NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Et TDS-basert eksperiment med fokus på instruksjonsdesign i matematikk

En didaktisk situasjon med intensjon om R2-elevers utvikling av en formel for summen av de *n* første kvadrattallene

Solveig Voktor Svinvik

Master i realfag
Innlevert: mai 2018
Hovedveileder: Heidi Strømskag, IMF

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Med denne masteroppgaven fullfører jeg fem år ved Lektorutdanningen i realfag på NTNU. Prosjektet jeg har begitt meg ut på i denne oppgaven har vært lærerik og spennende, men også utfordrende. I den anledning ønsker jeg å rette en takk til de som har støttet og veiledet meg i dette arbeidet.

Først og fremst ønsker jeg å takke min veileder Heidi Strømskag for god veiledning og støtte. Du har gitt meg både motivasjon og troen på at dette kunne bli et godt produkt. Hadde det ikke vært for deg hadde jeg aldri turt å bevege meg ut av komfortsonen å filme egen undervisning, eller valgt en masteroppgave som krever såpass mye kreativitet og selvstendighet. Det setter jeg uendelig stor pris på. Tusen takk!

Videre ønsker jeg å rette en stor takk til elevene og læreren som lot meg teste ut undervisningssituasjonen i deres klasserom. Uten deres tillatelse til å la meg filme undervisningen og deres arbeid med oppgavene, hadde dette prosjektet vært umulig å gjennomføre. Takk også til Mari som lot meg pilotere oppgavene på henne.

Jeg vil også takke mine medstudenter på matteland. Faste lunsjpauser med quiz har vært daglige høydepunkt og en motivasjonsfaktor for å komme seg til skolen. Dere har bidratt med mye latter og oppmuntrende ord, selv i perioder hvor det har gått trått med oppgaven.

Til slutt ønsker jeg å rette en stor takk til familie og kjæreste. Både for støtte, oppmuntring, korrekturlesing og stadige besøk i Trondheim.

Solveig Voktor Svinvik
Trondheim, mai 2018

Sammendrag

I denne oppgaven rapporterer jeg fra en studie som omhandler design og implementering av en egendesignet didaktisk undervisningssituasjon knyttet til algebra og generalisering av figurmønstre. Jeg har benyttet Strømskag (2017b) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk for utvikling og design av undervisningssituasjonen. Teorien for didaktiske situasjoner i matematikk er brukt for å forstå hvilke aspekter ved undervisningssituasjonen som påvirket elevenes muligheter for å nå den tilsiktede målkunnskapen. Den tilsiktede målkunnskapen ved prosjektet var utvikling av en formel for summen av de *n* første kvadrattallene. Forskningsdeltakerne var tolv elever fra matematikk R2. Validiteten til den egendesignede didaktiske situasjonen ble testet gjennom en sammenligning av a priori og a posteriori analyser. Det empiriske materialet består av: dokumentasjon av intensjonen om at elevene skal lære målkunnskapen, inkludert mine antakelser og hypoteser (gjort a priori); observasjon av implementering av den didaktiske situasjonen; elevløsninger; og elevintervjuer.

Resultatene fra analysen indikerer at elevenes muligheter for å nå den tilsiktede målkunnskapen var påvirket av fire ulike aspekter. Det første aspektet omhandler muliggjørende trekk ved miljøet, og er materialisert gjennom to fenomener: elevers interaksjon med det materielle miljøet; og matematisk diskusjon og samtale. Det andre aspektet omhandler forhindrende trekk ved miljøet, og er materialisert gjennom to fenomener: antatt kompetanse hos elevene; og manglende feedbackpotensial i oppgaver. Det tredje aspektet omhandler muliggjørende lærerhandlinger, og er materialisert gjennom to fenomener: potensielle oppfølgingsspørsmål; og reguleringer. Det fjerde aspektet omhandler forhindrende lærerhandlinger, og er materialisert gjennom to fenomener: identifisert svakhet i epistemologisk analyse; og didaktisk transposisjon (oversettelse av matematisk kunnskap til skolekontekst).

Mer overordnet bidrar prosjektet med økt kunnskap og innsikt i designutvikling og implementering av undervisningssituasjoner, hvor målet er at elevene skal lære en spesifikk matematisk kunnskap. Den viser også hvordan epistemologiske analyser kan benyttes som didaktiske verktøy hvor læreren får dra nytte av og utviklet sin faglige kompetanse.

Abstract

In this master thesis, I report from a study about design and implementation of a self-designed didactical teaching situation that deals with algebra and generalisation of shape patterns. I have used Strømskag's (2017b) model for instructional design in mathematics for development and design of the teaching situation. The theory of didactical situations in mathematics have been used to understand aspects within the teaching situation which has influenced the students' possibilities to reach the target mathematical knowledge. The target knowledge of this project was developing a formula for the sum of the n first square numbers. The participants in the study were twelve students from the mathematics course matematikk R2. The validity of the self-designed didactical situation was tested through a comparison of a priori and a posteriori analysis. The empirical material consists of: documentation of the intention that the students would learn the target knowledge, including my assumptions and hypotheses (made a priori); observation of implementation of the didactical situation; student solutions; and student interviews.

The results from the analyses indicate that the student's possibilities to reach the target knowledge was influenced by four aspects. The first aspect concerns enabling features with the milieu and is materialised in terms of two phenomena: students' interaction with the materialised milieu; and mathematical discussion and conversation. The second aspect concerns preventing features with the milieu and is materialised in terms of two phenomena: students supposed proficiency; and constrained feedback potential in exercises. The third aspect concerns enabling teacher actions and is materialised in terms of two phenomena: potential follow-up questions; and regulations. The fourth aspect concerns preventing teacher actions and is materialised in terms of two phenomena: identified weakness in epistemological analysis; and didactical transposition (translation of mathematical knowledge to school context).

Overall, the project contributes to increased understanding and insight to development of design and implementation of teaching situations, where the aim is that students teach a specific mathematical knowledge. It also shows how epistemological analysis can be used as didactical tools where the teacher will benefit from and develop her professional skills.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Det faglige temaet for denne oppgaven er algebra og generalisering av figurmønstre. I den norske læreplanen er algebra inkludert i et av hovedområdene fra og med 5. trinn.[1] Algebra er altså et viktig tema i norsk skole. Likevel skårer norske elever dårlig i algebra på ulike internasjonale tester. Eksempelvis viser resultater fra *Trends in International Mathematics and Science Study* [TIMSS, 2015] at norske elever (4./5. trinn og 8./9. trinn) presterer svakt i algebra sammenlignet med gjennomsnittet (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016). Prestasjonen i algebra er også betydelig lavere enn andre hovedområder som statistikk, tall og geometri. Resultater fra *Programme for International Student Assessment* [PISA, 2012] viser at norske elever (i alderen 15 år) skårer litt under gjennomsnittet i matematikk sammenlignet med de 34 OECD-landene (Kjærnsli & Olsen, 2013). PISA 2012 viser i tillegg at norske elever skårer spesielt lavt innenfor oppgaver knyttet til formell kompetanse, hvorav algebra er et sentralt kunnskapsområde.

Dette indikerer at økt forståelse og innsikt i undervisning og læring av algebra er relevant. I høst gjennomførte jeg derfor en pilotstudie hvor jeg undersøkte mulige utfordringer R2-elever[2] kan møte i arbeidet med generalisering av figurmønstre. Et sentralt funn fra denne studien er at oppgavedesign er viktig, da manglende feedbackpotensiale i oppgaver kan være med å begrense hvorvidt elevene når den tilsiktede målkunnskapen. Dette er funn som samsvarer med annen forskningslitteratur: det er ikke nødvendigvis generalisering av figurmønstre som er problemet, men snarere oppgaveformuleringene og måten temaet undervises på (Strømskag Måsøval, 2011; Noss, Healy & Hoyles, 1997; Moss & Beatty, 2006).

1.1 Formål og forskningsspørsmål

Sett i lys av situasjonen beskrevet ovenfor hadde jeg derfor et ønske om å få økt innsikt og kunnskap om hvordan matematikkoppgaver og undervisningssituasjoner i algebra kan designes med mål om å muliggjøre kunnskapsutvikling hos elever. Denne oppgaven baserer seg derfor på en egendesignet didaktisk situasjon inspirert av Strømskag (2017b) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk. Denne modellen bygger på følgende prinsipp: Gitt en målkunnskap, så designes en situasjon med et tilhørende problem som kan løses på en optimal måte med målkunnskapen. Metodologien jeg har fulgt kan deles inn i fire faser: En epistemologisk og didaktisk analyse; design av didaktisk situasjon (basert på en a priori

[1] «Tall og algebra» er et av hovedområdene for 5.-10.trinn, 1T, 1P, 1T-Y og 1P-y; «Tall og algebra i praksis» er et av hovedområdene for 2P og 2P-Y; og «Algebra» er et hovedområde for S1, S2, R1 og R2 (Utdanningsdirektoratet [UDIR], 2006).

