

Numerisk simulering av strømning omkring anisotrope partikler

Øyvind W Hanssen-Bauer

Master i energi og miljø

Innlevert: juni 2013

Hovedveileder: Helge Ingolf Andersson, EPT

Medveileder: Christopher Nilsen, EPT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for energi- og prosesseteknikk

EPT-M-2013-47

MASTEROPPGAVE

for

Stud.techn. Øyvind W. Hanssen-Bauer

Våren 2013

Numerisk simulering av strømning omkring anisotrope partikler

*Numerical simulation of flow around anisotropic particles***Bakgrunn og målsetting**

Strømning med faste partikler i luft eller vann forekommer i naturen så vel som i industrien. Det antas vanligvis at partiklene er kuleformete men i virkeligheten har de ofte en annen form. En hensiktsmessig modell for en anisotrop partikkel er en ellipsoide med prolate (lange) og oblate (flate) sfæroider som to viktige spesialtilfeller. Oppgaven går ut på å kartlegge strømningsmotstanden på en anisotrop partikkel og hvordan denne avhenger av partikkelen sin form og plassering i forhold til strømmingen. Oppgaven skal konsentreres om laminær strømning ved lave Reynolds tall $Re \ll 100$. Strømmingen beskrives av Navier-Stokes ligningene og disse må løses i tre dimensjoner ved hjelp av den åpne programvaren OpenFOAM.

Oppgaven bearbeides ut fra følgende punkter

- 1 Kandidaten må gjøre seg kjent med OpenFOAM og demonstrere at han mestrer bruken av denne programvaren ved å simulere strømning omkring en kule ved et lavt Reynolds tall ($Re < 10$).
- 2 Simulering av strømning omkring en prolata sfæroide med noen forskjellige orienteringer av hovedaksen i forhold til strømmingen.
- 3 Simulering av strømning omkring en prolata sfæroide ved noen forskjellige men lave Reynolds tall.
- 4 Simulering av strømning omkring en prolata sfæroide først i uniform strøm og deretter i skjærstrømning. Diskuter virkningen av skjær.
- 5 Resultatene skal der det er mulig sammenlignes med G.B. Jeffery (Proc. Roy. Soc.) sine analytiske løsninger for $Re = 0$ fra 1922 og resultater fra tidligere simuleringer.

” - ”

Senest 14 dager etter utlevering av oppgaven skal kandidaten levere/sende instituttet en detaljert fremdrift- og eventuelt forsøksplan for oppgaven til evaluering og eventuelt diskusjon med faglig ansvarlig/veiledere. Detaljer ved eventuell utførelse av dataprogrammer skal avtales nærmere i samråd med faglig ansvarlig.

Besvarelsen redigeres mest mulig som en forskningsrapport med et sammendrag både på norsk og engelsk, konklusjon, litteraturliste, innholdsfortegnelse etc. Ved utarbeidelsen av teksten skal kandidaten legge vekt på å gjøre teksten oversiktlig og velskrevet. Med henblikk på lesning av besvarelsen er det viktig at de nødvendige henvisninger for korresponderende steder i tekst, tabeller og figurer anføres på begge steder. Ved bedømmelsen legges det stor vekt på at resultatene er grundig bearbeidet, at de oppstilles tabellarisk og/eller grafisk på en oversiktlig måte, og at de er diskutert utførlig.

Alle benyttede kilder, også muntlige opplysninger, skal oppgis på fullstendig måte. For tidsskrifter og bøker oppgis forfatter, tittel, årgang, sidetall og eventuelt figurnummer.

Det forutsettes at kandidaten tar initiativ til og holder nødvendig kontakt med faglærer og veileder(e). Kandidaten skal rette seg etter de reglementer og retningslinjer som gjelder ved alle (andre) fagmiljøer som kandidaten har kontakt med gjennom sin utførelse av oppgaven, samt etter eventuelle pålegg fra Institutt for energi- og prosesssteknikk.

Risikovurdering av kandidatens arbeid skal gjennomføres i henhold til instituttets prosedyrer. Risikovurderingen skal dokumenteres og inngå som del av besvarelsen. Hendelser relatert til kandidatens arbeid med uheldig innvirkning på helse, miljø eller sikkerhet, skal dokumenteres og inngå som en del av besvarelsen. Hvis dokumentasjonen på risikovurderingen utgjør veldig mange sider, leveres den fulle versjonen elektronisk til veileder og et utdrag inkluderes i besvarelsen.

I henhold til "Utfyllende regler til studieforskriften for teknologistudiet/sivilingeniørstudiet" ved NTNU § 20, forbeholder instituttet seg retten til å benytte alle resultater og data til undervisnings- og forskningsformål, samt til fremtidige publikasjoner.

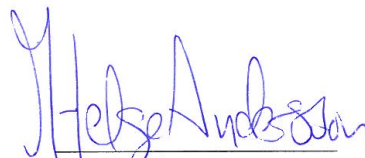
Besvarelsen leveres digitalt i DAIM. Et faglig sammendrag med oppgavens tittel, kandidatens navn, veileders navn, årstall, instituttnavn, og NTNUs logo og navn, leveres til instituttet som en separat pdf-fil. Etter avtale leveres besvarelse og evt. annet materiale til veileder i digitalt format.

- Arbeid i laboratorium (vannkraftlaboratoriet, strømningsteknisk, varmeteknisk)
 Feltarbeid

NTNU, Institutt for energi- og prosesssteknikk, 14. januar 2013



Olav Bolland
Instituttleder



Helge Andersson
Faglig ansvarlig/veileder

Medveileder: Ph.D. stipendiat Christopher Nilsen

Forord

Denne rapporten er et resultat av min masteroppgave ved Institutt for energi- og prosesseteknikk, NTNU, våren 2013. Oppgaven er utført over tjue uker og har utgjort det siste semesteret ved sivilingeniørstudiet Energi og Miljø.

Jeg vil takke min veileder Helge I. Andersson for god oppfølging og støtte gjennom hele prosessen. I tillegg vil jeg takke stipendiat Christopher Nilsen for hjelp med refleksjoner og innspill underveis i arbeidet og for alltid å være tilgjengelig for hjelp. Han har også gitt mange og gode tilbakemeldinger ved utformingen av denne rapporten. Jeg må rette en stor takk til Håkon Strandenæs for tips og hjelp til OpenFOAM, som har reddet meg ut av mange vanskeligheter. Her har Dmitry Lysenko også vært til god hjelp.

Trondheim 10/06-2013

Øyvind W. Hanssen-Bauer

Øyvind W. Hanssen-Bauer

Sammendrag

I denne studien er uniform strømning og lineær skjærstrømning omkring partikler ved lave Reynoldstall simulert ved hjelp av den åpne programvaren OpenFOAM. Fra resultatene framkommer det at ved uniform strømning avtar motstandskoeffisienten C_D ved økende $Re_D = \frac{U \cdot 2a}{\nu}$, mens det ved skjærstrømning er sett en tilsvarende reduksjon i momentkoeffisienten C_M ved økende skjær-Reynoldstall $Re_{\dot{\gamma}} = \frac{\dot{\gamma} \cdot (2a)^2}{\nu}$. Her er U fristrøms hastigheten i den uniforme strømningen, $\dot{\gamma}$ er skjærraten i skjærstrømningen, $2a$ er den karakteristiske lengden til partikkelen og ν er den dynamiske viskositeten til fluidet. For uniform strømning viser simuleringene en økning i C_D når vinkelen mellom hovedaksen til en avlang partikkel og strømningsretningen blir større. For C_M i en skjærstrømning er det også en økning når denne vinkelen blir større, men denne økningen er svært mye større enn for C_D i en uniform strømning.

Resultatene av simuleringene er sammenlignet med Stokes-strømningen, strømning der treghetsleddet i Navier-Stokes likninger er neglisjert. Denne forenklingen er kun strengt gyldig hvis Reynoldstallet $Re=0$. Resultatene viser imidlertid at Stokes-strømningen kan være en god tilnærming ved strømning omkring partikler ved Re ulik null. For strømning med uniformt hastighetsfelt ser det ut til at løsningen er en god tilnærming for Re_D opp mot 1. Over denne grensen begynner avviket derimot å bli betydelig. I lineær skjærstrømning er avviket mellom C_M fra simuleringene og i Stokes-strømningen lite for alle $Re_{\dot{\gamma}}$ det er sett på i denne studien, $Re_{\dot{\gamma}} \leq 5$. Ved å studere hastighetsfeltet rundt partikkelen kommer det derimot fram at strømningen begynner å bryte med Stokes-strømningen sin form ved økende $Re_{\dot{\gamma}}$. Det ser likevel ut til at for Re_D og $Re_{\dot{\gamma}}$ i samme størrelsesorden er det et Re_D ulik null som vil forårsake det største avviket fra Stokes-strømningen.

Siden størrelsen på partiklene i en rekke typer reelle partikkelstrømninger er svært små kan Reynoldstallet til strømningene være i samme størrelsesorden som de som det er sett på i denne studien, selv når strømningene er turbulente og hastigheten er høy. Funnene i denne studien antyder derfor at Stokes-strømningen kan være en god tilnærming ved flere reelle strømninger.

Abstract

In this study, uniform and linear shear flow around particles with low Reynolds number are simulated with the use of the open software OpenFOAM. The results show that the drag coefficient C_D from uniform flow decreases when the $Re_D = \frac{U \cdot 2a}{\nu}$ is increased, while with shear flow the same reduction has been seen for the moment coefficient C_M when the shear Reynolds number $Re_\gamma = \frac{\dot{\gamma} \cdot (2a)^2}{\nu}$ increases. Here, U is the free stream velocity in the uniform flow, $\dot{\gamma}$ is the shear rate in the shear flow, $2a$ is the characteristic length of the particle and ν is the dynamic viscosity of the fluid. For the uniform flow the simulations show an increase in C_D when the angle between the major axis of a prolate particle and the flow direction gets bigger. For C_M in a shear flow it is also an increase when this angle gets bigger, but this growth is much bigger than for C_D in a uniform flow.

The results from the simulations are compared with the Stokes flow, a flow where the inertia term in the Navier-Stokes equations is neglected. This approximation is only strictly valid if the Reynolds number $Re=0$. Despite this, the results show that the Stokes flow can be a good approximation of flow around particles when Re is different from zero. For flow with uniform velocity field it seems like the solution is a good approximation for Re_D up to 1. However, the difference becomes considerable above this limit. In linear shear flow the difference between C_M from the simulations and in the Stokes flow is small for all Re_γ that have been considered in this study, $Re_\gamma \leq 5$. By studying the velocity field around the particle it is however seen that the flow starts to differ from the shape of the Stokes flow for increasing Re_γ . It still seems that for Re_D and Re_γ in the same order of magnitude, it is a Re_D different from zero that will cause most of the deviation from the Stokes flow.

Because the size of the particles in a number of real particle flows are very small, the Reynolds number of the flow can be in the same order of magnitude as those studied here, even when the flows are turbulent and the velocity is high. The findings in this study therefore indicates that the Stokes flow can be a good approximation in several real flows.

Innhold

1	Introduksjon	1
1.1	Bakgrunn	1
1.2	Formål med studien	1
2	Teori	3
2.1	Grunnleggende likninger	3
2.2	Numerisk løsning av Navier-Stokes likninger	4
2.2.1	Finite Volume Method	4
2.2.2	SIMPLE-algoritmen	7
2.2.3	Ustrukturert nettverk	11
2.3	Analytisk løsning av Stokes-likningen	12
2.3.1	Strømning omkring en kule	12
2.3.2	Rotasjon i rommet	14
2.3.3	Strømning omkring en avlang sfæroide	16
3	Metode	19
3.1	Nettverksgenerering for simulering i OpenFOAM	19
3.2	Uniform strømning	20
3.2.1	Grensebetingelser	20
3.2.2	Domenestørrelse	21
3.2.3	Nettverk	22
3.2.4	Løsnings- og algoritmekontroll	24
3.3	Skjærstrømning	25
3.3.1	Grensebetingelser	25
3.3.2	Nettverk	26
3.3.3	Løsnings- og algoritmekontroll	26
4	Resultater	29
4.1	Sfære i uniform strømning	29
4.2	Sfæroide i uniform strømning	30
4.3	Sfæroide i skjærstrømning	32
5	Diskusjon	45
6	Konklusjon	49
6.1	Videre arbeid	49
7	Referanser	51
A	Vedlegg: fvSolution	53

B Vedlegg: fvSchemes	55
C Vedlegg: Utregning av utbredelse Stokes-strømning	57
D Vedlegg: Utregning av hastigheten til en askepartikkel i fritt fall	58
E Vedlegg: Figurer	59

1 Introduksjon

1.1 Bakgrunn

Strømning med partikler forekommer ved en rekke tilfeller, som i prosesser i papirindustrien, strømning med aerosoler, overflatebehandling og partikkelbevegelse i åndedrettssystemet [10]. Det er fordelaktig å kunne beskrive oppførselen til disse partiklene, og vite hva som påvirker bevegelsen deres. I papirindustrien er for eksempel mange egenskaper ved det endelige produktet bestemt av fordelingen av cellulosefibre og hvordan de er orientert i papirmassen [11]. Dette er igjen avhengig av fibrenes oppførsel i en rekke strømninger som forekommer underveis i formingsprosessen. Både å optimalisere prosessene og i større grad skreddersy det ferdige produktet og dets egenskaper vil være mulig hvis man har full innsikt i fluid- og partikkeldynamikken.

Navier-Stokes likninger beskriver fluidets bevegelse. Selv om likningene har vært kjent lenge er det ikke funnet noen generell analytisk løsning for viskøs strømning omkring en partikkel. I 1851 presenterte G. G. Stokes løsningen til en translate-rende sfære i en strømning der det er antatt at treghetsleddet er neglisjerbart [18]. Dette er tilfelle hvis Reynoldstallet er svært lite ($Re \ll 1$), og en slik strømning har fått navnet Stokes-strømning. Det er også funnet tilsvarende løsninger for en ellipsoide (A. Oberbeck [12], H. Brenner [1]). I 1922 utledet G. B. Jeffery en løsning for en roterende ellipsoide i en Stokes-strømning med lineært skjær [6]. Selv om disse løsningene kun er strengt gyldig for strømning med $Re=0$, vil det være nyttig å kunne bruke uttrykkene som en tilnærming ved lave Re . Lundell og Carlsson [10], som kombinerte Jefferys uttrykk for moment med bevegelseslikningene for å studere rotasjonen til en ellipsoide, antyder at løsningen til Jeffery [6] er en god tilnærming for verdier av Re opptil 1 og ved noen tilfeller også høyere.

1.2 Formål med studien

I denne studien vil den åpne programvaren OpenFOAM (versjon 2.1.1) bli brukt til å løse Navier-Stokes likninger for å simulere laminær, inkompressibel strømning omkring en partikkel ved lave Reynoldstall. Først vil uniform strømning omkring en sfære studeres. Deretter vil det bli sett på tilsvarende strømning omkring en prolat sfæroide der orienteringen til partikkelen og Reynoldstallet varieres. Til slutt vil en skjærstrømning omkring en prolat sfæroide bli studert. Resultatet av disse simuleringen vil deretter sammenlignes med de analytiske løsningene av krefter og momenter på en partikkel for å prøve å kunne gi svar på for hvilke

tilfeller en løsning av Stokes-strømningen kan være en akseptabel tilnærming for å beskrive reelle strømninger.

2 Teori

2.1 Grunnleggende likninger

Strømningen omkring en partikkel kan beskrives av kontinuitetslikningen og Navier-Stokes likninger. Kontinuitetslikningen beskriver konservering av masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

der ρ er massetettheten, $\mathbf{u} = [u, v, w]$ er hastighetsvektoren til fluidet og

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2)$$

for kartesiske koordinater. Navier-Stokes likninger beskriver konservering av bevegelsesmengde:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \left[\mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \quad (3)$$

der

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (4)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (5)$$

\mathbf{g} er tyngdeakselerasjonen, p er trykket, μ er viskositeten og $()^T$ er den transponerte matrisen. For inkompressibel strømning, $\frac{D\rho}{Dt}$, vil kontinuitetslikningen forenkles til

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

Ved å videre anta at temperaturen ikke endrer seg får vi at ρ =konstant. Ved å sette likning (6) inn i likning (3) og i tillegg anta konstant viskositet og se bort fra tyngdekraften får vi

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (7)$$

For stasjonær strømning, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, forenkles Navier-Stokes likninger ytterligere til

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (8)$$

Ved å gjøre antakelsene om at ρ og μ er konstante, vil kontinuitetslikningen og Navier-Stokes likninger være uavhengig av temperaturen, og disse kan løses uten energilikningen.

2.2 Numerisk løsning av Navier-Stokes likninger

Navier-Stokes er en ikke-lineær partiell differensiallikning uten noen kjent generell analytisk løsning. Man kan finne en tilnærmet løsning ved å diskretisere likningene til et sett av algebraiske likninger. Det vil her bli sett på numerisk løsning av likning (6) og (8) ved bruk av Finite Volume Method.

2.2.1 Finite Volume Method

Finite Volume Method (FVM) er mye brukt i numeriske strømningsberegninger og tar utgangspunkt i likningene integrert over volumet V til cellen i et numerisk nettverk. Kontinuitetslikningen, likning (6), får da formen

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV = 0 \quad (9)$$

som ved å benytte Gauss' teorem kan skrives om til

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (10)$$

der S er overflaten til cellen. Ved å integrere Navier-Stokes likninger gitt i likning (8) over det samme volumet V får vi

$$\int_V (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} dV = - \int_V \nabla p dV + \int_V \mu \nabla^2 \mathbf{u} dV \quad (11)$$

Dette kan skrives om til

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})dV = - \int_V \nabla p dV + \int_V \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u})dV \quad (12)$$

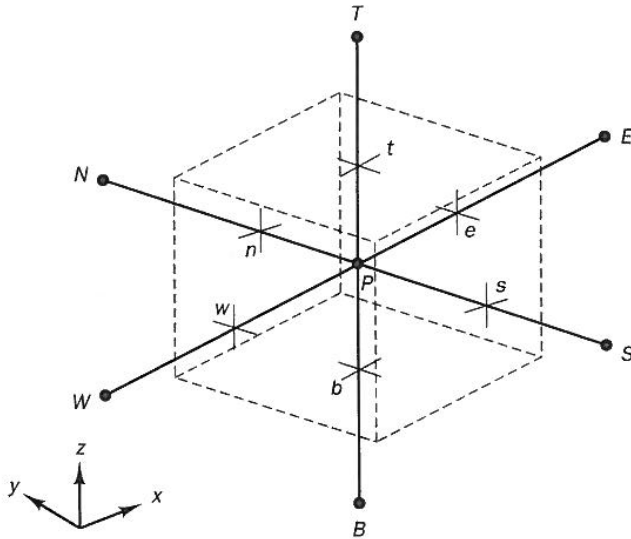
siden μ er konstant og

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \quad (13)$$

Ved å igjen benytte Gauss' teorem får vi da

$$\oint_S \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}) = \oint_S \mu(\nabla \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} - \int_V \nabla p dV \quad (14)$$

Det vil videre bli sett på diskretisering av likning (10) og (14) i tre dimensjoner i et strukturert nettverk. En celle med nodepunkt P i dette nettet med sider e, w, n, s, t og b og naboceller med nodepunkter E, W, N, S, T og B er illustrert i figur 1. Det andre leddet i likning (14) er et diffusjonsledd. Leddet i likning (10) og det første leddet i likning (14) er konveksjonledd mens siste leddet i likning (14) er et kildeledd. Disse må behandles på ulike måter.



