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(z + iy_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x - t)u(t + iy_n)dt = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x - t)f(t)dt,$$

hvor  $f \in L^p$ . Den siste overgangen følger av Banach-Alaoglu-teoremet som sier at den lukkede enhetsballen av dualen av et banachrom er kompakt i svak-stjerne-topologien, slik at følgen  $f_n(t)$  har et svak-stjerne-akkumulasjonspunkt  $f \in L^p$ .  $\square$

## 2.5 Ikke-tangensielle grenser og Fatous teorem

La  $\alpha > 0$  være et reelt tall og la  $\Gamma_\alpha(t)$  være sektorer i det øvre halvplan gitt ved:

$$\Gamma_\alpha(t) \equiv \{z \in \mathbb{H} : |x - t| < \alpha y\},$$

som “starter” i punktet  $t$  på den reelle aksene. La videre funksjonen  $u(z)$  være harmonisk i det øvre halvplan. Vi definerer da den *ikke-tangensielle grensen* av  $u(z)$  i punktet  $t$  på den reelle aksene til å være:

$$\lim_{\Gamma_\alpha(t) \ni z \rightarrow t} u(z),$$

forutsatt at grensen eksisterer. *Fatous teorem* er et svært viktig resultat som omhandler eksistensen av ikke-tangensielle grenser til harmoniske funksjoner og knytter dette sammen med teorien for poissonintegraler. Før jeg setter opp teoremet introduserer jeg noen funksjoner og resultater som jeg trenger i beviset. Resultatene er hentet fra [2] kap 1.4, og jeg refererer dit for beviser.

Hvis  $f$  er en lokalt integrerbar funksjon på  $\mathbb{R}$  kan vi definere *Hardy-Littlewoods maksimalfunksjon* slik:

$$Mf(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt,$$

hvor  $I$  er et intervall på  $\mathbb{R}$  og  $|I|$  er lengden av intervallet. Vi trenger også den *ikke-tangensielle maksimalfunksjonen* som er gitt ved:

$$u^*(t) \equiv \sup_{\Gamma_\alpha(t)} |u(z)|.$$

Hvis  $u(z)$  oppfyller (7) vet vi fra Teorem 2.3 at  $u(z)$  er poissonintegralet av en funksjon  $f(t) \in L^p$ . Da oppfyller  $u^*(t)$  og  $Mf(t)$  ulikheten:

$$u^*(t) \leq A_\alpha Mf(t), \quad (8)$$

og under de samme betingelsene på  $f(t)$  gjelder:

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p, \quad (9)$$

slik at  $Mf(t) \in L^p$ . Dette er en del av det berømte *Hardy-Littlewoods maksimalteorem*. Vi er da klare til å se på Fatous teorem. Jeg følger beviset i [2], s.30.

**Teorem 2.4.** *La  $u(z)$  være en harmonisk funksjon på det øvre halvplan  $\mathbb{H}$  og la  $1 < p \leq \infty$ . Hvis*

$$\sup_y \|u(x + iy)\|_p < \infty, \quad (10)$$

*da eksisterer den ikke-tangensielle grensa:*

$$\lim_{\Gamma_\alpha(t) \ni z \rightarrow t} u(z) = f(t)$$

*for nesten alle  $t$ , og  $u(z)$  er poissonintegralet av  $f(t)$ . Hvis  $1 < p < \infty$  har vi i tillegg at:*

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|u(x + iy) - f(x)\|_p = 0.$$

*Bevis.* Siden  $u(z)$  oppfyller (10) vet vi fra Teorem 2.3, punkt 2, at den er poissonintegralet av en funksjon i  $L^p$ . Anta at denne funksjonen er  $f(t)$ . At  $\|u(z) - f(x)\| \rightarrow 0$  når  $y \rightarrow 0$  under de gitte betingelsene følger fra Teorem 2.3, punkt 1. Vi trenger altså å vise at den ikke-tangensielle grensa til  $u(z)$  eksisterer og er lik  $f(t)$  nesten overalt. For  $z \in \Gamma_\alpha(t)$  definerer vi funksjonen:

$$\Omega_f(t) = \overline{\lim}_{z \rightarrow t} u(z) - \underline{\lim}_{z \rightarrow t} u(z),$$

og det er klart at den ikke-tangensielle grensa eksisterer i punktet  $t$  hvis  $\Omega_f(t) = 0$ . Fra (8) får vi  $\Omega_f(t) \leq 2u^*(t) \leq 2A_\alpha M f(t)$ , slik at  $\Omega_f(t)$  er begrenset nesten overalt.

*Chebyshevs ulikhet* sier at at hvis en funksjon  $g$  er i  $L^p$  for  $0 < p < \infty$  så gjelder:

$$|\{x \in \mathbb{R} : |g(x)| > \lambda\}| \leq \|g\|_p^p / \lambda^p.$$

Dette, sammen med (8) og (9), gir oss:

$$|\{t : \Omega_f(t) > \epsilon\}| \leq B_p \left( \frac{2}{\epsilon} \|f\|_p \right)^p.$$

La nå  $g \in L^p \cup C_0(\mathbb{R})$ . Da følger det av Teorem 2.3 at  $\Omega_g(t) = 0$  for alle  $t$ , slik at  $\Omega_f = \Omega_{f+g}$ . Hvis vi velger  $g$  slik at  $\|f + g\|_p \leq \epsilon^p$  får vi:

$$|\{t : \Omega_f(t) > \epsilon\}| = |\{t : \Omega_{f+g}(t) > \epsilon\}| \leq B_p \left( \frac{2}{\epsilon} \|f + g\|_p \right)^p \leq 2^p B_p \epsilon^p.$$

Dermed er  $\Omega_f(t) = 0$  og  $u(z)$  har ikke-tangensiell grense nesten overalt. Denne grensen er lik  $f(t)$  siden  $u(z)$  konvergerer i  $L^p$ -norm til  $f(t)$  ved Teorem 2.3, punkt 1.  $\square$

## 2.6 Konjugerte funksjoner

La  $f(z)$  være poissonintegralet av  $f(t) \in L^p$  for  $1 \leq p < \infty$ . Den *konjugerte funksjonen*  $\tilde{f}(z)$  er da definert:

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt \equiv Q_y * f(x),$$

hvor  $f(z)$  kan være en kompleks funksjon. Hvis den er reell vil  $\tilde{f}(z)$  være dens harmoniske konjugerte. Dette er fordi funksjonen

$$Q_y(t) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + y^2},$$

er den harmoniske konjugerte av poissonkjerna, og vi kaller den derfor for den *konjugerte kjerna*. Dermed blir:

$$P_y(x-t) + iQ_y(x-t) = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{t-z}$$

analytisk i det øvre halvplan og det følger at  $f + i\tilde{f}$  også er det. Integralet som definerer  $\tilde{f}$  vil for øvrig alltid konvergere siden  $Q_y \in L^q$  for alle  $q > 1$ .

Med normaliseringen  $\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{f}(x + iy) = 0$  er  $\tilde{f}$  også poissonintegralet av en  $L^p$ -funksjon. Fra Fatous teorem vet vi da at dens ikke-tangensielle grense vil eksistere. Den er da gitt ved:

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow 0} Q_y * f(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt,$$

som gjerne kalles *hilberttransformen* av  $f$ . Denne transformen er meget sentral i denne oppgaven og jeg diskuterer den for seg i seksjon 3. Integranden har som vi ser en singularitet i punktet  $t = x$ . Notasjonen  $P$  betyr at integralet skal evalueres som en *Cauchy-prinsipal-verdi*:

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{x-\delta} \frac{f(t)}{x-t} dt + \int_{x+\delta}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt \right).$$

## 2.7 Hardyrom

Jeg gir her først en generell introduksjon av hardyrom, basert på [2], kap 2. Så følger et viktig resultatet om hardyrommet  $H^2$  hvor jeg har fulgt beviset i [1], s. 367-368.

La  $0 < p < \infty$  og la  $f(z)$  være en analytisk funksjon på det øvre halvplan  $\mathbb{H}$ . Vi sier da at  $f(z)$  er i rommet  $H^p$  hvis den tilfredsstiller:

$$\|f\|_{H^p}^p \equiv \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx < \infty.$$

For  $p = \infty$  definerer vi  $H^\infty$  til å bestå av analytiske og begrensede funksjoner på  $\mathbb{H}$ , altså funksjoner som er analytiske på  $\mathbb{H}$  og tilfredsstiller:

$$\|f\|_{H^p} \equiv \sup_{z \in \mathbb{H}} |f(z)| < \infty.$$

Rommene  $H^p$  kalles gjerne *hardyrom*, oppkalt etter G.H. Hardy. Det er også vanlig å definere hardyrommene på enhetsdisken og teorien om hardyrom på enhetsdisken og i det øvre halvplan er nært knyttet til hverandre (se [2], kap 2.1). Jeg skal her holde meg til det øvre halvplan og når jeg skriver  $H^p$  er det underforstått at det er snakk om  $H^p$  der.

For en funksjon  $f(z) \in H^p$ ,  $0 < p < \infty$ , eksisterer den ikke-tangensielle grensen i nesten alle punkter på den reelle aksene. Denne grensefunksjonen, som vi skriver  $f(x)$ , er i  $L^p$ . For  $p > 1$  følger dette fra Fatous teorem. At dette også stemmer for  $0 < p \leq 1$  skal jeg ikke få bruk for her så jeg unnlater å bevise det. Det viser seg også at  $H^p$ -normen til  $f(z)$  er lik  $L^p$ -normen til  $f(x)$ :

$$\|f(z)\|_{H^p} = \|f(x)\|_p,$$

slik at vi kan se på  $H^p$  som et underrom av  $L^p$ . For  $p > 1$  har den ikke-tangensielle grensen av en  $H^p$ -funksjon en enkel karakterisering, gitt av det neste korollaret som følger direkte fra resultatene om poissonintegraler i Teorem 2.3.

**Korollar 2.5.** La  $p > 1$  og la  $f(x) \in L^p$ . Da er  $f(x)$  den ikke-tangensielle grensen av en funksjon i  $H^p$  hvis og bare hvis dens poissonintegral, gitt ved:

$$f(z) = P_y * f(x),$$

er analytisk på  $\mathbb{H}$ . Poissonintegralet  $f(z)$  er da den korresponderende  $H^p$ -funksjonen.

Dette resultatet gjelder også for  $p = 1$ , men det følger ikke av Teorem 2.3. Siden funksjoner i  $H^p$  er analytiske er deres real- og imaginærdeler harmoniske konjugerte. Det viser seg da at disse harmoniske funksjonenes ikke-tangensielle grenser er hilbert-transformpar. Jeg kommer tilbake til dette i seksjon 3.

Rommet  $H^2$  spiller en helt sentral rolle i denne oppgaven på grunn av et resultat som knytter det sammen med fourieranalysen.  $H^2$  er nemlig avbildningen av rommet  $L^2(\mathbb{R}^+)$  under fouriertransformen. Her er  $\mathbb{R}^+$  den positive delen av den reelle aksene. Dette resultatet gjør at vi kan identifisere noen viktige funksjoner i optikken som elementer i  $H^2$ . Hovedingrediensen i beviset er Plancherels teorem om fouriertransformasjon av funksjoner i  $L^2$ .

La  $g(t)$  være en funksjon i  $L^2$  som er 0 for  $t < 0$ , altså en funksjon i  $L^2(\mathbb{R}^+)$ , og la funksjonen  $f(z)$  være gitt ved:

$$f(z) = \int_0^\infty g(t)e^{itz} dt.$$

Anta først at  $f(z) \in H^2$ . Da vil den ha en ikke-tangensiell grense i  $L^2$  som er lik fouriertransformen av  $g(t)$ :

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x + iy) = \int_0^\infty g(t)e^{itx} dt.$$

Jeg trenger dermed å vise at  $f(z)$  er i  $H^2$ , altså i rommet av analytiske og kvadratisk integrerbare funksjoner i det øvre halvplan. Å vise at  $f(z)$  er analytisk i  $\mathbb{H}$  kan gjøres ved å se på en lukket kurve, og anvende Fubinis og Moreras teoremer. At  $H^2$ -normen til  $f(z)$  er uniformt begrenset i  $\mathbb{H}$  vises ved å omskrive  $f(z)$  slik:

$$f(x + iy) = \int_0^\infty g(t)e^{-ty}e^{itx} dt.$$

Ved å se på  $y$  som en (positiv) konstant, og anvende punkt 2 i Plancherels teorem, får vi:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |f(x + iy)|^2 dx = \int_0^\infty |g(t)|^2 e^{-2ty} dt \leq \int_0^\infty |g(t)|^2 dt,$$

og siden  $g(t) \in L^2$  følger det at  $f(z) \in H^2$ . Jeg setter dette opp som et lemma.

**Lemma 2.6.** La  $g(t)$  være en funksjon i  $L^2$  som er lik 0 for  $t < 0$ , og la  $f(x)$  være fouriertransformen av  $g(t)$ . Da er  $f(z) \in H^2$ .

### 3 Hilberttransformen

Jeg gir her en fremstilling av teorien om hilberttransformen og den endelige hilberttransformen basert på fremstillingene i [12], [13] og [2]. I seksjon 3.3 har jeg modifisert inversjonsformelen for den endelige hilberttransformen til en form som er spesielt nyttig i seksjon 6.

#### 3.1 Hilberttransformen på den reelle aksen

I delseksjon 2.6 så vi hvordan teorien for poissonintegraler ledet til at den konjugerte funksjonen av en  $L^p$ -funksjon var gitt som en hilberttransform. Jeg bruker nå notasjonen  $\mathcal{H}f(x)$  for hilberttransformen av en funksjon  $f(x)$ :

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

Det følgende svært viktige teoremet kalles *Marcel Riesz teorem* og sier oss at hvis en funksjon er i  $L^p$  for  $1 < p < \infty$ , så er dens hilberttransform også i  $L^p$ . Jeg viser nå at dette gjelder for  $p = 2$  som er tilstrekkelig i denne oppgaven, og henviser til [2] s. 110-113 for hele det omfattende beviset.

**Teorem 3.1.** *La  $f \in L^p$  for  $1 < p < \infty$ . Da er:*

$$\|\mathcal{H}f\|_p \leq A_p \|f\|_p,$$

hvor  $A_p$  er en konstant som kun er avhengig av  $p$ .

*Bevis.* Vi husker at funksjonene  $P_y$  og  $Q_y$  er henholdsvis poissonkjerna og den konjugerte poissonkjerna. For  $y > 0$  er funksjonen  $K_y = P_y + iQ_y = -1/(\pi i(t + iy))$  i  $L^2$ . Merk at denne har en enkel singularitet i  $t = -iy$ . Dens fouriertransform:

$$\hat{K}_y(s) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ist}}{t + iy} dt$$

kan da evalueres med Cauchys teorem og residyteoremet, og dette gir:

$$\hat{K}_y(s) = \begin{cases} 2e^{sy}, & s < 0, \\ 0, & s > 0. \end{cases}$$

Siden  $\hat{P}_y(s) = e^{|s|y}$ , får vi:

$$\hat{Q}_y(s) = \begin{cases} -ie^{|s|y}, & s < 0, \\ ie^{|s|y}, & s > 0. \end{cases}$$

Hvis  $f \in L^2$  gir Plancherels teorem og konvolusjonsteoremet at:

$$\|Q_y * f\|_2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{Q_y * f}\|_2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{Q}_y \hat{f}\|_2.$$

Vi ser at  $\hat{Q}_y \rightarrow 1$  når  $y \rightarrow 0$  og dette gir:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \|\hat{Q}_y \hat{f}\|_2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Siden  $Q_y * f \rightarrow \mathcal{H}f$  i  $L^2$ -norm når  $y \rightarrow 0$  følger det at:

$$\|\mathcal{H}f\|_2 = \|f\|_2.$$

□

Siden  $f$  og  $\mathcal{H}f$  er konjugerte funksjoner blir  $f + i\mathcal{H}f$  analytisk i det øvre halvplan. Hvis  $f$  da er i  $L^p$  for  $1 < p < \infty$  følger det fra Marcel Riesz teorem at  $f + i\mathcal{H}f$  er i  $H^p$ . Et annet standard resultat om hilberttransformen er at den er sin egen invers med motsatt foregn slik at  $f = -\mathcal{H}^2 f$ . Dette er vist f.eks i [7] s.119-120. Vi kan dermed reformulere Marcel Riesz teorem slik:

**Teorem 3.2.** *Anta at  $u \in L^p$  for  $1 < p < \infty$ , og at  $v$  er dens harmoniske konjugerte. Da er  $u + iv \in H^p$ , og:*

$$\begin{aligned} v &= \mathcal{H}u, \\ u &= -\mathcal{H}v. \end{aligned}$$

Hilberttransformen knytter altså sammen realdelen og imaginærdelen til funksjoner i  $H^p$  for  $1 < p < \infty$ , og det er gjennom dette at den har en sentral rolle i denne oppgaven. Vi kaller gjerne slike  $u$  og  $v$  for *hilberttransformpar*.

Det følgende teoremet blir helt sentralt i utledningen av en inversjonsformel for den endelige hilberttransformen, og allerede i beviset for dette får vi bruk for Marcel Riesz teorem. Jeg følger beviset i [12] s.169-170.

