

Oppgave

Deformasjon og manipulering av modeller av biologisk materiale i et haptisk system krever både god fysisk modellering og hurtige beregninger for å oppleves som realistiske. Behovet for rask oppdatering både visuelt og haptisk har ledet til utstrakt bruk av heuristisk modellering, der en intuitiv vurdering og endring av parametre benyttes for å komme fram til en konfigurasjon som virker troverdig. Slike systemer kan være hurtige å beregne, men er kun i liten grad basert på fysiske prinsipper. Bruksområdet blir i denne sammenhengen derfor begrenset.

Denne oppgaven går ut på å utforske hvordan endelige elementers metode kan benyttes i modellering av elastisk organisk materiale til bruk med en haptisk enhet. Bruk av en Phantom haptisk enhet gir brukeren anledning til å arbeide i tre dimensjoner, og berøre og manipulere virtuelle objekter. Fysisk modellering av et organisk objekt skal gi mest mulig realisme hva angår haptisk tilbakemelding og visuelle deformasjoner og manipuleringer.

Sammendrag

Denne rapporten omhandler hvordan endelige elementers metode kan benyttes i modellering av virtuelt organisk materiale til bruk i et haptisk system. Slik fysisk modellering har stor bruksverdi spesielt innenfor medisinske anvendelser, der for eksempel simulering av kirurgi ved hjelp av haptikk representerer et billig og risikofritt alternativ i opplæring og trening av kirurger.

For mest mulig realisme tas det utgangspunkt i fysiske lover. Materialet modelleres som et volumetrisk materiale med en betingelse om likevekt mellom krefter i materialet, og elastiske egenskaper i form av lineær elastisitet. Disse betingelsene representeres som en differensialligning som gjelder for hele materialet som problemområde. Det benyttes en oppdeling av det volumetriske materialet i elementer i form av tetraedre representert med noder i alle hjørnene. Ved å benytte lokale tilnærminger av den globale differensialligningen innad i hvert element kan problemet representeres som summen av elementvise delproblemer. Dette resulterer i et lineært ligningssystem med posisjonene til elementenes noder som ukjente i systemet.

Bruk av haptikk lar brukeren få følelsen av å ta på virtuelle objekter, men setter samtidig krav til hurtige beregninger. Ved kontakt mellom brukeren og et virtuelle objektet simuleres eksterne krefter i elementformuleringen, og eventuelle deformasjoner i materialet beregnes i form av nye nodeposisjoner. For å ta hensyn til kravet om hurtige beregninger benyttes en effektiviserings-teknikk kalt kondensering, som reduserer ligningssystemet som må løses til bare å bestå av noder som er synlige og kan påvirkes av brukeren. Det vises hvordan dynamiske simulering kan modellere dynamiske egenskaper, men dagens maskinvare er ikke kraftig nok for slik simulering i sanntidssystemer som bruker haptikk. I statisk simulering vises det hvordan en selektiv multiplikasjonsprosedyre kan utnytte mange nullverdier i ligningssystemet, og dermed beregne deformasjoner i sanntid.

Forord

Denne rapporten er et resultat av masteroppgave i faget TDT4900 i gruppen for algoritmekonstruksjon og visualisering ved institutt for datateknikk og informasjonsvitenskap, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet våren 2005.

Jeg vil rette en takk til Torbjørn Hallgren for kyndig veiledning under arbeidet med denne oppgaven.

Trondheim 15. juni 2005

Geir Fagerholt

Innhold

1	Introduksjon	1
2	Tidligere arbeid	4
3	Løsning	8
3.1	Generelt om elementmetoden	8
3.2	Modellering av organisk materiale	10
3.3	Volumetrisk element	13
3.3.1	Representasjon og tilnæringer	15
3.3.2	Isoparametrisk volumetrisk element	16
3.4	Elementformulering av elastikk	19
3.4.1	Prinsippet for virtuelt arbeid	19
3.4.2	Galerkins metode	21
3.4.3	Elementformulering av lineær elastikk	22
3.4.4	Isoparametriske elementer i formuleringen	26
3.5	Numerisk integrasjon	28
3.6	Løsning av ligningsystemet	29
3.6.1	Dynamisk simulering	30
3.6.2	Statisk simulering	32
3.7	Kondensering	34
4	Implementering	36
4.1	Datastruktur	36
4.2	Geometrisk modell	38
5	Konklusjon	40
6	Videre arbeid	41
6.1	Implementasjon med haptisk grensesnitt	41
6.2	Kollisjonsdeteksjon og -håndtering	41
6.3	Optimalisering av datarepresentasjon	42

6.4	Visualisering av spenning i materialet	43
6.5	Kutting i virtuelt organisk materiale	43
6.6	Realisme i modellering av organisk materiale	44
A	Utleddning av ligningen for virtuelt arbeid	45
B	Gaussisk kvadratur	48

Kapittel 1

Introduksjon

Moderne datamaskinteknologi har åpnet for stadig nye muligheter innen medisinske anvendelser. Både innenfor opplæring av medisinsk personell og i gjennomføringen av kirurgiske inngrep har ny teknologi videreutviklet og forbedret rutinene. Kirurgiske simulatorer representerer en billig og risikofri hjelp i trening av morgendagens kirurger, mens kikkhullskirurgi allerede er i bruk under undersøkelser og operasjoner der man ønsker minst mulig skade i pasientenes vev.

De første forsøkene på virtuell virkelighet for kirurgiske simulatorer og medisinsk opplæring kom igang på slutten av 1980-tallet[1]. På denne tiden var slike systemer verken særlig realistiske eller interaktive, men ble brukt til å utforske menneskelig anatomi og forutsi resultater av medisinske prosedyrer. Kun få år senere ser vi en rivende utvikling innen området, der man fikk tilgang til menneskelige data fra virkelige mennesker. “Visible Human Project”[2] var av de første datasettene som inneholdt anatomiske data fra et helt menneske, og den første utgivelsen i 1994 blir således beskrevet som en milepæl. Omtrent på samme tid skjedde det stor utvikling innen haptiske enheter. Slike systemer inneholder et brukergrensesnitt som lar brukeren bevege et virtuelt verktøy i 3 dimensjoner ved hjelp av en haptisk arm, samtidig som enheten er i stand til å generere tilbakemeldinger i form av krefter på armen. Dette gir brukeren en oppfatning av å berøre og interagere med virtuelle objekter, der brukeren hele tiden får haptisk tilbakemelding på sine handlinger. Sammen med en korresponderende visuell tilbakemelding er haptiske enheter idag kraftfulle verktøy med mange bruksområder, deriblant til medisinske anvendelser.

Trening av medisinsk personell er en viktig motivasjonsfaktor for utviklingen av kirurgiske simulatorer. Dagens opplæringsmetoder har stort

forbedringspotensiale, der spesielt mange kirurgiske prosedyrer mangler effektive opplæringsrutiner. Idag benyttes gjerne avdøde mennesker og dyr i tidlige faser av kirurgiopplæringen, men etiske hensyn og forskjeller mellom dødt og levende vev gjør dette til en mindre god løsning. Dyr har i tillegg forskjellig anatomi fra mennesker. Kirurgi på pasienter under overvåkning av kirurger er derfor nødvendig under opplæringen, men grunnet store kostnader og risikoen det medfører for pasienter er det ønskelig å redusere omfanget av dette. Selv om kirurgiske simulatorer aldri kan erstatte trening på levende mennesker forventes det at slike simulatorer i fremtiden vil være like viktig for opplæring av medisinsk personell som flysimulatorer er for piloter idag [3].

I en kirurgisk simulator ønsker man at brukeren skal ha mulighet til å simulere kirurgiske inngrep på en risikofri og billig måte. Aktuelle handlinger vil for eksempel være å berøre, dra, skyve, kutte og sy i virtuelle objekter, men også mer kompliserte prosedyrer og bruk av spesialiserte verktøy kan simuleres. For eksempel vil en simulering av kikkhullskirugi medføre et begrenset arbeidsområde, spesialiserte verktøy og ofte også posisjonering av et virtuelt kamera.

I en generell kirurgisk simulator angir Bro-Nielsen[4] tre hovedkomponenter:

1. Grafisk grensesnitt
Visuell tilbakemelding på virtuelle objekter og brukerens handlinger.
2. Haptisk brukergrensesnitt
Haptisk input i form av brukerens handlinger med virtuelle verktøy, og haptisk tilbakemelding på disse. Ordet "haptisk" brukes om det som har med berøringssansen å gjøre, og et haptisk brukergrensesnitt lar en bruker få følelsen av å berøre og manipulere på virtuelle objekter.
3. Fysisk modellering av virtuelle objekter
Beregning av realistiske visuelle deformasjoner og haptiske tilbakemeldinger som følge av brukerens interagering med objektene

Fysisk modellering har vist seg som den største utfordringen i utviklingen av interaktive kirurgisk simulatorer. Ved kontakt mellom et brukerstyrt virtuelt verktøy og et fysisk modellert virtuelt objekt må visuelle deformasjoner og haptiske tilbakemeldinger beregnes og presenteres for brukeren i sanntid. Mens det menneskelige synet krever en visuell oppdateringsrate på omtrent 24 Hz for å oppfattes som realistiske settes langt større krav til de haptiske tilbakemeldingene. Til enhver tid bør denne oppdateringsraten være minst

300Hz, der en lavere rate vil være ødeleggende for brukerens haptiske følelse [5]. For å imøtekomme dette kravet er det vanlig å interpolere mellom suksessivt beregnede haptiske tilbakemeldinger[6]. Selv med denne tilnærmingen vil kravet om realisme i de haptiske tilbakemeldingene i de fleste tilfeller medføre en forenkling av den underliggende fysiske modellen for virtuelle objekter.

Organisk materiale har en kompleks oppbygning som er vanskelig å rekonstruere i en datamodell. I tillegg til fysisk modellering kreves en høy oppløsning for visuell realisme. Avmåling av mekaniske egenskaper fra virkelige organiske materiale regnes fortsatt som et uløst problem. For å representere materialet realistisk bør modellen ta hensyn til ikke-lineæritet, anisotropi og visko-elastisitet[3], men må ved bruk av haptikk også vurderes mot beregningskompleksitet.

En mye brukt tilnærming er å anse materialet som elastisk. Den mest populære metoden for å modellere elastiske materiale er masse-fjær-systemer. Slike systemer består av et sett med noder koblet sammen av et nettverk av fjær mellom nodene. Materialets samlede masse fordeles så over nodene. Masse-fjær-systemer har klare fordeler i lave beregningskostnader, relativt enkel implementering, og ofte visuelt gode resultater. Samtidig er denne metoden et forsøk på løse svært kompliserte problemer på et heuristisk vis, der en intuitiv vurdering og endring av parametre benyttes for å komme fram til en konfigurasjon som virker troverdig. Bruksområdene er av denne grunn begrensede. Svært få materialer kan representeres som en samling av fjær, og den utstrakte bruken av massediskretisering gir modeller som er langt fra virkeligheten. Masse-fjær gir i utgangspunktet rene overflatemodeller, og kan ikke ta hensyn til viktige fysiske prinsipper som volumpreservering på annet enn en ad hoc måte.

For mest mulig realisme er det nødvendig å konstruere modeller med utgangspunkt i fysikkens lover. Ved å beskrive fysikken som presise matematiske uttrykk i form av differensialligninger kan disse diskretiseres og løses, med gode tilnærminger til virkeligheten som resultat. Endelige elementers metode, også kalt elementmetoden, er en numerisk metode for å beregne tilnærmede løsninger på partielle differensialligninger. Historisk sett er metoden mest bruk til å løse differensialproblemer innen ingeniørgrener, og anses som en standard i testing og design av prototyper i industri. Med den siste tidens utviklinger innen datamaskinvare har nye bruksområder dukket opp, deriblant til fysisk modellering i sanntidsapplikasjoner.

Kapittel 2

Tidligere arbeid

Den senere tiden ser man en større grad av oppmerksomhet om bruk av avansert datateknikk i medisinske anvendelser. Bruk av virtuell virkelighet har åpnet for en rekke nye bruksområder, men sanntidsaspektet setter samtidig store krav til både applikasjoner og maskinvaren de kjøres på. Når man forsøker å rekonstruere virkeligheten ønsker man også mest mulig realisme, og det største problemet i slike applikasjoner er ofte å skape mest mulig realisme med den tilgjengelige maskinvaren.

Fysisk modellering av et materiale kan beskrives som et todelt problem, der det skilles mellom representasjon av materialets romlige utstrekning og dets mekaniske egenskaper. Metaxas[7] beskriver hvordan ny teknologi innen avbildningsmetoder kan revolusjonere dagens medisinpraksis. Teknikkene kommer spesielt til nytte innen romlig avbildning av anatomien til organisk materiale, der avbildningene kan foretas med stadig bedre oppløsning. Ved å skanne et organisk materiale med *magnetic resonance* (MR) eller *computer tomography* (CT) kan materialet representeres som en rekke todimensjonale avbildninger. Disse avbildningene kan med hjelp av dataverktøy så kombineres til tredimensjonale modeller. Denne operasjonen vil gjerne involvere gjenkjenning og segmentering av forskjellige deler som materialet består av. Mens leger idag ofte studerer todimensjonale snittbilder av pasienter (f. eks. røntgenbilder) er det ventet at legepraksisen i fremtiden i langt større grad vil baseres på undersøkelse av databaserte volumetriske avbildninger.

Metaxas påpeker at slike anatomisk korrekte volumetriske modeller i tillegg til undersøkelser og diagnostisering har stor nytteverdi i opplæring av medisinsk personell. Ved å utnytte virtuell virkelighet kan den menneskelige anatomi utforskes på en billig og ufarlig måte. I en kirurgisk simulator

etterlignes kirurgiske inngrep, der realisme er viktig for utbyttet. En korrekt anatomisk avbildning vil kunne danne en basis for slike simuleringer, der det volumetriske materialet ilegges fysiske egenskaper for realisme i simuleringen.