Figur 1: En celle P i et tredimensjonalt strukturert nett [20].

Diffusjonsleddet kan skrives ut på formen

$$\begin{aligned} & \left[\mu A_e \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)_e - \mu A_w \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\mu A_n \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)_n - \mu A_s \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)_s \right] \\ & + \left[\mu A_t \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)_t - \mu A_b \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)_b \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Gradientene kan beregnes ved å benytte sentraldifferanser, som er en andreordens tilnærming:

$$\left[\mu A_e \frac{(\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_P)}{\delta x_{PE}} - \mu A_w \frac{(\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_W)}{\delta x_{WP}} \right] + \left[\mu A_n \frac{(\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_P)}{\delta y_{PN}} \right] \quad (16)$$

$$- \mu A_s \frac{(\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_S)}{\delta y_{SP}} \left] + \left[\mu A_t \frac{(\mathbf{u}_T - \mathbf{u}_P)}{\delta z_{PT}} - \mu A_b \frac{(\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_B)}{\delta z_{BP}} \right] \quad (17)$$

Konveksjonsleddene kan skrives på formen

$$\begin{aligned} \int_S \phi(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}) &= [(uA\phi)_e - (uA\phi)_w] + [(vA\phi)_n - (vA\phi)_s] \\ &+ [(wA\phi)_t - (wA\phi)_b] \end{aligned} \quad (18)$$

der $\phi=1$ for kontinuitetslikningen (10) og $\phi=\mathbf{u}$ for det første leddet i likning (14). Videre brukes lineærinterpolasjon for å få verdiene av ϕ på cellenodene istedenfor på celledisene:

$$\begin{aligned} & u_e A_e (\phi_P + \phi_E)/2 - u_w A_w (\phi_W + \phi_P)/2 + u_n A_n (\phi_P + \phi_N)/2 \\ & - u_s A_s (\phi_S + \phi_P)/2 + u_t A_t (\phi_P + \phi_T)/2 - u_b A_b (\phi_N + \phi_P)/2 \end{aligned} \quad (19)$$

Kildeleddet i likning (14) kan skrives på formen

$$\int_V \nabla p dV = \overline{\nabla p} \cdot V \quad (20)$$

der $\overline{\nabla p}$ er den midlede verdien av ∇p over kontrollvolumet. Likning (19) gir oss kontinuitetslikningen på diskretisert form:

$$u_e A_e - u_w A_w + u_n A_n - u_s A_s + u_t A_t - u_b A_b = 0 \quad (21)$$

Tilsvarende får vi ved å benytte (17), (19) og (20) de diskretiserte Navier-Stokes likninger:

$$a_P \mathbf{u}_P = a_W \mathbf{u}_W + a_E \mathbf{u}_E + a_S \mathbf{u}_S + a_N \mathbf{u}_N + a_B \mathbf{u}_B + a_T \mathbf{u}_T + \overline{\nabla p} \cdot V \quad (22)$$

der

$$a_P = \frac{u_e A_e}{2} - \frac{u_w A_w}{2} + \frac{u_n A_n}{2} - \frac{u_s A_s}{2} + \frac{u_t A_t}{2} - \frac{u_b A_b}{2} \quad (23)$$

$$+ \frac{\mu A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\mu A_w}{\delta x_{WP}} + \frac{\mu A_n}{\delta x_{PN}} + \frac{\mu A_s}{\delta x_{SP}} + \frac{\mu A_t}{\delta x_{PT}} + \frac{\mu A_b}{\delta x_{BP}} \quad (24)$$

og

$$a_W = \frac{u_w A_w}{2} + \frac{\mu A_w}{\delta x_{WP}}, \quad a_E = -\frac{u_e A_e}{2} + \frac{\mu A_e}{\delta x_{PE}}, \quad (25)$$

$$a_S = \frac{u_s A_s}{2} + \frac{\mu A_s}{\delta x_{SP}}, \quad a_N = -\frac{u_n A_n}{2} + \frac{\mu A_n}{\delta x_{PN}}, \quad (26)$$

$$a_B = \frac{u_b A_b}{2} + \frac{\mu A_b}{\delta x_{BP}}, \quad a_T = -\frac{u_t A_t}{2} + \frac{\mu A_t}{\delta x_{PT}} \quad (27)$$

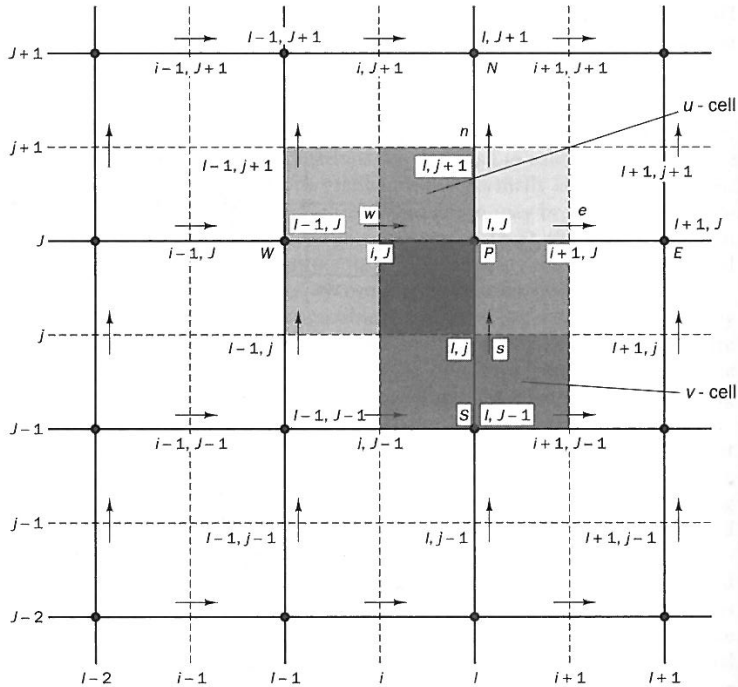
2.2.2 SIMPLE-algoritmen

Løseren simpleFoam i OpenFOAM er basert på SIMPLE-algoritmen. SIMPLE står for Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations (semi-implisitt metode for trykk-koblede likninger) og ble lansert av Patankar og Spalding i 1972 [17]. SIMPLE er en iterativ metode for å beregne trykk og hastighet for en stasjonær strømning. For enkelhets skyld blir det her sett på et to-dimensjonalt strukturert nett, men prinsippet er det samme for en tre-dimensjonal strømning der nettet er ustrukturert. Algoritmen tar utgangspunkt i de diskretiserte Navier-Stokes likninger i et forskjøvet nett (staggered grid) der trykkgradientene er beregnet ved sentraldifferanser [20]:

$$a_{i,J} u_{i,J} = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_{I-1,J} - p_{I,J}) A_{i,J} \quad (28)$$

$$a_{I,j} v_{I,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_{I,J-1} - p_{I,J}) A_{I,j} \quad (29)$$

Indeks nb viser til nabocellene og A er arealet på cellesidene. I et forskjøvet nett blir de skalare størrelsene beregnet i celle-senteret i det ordinære nettet, mens vektorstørrelsene blir beregnet på celle-senteret i et forskjøvet nett. Nettet er forskjøvet etter retningen til vektorkomponentene slik at nettet til u blir forskjøvet i x-retning og nettet til v blir forskjøvet i y-retning. Et slikt nett er illustrert i figur 2. Store bokstaver på indeksene viser til det forskjøvete nettet mens små bokstaver viser til nettet som ikke er forskjøvet. OpenFOAM bruker ikke i utgangspunktet et forskjøvet nett, men beregner hastighetene i punktene som tilsvarer de forskjøvete punktene ved interpolasjon [15].



Figur 2: Et to-dimensjonalt forskjøvet nett [20].

Algoritmen starter med at et trykkfelt p^* må antas, og feltene u^* og v^* regnes ut fra dette:

$$a_{i,J}u_{i,J}^* = \sum a_{nb}u_{nb}^* + (p_{I-1,J}^* - p_{I,J}^*)A_{i,J} \quad (30)$$

$$a_{I,j}v_{I,j}^* = \sum a_{nb}v_{nb}^* + (p_{I,J-1}^* - p_{I,J}^*)A_{I,j} \quad (31)$$

Den korrekte løsningen er da summen av den antatte verdien * og korreksjonen /:

$$p = p^* + p' \quad (32)$$

$$u = u^* + u' \quad (33)$$

$$v = v^* + v' \quad (34)$$

Ved å kombinere likning (28) - (34) får vi

$$a_{i,J}u'_{i,J} = \sum a_{nb}u'_{nb} + (p'_{I-1,J} - p'_{I,J})A_{i,J} \quad (35)$$

$$a_{I,j}v'_{I,j} = \sum a_{nb}v'_{nb} + (p'_{I,J-1} - p'_{I,J})A_{I,j} \quad (36)$$

SIMPLE består videre i å anta at korreksjonene til hastighetene i nabocellene er null:

$$\sum a_{nb}u'_{nb} \approx 0 \quad (37)$$

$$\sum a_{nb}v'_{nb} \approx 0 \quad (38)$$

Vi får da korreksjonslikninger for hastighetene:

$$u_{i,J} = u_{i,J}^* + \frac{A_{i,J}}{a_{i,J}}(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}) \quad (39)$$

$$v_{I,j} = v_{I,j}^* + \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}}(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}) \quad (40)$$

og tilsvarende for $u_{i+1,J}$ og $v_{I,j+1}$:

$$u_{i+1,J} = u_{i+1,J}^* + \frac{A_{i+1,J}}{a_{i+1,J}}(p'_{I,J} - p'_{I+1,J}) \quad (41)$$

$$v_{I,j+1} = v_{I,j+1}^* + \frac{A_{I,j+1}}{a_{I,j+1}}(p'_{I,J} - p'_{I,J+1}) \quad (42)$$

Videre må strømmingen oppfylle kontinuitet:

$$[(uA)_{i+1,J} - (uA)_{i,J}] + [(vA)_{I,j+1} - (vA)_{I,j}] = 0 \quad (43)$$

Ved å sette inn for likning (39) - (40) i kontinuitetslikningen får vi

$$\begin{aligned} & [(A_{i+1,J}(u_{i+1,J}^* + \frac{A_{i+1,J}}{a_{i+1,J}}(p'_{I,J} - p'_{I+1,J})) \\ & \quad - (A_{i,J}(u_{i,J}^* + \frac{A_{i,J}}{a_{i,J}}(p'_{I-1,J} - p'_{I,J})))] \\ & + [(A_{I,j+1}(v_{I,j+1}^* + \frac{A_{I,j+1}}{a_{I,j+1}}(p'_{I,J} - p'_{I,J+1})) \\ & \quad - (A_{I,j}(v_{I,j}^* + \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}}(p'_{I,J-1} - p'_{I,J})))] = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

Likning (44) kan skrives om til

$$\begin{aligned} \left(\frac{A^2}{a}\right)_{I,J} p'_{I,J} &= \left(\frac{A^2}{a}\right)_{I+1,J} p'_{I+1,J} + \left(\frac{A^2}{a}\right)_{I-1,J} p'_{I-1,J} \\ &+ \left(\frac{A^2}{a}\right)_{I,J+1} p'_{I,J+1} + \left(\frac{A^2}{a}\right)_{I,J-1} p'_{I,J-1} + b'_{I,J} \end{aligned} \quad (45)$$

der

$$a_{I,J} = a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1} \quad , \quad (46)$$

$$\begin{aligned} a_{I+1,J} &= \left(\frac{A^2}{a}\right)_{I+1,J} \quad , \quad a_{I-1,J} = \left(\frac{A^2}{a}\right)_{I-1,J} \quad , \\ a_{I,J+1} &= \left(\frac{A^2}{a}\right)_{I,J+1} \quad , \quad a_{I,J-1} = \left(\frac{A^2}{a}\right)_{I,J-1} \end{aligned} \quad (47)$$

og

$$b'_{I,J} = (u^* A)_{i,J} - (u^* A)_{i+1,J} + (v^* A)_{I,j} - (v^* A)_{I,j+1} \quad (48)$$

Likning (45) er likningen for trykk-korrigeringen. Denne kan løses for p' som videre settes inn i likning (32) for å finne trykket p . Når trykket er kjent kan u og v finnes ved hjelp av likning (39)-(42). På grunn av tilnærmingen som ble gjort i (38) må man iterere seg fram til korrekt løsning ved å sette p^* lik p , for så å gjenta framgangsmåten som er beskrevet over til man har oppnådd konvergens. Konvergens bestemmes utfra fastsatte verdier for feiltoleransen til trykket og hastighetene.

SimpleFoam bruker en populær metode for å hindre divergens som kalles underrelaksjon [13]. I stedet for å benytte trykk-korrigeringen i likning (32) får vi med underrelaksjon [20]

$$p^{new} = p^* + \alpha_p p', \quad 0 < \alpha_p < 1 \quad (49)$$

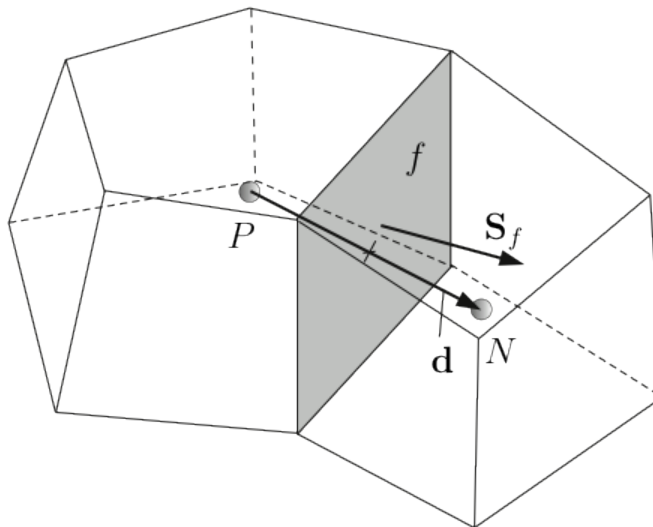
der α_p er relaksjonsfaktoren til trykket. En relaksjonsfaktor nær 1 vil gjøre at itereringen går raskt, men det er stor fare for divergens. Er relaksjonsfaktoren nær 0 vil itereringen gå sakte, men sjansen for konvergens er større. Med underrelaksjon blir korreksjonen for hastighetene følgende:

$$\begin{aligned} u^{new} &= \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{(n-1)} \\ v^{new} &= \alpha_v v + (1 - \alpha_v) v^{(n-1)} \end{aligned} \quad (50)$$

der α_u og α_v er relaksjonsfaktorene til hastighetene i x- og y- retning, u og v er hastighetene korrigert uten relaksjonsfaktorer og $u^{(n-1)}$ og $v^{(n-1)}$ er hastighetene ved forrige iterasjon.

2.2.3 Ustrukturert nettverk

Under simuleringene i OpenFOAM er det brukt ustrukturerte numeriske nettverk. En typisk celle i et slikt nett er illustrert i figur 3. I tillegg til verdiene som lagres for en celle i et strukturert nett, må det i et ustrukturert nett også lagres verdier for \mathbf{d} , som er vektoren mellom nodene til to naboceller, og \mathbf{S}_f , normalvektoren til side f i celle P .



Figur 3: To naboceller i et ustrukturert nett [14].

2.3 Analytisk løsning av Stokes-likningen

Alternativt til en numerisk metode kan det gjøres antagelser slik at Navier-Stokes likninger forenkles til et sett lineære differensiallikninger som kan løses analytisk. I Stokes-strømningen er treghetsleddet neglisjerbart. Dette er tilfelle hvis $Re = \frac{ua}{\nu} = 0$. Denne tilnærmingen blir ofte gjort i mange praktiske tilfeller for strømning med partikler med begrunnelse om at størrelsen på partikkelen er svært liten.

2.3.1 Strømning omkring en kule

For Stokes-strømning forenkles Navier-Stokes likninger gitt i (8) til

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (51)$$

Hastighetsfeltet til en uniform strømning omkring en sfære er i polarkoordinater da gitt av [23]:

$$u_r = U \cos \theta \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} - \frac{3a}{2r} \right) \quad (52)$$

$$u_\theta = U \sin \theta \left(-1 + \frac{a^3}{4r^3} + \frac{3a}{4r} \right) \quad (53)$$

der U er fristrøms hastigheten og a er radien til sfæren. Dette hastighetsfeltet er aksesymmetrisk. I tillegg er hastigheten symmetrisk opp- og nedstrøms for sfæren, mens trykkfeltet er antisymmetrisk. For $Re_D = \frac{U \cdot 2a}{\nu}$ ulik null dannes en vake bak sfæren som blir gjeldende ved $Re_D > 1$ [23]. Ved $Re_D \approx 24$ separeres strømmingen nedstrøms for sfæren og en separasjonsboble dannes [3]. Strømningen er fortsatt aksesymmetrisk opptil $Re_D \approx 210$ og stasjonær opp til $Re_D \approx 270$. For Stokes-strømning er motstandskraften, kraften fra strømningen på partikkelen i strømningsretningen, gitt ved [23]

$$F = F_{viskøs} + F_{trykk} = 4\pi\mu Ua + 2\pi\mu Ua = 6\pi\mu Ua \quad (54)$$

Løftekraften, kraften på partikkelen normalt på strømningsretningen, og momentet på partikkelen er null. Fra likning (54) har vi at kreftene på en sfære består av to tredeler viskøse krefter og én tredel trykk-krefter. Ved å definere motstandskoeffisienten

$$C_D = \frac{2F}{\rho U^2 \pi a^2} \quad (55)$$

får vi at C_D på en sfære i en Stokes-strømning er gitt av

$$C_{D,Stokes} = \frac{24}{Re_D} \quad (56)$$

Uttrykket i (56) er kun strengt gyldig for $Re_D=0$, men eksperimentelle data har vist at tilnærmingen er gyldig opp til $Re_D \approx 1$ [23]. Uttrykket vil underestimere størrelsen på motstanden for $Re > 1$, og avviket vil være stort ved separasjon.