**Teorem 3.3.** *La funksjonene  $\phi_1(x)$  og  $\phi_2(x)$  tilhøre henholdsvis  $L^{p_1}$  og  $L^{p_2}$ . Anta at  $p_1$  og  $p_2$  oppfyller:*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1.$$

Da gjelder:

$$\mathcal{H}(\phi_1 \mathcal{H}\phi_2 + \phi_2 \mathcal{H}\phi_1) = \mathcal{H}\phi_1 \mathcal{H}\phi_2 - \phi_1 \phi_2. \quad (11)$$

*Bevis.* Vi vet fra teorien om konjugerte funksjoner i seksjon 2.6 at:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_1}{t-z} dt \\ \Phi_2(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_2}{t-z} dt \end{aligned}$$

er analytiske på det øvre halvplan har ikke-tangensielle grenser henholdsvis  $\phi_1 + i\mathcal{H}\phi_1$  og  $\phi_2 + i\mathcal{H}\phi_2$ . Siden  $\phi_1 \in L^{p_1}$  og  $\phi_2 \in L^{p_2}$  har vi at  $\Phi_1 \in H^{p_1}$  og  $\Phi_2 \in H^{p_2}$  ved Marcel



Riesz teorem. Definisjonen av  $H^p$ -funksjoner gir oss da:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_1(x + iy)|^{p_1} dx < K_1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_2(x + iy)|^{p_2} dx < K_2.$$

Hvis vi setter  $\Phi = \Phi_1\Phi_2$  og:

$$\frac{1}{r} \equiv \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2},$$

hvor  $r > 1$ , får vi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x + iy)|^r dx < K_1^{r/p_1} K_2^{r/p_2},$$

slik at  $\Phi \in H^r$ . Da gjelder Marcel Riesz teorem også for  $\Phi$ , og spesielt er realdelen av  $\Phi$  lik minus hilberttransformen av imaginærdelen. Fra de ikke-tangensielle grensene til  $\Phi_1$  og  $\Phi_2$  får vi da:

$$\phi_1\phi_2 - \mathcal{H}\phi_1\mathcal{H}\phi_2 = -\mathcal{H}(\phi_1\mathcal{H}\phi_2 + \phi_2\mathcal{H}\phi_1),$$

som er ekvivalent med (11). □

### 3.2 Den endelige hilberttransformen

Den *endelige hilberttransformen* er definert likt som den vanlige hilberttransformen bortsett fra at integralet er over et endelig intervall:

$$g(x') \equiv \frac{1}{\pi} P \int_a^b \frac{f(t')}{x' - t'} dt'.$$

Ved å gjøre variabelskiftene  $x = (2x' - a - b)/(b - a)$  og  $t = (2t' - a - b)/(b - a)$  kan vi isteden ta integralet over intervallet  $[-1, 1]$  uten tap av generalitet. Vi skal altså studere:

$$g(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{x - t} dt \equiv \mathcal{T}f(x). \quad (12)$$

Resultatene og utledningene i det som følger er hentet fra [13], s.80-82.

Enkelte av den endelige hilberttransformens egenskaper kan utledes direkte fra hilberttransformens egenskaper. F.eks kan vi ved å anta at  $f(t)$  er lik 0 utenfor  $[-1, 1]$  slutte at Teorem 3.3 også gjelder hvis vi bytter ut  $\mathcal{H}$  med den endelige hilberttransformen. Under de samme betingelsene på funksjonene  $\phi_1$  og  $\phi_2$  gjelder altså:

$$\mathcal{T}(\phi_1\mathcal{T}\phi_2 + \phi_2\mathcal{T}\phi_1) = \mathcal{T}\phi_1\mathcal{T}\phi_2 - \phi_1\phi_2. \quad (13)$$

I andre tilfeller trenger den endelige hilberttransformen spesialbehandling, og en ting som gjør den mer komplisert enn den vanlige hilberttransformen er at den ikke har noen entydig invers i  $L^p$  ( $p > 1$ ). Den endelige hilberttransformen av funksjonen  $1/\sqrt{1-t^2}$  er

nemlig lik 0 for  $x \in [-1, 1]$ . Dette kan vises å gjøre variabelskiftet  $t = (1 - y^2)/(1 + y^2)$  hvor  $y > 0$ . For  $x \in [-1, 1]$  får vi da:

$$\mathcal{T}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) = -\frac{2}{\pi}P \int_0^\infty \frac{dy}{(1-x) - (1+x)y^2} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln \left| \frac{y\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{y\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right|_0^\infty = 0.$$

Som en konsekvens av dette får vi at:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\sqrt{1-t^2}) &= -\frac{1}{\pi}P \int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2} t-x} dt \\ &= -\frac{1}{\pi}P \int_{-1}^1 \frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2} t-x} dt \\ &= -\frac{1}{\pi}P \int_{-1}^1 \frac{x^2-t^2}{\sqrt{1-t^2} t-x} dt \\ &= \frac{2}{\pi}P \int_{-1}^1 \frac{x+t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{1}{\pi}P \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-t^2}} dt = x, \end{aligned}$$

for  $x \in [-1, 1]$ .

Vi skal nå lete etter en inversjonsformel for den endelige hilberttransformen, altså et eksplisitt uttrykk for  $f(x)$  i definisjonen (12), under antagelsen at  $g(x) \in L^p([-1, 1])$ . Vi setter nå  $f(x)$  lik  $\phi_1$ , og antar at den er i  $L^{p_1}([-1, 1])$  for  $p_1 > 1$ . Videre setter vi  $\phi_2 = \sqrt{1-x^2}$ , som er i  $L^{p_2}([-1, 1])$  for alle  $p_2 > 1$ . Da gir (13):

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(tf(t) + \sqrt{1-t^2}g(t)) &= \mathcal{T}(t\phi_1(t) + \phi_2g(t)) \\ &= \mathcal{T}(\phi\mathcal{T}\phi_2 + \phi_2\mathcal{T}\phi_1) \\ &= \mathcal{T}\phi_1\mathcal{T}\phi_2 - \phi_1\phi_2 \\ &= xg(x) - \sqrt{1-x^2}f(x). \end{aligned}$$

I tillegg har vi at:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(tf(t)) &= \frac{1}{\pi}P \int_{-1}^1 \frac{t-x+x}{x-t} f(t) dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) dt + xg(x) \\ &= -C + xg(x). \end{aligned}$$

Setter vi sammen dette får vi:

$$\sqrt{1-x^2}f(x) = C - \frac{1}{\pi}P \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}g(t)}{x-t} dt,$$

hvor konstanten  $C$  kan ha en hvilken som helst verdi siden  $\mathcal{T}(1/\sqrt{1-x^2}) = 0$ . Dermed har vi funnet en formel for inversjon av den endelige hilberttransformen. Betydningen

av denne er at hvis det eksisterer en invers i  $L^p([-1, 1])$  for  $p > 1$  så vil den ha denne formen, men vi har ingen garanti for at en slik eksisterer. Jeg setter dette opp som et teorem som jeg kaller *inversjonsteoremet for den endelige hilberttransformen*.

**Teorem 3.4.** *La  $g(x)$  være den endelige hilberttransformen av  $f(x)$  på intervallet  $-1 \leq x \leq 1$ , gitt ved:*

$$g(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{x-t},$$

og la  $g(x) \in L^p([-1, 1])$  for  $p > 1$ . Hvis det finnes en invers  $f(x) \in L^p([-1, 1])$  vil den være på formen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left( C - \frac{1}{\pi} P \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} g(t) dt}{x-t} \right),$$

for  $x \in [-1, 1]$ .

### 3.3 Den endelige hilberttransformen av odde funksjoner på symmetriske intervaller

I forrige seksjon fant jeg en inversjonsformel for den endelige hilberttransformen på intervallet  $[-1, 1]$ , gitt i Teorem 3.4. Jeg benytter nå dette resultatet til å finne en inversjonsformel for den endelige hilberttransformen av en odde funksjon  $f(x)$  på to symmetriske intervaller:  $I = [a, b]$  og  $-I = [-b, -a]$ . Ved å utnytte symmetrien  $f(x) = -f(-x)$  kan man omforme den endelige hilberttransformen på  $I \cup -I$  slik:

$$g(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{(I \cup -I)} \frac{f(x)}{t-x} dx = \frac{2}{\pi} P \int_I \frac{x f(x)}{t^2 - x^2} dx,$$

for  $t \in I \cup -I$ . Ved å gjøre variabelskiftene  $\xi = (2x^2 - a^2 - b^2)/(b^2 - a^2)$  og  $\eta = (2t^2 - a^2 - b^2)/(b^2 - a^2)$  får vi:

$$g(t) = \frac{2}{\pi} P \int_I \frac{x f(x)}{t^2 - x^2} dx = \frac{2}{\pi} P \int_{-1}^1 \frac{x f(x(\xi))}{\frac{b^2 - a^2}{2}(\eta - \xi)} \frac{b^2 - a^2}{4x} d\xi = \frac{1}{\pi} P \int_{-1}^1 \frac{f(x(\xi))}{\eta - \xi} d\xi = g(t(\eta)),$$

som er en endelig hilberttransform på  $[-1, 1]$ . Dermed kan vi bruke inversjonsformelen fra Teorem 3.4, som gir:

$$f(x(\xi)) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \left( C - \frac{1}{\pi} P \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2} g(t(\eta)) dt}{\xi - \eta} \right).$$

Vi skifter nå tilbake til variablene  $x$  og  $t$ . Spesielt bruker jeg at:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\xi^2} &= \frac{2i}{b^2 - a^2} \sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}, \\ \sqrt{1-\eta^2} &= \frac{2i}{b^2 - a^2} \sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}. \end{aligned}$$

Dette gir:

$$f(x)\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)} = -\frac{2}{\pi}P \int_a^b \frac{t\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}}{x^2 - t^2} g(t) dt + C'.$$

Jeg setter dette resultatet opp som et korollar av inversjonsteoremet i forrige seksjon.

**Korollar 3.5.** *La funksjonen  $g(t) \in L^p(I \cup -I)$  være den endelige hilberttransformen av  $f(x)$  på  $I \cup -I$ :*

$$g(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{(I \cup -I)} \frac{f(x)}{t - x} dx,$$

for  $|t| \in I$ , og la  $f(x)$  være en odde funksjon på  $I \cup -I$ . Hvis det finnes en invers  $f(x) \in L^p(I \cup -I)$  vil den være på formen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \left( -\frac{2}{\pi} P \int_I \frac{t\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}}{x^2 - t^2} g(t) dt + C' \right),$$

for  $|x| \in I$ .

Vi skal i seksjon 6 være ute etter å finne parametriseringer av imaginærdelen til hermitske  $H^2$ -funksjoner på et intervall. Dette korollet blir helt essensielt i den sammenhengen på grunn av at hermitske funksjoner har odde imaginærdeler.

## 4 Bakgrunnsstoff fra optikken

Jeg introduserer her standard resultater fra optikken hovedsaklig basert på [15], [16], [4], kap 7 og 9, og [6], kap 2.

### 4.1 Maxwells ligninger

Maxwells ligninger oppsummerer de fundamentale sammenhengene i elektromagnetismen, altså hvordan de elektriske og magnetiske feltene oppfører seg og forholder seg til hverandre. Jeg bruker små bokstaver for størrelsene i *tidsdomenet* og store bokstaver for størrelsene i *frekvensdomenet*, altså de fouriertransformerte av størrelsene. Maxwells ligninger i vakuum ser da slik ut:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{e} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{b} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, \end{aligned}$$

hvor  $\mathbf{e}$  er det elektriske feltet,  $\mathbf{b}$  er det magnetiske feltet,  $\rho$  er ladningstetthet per volumenheter og  $\mathbf{j}$  er volumstrømningstetthet.  $\epsilon_0$  og  $\mu_0$  er konstanter som kalles henholdsvis permittiviteten av fritt rom og permeabiliteten av fritt rom.

Når et medium utsettes for et elektrisk felt blir det *polarisert*. Dette betyr at molekylene tenderer til å stille seg opp i den retningen feltet peker. Et polarisert medium produserer et eget elektrisk felt, altså et felt i tillegg til det feltet som ga polariseringen. Et passende mål på dette er *dipolmoment per volumenhet*  $\mathbf{p}$ , et vektorfelt som vi kaller *polarisering*. Et lignende fenomen forekommer når et medium blir utsatt for et magnetisk felt. Vi sier da at mediet blir *magnetisert*, og vi måler dette med *magnetisk dipolmoment per volumenhet*  $\mathbf{m}$ , kalt *magnetisering*. Det er nå vanlig å innføre størrelsene  $\mathbf{d}$  og  $\mathbf{h}$  som er gitt ved:

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \epsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}, \\ \mathbf{h} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b} - \mathbf{m}.\end{aligned}\tag{14}$$

Størrelsen  $\mathbf{d}$  kalles *elektrisk forskyving*, mens størrelsen  $\mathbf{h}$  noen ganger kalles magnetisk felt. Jeg har imidlertid valgt å bruke det navnet på  $\mathbf{b}$  siden jeg synes det er mest oversiktelig, og  $\mathbf{h}$  får da ikke noe eget navn. Fordelen med å innføre disse størrelsene er at man elegant kan omforme Maxwells ligninger til en form som bare inneholder *fri* ladning  $\rho_f$  og *fri* strøm  $\mathbf{j}_f$ . Dette er den ladningen og strømmen som *ikke* er på grunn av polarisering eller magnetisering. Ligningene blir da seende slik ut:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{d} &= \rho_f, \\ \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{h} &= \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{15}$$

For *lineære medier* kan sammenhengen mellom polariseringa  $\mathbf{p}$  og det elektriske feltet  $\mathbf{e}$  uttrykkes som en konvolusjon:

$$\mathbf{p}(t) = \epsilon_0 (x_e(t) * \mathbf{e}(t)),\tag{16}$$

og tilsvarende kan sammenhengen mellom magnetiseringa  $\mathbf{m}$  og feltet  $\mathbf{h}$  uttrykkes:

$$\mathbf{m}(t) = x_m(t) * \mathbf{h}(t).\tag{17}$$

Fouriertransformerer vi disse får vi, fra konvolusjonsteoremet, at:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \\ \mathbf{M} &= \chi_m \mathbf{H},\end{aligned}$$

hvor  $\chi_e$  og  $\chi_m$  er de fouriertransformerte av  $x_e(t)$  og  $x_m(t)$ , og kalles henholdsvis *elektrisk og magnetisk susceptibilitet* (i frekvensdomenet). Fouriertransformerer vi sammenhengene i (14) og setter inn dette får vi de lineære sammenhengene:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \equiv \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \equiv \mu \mathbf{H},\end{aligned}\tag{18}$$

hvor  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$  kalles *permittivitet* (i frekvensdomenet) og  $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$  kalles *permeabilitet* (i frekvensdomenet). Disse er funksjoner av frekvensen  $\omega$  og beskriver hvordan et lineært medium reagerer på henholdsvis elektriske og magnetiske felt.

Fouriertransformerer vi curl-ligningene i (15) og setter inn sammenhengene i (18) får vi, for lineære medier i områder uten fri ladning eller strøm:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega\epsilon\mathbf{E}.\end{aligned}\tag{19}$$

## 4.2 Elektromagnetiske bølger og brytning

Lys er som vi vet elektromagnetiske bølger. Det vil si at lys har elektriske og magnetiske felt som kan uttrykkes som en lineærkombinasjon av *monokromatiske plane bølger*:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.\end{aligned}$$

Her er  $\mathbf{k}$  *bølgevektoren*, som peker i den retningen bølgene beveger seg. Vi bruker denne komplekse representasjonen av feltene på grunn av at den er enklere å regne med. De fysiske feltene er realdelen av disse. Grunnen til at vi kaller dem monokromatiske er at de er tilsvarende lys med konstant vinkelfrekvens  $\omega$ , altså en spesiell farge i spekteret. Videre har vi at feltene er avhengige av hverandre og fra Maxwells ligninger får vi relasjonen:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{n}{c}(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})),$$

slik at  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  og  $\mathbf{k}$  er vinkelrette på hverandre. Her er  $\hat{\mathbf{k}}$  er enhetsvektoren i  $\mathbf{k}$ -retning,  $c$  er lysfarten og  $n$  er brytningsindeksen til mediet bølgene er i. Brytningsindeksen til et medium er definert ved sammenhengen:

$$n^2 = \epsilon_r \mu_r,$$

hvor  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$  kalles *relativ permittivitet* og  $\mu_r = \mu/\mu_0$  kalles *relativ permeabilitet*. I naturlige medier er brytningsindeksen gitt ved den positive roten av  $\epsilon_r \mu_r$ . Jeg kommer tilbake til dette. Generelt er både  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$  og  $n$  komplekse størrelser med positive imaginærdeler, som svarer til at vi alltid har tap i passive, fysiske medier. La oss for nå anta at vi jobber med tapsfrie medier slik at disse størrelsene er reelle.

Når elektromagnetiske bølger går fra et medium til et annet forandrer de retning og vi sier at de blir brutt. Hvor stor denne brytningen er avhenger av hvor stor forskjellen mellom brytningsindeksene til de to mediene er. Vi ser nå på elektromagnetiske bølger som kommer fra et medium med brytningsindeks  $n_1$  og treffer et medium med brytningsindeks  $n_2$ . La de innfallende bølgene ha innfallsvinkel  $\theta_I$  med linja vinkelrett på brytningsflata. Disse bølgene vil gi opphav til to nye bølger: reflekterte bølger som reflekteres tilbake fra brytningsflaten og transmiterte bølger som fortsetter inn i det andre

mediet. La disse ha vinkler henholdsvis  $\theta_R$  og  $\theta_T$  med linjen vinkelrett på brytningsplanet. Ved hjelp av grensebetingelsene for feltene i brytningsplanet finner man disse sammenhengene mellom  $\theta_I$ ,  $\theta_R$  og  $\theta_T$ :

$$\theta_I = \theta_R,$$

som kalles *refleksjonsloven*, og

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (20)$$

som kalles *Snells lov*.

### 4.3 Fresnels ligninger

Jeg utleder nå generelle sammenhenger mellom feltene til de innfallende, reflekterte og transmitterte bølgene, kalt *Fresnels ligninger*. Utledningen er hentet fra [15], og baserer seg på kontinuitet av de elektromagnetiske feltene i brytningsflata.