Til fysisk modellering av elastisk organisk materiale er masse-fjær-systemer den mest brukte teknikken[5]. I tillegg til relativt enkel implementering og lav beregningskompleksitet har masse-fjær-systemer fordel av en enkel topologisk struktur, der hele modellen er bygget opp av diskretiserte massepunkter koblet til nabopunkter med fjær. Dette gjør prosedyrer som involverer endringer i topologien relativt enkle å simulere. For eksempel er kutting i organiske materialer sentralt innen simulering av kirurgi, og implementasjon av denne prosedyren i slike systemer er veldokumentert[8][9]. Masse-fjær-systemer er også vist benyttet der mer avansert kirurgi benyttes[10][11][12]. For eksempel benytter Castañeda m.fl.[11] et masse-fjær-system i simulering av kikkhullskirurgi på prostata. Avbildninger av prostata er tatt ved bruk av ultralyd med 5 millimeters intervaller langs hovedaksen, og satt sammen til en geometrisk volummodell. For å modellere de fysiske egenskapene benyttes så et masse-fjær-system. Modellen diskretiseres til mindre deler, der delene sammenkobles ved hjelp av fjær mellom massebærende noder. Ved å benytte flere lag av noder innad i prostatamodellen simuleres her også volumetrisk oppførsel av materialet. Deformasjoner i modellen kan så beregnes av den indre energien som stammer fra fjær-systemet sammen med de eksterne kreftene som påtrykkes overflaten av brukeren.

Endelige elementers metode kan benytte mer realistiske mekaniske modeller basert på kontinuum-mekanikk, og er derfor i stand til å gi en mer nøyaktig representasjon av organisk materiale enn masse-fjær-systemer. I tillegg er det lettere å benytte pasient-spesifikke data, noe som gir metoden et bredere bruksområde og større potensiale. Et eksempel på bruk av elementmetodens potensiale i den nære koblingen til fysikken er Metaxas m.fl[13], der det beskrives en medisinsk applikasjon for å studere det menneskelige hjertet og dets mekaniske egenskaper. MR benyttes for å generere en mest mulig anatomisk korrekt avbildning av en pasients hjerte, der et stort antall avbildninger i to dimensjoner brukes for å generere en segmentert tredimensjonal modell. Elementmetoden og elastisitetsteori benyttes så for å lage en deformerbare fysisk modell av hjertet. Ved å analysere hjertets bevegelser kan data om mekaniske egenskaper som spenning og tøyning i hjertemuskel estimeres av endelige elementer-modellen. En hensikt med dette er å kunne diagnostisere hjertesykdommer karakterisert av unormal hjertemekanikk.

De siste årene er det stadig flere som beskriver metoder for å benytte elementmetoden til å representere organisk materiale i haptiske sanntidssystemer. Bro-Nielsen[4] beskriver et tidlig forsøk på bruk av endelige elementers metode til modellering av menneskelig vev i et haptisk system. Her brukes sammensatte tetraedre til å bygge opp en volumetrisk modell, og materialet modelleres som lineært elastisk. Problemet formuleres så med elementmetoden basert på prinsippet om minimum potensiell energi. Bro-Nielsen introduserer også bruk av kondensering av stivhetsmatrisen, en optimeringsteknikk som går ut på å beregne kun de verdiene man behøver i den haptiske og visuelle tilbakemeldingen. Til tross for denne effektiviseringen ble det påpekt at applikasjonen var uakseptabelt treg for maskinvaren tilgjengelig i 1998.

Av nyere dato er virtuell sammensyng av sår i menneskelig vev, såkalt sutur, i et haptisk sanntidssystem[3]. Applikasjonen som beskrives er utviklet ved universitetet i Washington, og har fokus på effektivisering av elementmetoden. Brukeren benytter en haptisk arm til å styre et virtuelt verktøy i form av en nål påfestet sytråd. Ved å tre synålen gjennom vevet på motstående sider av en sårmodell og så stramme simuleres sammensyng av sår, en prosedyre som benyttes i nesten all kirurgi. De fysiske egenskapene er modellert med elementmetoden basert på lineær elastikk. For effektivisering av beregningene benyttes det de kaller en restriksjonsmetode (eng. *constraints approach*), som i likhet med kondensering går ut på å kun beregne verdiene som er nødvendige for visuell og haptisk tilbakemelding. Ved kontakt mellom det virtuelle verktøyet og vevet registreres elementet som berøres som aktivt element. Partisjonering av matriser benyttes så for å splitte ligningssystemet i en inaktiv del, og en aktiv del som må beregnes fortløpende.

Metoden som presenteres er avhengig av invertering av systemets stivhetsmatrise, noe som foretas som preprosessering. Med et normalt antall noder er dette en beregningstung prosedyre som tar lang tid, og kan ikke gjennomføres i sanntid. Av denne grunn kan metoden ikke benyttes til manipuleringer som endrer topologien til det organiske materialet, siden dette vil medføre en endring av systemets stivhetsmatrise.

En ulempe med mange effektiviseringsmetoder er at eksterne krefter må påtrykkes kun én node, vanligvis noden som er nærmest kontaktpunktet. I tilfellet ved sammensyng av sår vil endring av nærmeste node også endre aktivt område, noe som er ødeleggende for effektiviteten av algoritmen. For å motvirke dette benyttes formfunksjoner som interpolerer de eksterne kreftene over nodene tilhørende kontaktflaten. Interpoleringen bestemmes

ved å beregne arealkoordinater for triangler gitt kontaktpunktet og nodenes koordinater. Framgangsmåten kan således bare benyttes på triangler, altså elementer bygget opp av triangulære flater.

Cotin m.fl.[5] benytter elementmetoden til modellering av organisk materiale under simulering av kikkhullskirurgi på en menneskelig lever (hepar). For å framskaffe en passende geometrisk modell benyttes menneskelige avbildninger fra MR og CT, der 180 avbildninger i to dimensjoner segmenteres, settes sammen og glattes ut til en volumetrisk rekonstruksjon av en lever fra et virkelig menneske. Den fysiske modelleringen med elementmetoden baseres på en tetraedrisk diskretisering av denne modellen. Kilden presenterer i tillegg til en elementformulering basert på lineær elastisitet også det de kaller kvasi-ikke-lineær elastisitet. Begge metodene resulterer i et lineært ligningssystem som må løses, men i sistnevnte metode benyttes også empiriske data i beregningene av deformasjonene. De empiriske dataene består av målte forflytninger i et organisk materiale både radielt og langs en akse ved gitte krefter påtrykt denne akse. Dataene benyttes så til å beregne deformasjoner uttrykt som funksjoner av de lineære forflytningene som beregnes i ligningssystemet. På denne måten kan også ikke-lineær elastikk simuleres, der de empiriske dataene også gir en sterkere kobling til de biomekaniske egenskapene som forsøkes simulert. Leversimulatoren er implementert i et haptisk sanntidssystem der en bruker kan berøre og deformere den fysiske modellen. Selve applikasjonen kjøres på maskinvare en 400MHz prosessor og grafisk 3d-maskinvare, men kilden oppgir ingen resultater angående hvor mange noder og elementer denne konfigurasjonen klarer å beregne.

Bruk av haptiske enheter setter store krav til hurtige beregninger, og av denne grunn er det for det meste deformasjoner og simple prosedyrer som ikke involverer endringer av materialets topologi som til nå er vist utført ved hjelp av elementmetoden. Kutting i organisk materiale medfører slike endringer i materialets strukturelle oppbygging, og er med elementmetoden til dags dato ikke vist vellykket implementert i et haptisk sanntidssystem.

Kapittel 3

Løsning

3.1 Generelt om elementmetoden

Endelige elementers metode er en numerisk metode for å beregne tilnærmede løsninger av differensialligninger[14]. Metoden går ut på å diskretisere problemområdet, og på denne måten tilnærme et kontinuerlig problem i uendelig mange dimensjoner til et system av ligninger med et endelig antall ukjente, kalt et diskret system. Diskretiseringen forgår ved å splitte området inn i et endelig antall delområder, kalt elementer. Hvert element består av et sett av noder som oftest ligger fordelt over elementets ytterflater. Nodene fungerer også som knutepunkter mot andre elementer, der hver node kan tilhøre flere elementer. Et karakteristisk trekk ved elementmetoden er at det i stedet for å finne tilnærminger for hele regionen søkes å finne enkle tilnærminger gjeldende for hvert av elementene. Disse elementløsningene kan så settes sammen til et ligningssystem for hele problemområdet, hvorfra nodeforskyvninger kan bestemmes ved å kreve likevekt i hver node og kontinuitet i forskyvningene.

Oppdelingen av problemområdet i elementer bygger på en antagelse om at den ukjente variabelen kan beskrives som funksjoner av nodeverdiene. I hvert element innføres en approksimasjon av hvordan den aktuelle variabelen endres innad i elementet. Verdiene antas kjent i elementets nodepunkter, deretter kan variabelen innad approksimeres ved en slags interpolasjon mellom disse nodeverdiene. Til dette benyttes enkle funksjoner, vanligvis polynomer, som beskriver elementet. Disse funksjonene kalles formfunksjoner. Formfunksjonene avhenger av hvilke elementtyper som benyttes, men også hvor nøyaktig man ønsker tilnærmingen. Generelt sett vil en høyere polynomgrad gi bedre tilnærming, men samtidig medføre

større beregningskostnad. Bedre tilnærming får man også av å øke antall elementer, der løsningen konvergerer mot den korrekte når antall elementer går mot uendelig. Oppdelingen i elementer er således en problemstilling som må vurderes med tanke på hvor nøyaktig løsningen ønskes, og beregningskostnadene det medfører å framskaffe denne. De aller fleste praktiske problemer vil medføre et høyt antall ukjente variabler, der elementmetoden i så måte er avhengig av muligheten til å kunne benytte effektive datamaskiner til beregninger.

Et organisk materiale påvirket av eksterne krefter vil kunne endre form og struktur som følge av kreftene. Ved å representere materialet basert på fysiske lover kan slike deformasjoner som følger av påtrykte krefter beregnes med et realistisk resultat. Den nære koblingen til fysikken gir også fordeler i at beregningene kan bygges på målbare data fra virkeligheten. En forutsetning for å benytte elementmetoden er at vi kan formulere egenskapene til organiske materiale som partielle differensialligninger. Kapittel 3.2 tar for seg dette problemet, der elastisitetsteori brukes som utgangspunkt for modellering av elastisk organisk materiale.

Som tidligere beskrevet er elementmetoden en numerisk metode for å løse vilkårlige differensialligninger. I mange tilfeller vil det være flere forskjellige differensialligninger som kan beskrive problemet, der ulike elementformuleringer kan ha styrker og svakheter. To generelle formuleringer av metoden som kan brukes til modellering av fysiske fenomener som elastisitet er elementmetoden basert på henholdsvis minimum potensiell energi og virtuelle forskyvningers prinsipp.

Elementmetoden basert på prinsippet om minimum potensiell energi tar utgangspunkt i en energiformulering av det underliggende problemet, og søker å finne en løsning som medfører at denne formuleringen antar et minimum[15]. I vårt tilfelle med et elastisk materiale vil det være naturlig å ta utgangspunkt i elastisitetsteorien, der potensiell energi for et materiale kan uttrykkes ved hjelp av systemets tøyingsenergi og lastpotensiale fra eksterne krefter. Løsningen på problemet kan da representeres i form av nodeforskyvningene som minimerer den potensielle energien. Bro-Nielsen[4] benytter denne metoden til å modellere organisk materiale i sin kirurgiske simulator.

Elementmetoden basert på virtuelle forskyvningers prinsipp[14] er mer generell enn tilfellet med potensiell energi, og har fordel av å ikke måtte anta at energien alltid bevares. I tillegg kan formuleringen baseres på

mer forståelige og lettere observerbare fysiske prinsipper enn i tilfellet med potensiell energi. Metoden går ut på å diskretisere problemområdet i elementer med tilhørende noder, der det i hver node i modellen antas ukjente forskyvninger. Løsning av problemet går så ut på å finne de forskyvningene som tilfredsstiller de betingelser problemet bygger på.

Til praktisk problemløsning er det sistnevnte metode som er mest benyttet og beskrevet, og de påfølgende kapitler i denne rapporten vies til å presentere hvordan elastisk organisk materiale kan representeres med denne type elementformulering. Målet er å fremskaffe en modell som også tar hensyn til eksterne påvirkninger, slik at input fra den haptiske enhet kan benyttes til å påvirke simuleringen av materialet. Hensikten med dette er å beregne virkningene av slik påvirkning fra brukeren.

3.2 Modellering av organisk materiale

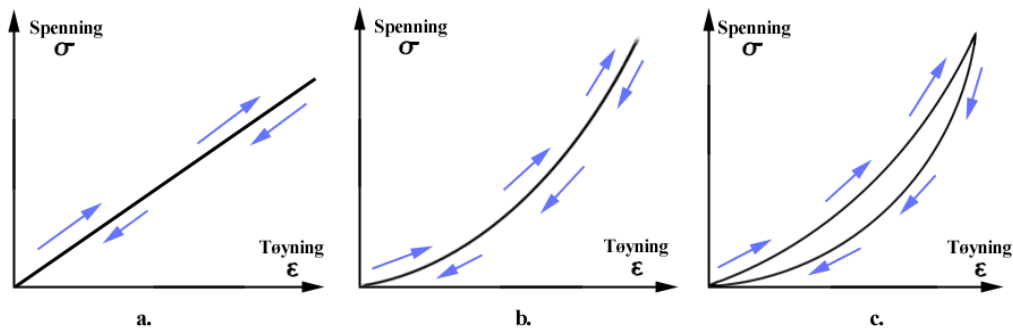
For å modellere organisk materiale på en mest mulig realistisk måte er det nødvendig å ta utgangspunkt i fysiske lover. Kontinuum-mekanikk (eng. *continuum mechanics*) er den delen av fysikken som beskriver kontinuerlig materie, der ofte differensialligninger benyttes for å beskrive et materies fysiske egenskaper. Faste stoffers mekanikk (eng. *solid mechanics*) er en del av kontinuum-mekanikk som omhandler materie karakterisert av et endelig volum og en endelig form, og beskriver hvordan slike materiale reagerer ved spenning.

Spenning (eng. *stress*) er sammen med tøyning (eng. *strain*) viktige begrep i beskrivelsen av faste stoffers mekanikk. I forbindelse med deformerbare materialer er spenning et mål på eksterne krefter som påtrykkes materialet, mens tøyning er et mål på materialets respons på denne spenningen. Et materiale utsatt for spenninger vil både kunne forlenges og sammenpresses, og slike reaksjoner kalles gjerne deformasjoner av materialet i sin opprinnelige form.