En alternativ forenkling av Navier-Stokes likninger ble lansert av Oseen i 1910 [16], og for strømning der fristrøms hastigheten er U og går i x -retning gir denne forenklingen

$$\rho U \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \approx -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (57)$$

Dette gir følgende uttrykk for C_D på en sfære:

$$C_D \approx \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{8} Re \right) \quad (58)$$

Denne tilnærmingen viser seg å overestimere den faktiske motstanden.

Et forbedret uttrykk for C_D som har nøyaktighet $\pm 10\%$ opptil $Re_D \approx 250\,000$ (der grensesjiktet blir turbulent) er gitt av White [23]:

$$C_D \approx \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0,4 \quad (59)$$

2.3.2 Rotasjon i rommet

Posisjonen til en roterende partikkel kan beskrives ved hjelp av en kvaternion [10]:

$$\mathbf{e} = [e_0 \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3]^T \quad (60)$$

Et element som roterer en vinkel ψ om en akse gitt av enhetsvektoren \mathbf{b}' har tilhørende kvaternion:

$$\mathbf{e} = \left[\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad b'_1 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad b'_2 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad b'_3 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \right]^T \quad (61)$$

der $e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$.

Alternativt kan elementene i kvaternionen skrives som en funksjon av de tre Euler-vinklene φ , ψ og θ [22, 21]:

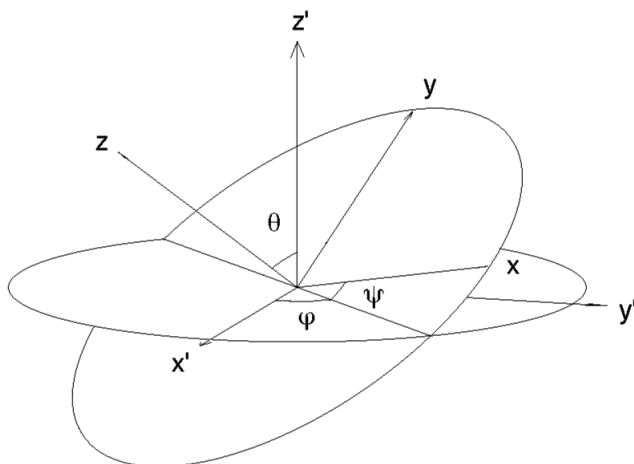
$$e_0 = \cos\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (62)$$

$$e_1 = \cos\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (63)$$

$$e_2 = \sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (64)$$

$$e_3 = \sin\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (65)$$

Figur 4 viser hvordan disse vinklene er definert. x' , y' og z' er de faste koordinat-aksene, mens x , y og z er aksene som følger partikkelen.



Figur 4: Sammenhengen mellom Euler-vinklene og det faste og roterende koordinatsystemet

En ortogonal rotasjonsmatrise kan uttrykkes ved elementene i kvaternionen i (60) [10]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}\mathbf{G}^T \quad (66)$$

der

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix}, \quad (67)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

og

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \quad (69)$$

Sammenhengen mellom en vektor \mathbf{a}' i et fast koordinatsystem og en vektor \mathbf{a} i et koordinatsystem som følger en roterende partikkel er da gitt av [10]

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R}\mathbf{a} \quad (70)$$

2.3.3 Strømning omkring en avlang sfæroide

En sfæroide er en rotasjonssymmetrisk ellipsoide, og overflaten er gitt av

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \quad (71)$$

der a og b er der overflaten krysser hhv. den positive x -aksen og den positive y - og z -aksen. Hvis $a > b$, er partiklene avlange (prolate), mens for $a < b$ er partiklene flate (oblate). En prolat sfæroide er derfor symmetrisk om hovedaksen, og strømmingen om en prolat sfæroide med hovedaksen parallelt med strømmingen er i likhet med en strømmingen om en sfære aksesympmetrisk.

Motstandskoeffisienten på en sfæroide i en uniform Stokes-strømning er gitt ved [5]

$$C_{D,Stokes} = \frac{2\mu\mathbf{R}^T\mathbf{K}'\mathbf{R}}{\rho U^2 \pi a^2} = \frac{4\mathbf{R}^T\mathbf{K}'\mathbf{R}}{\pi a U Re_D} \quad (72)$$

der U er fristrøms hastigheten, \mathbf{R} er den ortogonale rotasjonsmatrisen gitt i (66) og \mathbf{K}' er motstandstensoren:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} k'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k'_{zz} \end{bmatrix} \quad (73)$$

der

$$k'_{xx} = \frac{8\pi b((a/b)^2 - 1)^{3/2}}{(2(a/b)^2 - 1) \ln[a/b + ((a/b)^2 - 1)^{1/2}] + (a/b)((a/b)^2 - 1)^{1/2}} \quad (74)$$

og

$$k'_{yy} = k'_{zz} = \frac{16\pi b((a/b)^2 - 1)^{3/2}}{(2(a/b)^2 - 3) \ln[a/b + ((a/b)^2 - 1)^{1/2}] + (a/b)((a/b)^2 - 1)^{1/2}} \quad (75)$$

Også for en sfæroide i uniform Stokes-strømning er løftkraften og momentet på partikkelen null. For en sfæroide vil Oseens tilnærming gi følgende uttrykk for motstanden [2]:

$$C_D = C_{D,Stokes} \left(1 + \frac{\mathbf{K}' Re_D}{32\pi b} \right) \quad (76)$$

der $C_{D,Stokes}$ er gitt i likning (72).

Momentet på en ellipsoide i en Stokes-strømning med skjær er utledet analytisk av Jeffery [6]:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{16\pi\mu}{3(b^2\beta_0 + c^2\gamma_0)} \{(b^2 - c^2)f + (b^2 + c^2)(\xi - \omega_x)\} \\ M_y &= \frac{16\pi\mu}{3(c^2\gamma_0 + a^2\alpha_0)} \{(c^2 - a^2)g + (c^2 + a^2)(\eta - \omega_y)\} \\ M_z &= \frac{16\pi\mu}{3(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)} \{(a^2 - b^2)h + (a^2 + b^2)(\zeta - \omega_z)\} \end{aligned} \quad (77)$$

der f, g og h er deformasjonsraten, ξ , η og ζ er rotasjonsraten og

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\Delta} \\ \beta_0 &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\Delta} \\ \gamma_0 &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)\Delta} \end{aligned} \quad (78)$$

$$\Delta = \{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)\}^{\frac{1}{2}}$$

For en sfæroide er $c=b$ og a og b er gitt i likning (71). Deformasjons- og rotasjonsraten kan uttrykkes ved elementene i skjærraten \mathbf{B} [6]:

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2}(b_{zy} + b_{yz}) & \xi &= \frac{1}{2}(b_{zy} - b_{yz}) \\
g &= \frac{1}{2}(b_{xz} + b_{zx}) & \eta &= \frac{1}{2}(b_{xz} - b_{zx}) \\
h &= \frac{1}{2}(b_{yx} + b_{xy}) & \zeta &= \frac{1}{2}(b_{yx} - b_{xy})
\end{aligned}$$

Vi kan ved hjelp av (70) finne sammenhengen mellom hastighetsvektoren \mathbf{u} og koordinatvektoren \mathbf{x} i koordinatsystemet som følger partikkelen uttrykt ved skjærraten \mathbf{B}' i det faste koordinatsystemet:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}' &= \mathbf{B}'\mathbf{x}' \\
\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}' &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{x}' \\
\mathbf{u} &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{R}\mathbf{x} \\
&= \mathbf{R}^T\mathbf{B}'\mathbf{R}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Skjærraten i koordinatsystemet som følger partikkelen, \mathbf{B} , er demed

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}^T\mathbf{B}'\mathbf{R} \quad (79)$$

For skjærstrømningen som det blir sett på i denne studien, $u' = \dot{\gamma}y'$, har vi at

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Da er hastigheten på høyde med sentrum av partikkelen null, som gjør at det ikke er noen motstandskraft på partikkelen. I likhet med for motstandskraften ved uniform strømning kan det være nyttig å definere en koeffisient for momentet:

$$C_M = \frac{2M}{\rho\dot{\gamma}^2\pi a^5} \quad (81)$$

3 Metode

Likningene som beskriver strømmingen om partikkelen ble løst i tre dimensjoner ved hjelp av den åpne programvaren OpenFOAM. Strømmingen ble antatt å være inkompressibel, og siden det ble sett på lave Reynoldstall ble strømmingen i tillegg antatt å være laminær. Videre ble oppgaven forenklet ved å holde partikkelen i ro og simulere strømmingen stasjonært rundt partikkelen. SimpleFoam ble brukt ved simuleringene. Dette er den mest populære løsningsalgoritmen for inkompressibel, stasjonær strømming i OpenFOAM.

3.1 Nettverksgenerering for simulering i OpenFOAM

Ved numeriske strømningsberegninger må domenet beskrives ved hjelp av et numerisk nettverk, en oppdeling av rommet i celler. I tillegg til at det er støtte for å konvertere nett fra en rekke tredjeparts programvare, har OpenFOAM to innebygde metoder for nettverksgenerering [13]. Den første metoden, blockMesh, er et verktøy for å generere enkle strukturerte nett. Domenet deles inn i heksaederformede blokker med rette eller bøyde kanter. Blokkene er igjen delt inn i heksaederformede celler etter en oppløsning og gradering som spesifiseres i hver retning. Siden koordinatene til alle blokkenes hjørner må spesifiseres og blokkene må ha heksaederform¹, er blockMesh ikke spesielt godt egnet til denne studien, men heller til å lage nett for svært enkle geometrier og hovedsaklig i to dimensjoner. Den andre metoden for generering av nett i OpenFOAM er snappyHexMesh. Dette verktøyet kan generere komplekse nett automatisk fra STL-filer. STL-filer beskriver tredimensjonale objekter og består av et overflatenett til objektet. SnappyHexMesh tar utgangspunkt i et nett med heksaederformet domene bestående av heksaederformede celler (som for eksempel kan genereres ved hjelp av blockMesh) og genererer et nett som er formet rundt geometrien definert av STL-filen. Resultatet er et nett bestående hovedsaklig av heksaeder med flere typer polyeder som prismer og heksaeder rundt STL-geometrien. Siden OpenFOAM ikke inkluderer verktøy for å generere STL-filer er det ikke et fullverdig verktøy for å generere ustrukturerte nettverk. Uansett fremgangsmåte må man bruke en tredjeparts programvare for å generere enten STL-geometrier eller hele nettverket. Det ble derfor vurdert slik at det mest hensiktsmessige ville være å bruke et tredjeparts program til generering av det numeriske nettverket, for så å konvertere det til OpenFOAM.

Siden oppgaven gir føringer om bruk av OpenFOAM som er en åpen programvare,

¹Det er imidlertid mulig å omgå begrensningen med at blokkene må være heksaeder ved å sette samme koordinater på to eller flere av de åtte hjørnene.

var det et ønske om å holde seg til ikke-kommersiell programvare. Et eksempel på dette er Gmsh, som hovedsaklig egnert seg til å lage rent ustrukturerte nett bestående av tetraeder, men som også kan lage strukturerte nett for svært enkle geometrier. Resultatene fra simuleringer gjort med nett fra Gmsh var imidlertid ikke tilfredsstillende. Derfor ble den kommersielle programvare ANSYS Meshing benyttet. Dette programmet har flere funksjoner og et mer avansert grafisk brukergrensesnitt enn Gmsh. Dette ga en stor forbedring i resultatene ved simulering av uniform strømming.

Da arbeidet gikk videre til simulering av strømming med skjær viste det seg at nettet som ble generert for den uniforme strømmingen i ANSYS Meshing her var uegnet på grunn av store stabilitetsproblemer. Det viste seg at et numerisk nettverk generert av funksjonen snappyHexMesh løste problemet. Dette krevde imidlertid en STL-fil av overflatenettet til en sfæroide. Det lyktes å generere en tilfredsstillende STL-fil i programmet Gmsh.

3.2 Uniform strømming

Det ble først simulert strømming med uniformt hastighetsfelt omkring en sfære med radius $a=1$, og deretter en sfæroide der hovedaksen hadde lengde $a=1$ og forholdet mellom den lengste og korteste akse var 6:1. Vinkelen mellom sfæroidens hovedakse og strømningsretningen varierte mellom $\varphi=0, \frac{\pi}{4}$ og $\frac{\pi}{2}$. For sfæren og sfæroiden ble det simulert strømming med Reynoldstall $Re_D=0,01; 0,1; 1$ og 10. Fristrømhastigheten ble holdt konstant lik 1, mens ν ble variert for å oppnå ønsket Re_D .

3.2.1 Grensebetingelser

Grenseverdiene som ble brukt ved simuleringene av uniform strømming er gitt i tabell 1. Ved innløpet ble grensebetingelsene valgt slik at strømmingen skulle tilsvare fri strømming uten trykkgradient og med uniformt hastighetsfelt. Ved utløpet og på sidene av domenet ble hastighetsgradientene satt til null slik at hastigheten skulle kunne utvikle seg mest mulig fritt. Siden hverken hastighetsfeltet eller kreftene på partikkelen er avhengig av det absolutte trykket ble verdien ved utløpet satt til null for enkelhets skyld. Alternativt kunne gradienten til trykket i strømningsretningen settes til null og et referansetrykk spesifiseres, men det viste seg at simuleringene da ble mer ustabile uten at det hadde noen påvirkning på nøyaktigheten i særlig grad. Ved overflaten til partikkelen ble hastigheten satt til null normalt på partikkelen siden fluidet ikke kan strømme gjennom partikkelen.

Innløp	Utløp	Sider	Overflate partikkel
$\mathbf{u} = (1, 0, 0),$ $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0,$ $p = 0$	$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0,$ $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$	$\mathbf{u} = 0,$ $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$

Tabell 1: Grensebetingelser ved simulering av uniform strømming

For å tilfredsstillte heft-betingelsen ble hastigheten også tangensielt på partikkelen overflate satt til null. For trykket er det vanlig å sette gradienten normalt på en fast overflate lik null. Dette er ved mange tilfeller en god tilnærming, men er kun strengt gyldig for ikke-viskøs strømming. For viskøs strømming har vi fra Navier-Stokes den generelle grensebetingelsen for trykkgradienten:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -[\mu \nabla \times \omega + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \quad (82)$$

der \mathbf{n} er normalvektoren til overflaten og $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ er virvlingen til strømmingen. På overflaten av partikkelen har vi at $\mathbf{u} = 0$, og likningen forenkles til

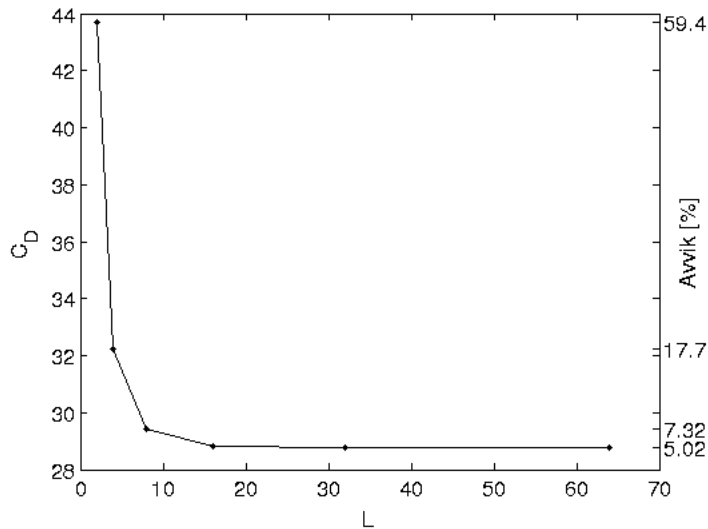
$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\mu \nabla \times \omega \quad (83)$$

Det ble gjort to identiske simuleringer av uniform strømming omkring en kule ved $Re=1$, der grenseverdien for trykket på overflaten av partikkelen ble variert mellom det korrekte uttrykket i likning (83) og tilnærmingen $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$. Forskjellen i C_D var på 0,012%, mens C_L for de to simuleringene var identiske med fire siffrers nøyaktighet. Det var imidlertid en del usikkerhet rundt implementasjonen av grensebetingelsen gitt i (83) i OpenFOAM, og hvordan simpleFoam håndterer disse betingelsene. Det er derfor ikke helt klart hvor mye denne grensebetingelsen egentlig har å si. På grunn av usikkerhetene ble den standardiserte grensebetingelsen $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$ brukt som tilnærming på overflaten av partikkelen.

3.2.2 Domenestørrelse

For en strømming med lave Reynoldstall vil partikkelen påvirke strømmingen over et stort område. Det er viktig at domenet som simuleres er stort nok slik at grenseverdiene som uansett vil være en tilnærming ikke påvirker resultatet i for stor grad. For en sfære i en uniform Stokes-strømming vil avstanden fra partikkelen

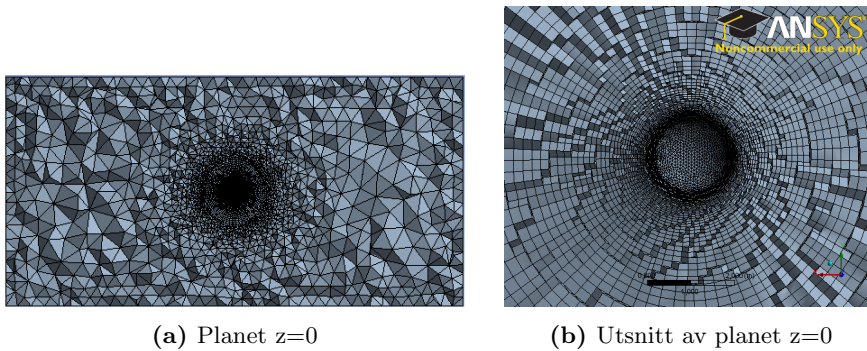
til området der partikkelen ikke lenger påvirker strømmingen i særlig grad være dobbelt så stor i strømningsretningen som retningene normalt på strømmingen (se vedlegg C). Det ble derfor valgt å plassere partikkelen i sentrum av et domene som går fra $-2L$ til $2L$ i x-retning og $-L$ til L i y- og z-retning. Figur 5 viser C_D på partikkelen ved forskjellige domenestørrelser for $Re_D=1$. Det er klart at C_D konvergerer når domenestørrelsen øker, og ved $L>32$ ser C_D ut til å være uavhengig av domenestørrelsen. Det ble valgt å bruke $L=32$ for de videre simuleringene.