Anta at  $xz$ -planet er brytningsflaten mellom to medier og at bølgevektoren til de innfallende bølgene ligger i  $yz$ -planet:  $\mathbf{k}_I = (0, k_y, k_z)$ . Det følger da fra refleksjonsloven at bølgevektoren til de reflekterte bølgene blir  $\mathbf{k}_R = (0, k_y, -k_z)$ . Vi antar videre at vi har *S-polarisering*, som betyr at  $\mathbf{E}$  peker i  $x$ -retning og kan skrives  $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ . Amplitudene til de reflekterte og de transmitterte bølgene kan da skrives  $rE$  og  $tE$ , hvor  $r$  kalles *refleksjonskoeffisienten* og  $t$  kalles *transmisjonskoeffisienten*. Disse koeffisientene angir hvor stor andel av feltene som blir henholdsvis reflektert og transmittert. Grensebetingelsene for de elektromagnetiske feltene gir oss at tangensialkomponenten til det elektriske feltet er kontinuerlig i brytningsflaten. Siden de tre elektriske feltene alle er tangensielt på overflaten får vi:

$$E + rE = tE,$$

som fører til denne sammenhengen mellom refleksjonskoeffisienten og transmisjonskoeffisienten:

$$1 + r = t.$$

Hvis vi setter inn feltene til de monokromatiske plane bølgene i den første av curl-ligningene i (19), får vi:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H}.$$

Denne ligningen, innsatt  $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ , gir:

$$0\hat{\mathbf{x}} + Ek_z\hat{\mathbf{y}} - Ek_y\hat{\mathbf{z}} = \omega\mu\mathbf{H},$$

hvor  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  og  $\hat{\mathbf{z}}$  er enhetsvektorene i de respektive retningene. Dette gir at  $\mathbf{H}$  for de innfallende bølgene blir:

$$\mathbf{H}_I = \left(0, \frac{Ek_z}{\omega\mu}, \frac{-Ek_y}{\omega\mu}\right).$$

La nå slike bølger komme fra vakuum (som har  $\epsilon_r = \mu_r = n = 1$ ) og treffe et medium med permittivitet  $\epsilon$  og permeabilitet  $\mu$ . Da blir  $\mathbf{H}$  for de reflekterte og transmitterte bølgene:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_R &= \left(0, \frac{-rEk_z}{\omega\mu_0}, \frac{-rEk_y}{\omega\mu_0}\right), \\ \mathbf{H}_T &= \left(0, \frac{tEk_{Tz}}{\omega\mu}, \frac{-tEk_{Ty}}{\omega\mu}\right),\end{aligned}$$

hvor  $\mathbf{k}_{Tz} = (0, k_{Ty}, k_{Tz})$  er bølgevektoren til de transmitterte bølgene. Siden tangensialkomponenten av  $\mathbf{H}$  er kontinuerlig i brytningsflaten får vi at summen av  $y$ -komponentene til de innfallende og de reflekterte bølgene må være lik  $y$ -komponenten til de transmitterte bølgene. Dette gir sammenhengen:

$$\frac{Ek_z}{\omega\mu_0} + \frac{-rEk_z}{\omega\mu_0} = \frac{-tEk_{Tz}}{\omega\mu}.$$

Ved å kombinere dette resultatet med sammenhengen  $1 + r = t$  får vi dette uttrykket for refleksjonskoeffisienten:

$$r = \frac{\mu k_z - \mu_0 k_{Tz}}{\mu k_z + \mu_0 k_{Tz}} = \frac{\mu_r k_z - k_{Tz}}{\mu_r k_z + k_{Tz}}, \quad (21)$$

som sammen med  $1 + r = t$  kalles *Fresnels ligninger*.

Ved motsatt polarisering, såkalt *P-polarisering*, er det  $\mathbf{H}$  som peker i  $x$ -retning. Utledingen av Fresnels ligninger vil da bli helt lik bortsett fra at  $\epsilon$  og  $\mu$  bytter rolle. Vi får spesielt:

$$r = \frac{\epsilon_r k_z - k_{Tz}}{\epsilon_r k_z + k_{Tz}}.$$

#### 4.4 Kramers-Kronig-relasjonene

Som jeg har vært inne på er både permittiviteten  $\epsilon$  og permeabiliteten  $\mu$  funksjoner av frekvensen. Dette impliserer at brytningsindeksen også varierer med frekvensen slik at de monokromatiske plane bølgene for forskjellige frekvenser ikke nødvendigvis brytes likt. Dette fenomenet kalles *dispersjon*. I tillegg er både  $\epsilon$  og  $\mu$  komplekse størrelser hvor imaginærdelene er ikke-negative og svarer til tapet eller absorpsjonen som alltid er til stede i passive medier. I begynnelsen av det forrige århundret utledet H.A. Kramers og R. de L. Kronig generelle sammenhenger mellom dispersjonen og absorpsjonen, altså sammenhenger mellom real- og imaginærdelene til  $\epsilon$  og  $\mu$ . Jeg utleder nå disse ved hjelp av kausalitet og resultatene i seksjon 2.7 og 3.1. I neste delseksjon viser jeg også at det finnes tilsvarende sammenhenger for brytningsindeksen  $n$ .

Sammenhengene lar seg enklest uttrykke ved susceptibilitetene  $\chi_e$  og  $\chi_m$ . Fra seksjon 4.1 vet vi at  $\chi_e$  og  $\chi_m$  er fouriertransformene av de reelle funksjonene  $x_e(t)$  og  $x_m(t)$ :

$$\begin{aligned}\chi_e(\omega) &= \epsilon_r - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) e^{it\omega} dt, \\ \chi_m(\omega) &= \mu_r - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_m(t) e^{it\omega} dt,\end{aligned}$$



hvor  $x_e(t)$  og  $x_m(t)$  gir dynamikken mellom polariseringa, magnetiseringa og de respektive feltene som konvolusjoner, gitt i (16) og (17). Siden polariseringa og magnetiseringa på et tidspunkt ikke kan være avhengig av de elektromagnetiske feltene på et senere tidspunkt, er  $x_e(t) = x_m(t) = 0$  for  $t < 0$ . Det er dette som gjerne kalles *kausalsprinsippet*. Det viser seg videre at  $\chi_e$  og  $\chi_m$  er i  $L^2$ . Jeg henviser til [5], kap 9, for en diskusjon om hvorfor det er slik. Det følger av dette at også  $x_e(t)$  og  $x_m(t)$  er i  $L^2$  ved Plancherels teorem. Fra lemma 2.6 får vi da at  $\chi_e$  og  $\chi_m$  er elementer i hardyrommet  $H^2$ :

$$\begin{aligned}\chi_e(\omega) &= \int_0^\infty x_e(t)e^{it\omega} dt \in H^2, \\ \chi_m(\omega) &= \int_0^\infty x_m(t)e^{it\omega} dt \in H^2.\end{aligned}$$

Dermed gjelder Marcel Riesz teorem for  $\chi_e$  og  $\chi_m$ . Spesielt vil deres real- og imaginærdeler være hilberttransformpar, og det er dette som er *Kramers-Kronig-relasjonene*:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \chi_e &= \mathcal{H}\operatorname{Re} \chi_e \\ \operatorname{Re} \chi_e &= -\mathcal{H}\operatorname{Im} \chi_e,\end{aligned}\tag{22}$$

og tilsvarende for  $\chi_m$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \chi_m &= \mathcal{H}\operatorname{Re} \chi_m \\ \operatorname{Re} \chi_m &= -\mathcal{H}\operatorname{Im} \chi_m.\end{aligned}\tag{23}$$

Merk også at siden  $x_e(t)$  og  $x_m(t)$  er reelle så vil  $\chi_e$  og  $\chi_m$  bli hermitske:

$$\begin{aligned}\chi_e(-\omega) &= \overline{\chi_e(\omega)}, \\ \chi_m(-\omega) &= \overline{\chi_m(\omega)},\end{aligned}$$

slik at deres realdeler er like funksjoner og deres imaginærdeler er odde funksjoner.

## 4.5 Egenskaper ved brytningsindeksen

I denne seksjonen skriver jeg  $\chi$  når jeg refererer til egenskaper som gjelder både  $\chi_e$  og  $\chi_m$ . Vi vet nå at  $\chi$  er hermitsk, at  $\operatorname{Im} \chi \geq 0$  for  $\omega > 0$  og at  $\chi \in H^2$  slik at dens real- og imaginærdeler er hilberttransformpar. Jeg viser nå at disse resultatene også gjelder for  $n - 1 = \pm\sqrt{\epsilon_r\mu_r} - 1$ , altså at:

$$\begin{aligned}n - 1 &\in H^2, \\ n(-\omega) &= \overline{n(\omega)}, \\ \operatorname{Im} n &> 0, \quad \omega > 0.\end{aligned}\tag{24}$$

At  $n - 1$  er i  $H^2$  innebærer altså at  $n - 1$  er analytisk og kvadratisk integrerbar i det øvre halvplan. For at  $n - 1$  skal være analytisk i det øvre halvplan trenger vi der å ha oppfylt betingelsen:

$$1 + \chi \neq 0,\tag{25}$$

siden den deriverte skal eksistere i alle punkt. Vi har nå fra korollar 2.5 at på det øvre halvplan kan  $\text{Im } \chi(\omega)$  uttrykkes som poissonintegralet av  $\text{Im } \chi(t)$  på den reelle aksene:

$$\text{Im } \chi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\omega_i}(\omega_r - t) \text{Im } \chi(t) dt,$$

hvor  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ . Siden  $\text{Im } \chi \geq 0$  på den positive reelle aksene, og siden  $\chi$  er hermitsk følger det at  $\text{Im } \chi(\omega)$  er positiv i første kvadrant og negativ i andre kvadrant av det komplekse plan. Dermed er (25) oppfylt der. På den imaginære aksene blir imidlertid  $\chi$  reell og vi må vise at betingelsen holder også der. Fra Kramers-Kronig-relasjonene for  $\chi$  får vi:

$$\text{Re } \chi(0) = P \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } \chi(t)}{t} dt,$$

og siden  $\text{Im } \chi \geq 0$  for  $\omega$  på den positive reelle aksene, blir  $\text{Re } \chi(0) \geq 0$ . Også  $\text{Re } \chi(\omega)$  kan uttrykkes ved et poissonintegral og på den imaginære aksene får vi:

$$\text{Re } \chi(\omega_i) = 2 \int_0^{\infty} P_{\omega_i}(t) \text{Re } \chi(t) dt,$$

hvor jeg har brukt at  $P_{\omega_i}(t)$  og  $\text{Re } \chi(t)$  er like funksjoner. Siden  $\text{Re } \chi(\omega_i) \rightarrow \text{Re } \chi(0)$  når  $\omega_i \rightarrow 0$ , og siden  $P_{\omega_i}$  er en positiv og monotont avtagende funksjon av  $\omega_i$ , er  $\text{Re } \chi(\omega)$  positiv på den positive imaginære aksene. Betingelsen (25) er dermed tilfredstilt i hele det øvre halvplan slik at  $n - 1$  er analytisk der. Integrerbarheten kan enkelt vises ved å rekkeutvikle kvadratrøttene. Vi får:

$$\sqrt{1 + \chi_e} \sqrt{1 + \chi_m} = 1 + \frac{\chi_e}{2} + \frac{\chi_m}{2} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right),$$

når  $\omega \rightarrow \infty$ . Det følger at  $n - 1$  er kvadratisk integrerbar i det øvre halvplan siden  $\chi_e$  og  $\chi_m$  er det.

Siden (25) er oppfylt har brytningsindeksen ingen nullpunkter i det øvre halvplan og kan defineres slik:

$$n = \sqrt{|\epsilon_r| |\mu_r|} e^{i(\arg \epsilon_r + \arg \mu_r)/2}, \quad (26)$$

gitt at vi velger  $n \rightarrow 1$  når  $\omega \rightarrow \infty$  og at  $\arg \epsilon_r, \arg \mu_r \in [-\pi, \pi]$ . Fra denne definisjonen er det enkelt å se at  $n$  er hermitsk og at dens imaginærdel er ikke-negativ for positive  $\omega$  siden dette holder for  $\chi_e$  og  $\chi_m$  (og da også for  $\epsilon_r$  og  $\mu_r$ ). Dermed oppfylder  $n$  egenskapene i (24). Fra  $H^2$ -tilhørigheten følger det fra Marcel Riesz at real- og imaginærdelene til  $n - 1$  også er hilberttransformer. Vi kaller dette *Kramers-Kronig-relasjonene for brytningsindeksen*:

$$\begin{aligned} \text{Im } n &= \mathcal{H}\text{Re } (n - 1) \\ \text{Re } (n - 1) &= -\mathcal{H}\text{Im } n. \end{aligned}$$

## 5 En perfekt linse

Jeg gir her først en kort innføring i negativ brytning og Veselago-Pendry-linsa som i hovedsak er basert på [15]. Den siste delseksjonen om transmisjon av evanescente felt er tildels basert på [9], men uttrykket for oppløsningen er utledet i arbeidet med denne oppgaven.

## 5.1 Negativ brytning

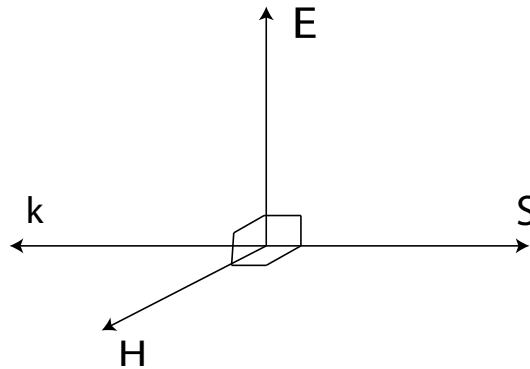
*Metamaterialer* er kunstige medier med mikroskopiske mønstre av to eller flere materialer med dimensjoner som er mye mindre enn en bølgelengde. I slike medier vil feltene “se” en permittivitet  $\epsilon$  og permeabilitet  $\mu$  som er avhengig av geometrien til mønstrene, og en av de tingene det er mulig å få til er at feltene “ser”  $\epsilon$  og  $\mu$  med simultant negativ realdel. Jeg refererer til [8] for en diskusjon om hvordan dette kan gjøres. I denne seksjonen forklarer jeg hvorfor man får *negativ brytning* i slike medier. Vi kan nå igjen tenke oss at vi ser på et tapsfritt medium slik at  $\epsilon$  og  $\mu$  er reelle.

Hvis vi setter feltene til monokromatiske plane bølger inn i (de fouriertransformerte av) curl-ligningene i Maxwells ligninger, gitt i (19), får vi:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega\mu\mathbf{H}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -\omega\epsilon\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (27)$$

Hvis  $\epsilon$  og  $\mu$  er negative blir  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$  et såkalt *venstrehendt system*. Navnet har det fått fordi bølgevektoren går i motsatt retning av hva den vanligvis gjør i forhold til  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{H}$ , slik at den klassiske “høyrehåndsregelen” ikke er oppfylt. Vi kaller derfor medier med negativ  $\epsilon$  og  $\mu$  for *venstrehendte medier*.

Energistrømmen til bølgene er gitt ved *Poyntings vektor*:  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ . Dette følger av det såkalte *Poyntings teorem* som er utledet f.eks i [4] s.346-347. Poyntings vektor vil være upåvirket av at  $\epsilon$  og  $\mu$  er negative og vi får det underlige resultatet at i venstrehendte medier går energistrømmen i motsatt retning av bølgehastigheten. Et slikt system er illustrert i figur 1.



Figur 1: Venstrehendt system

Siden  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  og  $\mathbf{k}$  er vinkelrette på hverandre kan vi skrive  $\mathbf{E} = Ee^{-i\omega t}\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{H} = He^{-i\omega t}\hat{\mathbf{y}}$  og  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$ . Vi får da fra (27):

$$\begin{aligned} kE &= \omega\mu H, \\ kH &= \omega\epsilon E, \end{aligned}$$

og kombinerer vi disse får vi:

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2. \quad (28)$$

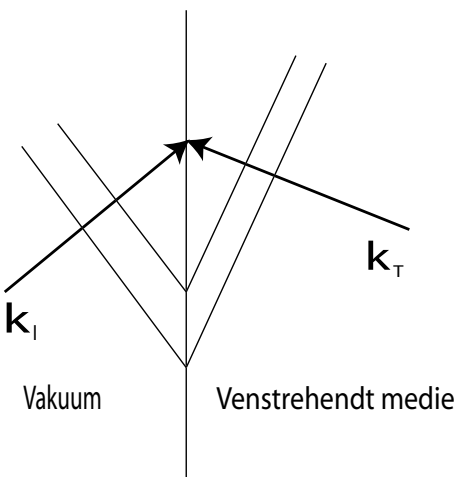
I vanlige medier ville vi nå tatt den positive roten slik at  $k = \sqrt{\epsilon\mu}\omega$ , men som vi skal se må vi i tilfellet med venstrehendte medier ta den negative roten slik at brytningsindeksen blir  $n = -\sqrt{\epsilon_r\mu_r}$ .

Vi ser nå på elektromagnetiske bølger som kommer fra vakuum og treffer et venstrehendt medium. La grenseflata mellom vakuumet og mediet være  $xy$ -planet, la  $z$ -aksen peke inn i det venstrehendte mediet og la bølgevektoren til de innfallende bølgene ligge i  $yz$ -planet. Vi antar igjen at vi har S-polarisering slik at  $\mathbf{E}$  peker i  $x$ -retning og  $\mathbf{H}$  ligger i  $yz$ -planet. Så lenge bølgene er i vakuum peker  $\mathbf{k}$  og  $\mathbf{S}$  i samme retning, men dette forandrer seg altså i det venstrehendte mediet. La  $\mathbf{k}_I$  og  $\mathbf{k}_T$  være bølgevektorene til henholdsvis de innfallende bølgene og de transmitterte bølgene. Siden  $\mathbf{S}$  er et mål på energistrømmen og siden vi ikke har noen energioppsamling i brytningsflaten er normalkomponenten til  $\mathbf{S}$  kontinuerlig i grenseflata og peker altså i samme retning i det venstrehendte mediet som i vakuumet. Dermed vil  $z$ -komponenten til bølgevektoren skifte retning slik at  $k_{Tz}$  blir negativ.