Under faste stoffers mekanikk karakteriseres et elastisk materiale ved at det bevarer energien under påvirkning av eksterne krefter. Materialet har en bestemt form i hvile, og utsatt for krefter vil et slikt materiale deformeres og lagre all energien den påvirkes med. Når de eksterne kreftene avtar frigjøres den lagrede energien, og materialet går tilbake til sin opprinnelige form. I motsetning vil et uelastisk materiale ikke være i stand til å gjenopprette sin opprinnelige form når den først er deformert.

Et viskoelastisitet materiale karakteriseres ved at det i tillegg til å være elastisk har dempning. I motsetning til ren elastikk som kun avhenger av forrige tilstand kan et viskoelastisk materiale avhenge av alle tidligere tilstander. Slike materiale kan for eksempel påvirkes av gjentatte deformasjoner slik at dempningskreftene forsterkes.

Til å beskrive elastiske materialer er forholdet mellom materialets spenning og tøyning mye benyttet. Et lineært elastisk materiale karakteriseres av at tøyningen er proporsjonal med den påtrykte spenningen, noe som også kalles Hookes lov. Et slikt materiale som påtrykkes eksterne krefter vil medføre en tøyning av en størrelse som er uavhengig av tidligere tøyninger og spenninger. I virkeligheten er det ingen materiale som kan beskrives realistisk som fullt lineært elastisk, men hvis man kan anta kun små spenninger og tøyninger er det en tilnærming som i mange tilfeller er akseptabel. I virkeligheten vil tøyningen i de fleste elastiske materiale øke mer enn lineært ved økning i spenningen, for å ta hensyn til dette må materialet modelleres med ikke-lineær elastikk. Figur 3.1 viser grafer som karakteriserer forholdet mellom spenning og tøyning for lineær elastikk, ikke-lineær elastikk og ikke-lineær viskoelastikk. Pilene mot høyre viser kurven for økende spenning/tøyning, mens piler mot venstre viser synkende.



Figur 3.1: Spenning/tøyning-forhold for elastiske materialer.
a. Lineært elastisk, b. Ikke-lineært elastisk, c. Ikke-lineært viskoelastisk

Et materiale som har de samme egenskapene uavhengig av retning kalles et *isotrop* materiale. Med hensyn til deformasjoner vil et slikt materiale påtrykt en ekstern kraft deformeres like mye i alle retninger. Materiale som ikke har disse egenskapene kalles *anisotrope*. Et eksempel på organisk materiale

som er klart anisotrop er vev som inneholder regulært plasserte fibre, for eksempel muskelvev. Anisotropi krever mye data for å modelleres realistisk, mens isotrope materiale har fordel av å være lettere å modellere, og er en tilnærming som ofte brukes når det underliggende materialet ikke er klart anisotrope.

Menneskelig vev og andre organiske materialer er komplekse materiale som er vanskelig å modellere. Kroppsdelene er ofte satt sammen av flere lag med vev som igjen har forskjellig sammensetning og egenskaper, deriblant også muskler og ben. Et stort problem i modellering av organisk materiale er mangelen på kvalitative data, og det finnes idag ingen gode metoder for å fremskaffe slike data. Målinger på organisk materiale fra avdøde personer har vært forsøkt, men siden dødt vev er stivere enn levende vev er dette en dårlig løsning. Målinger på levende vev er derfor i praksis den eneste aktuelle metoden. For å unngå skader på levende vev har det vært gjort forsøk med metoder som medfører minimalt med skader på vevet, for eksempel ved ultralyd[16]. Ulempen med slike metoder er at de gir mer usikre resultater for områder som ligger lengre fra overflaten, og kan derfor ikke gi en komplett modellering.

Det er idag enighet om at en ikke-lineær viskoelastisk modell kan representere organiske materialer på en rimelig realistisk måte[5], der viskositeten kommer av at vev motsetter seg deformasjoner når det blir utsatt for gjentatte spenninger. Ulempen med en slik modell er at den medfører en enorm beregningsmessig kompleksitet, noe som er essensielt å unngå i fysisk modellering til bruk med haptikk. En elementformulering med denne typen elastisitet leder til et ikke-lineært ligningssystem, og er i praksis ikke brukbart i haptisk sanntidssystemer med dagens maskinvare.

I applikasjoner som inkluderer haptikk må beregningshastighet prioriteres foran full realisme i den fysiske modellen. En for lav oppdateringshastighet av haptikken vil ødelegge for virkelighetsfølelsen langt mer enn det mange tilnærminger av den underliggende modellen vil gjøre. I en kirurgisk simulator er heller ikke 100% nøyaktighet det viktigste, siden det uansett vil være variasjoner mellom forskjellige organer og mennesker[4]. I modellering av organisk materiale i slike applikasjoner er en tilnærming til lineær elastisitet mye benyttet[4][3][5][17].

For å beskrive materialets egenskaper defineres materialets konstitutive relasjon. I vår sammenheng er denne mer kjent som spenning-tøyning-forholdet, siden den relaterer spenning og tøyning til hverandre. Ved lineær

elastikk danner Hookes lov på generell form den konstitutive relasjonen, som i tre dimensjoner beskrives slik:

$$\vec{\sigma} = D\vec{\varepsilon} - D\vec{\varepsilon}_0 = D(\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}_0) \quad (3.1)$$

der $\vec{\sigma} = [\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz}]^T$ er spenningsvektor, $\vec{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \gamma_{xy} \gamma_{xz} \gamma_{yz}]^T$ er tøyingsvektor, og vektor $\vec{\varepsilon}_0$ er eventuell initiell tøyning med initialverdier av ε .

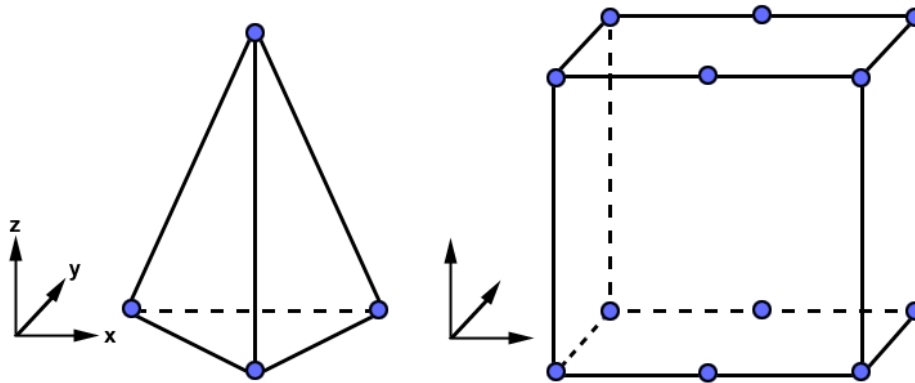
Matrisen D inneholder informasjon om hvordan spenning og tøyning forholder seg til hverandre. Denne er således materialavhengig. I vårt tilfelle er matrisen grunnleggende for modelleringen, og kalles derfor også konstitutiv matrise. For et isotrop lineært elastisk materiale i tre dimensjoner får vi følgende D -matrise:

$$D = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\nu) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Her er E elastisitetsmodulen (Youngs modulus), og ν er tverrkontraksjonskoeffisienten (Poissonforholdet) for materialet. Dette er materialspesifikke konstanter som kan justeres for å oppnå et mest mulig realistisk materiale.

3.3 Volumetrisk element

Elementmetoden går ut på å løse et avansert problem ved å dekomponere problemområdet i mindre deler som behandles separate. Første steg i bruk av elementmetoden er således å diskretisere problemområdet i mindre deler kalt elementer. I hvert element benyttes en enkel tilnærming av det overordnede problemet, og den globale løsningen beregnes som en kombinasjon av disse delløsningene. Når antall elementer går mot uendelig vil løsningen konvergere mot den korrekte. Samtidig er antall ukjente som må beregnes proporsjonalt med antall elementer som benyttes, og beregningskompleksiteten blir fort stor. Det er derfor ønskelig å bruke et lavest mulig antall elementer for å oppnå tilstrekkelig nøyaktighet. Metoden er således avhengig av en hensiktsmessig diskretisering.



Figur 3.2: Eksempler på tredimensjonale elementer: Tetraeder(til venstre) og heksaeder(til høyre)

Fysisk modellering av et volumetrisk materiale er et tredimensjonalt problem som krever bruk av tredimensjonale elementer. Til slike problemer er tetraedre og heksaedre ofte benyttet som elementtyper. Elementets noder plasseres vanligvis på elementets ytterflater. Figur 3.2 viser geometrien til et tetraeder og heksaeder, der sirklene på ytterflatene angir noder. En økning av antall noder per element vil kunne gi mer nøyaktighet i løsningene, men krever også mer beregninger. I tilfeller der man er interessert i mer nøyaktighet i enkelte av dimensjonene, eller de ukjente variablene varierer hurtigere i enkelte retninger kan man ta hensyn til dette ved å bruke elementer som bruker flere noder i disse dimensjonene. Heksaederet til høyre i figur 3.2 viser et eksempel på et slikt element, der et større antall noder medfører bedre nøyaktighet i x-retningen.

I en sanntidsapplikasjon vil kravene til hurtige beregninger være store, noe som også påvirker valg av elementtype. Et tetraeder bestående av fire flater bygget opp av lineære kanter og noder i de fire hjørnene er den enkleste elementtypen i tre dimensjoner. I forhold til mer komplekse heksaedre har den også fordel av å være bygget opp av kun triangulære flater, noe som medfører en enkel kobling til grafisk visualisering av elementene. I tillegg kan man benytte arealkoordinater for triangler for å spesifisere punkter i flatene, noe som er nyttig for eksempel i kollisjonsberegninger som involverer et virtuelt verktøy i det haptiske systemet. Sammensatte tetraedre er tross sin simple form fleksible nok til å bygge opp alle typer volumetriske geometrier, og har også tidligere vært benyttet i modellering av organisk materiale med elementmetoden[4][3]. På grunn av simplisiteten og

fordelene med triangulære flater benyttes i den påfølgende formuleringen av elementmetoden tetraeder som elementtype.

3.3.1 Representasjon og tilnærminger

Elementtypene beskrives vanligvis ved formfunksjoner (eng. *shape functions*). Slike funksjoner defineres for hver node som tilhører elementet, og består vanligvis av polynomer. Et karakteristisk trekk ved funksjonene er at de er lik 1 i noden de er definert for, og 0 i andre noder. Summen av alle formfunksjoner tilhørende et element er lik 1 i ethvert punkt innad i elementet. Samtidig er alle formfunksjoner definert lik 0 i alle posisjoner utenfor sitt eget element.

Gitt nodedenes plasseringer kan disse sammen med formfunksjonene brukes til å tilnærme den ukjente variabelen innad i elementet. I tilfellet med ukjente forflytninger i 3 dimensjoner får vi denne tilnærmingen[14]:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & 0 & \cdots & N_{n_e}^e & 0 & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & \cdots & 0 & N_{n_e}^e & 0 \\ 0 & 0 & N_1^e & \cdots & 0 & 0 & N_{n_e}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \vdots \\ u_{xn_e} \\ u_{yn_e} \\ u_{zn_e} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\vec{u} = N^e \vec{a}^e \quad (3.4)$$

Venstresiden gir her de tilnærmede forflytningene, der vektor \vec{u} har komponentene u_i , $i = x, y, z$ inneholdende forflytninger i henholdsvis x-, y- og z-retning. N^e er en $3 \times n_e$ -matrise som inneholder formfunksjoner N_i^e tilhørende node i på element e , der n_e er totalt antall noder tilhørende elementet. Her er N_i^e funksjoner av variablene x , y og z . Vektor \vec{a}^e angir nodedenes plasseringer, der komponentene u_{mn} er posisjon i retning $m = x, y, z$ for node i tilhørende element e .

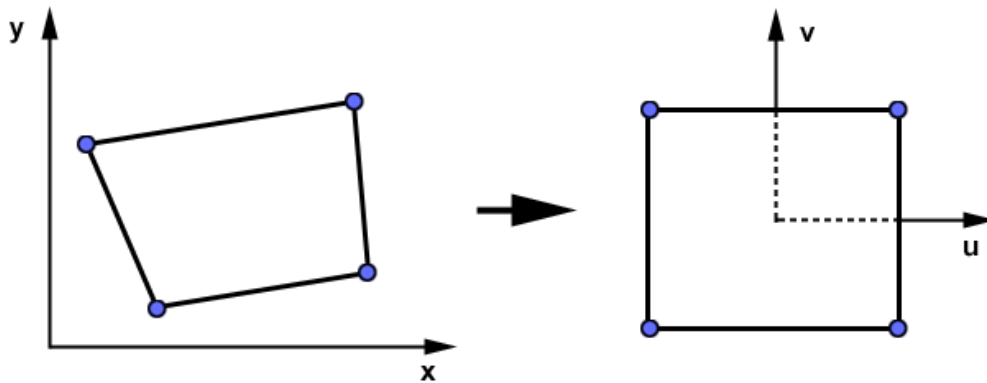
Til bruk i senere beregninger er det hensiktsmessig å definere en sammenheng mellom forflytningene \vec{u} og alle elementer i modellen. Siden formfunksjonene N_i^e er lik 0 utenfor sitt element i kan dette utføres ved en enkel utvidelse av komponentene på høyresiden av ligning 3.4. Vi definerer en global formfunksjonsmatrise N som inneholder formfunksjonene til alle elementene i modellen. Med et totalt antall elementer n utvides N^e -matrisen fra n_e til

n antall elementer, og dimensjonene til matrisen blir $3 \times n$. På samme måte samles alle nodeposisjoner i en global vektor \vec{a} med størrelse n . Tilnærmingen av \vec{u} fra ligning 3.4 kan da defineres globalt for alle posisjoner (x,y,z) :

$$\vec{u} = N\vec{a} \quad (3.5)$$

3.3.2 Isoparametrisk volumetrisk element

For simple elementtyper er det relativt enkelt å beskrive formfunksjonene som funksjoner av nodekoordinatene i sitt opprinnelige koordinatsystem. Med større elementtyper blir både representasjon av og beregninger som inkluderer disse kompliserte. En løsning på dette problemet er å definere formfunksjonene i et eget lokalt koordinatsystem, også kalt et naturlig koordinatsystem. Et slikt element kalles avbildningselement, eller mer vanlig et isoparametrisk element[14]. Navnet isoparametrisk kommer av at de samme funksjonene, formfunksjonene, benyttes til å beskrive både elementenes geometri og tilnærmingen av forflytningene. Ved elementvise beregninger avbildes elementets noder til det isoparametriske elementets noder i det lokale koordinatsystemet, og beregningene gjøres lokalt. Figur 3.3 viser et eksempel på slik avbildning, der et firkantelement i to dimensjoner avbildes fra det globale koordinatsystemet til venstre til avbildningselementet i det lokale koordinatsystemet til høyre.