Figur 5: C_D til en sfære i uniform strømning ($Re_D=1$) for varierende domenestørrelse, med avvik fra tilnærmingen i (59).

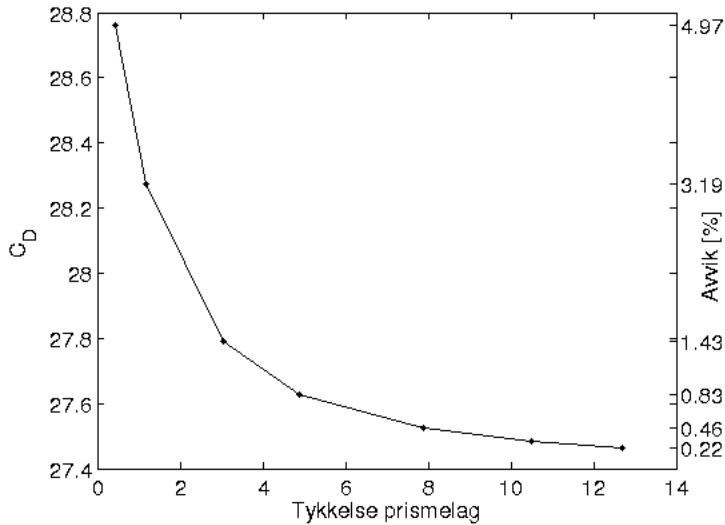
3.2.3 Nettverk

Programvaren Ansys Meshing ble brukt til å generere nett. Nettene som ble brukt var et ustrukturert nett bestående av lag med prismeformede celler på overflaten av partikkelen og tetraeder i resten av domenet. I utgangspunktet skal prismelagene i et slikt hybrid nettverk dekke grensesjiktet rundt partikkelen [9]. Ved så lave Reynoldstall som det er sett på i denne studien vil det ikke dannes et grensesjikt rundt partikkelen. Hastighetgradientene vil være mindre på overflaten av partikkelen, men samtidig vil de være over et større område. Det ble sett på hvilken virkning den totale tykkelsen på prismelagene rundt partikkelen



Figur 6: Nettet benyttet ved simulering av uniform strømning.

hadde på løsningen. Figur 7 viser at C_D på en sfære i strømning med $Re_D=1$ konvergerer først når prismelaget er svært tykt. For simuleringene av strømning omkring en sfære ble det valgt å bruke prismelag med total tykkelse 12,7. Nettet bestod da av 639 115 celler, der 439 200 celler var prismer og 199 915 celler var tetraeder. For å undersøke om oppløsningen til nettet var høy nok ble det laget et tilsvarende nett med 815 389 celler. Dette ga en endring i C_D på 0,085 % mens C_L endret seg fra $-4,03 \cdot 10^{-3}$ til $-8,95 \cdot 10^{-4}$. Nettet ble derfor sett på som fint nok for de beregningene som skulle gjøres i denne studien. Da nettet rundt sfæroiden skulle genereres, viste det seg at det ikke var mulig å få den totale tykkelsen på prismelagene like stor som for sfæren. For simuleringene av strømning omkring sfæroiden ble det derfor brukt et nett der totaltykkelsen på prismelagene var 0,72. Figur 7 viser C_D på en sfæroide i strømning med $Re_D=1$ for varierende totaltykkelse på prismelagene. Ut fra figur 7 kan det se ut som verdien av C_D er nær ved å konvergere for denne tykkelsen, men at den vil fortsette å synke noe. Nettet bestod totalt av 446 832 celler. For å sjekke om oppløsningen var høy nok til at nettet ikke ga for stor påvirkning på resultatet ble en simulering om en ellipsoide med $\varphi = 0$ og $Re_D=1$ kjørt for et tilsvarende nett med 591 831 celler. Dette ga en reduksjon i C_D på 0,215 % mens C_L økte fra $1,18 \cdot 10^{-4}$ til $1,46 \cdot 10^{-3}$. Det ble valgt å beholde den opprinnelige oppløsningen for de videre simuleringene.

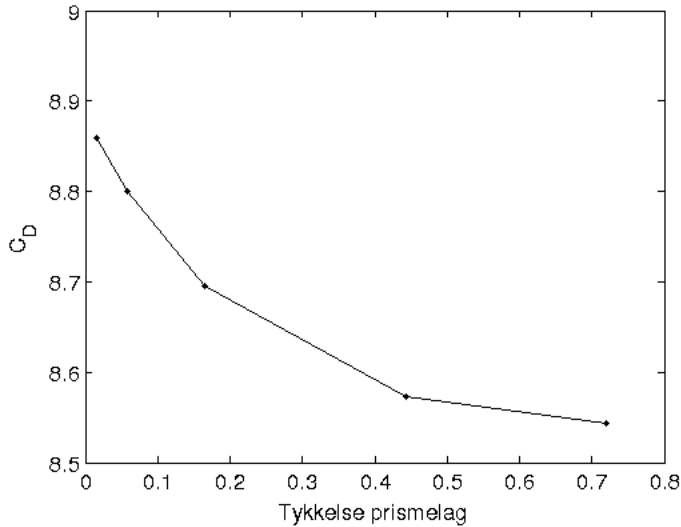


Figur 7: C_D på en sfære i uniform strømning ($Re_D=1$) for varierende totaltykkelse på prismelagene, med avvik fra tilnærmingen i (59).

3.2.4 Løsnings- og algoritmekontroll

Til slutt ble det testet om toleranseverdiene for trykket og hastighetenes som var satt for simuleringene var lave nok². Selv om simpleFoam er en algoritme for å finne en stasjonær løsning av en strømning, må det spesifiseres en toleranse for nøyaktigheten i et tidssteg ("tolerance" i vedlegg A) og et residual for når strømmingen er definert som stasjonær ("residualControl" i vedlegg A). Toleransene var til å begynne med satt lik 10^{-7} for både trykket og hastighetene, mens residualene var satt én tierpotens større. Ved å senke toleransen til hastighetene og trykket fra 10^{-7} til 10^{-9} (og residualen fra 10^{-6} til 10^{-8}) endret C_D seg med henholdsvis 0,0437% og 0,0441%. Det ble derfor valgt å gjøre de videre simuleringene med toleranseverdier for både trykket og hastighetene på 10^{-7} siden dette gikk fortere. Relaksjonsfaktorene ble satt til 0,3 for trykket og 0,7 for hastighetene. Se forøvrig vedlegg A og B for fullstendig oversikt over de numeriske skjemaene og parameterverdier for løsningsalgoritmen som ble benyttet.

²Det kommer ikke fram i hverken OpenFOAM User Guide [13] eller OpenFOAM Programmers Guide [14] hvordan toleranseverdiene er definert i OpenFOAM.



Figur 8: C_D på en sfæroide i uniform strømming ($Re_D=1$) for varierende totaltykkelse på prismelagene.

3.3 Skjærstrømning

Til slutt i denne studien ble det simulert strømming omkring en sfæroide med konstant skjær i y -retning. Sfæroiden hadde samme form som de tidligere simuleringene (akseforhold 6:1). Vinkelen mellom sfæroidens hovedakse og strømningsretningen ble også nå variert mellom 0 , $\frac{\pi}{4}$ og $\frac{\pi}{2}$. Det ble simulert strømming med hastighet null i $y=0$ og med skjær-Reynoldstall $Re_{\dot{\gamma}} = \frac{\dot{\gamma}(2a)^2}{\nu} = 0,01; 0,1; 1$ og 5 , der $\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y}$ er skjærraten. I $Re_{\dot{\gamma}}$ er $\dot{\gamma} \cdot 2a$ den karakteristiske hastigheten, og representerer forskjellen i hastighet mellom strømmingen ved tuppene på en sfæroide orientert med hovedaksen parallelt med skjærretningen.

3.3.1 Grensebetingelser

Grenseverdiene som ble brukt ved simulering av skjærstrømning er gitt i tabell 2. Ved utløpet, overflaten til sfæren og sidene $z=\pm L$ er grenseverdiene de samme som for simuleringen av den uniforme strømmingen. Siden negativ hastighet på innløpet gir en svært ustabil simulering ble grensebetingelsene på innløpet satt likt som for utløpet. For $y=\pm L$ ble hastigheten satt lik $\pm \dot{\gamma}L$ i x -retning for

Innløp	Utløp	$y=\pm L$	$z=\pm L$	Overflate partikkel
$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0,$ $p = 0$	$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0,$ $p = 0$	$\mathbf{u} = (0, \pm \dot{\gamma} L, 0),$ $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0,$ $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$	$\mathbf{u} = 0,$ $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$

Tabell 2: Grensebetingelser ved simulering av skjærstrømning

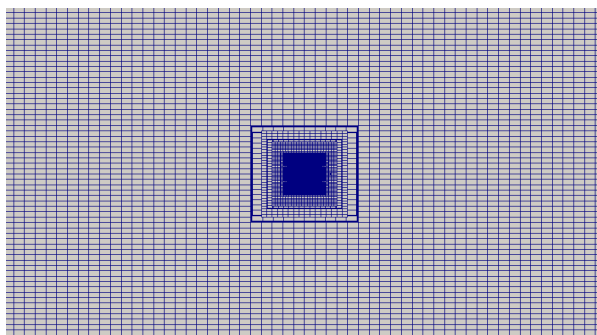
at strømmingen skulle få skjær. Det ble også testet å sette hastighetsgradienten lik $\pm \dot{\gamma}$. Dette ga ingen forskjeller i resultatene, men gjorde simuleringene generelt mer ustabile. Det ble derfor valgt å sette hastigheten og ikke gradienten for $y=\pm L$.

3.3.2 Nettverk

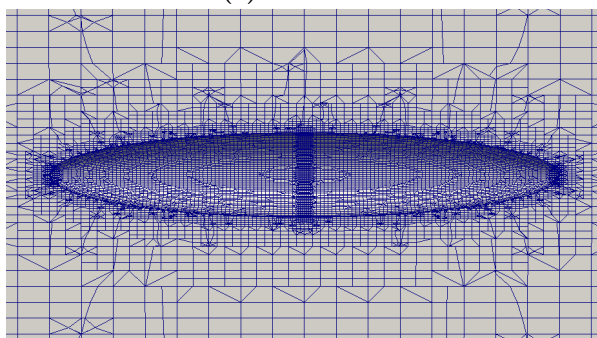
Med det samme numeriske nettverket som ble benyttet ved uniform strømning og grensebetingelsene i tabell 2 viste det seg at simuleringene ble svært ustabile og divergerte for $Re_{\dot{\gamma}}$ i størrelsesorden 0,1 og større. Simuleringene konvergente derimot med et nett som ble laget ved å bruke OpenFOAMs innebygde verktøy for å generere ustrukturerte nett; snappyHexMesh. Som figur 9 viser var dette nettet for det meste strukturert bestående av heksaederformede celler, mens det i området nært partikkelen var ustrukturert og besto av flere typer polyeder som prismer og heksaeder. Totalt besto nettet av 541 017 celler. Også her ble det sjekket om oppløsningen var høy nok. Det ble kjørt en simulering med et tilsvarende nett, men der antallet celler var økt til 735 296. For en strømning med $Re_{\dot{\gamma}}=1$ var endringen på momentkoeffisienten C_M på en sfæroide med $\varphi=0$ 1,38 %. Ved tilsvarende simuleringer med $\varphi = \frac{\pi}{2}$ var derimot endringen på kun 0,159 %. En endring på 1,38 % er ikke ubetydelig, og viser at simuleringene ikke er nettverksuavhengig ved denne oppløsningen. På grunn av begrenset datakapasitet ble det valgt å kun øke oppløsningen hvor dette hadde mest å si ($\varphi=0$), mens det for de andre simuleringene ble valgt å bruke nettet med lavere oppløsning. Av samme grunn ble det ikke gjort simuleringer med enda mer høyoppløst nett for å se om det ville gi en ytterligere endring i C_M .

3.3.3 Løsnings- og algoritmekontroll

De samme numeriske skjemaene og parameterverdier for løsningsalgoritmen ble brukt ved simulering av skjær som ved uniform strømning (se vedlegg A og B).



(a) Planet $z=0$



(b) Utsnitt av planet $z=0$

Figur 9: Nettet benyttet ved simulering av skjær

Ved $Re_\gamma=5$ ble derimot simuleringene såpass ustabile at residualene måtte settes ned til 10^{-4} for å oppnå konvergens.

4 Resultater

4.1 Sfære i uniform strømning

Figur 10 viser hastighetsfeltet omkring en sfære i uniform strømning ved forskjellige Re_D . For de laveste Re_D , figur 10a og 10b, ser strømningen ut til å være symmetrisk opp- og nedstrøms for partikkelen, og i tillegg blir hastigheten bremsed ned av partikkelen i et stort område i alle retninger. For $Re_D=1$ i figur 10c begynner det å bli en viss asymmetri med et større område bak partikkelen der hastigheten avviker fra fristrøms hastigheten. Samtidig blir strømningen på sidene mindre påvirket av partikkelen. Disse tendensene er enda tydeligere for $Re_D=10$ i figur 10d. Strømningen er omtrent lik fristrømningen under en diameter fra partikkelen i $\pm y$ -retning. I tillegg er det en tydelig vake bak partikkelen. For alle de simulerte strømningene ser det ut til å være symmetri om aksene i strømningsretningen. De samme effektene av forskjellig Re_D ser man i figur 11 som viser hastighetsprofiler omkring sfæren i planet $z=0$. Det er tydelig at hastighetsgradienten på sidene av partikkelen blir større for økende Re_D . Det kommer også klart fram at mens hastighetene er tilnærmet symmetriske foran og bak partikkelen for de laveste Re_D , er forskjellen betydelig for $Re_D=10$ der hastigheten bak partikkelen er lavere enn foran.

Trykkfeltet omkring kula viser de samme tendensene som illustrasjonene av hastighetsfeltet. For trykket er det en antisymmetri foran og bak partikkelen som forsvinner ved $Re_D > 1$, og i likhet med for hastighetene blir gradientene nært partikkelen større ved økende Re_D . Figurer av trykkfeltene kan finnes i vedlegg E.

Figur 12 viser de simulerte verdiene av motstandskoeffisienten på partikkelen ved forskjellige Re_D . De prosentvise avvikene fra de analytiske tilnærmingene er gitt i tabell 3. Det er klart at C_D avtar ved økende Re_D . For alle simuleringene bortsett fra $Re_D=0,01$ ligger verdiene mellom Stokes-løsningen (likning (56)) og tilnærmingen til Oseen (likning (58)). De simulerte verdiene nærmer seg Stokes-løsningen ved minkende Re_D . For alle Re_D som er studert ligger de simulerte verdiene nær tilnærmingen til White (likning (59)).

	C_D	$\frac{C_D - C_{D,Stokes}}{C_{D,Stokes}}$	$\frac{C_D - C_{D,Oseen}}{C_{D,Oseen}}$	$\frac{C_D - C_{D,White}}{C_{D,White}}$
$Re_D = 0,01$	2481	3,38 %	0,129 %	3,13 %
$Re_D = 0,1$	249	3,75 %	0,001 %	1,63 %
$Re_D = 1$	27,45	14,4 %	-16,8 %	0,182 %
$Re_D = 10$	4,31	34,6 %	-62,2 %	1,57 %

Tabell 3: Simulerte verdier for C_D på en sfære med avvik fra analytiske tilnæringer.

Figur 13 viser forholdet mellom de viskøse kreftene og trykk-kreftene på partikkelen. Fra likning (54) har vi at den totale motstandskraften på en sfære ved Stokes-strømning består av to tredeler viskøse krefter og én tredel trykk-krefter. Dette stemmer svært bra for $Re_D < 1$. For $Re_D > 1$ blir derimot andelen trykk-krefter større og forholdet er ikke lenger konstant.

4.2 Sfæroide i uniform strømning

I figur 14 ser vi hastighetsprofilene omkring en sfæroide med akseforhold 1:6 med forskjellige orienteringer i forhold til strømmingen. For $\varphi=0$ vil en Stokes-strømning gi en aksesymmetrisk strømning om x-aksen og i tillegg symmetri om $x=0$. For $\varphi=\frac{\pi}{2}$ vil det være symmetri om de tre planene $x=0$, $y=0$ og $z=0$. For $\varphi=\frac{\pi}{4}$ vil det kun være symmetri om $z=0$. Ut fra figur 20 ser det ikke ut til å være noen markante avvik fra Stokes-strømmingen for noen av orienteringene ved $Re_D=1$.

Ved å se nærmere på sfæroiden med hovedaksen parallelt med strømmingen (figur 16), er det klart at strømmingen omkring sfæroiden ved denne orienteringen oppfører seg på omtrent samme måte når Re_D varieres som strømmingen omkring en sfære. Dette kan også sies om $\varphi = \frac{\pi}{4}$ og $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (se figur 27 og 28 i vedlegg E). Symmetrien opp- og nedstrøms for partikkelen forsvinner etterhvert som Re_D økes, og da blir også gradientene nært partikkelen større. Også her er det et skille omtrent ved $Re_D=1$. For lavere verdier av Re_D er strømmingen nært identisk med Stokes-strømmingen, mens for $Re>1$ blir avvikene synlige.

Figur 16 viser de simulerte verdiene av motstandskoeffisienten på sfæroiden ved de tre orienteringene vi har sett på tidligere. De prosentvise avvikene fra de analytiske tilnærmingene er gitt i tabell 4. Det er tydelig at motstanden blir større når vinkelen øker. Det er som forventet siden det projiserte arealet til partikkelen på planet normalt på strømmingen da blir større. I likhet med for sfæren avtar C_D ved økende Re_D . Samtidig er motstanden på sfæroiden mindre

enn på sfæren i alle tilfellene. Forholdet mellom de viskøse kreftene og trykk-kreftene er svært avhengig av orienteringen til sfæroiden. For $\varphi=0$ består den totale motstandskraften av 95 % viskøse krefter og 5 % trykk-krefter, mens for $\varphi=\frac{\pi}{4}$ består den totale motstandskraften av 69 % viskøse krefter og 31 % trykk-krefter. For $\varphi=\frac{\pi}{2}$ er forholdet omtrent 1:1 med 51 % viskøse krefter og 49 % trykk-krefter.