[2] Matematikk R2 er et teoretisk rettet programfag for elever på sitt tredje år i videregående skole.

analyse); realisering i klasserommet; og en a posteriori analyse. Validiteten til den egendesignede didaktiske situasjonen er testet gjennom en sammenligning av a priori og a posteriori analyser. Det teoretiske rammeverket som har latt meg forutse, forstå og analysere ulike didaktiske fenomen er teorien for didaktiske situasjoner i matematikk [TDS].

Målet med dette prosjektet var å teste validiteten til en egendesignet didaktisk undervisningssituasjon der elevene skulle utvikle en formel for summen av de *n* første kvadrattallene. Forskningsspørsmålet for denne studien har derfor vært:

Hvilke aspekter ved en designet undervisningssituasjon påvirket elevenes muligheter for å nå den tilsiktede målkunnskapen?

I analysen var det særlig relasjonen mellom tre aspekter som var av interesse; Kunnskapen som skulle læres; den egendesignede situasjonen og implementeringen i klasserommet; og interaksjonen mellom meg (som lærer), elevene og miljøet i deres arbeid med oppgavene.[3]

1.2 Oppgavens oppbygning

I det neste kapitlet vil jeg presentere studiens teoretiske rammeverk. Først vil jeg forklare generelt om TDS, deretter vil jeg forklare sentrale begreper ved teorien som er relevant for min studie. I Kapittel 3 vil jeg forklare metodologien jeg har benyttet i studien. Dette baserer seg på Strømskag (2017b) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk, og didaktisk ingeniørvirksomhet (Artigue, 2015). I metodekapitlet vil jeg også forklare og begrunne valg jeg har gjort i forbindelse med datainnsamlingen og utvalg av forskningsdeltakere, samt beskrive hvordan datamaterialet har blitt analysert. I Kapittel 4 vil jeg introdusere resultatet av en egendesignet fundamental situasjon, samt gi en kort overordnet oppsummering av realiseringen i klasserommet. I Kapittel 5 vil resultatene presenteres og diskuteres gjennom en sammenligning av a priori og a posteriori analyser (altså se på relasjonen mellom *intensjonen* og *resultatet* med den designede situasjonen). Kapittel 6 vil ta for seg en oppsummering av studiens funn. Avslutningsvis vil jeg i Kapittel 7 komme med didaktiske refleksjoner og perspektivering av studien.

[3] Begrepet *miljø* vil defineres i Kapittel 2.

2 Teoretisk rammeverk: Teorien for didaktiske situasjoner i matematikk

Det teoretiske rammeverket for denne oppgaven er Guy Brousseaus teori for didaktiske situasjoner i matematikk (Brousseau, 1997). TDS er utviklet i Frankrike fra 1970-årene, og handler om de didaktiske relasjonene mellom deltakerne og faktorene som inngår i en undervisningssituasjon (Strømskag, 2017a). Dette gjør teorien egnet for å forstå hvilke aspekter ved en didaktisk undervisningssituasjon som muliggjør og kompliserer elevenes muligheter for å nå den tilsiktede målkunnskapen (Artigue, Haspekian & Corblin-Lenfant, 2014).

TDS baserer seg på å lage en (fundamental) *situasjon* hvor det vil være nødvendig å bruke den tilsiktede målkunnskapen for å finne den optimale løsningen på et (eller flere) problem(er) knyttet til situasjonen. Rammeverket er med andre ord egnet når elevene skal lære noe spesifikt, og forutsetter en epistemologisk antakelse om at denne spesifikke målkunnskapen kan representeres via situasjonen som designes (Strømskag, 2017a). Det er derfor nødvendig å identifisere hvilke betingelser som må innfris for at situasjonen leder til den ønskede målkunnskapen.

I TDS er det matematikken og dens epistemologi som står i sentrum (Artigue et al., 2014). Likevel er det to viktige prinsipper ved teorien som representerer elevperspektivet: det første er at elevene opplever at oppgaven har en *hensikt* og en *anvendelse*; og det andre baserer seg på at elevenes engasjement med oppgaven påvirkes av *miljøet* (den materielle og intellektuelle virkeligheten elevene opererer på) snarere enn læreren (Strømskag, 2017b).

2.1 Begreper i TDS som er relevante for studien

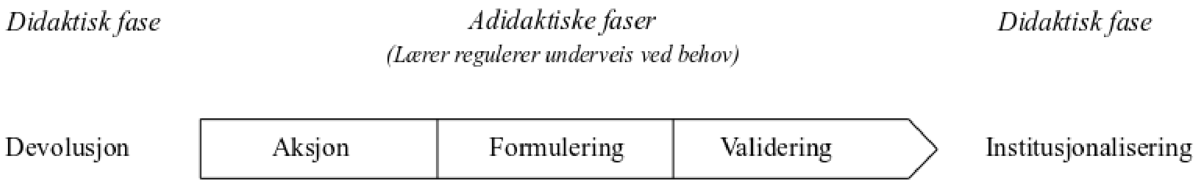
Det er mange sentrale begreper i TDS. I det følgende vil jeg beskrive nærmere de som er relevante for min studie.

En *adidaktisk situasjon* beskrives av Strømskag (2017a) som en situasjon der elever løser et problem, uten veiledning fra læreren og uten mål om å finne lærerens intensjon med oppgaven. *Miljøet* innebærer de faktorene som påvirker elevenes læring og som er knyttet til målkunnskapen. Dette kan eksempelvis være konkreter, tidligere kunnskap, oppgavetekst og medelever (Artigue et al., 2014). En forutsetning for at den adidaktiske situasjonen skal bidra til læring, er at miljøet har et *adidaktisk potensial*. I dette ligger det at elevene kan finne løsningen på problemet ved å operere på miljøet. Dette krever at miljøet bidrar med *feedback* til elevene, både når svaret deres er tilstrekkelig med tanke på den tilsiktede målkunnskapen og motsatt.

Det er læreren som har ansvar for å *devoluere* den adidaktiske situasjonen til elevene. Dette innebærer å introdusere problemet og situasjonen, informere om kjørereglene og organisere den didaktiske kontrakten (Strømskag, 2017a). Begrepet *didaktisk kontrakt* omhandler de regler knyttet til den tilsiktede målkunnskapen som regulerer interaksjonen mellom læreren og elevene. Gjennom disse reglene dannes det gjensidige forpliktelser og felles forventninger mellom deltakerne som inngår i undervisningssituasjonen. Noen av reglene er eksplisitte, mens de fleste er implisitte. Målet med den didaktiske kontrakten er å få studentene til å overta ansvaret for å løse problemet for den adidaktiske situasjonen. Sammen med en adidaktisk situasjon utgjør den didaktiske kontrakten det som kalles for en *didaktisk situasjon* (Artigue et al., 2014).

Etter devolusjonen følger det fire situasjoner (faser) hvor lærerens rolle endres og elevenes kunnskap gradvis utvikler seg i en mer eksplisitt og formell retning. De tre første fasene (aksjonssituasjon, formuleringssituasjon og valideringssituasjon) er ideelt sett adidaktiske, mens den siste fasen (institusjonaliseringen) i likhet med devolusjonen er en didaktisk fase. *Aksjonssituasjonen* er når elevene engasjerer seg av den tiltenkte oppgaven uten at læreren innblander seg (Strømskag, 2017b). Elevene utvikler en implisitt modell av kunnskapen, som senere skal representere den fundamentale situasjonen og guide dem i videre beslutninger. I *formuleringssituasjonen* handler det om å formulere en strategi slik at en medelev forstår og kan utføre samme strategi selv på problemet. Lærerens rolle i denne fasen er å synliggjøre ulike strategier som har oppstått i klasserommet. I *valideringssituasjonen* skal elevene forklare et fenomen eller verifisere en formodning. Dette er en fase hvor læreren kommer mer på banen. Læreren skal ikke si hva som er rett eller galt, men framtre som en ordstyrer i en vitenskapelig debatt. *Institusjonaliseringen* er der læreren sørger for at den tilsiktede målkunnskapen generaliseres slik at den også kan brukes utenfor situasjonen hvor den er utviklet (Strømskag Måsøval, 2011). Dette innebærer å introdusere en formell, matematisk terminologi, samt trekke frem relevante matematiske resultater og definisjoner.