Figur 3.3: Avbildning.

Det ønskede isoparametriske elementet i det naturlige koordinatsystemet kan defineres i en vilkårlig størrelse. Som det skal vises senere benytter elementmetoden seg i stor grad av numerisk integrasjon over elementstrukturen, både

volumet og overflaten. Numeriske integrasjonsmetoder baserer seg vanligvis på å integrere en vilkårlig funksjon over et intervall som strekker seg fra -1 til 1. Som nevnt over gjøres elementberegninger lokalt, deriblant numerisk integrasjon. Det er derfor hensiktsmessig å definere det isoparametriske elementet over intervall -1 til 1 så godt det lar seg gjøre. På denne måten får man en direkte kobling mellom elementet og den numeriske integrasjonen.

Avbildning av elementer fra det globale til det lokale koordinatsystemet betyr at en region globalt tilsvarer en region lokalt. Med et globalt system xyz og et lokalt system uvw kan slike avbildninger beskrives ved følgende funksjoner:

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w) \quad (3.6)$$

Et krav til avbildningen er at den bør være en-til-en mellom de to koordinatsystemene, det vil si ethvert punkt i det ene elementet tilsvarer eksakt ett punkt i det andre. For å definere en slik kobling deriveres funksjonene i ligning 3.6 med kjerneregelen, noe som gir følgende relasjoner mellom koordinatsystemene:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

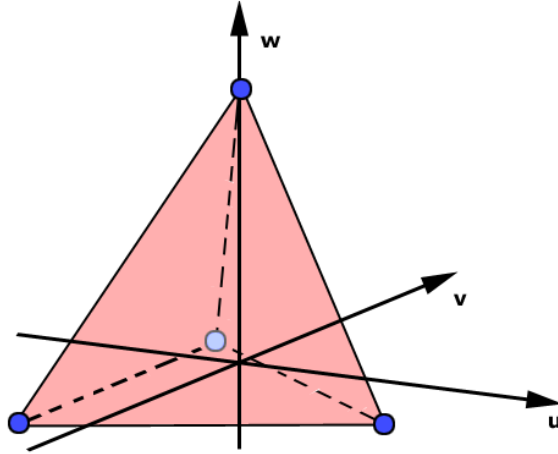
$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = J \frac{(x, y, z)}{(u, v, w)} \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Matrisen J er her en jacobimatrise som beskriver overgangen mellom det globale og det lokale koordinatsystemet for det aktuelle elementet. Tilsvarende vil den inverterte matrisen J^{-1} beskrive den motsatte overgangen, lokalt til globalt. Dette kan vi også skrive med en mer spesifikk notasjon:

$$\left(J \frac{(x, y, z)}{(u, v, w)} \right)^{-1} = J \frac{(u, v, w)}{(x, y, z)}$$

Ligning 3.4 beskriver hvordan den ukjente variabelen tilnærmes innad i et elementet. Siden formfunksjonene til det isoparametriske elementer benyttes til å tilnærme nodenes forflytninger må denne ligningen omformuleres for å tilnærme de ukjente forflytninger innad i elementet i det lokale koordinatsystemet:

$$\vec{u} = \vec{u}(u, v, w) = N^e(u, v, w) \vec{a}^e \quad (3.9)$$



Figur 3.4: Tetraederelement i lokalt koordinatsystem. Elementets sentrum ligger i origo.

Et tetraeder av enkel type gir et tredimensjonalt element med kun fire noder. Det er således det enkleste elementet som kan brukes i tredimensjonale problemer. Samtidig er det komplekst nok til å kunne representere vilkårlige volumetriske problemområder. For et isoparametrisk tetraederelement med lineære kanter og sentrum i origo i det lokale koordinatsystemet uvw kan følgende formfunksjoner defineres[15]:

$$\begin{aligned}
 N_1(u, v, w) &= \frac{1}{12}(3 + 8u + 2\sqrt{2}w) \\
 N_2(u, v, w) &= \frac{1}{12}(3 - 4u - 4\sqrt{3}v - 2\sqrt{2}w) \\
 N_3(u, v, w) &= \frac{1}{12}(3 - 4u + 4\sqrt{3}v - 2\sqrt{2}w) \\
 N_4(u, v, w) &= \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{2}w)
 \end{aligned}$$

Til senere beregninger behøves også de partiellderiverte av formfunksjonene med hensyn på koordinataksene uvw . Partiellderivert av hver nodes formfunksjon med hensyn på u , v og w gir:

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial N_1}{\partial u} = -\frac{2}{3} & \frac{\partial N_1}{\partial v} = 0 & \frac{\partial N_1}{\partial w} = \frac{1}{6}\sqrt{2} \\
\frac{\partial N_2}{\partial u} = -\frac{1}{3} & \frac{\partial N_2}{\partial v} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{\partial N_2}{\partial w} = -\frac{1}{6}\sqrt{2} \\
\frac{\partial N_3}{\partial u} = -\frac{1}{3} & \frac{\partial N_3}{\partial v} = \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{\partial N_3}{\partial w} = -\frac{1}{6}\sqrt{2} \\
\frac{\partial N_4}{\partial u} = 0; & \frac{\partial N_4}{\partial v} = 0 & \frac{\partial N_4}{\partial w} = \frac{1}{2}\sqrt{2}
\end{array}$$

3.4 Elementformulering av elastikk

3.4.1 Prinsippet for virtuelt arbeid

Formuleringen av elastisitet med elementmetoden baserer seg på prinsippet for virtuelt arbeid, en ligning som beskriver faste stoffer i likevekt. Prinsippet sier at et system av indre og ytre krefter er i likevekt hvis det virtuelle arbeidet utført gitt virtuelle forflytninger er lik null. Utgangspunktet for formuleringen å anta et kontinuerlig volumetrisk materiale påvirket av to typer krefter - volumkrefter (eng. *body forces*) og overflatekrefter (eng. *surface forces*). Volumkrefter defineres som kraft per enhet volum, og angir krefter på hele materialet. Overflatekrefter er krefter på overflaten av materialet, og defineres som kraft per enhet areal. For at materialet skal være i likevekt kreves at volum- og overflatekreftene i materiale utjevner hverandre, og dette er også utgangspunktet for en differensialformulering av virtuelt arbeid.

For å komme fram til en matematisk formulering av prinsippet for virtuelt arbeid er det nødvendig å definere endel variabler. Ved bruk av elementformulering basert på virtuelle forskyvningers prinsipp søker vi å finne forskyvninger av nodeposisjonene som tilfredsstiller betingelsene som problemet bygger på [14]. I et volumetrisk materiale kan vi representere forflytningene i et punkt (x, y, z) som en tredimensjonal vektor \vec{u} , der komponentene angir forflytninger i henholdsvis x-, y- og z-retning:

$$\vec{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Volumkrefter (eng. *body forces*) i materialet er krefter per enhet volum, og representeres som vektor \vec{b} :

$$\vec{b}(x, y, z) = \begin{bmatrix} b_x(x, y, z) \\ b_y(x, y, z) \\ b_z(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Tilsvarende er randspenninger krefter som påvirker overflaten:

$$\vec{t}(x, y, z) = \begin{bmatrix} t_x(x, y, z) \\ t_y(x, y, z) \\ t_z(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Vi skal senere se hvordan randspenningsvektoren \vec{t} kan brukes til å spesifisere randbetingelser.

I kapittel 3.2 ble det beskrevet hvordan spenning og tøyning kunne brukes i beskrivelsen av faste stoffers egenskaper. Her representeres spenning i ethvert punkt i materialet med en vektor $\vec{\sigma}$ inneholdende spenningskomponenter:

$$\vec{\sigma} = [\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz}]^T \quad (3.13)$$

De tre første komponentene angir spenning i x-, y- og z-retning, mens de tre siste komponentene angir skjærspenninger. Loven om skjærspenningenes parvise opptreden er en forutsetning for momentlikevekt i materialet [14]. Av denne grunn er $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ osv., og spenningsvektoren reduseres til 6 komponenter.

Tøyning i ethvert punkt i materialet representeres i en vektor $\vec{\varepsilon}$ med komponenter som korresponderer med spenningsvektoren:

$$\vec{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \gamma_{xy} \gamma_{xz} \gamma_{yz}]^T \quad (3.14)$$

Som tidligere nevnt kan likevekt i et materiale uttrykkes ved hjelp av volum- og overflatekreftene. Det kan vises at dette forholdet også kan uttrykkes som en differensialformulering av likevekt, der spenningsgradienter og volumkrefter utligner hverandre[14]:

$$\tilde{\nabla}^T \vec{\sigma} + \vec{b} = 0 \quad (3.15)$$

der $\tilde{\nabla}$ er en differensialmatrise inneholdende partiellderivasjon for de globale koordinataksene x, y og z:

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Med utgangspunkt i likevektsligningen 3.15 kan man komme fram til ligningen for virtuelt arbeid:

$$\int_V (\tilde{\nabla}^T) \vec{\sigma} dV = \int_S \vec{v}^T \vec{t} dS + \int_V \vec{v}^T \vec{b} dV \quad (3.17)$$

Utleddningen av denne ligningen er vist i vedlegg A. Ligningen involverer integral over materialets volum V og overflate S , der \vec{v} er en vilkårlig tredimensjonal vektor. Den fysiske betydningen av denne ligningen er totalt virtuelt indre arbeid (venstresiden) lik totalt virtuelt arbeid som stammer fra ytre påvirkninger (høyresiden).

3.4.2 Galerkins metode

Prinsippet for virtuelt arbeid er formulert som en differensialligning som vi ønsker å løse på en tilnærmet måte. Vektete residualmetoder er en type av metoder som benyttes til å tilnærme slike differensialligninger numerisk. Generelt sett går slike metoder ut på å anta en tilnærmet løsning på differensialproblemet, for så å inkludere ekstra parametre i ligningen som tilpasses for å gi en best mulig tilnærming til den egentlige løsningen.

Vektete residualmetoder substituerer først en tilnærmet løsning på problemet for den ukjente variabelen i differensialligningen. Siden en slik tilnærming sjelden oppfyller ligningen vil det derfor forekomme feil i ligningen. Disse feilene kan antas samlet i et eget feilledd kalt residual. Vektete residualmetoder går ut på å innføre vektfunksjoner som kombineres med residualet med hensikt å minske dette leddet. Det finnes mange metoder som benytter dette prinsippet, der de skiller seg fra hverandre angående hvordan vektfunksjonene spesifiseres. Eksempler på metoder som kan benyttes er punkt kollokasjons-metoden, subdomain-metoden, minste kvadraters metode og Galerkins metode [14].

Galerkins metode er en type vektet residualmetode som har vist seg svært brukbar i elementmetoden. Metoden karakteriseres ved at de samme funksjonene som brukes til å tilnærme den ukjente variabelen også velges som vektfunksjoner. Dette medfører at vektfunksjonene er ortogonale til residualet, og kombinasjonen av disse blir lik 0 slik ønsket.

Ved å velge tilnærmingsfunksjone i Galerkins metode lik funksjonene som benyttes i tilnærmingen av forflytningene i ligning 3.5 får vi følgende tilnærming av vekoren \vec{v} [14]:

$$\vec{v} = Nc \quad (3.18)$$

Her er N formfunksjonsmatrisen fra ligning 3.5, og matrisen c er vilkårlig siden \vec{v} er vilkårlig. Multipliserer så med differensialmatrisen $\tilde{\nabla}$ fra ligning 3.16 på begge sider av ligningen:

$$\tilde{\nabla}\vec{v} = \tilde{\nabla}Nc \quad (3.19)$$

$$\tilde{\nabla}\vec{v} = Bc \quad (3.20)$$

Matrisen $B = \tilde{\nabla}N$ er satt sammen av differensialmatrisen og formfunksjonsmatrisen, og inneholder således informasjon om hvordan elementets formfunksjoner varierer med hensyn på koordinataksene. Uttrykkene for \vec{v} og $\tilde{\nabla}\vec{v}$ kan så settes inn i ligningen for virtuelt arbeid(3.17):

$$\begin{aligned} \int_V (B\vec{c})^T \vec{\sigma} dV &= \int_S (N\vec{c})^T \vec{t} dS + \int_V (N\vec{c})^T \vec{b} dV \\ c^T \left(\int_V B^T \vec{\sigma} dV - \int_S N^T \vec{t} dS - \int_V N^T \vec{b} dV \right) &= 0 \end{aligned}$$

Siden matrisen c^T er vilkårlig kan denne strykes fra ligningen, og vi får følgende ligning:

$$\int_V B^T \vec{\sigma} dV = \int_S N^T \vec{t} dS + \int_V N^T \vec{b} dV \quad (3.21)$$

Denne ligningen representerer likevekt for hele det aktuelle området, der den fysiske betydningen er indre virtuell energi (venstre) lik ekstern virtuell energi (venstre). Det er også verd å merke at den vilkårlige vektoren \vec{v} ikke lenger er direkte inkludert i ligningen, mens den elementavhengige matrisen N er inkludert. Siden vi fortsatt ikke har introdusert elastisitet i formuleringen er denne ligningen korrekt uavhengig av hvilken materiallov som benyttes.