For alle orienteringene er de simulerte verdiene av C_D mellom verdiene for Stokes-strømningen (likning (72)) og Oseens tilnærming (likning (58)) for $Re_D=1$ og 10, mens de faller utenfor ved mindre Re_D . I likhet med for sfæren nærmer de simulerte verdiene seg Stokes-løsningen når Re_D går mot null. Det kan se ut som det er en tendens til at avviket mellom de simulerte verdiene av motstanden og Stokes-løsningen øker for høyere vinkel φ . Mens simuleringene for $\varphi=0$ for alle Re_D har de minste avvikene, er avvikene størst ved $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Forskjellene er imidlertid ikke veldig store.

	C_D	$\frac{C_D - C_{D,Stokes}}{C_{D,Stokes}}$	$\frac{C_D - C_{D,Oseen}}{C_{D,Oseen}}$
$Re_D = 0,01$	822,96	4,65 %	4,27 %
$Re_D = 0,1$	82,401	4,77 %	1,06 %
$Re_D = 1$	8,5364	8,48 %	-20,7 %
$Re_D = 10$	1,0381	32,2 %	-71,9 %

(a) $\varphi = 0$

	C_D	$\frac{C_D - C_{D,Stokes}}{C_{D,Stokes}}$	$\frac{C_D - C_{D,Oseen}}{C_{D,Oseen}}$
$Re_D = 0,01$	977,34	5,3112 %	4,8551 %
$Re_D = 0,1$	98,340	5,9642 %	1,5467 %
$Re_D = 1$	10,286	10,838 %	-22,762 %
$Re_D = 10$	1,3320	43,522 %	-73,175 %

(b) $\varphi = \frac{\pi}{4}$

	C_D	$\frac{C_D - C_{D,Stokes}}{C_{D,Stokes}}$	$\frac{C_D - C_{D,Oseen}}{C_{D,Oseen}}$
$Re_D = 0,01$	1142,6	6,8162 %	6,2833 %
$Re_D = 0,1$	114,52	7,0546 %	1,9429 %
$Re_D = 1$	12,027	12,426 %	-25,121 %
$Re_D = 10$	1,5810	47,796 %	-75,426 %

(c) $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Tabell 4: Simulerte verdier for C_D på en sfæroide med avvik fra analytiske tilnærminger.

4.3 Sfæroide i skjærstrømning

Figur 17 viser påvirkningen partikkelen har på hastigheten til strømmingen for forskjellige vinkler φ . Skjærstrømhastigheten $\dot{\gamma}y$ er trukket fra de simulerte verdiene for hastighetene. Merk at hastighetene i $\varphi = \frac{\pi}{4}$ og $\varphi = \frac{\pi}{2}$ er skalert ned i forhold til $\varphi = 0$. Det er klart at partikkelens påvirkning på strømmingen øker for større φ , både lenger opp- og nedstrøms for partikkelen, og i et større område i y -retning. For alle orienteringene er hastighetsendringene forårsaket av partikkelen størst ved den delen av partikkelen som er lengst unna x -aksen. Dette er naturlig siden det er her partikkelen opplever høyest hastighet, og denne hastigheten må bremses ned til null ved overflaten til partikkelen. For både $\varphi = 0$ og $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ser strømmingen ut til å være tilnærmet antisymmetrisk om planet $x=0$, og symmetrisk om planet $y=0$ og $z=0$. For tilfellet der partikkelen står skrått på strømmingen er det kun symmetri om $z=0$. Dette er som forventet siden partikkelen selv kun er symmetrisk om dette planet.

I figur 29 er partikkelens påvirkning av strømningsfeltet illustrert for varierende Re_γ når partikkelen er orientert parallelt med strømmingen. Merk at også her er hastighetene skalert forskjellig. Hastighetsprofilene er så og si identiske for alle Re_γ opp til 1, med antisymmetri om planet $x=0$ og symmetri om $y=0$. For $Re_\gamma=5$ er antisymmetrien om $y=0$ brutt, mens strømmingen fortsatt ser ut til å være nært antisymmetrisk om $x=0$. For alle $Re_\gamma \leq 1$ ser det ut til at oppbremsing av hastigheten som er størst ved overflaten av partikkelen går mot null når man beveger seg vekk fra partikkelen i $\pm y$ -retning. Dette vil man finne igjen i en Stokes-strømning med skjær omkring en partikkel. For $\gamma = 5$ går derimot denne oppbremsningen mot null, for så å gå over i en aksellerasjon av strømmingen en viss avstand fra overflaten i y -retning.

Figur 16 viser de simulerte verdiene av momentkoeffisienten på sfæroiden for varierende Re_γ ved de tre orienteringene $\varphi=0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ og $\varphi = \frac{\pi}{2}$. De prosentvise avvikene fra den analytiske tilnærmingen til Jeffery (likning 77) er gitt i tabell 5. Som for motstandskraften ved uniform strømning blir momentet på partikkelen i skjærstrømning større når φ øker. Men effekten av at det projiserte arealet til partikkelen på planet normalt på strømmingen øker, er for skjærstrømning svært liten i forhold til to andre effekter. For det første vil den maksimale hastighetsdifferansen til strømmingen som treffer partikkelen øke med vinkelen φ , og for det andre vil momentarmen til de største hastighetsforskjellene øke. Dette fører til at den totale forskjellen i moment blir svært stor. Mellom $\varphi = 0$ og $\varphi = \frac{\pi}{2}$ øker momentet med en faktor ~ 40 for alle Re_γ . For alle orienteringene avtar C_M når Re_γ øker. Her kan det også trekkes paralleller til uniform strømning der det samme skjer med C_D ved økende Re_D . Momentene avviker mye mindre fra Stokes-strømningen enn motstandskraften gjør ved uniform strømning. Dette

gjelder særlig ved $\varphi = \frac{\pi}{4}$ og $\varphi = \frac{\pi}{2}$ der avvikene er svært små for alle Re_γ det er sett på her. Det er en tendens til at avviket til Stokes-strømningen blir større når Re_γ øker, men dette er ikke like entydig som for den uniforme strømningen.

	C_M	$\frac{C_M - C_{M,Jeffery}}{C_{M,Jeffery}}$
$Re_\gamma = 0,01$	29,8	2,23 %
$Re_\gamma = 0,1$	2,98	2,20 %
$Re_\gamma = 1$	0,283	-2,70 %
$Re_\gamma = 5$	0,0526	-9,74 %

(a) $\varphi=0$

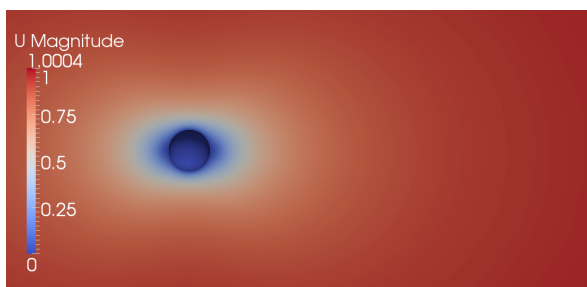
	C_M	$\frac{C_M - C_{M,Jeffery}}{C_{M,Jeffery}}$
$Re_\gamma = 0,01$	534	-0,872 %
$Re_\gamma = 0,1$	53,4	-0,985 %
$Re_\gamma = 1$	5,28	-2,00 %
$Re_\gamma = 5$	1,06	-1,44 %

(b) $\varphi=\frac{\pi}{4}$

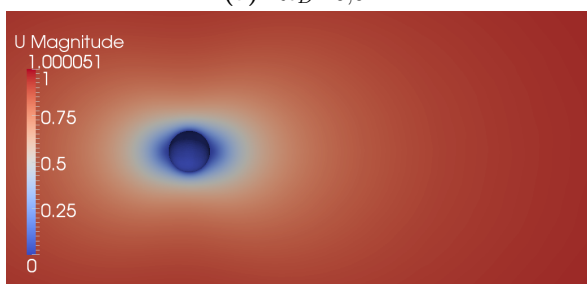
	C_M	$\frac{C_M - C_{M,Jeffery}}{C_{M,Jeffery}}$
$Re_\gamma = 0,01$	$1,05 \cdot 10^3$	-0,112 %
$Re_\gamma = 0,1$	105	-0,0960 %
$Re_\gamma = 1$	10,5	0,472 %
$Re_\gamma = 5$	2,11	0,677 %

(c) $\varphi=\frac{\pi}{2}$

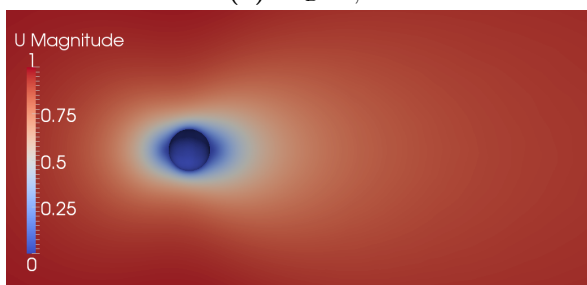
Tabell 5: Simulerte verdier for C_M på en sfæroide med avvik fra Jeffery (likning (77)).



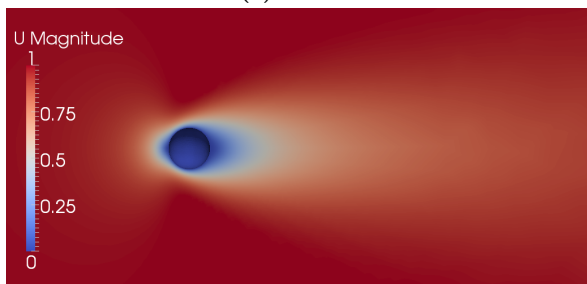
(a) $Re_D=0,01$



(b) $Re_D=0,1$

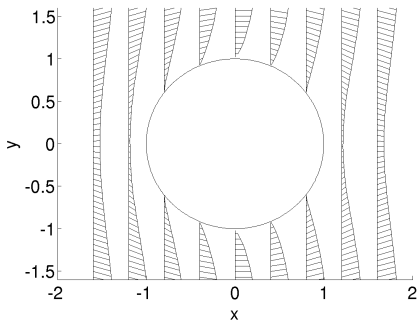


(c) $Re_D=1$

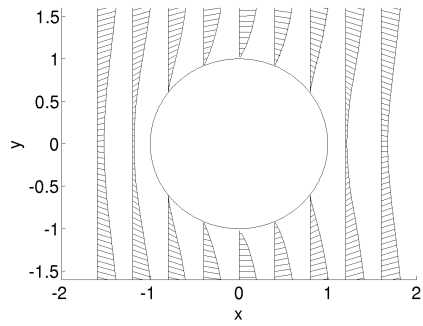


(d) $Re_D=10$

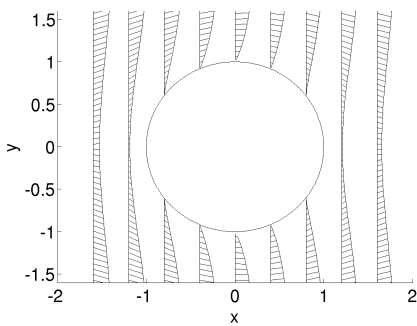
Figur 10: Hastighetsfeltet til en sfære i uniform strømning i planet $z=0$.



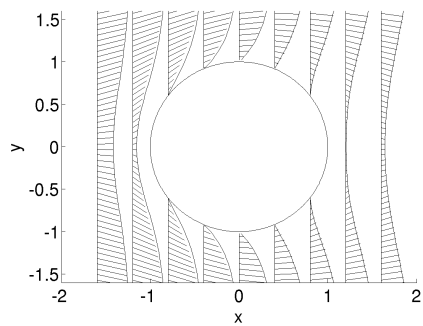
(a) $Re_D=0,01$



(b) $Re_D=0,1$

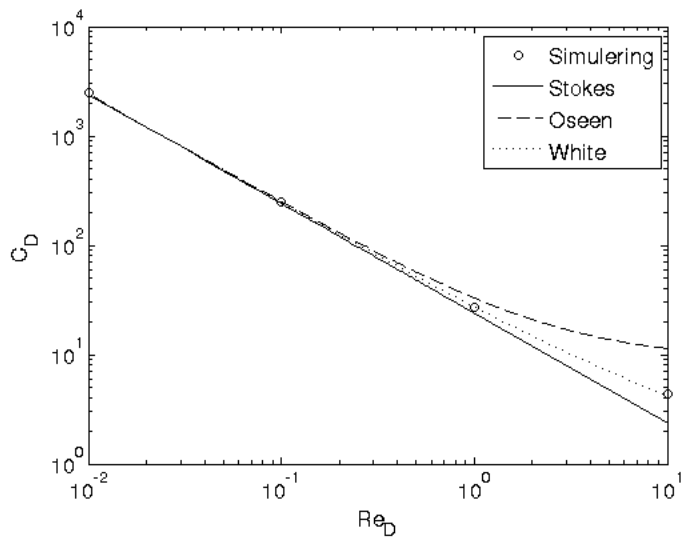


(c) $Re_D=1$

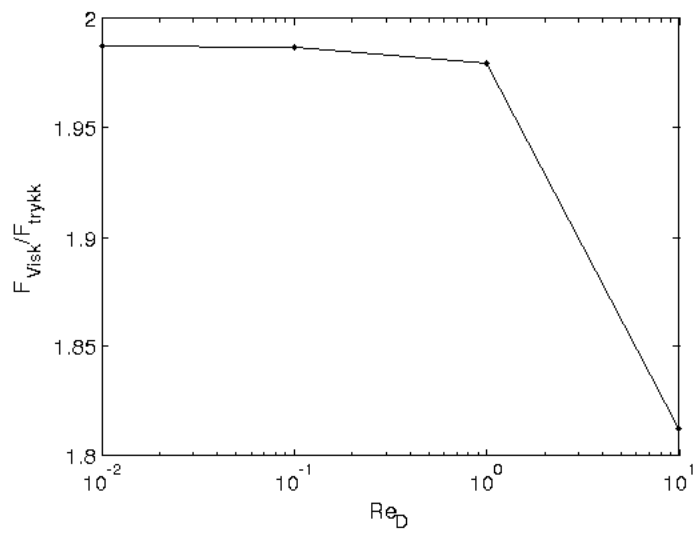


(d) $Re_D=10$

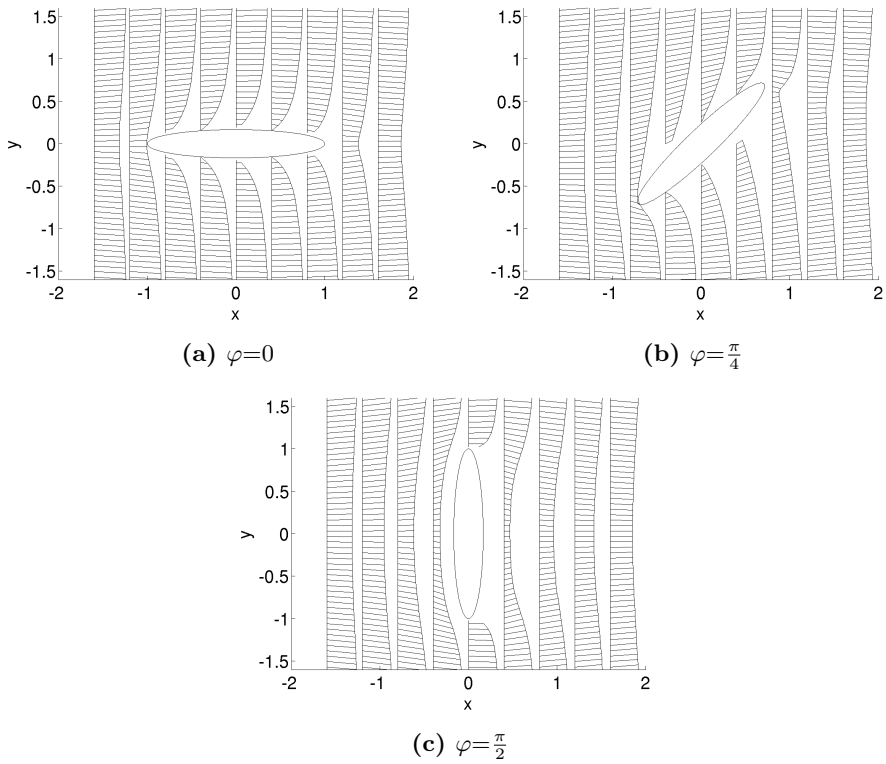
Figur 11: Hastighetsprofilen til en sfære i uniform strømning i planet $z=0$.



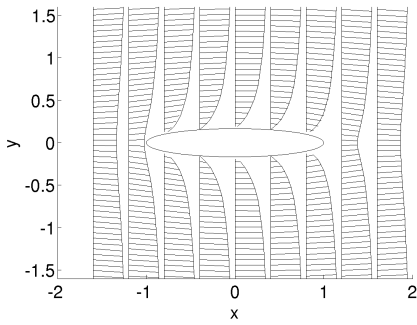
Figur 12: Simulerte verdier av C_D for en sfære i uniform strømning sammenlignet med Stokes-løsningen (likning (56)), tilnærmingen til Oseen (likning (58)) og tilnærmingen til White (likning (59)).



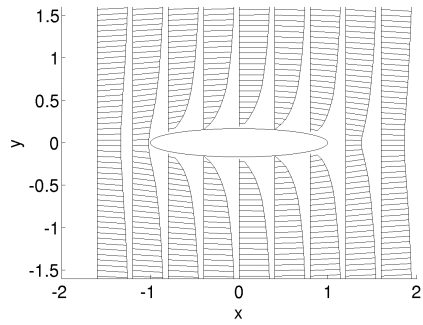
Figur 13: Forholdet mellom viskøse krefter og trykk-krefter på en sfære i uniform strømning.



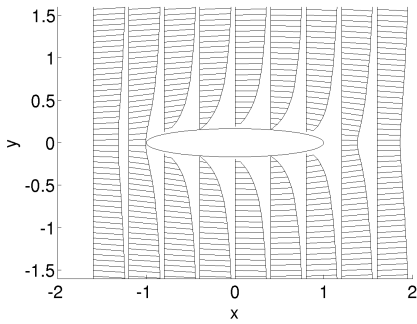
Figur 14: Hastighetsprofilen til en sfæroide i uniform strømning med $Re_D=1$ i planet $z=0$.