Figur 1 er en modell av forløpet i en (ideell) undervisningssituasjon basert på TDS. Innledningsvis devoluerer læreren den adidaktiske situasjonen. Deretter følger de tre adidaktiske fasene, hvor læreren underveis håndterer utviklingen av de adidaktiske miljøene og sørger for progresjon i kunnskapen. Til slutt er intensjonen at læreren skal institusjonalisere kunnskapen. Undervisningssituasjonen er ikke fastlåst, og det kan forekomme reguleringer (endringer) underveis.



Figur 1. Modell av forløpet i undervisningssituasjonen.

3 Metode

Målet med dette prosjektet var å teste validiteten til en egendesignet didaktisk situasjon der elevene skulle utvikle en formel for summen av de n første kvadrattallene. Forskningsspørsmålet jeg søkte å finne svar på er: «Hvilke aspekter ved en designet undervisningssituasjon påvirket elevenes muligheter for å nå den tilsiktede målkunnskapen?» Metodologien jeg har benyttet til å designe situasjonen bygger på Strømskag (2017b) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk. I tillegg har jeg utvidet metodologien for instruksjonsdesign til et forskningsdesign. Dette innebærer at jeg inkluderer *observasjon og datainnsamling* og *a posteriori analyse og validering* som to faser i min metodologi. Validiteten til den designede situasjonen er testet gjennom en sammenligning av a priori og a posteriori analyser. Dette medfører at metodologien jeg følger har karakteristiske trekk fra *didaktisk ingeniørvirksomhet* (Artigue, 2015; Strømskag, 2017b).

Innledningsvis i dette kapitlet vil jeg beskrive Strømskag (2017) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk, inkludert utvidelsene nevnt ovenfor. Jeg vil også forklare kort hvilke karakteristiske trekk metodologien har fra pedagogisk designforskning. Deretter vil jeg gjøre rede for valg av forskningsdeltakere, pilotering og gjennomføring av datainnsamling. Til slutt vil jeg beskrive hvilke analysemetoder jeg har benyttet meg av, samt diskutere etiske betraktninger og min rolle i forskningsprosjektet.

3.1 TDS - instruksjonsdesign i matematikk

Metodologien i denne oppgaven bygger på Strømskag (2017b) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk. Denne modellen baserer seg på design og realisering av en situasjon som bevarer mening for en spesiell del av en matematisk kunnskap (Strømskag, 2017b). Modellen er illustrert i Figur 2. I det følgende vil jeg forklare nærmere de ulike fasene i modellen.

3.1.1 Design

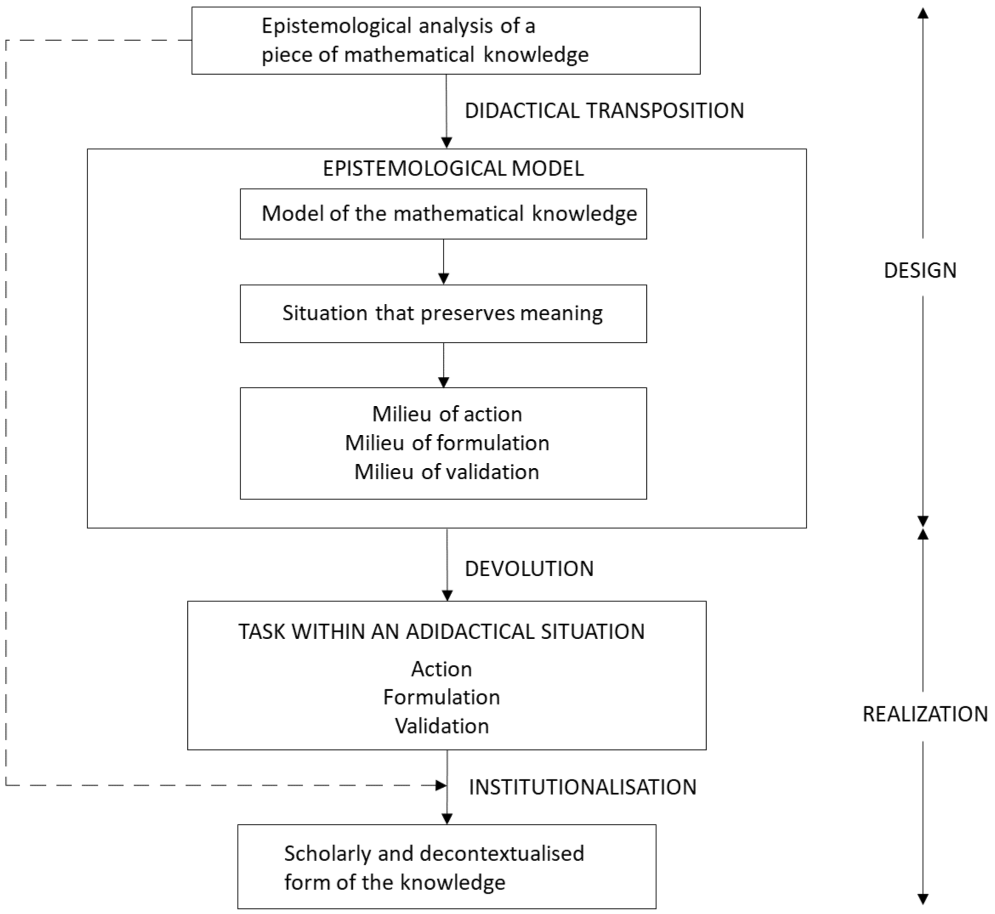
Den første fasen i instruksjonsdesignet baserer seg på å foreta en *epistemologisk analyse* av den tilsiktede kunnskapen (Strømskag 2017b). Dette innebærer både en analyse av den matematiske kunnskapen, samt en didaktisk analyse hvor man studerer nærmere hva annen forskning på området viser. Hensikten med analysen av den matematiske kunnskapen er blant annet å identifisere mulige epistemologiske hindringer, og bevisstgjøre seg over hvilke betingelser som vil føre til at elevene må *anvende* målkunnskapen.

I neste fase skal det utvikles en *epistemologisk modell* som baserer seg på den epistemologiske analysen. Denne modellen innebærer både en *modell av målkunnskapen* (eksempelvis en ikonisk representasjon), en *meningsfylt situasjon* og egnede *miljøer* for de tre (tiltenkte) adidaktiske fasene: aksjon, formulering og validering (Strømskag 2017b). Miljøene utvikles med mål om at elevenes kunnskap gradvis utvikler seg til mer eksplisitte matematiske former. Gjennom den epistemologiske analysen har man belyst hvilke matematiske inngrep som foregår, og miljøene kan dermed tilpasses med tilstrekkelig feedback slik at elevene til slutt tilegner seg den tilsiktede målkunnskapen.

3.1.2 Realisering

Den første fasen i realiseringen beskriver en a priori analyse av *implementeringen* i klasserommet (Strømskag, 2017b). Dette innebærer både *devolusjon* av en adidaktisk situasjon basert på den epistemologiske modellen, og *interaksjonen* mellom elevene og miljøene for de tre (tiltenkte) adidaktiske fasene: aksjon, formulering og validering. Artigue (2015) hevder implementeringen av designet ofte krever tilpasninger underveis. Dette medfører at læreren, som skal håndtere utviklingen av de adidaktiske miljøene, med fordel kan forberede eventuelle oppfølgingsspørsmål å stille elevene dersom oppgavene ikke har tilfredsstillende feedback.

Den siste fasen i realiseringen omhandler *institusjonaliseringen*. Løsningene på oppgavene skal institusjonaliseres til skolekontekst og dekontekstualisert kunnskap. Strømskag (2017b) beskriver dette som en didaktisk fase nært knyttet til den epistemologiske analysen, noe som illustreres av de stiplete linjene i Figur 2. Hensikten her er altså å bevisstgjøre elevene på den matematiske kunnskapens plass og viktighet også utenfor situasjonen hvor den ble utviklet.



Figur 2. Modell for instruksjonsdesign i matematikk. Hentet fra Strømskag (2017b, s. 912).

3.2 A priori og a posteriori analyser

For å svare på forskningsspørsmålet i dette prosjektet, som er en validering av den designede situasjonen, utføres det en a priori analyse og en a posteriori analyse. Valideringen innebærer en sammenligning av disse analysene.

A priori analysen baserer seg på den epistemologiske modellen, og planleggingen av implementeringen (devolusjon, regulering, institusjonalisering). I tillegg til å tydeliggjøre ulike valg som er gjort i designutviklingen, skal a priori analysen identifisere de didaktiske variablene som kan være med å påvirke elevenes muligheter for å nå den tilsiktede målkunnskapen. *Didaktiske variabler* representerer de variabler som potensielt kan påvirke elevenes læringsutbytte og som læreren kan kontrollere (Artigue, 2015). Hensikten med a priori analysen er altså å utvikle formodninger angående mulige utviklinger av situasjonen, elevenes interaksjon med miljøet, elevers løsningsstrategier og gradvise kunnskapsutvikling, og utviklingen av en didaktisk kontrakt mellom lærer og elever (Artigue, 2015). Både Artigue (2015) og Strømskag (2017b) presiserer viktigheten av at a priori analysen tar utgangspunkt i en *generisk og epistemisk elev*. Det er altså den generiske og epistemiske elevens muligheter for å utvikle den tilsiktede målkunnskapen som er i fokus, sett fra et epistemologisk perspektiv.