3.4.3 Elementformulering av lineær elastikk

Neste steg for å komme frem til en formulering av elastisitet av elementmetoden er å introdusere materialets materiallov, også kalt dets konstitutive relasjon. I kapittel 3.2 ble organisk materiale modellert ved lineær elastisitet, der Hookes generaliserte lov gir følgende forhold mellom spenning $\vec{\sigma}$ og tøyning $\vec{\varepsilon}$ som materiallov:

$$\vec{\sigma} = D(\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}_0)$$

Bruk av virtuelle forskyvningers prinsipp krever at de virtuelle forskyvningene også må tilfredsstille kinematiske betingelser som gjelder for det underliggende problemet. Kinematikk er i fysikken kjent som beskrivelsen av

bevegelse, uten hensyn til kreftene som skaper denne bevegelsen[18]. Det kan vises at forholdet mellom tøyning og forflytningsgradienter kan tilnærmes i henhold til den følgende ligningen[14]:

$$\vec{\varepsilon} = \tilde{\nabla} \vec{u} \quad (3.22)$$

Som tidligere er $\vec{\varepsilon}$ tøyning, \vec{u} forflytningsvektoren, og $\tilde{\nabla}$ er differensialmatriksen gitt i ligning 3.16. Utleddningen av denne baserer seg på en antagelse om små forflytningsgradienter, altså tøyninger av liten størrelse. Siden ligningen baserer seg kun på kinematikk kalles den også kinematisk betingelse.

Som tidligere beskrevet benyttes en tilnærming av forflytningsvektoren u innad i hvert element gitt av ligning 3.3, $\vec{u} = N\vec{a}$. Gitt denne tilnærmingen kan den kinematiske relasjonen skrives som $\vec{\varepsilon} = \tilde{\nabla} N\vec{a}$. Ved i tillegg benytte notasjonen $B = \tilde{\nabla} N$ fra ligning 3.20 får vi:

$$\vec{\varepsilon} = B\vec{a} \quad (3.23)$$

Dette uttrykket innsatt for $\vec{\varepsilon}$ i den konstitutive relasjonen gir en komplett modell av materialets fysiske egenskaper:

$$\vec{\sigma} = DB\vec{a} - D\vec{\varepsilon}_0 \quad (3.24)$$

Vi kan nå introdusere dette materialspesifikke uttrykket for spenningen $\vec{\sigma}$ i elementformuleringen 3.21. I tillegg omformuleres ligningen for å få vektor \vec{a} utenfor integralene:

$$\begin{aligned} \int_V B^T \sigma \, dV &= \int_S N^T \vec{t} \, dS + \int_V N^T \vec{b} \, dV \\ \int_V B^T (DB\vec{a} - D\vec{\varepsilon}_0) \, dV &= \int_S N^T \vec{t} \, dS + \int_V N^T \vec{b} \, dV \\ \int_V B^T DB\vec{a} \, dV - \int_V B^T D\vec{\varepsilon}_0 \, dV &= \int_S N^T \vec{t} \, dS + \int_V N^T \vec{b} \, dV \\ \left(\int_V B^T DB \, dV \right) \vec{a} &= \int_S N^T \vec{t} \, dS + \int_V N^T \vec{b} \, dV + \int_V B^T D\vec{\varepsilon}_0 \, dV \end{aligned}$$

Denne ligning beskriver et lineært ligningssystem med vektor \vec{a} inneholdende nodeposisjoner som ukjent. For å løse systemet er det nødvendig med spesifiserte randbetingelser. Vanligvis er randbetingelser informasjon om opprinnelige ukjente variabler gitt a priori. Vi kan skille mellom to typer randbetingelser:

- Vesentlige randbetingelser - forhåndsdefinerte forskyvninger på gitte noder. Slike noder har forhåndsbestemte plasseringer som påvirker

- men ikke påvirkes av resten av systemet. Kalles også geometriske randbetingelser.

- *Naturlige* randbetingelser - forhåndsdefinerte krefter på gitte noder. På samme måte vil disse påvirke resten av systemet, men kreftene vil ikke kunne endres. Et annet navn er kraft-randbetingelser.

For å introdusere vesentlige randbetingelser i modellen kan vi spesifisere en forflytningsvektor \vec{g} av samme form som den generelle forflytningsvektoren \vec{u} . Randbetingelsene gir forflytninger på en spesifikk overflatedel av materialet som navngis S_g .

Essensielle randbetingelser kan spesifiseres i modellen ved å erstatte randspenningen gitt ved vektoren \vec{t} i modellen med forhåndsbestemte krefter i form av en tilsvarende vektor \vec{h} . Overflaten som kreftene påvirker navngis S_h .

Ved å erstatte randleddet med disse spesifikke randbetingelsene over overflatedelene S_g og S_h er vi kommet fram til en komplett elementformulering av problemet:

$$\left(\int_V B^T DB dV\right)\vec{a} = \int_{S_h} N^T \vec{h} dS + \int_{S_g} N^T \vec{t} dS + \int_V N^T \vec{b} dV + \int_V B^T D\vec{\varepsilon}_0 dV$$

For å spesifisere leddene og skrive ligningssystemet på kompakt form kan følgende matriser og vektorer defineres:

$$\text{Stivhetsmatrise : } K = \int_V B^T DB dV \quad (3.25)$$

$$\text{Randbetingelser : } \vec{f}_b = \int_{S_h} N^T \vec{h} dS + \int_{S_g} N^T \vec{t} dS \quad (3.26)$$

$$\text{Ekstern last : } \vec{f}_l = \int_V N^T \vec{b} dV \quad (3.27)$$

$$\text{Initiell toyning : } \vec{f}_0 = \int_V B^T D\vec{\varepsilon}_0 dV \quad (3.28)$$

Med disse definisjonene kan vi skrive ligningssystemet på kompakt form:

$$K\vec{a} = \vec{f}_b + \vec{f}_l + \vec{f}_0 \quad (3.29)$$

$$K\vec{a} = \vec{f} \quad (3.30)$$

Her er kraftvektoren \vec{f} summen av randbetingelser \vec{f}_b , ekstern last \vec{f}_l og eventuell initiell tøyning \vec{f}_0 . Resultatet av denne utledningene er en elementformulering basert på lineær elastisitet. Som vi ser leder dette til et lineært ligningssystem med vektor \vec{a} inneholdende nodenes posisjoner som ukjent. Siden systemet gjelder for hele materialet kalles stivhetsmatrisen K global stivhetsmatrise.

Elementformuleringen av elastisitet er utledet for å holde for en vilkårlig vektor \vec{v} (ligning 3.17). Dette betyr at ligning 3.29 holder for alle deler av modellen, og dermed for hvert av elementene:

$$K^e \vec{a}^e = \vec{f}_b^e + \vec{f}_l^e + \vec{f}_0^e \quad (3.31)$$

$$K^e \vec{a}^e = \vec{f}^e \quad (3.32)$$

For hvert element har vi følgende komponenter i ligningssettet:

$$\text{Stivhetsmatrise : } K^e = \int_{V_\alpha} B^{eT} D B^e dV \quad (3.33)$$

$$\text{Randbetingelser : } \vec{f}_b^e = \int_{S_{h\alpha}} N^{eT} \vec{h} dS + \int_{S_{g\alpha}} N^{eT} \vec{t} dS \quad (3.34)$$

$$\text{Ekstern last : } \vec{f}_l^e = \int_{V_\alpha} N^{eT} \vec{b} dV \quad (3.35)$$

$$\text{Initiell tøyning : } \vec{f}_0^e = \int_{V_\alpha} B^{eT} D \vec{\varepsilon}_0 dV \quad (3.36)$$

I disse uttrykkene er V_α elementets volum, $S_{g\alpha}$ elementets overflate påvirket av eventuelle vesentlige randbetingelser, og $S_{h\alpha}$ elementets overflate påvirket av eventuelle naturlige randbetingelser.

Elementformuleringen for det hele materialet består av komponentene gitt i ligningene 3.25-3.28, der integralene strekker seg over hele materialets volum V og overflater S_h og S_g . Ligningene 3.33-3.36 integreres over hvert elements volum og overflate. Siden materialet er bygget opp utelukkende av elementer betyr dette at et integral over materialets volum V er det samme som summen av alle integraler V_α over hvert element, og tilsvarende for overflaten S . Av denne grunn kan vi representere ligning 3.30 som summen av alle bidrag fra komponentene:

$$K \vec{a} = \vec{f} \quad (3.37)$$

$$\sum_i^{\text{elementer}} K^e \vec{a} = \sum_i^{\text{elementer}} \vec{f}^e \quad (3.38)$$

Denne ligningen representerer en av elementmetoden styrker, der et komplekst problem deles opp i mange mindre problemer. For å komme fram til det globale ligningssystemet beregnes de mindre problemene på elementnivå, og summeres for å fremskaffe et enklere problem på systemnivå. Her er dette systemproblemet representert ved et lineært ligningssystem. Beregning av de elementspesifikke vektorene og stivhetsmatrisen i ligningene 3.33-3.36 kalles elementanalyse, mens sammensetningen til en komplett modell ved ligning 3.37 kalles systemanalyse.

Det er i elementmetodens natur at hvilke som helst to noder er sammenkoblet kun hvis nodene deler et element. Dette medfører at stivhetsmatrisen er en glissen matrise, der mange av komponentene er lik null. Dette kan utnyttes både under lagring av matrisen og i valg av løsningsmetode.

3.4.4 Isoparametriske elementer i formuleringen

Bruk av isoparametriske elementer medfører endel endringer i elementformuleringen. Stivhetsmatrisen K^e inkluderer matrisen B^e inneholdende gradienter av formfunksjonsmatrisen N^e med hensyn på de globale koordinataksene x , y og z . Ved bruk av isoparametriske elementer er formfunksjonene definert som funksjoner av lokale koordinater uvw , og kan derfor ikke brukes direkte. I tillegg endres volumene og overflatene som integreres i alle ledd, noe som også må tas hensyn til.

Volumintegral ved isoparametriske elementer

I kapittel 3.3.2 ble det beskrevet hvordan overgangen fra et globalt til et lokalt koordinatsystem kan gjøres ved bruk av en jacobimatrise. Denne matrisen kan benyttes til å omskrive integralet over elementets volum V til integral over koordinataksene uvw i det lokale systemet [15]:

$$dV = du dv dw \det J \quad (3.39)$$

Her er $\det J$ determinanten til jacobimatrisen gitt i ligning 3.8. I vårt tilfelle med isoparametriske elementer vil integralet over elementets volum V endres til tre integral over intervall -1 til 1.

Overflateintegral ved isoparametriske elementer

Ved integral over elementets overflate S i det lokale koordinatsystemet må en annen framgangsmåte benyttes, der det skilles mellom integral over uv -, uw - og vw -planet. For eksempel vil ved integrasjon i uv -planet w være konstant. I dette tilfellet erstattes dS slik[15]:

$$dS = |du| |dv| \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \right| \quad (3.40)$$

Uttrykket involverer kryssprodukt av to kjente vektorer, og integrering med hensyn på u og v . Samtidig endres intervall fra overflaten gitt av S til to integral over u og v , der begge går fra -1 til 1 i definisjonen av det isoparametriske elementet. For integral i uw - og vw -planet vil tilsvarende omskrivninger gjelde, der v og u er konstant.

Omskrivning av N^e - og B^e -matrisen

Elementformuleringen i ligning 3.31 benytter seg av matrisen N^e for formfunksjoner og dens deriverte B^e for å representere gradienter av formfunksjonene. Begge disse er representert med globale koordinatene x , y og z . For å kunne benytte formfunksjoner representert i det lokale koordinatsystemet benyttes som ved volumintegralet jacobimatrisen for å ta hensyn til overgangen til det globale koordinatsystemet. Siden overgangen går fra lokalt til globalt benyttes den inverterte til Jacobimatrisen gitt i ligning 3.8, og vi får følgende overganger[15]:

$$\begin{aligned} N^{eT}(x, y, z) &= J^{-1} N^{eT}(u, v, w) \\ N^e(x, y, z) &= (J^T)^{-1} N^e(u, v, w) \\ B^{eT}(x, y, z) &= J^{-1} B^{eT}(u, v, w) \\ B^e(x, y, z) &= (J^T)^{-1} B^e(u, v, w) \end{aligned}$$

Her representerer (x,y,z) koordinater i det globale koordinatsystemet, mens (u,v,w) er de lokale koordinatene.

Elementformulering basert på isoparametriske elementer

Vi kan nå benytte disse overgangene for å komme fram til en elementformulering basert på isoparametriske elementer. Som tidligere benyttes ligning 3.31 for å beskrive hvert element, der komponentene tilsvarende ligninger 3.33-3.36 for isoparametriske elementer blir:

$$K^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J^{-1} B^{eT} D(J^T)^{-1} B^e du dv dw \det J \quad (3.41)$$

$$\vec{f}_b^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J^{-1} N^{eT} \vec{h} du dv \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \right| \quad (3.42)$$

$$+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J^{-1} N^{eT} \vec{t} \, du \, dv \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \right| \quad (3.43)$$

$$\vec{f}_l^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J^{-1} N^{eT} \vec{b} \, du \, dv \, dw \, \det J \quad (3.44)$$

$$\vec{f}_0^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J^{-1} B^{eT} D \vec{\varepsilon}_0 \, du \, dv \, dw \, \det J \quad (3.45)$$

På samme måte som ligning 3.37 kan det globale systemet representeres som summen av elementløsningene med isoparametriske elementer:

$$K \vec{a} = \vec{f} \quad (3.46)$$

$$\sum_i^{elementer} K^e \vec{a} = \sum_i^{elementer} \vec{f}^e \quad (3.47)$$

3.5 Numerisk integrasjon

Ligningene som beskriver elastisitet med elementmetoden inneholder integral av kompliserte funksjoner over hele problemområdet. Selv om dette området diskretiseres til mindre elementer er eksakt analytisk integrering vanskelig. For å løse systemet er det derfor nødvendig å benytte tilnærminger av disse integralene, noe som kan gjøres ved numerisk integrasjon.

Numerisk integrasjon går ut på å evaluere funksjonen som skal integreres i et antall integrasjonspunkter som ligger innenfor det angitte integrasjonsområde, og multiplisere disse verdiene med vektverdier. Ved å summere alle disse produktene får man en tilnærming til integralet. Disse beregningene blir vanligvis utført i et normalisert intervall, fra -1 til 1. Beregningskostnadene ved å benytte numerisk integrasjon vil være proporsjonal med antall integrasjonspunkter, derfor må man i mange tilfeller avveie nøyaktighet mot hastighet i beregningene.