Grensebetingelsene til  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{H}$  sier at tangensialkomponentene av disse feltene er kontinuerlige i overflaten. Dette fører til at  $y$ -komponentene av bølgevektorene må være like i overflaten:

$$k_{Iy} = k_{Ty}.$$

Sagt på en annen måte betyr dette at projeksjonen av de innfallende og de transmitterte bølgene i overflaten beveger seg i samme retning. Siden  $y$ -komponentene til  $\mathbf{k}_I$  og  $\mathbf{k}_T$  er like og  $z$ -komponentene har motsatt fortegn følger det at brytningsvinkelen  $\theta_T$  (fra Snells lov) blir negativ som på figur 2. Det er dette som kalles *negativ brytning*.



Figur 2: Negativ brytning

Snells lov om sammenhengen mellom vinklene til de innfallende og de transmitterte bølgene er gitt i (20). Når bølger kommer fra vakuum og blir transmittert i et medium med brytningsindeks  $n$  er denne loven gitt ved:

$$\sin \theta_I = n \sin \theta_T.$$

I tilfellet med negativ brytning er som vi har sett  $\theta_T$  negativ. Dette fører til at hvis Snells lov skal kunne oppfylles må vi velge den negative roten av  $n^2$ . Vi får dermed:

$$n = -\sqrt{\epsilon_r \mu_r},$$

slik at brytningsindeksen blir negativ.

La oss nå se på passive, fysiske og venstrehendte medier hvor altså  $\epsilon_r$  og  $\mu_r$  er komplekse med negativ realdel og positiv imaginærdel (for positive frekvenser). Dette gir at  $\arg \epsilon_r, \arg \mu_r \in [\pi/2, \pi]$ . La oss nå bruke definisjonen (26) av brytningsindeksen. Vi får da at  $\arg n \in [\pi/2, \pi]$ , slik at også  $n$  har negativ realdel og positiv imaginærdel.

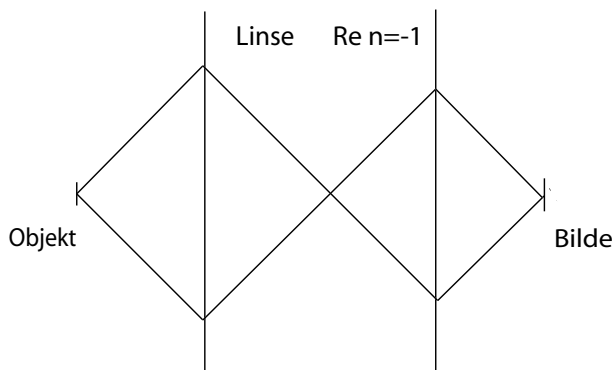
## 5.2 Veselago-Pendry-linsa

En av de mest lovende anvendelsene av venstrehendte medier er at man kan bruke dem til å fokusere elektromagnetiske bølger, altså som en linse. Dette ble påpekt av V. Veselago på allerede på 1960-tallet, men han så ikke det fulle potensialet til denne linsa. I den etterhvert klassiske artikkelen [9] til J.B. Pendry fra år 2000 viser han hvordan en slik linse ikke vil ha noen øvre grense for oppløsning slik vanlige linser har. Faktisk viser det seg at vi får uendelig høy oppløsning i den idealiserte situasjonen at  $\epsilon_r$  og  $\mu_r$  begge er reelle og lik  $-1$ . På grunn av dette har denne linsa gjerne blitt kalt en *perfekt linse*.

Anta at  $\epsilon_r$  og  $\mu_r$  begge er reelle og lik  $-1$  (dvs at vi igjen ser på et tapsfritt medium). Fra (26) får vi at brytningsindeksen også blir reell og lik  $-1$ . Snells lov (20) gir da at transmisjonsvinkelen er like stor som innfallsvinkelen, men har motsatt fortegn:

$$\theta_I = -\theta_T.$$

Vi ser nå på et venstrehendt medium med jevn tykkelse  $d$ , og et objekt i en avstand mindre enn  $d$  fra mediet. Følger vi bølgene fra objektet ser vi at vi får et fokus inne i mediet, og et fokus på den andre siden av mediet, som illustrert i figur 3. Slik fungerer mediet som en linse.



Figur 3: Veselago-Pendry-linsa

Merk spesielt viktigheten av at objektet må være nærmere linsa enn linsas tykkelse. Hvis ikke vil ikke bølgene rekke å bli fokusert inne i linsa. En annen merkelig egenskap er

at man ikke får noen refleksjon i grenseflatene. Det ser man enkelt fra Fresnels ligninger, hvor telleren i refleksjonskoeffisienten (21) blir:

$$\mu_r k_z - k_{Tz} = -k_z - k_{Tz} = 0,$$

siden  $k_z$  og  $k_{Tz}$  er like store men har motsatt fortegn. Det mest oppsiktsvekkende med denne linsa er likevel, som jeg har vært inne på, at den unnslipper den fundamentale grensen for oppløsning på en bølgelengde som vanlige linser er underlagt. Jeg skal nå forklare hvordan dette går til.

Vi legger igjen en gjenstand i origo på utsiden av linsa slik at  $z$ -aksen er normalt på linsa og avstanden fra objektet til linsa er mindre enn tykkelsen på linsa. Da vil  $x$ - og  $y$ -komponentene til bølgevektoren inneholde bildet av objektet (det vil si de definerer fourierkomponentene til bildet), mens  $z$ -komponenten gjør at bølgene beveger seg i  $z$ -retning. Maxwells ligninger (nærmere bestemt ligning (28)) gir at sammenhengen mellom  $k_x$ ,  $k_y$  og  $k_z$  er:

$$k_z = \sqrt{(\omega^2/c_0^2) - k_x^2 - k_y^2},$$

hvor  $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  er lysfarten i vakuum. Det er klart at jo høyere verdier av  $k_x$  og  $k_y$  som transmitteres til bildeplanet, jo høyere blir oppløsningen på bildet. Problemet med vanlige linser er imidlertid at hvis  $k_x^2 + k_y^2 > (\omega^2/c_0^2)$  så blir  $k_z$  imaginær. La oss se på hva som skjer med monokromatiske plane bølger som har imaginær  $k_z = i\kappa$ ,  $\kappa > 0$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ik_z z - i\omega t} = \mathbf{E}_0 e^{-\kappa z} e^{-i\omega t}.$$

Vi ser at det elektriske feltet avtar eksponensielt i  $z$ -retning og tilsvarende skjer naturligvis med det magnetiske feltet. Vi kaller gjerne slike felt for *evanescente felt* eller *nærfelt* og konvensjonelle linser er ikke istand til å rekonstruere slike. De minste detaljene vi får avbildet med vanlige linser er altså bølgene hvor  $\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \omega/c_0$ , som tilsvarer en bølgelengde i vakuum. Denne grensen er altså absolutt og det hjelper ikke å f.eks lage medier med mindre tap. Med Veselago-Pendry-linsa er det altså ikke slik.

Anta nok en gang at vi har S-polarisering slik at det elektriske feltet kan uttrykkes  $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ . Maxwells ligninger gir da:

$$\hat{\mathbf{y}} \frac{\partial E}{\partial z} - \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial E}{\partial y} = i\omega\mu\mathbf{H}.$$

Siden tangensialkomponenten av  $\mathbf{H}$  er kontinuerlig i grenseflaten må  $\frac{\partial E}{\partial z}/\mu$  være kontinuerlig der. Det følger at siden  $\mu$  skifter fortegn i det venstre mediet så vil også  $\frac{\partial E}{\partial z}$  måtte gjøre det. Dette fører til at  $k_z$  også må skifte fortegn for imaginære verdier tilsvarende evanescente planbølgekomponenter, slik vi allerede har sett at den gjør det for reelle verdier. Dermed vil de evanescente feltene som avtar eksponensielt i vakuum vokse eksponensielt i linsa. Fra figuren ser vi at bølgene beveger seg like langt langs  $z$ -aksen i linsa som utenfor, og dette medfører at feltene blir nøyaktig rekonstruert i bildeplanet. Slik oppnår denne linsa uendelig høy oppløsning. Det samme skjer naturligvis ved motsatt polarisering.

Dette lar seg dessverre ikke gjøre i virkeligheten og det er to faktorer som begrenser oppløsningen. Det ene er tapet i fysiske medier, gitt av imaginærdelene til  $\epsilon$  og  $\mu$ , og det andre er avviket i realdelene fra  $-1$ . Det vesentlige resultatet her er først og fremst at linsen unnslipper den absolutte grensen på en bølgelengde ved å gi en mulighet for å rekonstruere evanescente felt. I neste seksjon finner jeg et uttrykk for oppløsningen under enkelte antakelser.

### 5.3 Transmisjon av evanescente felt

Vi har sett at Veselago-Pendry-linsa blir perfekt når  $\epsilon_r$  og  $\mu_r$  er reelle og akkurat lik  $-1$ . Vi ønsker nå å finne et uttrykk for oppløsningen når dette er bare tilnærmet oppfylt. Flere har vært inne på denne problemstillingen, og f.eks i [8] er det presentert et uttrykk for hvordan oppløsningen avhenger av imaginærdelen til  $\epsilon_r$  eller  $\mu_r$ . Dette uttrykket baserer seg imidlertid på at realdelene er akkurat lik  $-1$ . Vi ønsker også å vite hvordan oppløsningen avhenger av avviket til realdelene fra  $-1$ . Dette er på grunn av at vi skal se på oppløsningen på et frekvensintervall og der vil vi generelt ha dispersjon slik at realdelene varierer.

Vi ser nå nærmere på de evanescente feltene, altså feltene med imaginær  $z$ -komponent av bølgevektorene. For enkelhets skyld antar jeg nå at objektet vi avbilder er endimensjonalt slik at oppløsningen er gitt ved hvor høye verdier av  $k_x$  som gir rekonstruerte evanescente felt i bildeplanet. Maxwells ligninger gir at  $z$ -komponenten av bølgevektoren utenfor linsa er:

$$k_z = i\sqrt{k_x^2 - \omega^2 c_0^{-2}}, \quad \omega^2 c_0^{-2} < k_x^2,$$

og at  $z$ -komponenten av bølgevektoren i linsa er:

$$k'_z = i\sqrt{k_x^2 - \epsilon_r \mu_r \omega^2 c_0^{-2}}, \quad \epsilon_r \mu_r \omega^2 c_0^{-2} < k_x^2.$$

Vi fortsetter å anta at feltene er S-polariserte, og at vi har vakuum utenfor linsa. Vi får da fra Fresnels ligninger at transmisjonskoeffisienten og refleksjonskoeffisienten fra vakuomet til linsa er gitt slik:

$$t = \frac{2\mu_r k_z}{\mu_r k_z + k'_z}, \quad r = \frac{\mu_r k_z - k'_z}{\mu_r k_z + k'_z},$$

og, tilsvarende, at transmisjonskoeffisienten og refleksjonskoeffisienten fra linsa til vakuomet igjen er:

$$t' = \frac{2k'_z}{k'_z + \mu_r k_z}, \quad r' = \frac{k'_z - \mu_r k_z}{k'_z + \mu_r k_z}.$$

Siden vi ikke lenger regner med at  $\epsilon_r$  og  $\mu_r$  er reelle og akkurat lik  $-1$ , får vi nå også refleksjon i overflatene. For å finne den totale transmisjonen gjennom linsa må vi summere de gjentatte refleksjonene som vil forekomme inne i linsa. Vi får da:

$$tt' e^{ik'zd} + tt'r'^2 e^{3ik'zd} + tt'r'^4 e^{5ik'zd} + \dots$$

Anta nå at  $\text{Im } \omega$  er tilstrekkelig stor slik at hvert ledd i summen er mindre enn 1. Vi kan da forenkle dette uttrykket ved hjelp av en geometrisk rekkesum:

$$tt'e^{ik'zd} + tt'r'^2e^{3ik'zd} + tt'r'^4e^{5ik'zd} + \dots = \frac{tt'e^{ik'zd}}{1 - r'^2e^{2ik'zd}}.$$

Det kan vises at dette uttrykket ikke har noen singulariteter i det øvre halvplan. Vi kan dermed bruke analytisk fortsettelse til å slutte at det gjelder i hele det øvre halvplan og ikke bare for store verdier av  $\text{Im } \omega$ . Uttrykket kan forøvrig også utledes ved å bruke kontinuitet av feltene i grenseflaten.

Vi har nå funnet den faktoren feltene forsterkes med inne i linsa. Hvis vi ganger med  $\exp(ik_zd)$  som er faktoren feltene avtar med utenfor linsa får vi andelen av feltene som er rekonstruert i bildeplanet på andre siden av linsa:

$$T = \frac{tt'e^{id(k'_z+k_z)}}{1 - r'^2e^{2ik'_zd}},$$

og jeg kaller denne for *transmisjonskoeffisienten til linsa*. Hvis man regner med P-polarisering isteden for S-polarisering som her, vil man få helt tilsvarende resultater bortsett fra at rollene til  $\epsilon_r$  og  $\mu_r$  er byttet om. Jeg skal i det følgende fortsette å regne med S-polarisering.

La oss først observere at det vi nå har funnet ut er konsekvent med resultatene om Veselago-Pendry-linsa. Vi får at:

$$\lim_{\substack{\epsilon_r \rightarrow -1 \\ \mu_r \rightarrow -1}} T = \lim_{\substack{\epsilon_r \rightarrow -1 \\ \mu_r \rightarrow -1}} \frac{2\mu_r k_z}{\mu_r k_z + k'_z} \frac{2k'_z}{k'_z + \mu_r k_z} \frac{e^{id(k'_z+k_z)}}{1 - \left(\frac{k'_z - \mu_r k_z}{k'_z + \mu_r k_z}\right)^2 e^{2ik'_zd}} = 1,$$

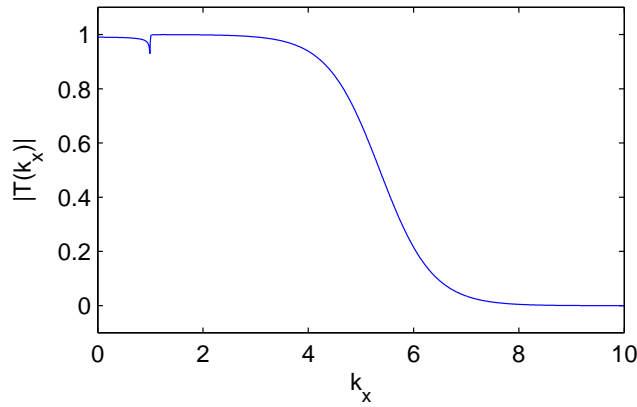
for alle  $k_x$ , slik at feltene er perfekt rekonstruerte i bildeplanet når  $\epsilon_r$  og  $\mu_r$  er reelle og akkurat lik  $-1$ . Men hvis vi legger en liten imaginærdel til  $\epsilon_r$  og  $\mu_r$  og plotter ser vi at transmisjonskoeffisienten er 1 et stykke og så faller ganske raskt mot 0 (her er  $\omega$  og  $d$  satt lik 1). Vi får også en liten knekk på kurven rett før  $k_x = 1$ , men det spiller liten rolle siden dette er størrelser av  $k_x$  hvor  $k_z$  er reell. Det er først og fremst de evanescente feltene vi er interesserte i å rekonstruere.

Vi ser nå på dette uttrykket for store verdier av  $k_x$ , slik at  $k_x \gg \omega/c_0$ . Vi kan da gjøre tilnærmelsene:

$$\begin{aligned} k'_z &\approx ik_x \left(1 - \epsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{2c_0^2 k_x^2}\right), \\ k_z &\approx ik_x \left(1 - \frac{\omega^2}{2c_0^2 k_x^2}\right), \\ \frac{k_z}{k'_z} &\approx 1 + (\epsilon_r \mu_r - 1) \frac{\omega^2}{2c_0^2 k_x^2}, \end{aligned}$$

som er rekkeutviklinger til første grad. Vi skal se at vi under enkelte antakelser kan få  $T \approx 1$  uten å sette noen betingelser på  $\epsilon_r$  (eller på  $\mu_r$  ved motsatt polarisering). Dette





Figur 4: Transmisjonskoeffisient

sier oss at vi bare trenger å ha en av disse tilnærmet reell og lik  $-1$  for å få rekonstruert evanescente felt og således oppnå bedre oppløsning enn en vanlig linse. Vi finner også et uttrykk for oppløsningen under de samme antakelsene, altså for hvilken verdi av  $k_x$  transmisjonskoeffisienten faller mot null. Siden den faller relativt raskt skal vi anta at dette er verdien av  $k_x$  hvor  $T \approx 1/2$ .