I etterkant av realiseringen gjennomføres en *a posteriori analyse*. Artigue (2015) beskriver dette som en analyse hvor man ser nærmere på *hva som skjedde* under realiseringen i klasserommet. Skjedde det noe som ikke var forutsett og planlagt? Gav de (tiltenkte) adidaktiske miljøene elevene nok feedback med tanke på om de var på rett vei eller ikke? Hvilke reguleringer ble det behov for underveis? A posteriori analysen baserer seg med andre ord på datamaterialet fra realiseringen i klasserommet (Margolinas & Drijvers, 2015).

3.3 Trekk fra pedagogisk designforskning

Metodologien jeg benytter har karakteristiske trekk fra *pedagogisk designforskning*. Pedagogisk designforskning har som mål å optimalisere pedagogiske tiltak som kan fremme bedre læring og undervisning (Van den Akker, Gravemeijer, McKenney & Nienke Nieveen, 2006). Dette gjennomføres via systematiske undersøkelser av prosesser knyttet opp mot utvikling, utprøving og evaluering av undervisningssituasjoner (Bjørndal, 2013). Dette tilsvarer a priori analyse, realisering i klasserommet og a posteriori analyse i mitt forskningsprosjekt. Både didaktisk ingeniørvirksomhet og pedagogisk designforskning baserer seg på redesign og gjentakende gjennomføring. Denne masteroppgaven har derimot rammer som gjorde det kompliserende og nærmest praktisk umulig å gjennomføre et redesign og ny utprøving. Jeg ville blant annet måtte skaffe tilgang til en annen R2-klasse, i tillegg til at det ville krevd tid å gjennomføre en ny utprøving med følgende transkripsjoner og analyser. Da jeg bare hadde et semester tilgjengelig for å gjennomføre masterprosjektet, ville dette vært en urealistisk målsetting. Som en konsekvens av disse institusjonelle rammene testet jeg derfor ut opplegget bare én gang. I diskusjonen vil jeg derfor kun skissere alternativer for eventuelle svakheter i egendesignede oppgaver, adidaktiske miljøer og realiseringen i klasserommet. Jeg har ikke undersøkt empirisk hvorvidt alternativene gir tilstrekkelig feedback i adidaktiske situasjoner for den definerte målkunnskapen.

3.4 Pilotering

I forkant av realiseringen i klasserommet valgte jeg å pilotere oppgavene jeg designet på en venninne som har gått grunnskolelærerutdanning 5.-10. trinn. Lærerstudenten hadde matematikk S2 som høyeste nivå på videregående skole, i tillegg til at hun hadde skrevet bacheloroppgave i matematikk ved grunnskolelærerutdanningen. Da jeg piloterte situasjonen på henne, hadde det gått to år siden hun hadde jobbet med matematikk. Jeg vurderte derfor hennes kompetansenivå som forholdsvis likt kompetansenivået som kan forventes hos en R2-elev. Hensikten med piloteringen var å få et innblikk i vanskelighetsnivået ved oppgavene, se om oppgaveformuleringene gav mening for elevene, og om tidsrammen var realistisk. Under piloteringen oppførte jeg meg som en diskusjonspartner for lærerstudenten, men lot henne stå for oppdagelsene og utviklingen av kunnskapen. Erfaringer fra denne piloteringen førte til at jeg gjorde små endringer i enkelte oppgaveformuleringer. Jeg uthevet blant annet sentrale begreper for å tydeliggjøre hva oppgaver spurte etter. Jeg oppdaget også at én av oppgavene manglet direkte koblinger til figurmønstrene og den fundamentale situasjonen. Jeg la derfor inn en setning som forklarte denne sammenhengen.

3.5 Utvalg av forskningsdeltakere

Jeg sendte forespørsel om å få gjennomføre mitt eksperiment ved en videregående skole i Nord-Norge, og fikk da positiv respons fra en matematikklærer som underviste matematikk R2. Realiseringen av den designede situasjonen ble gjennomført i hennes R2-klasse med 12 elever. Siden jeg ikke hadde kjennskap til elevgruppen, lot jeg faglærer i forkant av datainnsamlingen få ansvaret for å dele elevene inn i grupper på tre.

Jeg registrerte videoopptak av kun to av gruppenes arbeid i de adidaktiske situasjonene: Gruppe 1 bestående av Karoline, Mari og Arne; og Gruppe 2 bestående av Rolf, Kristoffer og Magne. Videre gjennomførte jeg individuelle intervju med Karoline, Arne og Kristoffer. Gruppe 3 (bestående av Per, Espen og Didrik) og Gruppe 4 (bestående av Kaja, Petter og Anne) var med i valideringssituasjonen og institusjonalisering (helklassesekvenser hvor det ble registrert videoopptak). En grundigere beskrivelse av observasjon og intervju er gitt i Kapittel 3.6.

På grunn av tidspress (for læreren og klassen) og stort pensum kunne faglæreren og klassen kun sette av 90 minutter for meg til å gjennomføre mitt eksperiment. Disse institusjonelle rammene satte begrensninger for hvordan jeg kunne legge opp undervisningssituasjonen. Elevene hadde ikke arbeidet med algebra og generalisering av figurmønstre tidligere i dette matematikkfaget. Mitt eksperiment ble dermed benyttet som introduksjon til dette temaet.

3.6 Gjennomføring av datainnsamling

For å finne svaret på om intensjonen med den egendesignede situasjonen gav ønsket resultat har jeg valgt å hente inn datamateriale fra tre ulike datakilder: Observasjon, elevløsninger og intervju. En slik kombinering av ulike datakilder kalles for *datatriangulering*, og kan være med på å øke validiteten i en studie (Denzin, 1997). Instrumentene for datainnsamlingen var det materielle miljøet (inklusive egendesignede oppgaver), to videokameraer, meg selv i lærerrollen og en intervjuguide (Vedlegg A).

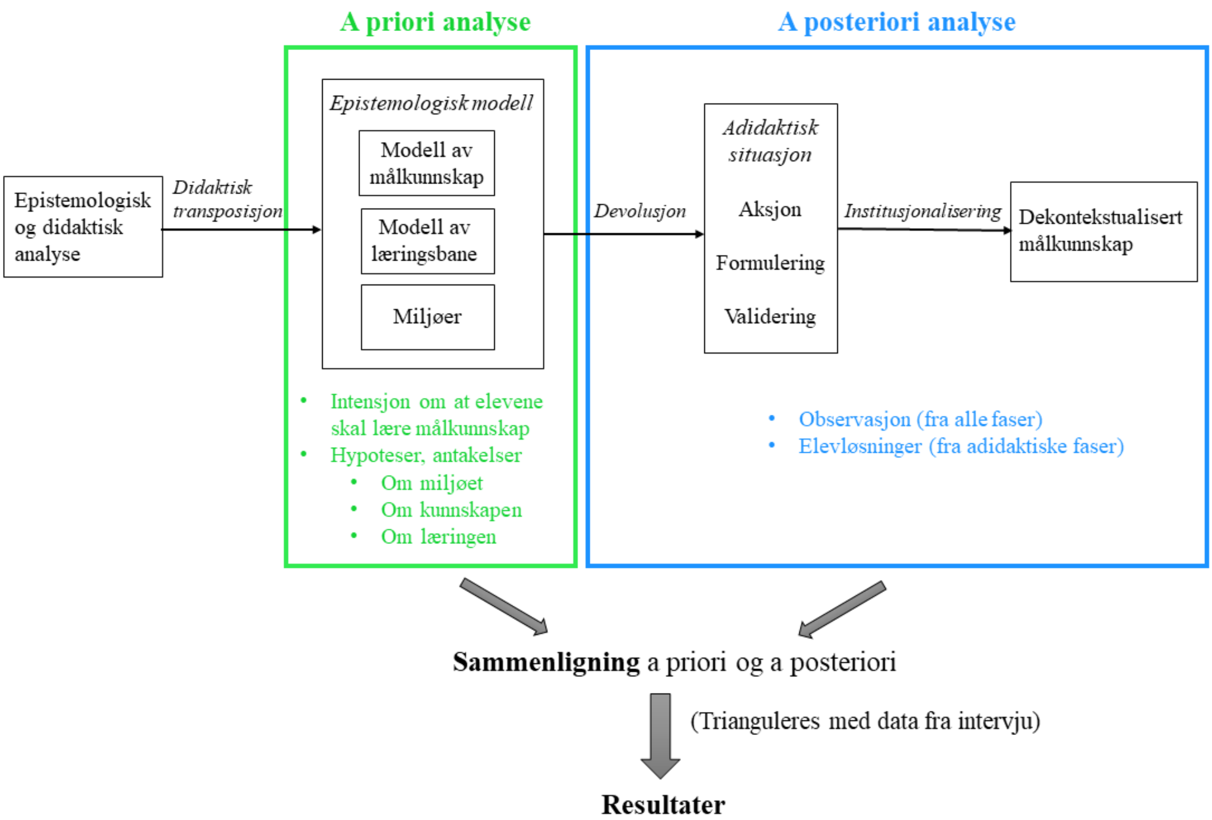
På grunn av oppgavens omfang gjorde jeg kun videoopptak av to grupper under de (tiltenkte) adidaktiske fasene. Jeg satte opp videokamera på et stativ ved enden av bordet, slik at jeg fikk med både elevene og bordplatene. Dette gav meg mulighet til å se når forskningsdeltakerne noterte ned, hvordan de brukte det materielle miljøet som var tilgjengelig og hvordan interaksjonen innad i gruppene fungerte. I tillegg filmet jeg helklassesekvensene. Et videokamera var da vendt mot elevene, og et annet mot meg og tavla. I etterkant av gjennomføringen samlet jeg også inn oppgavene og notatene til samtlige fire grupper. Oppsettet av videokameraene gjorde at det ble vanskelig å se hva forskningsdeltakerne noterte underveis. Ved å ta inn notatene i etterkant hadde jeg mulighet til å hente inn den manglende informasjonen i transkripsjonsarbeidet fra gruppene som ble filmet, samt få et innblikk i hvordan de resterende to gruppene hadde resonnert og hva de hadde kommet frem til.