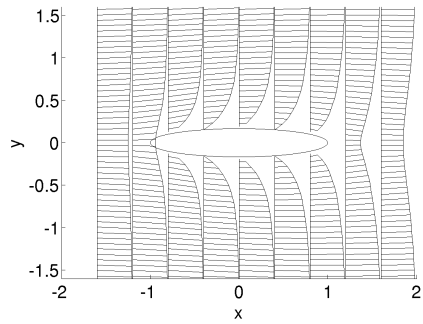
(a) $Re_D=0,01$



(b) $Re_D=0,1$

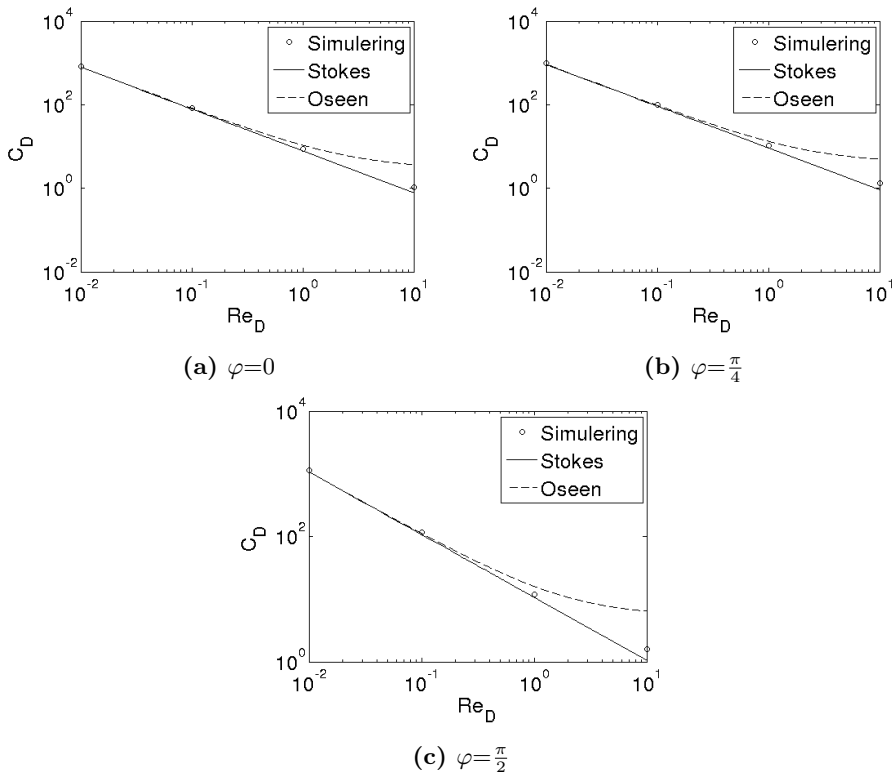


(c) $Re_D=1$

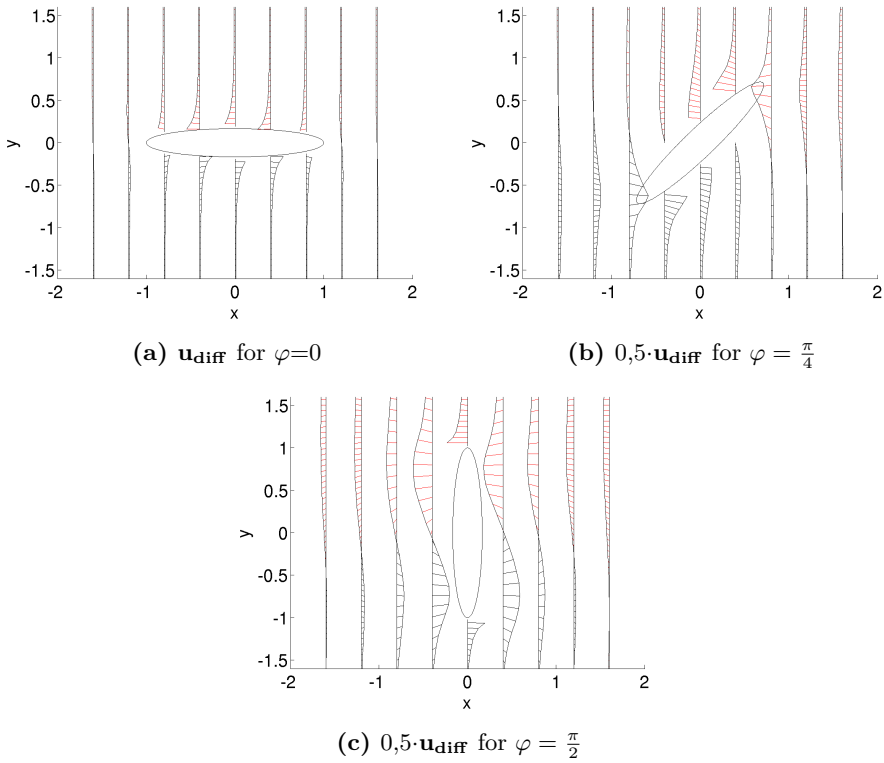


(d) $Re_D=10$

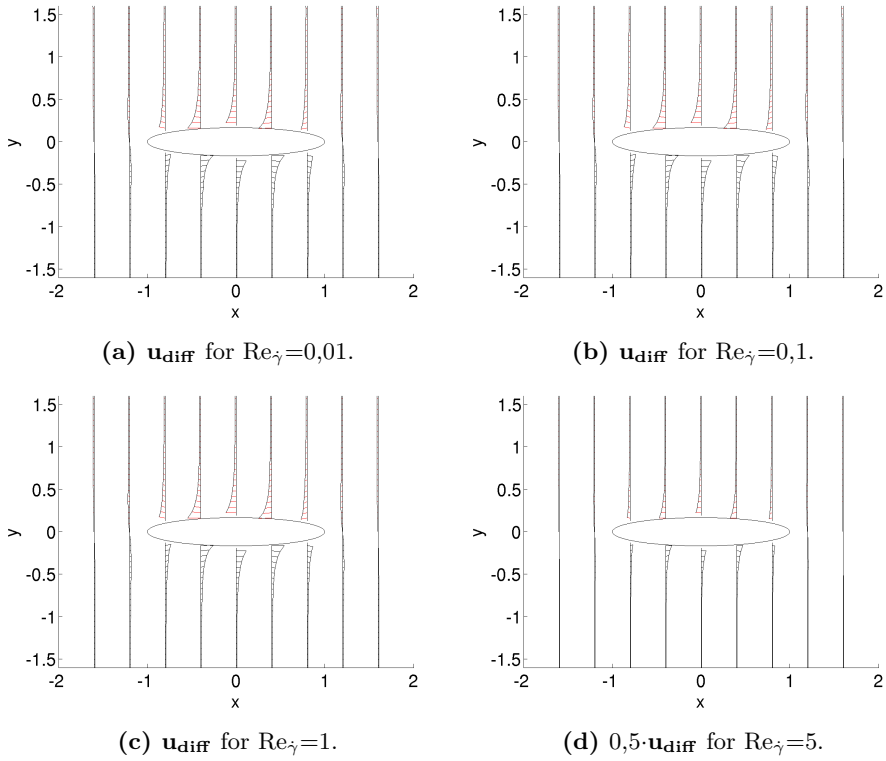
Figur 15: Hastighetsprofilen til en sfæroide i uniform strømning i planet $z=0$.



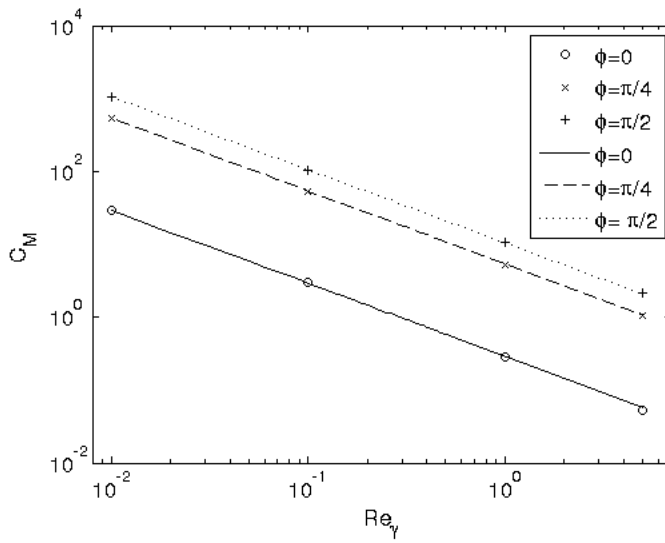
Figur 16: Simulerte verdier av C_D for en sfæroide i uniform strømning sammenlignet med Stokes-løsningen (likning (72)) og tilnærmingen til Oseen (likning (76)).



Figur 17: Hastighetsprofiler for avviket fra skjærstrømningen, $\mathbf{u}_{\text{diff}}=[u-\hat{\gamma}y,v]$ til en sfæroide i skjærstrømning i planet $z=0$ for $\text{Re}_{\hat{\gamma}}=1$. Merk at hastighetene er skalert ned med en faktor 0,5 i (b) og (c).



Figur 18: Hastighetsprofiler for avviket fra skjærstrømningen, $\mathbf{u}_{\text{diff}}=[u-\dot{\gamma}y,v]$ til en sfæroide i planet $z=0$ for $\varphi=0$. Merk at hastighetene er skalert ned med en faktor 0,5 i (d).



Figur 19: Simulerte verdier av C_M for en sfæroide i skjærstrømning sammenlignet med Jeffery sin løsning (likning (77)).

5 Diskusjon

Vi har i denne studien sett på strømming omkring partikler ved lave Reynoldstall og sammenlignet resultatene med Stokes-strømninger. Simuleringene nærmer seg i hovedsak Stokes-løsningen for minkende Re . Dette er som forventet siden Stokes-løsningen antar $Re=0$. Etter hvert som Re øker vil treghetsleddet i Navier-Stokes likning bli gjeldende, og forskjellen mellom de simulerte strømningene og Stokes-strømningene blir større. For simuleringene av de uniforme strømningene er det også positivt at verdiene av C_D stort sett holder seg mellom Stokes-løsningen og Oseens tilnærming siden disse kan sees på som en nedre og øvre grense for de faktiske motstandskoeffisientene. For de laveste Re_D faller de simulerte verdiene utenfor. Det kan være flere forklaringer på dette. For det første ligger $C_{D,Stokes}$ og $C_{D,Oseen}$ svært nære hverandre for så lave verdier av Re_D , slik at simuleringene må være veldig nøyaktige for at C_D skal komme innenfor dette området. I tillegg er simuleringene forventet å bli mer unøyaktige for lavere Re_D . Et lavere Reynoldstall betyr at partikkelen påvirker strømmingen over større område relativt til størrelsen på partikkelen siden Reynoldstallet kan sees på som forholdet mellom lengdeskalaen til partikkelen og den viskøse lengdeskalaen. Siden det er valgt å bruke den samme domenestørrelsen for simulering ved forskjellige Re er det derfor grunn til å tro at resultatene blir mer nøyaktige for økende Re siden betingelsene på grensene av domenet da påvirker kreftene fra strømmingen på partikkelen i mindre grad. Dette kan også forklare hvorfor det for sfæren er ved lavest Re_D at avviket fra $C_{D,White}$ er størst og at det ved simulering av skjær ikke alltid er det laveste Re_γ som gir minst avvik fra Jeffery sin løsning på momentet. På den annen side vil vaken bak partikkelen som vi har sett for uniform strømming vokse når Re_D øker, slik at det kan tenkes at resultatene igjen i større grad vil bli påvirket av grensebetingelsen satt ved utløpet for de høyeste Re_D . Men siden fluidet ved denne grensen strømmer vekk fra partikkelen vil dette sannsynligvis ha mindre å si på resultatet enn påvirkningen fra de andre grensene.

Ved simuleringene av sfæroiden i skjærstrømming avtok avviket fra Jeffery sin analytiske løsning av momentet svært mye når φ ble økt. En forklaring på dette kan være at momentet på partikkelen også var svært mye større for økende φ . Hvis vi ser på økningen i momentet og endringen i avviket fra Stokes-strømmingen i tabell 5, er disse i størrelsesorden like for de fleste Re_γ . Det kan dermed tyde på at feilen var i størrelsesorden den samme ved alle simuleringene, men siden momentet ble større ved økende φ ble avviket prosentvis mindre. Simuleringene av skjærstrømming for $\varphi=0$ var heller ikke helt uavhengig av det numeriske nettverket. Da oppløsningen ble økt, ble feilen mindre. Det kan dermed tyde på at for alle skjærstrømningene det er sett på i denne studien er forskjellen fra Stokes-strømmingen svært liten, og at avviket ved $\varphi=0$ først og fremst er knyttet til

unøyaktigheter ved simuleringene, og ikke et reelt avvik forårsaket av en økning i Re_γ .

Det ble for simuleringene av uniform strømning og skjærstrømning brukt forskjellige typer numerisk nettverk. Det viste seg at det hybride nettet som først ble benyttet ikke egnet seg til å simuleringere strømning med skjær på grunn av stabilitetsproblemer. Det kan gjøre det mer problematisk å sammenligne simuleringene av uniform strømning og skjærstrømning for å trekke konklusjoner om hva som gir det største avviket på Stokes-strømningen av å øke Re_D og å øke Re_γ . Resultatene for C_D ved bruk av det hybride nettet gir derimot en indikasjon på at det ikke var noe problem knyttet til dette nettet med tanke på nøyaktighet ved simulering av uniform strømning selv om det ikke var stabilt for simulering av skjærstrømning.

Antagelsene om inkompressibel og laminær strømning er svært gode grunnet at det kun er sett på strømning med lave Reynoldstall. For et fluid er kompressible effekter neglisjerbare når hastighetene er mye mindre enn lyd hastigheten til fluidet [24] mens grensesjiktet er laminært opp til $Re_D \approx 250000$ [23]. En forenkling det derimot kan knyttes mer usikkerhet til, er at det kun ble sett på stasjonær strømning der partikkelen står i ro. Det er i litteraturen vist at det er forskjell i krefter og moment ved såkalte kvasi-stasjonære målinger og ved transiente strømninger. S. Krajinović [8] har vist at momentet på en såkalt "bluff body" kan variere så mye som 30% mellom statiske og dynamiske simuleringer. Tilsvarende verdier er også funnet ved eksperimentelle studier. Noe av forklaringen er at en vake har en viss treghet, slik at den vil henge etter et objekt i bevegelse. Dette vil naturligvis ikke bli fanget opp hvis objektet i simuleringene står stille. Det er derfor grunn til å tro at ved Reynolds-tall hvor det dannes en ikke ubetydelig vake bak partikkelen vil denne vaken påvirke strømningen på en helt annen måte ved dynamiske simuleringer enn i stasjonære simuleringer. Det er derfor ikke nødvendigvis slik at resultater gjort ved stasjonær strømning er direkte overførbare til transient strømning omkring en partikkel med translasjon og/eller rotasjon.

OpenFOAM og andre tilsvarende programmer for simulering av fluid dynamikk er først og fremst beregnet på å simulere strømninger med høye Reynoldstall der det er vanlig å benytte en modell for å beskrive turbulensen i strømningen. Det er derfor begrenset hvor mye vekt det blir lagt på nøyaktigheten til de numeriske metodene siden turbulensmodellen i de aller fleste tilfeller vil være den klart største feilkilden. For strømningene det er sett på i denne studien er derimot nøyaktigheten til de numeriske metodene viktige for at resultatene av simuleringene skal kunne brukes som et sammenlikningsgrunnlag for analytiske tilnærminger. Det kan derfor være et problem knyttet til bruken av verktøy som OpenFOAM til studier som denne. Et eksempel på dette er at den eksakte grensebetingelsen

i likning (83) for trykkgradienten på en overflate med heft ikke er en standard implementasjon i OpenFOAM. Nå har det vist seg at det har vært mulig å få en akseptabel nøyaktighet på simuleringene slik at slutninger kan trekkes fra resultatene, og det er fortsatt potensial for ytterligere nøyaktighet ved blant annet å øke oppløsningen ved noen simuleringer. Det bør imidlertid vurderes om det ved senere studier er mer hensiktsmessig å bruke verktøy som først og fremst er tiltenkt denne type oppgaver slik at flere slutninger kan trekkes. Det er derimot viktig å huske på at mer nøyaktige simuleringer som regel vil være mer ressurskrevende, og at mer datakapasitet enn det som har vært brukt i denne studien da vil være nødvendig.

Det er i denne studien sett på svært lave Reynoldstall, Re_D opp til 10 og Re_γ opp til 5. Det kan være interessant å se på om Re i denne størrelsesorden kan knyttes opp mot reelle partikkelstrømninger. Et praktisk eksempel kan være askepartikler i luft. En askepartikkel har typisk en radius på $1-100 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ [4], men de kan også være mye mindre [19, 7]. Viskositeten i luft er i størrelsesorden $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ [24] og hastigheten partikkelen i fritt fall er i størrelsesorden $0,02 \text{ m/s}$ (se vedlegg D). Da får vi et Reynoldstall i størrelsesorden

$$Re_D = \frac{v_s \cdot 2a}{\nu} \sim 0,02 \quad (84)$$

En slik strømning vil derfor være svært aktuell for slike simuleringer som er gjort her. Hvis strømmingen er turbulent vil hastighetene og dermed Re_D kunne være mye større, men selv med hastigheter i størrelsesorden 100 ganger større vil resultater fra denne studien være relevante.

6 Konklusjon

Vi har i denne studien sett på uniform strømning og skjærstrømning omkring partikler ved lave Reynoldstall. For alle tilfellene av uniform strømning det er sett på avtar C_D på partikkelen med Re_D . For en sfæroide er det også sett en økning i C_D når φ øker, men ved alle orienteringene er C_D lavere enn for en sfære. For en skjærstrømning er det sett mye av den samme oppførselen for C_M som for C_D i uniform strømning. C_M avtar med Re_γ , og øker med φ . Økningen som er observert av C_M for skjærstrømning er derimot svært mye større enn økningen av C_D ved uniform strømning.