Vi setter nå inn tilnærmelsene i uttrykket for  $T$  og får:

$$T \approx \frac{4\mu_r \left(1 + (\epsilon_r \mu_r - 1) \frac{\omega^2}{2c_0^2 k_x^2}\right) e^{k_x d \left(\frac{\omega^2}{2c_0^2 k_x^2} - \epsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{2c_0^2 k_x^2}\right)}}{\left(1 + \mu_r + \mu_r (\epsilon_r \mu_r - 1) \frac{\omega^2}{2c_0^2 k_x^2}\right)^2 e^{2k_x d \left(1 - \epsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{2c_0^2 k_x^2}\right)} - \left(\mu_r - 1 + \mu_r (\epsilon_r \mu_r - 1) \frac{\omega^2}{2c_0^2 k_x^2}\right)^2}$$

Ved nærmere inspeksjon av dette ser vi at  $T \approx 1$  hvis  $\mu_r \approx -1$ , og følgende betingelser er oppfylt:

1.  $\frac{\omega^2}{c_0^2 k_x^2} e^{k_x d} \ll 1$ ,
2.  $|1 + \mu_r| e^{k_x d} \ll 1$ ,
3.  $\frac{\omega^2 d}{2c_0^2 k_x} \ll 1$ ,

i tillegg til vår tidligere antakelse at  $k_x \gg \omega/c_0$ . Da forsvinner det første leddet i nevneren, og det andre leddet blir  $-4$  i likhet med telleren. Den første betingelsen her er oppfylt hvis  $d$  ikke er for stor. For  $d \ll 1/k_x$ , som betyr at  $d$  må være noe mindre enn en bølgelengde, regner vi at dette er oppfylt. Vi anser dette som et rimelig krav da energitapet uansett blir for stort i tykkere linser. Det er enkelt å se at betingelse 3 er oppfylt når  $d \ll 1/k_x$  og  $k_x \gg \omega/c_0$ . Da gjenstår bare betingelse 2. Vi ser at dette ikke kan være oppfylt når  $k_x$  blir for stor, med mindre  $\mu_r$  er reell og akkurat lik  $-1$ . Anta at de andre betingelsene holder. Da blir  $T$  tilnærmet med:

$$T \approx \frac{4\mu_r}{(1 + \mu_r)^2 e^{2k_x d} - (\mu_r - 1)^2}$$

Setter vi dette uttrykket lik  $1/2$  og  $\mu_r \approx -1$  får vi:

$$|1 + \mu_r|e^{k_x d} \approx 2,$$

som gir dette uttrykket for oppløsningen til linsa:

$$k_x \approx -\frac{\ln \frac{|1+\mu_r|}{2}}{d}. \quad (29)$$

Dette sier oss at det er størrelsen  $|1 + \mu_r|$  vi ønsker å minimere, eller, i tilfellet med motsatt polarisering, størrelsen  $|1 + \epsilon_r|$ . Vi husker fra seksjon 4.4 at  $\epsilon_r$  og  $\mu_r$  er gitt ved  $\chi + 1$ , hvor susceptibilitetene  $\chi = u + iv$  er hermitske funksjoner i  $H^2$ . Uttrykt ved  $\chi$  er det størrelsen:

$$|\chi + 2| = |u + iv + 2| = \sqrt{(u + 2)^2 + v^2}, \quad (30)$$

vi ønsker å minimere. For å få høyest mulig oppløsning vil vi altså at realdelen  $u$  er så nært  $-2$  som mulig og at imaginærdelen  $v$  er så liten som mulig. Disse er imidlertid forbundet med Kramers-Kronig-relasjonene og dette er mitt utgangspunkt for resten av oppgaven. Merk spesielt at avviket til realdelen fra  $-2$  og avviket til imaginærdelen fra  $0$  er like viktige å minimere for å oppnå høy oppløsning.

## 6 Parametriseringer av imaginærdelen

### 6.1 Introduksjon

Vi ser her på hermitske funksjoner  $u + iv$  i  $H^2$  slik at  $u$  og  $v$  er hilberttransformpar. Vi innfører for enkelthets skyld operatoren  $\mathcal{H}_1$  som er den negative hilberttransformen av odde funksjoner. Siden  $v$  er en odde funksjon og siden  $u$  er den negative hilberttransformen av  $v$  får vi:

$$u(x) = -\frac{1}{\pi}P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{x-t} dt = \frac{2}{\pi}P \int_0^{\infty} \frac{tv(t)}{t^2-x^2} dt \equiv \mathcal{H}_1 v(x).$$

Fra optikken har vi sett at  $\chi_e$ ,  $\chi_m$  og  $n - 1$  er eksempler på slike hermitske funksjoner i  $H^2$ . Behandlingen her er helt generell og resultatene kan dermed anvendes for alle disse.

Vi leter etter eksplisitte parametriseringer av imaginærdelen  $v(x)$  på et frekvensintervall  $I \in [a, b]$ , gitt at realdelen  $u(x)$  er foreskrevet på intervallet. Siden  $u + iv$  er i  $H^2$  følger det at  $u(x)$  og  $v(x)$  er i  $L^2$ . Dette fører til at vi må kreve av parametriseringene av  $v(x)$  at de ligger i  $L^2(I)$ . Vi må også kreve at  $v(x)$  er ikke-negativ for positive argumenter for at løsningene skal være realistiske i forhold til at vi jobber med passive medier. Vi antar at dette er oppfylt utenfor intervallet. I seksjon 7 skal jeg bruke parametriseringene til å se nærmere på oppløsningen til Veselago-Pendry-linsa.

Før jeg går videre skal jeg se litt på en funksjon som kommer til å spille en viktig rolle i det som følger:

$$\sigma(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - b^2}\sqrt{z^2 - a^2}},$$

som vi velger til å være positiv for reelle  $x > b$ . Denne funksjonen er analytisk på  $\mathbb{C} \setminus ([-b, -a] \cup [a, b])$  og for reelle  $|x| \in I$  definerer vi den ved å utvide den kontinuerlig fra det øvre halvplan. Da vil  $\sigma(x)$  ta negative imaginære verdier for  $x \in I$  og positive imaginære verdier for  $x \in -I$ , og ellers være reell. Denne egenskapen skal vise seg svært nyttig til å evaluere integraler ved Marcel Riesz teorem. Verdt å merke seg er det også at  $\sigma(x)$  ikke er i  $L^2$ , men at den er i  $L^p$  for  $1 < p < 2$ .

## 6.2 Tilfellet at realdelen er konstant

Jeg begynner med å se på tilfellet at realdelen  $u(x) = \mathcal{H}_1 v(x)$  er konstant på frekvensintervallet  $I$ , som er det samme tilfellet som er utforsket i artikkelen [10]. Det er der funnet en parametrisering av imaginærdelen på intervallet forutsatt at en spesiell integrerbarhetsbetingelse holder. Jeg gjengir her dette resultatet, men jeg følger ikke beviset gitt i artikkelen. Isteden gir jeg et alternativt bevis basert på inversjonsteoremet for den endelige hilberttransformen. I tillegg til å i seg selv være interessant gir dette beviset et godt utgangspunkt for å se på mer generelle realdeler. La nå  $\phi_I$  være den karakteristiske funksjonen til intervallet  $I$ .

**Teorem 6.1.** *La  $v(x)$  være en odde funksjon i  $L^2(\mathbb{R}^+)$  som er ikke-negativ for positive argumenter og la  $\alpha_0$  være en reell konstant. Da er  $\mathcal{H}_1 v(x) = \alpha_0$  for  $x \in I$  hvis og bare hvis de følgende tre betingelsene holder:*

$$\int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} v(t) |\sigma(t)| dt < \infty \quad (31)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} t v(t) \sigma(t) dt = \alpha_0 \quad (32)$$

$$v(x) = \mathcal{H}_1((1 - \phi_I)\sigma v)(x) / |\sigma(x)|, \quad x \in I. \quad (33)$$

Integrerbarhetsbetingelsen (31) er en voksebetingelse på  $v(x)$  i endepunktene av intervallet. Grunnen til at vi trenger denne er at  $\sigma(x)$  ikke er i  $L^2$  på grunn dens singulariteter der. Betingelsen kan også uttrykkes:

$$\int_0^a [v(a-t) + v(b+t)] \frac{dt}{\sqrt{t}} < \infty,$$

som bedre demonstrerer at det er en betingelse på  $v(t)$  i endepunktene. Denne betingelsen garanterer at integralene i (32) og (33) er endelige, og spesielt at parametriseringa er i  $L^2(I)$ .

Legg for øvrig merke til at parametriseringa i ligning (33) er eksplisitt selv om det ved første øyekast kanskje ikke ser sånn ut. La oss skrive ut hilberttransformen for å tydeliggjøre dette:

$$\mathcal{H}_1((1 - \phi_I)\sigma v)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} v(t) \sigma(t) \frac{2t}{t^2 - x^2} dt. \quad (34)$$

Det fremgår av dette at  $v(x)$  på intervallet er bestemt av  $v(x)$  utenfor intervallet. Vi ser også at integranden ikke har singulariteter siden  $x \in I$  og  $t \in \mathbb{R}^+ \setminus I$ . Videre ser vi at integranden er positiv så lenge  $v(x)$  er positiv utenfor intervallet. Dette gjør at  $v(x) \geq 0$  utenfor intervallet medfører  $v(x) \geq 0$  på intervallet slik at passivitetskriteriet for elektromagnetiske medier er oppfylt.

Hvilken verdi konstanten  $\alpha_0$  tar er også bestemt av  $v(x)$  utenfor intervallet. Legg merke til at  $\alpha_0$  kan ta en hvilken som helst reell verdi, også negativ. Dette er fordi på den positive akse er  $\sigma(t)$  negativ til venstre for  $I$  og positiv til høyre for  $I$ . Jeg går nå videre til beviset.

*Bevis.* Vårt utgangspunkt er at den negative hilberttransformen av den odde funksjonen  $v(x)$  er lik en konstant for  $x \in I$ :  $\mathcal{H}_1 v(x) = \alpha_0$ . La oss nå dele opp dette i en sum av integralene av og på intervallet  $I$ :

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi} P \int_{\mathbb{R}^+} \frac{tv(t)}{t^2 - x^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} \frac{tv(t)}{t^2 - x^2} dt + \frac{2}{\pi} P \int_I \frac{tv(t)}{t^2 - x^2} dt. \quad (35)$$

Vi observerer at det siste leddet er en endelig hilberttransform av en odde funksjon på to symmetriske intervaller. I seksjon 3.3 fant vi en inversjonsformel for slike gitt i korollar 3.5. Anvender vi dette resultatet på (35) får vi:

$$v(x) \frac{1}{\sigma(x)} = -\frac{2}{\pi} P \int_I \frac{s}{\sigma(s)(s^2 - x^2)} \left( \alpha_0 - \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} \frac{tv(t)}{t^2 - s^2} dt \right) ds + C. \quad (36)$$

Det vi nå har funnet ut er altså at hvis det eksisterer en parametrisering av  $v(x)$  i  $L^2(I)$  så vil den ha denne formen. Det er imidlertid slett ikke opplagt at en slik eksisterer, blant annet fordi  $\sigma(x)$  ikke er i  $L^2$ . For å komme noe videre må vi evaluere de to integralene i uttrykket. Vi begynner med å se på integralet:

$$\alpha_0 \frac{2}{\pi} P \int_I \frac{s}{\sigma(s)(s^2 - x^2)} ds.$$

Siden  $\sigma(s)$  kun er imaginær på  $I \cup -I$  og dessuten er en odde funksjon kan man se på dette som den negative hilberttransformen av imaginærdelen til  $\sigma(s)^{-1}$ :

$$\alpha_0 \frac{2}{\pi} P \int_I \frac{s}{\sigma(s)(s^2 - x^2)} ds = i\alpha_0 \frac{2}{\pi} P \int_{\mathbb{R}^+} \frac{s \operatorname{Im} \sigma(s)^{-1}}{s^2 - x^2} ds.$$

Hvis nå  $\sigma(s)^{-1}$  hadde vært en funksjon i  $H^p$  for  $1 < p < \infty$ , ville integralet blitt lik realdelen til  $\sigma(s)^{-1}$  ved Marcel Riesz teorem. Det er den imidlertid ikke, for hvis vi rekkeutvikler får vi:

$$\sigma(z)^{-1} = \sqrt{(z^2 - b^2)(z^2 - a^2)} = z^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{z^2}} \sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2}} = z^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} + O(1/z^2),$$

når  $z \rightarrow \infty$ . Derimot er  $\sigma(z)^{-1} + (a^2 + b^2)/2 - z^2$  en  $H^2$ -funksjon, og for reelle argumenter har denne funksjonen lik imaginærdel som  $\sigma(s)^{-1}$ :

$$\operatorname{Im}(\sigma(s)^{-1}) = \operatorname{Im} \left( \sigma(s)^{-1} + \frac{a^2 + b^2}{2} - s^2 \right).$$

Vi utnytter nå dette for å evaluere det aktuelle integralet ved Marcel Riesz teorem:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{2}{\pi} P \int_I \frac{s}{\sigma(s)(s^2 - x^2)} ds &= i\alpha_0 \frac{2}{\pi} P \int_{\mathbb{R}^+} \frac{s \operatorname{Im} \left( \sigma(s)^{-1} + \frac{a^2+b^2}{2} - s^2 \right)}{s^2 - x^2} ds \\ &= i\alpha_0 \left( \operatorname{Re}(\sigma(x)^{-1}) + \frac{a^2 + b^2}{2} - x^2 \right) \\ &= i\alpha_0 (a^2/2 + b^2/2 - x^2). \end{aligned} \quad (37)$$

Den siste overgangen kommer av at  $x \in I$  slik at  $\operatorname{Re} \sigma(x)^{-1} = 0$ .

Vi ser nå på det andre integralet i (36), som er et dobbeltintegral. Fra Fubinis teorem vet vi at vi kan bytte integrasjonsrekkefølgen slik:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} P \int_I \frac{s}{\sigma(s)(s^2 - x^2)} \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} \frac{tv(t)}{t^2 - s^2} dt ds &= \\ \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} tv(t) \frac{2}{\pi} P \int_I \frac{s\sigma(s)^{-1}}{(t^2 - s^2)(s^2 - x^2)} ds dt. & \end{aligned} \quad (38)$$

Inspirert av hvordan vi løste det forrige integralet prøver vi å se på det innerste integralet her som en hilberttransform av en odde funksjon:

$$\frac{2}{\pi} P \int_I \frac{s\sigma(s)^{-1}}{(t^2 - s^2)(s^2 - x^2)} ds = i \frac{2}{\pi} P \int_{\mathbb{R}^+} \frac{s \operatorname{Im} \left( \frac{\sigma(s)^{-1}}{t^2 - s^2} \right)}{s^2 - x^2} ds. \quad (39)$$

Funksjonen  $\sigma(s)^{-1}/(t^2 - s^2)$  er heller ikke i  $H^p$  for noen  $1 < p < \infty$ , men vi kan også her legge til eller trekke fra reelle ledd uten å forandre integralet siden imaginærdelen fortsatt vil være den samme. For det første må vi bli kvitt singularitetene i  $s = \pm t$ . Det kan vi gjøre ved å trekke fra  $\sigma(t)/(\sigma(s)^2(t^2 - s^2))$ , som er reell siden  $t \in (0, a) \cup (b, \infty)$ . Da får vi:

$$\frac{\sigma(s)^{-1}}{t^2 - s^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{s^2 - a^2} \sqrt{s^2 - b^2}}{\sqrt{t^2 - a^2} \sqrt{t^2 - b^2}} \right),$$

slik at singularitetene blir hevbare fordi uttrykket i parenteser blir 0 når  $s = \pm t$ . Vi trenger da bare å bekymre oss for hva som skjer når  $s \rightarrow \infty$ . Ved rekkeutvikling får vi:

$$\frac{\sigma(s)^{-1}}{t^2 - s^2} \left( 1 - \frac{\sigma(t)}{\sigma(s)} \right) = \sigma(t)(s^2 - a^2 - b^2 + t^2) - 1 + O(1/s^2),$$

når  $s \rightarrow \infty$ . Dette fører til at funksjonen:

$$\frac{\sigma(z)^{-1}}{t^2 - z^2} \left( 1 - \frac{\sigma(t)}{\sigma(z)} \right) - \sigma(t)(z^2 - a^2 - b^2 + t^2) + 1,$$

er i  $H^2$ , og har imaginærdel lik  $\sigma(s)^{-1}/(t^2 - s^2)$  for reelle argumenter. Vi utnytter dette

til å evaluere integralet (39) ved Marcel Riesz teorem, slik:

$$\begin{aligned}
& i \frac{2}{\pi} P \int_{\mathbb{R}^+} \frac{s \operatorname{Im} \left( \frac{\sigma(s)^{-1}}{t^2 - s^2} \right)}{s^2 - x^2} ds \\
&= i \frac{2}{\pi} P \int_{\mathbb{R}^+} \frac{s \operatorname{Im} \left( \frac{\sigma(s)^{-1}}{t^2 - s^2} \left( 1 - \frac{\sigma(t)}{\sigma(s)} \right) - \sigma(t)(s^2 - a^2 - b^2 + t^2) + 1 \right)}{s^2 - x^2} ds \\
&= i \operatorname{Re} \left( \frac{\sigma(x)^{-1}}{t^2 - x^2} \right) - i \frac{\sigma(t)}{\sigma(x)^2} \frac{1}{(t^2 - x^2)} - i \sigma(t)(x^2 - a^2 - b^2 + t^2) + i \\
&= -i \frac{\sigma(t)}{\sigma(x)^2} \frac{1}{(t^2 - x^2)} - i \sigma(t)(x^2 - a^2 - b^2 + t^2) + i.
\end{aligned} \tag{40}$$

Setter vi dette inn i dobbeltintegralet (38) får vi:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} tv(t) \frac{2}{\pi} P \int_I \frac{s \sigma(s)^{-1}}{(t^2 - s^2)(s^2 - x^2)} ds dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} tv(t) \left( -i \frac{\sigma(t)}{\sigma(x)^2} \frac{1}{(t^2 - x^2)} - i \sigma(t)(x^2 - a^2 - b^2 + t^2) + i \right) dt \\
&= -i \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} tv(t) \frac{\sigma(t)}{|\sigma(x)|^2} \frac{1}{t^2 - x^2} dt - ix^2 \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} tv(t) \sigma(t) dt + C',
\end{aligned} \tag{41}$$

hvor konstanten  $C'$  altså er:

$$C' = \frac{2i}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} tv(t) (\sigma(t) (a^2 + b^2 - t^2) + 1) dt.$$

Jeg setter nå (37) og (41) inn i parametriseringa (36). Konstanten  $C'$  vil inngå i konstanten  $C$  fra parametriseringa og vi får:

$$\begin{aligned}
v(x) &= |\sigma(x)| \left( \alpha_0 x^2 - x^2 \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} tv(t) \sigma(t) dt + C - \alpha_0 (a^2/2 + b^2/2) \right) \\
&+ \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} tv(t) \frac{\sigma(t)}{|\sigma(x)|} \frac{1}{t^2 - x^2} dt,
\end{aligned}$$

hvor jeg har brukt at  $\sigma(x) = -i|\sigma(x)|$  for  $x \in I$ .