Gaussintegrasjon, også kalt Gaussisk kvadratur og Gauss-Legendre, er en numerisk integrasjonsmetode som egner seg spesielt godt til integrasjon av polynomer. Metoden karakteriseres ved at både vektene og posisjonene til integrasjonspunktene velges på forhånd. Det kan vises at gaussintegrasjon gir eksakte resultater av integrasjon av et polynom av grad $2n - 1$ ved bruk av n antall integrasjonspunkter. Siden formfunksjonene i elementformuleringen er bygget opp av polynomer egner denne metoden seg godt i elementmetoden.

Numerisk integrasjon ved gaussintegrasjon kan vises ved å anta en funksjon $f(x)$ som skal integreres med hensyn på variabelen x over et intervall -1 til 1. Hvis vi antar integrasjonspunkter x_i , vektverdier H_i og n antall integrasjonspunkter kan vi skrive dette matematisk:

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_i^n H_i f(x_i)$$

Integrasjon med hensyn på flere variable medfører en enkel utvidelse av den foregående ligningen. For eksempel vil en funksjon $f(x, y)$ integrert med hensyn på x og y skrives matematisk:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y)dx dy = \sum_i^n \sum_j^n H_i H_j f(x_i, y_j)$$

Her er j en variabel som brukes som indeks på verdier som har med y å gjøre.

Ved bruk av elementformulering basert på isoparametriske elementer må uttrykkene i ligningene 3.41-3.45 integreres med hensyn på 2 og 3 variable. Her er det derfor nødvendig å benytte utvidelse til flere variable. Funksjonene som integreres består av elementets formfunksjoner og deres deriverte i det lokale koordinatsystemet. Siden elementtypen som benyttes er et tetraeder med lineære kanter er formfunksjonene polynomer av første orden, og beregnes derfor med ett gausspunkt lik 0.0 og en vektverdi lik 2.0. Oversikt over gausspunkter og deres korresponderende vektorer finnes i de fleste lærebøker om emnet, vedlegg B gir en oversikt over gausspunkter og vektorer med 6 desimaler opp til orden 5.

3.6 Løsning av ligningsystemet

Deformasjoner i materialet forekommer som forskyvninger av nodenes posisjoner. Dette kommer som et resultat av kreftene som er påtrykt materialet. For å beregne nodeposisjonene til enhver tid er det nødvendig å løse ligningssystemet gitt i ligning 3.29.

Materialets fysiske egenskaper og reaksjoner er beskrevet av et system av differensialligninger med tilhørende randbetingelser. I tilfellet med lineær elastikk resulterer dette ved bruk av elementmetoden i et lineært ligningssystem. Hvis man bare er interessert i slutt-tilstanden til systemet kan en statisk

metode benyttes for å løse systemet - gitt en start-tilstand og påvirkninger på systemet beregnes verdier for de ukjente som medfører likevekt i systemet. Det finnes en rekke metoder som kan løse slike ligningssystemer, for eksempel gausseliminering. Dette er en metode som er ineffektiv spesielt ved store ligningssystemer, og kalles en direkte løsningsmetode siden den kun har som mål å framskaffe den endelige løsningen - her de ukjente nodeposisjonene.

I resten av dette kapitlet skilles det mellom dynamisk og statisk simulering. Dynamisk simulering tar hensyn til tid og involverer mer beregninger for mer realisme, men beregningskompleksiteten er til praktisk bruk i sanntidssystemer for stor for dagens maskinvare. Statisk simulering har fordel av færre beregninger, men kan ikke modellere dynamiske egenskaper.

3.6.1 Dynamisk simulering

Siden en kirurgisk simulator er et interaktivt system må også overgangstilstander beregnes. Påvirkningene fra brukeren ved hjelp av den haptiske enheten medfører at systemet kan endre seg hele tiden, og sanntidsaspektet gjør at deformasjoner i form av de ukjente nodeforskyvningene må beregnes så hurtig som mulig. I en slik simulering vil også dynamiske egenskaper være av interesse. For eksempel vil bevegelse i en del av materialet bevares med en faktor som ikke bare er avhengig av de indre kreftene, men også massen i området. Tilsvarende vil akselerasjoner dempes ikke bare av de indre kreftene, men også dempningskrefter. I mange tilfeller vil slike dempningskrefter være nødvendige for å hindre oskillasjoner i simuleringen. Slike vibrasjoner forekommer ofte ved bruk av diskretiserte massepunkter, der punkter som er beveget bort fra likevektsposisjon ikke finner tilbake til denne tilstanden. Resultatet er ofte at punktet oskillerer rundt denne likevektsposisjonen. For å modellere masse og dempning må en tidsparameter inn i modellen:

$$M\ddot{\vec{a}} + D\dot{\vec{a}} + K\vec{a} = \vec{f} \quad (3.48)$$

Her er M massematrise for fordeling av masse over nodene, og D er dempningsmatrise for dempningskrefter. Vektoren \vec{a} er nodeposisjoner dobbeltderivert med hensyn på tiden t , og representerer således nodenes akselerasjon. Tilsvarende er $\dot{\vec{a}}$ nodeposisjoner derivert med hensyn på tid, og representerer nodenes hastighet. Resten av ligningen er identisk med elementformuleringen av lineær elastisitet, gitt i ligning 3.29.

Det dynamiske systemet i ligning 3.48 er representert som en andreordens

differensialligning. Eksakt analytisk løsning av slike systemer kan være mulig, men dette krever mye beregninger og forutsetter her at den underliggende modellen er lineært elastisk. Det er derfor vanlig å løse slike problemer ved numeriske integrasjonsmetoder. Det bemerkes at numerisk integrasjon innen dette kapitlet er en annen form for numerisk integrasjon enn den beskrevet i 3.5. For å kunne beregne overgangstilstander og oppdatere nodeposisjonene fortløpende er vi interessert i en iterativ indirekte løsningsmetode som konvergerer mot den korrekte løsningen. I praksis er det nødvendig å diskretisere tiden t , og så inkrementere tidsvariabelen med en gitt verdi Δt , kalt tidssteget, for hver løsningsberegning. Det finnes flere måter å beregne løsninger for slike systemer med numerisk integrasjon, der det skilles mellom implisitte og eksplisitte metoder.

I en løsningsberegning er det antatt at korrekte verdier for de ukjente er funnet ved tid lik t . Problemet er da å beregne de ukjente i neste steg, ved tide $t + \Delta t$. En *implisitt* metode karakteriseres ved at den setter tidsvariabelen lik $t + \Delta t$ når de nye verdiene skal beregnes. Den forsøker på denne måten å forutsi hva som skjer i neste steg. Dette er en beregningsmessig tung metode som involverer et nytt system av ligninger som må løses for hvert steg. En *eksplisitt* metode derimot beregner ukjente variable ved tid $t + \Delta t$ ved kun å bruke data tilgjengelig ved tid t . Kostnaden ved en slik metode er langt mindre enn implisitt løsning, men ulempen er at løsningen kan bli ustabil. Av hensyn til beregningskostnadene ønsker man størst mulig tidssteg som samtidig gir akseptable løsninger. Hvis derimot den underliggende modellen utvikler seg raskere enn den numeriske metoden klarer å beregne kan løsningen bli ustabil, og dermed gi feilaktige resultater. Tidssteget må derfor være av en størrelse som klarer å holde følge med utviklingen i modellen. Innen modellering av klær ved partikkelsystemer er det vist hvordan ulempen med små tidssteg kan reduseres ved å bruke restriksjoner på partikkelbevegelsene og en modifisert implisitt konjugert gradient-metode for å løse ligningssystemet[19].

Som nevnt over medfører en implisitt løsningsmetode et nytt ligningssystem som må løses for hvert tidssteg, noe som inkluderer invertering av stivhetsmatrisen K . I simulering av kirurgi er dette uheldig, siden eventuelle endringer i materialets strukturelle oppbygning (topologien) vil medføre endringer i systemets stivhetsmatrise. Dette forekommer ved blant annet kutting, og invertering av stivhetsmatrisen må derfor gjøres hver gang slike endringer oppstår. Den største fordelen med eksplisitte metoder er at man unngår invertering av stivhetsmatrisen. I tillegg gjøres beregninger lokalt, noe som åpner for å utnytte parallelle beregninger. Største ulempen

med eksplisitte metoder er de nevnte stabilitetsproblemene. Til bruk i et haptisk sanntidssystem vil hurtige beregninger være essensielt for et realistisk resultat, og et størst mulig tidssteg vil være nødvendig. Bruk av eksplisitte metoder i denne type applikasjon vil derfor kunne skape ustabilitet.

Bro-Nielsen[4] beskriver forsøk med bruk av et dynamisk system i simulering av organisk materiale representert med elementmetoden. Her ble en semi-implisitt Euler-metode foretrukket foran en lignende eksplisitt metode nettopp på grunn av stabilitetsproblemer ved den eksplisitte løsningen. Forsøkene ble utført uten haptisk tilbakemelding og med et minimalt antall noder, og viste således ikke et dynamisk system i praktisk bruk. Kostnadene ved å beregne resultater av en slik andreordens differensialligning med elementformulering er for store for dagens maskinvare, derfor er det statiske systemer som dominerer i sanntidsapplikasjoner av slik simulering[3][5]. For å gjenskape realisme er dynamiske egenskaper viktig, og vil medføre store forbedringer når maskinvaren er effektiv nok til å tillate dens bruk.

3.6.2 Statisk simulering

Ved statisk simulering ser man bort fra de dynamiske egenskapene, og søker å løse det lineære ligningssystemet

$$K\vec{a} = \vec{f}$$

som gitt i 3.29. Som tidligere nevnt kan gausseliminering brukes til å løse et slikt system, men resultatet fremskaffes ikke raskt nok til å kunne brukes i et sanntidssystem. Ved å multiplisere med den inverterte K-matrisen på begge sider får vi følgende:

$$\begin{aligned} K^{-1}K\vec{a} &= K^{-1}\vec{f} \\ \vec{a} &= K^{-1}\vec{f} \end{aligned}$$

Her er de ukjente nodeposisjonene \vec{a} uttrykt ved den inverterte stivhetsmatrisen og kraftvektoren \vec{f} . I vårt tilfelle med simulering av organisk materiale vil kraftvektoren være sammensatt av randbetingelser, ekstern last og eventuell initiell tøyning (ligning 3.29). Siden disse kreftene bare påvirker enkelte noder vil denne vektoren bestå av et stor antall nullverdier. Dette kan utnyttes siden man ikke behøver å multiplisere ut produkter inneholdende kraft lik null. En slik metode kan beskrives som selektiv matrise-vektor-multiplikasjon, og er benyttet av Bro-Nielsen[4]. Her sammenlignes metoden med de dynamiske systemene beskrevet tidligere, og det hevdes at denne metoden er betydelig

raskere. Samtidig kan den bare benyttes ved statiske systemer, og vil derfor mangle realismen som stammer fra de dynamiske egenskapene.

Konjugert gradient (forkortet KG) er en numerisk integrasjonsmetode for å løse ligningssystemer som egner seg bra til å løse slike problemer. KG-metoden baseres i stor grad på multiplikasjoner av matrise- og vektor-komponenter, og utnytter derfor i likhet med selektiv multiplikasjon beskrevet over nullverdier i systemet. I tillegg behøver metoden ikke så mye lagringsplass under beregningene, og konvergerer raskt mot det riktige resultatet[19]. Siden KG er en implisitt metode kan den bli ustabil ved for store tidssteg, men ved et statisk system er det langt færre beregninger som utføres i hvert beregningssteg. Faren for ustabilitet er derfor langt mindre enn ved dynamisk simulering. Konjugert gradient er tidligere benyttet for å løse et lignende lineært ligningssystem i simulering av elastisk materiale i et sanntidssystem[5].

Både konjugert gradient og selektiv matrise-vektor-multiplikasjon baserer seg på invertering av stivhetsmatrisen K . Denne inverteringen foretas typisk i som preprosessering. Ved bruk av mange elementer er dette en langvarig operasjon. Cotin m.fl.[5] brukte med en Alpha 400MHz prosessor 7 minutter på å invertere stivhetsmatrisen til en modell bestående av 725 tetraedre og 193 noder. På en 1GHz Athelon-prosessor brukte Berkley m.fl.[3] over 4 minutter på samme operasjon på en modell bestående av 624 noder. Hvis stivhetsmatrisen må endres, for eksempel ved kutting, medfører dette at preprosesseringen må gjennomføres på nytt. Som nevnt avhenger eksplisitte metoder ikke av slik invertering, men dagens maskinvare er ikke kraftig nok til at ligningssystemer som resulterer av elementmetoden kan løses på denne måten. Av denne grunn er kutting til dags dato ikke vist implementert ved bruk av elementmetoden i praktiske sanntidssystemer.

3.7 Kondensering

Det volumetriske materialet er bygget opp av elementer bestående av noder som enten ligger på materialets overflate eller i dets indre. I et haptisk system er det bare nodene på overflaten som brukeren kan se og berøre, og i de fleste tilfeller er det ikke nødvendig å beregne forflytningene til andre noder enn disse. Kondensering er en teknikk som utnytter dette til å effektivisere sanntidsberegningene på bekostning av mer tidskrevende preprocessing. Metoden ble først benyttet i et haptisk sanntidssystem av Bro-Nielsen[4], og er i senere tid benyttet under virtuell sammensyng av sår[3].