Denne studien har også vist at antagelsen om Stokes-strømning kan være en god tilnærming ved strømning omkring partikler ved lave Reynoldstall. Hvor grensen går for når Stokes-strømningen ikke lenger gir en akseptabel løsning for kreftene og momentene på partikkelen er til en viss grad avhengig av partikkelens form og orientering, men i tillegg hvor nøyaktig løsning som kreves. For strømning med uniform hastighet ser det ut til at Stokes-løsningen er en god tilnærming for Re_D opp mot 1. Her er avviket på motstandskoeffisienten i størrelsesorden 10 %. Over denne grensen begynner avviket derimot å bli betydelig. For momentet på en sfæroide i lineær skjærstrømning er avviket fra Jeffery sin analytiske løsning lite for alle Re_γ det er sett på her, $Re_\gamma \leq 5$. Ved å studere hastighetsfeltet rundt partikkelen kommer det derimot fram at strømmingen har begynt å bryte med Stokes-strømningen sin form ved $Re_\gamma=5$. Det kan derfor forventes et betydelig avvik også i momentet ved ytterligere økning av Re_γ . Det ser likevel ut til at for Re_D og Re_γ i samme størrelsesorden er det et Re_D ulik null som vil forårsake det største avviket fra Stokes-strømningen.

Vi har også sett eksempler på at å studere partikkelstrømning med så lave Reynoldstall som vi har sett på ikke bare er en teoretisk problemstilling av ren akademisk interesse, men kan være svært aktuelt for reelle partikkelstrømninger. Her er askepartikler i luft et eksempel.

Den åpne programvaren OpenFOAM er benyttet til å løse likningene som beskriver strømmingen omkring partiklene. Dette har vist seg å være et egnet verktøy til oppgaven, selv om det er potensiale for å oppnå mer nøyaktige resultater ved å bruke programvare som er skreddersydd for denne type simuleringer.

6.1 Videre arbeid

Det er i denne studien kun sett på et lite antall tilfeller av strømning omkring anisotrope partikler. Det er mye arbeid som gjenstår for å få en fullstendig forståelse av hvordan forskjellige parametere påvirker strømmingens avvik fra

Stokes-strømningen. For alle verdiene av Re_γ det er sett på i denne studien er det såpass små avvik fra Jeffery sin analytiske løsning at en naturlig fortsettelse av dette arbeidet vil være å se på effekten av å øke Re_γ ytterligere. Det er i tillegg kun sett på skjærstrømninger der hastigheten er null i høyden til sentrum av partikkelen. Det kan være interessant å se på effekten av å variere Reynoldstallet basert på hastigheten i $y=0$, og å se på avviket fra Stokes-løsningen for krefter og moment når både Re_D og Re_γ er ulik null. Det bør også undersøkes om resultatene fra de stasjonære simuleringer i denne studien er gyldige for reelle strømninger ved å gjennomføre dynamiske simuleringer der strømmingen er transient og partikkelen har en translaterende og/eller roterende bevegelse.

7 Referanser

- [1] Brenner, H.: *The Stokes resistance of an arbitrary particle*. Chemical Engineering Science, 18(1):1–25, 1963.
- [2] Clift, R., J. R. Grace og M. E. Weber: *Bubbles, drops, and particles*. Courier Dover Publications, 2005.
- [3] El Khoury, G. K., H. I. Andersson og B. Pettersen: *Wakes behind a prolate spheroid in crossflow*. Journal of Fluid Mechanics, 1(1):1–39, 2012.
- [4] Furuya, K., Y. Miyajima, T. Chiba og T. Kikuchi: *Elemental characterization of particle size-density separated coal fly ash by spectrophotometry, ICP (inductively coupled plasma emission spectrometry), and scanning electron microscopy-energy dispersive x-ray analysis*. Environmental science & technology, 21(9):898–903, 1987.
- [5] Gallily, I. og A. H. Cohen: *On the orderly nature of the motion of nonspherical aerosol particles. II. Inertial collision between a spherical large droplet and an axially symmetrical elongated particle*. Journal of Colloid and Interface Science, 68(2):338–356, 1979.
- [6] Jeffery, G. B.: *The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid*. Proceedings of the Royal Society of London, 102(715):161–179, 1922.
- [7] Kennedy, I. M.: *The health effects of combustion-generated aerosols*. Proceedings of the Combustion Institute, 31(2):2757–2770, 2007.
- [8] Krajnović, S.: *Simulations of bluff body wakes and vehicle aerodynamics*. MekIT'13 Seventh National Conference on Computational Mechanics (red. Andersson H. I. og Skallerud B.), s. 1-19, sider 1–19, 2013.
- [9] Ltd, LEAP Australia Pty: *Inflation Layer Meshing in ANSYS*. <http://www.computationalfluidynamics.com.au/tips-tricks-inflation-layer-meshing-in-ansys/>, mars 2013.
- [10] Lundell, F. og A. Carlsson: *Heavy ellipsoids in creeping shear flow: Transitions of the particle rotation rate and orbit shape*. Physical Review E, 81(1):016323, 2010.
- [11] Lundell, F., L. D. Söderberg og P. H. Alfredsson: *Fluid mechanics of papermaking*. Annual Review of Fluid Mechanics, 43:195–217, 2011.
- [12] Oberbeck, A.: *Ueber stationäre Flüssigkeitsbewegungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 81:62–80, 1876.

- [13] Open, CFD: *OpenFOAM User Guide*. OpenFOAM Foundation, 2.1.1 utgave, Mai 2012.
- [14] Open, CFD: *OpenFOAM Programmer's Guide*. OpenFOAM Foundation, 2.2.0 utgave, Februar 2013.
- [15] OpenFOAMWiki: *OpenFOAM guide/Finite volume method (OpenFOAM)*. [http://openfoamwiki.net/index.php/Finite_volume_method_\(OpenFOAM\)](http://openfoamwiki.net/index.php/Finite_volume_method_(OpenFOAM)), april 2013.
- [16] Oseen, C. W.: *Über die Stokessche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik*. Ark. Mat. Astron. Fys, 6(29):1–20, 1910.
- [17] Patankar, S. V. og D. B. Spalding: *A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 15(10):1787–1806, 1972.
- [18] Stokes, G. G.: *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*, bind 9. Pitt Press, 1851.
- [19] Turns, S. R.: *An introduction to combustion*. McGraw-Hill International Edition, tredje utgave, 2012.
- [20] Versteeg, H. K. og W. Malalasekera: *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Prentice Hall, 2007.
- [21] Weisstein, E.: *Euler Angles*. <http://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html>, November 2012.
- [22] Weisstein, E.: *Euler Parameters*. <http://mathworld.wolfram.com/EulerParameters.html>, November 2012.
- [23] White, F. M.: *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill International Edition, tredje utgave, 2006.
- [24] White, F. M.: *Fluid mechanics*. McGraw-Hill International Edition, sjette utgave, 2008.

A Vedlegg: fvSolution

```
/*----- C++ -----*\
|=====|
| \\ / F i e l d | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
| \\ / O p e r a t i o n | Version: 2.1.1
| \\ / A n d | Web: www.OpenFOAM.org
| \\ / M a n i p u l a t i o n |
|*-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "system";
    object       fvSolution;
}
// *****

solvers
{
    p
    {
        solver          GAMG;
        tolerance       1e-7;
        relTol          0.1;
        smoother        GaussSeidel;
        nPreSweeps      0;
        nPostSweeps     2;
        cacheAgglomeration true;
        nCellsInCoarsestLevel 10;
        agglomerator    faceAreaPair;
        mergeLevels     1;
    }

    U
    {
        solver          smoothSolver;
        smoother        GaussSeidel;
        nSweeps         2;
        tolerance       1e-11;
        relTol          0.1;
    }
}
}
```

```
SIMPLE
{
  nNonOrthogonalCorrectors 0;
  pRefCell 0;
  pRefValue 0;

  residualControl
  {
    p          1e-6;
    U          1e-6;
  }
}

relaxationFactors
{
  fields
  {
    p          0.3;
  }
  equations
  {
    U          0.7;
  }
}

// ***** //
```

B Vedlegg: fvSchemes

```
/*----- C++ -----*\
| ===== |
| \\      / F i e l d      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
| \\      / O p e r a t i o n      | Version: 2.1.1
| \\      / A n d      | Web:      www.OpenFOAM.org
| \\/     M a n i p u l a t i o n      |
|*-----*\
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "system";
    object       fvSchemes;
}
// *****

ddtSchemes
{
    default      steadyState;
}

gradSchemes
{
    default      Gauss linear;
    grad(p)      Gauss linear;
    grad(U)      Gauss linear;
}

divSchemes
{
    default      none;
    div(phi,U)   Gauss linear;
}

laplacianSchemes
{
    default      none;
    laplacian(nuEff,U) Gauss linear corrected;
    laplacian((1|A(U)),p) Gauss linear corrected;
}

interpolationSchemes
```

```
{
  default      linear;
  interpolate(U) linear;
}

snGradSchemes
{
  default      corrected;
}

fluxRequired
{
  default      no;
  p            ;
}

// ***** //
```

C Vedlegg: Utregning av utbredelse Stokes-strømning

Ved å sette $\theta = \frac{\pi}{2}$ inn i likning (52) får vi hastigheten i x-retning i planet $x=0$ i en avstand r fra sentrum av sfæren:

$$u = U \left(-1 + \frac{a^3}{4r^3} + \frac{3a}{4r} \right) \quad (85)$$

Tilsvarende får vi hastigheten i x-retning langs x-aksen ved å sette $\theta = 0$ likning (53):

$$u = U \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} - \frac{3a}{2r} \right) \quad (86)$$

I teorien vil en partikkel i en Stokes-strømning påvirke strømmingen uendelig langt unna i alle retninger. Ved å sette $\frac{u}{U} = 0,99$ i de to uttrykkene og deretter løse for $\frac{r}{a}$ får vi en uttrykk for hvor langt unna sfæren man må før strømmingen er tilnærmet lik fristrømmingen og dermed ikke lenger er påvirket av partikkelen:

$$\frac{r}{a} \approx 75, \quad x = 0 \quad (87)$$

$$\frac{r}{a} \approx 150, \quad y = z = 0 \quad (88)$$

D Vedlegg: Utrekning av hastigheten til en askepartikkel i fritt fall

En partikkel i fritt fall vil aksellerere til luftmotstand, oppdrift og tyngdekraft balanserer hverandre og partikkelen oppnår en konstant hastighet v_s . Ved å bruke uttrykket i likning (54) for luftmotstanden får vi:

$$6\pi\mu v_s a + \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_f g - \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_p g = 0 \quad (89)$$

der ρ_p er massetettheten til partikkelen, ρ_f er massetettheten til fluidet, g er tyngdeaksellerasjon og a er radiusen til partikkelen. Hastigheten til en sfæreformet partikkel i fritt fall er da gitt ved:

$$v_s = \frac{2}{9} \frac{\rho_p - \rho_f}{\mu} g a^2 \quad (90)$$

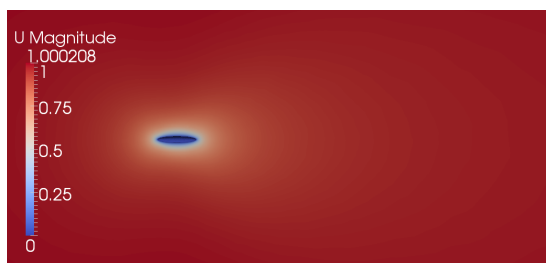
Forholdet $\frac{\rho_p}{\rho_f}$ for en askepartikkel i luft er typisk 500-1000 [4]. Vi har da at $\rho_p - \rho_f \approx \rho_p$ som gir

$$v_s \approx \frac{2}{9} \frac{\rho_p}{\mu} g a^2 \approx \frac{2}{9} \frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{1}{\nu} g a^2 \quad (91)$$

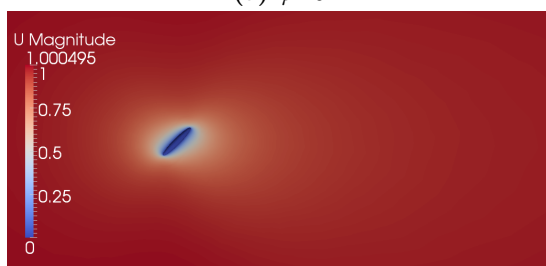
Ved å bruke $a \sim 10^{-5}$ m, $\nu \sim 10^{-5}$ m²/s, $g \sim 10$ m/s² og $\frac{\rho_p}{\rho_f} \sim 10^3$ får vi:

$$v_s \sim \frac{2}{9} \cdot 10^3 \cdot 10^5 \text{ s/m}^2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot (10^{-5} \text{ m})^2 \sim 0,02 \text{ m/s} \quad (92)$$

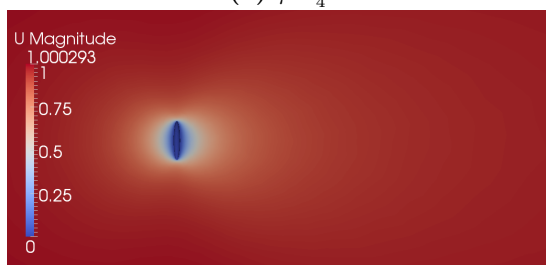
E Vedlegg: Figurer



(a) $\varphi=0$

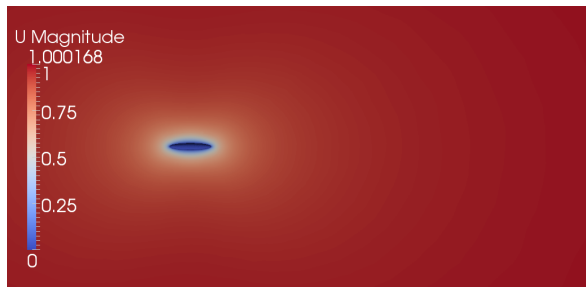


(b) $\varphi=\frac{\pi}{4}$

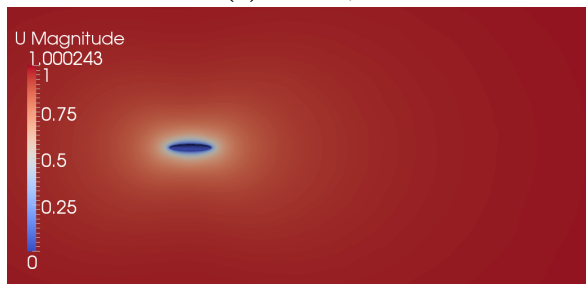


(c) $\varphi=\frac{\pi}{2}$

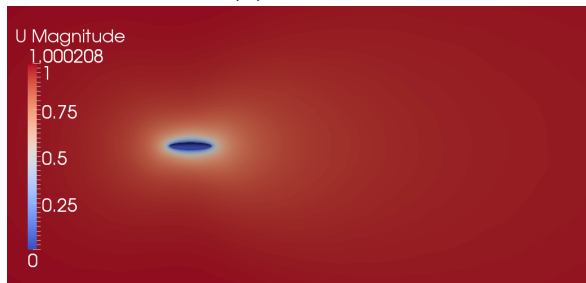
Figur 20: Hastighetsfeltet til en sfæroide i uniform strømning med $Re_D=1$ i planet $z=0$.



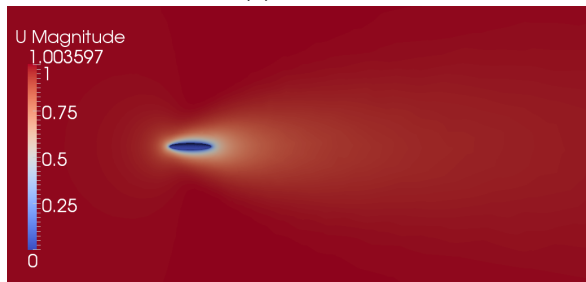
(a) $Re_D=0,01$



(b) $Re_D=0,1$

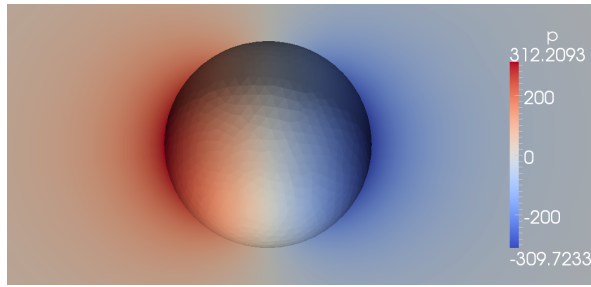


(c) $Re_D=1$

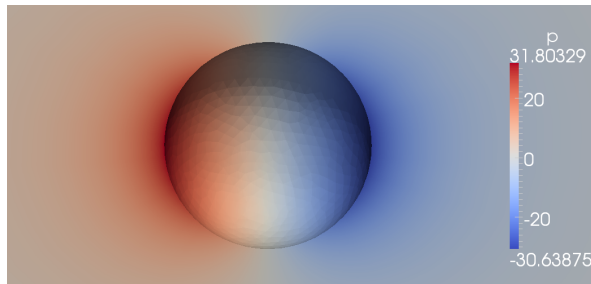


(d) $Re_D=10$

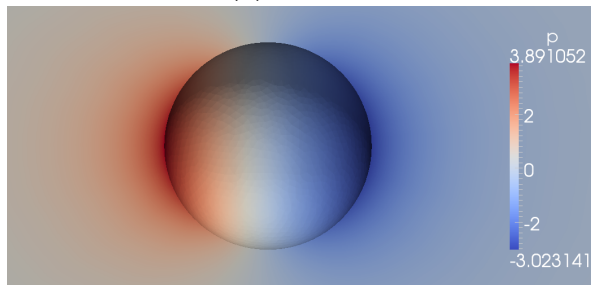
Figur 21: Hastighetsfeltet til en sfæroide i uniform strømning i planet $z=0$.