I tillegg har vi altså betingelsen av  $v(x)$  skal være i  $L^2(I)$ . I praksis betyr det at uttrykket i parentesen må være lik 0 i endepunktene av intervallet siden  $\sigma(x)$  er singulær der. Dette gir oss to ligninger for å bestemme konstantene  $\alpha_0$  og  $C$  og når vi løser disse får vi:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} tv(t) \sigma(t) dt, \\
C &= \left( \frac{a^2 + b^2}{2} \right) \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} tv(t) \sigma(t) dt,
\end{aligned}$$

som gjør at uttrykket i parentesen forsvinner for alle  $x \in I$ . I tillegg må vi altså ha integrerbarhetsbetingelsen (31) oppfylt for at det siste leddet skal være i  $L^2(I)$ , og for at konstanten:

$$\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} tv(t)\sigma(t)dt,$$

skal være endelig. Da blir  $v(x) \in L^2$  og parametrisert ved:

$$v(x) = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} tv(t) \frac{\sigma(t)}{|\sigma(x)|} \frac{1}{t^2 - x^2} dt = \mathcal{H}_1((1 - \phi_I)\sigma v)(x)/|\sigma(x)|,$$

for  $x \in I$ . □

### 6.3 Tilfellet at realdelen er en funksjon

Jeg går nå et skritt videre i den forstand at jeg ser etter parametriseringer av imaginærdelen  $v(x)$  til en hermitsk  $H^2$ -funksjon på  $I = [a, b]$ , gitt at realdelen er en funksjon på det samme intervallet. Motivasjonen for dette er å se om man kan oppnå en høyere grense for oppløsning for Veselago-Pendry-linsa enn i tilfellet der realdelen er konstant. Helt sentralt blir hvilke krav vi må stille til realdelen for at vi skal klare å finne parametriseringer i  $L^2(I)$  som er positive for positive argumenter. Anta i det følgende at  $x \in I$  og la  $\alpha(x) = \mathcal{H}_1 v(x)$  være en reell og like funksjon på  $I \cup -I$ . Vi begynner også her med å dele opp integralet i summen av integralene av og på intervallet:

$$\alpha(x) = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{tv(t)}{t^2 - x^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} \frac{tv(t)}{t^2 - x^2} dt + \frac{2}{\pi} \int_I \frac{tv(t)}{t^2 - x^2} dt.$$

Merk at  $\alpha(x)$  bare utgjør realdelen på selve intervallet. Hele realdelen til  $H^2$ -funksjonen kan defineres slik:  $\alpha(x)\phi_I + u(x)(1 - \phi_I)$  hvor funksjonen  $u(x)$  altså er realdelen utenfor intervallet. Grunnen til at jeg har gitt realdelen på intervallet et eget navn (noe jeg ikke har gjort med imaginærdelen  $v(x)$ ) er at jeg, for å kunne bruke Marcel Riesz teorem, ønsker å konstruere  $H^p$ -funksjoner hvor  $\alpha(x)$  for alle  $x \in \mathbb{R}$  inngår. Dette blir tydelig i det som følger.

Det siste integralet over er en endelig hilberttransform på to symmetriske intervaller. Vi anvender igjen korollar 3.5 om inversjon av slike og får:

$$v(x) \frac{1}{\sigma(x)} = \frac{2}{\pi} \int_I \frac{s}{\sigma(s)(s^2 - x^2)} \left( \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} \frac{tv(t)}{t^2 - s^2} dt - \alpha(s) \right) ds + C,$$

for  $x \in I$ . Det første integralet her evaluerte jeg i beviset i forrige seksjon. Løsningen er gitt i (41) og konstanten derfra trenger vi ikke tenke på for den vil inngå i  $C$ . Vi setter også her:

$$\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} tv(t)\sigma(t)dt \equiv \alpha_0. \quad (42)$$

For tydelighets skyld setter jeg det jeg nå har funnet ut opp som et lemma før jeg fortsetter.

**Lemma 6.2.** *La realdelen til en funksjon i  $H^2$  være lik  $\alpha(x)$  for  $x \in I$ . Hvis det finnes en parametrisering av imaginærdelen  $v(x)$  for  $x \in I$  så vil den ha formen:*

$$v(x) = |\sigma(x)| \left( i \frac{2}{\pi} \int_I \frac{s\alpha(s)}{\sigma(s)(s^2 - x^2)} ds - x^2\alpha_0 + C \right) + \frac{1}{\pi|\sigma(x)|} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} v(t)\sigma(t) \frac{2t}{t^2 - x^2} dt.$$

Vår nye utfordring er altså å evaluere integralet:

$$\frac{2}{\pi} \int_I \frac{s\alpha(s)}{\sigma(s)(s^2 - x^2)} ds. \quad (43)$$

Det er naturlig å begynne med å se om dette lar seg evaluere med samme teknikk som i tilsvarende integral for konstant realdel i forrige seksjon, altså ved å se på integralet som en hilberttransform av en odde funksjon. Vi vet at  $\sigma(s)^{-1}$  er odde og imaginær på de symmetriske intervallene og reell ellers. Hvis  $\alpha(s)$  da er like og reell, blir  $\sigma(s)^{-1}\alpha(s)$  en imaginær og odde funksjon på  $I \cup -I$ . Dette fører til at:

$$\frac{2}{\pi} \int_I \frac{s\alpha(s)}{\sigma(s)(s^2 - x^2)} ds = i \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{s \operatorname{Im}(\sigma(s)^{-1}\alpha(s))}{s^2 - x^2} ds,$$

som er en hilberttransform. Hadde dette vært hilberttransformen av imaginærdelen til en  $H^p$ -funksjon for  $1 < p < \infty$ , ville integralet blitt realdelen til  $H^p$ -funksjonen ved Marcel Riesz teorem. Vi kan også nå legge reelle ledd til funksjonen uten å forandre imaginærdelen. Vi legger til  $((a^2 + b^2)/2 - s^2)\alpha(s) + C'$  og får:

$$\operatorname{Im}(\sigma(s)^{-1}\alpha(s)) = \operatorname{Im} \left( \left( \sigma(s)^{-1} + \frac{a^2 + b^2}{2} - s^2 \right) \alpha(s) + C' \right).$$

Vi vet fra rekkeutviklingen av  $\sigma(z)$  at funksjonen  $\sigma(z)^{-1} - z^2 + (a^2 + b^2)/2$  oppfører seg som  $O(1/z^2)$  når  $z \rightarrow \infty$ . Dette vil da sette betraktelig mindre strenge krav til funksjonen  $\alpha(z)$  for at produktet skal være i  $H^p$ . Vi trenger altså nå å ha oppfylt:

$$\left( \sigma(z)^{-1} + \frac{a^2 + b^2}{2} - z^2 \right) \alpha(z) + C' \in H^p, \quad (44)$$

for  $1 < p < \infty$ . Merk at vi kan ha med konstanten  $C'$  fordi den bare vil inngå i konstanten i lemmaet over.

Anta først at  $\alpha(z)$  tilfredstiller dette. Da får vi fra Marcel Riesz teorem:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_I \frac{s\alpha(s)}{\sigma(s)(s^2 - x^2)} ds &= i \frac{2}{\pi} \int_I \frac{s \operatorname{Im} \left( \left( \sigma(s)^{-1} + \frac{a^2 + b^2}{2} - s^2 \right) \alpha(s) + C' \right)}{s^2 - x^2} ds \\ &= i \left( \frac{a^2 + b^2}{2} - x^2 \right) \alpha(x) + iC', \end{aligned}$$



slik at parametriseringa av  $v(x)$  på intervallet blir:

$$v(x) = |\sigma(x)| \left( - \left( \frac{a^2 + b^2}{2} - x^2 \right) \alpha(x) - x^2 \alpha_0 + C \right) + \frac{1}{\pi |\sigma(x)|} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} v(t) \sigma(t) \frac{2t}{t^2 - x^2} dt. \quad (45)$$

Betydningen av dette blir at hvis det eksisterer en parametrisering i  $L^2(I)$  av  $v(x)$  på intervallet så vil den ha denne formen, forutsatt at  $\alpha(x)$  er like, reell og tilfredstiller (44). Det er klart at integrerbarhetsbetingelsen fra teoremet i forrige seksjon også må være oppfylt her for at det siste leddet i parametriseringa skal være i  $L^2(I)$  og for at  $\alpha_0$  skal være endelig. Spørsmålet er nå hvilke flere betingelser vi må stille til  $\alpha(x)$  for at  $v(x)$  skal ligge i  $L^2(I)$ . Problemet ligger fortsatt i at  $\sigma(x)$  ikke er i  $L^2$  på grunn av singularitetene i endepunktene av intervallet. Dette fører til at uttrykket i den ytterste parentesen i parametriseringa må være lik 0 der, som gir oss ligningssettet:

$$\begin{aligned} \left( \frac{a^2 - b^2}{2} \right) \alpha(a) - a^2 \alpha_0 + C &= 0, \\ \left( \frac{b^2 - a^2}{2} \right) \alpha(b) - b^2 \alpha_0 + C &= 0. \end{aligned}$$

Løser vi dette finner vi at  $\alpha(x)$  må oppfylle betingelsen:

$$\alpha(a) + \alpha(b) = 2\alpha_0, \quad (46)$$

som igjen gir at konstanten  $C$  er:

$$C = \frac{1}{2}(b^2 \alpha(a) + a^2 \alpha(b)). \quad (47)$$

Vi må altså lete etter like og reelle funksjoner  $\alpha(x)$  som oppfyller (44) og (46). Det er umiddelbart klart at et andregradspolynom på formen:

$$Ax^2 + B,$$

vil være like, reell og oppfylle (44) med et passende valg av konstanten  $C'$ . Dette er fordi funksjonen i parentesen i (44) oppfører seg som  $O(1/z^2)$  når  $z \rightarrow \infty$  (det er enkelt å regne ut hva  $C'$  må være fra rekkeutviklinga av  $\sigma(z)^{-1}$ , men det spiller ingen rolle siden den vil inngå i konstanten  $C$  i parametriseringa). Vi har dermed to (reelle) konstanter vi kan velge og en betingelse de skal oppfylle. Ved å sette inn i (46) får vi:

$$B = \alpha_0 - A \frac{a^2 + b^2}{2},$$

og det følger at  $\alpha(x)$  blir:

$$\alpha(x) = \alpha_0 + A \left( x^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} \right).$$

Merk spesielt at  $A$  kan være et hvilket som helst reelt tall, også negativt. Tilfellet med  $A = 0$  gir konstant  $\alpha(x) = \alpha_0$  på intervallet og som vi skal se gir dette selvfølgelig den samme parametriseringa som i Teorem 6.1. Fra (47) får vi at konstanten  $C$  blir:

$$C = \frac{\alpha_0}{2}(a^2 + b^2) - \frac{A}{4}(a^2 + b^2)^2.$$

Setter vi  $\alpha(x)$  og  $C$  inn i (45), og rydder opp, får vi denne parametriseringa av  $v(x)$  på  $I$ :

$$v(x) = \frac{1}{|\sigma(x)|} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} v(t)\sigma(t) \frac{2t}{t^2 - x^2} dt - A \right) = \frac{1}{|\sigma(x)|} (\mathcal{H}_1((1 - \phi_I)\sigma v) - A).$$

Vi har altså funnet en parametrisering av  $v(x)$  på intervallet, gitt at realdelen er et spesielt like andregradspolynom. Men for at denne funksjonen skal være fysisk realistisk trenger vi å være garantert at  $v(x)$  er ikke-negativ for positive argumenter. Vi antar altså at dette holder utenfor intervallet og vi vet da at det første leddet i parametriseringa er ikke-negativt. Dermed er  $v(x)$  helt sikkert ikke-negativ hvis  $A$  er ikke-positiv siden begge leddene blir ikke-negative. Er imidlertid  $A$  positiv blir situasjonen annerledes og velger vi  $A$  stor nok vil  $v(x)$  kunne bli negativ på hele eller deler av intervallet. For å finne en betingelse på  $A$  som garanterer at  $v(x)$  er ikke-negativ benytter vi oss av et resultat, hentet fra [10], som gir en nedre grense for det første leddet i parantesen forutsatt at  $\alpha_0$  er negativ. Dette er en hensiktsmessig forutsetning i denne forbindelsen siden vi leter etter funksjoner med negativ realdel. Vi får da:

$$|\alpha_0| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^a tv(t)|\sigma(t)|dt,$$

siden  $tv(t)\sigma(t)$  er negativ til venstre for  $I$  og positiv til høyre for  $I$ . Likhet gjelder kun dersom  $v(t)$  er lik 0 til høyre for  $I$ . Det følger av dette at:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} v(t)\sigma(t) \frac{2t}{t^2 - x^2} dt \geq \frac{|\alpha_0|}{x^2}, \quad (48)$$

hvor vi kan komme så nært likhet vi ønsker ved å velge  $v(t)$  utenfor intervallet med støtte tilstrekkelig nært 0. Dette gir oss en nedre grense for parametriseringa  $v(x)$ :

$$v(x) \geq \frac{1}{|\sigma(x)|} \left( \frac{|\alpha_0|}{x^2} - A \right). \quad (49)$$

Ut fra dette er det enkelt å se at  $v(x)$  er garantert ikke-negativ i punktet  $x \in I$  hvis:

$$A \leq \frac{|\alpha_0|}{x^2}.$$

Siden  $x \leq b$  blir  $v(x)$  garantert ikke-negativ i alle punkter på intervallet hvis:

$$A \leq \frac{|\alpha_0|}{b^2}.$$

Jeg oppsummer disse resultatene i det følgende teoremet som er hovedresultatet i denne oppgaven.

**Teorem 6.3.** Anta at  $\alpha(x) = \mathcal{H}_1 v(x)$  er realdelen til en hermitsk  $H^2$ -funksjon for  $x \in I = [a, b]$ . La  $\alpha(x)$  være gitt ved:

$$\alpha(x) = \alpha_0 + A \left( x^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} \right), \quad (50)$$

hvor  $A$  og  $\alpha_0$  er konstanter, og anta at vi har oppfylt integrerbarhetsbetingelsen:

$$\int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} v(t) |\sigma(t)| dt < \infty.$$

1. Da er den tilhørende imaginærdelen til  $H^2$ -funksjonen parametrisert ved:

$$v(x) = \frac{1}{|\sigma(x)|} (\mathcal{H}_1((1 - \phi_I)\sigma v) - A). \quad (51)$$

for  $x \in I$ .

2. Anta at konstanten  $\alpha_0$ , som er gitt i (42), er negativ og at  $v(x)$  er ikke-negativ utenfor  $I$ . Da er  $v(x)$  ikke-negativ på  $I$  hvis  $A$  oppfyller:

$$A \leq \frac{|\alpha_0|}{b^2}.$$

## 6.4 Diskusjon

Jeg har nå funnet en klasse hermitske  $H^2$ -funksjoner, med positiv imaginærdel for positive argumenter, hvor vi kan parametrisere imaginærdelen på et intervall. Det er klart at dette ikke er de eneste hermitske  $H^2$ -funksjonene som har positiv imaginærdel for positive argumenter, og spørsmålet er nå om vi kommer noe videre med den metoden jeg har brukt her. Vanskeligheten ligger i å evaluere integralet (43). Teknikken jeg har brukt er å se på det som en hilberttransform av imaginærdelen til en  $H^p$ -funksjon for  $1 < p < \infty$ , og deretter bruke Marcel Riesz teorem. Denne teknikken er svært elegant når den fungerer, men den forutsetter altså at  $\alpha(x)$  er reell, like og oppfyller:

$$\left( \sigma(z)^{-1} + \frac{a^2 + b^2}{2} - z^2 \right) \alpha(z) + C' \in H^p.$$

Dette setter dessverre meget strenge krav til  $\alpha(x)$  og jeg viser nå at det like andregradspolynomet  $Ax^2 + B$  faktisk er den eneste funksjonen som oppfyller dette.

Anta at  $\alpha(x)$  oppfyller disse betingelsene. Vi vet at funksjonen i parentes oppfører seg som  $O(1/z^2)$  når  $z \rightarrow \infty$ , og fra rekkeutviklinga av  $\sigma(z)^{-1}$  finner vi at konstanten foran  $(1/z^2)$ -leddet er  $-(a^2 + b^2)^2/8$ . Vi setter nå:

$$\alpha(x) \equiv \psi(x) + C' \frac{8}{(a^2 + b^2)^2} x^2,$$

slik at konstanten  $C'$  forsvinner. Det følger da fra  $H^p$ -tilhørigheten at funksjonen  $\psi(x)/(1+x^2)$  er i  $L^p$ . La oss først observere at  $\psi(z)$  ikke kan ha nullpunkter i det øvre halvplan

med mindre den er akkurat lik 0. Hvis  $\omega$  er et slikt punkt vil  $\psi(z)/[(z - \omega)(z - \bar{\omega})]$  være en reell funksjon i  $H^p$  som kun er mulig hvis funksjonen er akkurat lik 0. Det følger av dette at  $\psi(z)$  er en såkalt *ytre funksjon* (se [2] s. 66-67). Den kan da skrives som  $\exp(\log|\psi| + i \arg \psi)$  hvor  $\arg \psi$  er den harmoniske konjugerte (altså hilberttransformen) til  $\log|\psi|$ . Siden  $\psi(x)$  er like vil  $\arg \psi$  bli 0 på den imaginære akse slik at  $\psi(z)$  er reell der. Da vil funksjonen  $\psi(z) - \psi(i)$  være en reell funksjon med nullpunkt i  $z = i$ , og vi får at  $(\psi(z) - \psi(i))/(z^2 + 1)$  er en reell funksjon i  $H^p$ . Dermed må  $\psi(z)$  være konstant, og jeg har vist at andregradspolynom på formen  $Ax^2 + B$  er de eneste funksjonene som oppfyller betingelsen.