Elementformuleringen av lineær elastisitet er gitt på kompakt form i ligning 3.30, der $K\vec{a} = \vec{f}$. Ved å benytte oppsplitting av matriser kan vi utnytte stivhetsmatrisens symmetri og definere et nytt ligningssystem:

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ab}^T & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_a \\ \vec{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{f}_a \\ \vec{f}_b \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

eller i form av ligninger:

$$K_{aa}\vec{u}_a + K_{ab}\vec{u}_b = \vec{f}_a \quad (3.50)$$

$$K_{ab}^T\vec{u}_a + K_{bb}\vec{u}_b = \vec{f}_b \quad (3.51)$$

Her angir notasjonen a de indre delene verken kan ses eller berøres og derfor kondenseres ut, mens b angir delene som ligger på overflaten og derfor beholdes. Finner så et uttrykk for \vec{u}_a av ligning 3.50 ved å multiplisere med K_{aa}^{-1} og omorganisere:

$$\begin{aligned} K_{aa}\vec{u}_a + K_{ab}\vec{u}_b &= \vec{f}_a \\ K_{aa}^{-1}K_{aa}\vec{u}_a + K_{aa}^{-1}K_{ab}\vec{u}_b &= K_{aa}^{-1}\vec{f}_a \\ \vec{u}_a + K_{aa}^{-1}K_{ab}\vec{u}_b &= K_{aa}^{-1}\vec{f}_a \\ \vec{u}_a &= K_{aa}^{-1}\vec{f}_a - K_{aa}^{-1}K_{ab}\vec{u}_b \end{aligned}$$

Dette uttrykket settes så inn for \vec{u}_a i ligning 3.51:

$$\begin{aligned} K_{ab}^T\vec{u}_a + K_{bb}\vec{u}_b &= \vec{f}_b \\ K_{ab}^T(K_{aa}^{-1}\vec{f}_a - K_{aa}^{-1}K_{ab}\vec{u}_b) + K_{bb}\vec{u}_b &= \vec{f}_b \\ K_{ab}^TK_{aa}^{-1}\vec{f}_a - K_{ab}^TK_{aa}^{-1}K_{ab}\vec{u}_b + K_{bb}\vec{u}_b &= \vec{f}_b \\ P_f\vec{f}_a + P_u\vec{u}_b &= \vec{f}_b \end{aligned}$$

Her er $P_f = K_{ab}^T K_{aa}^{-1}$ og $P_u = K_{bb} - K_{ab}^T K_{aa}^{-1} K_{ab}$. Vektoren \vec{f}_a angir krefter på de indre delene, og ved å anta denne lik 0 kan vi fjerne leddet som inkluderer denne. Antagelsen kan gjøres siden krefter på indre noder ikke forekommer i de fleste applikasjoner[3]. Kondenseringen gir dermed et redusert lineært ligningssystem med vektoren u_b inneholdende de synlige noderes posisjoner som ukjent:

$$P_u \vec{u}_b = \vec{f}_b$$

Mer intuitivt kan denne tolkes som $K_{synlig} u_{synlig} = \vec{f}_{synlig}$, der notasjonen *synlig* angir synlige noder. Dette medfører en kraftig reduksjon fra det opprinnelige ligningssystemet, der stivhetsmatrisen K_{synlig} er av størrelse $v \times v$, og v er antall synlige noder. Siden dette ligningssystemet er lineært i likhet med det opprinnelige kan systemet løses med metodene beskrevet i kapittel 3.6.

Kapittel 4

Implementering

Implementert i denne oppgaven er det som kan beskrives som et rammeverk for bruk av endelige elementers metode til representasjon av organisk materiale i et haptiske sanntidssystem. En implementering av elementformuleringen består av mange deler som alle må være på plass for å virke etter sin hensikt. I rammeverket som er implementert her mangler mange av disse delene, og programmet kan derfor ikke simulere organisk materiale slik ønsket.

Dette kapitlet viser hvordan rammeverket med datastruktur for implementering av elementformuleringen er satt opp, og gir beskrivelse av en enkel geometrisk modell bygget opp av tetraedre som benyttes til testing av programmet.

Implementasjonen er skrevet i programmeringsspråket C++, og utnytter objektorientering til å skape et program som er lett å utvide og vedlikeholde. Valget av C++ baseres også på at de aller fleste programmeringsgrensesnitt mot haptiske enheter benytter dette programmeringsspråket.

4.1 Datastruktur

Datastrukturen i implementasjonen er satt opp for å best mulig representere teorien for elementformuleringen av lineær elastikk slik den forekommer i kapittel 3. For å vise hvordan dette gjøres oppsummeres klassene som benyttes her kort, der referanser til teorien er gitt der dette er naturlig.

Data

Denne klassen brukes for å lagre noder, elementer, materialer og alle typer kraft-klasser. På denne måten skilles lagring av data fra beregninger.

Node

Klasse som hovedsaklig benyttes for å lagre nodenes posisjoner og nodenummer.

ElementTetraeder

Klassen har referanse til nodene den består av, og brukes til å beregne egen stivhetsmatrise på elementnivå gitt av ligning 3.41:

$$K^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J^{-1} B^{eT} D(J^T)^{-1} B^e du dv dw \det J$$

BCNaturlig og BCEssensiell

Klassene har referanser til noder, og brukes til å beregne naturlige og essensielle randbetingelser på elementnivå gitt av ligning 3.42-3.43:

$$\begin{aligned} \vec{f}_b^e = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J^{-1} N^{eT} \vec{h} du dv \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \right| \\ & + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J^{-1} N^{eT} \vec{t} du dv \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \right| \end{aligned}$$

EksternLast

Klassen har referanse til node, og brukes til å beregne ekstern last på elementnivå gitt av ligning 3.44:

$$\vec{f}_l^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J^{-1} N^{eT} \vec{b} du dv dw \det J$$

InitTøyning

Klassen har referanse til node, og brukes til å beregne initiell tøyning på elementnivå gitt av ligning 3.45:

$$\vec{f}_0^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J^{-1} B^{eT} D \vec{\varepsilon}_0 du dv dw \det J$$

Solve

Klassen benyttes til systemanalyse, og samler inn data fra alle elementene i henhold til ligning 3.46:

$$\sum_i^{elementer} K^e \vec{a} = \sum_i^{elementer} \vec{f}^e$$

Ved å benytte invertering av den globale stivhetsmatrisen K og selektiv multiplisering som beskrevet i kapittel 3.6.2 kan denne klassen finne de nye nodeposisjonene.

Materiale

Generell materiale-klasse som ikke brukes direkte, men arves av mer spesifiserte material-klasser.

MaterialeElastisk3d

Klassen arver fra Materiale-klassen, og lagrer materialspesifikke data for et elastisk materiale i tre dimensjoner. I vårt tilfelle er dette den materialspesifikke D -matrisen fra ligning 3.2.

Matrix

Dette er en enkel matriseklasse for lagring av data og matriseoperasjoner, for eksempel matriseinvertering.

Spenning3d

Denne klassen fungerer som lagringsplass for spenningsvektoren $\vec{\sigma}$ gitt av ligning 3.13. Hver node har en referanse til sitt eget Spenning3d-objekt. Klassen behøves ikke for å kunne implementere elementmetoden, men kan brukes til å visualisere spenninger i forskjellige deler av materialet.

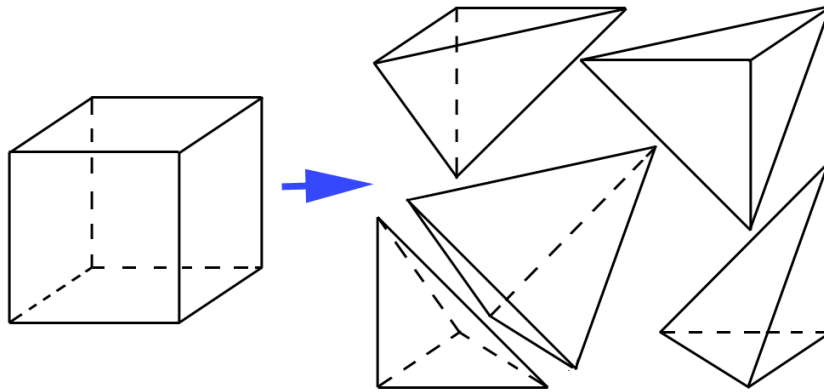
GaussPoints

Klassen lagrer gausspunkter og korresponderende vektorer, til bruk ved gaussisk kvadratur som forklart i kapittel 3.5.

4.2 Geometrisk modell

For å kunne modellere fysiske egenskaper til et materiale behøves først en geometrisk modell som beskriver objektets romlige utstrekning. Bruk av elementmetoden medfører at objektet som skal modelleres må bygges opp av den valgte elementtypen. Ved bruk av tetraedre som elementtype er en slik

dekomponering i elementer en ikke-triviell oppgave. Av denne grunn benyttes en enkel form for geometrisk modell, basert på dekomponering av en kube i tetraedre. Denne operasjonen danner 5 tetraedre med tilsammen 8 noder plassert i den opprinnelige kubens hjørner, og er illustrert i figur 4.1.



Figur 4.1: Oppsplitting av kube i fem tetraedre

Den geometriske modellen som benyttes består i dekomponering av to slike kuber satt ved siden av hverandre. Siden to av kubeflatene er felles blir det samlede nodeantallet i modellen $8 + 8 - 4 = 12$, der tallet 4 indikerer nodene som er felles for begge kubene. Det totale antall tetraedre er 10.

En slik geometrisk modell beskriver materialets romlige utstrekning, og legger til rette for modellering av materialets fysiske egenskaper.

Kapittel 5

Konklusjon

Denne rapporten har tatt for seg hvordan endelige elementers metode kan benyttes til å representere elastisk organisk materiale modellert som lineært elastisk. Styrken til elementmetoden sammenlignet med andre metoder som har til formål å representere organisk materiale er at elementmetoden kan formuleres med utgangspunkt i fysiske lover. Dette er mulig ved å formulere problemet på en slik måte at problemområdet kan ansees som et endelig antall delproblemer der lokale tilnærminger utføres.

Det benyttes en antagelse om at materialet kan representeres ved lineær elastisitet. Dette leder til en elementformulering i form av et lineært ligningssystem som er relativt raskt å løse, men har ulempen av å være korrekt kun for mindre deformasjoner. Elementmetoden kan benyttes til å representere mer realistiske modeller av elastisk materiale, men ved bruk i et haptisk sanntidssystem vil komplekse modeller medføre for treg oppdatering av de haptiske tilbakemeldingene.

For å løse det lineære ligningssystemet er det nødvendig å benytte metoder som gjør nytte av den inverterte til stivhetsmatrisen. På denne måten utnyttes det at elementmetoden leder til et ligningssystem bestående av matriser og vektorer som inneholder et stort antall nullverdier. Ulempen med å benytte den inverterte stivhetsmatrisen er at endringer i denne matrisen på grunn av store beregningskostnader ikke kan gjøres i sanntid. Dette gjør at manipuleringer som medfører endringer i stivhetsmatrisen med dagens maskinvare ikke kan simuleres realistisk ved bruk elementmetoden i sanntid.

Kapittel 6

Videre arbeid

6.1 Implementasjon med haptisk grensesnitt

Implementasjonen som er beskrevet i kapittel 4 er ufullstendig, og et naturlig neste steg vil være å fullføre denne. Dette vil også inkludere implementasjon mot et haptisk brukergrensesnitt. Reachin API[6] og OpenHaptics toolkit fra SensAble[20] er eksempler på programmeringsgrensesnitt mot haptiske enheter ved bruk av C++. Reachin API benytter av effektivitetshensyn en relativt streng kontroll på data som brukes til å beregne haptiske tilbakemeldinger, noe som kan vanskeliggjøre implementasjon av et stort og komplisert system som elementformuleringen basert på lineær elastikk. Ved OpenHaptics gjøres dette på en mer intuitiv måte, der datastrukturen ikke behøver å være på en gitt form. Av denne grunn vil det være mest hensiktsmessig å benytte OpenHaptics i en framtidig utvidelse av implementasjonen.

6.2 Kollisjonsdeteksjon og -håndtering

I et haptisk system der brukeren styrer et virtuelt verktøy er kollisjonsdeteksjon og håndtering to vesentlige problemer som kan ødelegge effektiviteten i applikasjonen. Den vanlige måten å registrere bevegelsen til det virtuelle verktøyet er å benytte et enkelt kollisjonsobjekt koblet til spissen av det virtuelle verktøyet. Når brukeren beveger den haptiske armen transleres kollisjonsobjektet tilsvarende i det virtuelle området. Kollisjonsdeteksjon forenkles på denne måten til å sjekke kollisjon mellom dette objektet og flatene som de virtuelle objektene er bygget opp av. Vanligvis benyttes en liten kule med kjent radius som kollisjonsobjekt, noe som medfører hurtig kollisjonssjekking. I simulering av for eksempel kikkhullskirurgi er det viktig

å gi et inntrykk av det begrensede arbeidsområdet slike inngrep medfører, derfor er det her vanlig å benytte større kollisjonsobjekter for å gi mer avanserte haptiske tilbakemeldinger. I slike tilfeller vil et kollisjonsobjekt i form av en sylinder som omslutter det virtuelle verktøyet gi en mer virkelighetsnær og samtidig forholdsvis effektiv kollisjonsberegning.

Begrensning av antall kollisjonssjekk er essensielt for å unngå lav oppdateringsfrekvens. En måte å gjøre dette på er å benytte romlig oppdeling av det virtuelle området. Til enhver tid undersøkes det da hvilken del av området kollisjonsobjektet befinner seg i, og sjekk av kollisjon gjøres så kun mot de flatene som befinner seg i denne delen. Romlig oppdeling i et okttre har tidligere vist store hastighetsforbedringer i slike applikasjoner[21]. Oppdelingen gjøres ved å splitte det virtuelle området på midten i stadig mindre oktanter, og tilordne flatene til løvnoder tilhørende delen de befinner seg i. Oppsplitting i nye deler opphører når maksimal tredybde er nådd, eller når hver oktant inneholder et gitt antall noder. En lignende metode kalt binær oppsplitting skiller seg fra okttreet ved at det området suksessivt splittes i to mindre deler på en måte som gjør at begge delene inneholder like mange flater. Dette medfører et balansert tre med noder, noe som i forhold til okttre minsker risikoen for at enkelte deler tar lenger tid å kollisjonssjekke enn andre. Romlig oppdeling kan medføre føre store fordeler i høyere oppdateringsfrekvens, men er samtidig avhengig av at geometrien til de virtuelle objektene ikke endrer seg mye over tid.