For å få et bedre innblikk i elevenes tanker og refleksjoner rundt undervisningsopplegget, ønsket jeg å intervjue et utvalg elever i etterkant av realiseringen. Fire elever meldte seg på forhånd frivillig til å delta i intervju. Disse ble derfor fordelt på gruppene som ble filmet. Det ble bare gjennomført intervju med tre av elevene, da den ene trakk seg. Intervjuene måtte foregå utenom undervisning. For å tilpasse meg elevenes timeplaner ble det derfor gjennomført individuelle intervju. Intervjuet med Karoline ble utført senere samme dag (09.03.18), Arne ble intervjuet neste skoledag (12.03.18), og Kristoffer ble intervjuet tre skoledager etter implementeringen (14.03.18). Varigheten på intervjuene varierte mellom 10 og 25 minutter. Jeg valgte en *semi-strukturert tilnærming* for intervjuene (Sollid, 2013). I forkant av intervjuene hadde jeg utarbeidet temaer og spørsmål, hvorav noen av spørsmålene baserte seg på elevbesvarelsene og egne observasjoner fra implementeringen. I intervjuene med Arne og Kristoffer hadde jeg i tillegg rukket å utarbeide spørsmål som baserte seg på det jeg hadde sett på videoopptakene. Jeg lot rekkefølgen av spørsmålene bestemmes av hvilken retning de ulike intervjuene tok. I tillegg stilte jeg oppfølgingsspørsmål der jeg fant det naturlig. Oppfølgingsspørsmål trekkes av Postholm og Moen (2009) frem som essensielle for å få utfyllende svar. Spørsmålene som ble stilt var koblet opp mot oppgaveteksten og situasjonen som var designet. Se Vedlegg A for intervjuguide. Under intervjuene valgte jeg i tillegg å benytte meg av *stimulated recall* (Calderhead, 1981). Jeg hadde med det materielle miljøet fra realiseringen (oppgavetekst og gruppens notater) og fikk elevene til å reflektere rundt dette.

3.7 Analysemetode

Analyseprosessen kan deles inn i seks faser. Etter å ha transkribert videoopptakene startet jeg med å lese gjennom datamaterialet (983 vekslinger). For å tydeliggjøre for meg selv hvilke deler av datamaterialet som var mest relevant for å besvare forskningsspørsmålet, lagde jeg en oversikt over målsettingene (fra a priori analysen) og la framfor meg (Fase 1). Denne oversikten innebar målsetting for oppgavene og realiseringen (devolusjon, regulering og institusjonalisering). Deretter gikk jeg systematisk gjennom datamaterialet og noterte på «post-it»-lapper forklaringer på elevenes prosesser og utvikling i de ulike fasene (Fase 2). Målet med dette var å finne svar på hva som foregår med tanke på å løse oppgavene. Dette medførte at transkripsjonene ble inndelt i meningsbærende segmenter, og jeg fikk redusert datamaterialet. Nå hadde jeg oversikt over resultatene og kunne utvikle a posteriori analysen.

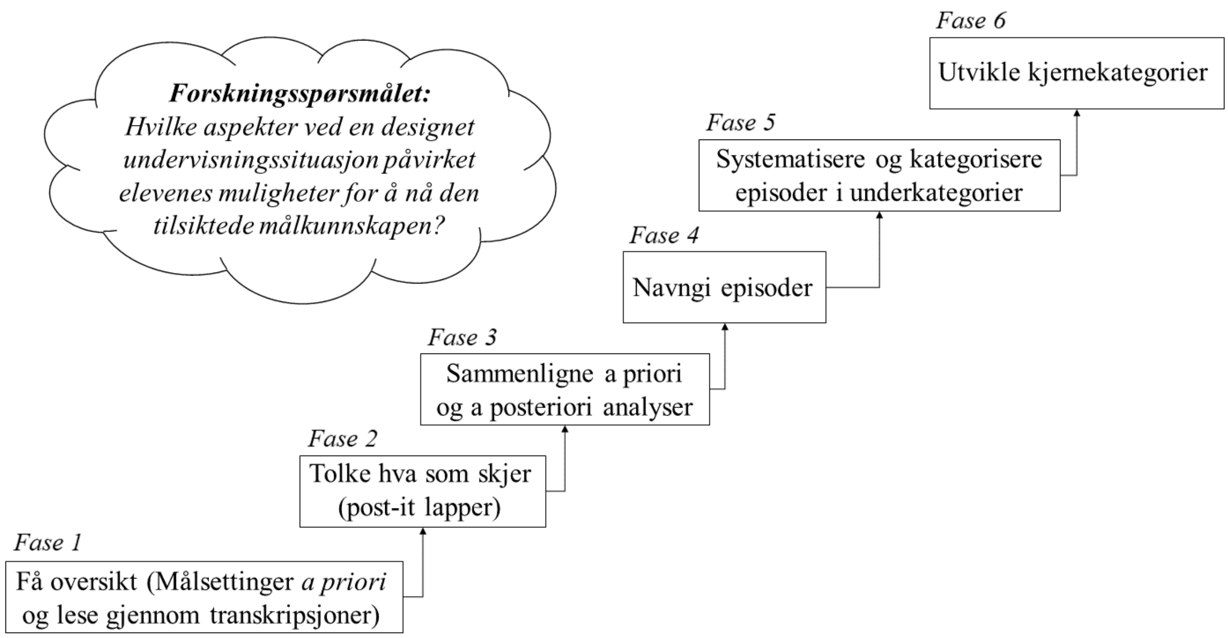
Valideringen av forskningsprosjektet er en sammenligning av *a priori* og *a posteriori analyser* (Artigue, 2015; Margolinas & Drijvers, 2015). Valideringen omhandler med andre ord relasjonen mellom *intensjonen* og *resultatet* med den designede situasjonen. Figur 3 illustrerer hvilke data som stammer fra a priori og a posteriori analyse.



Figur 3. Oversikt over analysemetode.