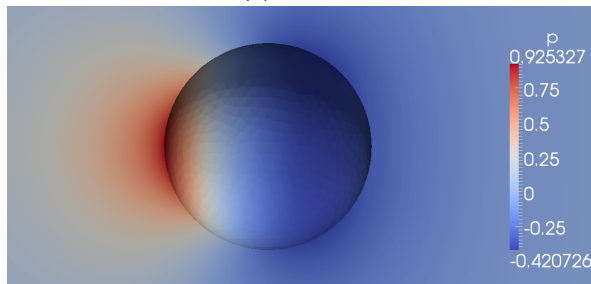
(a) $Re_D=0,01$



(b) $Re_D=0,1$

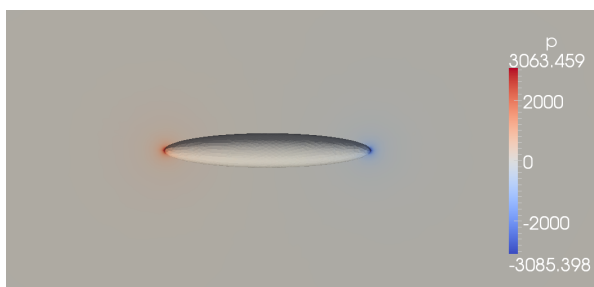


(c) $Re_D=1$

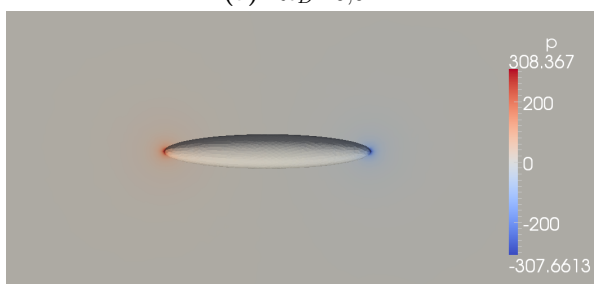


(d) $Re_D=10$

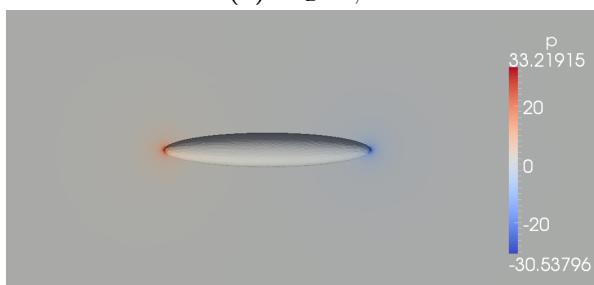
Figur 22: Trykkfeltet til en sfære i uniform strømning i planet $z=0$.



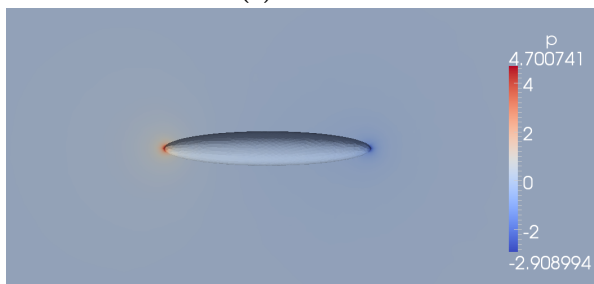
(a) $Re_D=0,01$



(b) $Re_D=0,1$

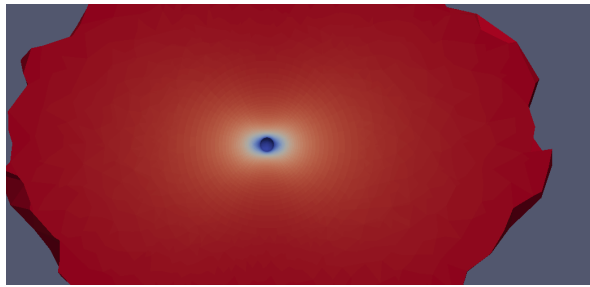


(c) $Re_D=1$

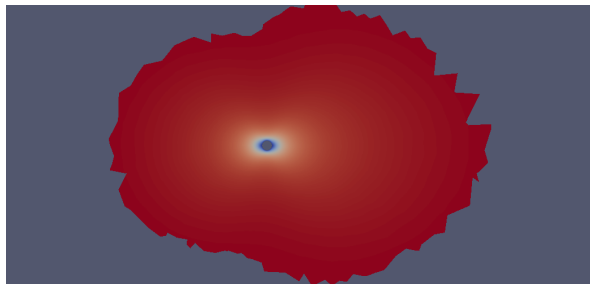


(d) $Re_D=10$

Figur 23: Trykkfeltet til en sfæroide i uniform strømning i planet $z=0$.



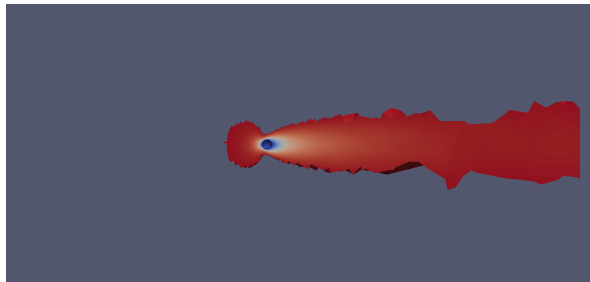
(a) $Re_D=0,01$



(b) $Re_D=0,1$

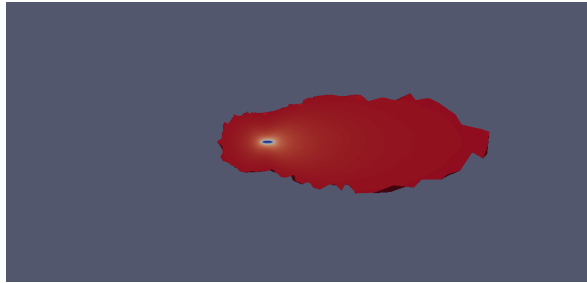


(c) $Re_D=1$

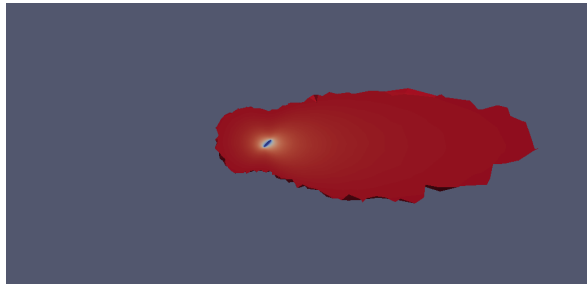


(d) $Re_D=10$

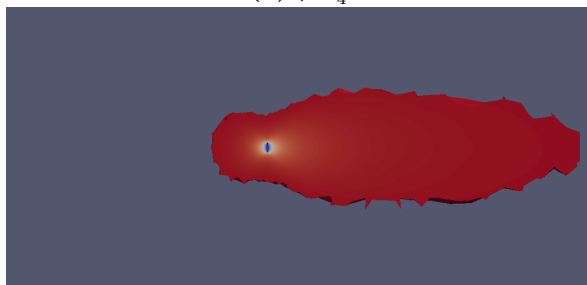
Figur 24: Hastighetsfeltet til en sfære i uniform strømning i planet $z=0$ der kun hastigheten med avvik mer enn 1% fra fristrøms hastigheten er vist.



(a) $\varphi=0$

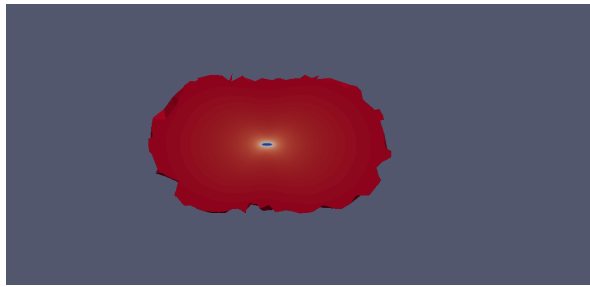


(b) $\varphi=\frac{\pi}{4}$

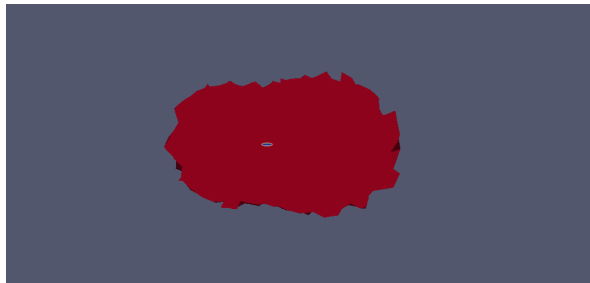


(c) $\varphi=\frac{\pi}{2}$

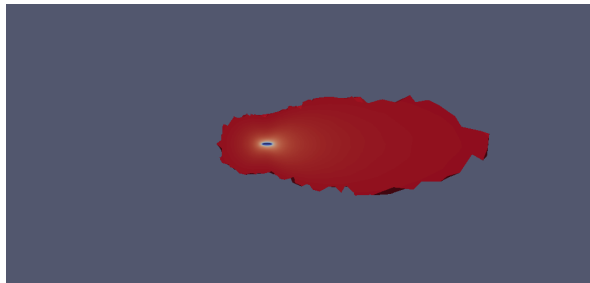
Figur 25: Hastighetsfeltet til en sfæroide i uniform strømning med $Re_D=1$ i planet $z=0$ der kun hastigheden med afvik mer enn 1% fra fristrømhastigheden er vist.



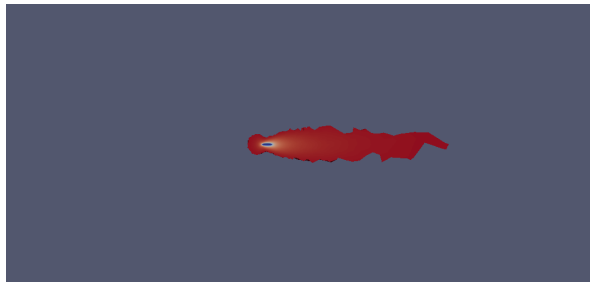
(a) $Re_D=0,01$



(b) $Re_D=0,1$

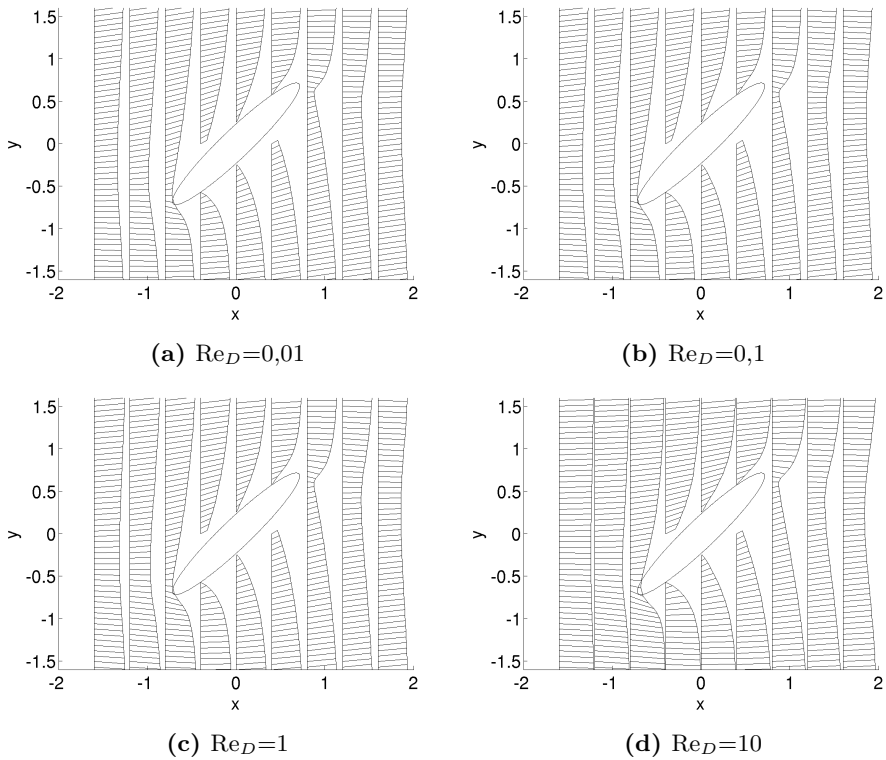


(c) $Re_D=1$

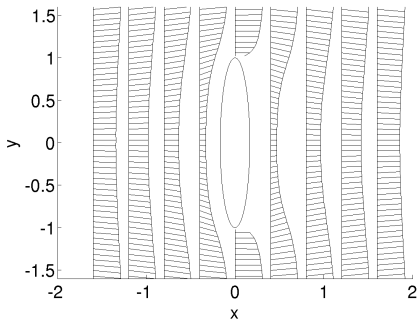


(d) $Re_D=10$

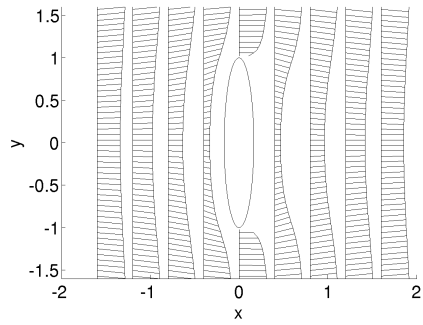
Figur 26: Hastighetsfeltet til en sfæroide i uniform strømning i planet $z=0$ der kun hastigheden med afvik mer enn 1% fra fristrøms hastigheden er vist.



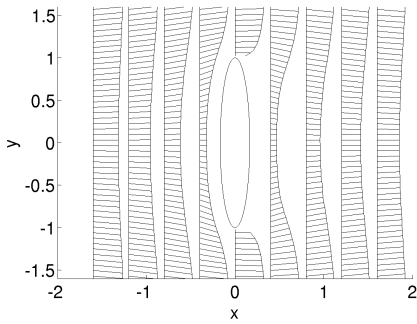
Figur 27: Hastighetsprofilen til en sfæroide med $\varphi = \frac{\pi}{4}$ i uniform strømning i planet $z=0$.



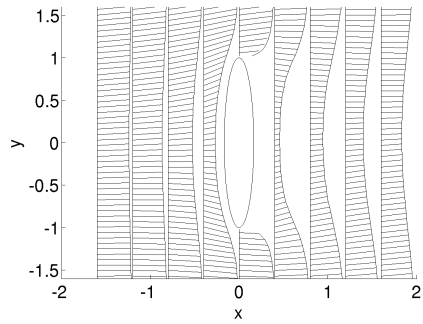
(a) $Re_D=0,01$



(b) $Re_D=0,1$

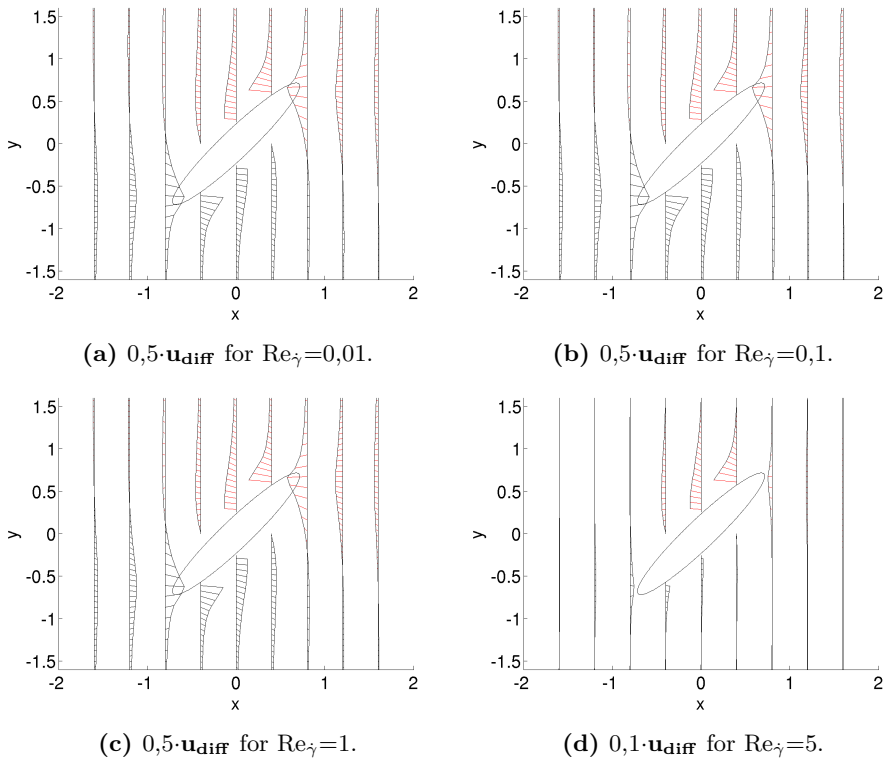


(c) $Re_D=1$

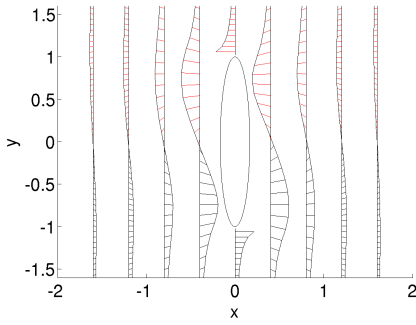


(d) $Re_D=10$

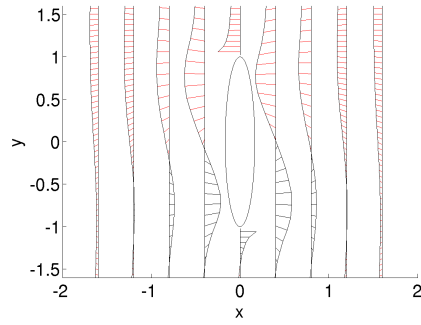
Figur 28: Hastighetsprofilen til en sfæroide med $\varphi = \frac{\pi}{4}$ i uniform strømning i planet $z=0$.



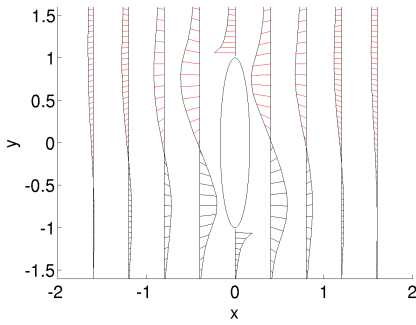
Figur 29: Hastighetsprofiler for avviket fra skjærstrømningen, $\mathbf{u}_{\text{diff}}=[u-\dot{\gamma}y,v]$ til en sfæroide i planet $z=0$ for $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Merk at hastighetene er skalert i forhold til hverandre.



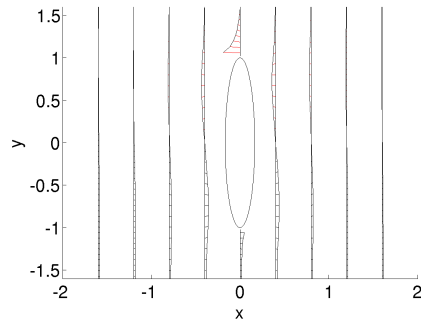
(a) $0,5 \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}$ for $\text{Re}_\gamma = 0,01$.



(b) $0,5 \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}$ for $\text{Re}_\gamma = 0,1$.



(c) $0,5 \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}$ for $\text{Re}_\gamma = 1$.



(d) $0,1 \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}$ for $\text{Re}_\gamma = 5$.

Figur 30: Hastighetsprofiler for avviket fra skjærstrømningen, $\mathbf{u}_{\text{diff}} = [u - \dot{\gamma}y, v]$ til en sfæroide i planet $z=0$ for $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Merk at hastighetene er skalert i forhold til hverandre.