En annen metode for å begrense antall kollisjonssjekk er å benytte omsluttende volumer (eng. *bounding volumes*). Slike volumer er helst av en enkel form som er hurtige å kollisjonssjekke mot, for eksempel kuler. På flatenivå kan dette gjøres ved å definere kuler som omslutter hver flate. Kollisjonssjekking vil da medføre å undersøke hvilke omsluttende volumer kollisjonsobjektet til enhver tid kolliderer med, og foreta en grundigere kollisjonssjekk mot flatene som er omsluttet av disse volumene. For bedre effektivitet er det nyttig å lage et hierarki av slike volumer, der stadig større omsluttende volumer benyttes for å omslutte mindre volumer. Et slikt hierarki er for eksempel vist benyttet under kutting i masse-fjær-modeller i et haptisk system[9].

6.3 Optimalisering av datarepresentasjon

Elementmetoden baserer seg i stor grad på bruk av matriser, både til datarepresentasjon og i beregninger. Av beregningene som benyttes er spesielt matriseinvertering en beregningstung operasjon. Matrise-klassen som

er implementert tar hensyn til effektivitet kun i mindre grad, og har stort forbedringspotensiale. Elementmetoden resulterer også i ligningssystemer bestående av glisne matriser og vektorer, altså inneholdende mange nullverdier. Dette kan utnyttes både for å spare lagringsplass og i beregninger som involverer disse. En forbedring av den eksisterende løsningen vil derfor å benytte enten kommersielle eller fritt tilgjengelige matrisealgoritmer i C++ utviklet med tanke på effektivitet og til bruk med glisne data.

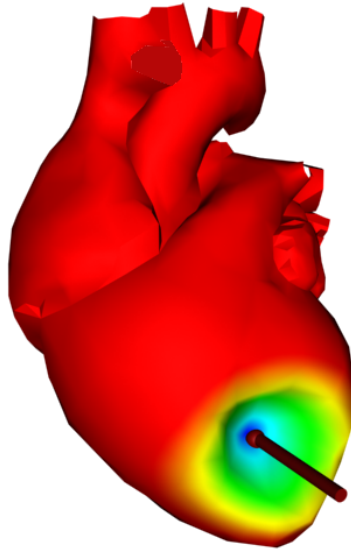
6.4 Visualisering av spenning i materialet

Spesielt under kirurgisk simulering vil det under påvirkninger fra brukeren være interessant å vite hvor og hvor mye spenning som resulterer i materialet. Den nære koblingen til fysikken ved bruk av elementmetoden gjør at vi kan estimere spenningsnivået over hele modellen til enhver tid. Ligning 3.24 gir et uttrykk for spenning basert på nodekoordinatene. Ved å beregne spenningen for hver node har man diskretiserte spenningsnivåer over hele modellen. Spenningen kan så visualiseres ved å generere teksturer til modellen basert på disse verdiene. En mye brukt teknikk er å utnytte såkalt fargekoder, der forskjellige farger kan angi spenningsnivåer av ulike størrelser. Ved å benytte interpolering av spenningsnivåenes farger over alle flatene basert på nodenes spenningsnivåer visualiseres spenningen i kontinuerlige farger over hele modellen. Intuitive fargevalg vil dermed medføre en intuitiv representasjon av spenningsfordelingen over hele modellen. Figur 6.1 gir en illustrasjon av hvordan dette kan forekomme, der det sylindrerformede virtuelle verktøyet påvirker materialet slik at det deformeres. Materialets tekstur er her blå der det er mye spenning, og rød der det er ingen spenning.

6.5 Kutting i virtuelt organisk materiale

Innen kirurgi er kutting i organiske materialer noe som foretas i nesten alle prosedyrer, og burde således være mulig å gjennomføre i en generell kirurgisk simulator. Kutting vil typisk medføre åpninger i overflaten til det organiske materialet, og dermed endringer i objektets topologi. Slike endringer har store konsekvenser for elementinndelingen, og som beskrevet i kapittel 3.6 vil dette medføre en rekalkulering av både den globale stivhetsmatrisen og dens inverterte.

Kutting i modeller basert på elementmetoden er i sanntidsapplikasjoner fortsatt et uløst problem. For å nærme seg en løsning på problemet vil



Figur 6.1: Illustrasjon av visualisering av spenning i materialet.

det være naturlig å studere løsningsmetoder som ikke benytter seg av invertering av stivhetsmatrisen. Eksplisitte metoder beskrevet i kapittel 3.6.1 er eksempler på slike løsningsmetoder. Med stadig kraftigere tilgjengelig maskinvare vil eksplisitte metoder bli stadig mer aktuelle, og det vil være av interesse å utforske metoder for å effektivisere metodene. For eksempel gjøres beregninger i slike metoder lokalt, noe som kan utnyttes i parallellisering av beregningene.

6.6 Realisme i modellering av organisk materiale

Elementformuleringen som er utledet i denne rapporten er basert på en antagelse om lineær elastisitet. Dette er en antagelse som er gjort av effektivitetshensyn, siden dette leder til et lineært ligningssystem. Lineær elastisitet vil kunne gi realistiske resultater for tøyninger som er små av størrelse. For å ta hensyn til større deformasjoner er det nødvendig å bruke ikke-lineære modeller av elastisitet. Som beskrevet i kapittel 3.2 kan en ikke-lineær viskoelastisk modell representere elastisk organisk materiale på en god måte. Ikke-lineære modeller leder til ikke-lineære ligningssystemer som er beregningstunge å løse, men for mer realisme i modelleringen er det interessant å undersøke hvilke muligheter slike modeller medfører.

Tillegg A

Utledning av ligningen for virtuel arbeid

For å komme fram til ligningen for virtuel arbeid utarbeids først et foreløpig resultat. Gitt en vilkårlig tredimensjonal vektor $\vec{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ skrives gradientvektoren $\tilde{\nabla}\vec{v}$ i henhold til den kinematiske relasjonen $\vec{\varepsilon} = \tilde{\nabla}\vec{u}$:

$$\tilde{\nabla}\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Den transponerte av denne vektoren multipliseres med spenningsvektoren $\vec{\sigma}$, noe som gir dette foreløpige resultatet:

$$(\tilde{\nabla}\vec{v})^T \vec{\sigma} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \sigma_{zz} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \sigma_{xy} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \sigma_{xz} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \sigma_{yz} \quad (\text{A.2})$$

Til å representere randbetingelser er det hensiktsmessig å benytte randspenningsvektoren \vec{t} gitt i ligning 3.12. På overflaten av materialet uttrykker randbetingelser et forhold mellom krefter som påvirker overflaten og den resulterende materialspenningen. Gitt en vektor $\vec{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$ som angir normalen på overflaten kan vi beskrive dette forholdet:

$$\begin{aligned}
t_x &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z \\
t_y &= \sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z \\
t_z &= \sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Forholdet mellom volumspenning \vec{b} og spenning $\vec{\sigma}$ er gitt av likevektsligningen 3.15. Ved å utføre matrisemultiplikasjonene får vi følgende ligninger:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Med utgangspunkt i ligningene A.2-A.4 kan prinsippet for virtuelt arbeid utledes. Fra den vilkårlige vektoren $\vec{v} = [v_x v_y v_z]^T$ multipliserer vektorkomponentene med hver sin ligning fra det foregående ligningssettet. Deretter integreres formlene over volumet V . Dette kan gjøres uten å ødelegge betydningen siden høyresiden er lik 0. For den første ligningen i A.4 multiplisert med v_x får vi:

$$\int_V v_x \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dV + \int_V v_x \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dV + \int_V v_x \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dV + \int_V v_x b_x dV = 0 \tag{A.5}$$

Bruker på denne ligningen så delvis integrasjon ved Gauss-Green-teoremet på hvert av leddene:

$$\begin{aligned}
\int_S v_x \sigma_{xx} n_x dS - \int_V \frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{xx} dV + \int_S v_x \sigma_{xy} n_y dS - \int_V \frac{\partial v_x}{\partial y} \sigma_{xy} dV \\
+ \int_S v_x \sigma_{xz} n_z dS - \int_V \frac{\partial v_x}{\partial z} \sigma_{xz} dV + \int_V v_x b_x dV = 0
\end{aligned}$$

Her angir S overflaten til materialet. Ved å ta hensyn til randbetingelsene gitt av t_x i ligning A.3 kan ligningen omskrives og reduseres:

$$\int_S v_x t_x dS - \left(\int_V \frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \sigma_{xz} \right) dV + \int_V v_x b_x dV = 0 \tag{A.6}$$

Tilsvarende beregninger for v_y og v_z med tilhørende randbetingelser for t_y og t_z gir følgende ekstra ligninger:

$$\int_S v_y t_y dS - \left(\int_V \frac{\partial v_y}{\partial x} \sigma_{yx} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \sigma_{yz} \right) dV + \int_V v_y b_x dV = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\int_S v_z t_z dS - \left(\int_V \frac{\partial v_z}{\partial x} \sigma_{zx} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \sigma_{zy} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \sigma_{zz} \right) dV + \int_V v_z b_x dV = 0 \quad (\text{A.8})$$

Ved å summerer ligningene A.6-A.8 får vi én ligning:

$$\begin{aligned} & \int_S (v_x t_x + v_y t_y + v_z t_z) dS + \int_V (v_x b_x + v_y b_y + v_z b_z) dV - \\ & \int_V \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \sigma_{zz} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \sigma_{xy} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \sigma_{xz} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \sigma_{yz} \right] dV = 0 \\ & \int_S \vec{v}^T \vec{t} dS + \int_V \vec{v}^T \vec{b} dV - \\ & \int_V \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \sigma_{zz} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \sigma_{xy} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \sigma_{xz} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \sigma_{yz} \right] dV = 0 \end{aligned}$$

Ved å gjenkjenne integralet av gradientleddene over volumet V som høyresiden i ligning A.2 kan vi skrive ligningen for virtuelt arbeid slik den forekommer i ligning 3.15:

$$\int_V (\tilde{\nabla}^T) \vec{\sigma} dV = \int_S \vec{v}^T \vec{t} dS + \int_V \vec{v}^T \vec{b} dV$$

Tillegg B

Gaussisk kvadratur

Tabellen under gir gausspunkter og vekter for gaussisk kvadratur av formen:

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_i^n H_i f(x_i)$$

Gausspunkt x_i	Orden	Vekter H_i
0.000 000	n=1	2.000 000
\pm 0.577 350	n=2	1.000 000
0.000 000	n=3	0.888 888
\pm 0.774 596		0.555 555
\pm 0.339 981	n=4	0.652 145
\pm 0.861 136		0.347 854
0.000 000	n=5	0.568 888
\pm 0.538 469		0.478 628
\pm 0.906 179		0.236 926

Bibliografi

- [1] Richard M. Satava. Current and Future Application of Virtual Reality for Medicine. *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, pages 484–489, March 1998.
- [2] National Institutes of Health - The Visible Human Project. http://www.nlm.nih.gov/research/visible/visible_human.html.
- [3] Jeffrey Berkley, George Turkiyyah, Daniel Berg, Mark Ganter, and Suzanne Weghorst. Real-Time Finite Element Modeling for Surgery Simulation: An Application to Virtual Suturing. *Proceedings of the IEEE*, vol. 10 issue 3, pages 314–325, May 2004.
- [4] Morten Bro-Nielsen. Finite Element Modeling in Surgery Simulation. *Proceedings of the IEEE*, 86(3):490–503, 1998.
- [5] Stéphan Cotin, Hervé Delingette, and Nicholas Ayache. Real-Time Elastic Deformations of Soft Tissues for Surgery Simulation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 5(1):62–73, January 1999.
- [6] Reachin API 3.2 programmers guide.
- [7] Dimitris Metaxas. Medical Image Modeling Tools and Applications. *Communications of the ACM*, 48(2):26–29, 2005.
- [8] Daniel Bielser, Volker A. Maiwald, and Markus H. Gross. Interactive Cuts through 3-Dimensional Soft Tissue. *Proceedings of the Eurographics '99, Computer Graphics Forum*, vol. 18, no. 3, pages C31–C38, 1999.
- [9] Cynthis D. Bruyns, Steven Senger, Anil Menon, Kevin Montgomery, Simon Wildermuth, and Richard Boyle. A survey of interactive mesh-cutting techniques and a new method for implementing generalized interactive mesh cutting using virtual tools. *Proceedings of Journal of Visualization and Computer Animation v13*, pages 21–42, 2002.

- [10] Roger W. Webster, Dean I. Zimmermann, Betty J. Mohler, Michael G. Melkonian, and Randy S. Haluck. A prototype haptic suturing simulator. In *Proceedings of Medicine Meets Virtual Reality*, 2001.
- [11] M. A. Padilla Castañeda and F. Arámbula Cosío. Computer Simulation of Prostate Resection for Surgery Training. In *Proceedings of the 25th Annual International Conference of the IEEE*, September 17-21, 2003.
- [12] Kevin Montgomery, LeRoy Heinrichs, Cynthia Bruyns, Simon Wildermuth, Christopher Hasser, Stephanie Ozenne, and David Bailey. Surgical Simulator for Hysteroscopy: A Case Study of Visualization in Surgical Training. In *Proceedings of IEEE Visualization 2001*, 2001.
- [13] Kyoungju Parks, Albert Montillo, Dimitris Metaxas, and Leon Axel. Volumetric Heart Modeling and Analysis. *Communications of the ACM*, 48(2):43–48, 2005.
- [14] Niels Saabye Ottosen and Hans Petersson. *Introduction to the Finite Element Method*. Prentice Hall, 1992.
- [15] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 1. McGraw-Hill, London, GB, 1977.
- [16] Martin Kauer. Inverse Finite Element Characterization of Soft Tissues with Aspiration Experiments. *PhD, ETH Zürich*, 2001.
- [17] Hervé Delingette and Nicholas Ayache. Hepatic Surgery Simulation. *Communications of the ACM*, 48(2):31–36, 2005.
- [18] Paul M. Fishbane, Stephen Gasirowicz, and Stephen T. Thornton. *Physics for Scientists and Engineers*. Prentice Hall, second edition, 1996.
- [19] David Baraff and Andrew Witkin. Large Steps in Cloth Simulation. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 1998*, pages 43–54, 1998.
- [20] Sensable technologies. <http://www.sensable.com>.
- [21] Geir Fagerholt and Stig Rune Sjøberg. Manipulering av biologisk modell ved hjelp av phantom. *Prosjektoppgave i TDT4715 Algoritmekonstruksjon og visualisering*, 2004.