Etter å ha sammenlignet a priori og a posteriori analyse (Fase 3) var det tretten episoder ved den designede undervisningssituasjonen som utpekte seg med tanke på elevenes muligheter for å nå den tilsiktede målkunnskapen. Noen episoder utpekte seg fordi de gav indikasjoner på at mine hypoteser og antakelser (gjort a priori) samsvarte med resultatene, og andre fordi det var et gap mellom intensjon og resultat. For å systematisere disse funnene videre valgte jeg å analysere datamaterialet etter den konstant komparative analysemetoden (Robson & McCartan, 2016). Det første jeg da gjorde var å gi episodene som utpekte seg beskrivende navn (Fase 4). Det neste jeg gjorde var å samle episodene som hadde tilknytning til hverandre i ulike kategorier (Fase 5). I løpet av denne prosessen fant jeg det hensiktsmessig at noen episoder ble samlet i beskrivende underkategorier, mens andre episoder selv ble klassifisert som underkategorier. Til sammen ble det utviklet åtte underkategorier: fire omhandlet miljøet (inndelt i tre nivåer), og fire omhandlet lærerhandlinger (inndelt i to nivåer). Denne klassifiseringen kommer som følge av at underkategoriene som omhandler lærerhandlinger forklarer dekkende hva som skjer, slik at jeg ikke fant det nødvendig å dele opp underkategoriene i mindre segmenter. Fra de åtte underkategoriene utviklet jeg igjen fire kjernekategorier (Fase 6): Muliggjørende trekk ved miljøet; forhindrende trekk ved miljøet; muliggjørende lærerhandlinger; og forhindrende lærerhandlinger.

En oversikt over analyseprosessens seks faser er gitt i Figur 4. I Kapittel 6 vil funnene oppsummeres i et flytdiagram (se Figur 25). Grunnen til at jeg venter med å presentere funnene fullstendig, er at jeg først ønsker å introdusere den egendesignede situasjonen.



Figur 4. Oversikt over analyseprosessens seks faser.

3.8 Etiske betraktninger

På grunn av videoopptak av elever ble prosjektet meldepliktig til NSD. Søknaden ble godkjent med prosjektnr. 58387 (se NSDs godkjenning i Vedlegg B). I forkant av datainnsamlingen ble elevene godt informert om forskningsprosjektet mitt, både muntlig og skriftlig. I informasjonen gitt muntlig la jeg vekt på at elevene som forskningsdeltakere ville hjelpe meg til å forstå bedre hvilke aspekter ved undervisningssituasjonen som har gjort det mulig å lære den tiltenkte kunnskapen og hvilke faktorer som har vært hindringer. Jeg presiserte også at jeg ikke ønsket å vurdere hvorvidt de løste oppgavene rett eller galt. Samtlige 12 elever i klassen gav sitt samtykke til å delta i mitt forskningsprosjekt (se samtykkeskjema i Vedlegg C). For å ivareta forskningsdeltakernes anonymitet har de fått pseudonymer i transkriberingen i tillegg til at skolens navn er anonymisert.

3.9 Min rolle

Min rolle i dette forskningsprosjektet har vært todelt: jeg har fungert som forskeren som utvikler og evaluerer eksperimentet; og jeg har vært læreren som realiserte undervisningssituasjonen i klasserommet. Jeg har altså tatt del i samtlige ledd i planleggingen, gjennomføringen og evalueringen. Jeg har derfor forsøkt å være bevisst på egen subjektivitet gjennom prosjektets ulike faser.

På grunn av den epistemologiske analysens sentrale rolle i TDS, fant jeg det mest hensiktsmessig å gjennomføre eksperimentet med meg selv i lærerrollen. Slik fikk jeg sikret at læreren i forkant hadde brukt tid på a priori analysen, og slik møtte forberedt for de didaktiske fasene. Dette medførte derimot at eksperimentet ble gjennomført med en lærer elevene ikke hadde bekjentskap til på forhånd. I kombinasjon med videokameraer medfører dette at elevene ikke nødvendigvis opplevde undervisningssituasjonen som en *normal* undervisningssituasjon. Når jeg i etterkant av datainnsamlingen har sett gjennom videoopptakene, ser jeg episoder hvor elevene tuller til kamera og er tydelig påvirket av dets tilstedeværelse. Dette kan ha vært en påvirkende faktor for elevenes arbeid, og derav på mitt datamateriale.

Likevel vil jeg hevde forskningsmetoden jeg har valgt er den mest hensiktsmessige, spesielt med tanke på videre bruk av TDS i egen undervisning. Ved å selv delta aktivt i både forskerrollen og lærerrollen, har jeg fått best mulig innblikk i hvordan TDS kan brukes som et didaktisk verktøy for å utvikle undervisningssituasjoner som katalyserer elevenes muligheter for å nå en tilsiktet målkunnskap.

4 Resultat av Designutvikling

I dette kapitlet vil jeg introdusere mitt design og redegjøre for dens utvikling og ulike faser. Designutviklingen vil følge stegene i Strømskags (2017b) modell for instruksjonsdesign i matematikk, presentert i Kapittel 3.

4.1 Epistemologisk analyse

4.1.1 To tilnærminger til algebra i skolen

Radford (1996) skiller mellom to tilnærminger til algebra i skolen: Problemløsning (i form av ligninger som oppstår fra tekstoppgaver) og generalisering av mønstre. Disse to tilnærmingene til algebra tar for seg to ulike mål, som igjen medfører at det logiske grunnlaget i de to tilnærmingene er forskjellige. Målet med *problemløsning* (ligningsløsning) er å finne et ukjent tall. Det logiske grunnlaget vil da være en analytisk prosess, hvor bokstavene opptrer som ukjente, abstrakte objekter som kan manipuleres. Den ukjentes identitet kan avsløres ved å løse ligningen. Målet med *generalisering av mønstre* er å utvikle en formel eller matematisk setning, for så å bevise denne. Det logiske grunnlaget vil med andre ord være en bevisprosess, hvor man beveger seg fra empirisk kunnskap (basert på sammenhenger man kan observere) til abstrakt kunnskap (basert på sammenhenger utenfor det man kan observere empirisk). Bokstavene vil opptre som variable, og den algebraiske tenkningen kan kategoriseres som funksjonstenkning. Radford (1996) hevder elever må stimuleres fra begge tilnærmingene for å utvikle en algebraisk forståelse. Da algebrakapitlene i norske lærebøker i stor grad domineres av problemløsning som tilnærming, har jeg i denne studien valgt å lage en undervisningssituasjon som tar for seg generalisering av mønstre som tilnærming.

4.1.2 Algebraisk tenkning

Flere hevder et tradisjonelt fokus på symbolmanipulasjon uten koblinger til symbolenes mening har medført at elever ofte mangler dybde i deres algebraiske forståelse (Lannin, Barker & Townsend, 2006; Mason, 1996; Kieran, 1992). Eksempelvis hevder Mason (1996) at betydningen til algebra i skolesammenheng ofte er å bruke symboler for å uttrykke og manipulere generaliteter i tallsammenhenger. Lannin et al. (2006) argumenterer derfor for at elevene trenger en referansekontekst (eksempelvis figurmønstre) som kan gi symbolene mening. De hevder derfor generalisering av figurmønstre kan være katalysatoren som gir elevene mulighet til å takle overgangen fra numerisk til algebraisk tenkning. Dette samsvarer med Strømskag (2015), som mener hensikten med generaliserende mønsteraktiviteter er å skape en referansekontekst (enten fysisk, ikonisk eller numerisk) for generalisering og algebraisk tenkning. Ifølge Mason (1996) er det avgjørende at elever arbeider med generalisering og uttrykker egne generaliseringer for at algebraisk tenkning skal finne sted. Dette viser at undervisningsopplegget jeg har utviklet er relevant og viktig, da det legger til rette for algebraisk tenkning hos elevene ved hjelp av koblinger til en referansekontekst (et figurmønster).

4.1.3 Generalisering i matematikk

Kaput (1999) definerer generalisering som utvidelse av resonneringen utenfor selve situasjonen som tas i betraktning, slik at fokuset ligger på mønsteret, strukturen og relasjonene på tvers av og mellom elementene i et figurmønster. Dette medfører at generalisering ikke er et konsept, men en prosedyre som tillater oss å generere et nytt resultat (en konklusjon) basert på observerte sammenhenger (Radford, 1996). Generaliseringsprosesser som didaktisk verktøy vil altså være nært knyttet opp mot rettferdiggjørelse og bevis av resultatene (Radford, 1996; Lannin, 2005; Lannin et al., 2006). Dette kan videre by på utfordringer, da elever gjerne har ulike formeninger om hva som er en god rettferdiggjørelse av en generalitet.