Man kan riktignok i betingelsen (44) trekke fra flere ledd fra rekkeutviklingen av  $\sigma(x)^{-1}$ , og på den måten tillate  $\alpha(x)$  av en høyere orden enn 2. Da vil  $\alpha(x)$  måtte tilfredstille  $\alpha(0) = 0$ , siden leddene vil ha singulariteter i origo. Disse løsningene ser imidlertid ikke ut til å være spesielt interessante i forhold til oppløsningen på linsa, uten at jeg kan si at jeg har utforsket dette fullt ut.

Den andre betingelsen på  $\alpha(x)$ , gitt i (46), er nødvendig fordi funksjonen  $\sigma(x)$  ikke er i  $L^2$ . Derimot er  $\sigma(x)$  i  $L^p$  for  $1 < p < 2$ , og skulle vi lete etter parametriseringer av imaginærdelen i disse rommene ville vi unnsnippe betingelsen (46). Alle like andregradspolynom ville da gi løsninger i disse rommene. Imidlertid ville disse løsningene ha singulariteter i endepunktene av intervallet, noe som ikke er realistisk i forhold til at vi ser på  $v(x)$  som imaginærdelen til  $\chi$  eller  $n$ .

Det er da naturlig å spørre om det er mulig å bruke andre teknikker for å evaluere integralet (43). Men dette er et singulært integral og det gjør det vanskelig å få evaluert analytisk. Dermed kan det se ut til at denne tilnærmingen ikke bringer oss noe lengre, iallefall ikke med analytiske metoder.

## 7 Oppløsning

### 7.1 Grenser for oppløsning

Vi husker at susceptibilitetene  $\chi$  er hermitske  $H^2$ -funksjoner og at oppløsningen til Veselago-Pendry-linsa avhenger av disse funksjonenes real- og imaginærdeler som utledet i seksjon 5.3. I Teorem 6.3 fant vi en klasse hermitske  $H^2$ -funksjoner hvor imaginærdelen  $v(x)$  er parametrisert ved (51) for  $x \in I = [a, b]$ , forutsatt at realdelen  $\alpha(x)$  på det samme intervallet er et spesielt andregradspolynom, gitt i (50). Dette gjelder hvis imaginærdelen utenfor intervallet ikke vokser for voldsomt nært endepunktene av intervallet. I vår anvendelse hvor  $H^2$ -funksjonene er susceptibiliteter utgjør ikke dette noe problem. Setter vi konstanten  $A$  i realdelen lik 0 får vi tilfellet med konstant realdel  $\alpha_0$  som er utforsket i [10]. Det følger da fra (48) at parametriseringen av imaginærdelen er nedre begrenset av funksjonen  $|\alpha_0|/(x^2|\sigma(x)|) \equiv v_{min}$ , forutsatt at konstanten  $\alpha_0$  er negativ (vi antar i det følgende at den er det). Den største verdien til det minste tapet  $v_{min}$  på intervallet er da gitt ved:

$$\|v_{min}\|_{\infty} = |\alpha_0| \frac{b^2 - a^2}{2ab}. \quad (52)$$

Spørsmålet er nå om noen annen verdi av  $A$  vil gi bedre oppløsning på intervallet. Merk først at negative  $A$  er helt uinteressante siden de vil gi større imaginærdel enn ved  $A = 0$  på hele intervallet, i tillegg til en variasjon i realdelen. Men med positiv  $A$  mellom 0 og  $|\alpha_0|/b^2$  vil imaginærdelen bli mindre enn ved tilfellet med konstant realdel, og det er muligheter for å oppnå bedre oppløsning. Verdier av  $A$  større enn  $|\alpha_0|/b^2$  er igjen uinteressante siden  $v(x)$  da ikke er garantert å oppfylle passivitetskriteriet for elektromagnetiske medier. Vi setter nå  $A = \lambda|\alpha_0|/b^2$  hvor  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Fra (48) får vi at imaginærdelen er nedre begrenset av funksjonen:

$$v_{min} = \sqrt{b^2 - x^2} \sqrt{x^2 - a^2} \left( \frac{|\alpha_0|}{x^2} - A \right) = |\alpha_0| \frac{\sqrt{b^2 - x^2} \sqrt{x^2 - a^2} \left( 1 - \frac{\lambda x^2}{b^2} \right)}{x^2}. \quad (53)$$

Likhet kan på samme måte som i tilfellet med konstant realdel oppnås asymptotisk ved å velge  $v(t)$  (utenfor intervallet) med støtte tilstrekkelig nært 0. Den aller minste imaginærdelen får vi ved å velge  $\lambda = 1$ . Da er:

$$\|v_{min}\|_{\infty} = |\alpha_0| \frac{\sqrt{4b^2 - Q} \sqrt{Q - 4a^2} \left( 1 - \frac{Q}{4b^2} \right)}{Q},$$

hvor:

$$Q = a^2 - b^2 + \sqrt{a^4 + b^4 + 14a^2b^2}.$$

Men selv om dette er den løsningen som gir det minste tapet på intervallet så er det på bekostning av en variasjon i realdelen. Vi husker fra seksjon 5.3 at den størrelsen det er mest interessant å minimere er:

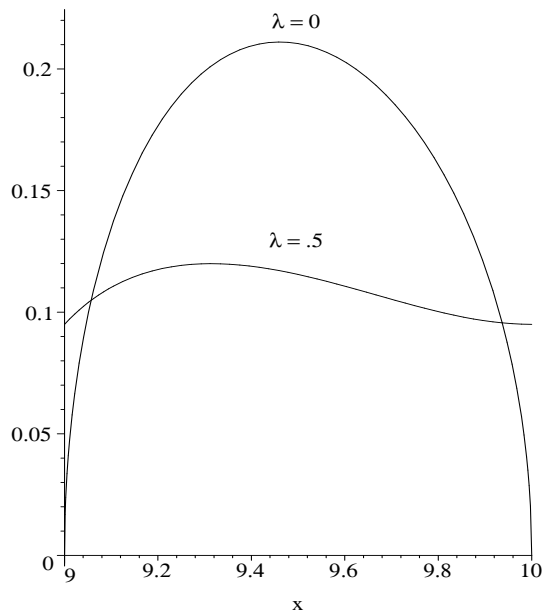
$$|\chi + 2| = \sqrt{(\alpha(x) + 2)^2 + v(x)^2},$$

og i det følgende konsentrerer vi oss om denne. Vi skal finne en nedre grense for denne funksjonen på intervallet og er særlig interessert i hvilke  $\lambda$  som minimerer  $L^{\infty}$ -normen til denne nedre grensen. Det er også interessant å minimere andre  $L^p$ -normer. Vi definerer nå *båndbredden* til intervallet  $I$  som  $\Delta = (b-a)/b$ . Vi skal se på relativt små båndbredder siden tapet i mediene ellers vil bli for stort. Jeg skal bruke  $\Delta$  lik 0.1, 0.01, 0.001 og 0.0001 som testbåndbredder. Siden vi er interessert i å finne de nedre grensene setter vi i det følgende  $\alpha_0 = -2$  som er dens optimale verdi, iallefall for relativt små båndbredder som de vi ser på her.

Generelt får vi fra (50) og (53) at  $|\chi + 2|$  er nedre begrenset av funksjonen:

$$\begin{aligned} |\chi + 2|_{min} &= \sqrt{4 \left( \frac{\lambda^2}{b^4} \left( x^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} \right)^2 + \frac{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2) \left( 1 - \frac{\lambda x^2}{b^2} \right)^2}{x^4} \right)} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \frac{(b^2 - a^2)^2}{b^4} + 4 \frac{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}{x^4} \left( 1 - 2\lambda \frac{x^2}{b^2} \right)}. \end{aligned}$$

Merk at for  $\lambda = 0$  er  $|\chi + 2| = v$  slik at (52) også er løsningen også på det tilsvarende ekstremalproblemet for  $|\chi + 2|$ . For  $0 < \lambda \leq 1$  er  $|\chi + 2|_{min}$  mindre enn tilsvarende funksjon med  $\lambda = 0$  midt på intervallet, og større i to intervaller nært endepunktene. Hvor store disse intervallene er avhenger av  $\lambda$  og båndbredden. I figur 5 har jeg plottet  $|\chi + 2|_{min}$  for  $\lambda$  lik 0 og 0.5 på et intervall med båndbredde  $\Delta = 0.1$ .



Figur 5:  $|\chi + 2|_{min}$  for  $\lambda = 0, 0.5$

Vi går nå videre til å finne hvilke  $\lambda$  som minimerer  $L^\infty$ -normen til  $|\chi + 2|_{min}$ . Dette kan naturligvis gjøres ved derivasjon, men uttrykkene blir så stygge at jeg ikke finner det hensiktsmessig å gjengi dem her. Imidlertid kan vi observere at uttrykket under rottegnet i  $|\chi + 2|_{min}$  er en andregradsfunksjon av  $\lambda$  som har et bunnpunkt for hver  $x \in I$ , gitt ved:

$$\lambda = 4 \frac{b^2(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}{x^2(b^2 - a^2)^2}.$$

Dette uttrykket er positivt for alle  $x \in I$  bortsett fra endepunktene. Dermed vil den løsningen som minimerer  $L^\infty$ -normen til  $|\chi + 2|_{min}$  garantert ha  $\lambda > 0$ . Uttrykket vil riktignok kunne oppnå sin maksimale verdi i endepunktene for tilstrekkelig store  $\lambda$  på små båndbredder, men disse verdiene av  $\lambda$  vil ikke minimere  $L^\infty$ -normen.

I figur 6 har jeg plottet  $L^\infty$ -normen til  $|\chi + 2|_{min}$  som en funksjon av  $\lambda$  for testbåndbreddene 0.1, 0.01, 0.001 og 0.0001. Vi ser at den verdien av  $\lambda$  som minimerer  $L^\infty$ -normen ligger på rundt 0.5 for de tre minste båndbreddene og mellom 0.5 og 0.6 for den største båndbredden. Særlig legger vi merke til at den optimale verdien av  $\lambda$  nesten halverer  $L^\infty$ -normen til  $|\chi + 2|_{min}$  i forhold til tilfellet med konstant realdel hvor  $\lambda = 0$ . Dette gir at den realdelen som minimerer  $L^\infty$ -normen til den nedre grensa til  $|\chi + 2|$  for

små båndbredder, er omtrent:

$$\alpha(x) = -2 + \frac{1}{b^2} \left( x^2 - \frac{a^2 + b^2}{2b^2} \right), \quad (54)$$

som er realdelen fra Teorem 6.3 med  $A = |\alpha_0|/(2b^2)$ , altså med  $\lambda = 1/2$ .

Hvis man ønsker å minimere en annen  $L^p$ -norm blir situasjonen litt annerledes. I figur 7 har jeg plottet  $L^1$ -normen til  $|\chi + 2|_{min}$  for de samme båndbreddene. Vi ser her at de verdiene av  $\lambda$  som minimerer  $L^1$ -normen er høyere enn de som minimerer  $L^\infty$ -normen. Nærmere bestemt litt over 0.8 for den største båndbredden og litt under 0.8 for de tre minste. Vi ser at  $|\chi + 2|_{min}$  for den optimale verdien  $\lambda$  er litt under to tredeler av verdien for  $\lambda = 0$ .

## 7.2 Superposisjon

Vi fortsetter å se på susceptibilitetene  $\chi$  som er hermitske  $H^2$ -funksjoner. Jeg har til nå jobbet med  $H^2$ -funksjoner med spesifisert realdel på et intervall og blant annet funnet en nedre grense for imaginærdelen til disse på intervallet. Det er naturligvis også mulig å benytte den motsatte innfallsvinkelen hvor man spesifiserer imaginærdelen og ser hva som skjer med realdelen. I artikkelen [11] er det funnet en nedre grense for variasjonen til realdelen gitt at imaginærdelen er satt lik 0 på intervallet. I samme artikkelen er det også sett på superposisjoner av denne funksjonen og funksjoner med konstant realdel på intervallet. Inspirert av dette ser jeg nå på superposisjoner av funksjoner med imaginærdel lik 0 på intervallet, og funksjonene med spesifisert realdel gitt i Teorem 6.3. Som i forrige delseksjon er vi ute etter å finne grensene for hvor høy oppløsning som er mulig å oppnå. Særlig er vi ute etter superposisjonen som minimerer  $L^\infty$ -normen til den minste mulige funksjonen  $|\chi + 2|$ .

Jeg begynner med å se på tilfellet med imaginærdel  $v(x) = 0$  på intervallet  $I = [a, b]$ . Fra Kramers-Kronig-relasjonene får vi at realdelen  $u(x)$  er gitt ved:

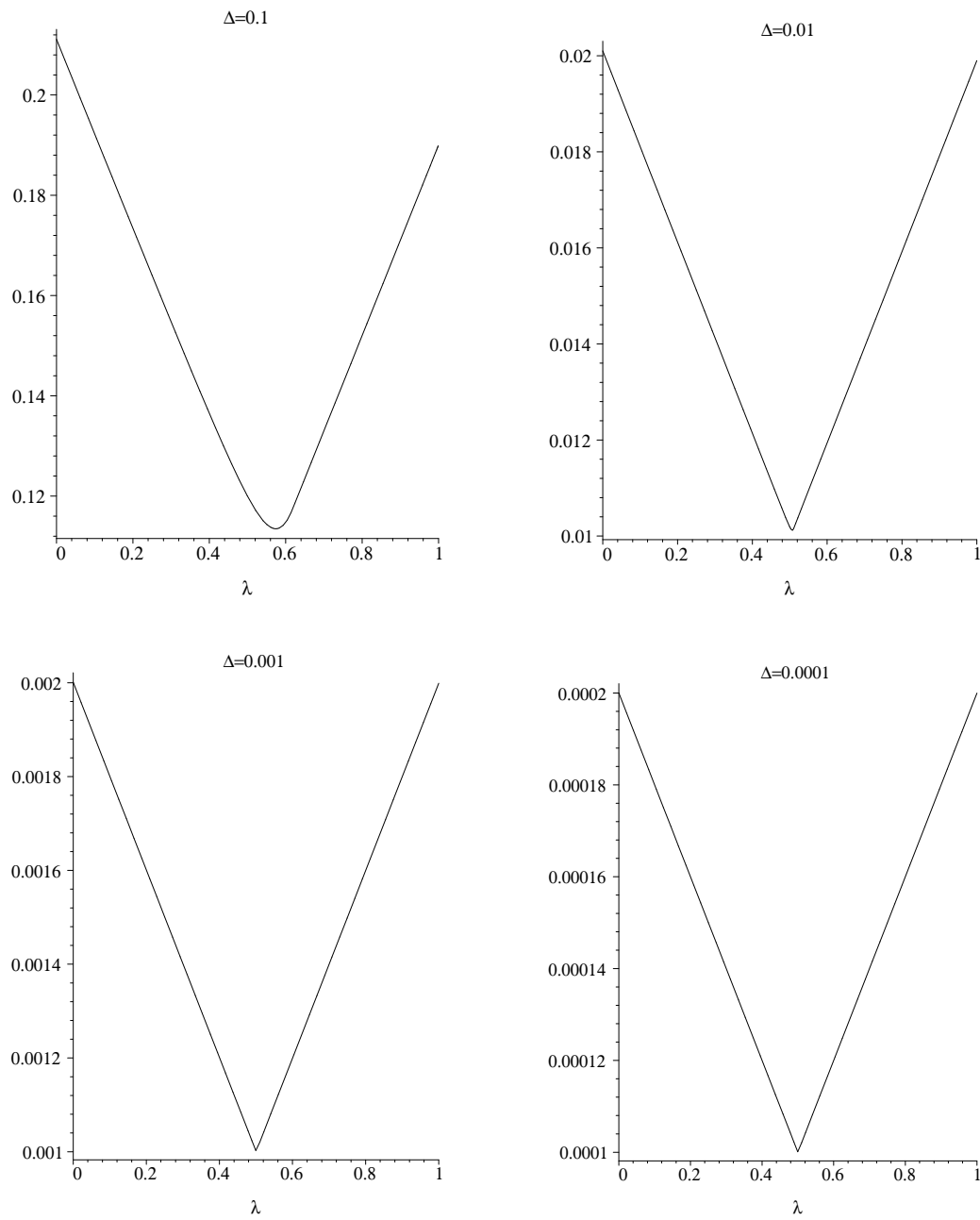
$$u(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{v(t)t}{x^2 - t^2} dt + \frac{2}{\pi} \int_b^\infty \frac{v(t)t}{t^2 - x^2} dt,$$

for  $x \in I$ , hvor begge leddene er voksende funksjoner av  $x$ . For at  $u(x)$  skal bli negativ må det første leddet være større enn det andre i absoluttverdi. I grensen hvor det andre leddet forsvinner får vi:

$$u(x) - u(a) = -\frac{2}{\pi} \int_0^a v(t)t \left( \frac{1}{x^2 - t^2} - \frac{1}{a^2 - t^2} \right) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{v(t)t}{a^2 - t^2} \frac{x^2 - a^2}{x^2 - t^2} dt.$$