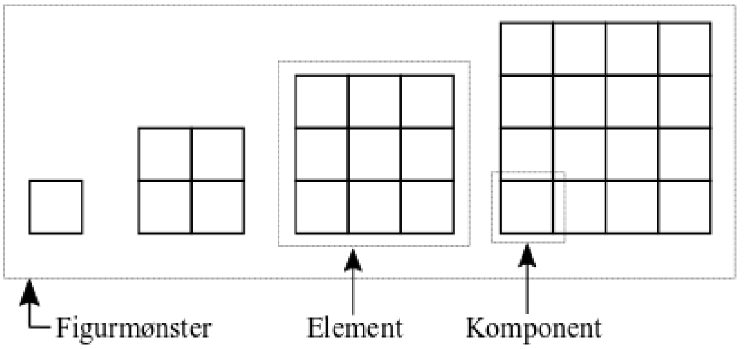
4.1.4 Elevers bevisresonneringer

Balacheff (1988) hevder elevers bevisresonneringer kan deles inn i fire bevisnivåer; naiv empirisme, avgjørende eksperiment, generisk eksempel og tankeeksperiment. De tre første bevisnivåene er såkalte *pragmatiske bevis*, og tar utgangspunkt i konkrete figurer, uttrykk og handlinger. Det siste bevisnivået (tankeeksperiment) kalles for et *begrepsmessig, formelt bevis*, og bygger på strukturer og relasjoner mellom strukturer. Samtlige bevisresonneringer dukker opp i analysen (a priori og/eller a posteriori), og vil derfor forklares nærmere i det følgende.

Bevisresonneringer som baserer seg på å rettferdiggjøre en konklusjon ved å sjekke noen konkrete (enkle) eksempler, karakteriseres av Balacheff (1988) som *naiv empirisme*. Dette hevder Strømskag Måsøval (2011) er en rettferdiggjørelse mange elever ser på som god nok. Andre elever stiller derimot litt høyere krav til en matematisk rettferdiggjørelse, og mener en god begrunnelse er å sjekke ett eller flere «vanskelige» eksempler. I arbeidet med mønstergeneralisering kan dette eksempelvis være å sjekke det hundrede medlemmet i rekka. En slik form for validering kaller Balacheff (1988) for et *avgjørende eksperiment*. De to bevisresonneringene ovenfor anser ikke Balacheff (1988) som fullverdige bevis, men de tas med i kategoriseringen hans da de ofte ansees som gyldige rettferdiggjørelser av elever. *Generiske eksempler* involverer resonneringer hvor argumentasjonen baserer seg på egenskaper til et eksempel. Det generiske eksemplet fungerer dermed som et representativt eksempel for elementene som tas i betraktning, og ansees derfor for et gyldig bevis. Kategorien *tankeeksperiment* innebærer blant annet induksjonsbevis, hvor det matematiske språket brukes som verktøy for logisk deduksjon. I likhet med generiske eksempler ansees tankeeksperiment som gyldige bevis. Balacheff (1988) begrunner dette ved at bevisresonneringen ikke lengre handler om å vise at resultatet er riktig fordi det fungerer, men ved å se på strukturene og egenskapene som er nødvendige for at resultatet skal gi mening.

4.1.5 Figurmønster og algebraisk generalisering

Siden undervisningssituasjonen jeg har designet tar utgangspunkt i figurmønstre og algebraisk generalisering, vil jeg i det følgende forklare nærmere sentrale begreper innenfor disse konseptene. Et figurmønster representerer en sekvens av geometriske konfigurasjoner som utvikles i det uendelige (Strømskag Måsøval, 2011; Strømskag, 2017a). Et eksempel er gitt i Figur 5. En konfigurasjon i mønsteret refereres til som et *element*. Bestanddelene i hvert element (her klosser) kalles igjen for *komponenter*.



Figur 5. De tre første elementene i et figurmønster som tenkes å fortsette i det uendelige.

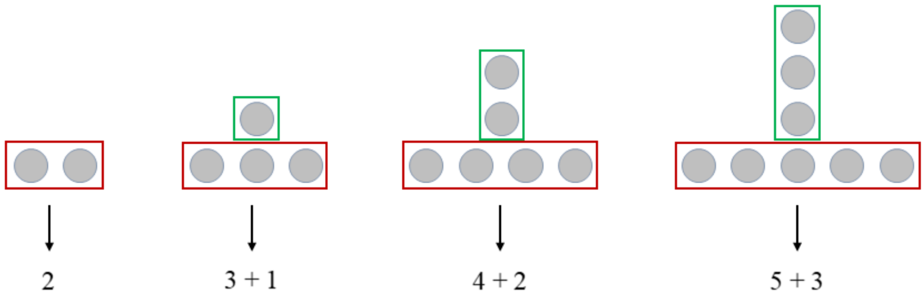
Poenget med å generalisere et figurmønster algebraisk, er å finne et generelt uttrykk for antall komponenter i et vilkårlig element i figurfølgen. Det generelle uttrykket skal være gitt som en formel for antall komponenter i det *n*-te elementet, uttrykt ved hjelp av *n*. Denne formelen vil da representere et generelt uttrykk for det *n*-te elementet i tallfølgen som avbildes fra figurmønsteret. Fra et didaktisk ståsted bidrar figurmønstre med en referansekontekst som legger til rette for algebraisk tenkning, i tillegg til å gi elevene erfaringer om mønstre som matematiske strukturer (Strømskag Måsøval, 2011).

4.1.5.1 Aritmetiske relasjoner

For å kunne generalisere et figurmønster, må man først studere nærmere de aritmetiske relasjonene som finner sted i figurmønsterets struktur (Strømskag Måsøval, 2011). Dette gjøres ved å dekomponere elementene basert på hva som er *fast* og hva som er *variabelt*. Dette kan eksempelvis visualiseres ved å sirkle rundt eller fargelegge repeterende deler (partisjoner) i elementene. Hensikten med dekomponeringen er å uttrykke antallet komponenter i hver partisjon som en funksjon av elementets posisjon i figurmønsteret. Dette skaper igjen aritmetiske uttrykk som representerer det totale antallet komponenter i et element. Ved å generalisere det aritmetiske uttrykket (for å representere antallet komponenter i det *n*-te elementet, uttrykt med variabelen *n*), får man et algebraisk uttrykk hvor tallene er erstattet med bokstaver. Eksempler på mulige dekomponeringer av de første elementene i to ulike figurmønstre, med avbildninger til aritmetiske relasjoner, er illustrert i Figur 6 og Figur 9.

4.1.5.2 To typer figurmønstre

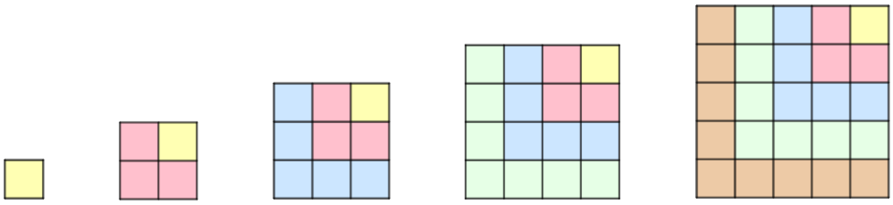
Strømskag Måsøval (2011) deler figurmønstre inn i to typer, karakterisert av hvilket matematisk objekt figurmønstrene sikter til. Den første typen betegnes som *ordinære figurmønstre*. Målet med slike figurmønstre er å uttrykke det *n*-te elementet i tallfølgen som avbildes fra figurmønsteret som en formel. Denne kan representeres både ved en direkte og en rekursiv formel. En direkte formel (ofte kalt eksplisitt formel) uttrykker antall komponenter i element nr. *n* som en funksjon av *n*. En rekursiv formel (også kalt implisitt formel) uttrykker antall komponenter i det generelle uttrykket som en funksjon av det foregående elementet. Et eksempel på et ordinært figurmønster med avbildninger til tallfølgen er gitt i Figur 6. En direkte formel for dette figurmønsteret vil være: $f(n) = (n+1) + (n-1) = 2n$.



Figur 6. En mulig dekomponering av de fire første elementene i et ordinært figurmønster og avbildninger av partisjonene ned til tallfølgen.

Den andre typen figurmønstre Strømskag Måsøval (2011) har identifisert representerer *ekvivalensmønstre*. Slike figurmønstre sikter mot eller har som mål å uttrykke en påstand om ekvivalens mellom to ulike algebraiske uttrykk for det *n*-te elementet i tallfølgen avbildet fra figurmønsteret. Målet med ekvivalensmønstre er altså å ende opp med et teorem (en matematisk setning) som viser en ekvivalens funnet i figurmønsteret. Figurmønsteret i Figur 7 er et eksempel på et slikt ekvivalensmønster. Figuren illustrerer at det *n*-te elementet (*n*-te kvadrattallet) er ekvivalent med summen av de *n* første oddetallene (her illustrert med fargede

L-er). Uttrykt med algebraisk notasjon blir dette $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$ eller $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$.



Figur 7. Ekvivalensmønster som illustrerer ekvivalensen mellom summen av de n første oddetallene og det n-te kvadrattallet.