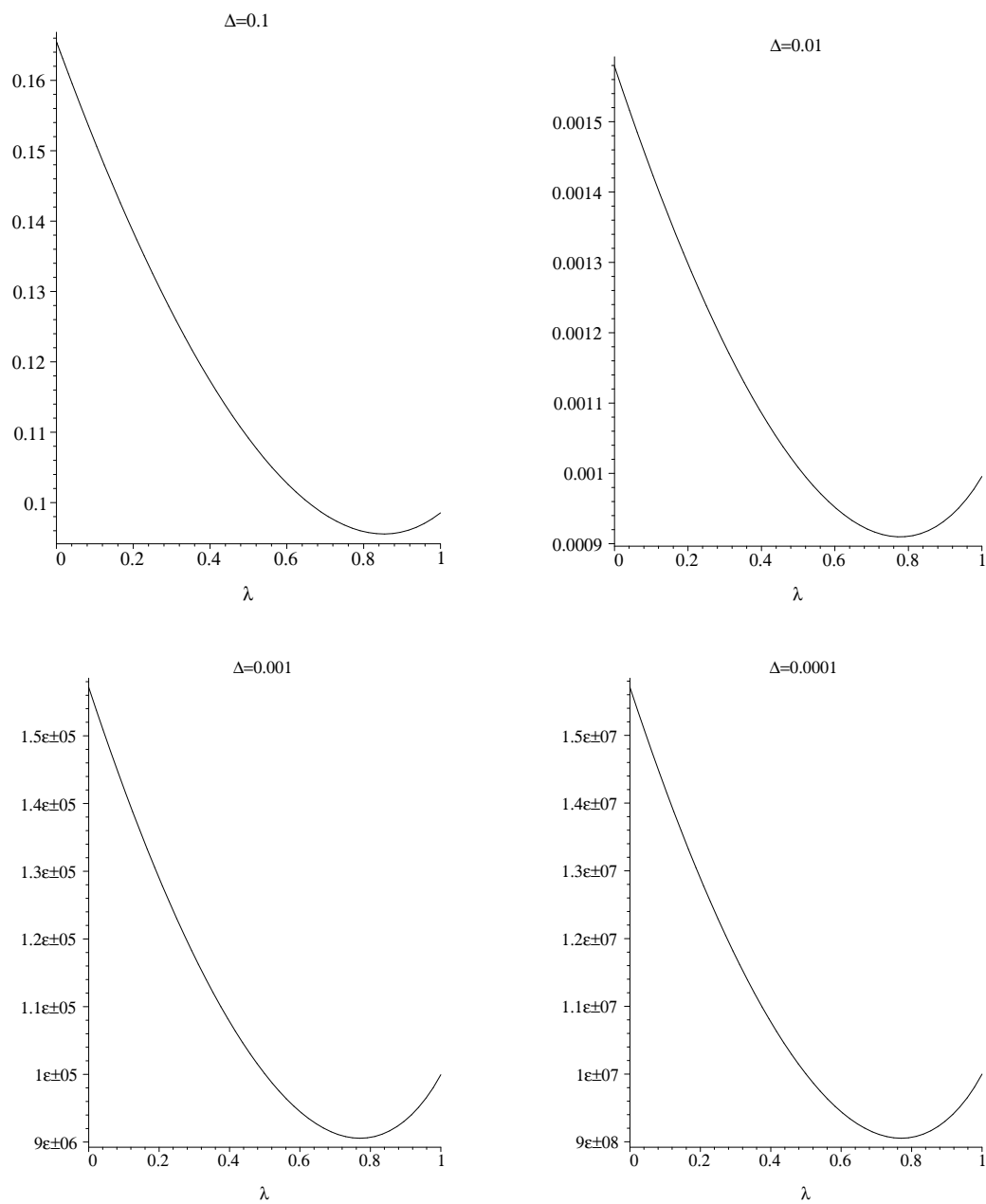
Siden  $x \in I$  og  $t \in [0, a]$  får vi at  $(x^2 - a^2)/(x^2 - t^2) \geq (x^2 - a^2)/x^2$  som fører til denne nedre grensen for variasjonen til realdelen på intervallet:

$$u(x) - u(a) \geq |u(a)| \frac{x^2 - a^2}{x^2},$$



Figur 6:  $L^\infty$ -normen til  $|\chi + 2|_{\min}$  som funksjon av  $\lambda$  for forskjellige båndbredder





Figur 7:  $L^1$ -normen til  $|\chi + 2|_{\min}$  som funksjon av  $\lambda$  for forskjellige båndbredder

hvor  $u(a)$  er en negativ konstant. Vi kan vi komme så nært likhet vi vil ved å velge en  $v(t)$  med støtte nært nok 0, på samme måte som de tilsvarende grensene for imaginærdelene til  $H^2$ -funksjonene med spesifiserte realdeler.

Vi ser altså på funksjoner  $\chi_e = \epsilon_r - 1$  eller  $\chi_m = \mu_r - 1$  i rommet  $H^2$  av analytiske og kvadratisk integrerbare funksjoner i det øvre halvplan. Gitt nå to funksjoner  $f_1 - 1$  og  $f_2 - 1$  som oppfyller disse betingelsene. Det er da klart at en superposisjon av disse på formen:

$$\beta(f_1 - 1) + (1 - \beta)(f_2 - 1) = \beta f_1 + (1 - \beta)f_2 - 1,$$

for  $0 \leq \beta \leq 1$ , også vil oppfylle de samme betingelsene. Vi lar  $f_1 - 1$  være  $H^2$ -funksjonen med minste mulige variasjon i realdelen av de funksjonene som har imaginærdel lik 0 på intervallet. Videre lar vi  $f_2 - 1$  være  $H^2$ -funksjonen med realdel som i Teorem 6.3 og dens tilhørende minste mulige imaginærdel gitt i (53). Superposisjonen av disse blir da en  $H^2$ -funksjon som vi kaller  $\chi_{min}$ :

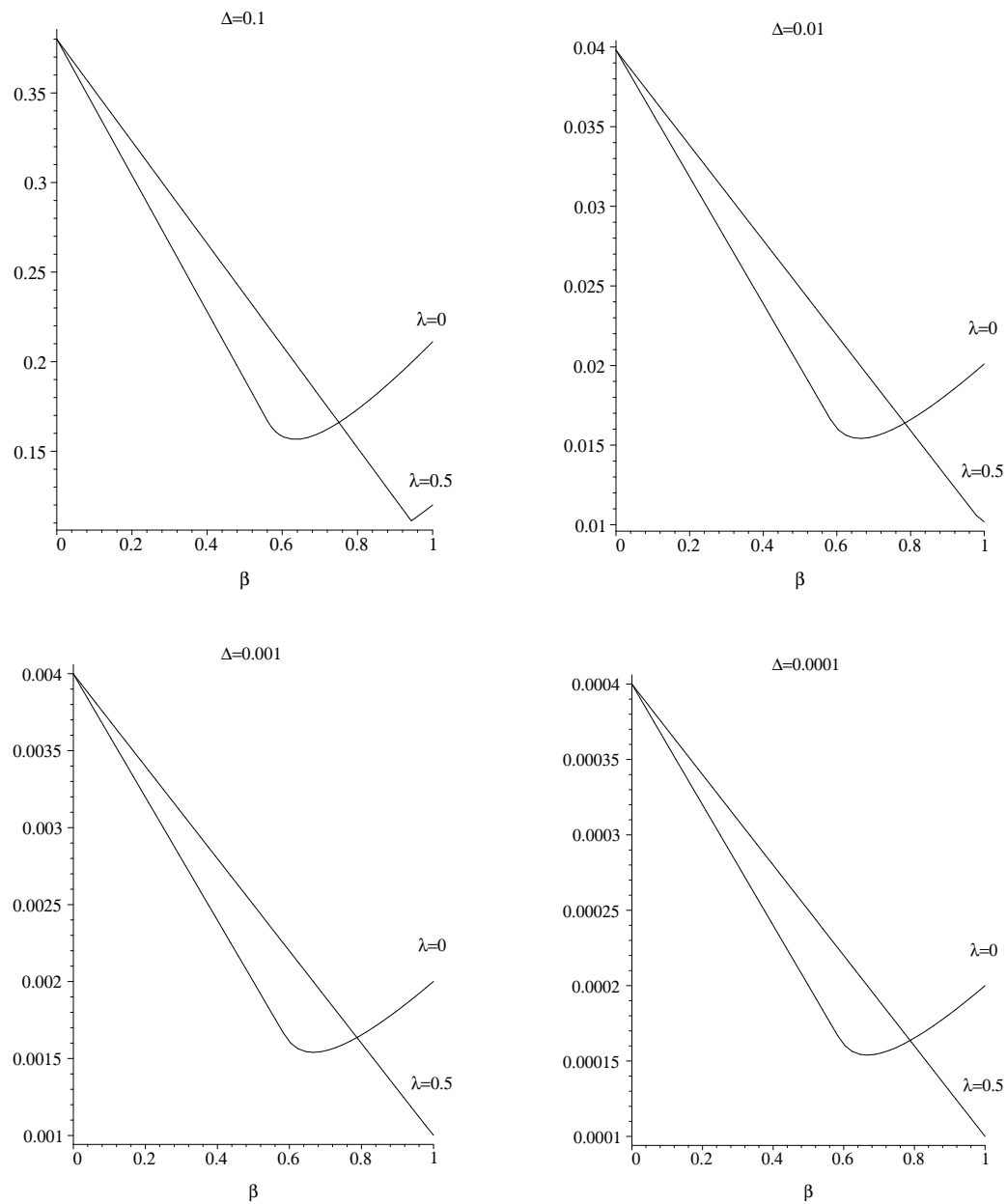
$$\begin{aligned} \chi_{min} &= (1 - \beta) \left( u(a) + |u(a)| \frac{x^2 - a^2}{x^2} \right) + \beta \left( \alpha_0 + \lambda \frac{|\alpha_0|}{b^2} \left( x^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} \right) \right) \\ &+ i\beta \left( |\alpha_0| \frac{\sqrt{b^2 - x^2} \sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} \left( 1 - \lambda \frac{x^2}{b^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Jeg velger nå konstantene  $\alpha_0$  og  $u(a)$  begge lik  $-2$  slik at  $(1 - \beta)u(a) + \beta\alpha_0 + 2 = 0$ . Det er slett ikke lenger sikkert at dette er de optimale valgene av disse, og det lar seg raskt verifisere at for relativt store båndbredder kan det være noe å vinne på å velge f.eks  $u(a)$  litt mindre enn  $-2$ . Vi er imidlertid mest opptatt av små båndbredder og da vil avviket til  $(1 - \beta)u(a) + \beta\alpha_0$  fra  $-2$  fort bli relativt stort i forhold til realdelens variasjon på intervallet, slik at konstantene lik  $-2$  er det beste valget. Størrelsen  $|\chi + 2|$  er da nedre begrenset av funksjonen:

$$|\chi + 2|_{min} = \sqrt{\left( 2(1 - \beta) \frac{x^2 - a^2}{x^2} + 2\lambda\beta \frac{2x^2 - a^2 - b^2}{2b^2} \right)^2 + \beta^2 \frac{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)(1 - \lambda \frac{x^2}{b^2})^2}{x^4}},$$

for enhver  $0 \leq \beta \leq 1$  og  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Setter vi  $\beta = 1$  får vi situasjonen jeg så på i forrige delseksjon og setter vi  $\beta = 0$  får vi tilfellet med  $v = 0$  på intervallet.

Jeg er nå ute etter å finne den beste superposisjonen av disse løsningene. I figur 8 har jeg plottet  $L^\infty$ -normen til  $|\chi + 2|_{min}$  for  $\lambda = 0$  og  $\lambda = 0.5$  på de forskjellige båndbreddene. Grunnen til at jeg har valgt  $\lambda = 0.5$  er at dette er nært den verdien som minimerer  $L^\infty$ -normen til  $|\chi + 2|_{min}$  for funksjonene i Teorem 6.3 på små båndbredder, som vi så i figur 6. Vi sammenligner denne med  $\lambda = 0$  som altså tilsvarende superposisjonen med funksjonen med konstant realdel. Vi ser av plottene for det første at den beste superposisjonen med  $\lambda = 0.5$  gir høyere oppløsning enn den beste superposisjonen med  $\lambda = 0$ . For det andre ser vi at den beste verdien av  $\beta$  for  $\lambda = 0.5$  ligger nært 1 for  $\Delta = 0.1$  og er lik 1 for de mindre båndbreddene. Dette sier oss at det er lite å vinne på denne superposisjonen i forhold til å minimere  $L^\infty$ -normen til den nedre grensa  $|\chi + 2|_{min}$ , men det kan være noe på relativt sett store båndbredder.



Figur 8:  $L^\infty$ -normen til  $|\chi + 2|_{\min}$  som funksjon av  $\beta$  for forskjellige båndbredder

## 8 Konklusjon

Fenomenet negativ brytning har de siste årene vært subjekt for stor interesse blant mange forskere. Dette er på grunn av at man nå er i stand til å produsere medier hvor realdelene til  $\epsilon$  og  $\mu$  er simultant negative. En av de mest interessante anvendelsene av dette er Veselago-Pendry-linsa som i prinsippet kan oppnå ubegrenset høy oppløsning for en frekvens. Jeg har her særlig vært interessert i å finne teoretiske grenser for oppløsningen til denne linsa på et frekvensintervall. Svært interessant i den sammenheng er uttrykket som er utledet i seksjon 5.3 for oppløsningen til linsa som funksjon av real- og imaginærdelene til  $\epsilon_r$  og  $\mu_r$ . Uttrykket er gitt i (29) og spesielt sier det at vi må minimere størrelsen  $|\chi + 2|$ , hvor  $\chi$  er enten  $\epsilon_r - 1$  eller  $\mu_r - 1$ , for å oppnå best mulig oppløsning.

For å studere oppløsningen til linsa har jeg tatt utgangspunkt i et kjent resultat fra optikken, kalt Kramers-Kronig-relasjonene, som sier at real- og imaginærdelene til  $\chi$  er hilberttransformpar. Dette følger av at  $\chi$  er i rommet av analytiske og kvadratisk integrerbare funksjoner i det øvre halvplan, kalt  $H^2$ . Vi vet også om disse funksjonene at de er hermitske og at deres imaginærdeler er ikke-negative for positive argumenter siden vi ser på passive medier. I artikkelen [10] er det funnet en parametrisering av imaginærdelen til en slik hermitsk  $H^2$ -funksjon på et intervall, gitt at realdelen er satt konstant på intervallet. I seksjon 6.3 har jeg identifisert denne som et element i en større klasse  $H^2$ -funksjoner hvor vi kan parametrisere imaginærdelen på et intervall, gitt at realdelen er et like andregradspolynom på formen (50). Jeg har også funnet et kriterie på disse som sikrer at imaginærdelene er ikke-negative for positive argumenter slik at funksjonene er realistiske.

I seksjon 7 har jeg så funnet ut hvilke av disse funksjonene som gir den høyeste øvre grensen for oppløsning på små båndbredder, dvs den laveste nedre grensen for  $|\chi + 2|$ . Jeg har særlig vært interessert i å minimere  $L^\infty$ -normen til  $|\chi + 2|$  over intervallet, men også andre  $L^p$ -normer er interessante. Det er interessant å se at løsningen med konstant realdel på intervallet langt fra er den løsningen som gir høyest øvre grense for oppløsning. Spesielt vil vi kunne omtrent halvere  $L^\infty$ -normen til den nedre grensen til  $|\chi + 2|$  ved å velge realdelen til  $\chi$  lik  $(x^2 - (a^2 + b^2)/2)/b^2 - 2$  på intervallet, som tilsvarer  $\lambda = 0.5$  jamnfør notasjonen i seksjon 7. Jeg så i samme seksjon også på superposisjoner mellom disse funksjonene og funksjoner med konstant imaginærdel lik 0 på intervallet. Det viste seg da at på små båndbredder er det lite eller ingenting å vinne på å gjøre disse superposisjonene i forhold til grensene for oppløsning.

Selv om vi her har funnet funksjoner på intervallet som betraktelig forbedrer den øvre grensen for oppløsning (i forhold til funksjonene med konstant realdel eller imaginærdel lik 0 på intervallet), så vet vi ingenting om hvor nært vi er den øverste mulige grensen av alle fysisk realistiske funksjoner på intervallet. Det er imidlertid usikkert om det er mulig å finne en slik grense med denne tilnærmingen. Problemet ligger først og fremst i at det er vanskelig å evaluere hilberttransformen av  $\text{Im}(\sigma(x)^{-1}\alpha(x))$  for generelle realdeler  $\alpha(x)$  på intervallet, slik vi trenger å gjøre for å finne parametriseringer av imaginærdelen. For å komme videre med dette kan det se ut til at man må prøve andre innfallsvinkler.

## Referanser

- [1] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company (1966)
- [2] John B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press (1981)
- [3] Theodore W. Gamelin, *Complex Analysis*, Springer (2001)
- [4] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, third edition, Prentice Hall (1999)
- [5] L. D Landau og E.M Lifshitz, *Electrodynamics and Continous Media*, Volume 8 of *Course of Theoretical Physics*, Pergamon Press (1966).
- [6] K.-E. Peiponen, E.M. Vartiainen og T. Asakura *Dispersion, Complex Analysis and Optical Spectroscopy*, Springer (1999)
- [7] E. C. Titchmarsh *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Univ. Press, Oxford, (1937)
- [8] John B. Pendry *Negative Refraction* Contemporary Physics, **45**, 191 (2004)
- [9] John B. Pendry *Negative Refraction Makes a Perfect Lens*, Phys. Rev. Lett. **85**, 3966 (2000)
- [10] Kristian Seip & Johannes Skaar *An extremal Problem related to negative Refraction* Det kongelige norske videnskabers selskap, Skrifter 2005, nr. 3
- [11] Kristian Seip & Johannes Skaar *On the Refractive Indices of Passive and Active Media*, arXiv:physics/0507001 v1 (2005)
- [12] F. G. Tricomi *Integral Equations*, Dover Publications, Inc. (1985)
- [13] J. N. Pandey *The Hilbert Transform of Schwartz Distributions and Applications*, John Wiley & Sons, Inc (1996)
- [14] V.G. Veselago, Soviet Physics Uspekhi **10**, 509 (1968)
- [15] Johannes Skaar *Negative Refraction: A tutorial*, Institutt for Elektronikk og Telekommunikasjon ved NTNU (2005)
- [16] Johannes Skaar *Fresnel equations and the refractive index of active media*, Physical Review E **73**, 026605 (2006)