4.2 Didaktisk analyse

I det følgende vil jeg se nærmere på resultater fra annen forskning innenfor algebraisk generalisering av figurmønstre som er relevant for min studie. Flere studier dokumenterer at elever møter på utfordringer i overgangen fra mønstre og tabeller til algebraiske regler (Strømskag Måsøval, 2011; Lee, 1996; Breiteig & Grevholm, 2006; Lee & Wheeler, 1989). Tilsvarende er det også studier som viser at elevene ikke sjekker validiteten i egne formler (Strømskag Måsøval, 2011; Stacey, 1989; Breiteig & Grevholm, 2006; Lee & Wheeler, 1987; Orton, 1997).

Lee (1996) identifiserer tre ulike nivåer hvor elever kan møte utfordringer; *oppfattelsesnivå* (identifisere mønsteret), *verbaliseringsnivå* (uttrykke mønsteret tydelig) og *symboliseringsnivå* (bruke *n* for å representere posisjonen til et element i følgen, som en funksjon av *n*). Forskningen til Lee (1996) viser også at elevenes utfordringer i hovedsak ikke var å se et mønster, men å se et mønster som var algebraisk brukbart. Med dette mener hun at elevene behersket å tegne det neste elementet i rekka, men at overgangen til å beskrive mønsteret på en presis, matematisk måte var utfordrende.

Breiteig og Grevholm (2006) har i sin studie undersøkt hvordan norske elever på VG1 (både 1P og 1T) løser et gitt problem, og hvilke begrunnelser de gir for sine løsningsstrategier. Resultatene fra studien viser at elevene behersket numeriske oppgaver, men at overgangen fra det aritmetiske til algebra var utfordrende. Dette samsvarer med Lee og Wheeler (1989), som rapporterer om utfordringer hos elever ved koordinering mellom aritmetikk og algebra. For flere elever var det ikke åpenbart at algebra kunne brukes som et verktøy for å generalisere aritmetiske uttrykk. Det var også elever som viste tendenser til å rettferdiggjøre algebraiske utsagn ved å appellere til regler istedenfor å se på strukturen og egenskapene ved utsagnet.

Stacey (1989) rapporterer om utfordringer 140 elever (mellom 9 og 13 år) møtte i arbeidet med lineære generaliseringsoppgaver på formen $f(n) = an + b$. Resultatene fra studien viste at elevene i hovedsak benyttet seg av to metoder som kun ville være anvendbar når det lineære problemet var en direkte proporsjonalitet. Elevene i Staceys (1989) studie oppdaget ikke denne begrensningen, og brukte dermed metodene på oppgaver som ikke var direkte proporsjonaliteter (altså hvor konstantleddet $b \neq 0$). Manglende oppdagelser av feilkilden kom som konsekvens av at elevene ikke sjekket validiteten i formlene de utviklet.

Forskningen til Breiteig og Grevholm (2006) viser at elevene sliter både med å forklare egen løsningsstrategi, samt rettferdiggjøre metoden for det generelle tilfellet. Liknende oppdagelser er gjort av Lee og Wheeler (1987), som i sin studie fant at elever manglet refleks for å sjekke formelen sin opp mot informasjonen de har. Denne oppdagelsen har også Orton (1997) gjort i en intervjustudie med 30 elever i alderen 9 til 13 år. Orton hevder derfor det er viktig at elever oppfordres til å sjekke egen løsningsstrategi. Breiteig og Grevholm (2006) hevder en mulig årsak til at elever møter på utfordringer når de skal begrunne egen løsningsstrategi, er at elevene er uvante med å formulere en skriftlig forklaring på løsningen sin. De foreslår derfor å utvikle undervisningssituasjoner hvor elever må forklare for hverandre hvordan de tenker. Dette støttes av Lannin (2005), som ønsker at ulike løsningsstrategier og begrunnelser blant elevene skal belyses i helklassesamtaler.

Strømskag Måsøval (2011) rapporterer i sin doktorgrad om seks lærerstudenter (fordelt på to grupper) sitt arbeid med generalisering av figurmønstre. Gjennom en analyse med TDS som rammeverk oppdaget hun at mulige begrensninger i lærerstudentenes arbeid med mønstergeneralisering var uegnet adidaktisk miljø (hovedsakelig forårsaket av oppgavedesign), kompleksitet ved å overføre observasjoner til algebraisk språk (fra *aksjon* til *formulering*), og kompleksiteten i det å begrunne foreslåtte generaliseringer (*validering*).

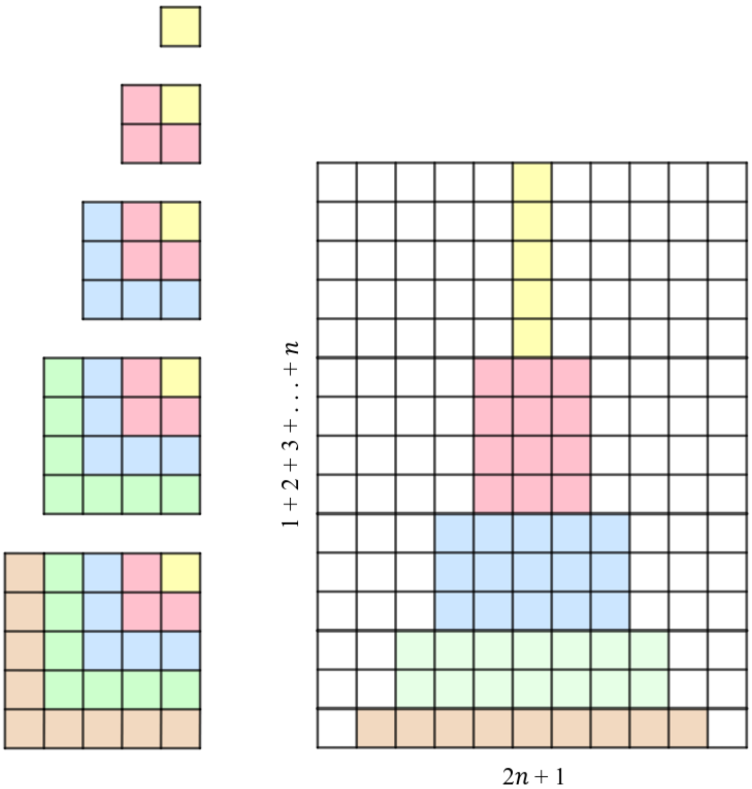
Flere av studiene nevnt ovenfor dokumenterer at elever møter utfordringer i overgangen fra mønstre og tabeller til algebraiske regler. Dette var derfor en overgang jeg var særlig oppmerksom på i designutviklingen (se Kapittel 4.3.3). Tilsvarende er det også studier som viser at elevene ikke sjekker validiteten i egne formler. Jeg utviklet derfor oppgaver som ba elevene eksplisitt begrunne egen løsningsstrategi, med mål om å jobbe med denne utfordringen (se Kapittel 4.3.3). Noen av studiene anbefaler også å utvikle undervisningssituasjoner hvor elevene må forklare for hverandre hvordan de tenker. Dette er en anbefaling jeg har tatt med meg videre inn i designutviklingen (se Kapittel 4.4.2).

4.3 Epistemologisk modell av målkunnskapen

Den tilsiktede målkunnskapen for undervisningssituasjonen som denne oppgaven baserer seg på er en matematisk setning som uttrykker at summen av de *n* første påfølgende kvadratene er ekvivalent med en tredjedel av produktet av det (*n*+1)-te oddetallet og det *n*-te trekanttallet. Uttrykt med algebraisk notasjon blir dette $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{3}(2n + 1)(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$. Ved å bruke relasjonen om at det *n*-te trekanttallet (summen av det de *n* første naturlige tallene) er lik $n(n + 1)/2$, kan ekvivalensen alternativt uttrykkes som $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$.

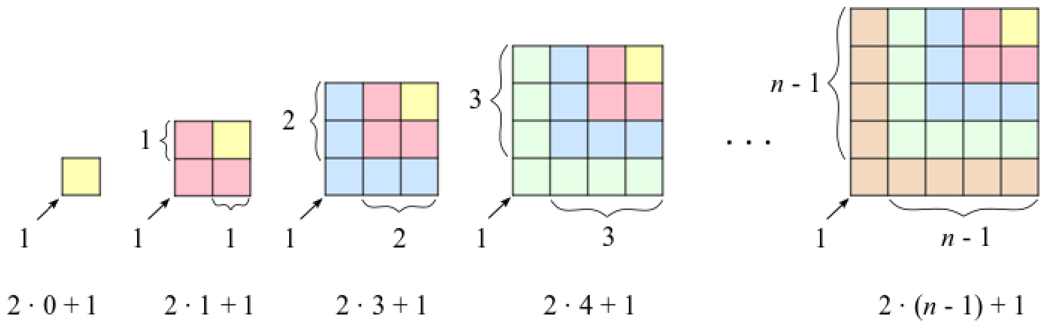
4.3.1 Modell av målkunnskapen

Figurmønsteret jeg har valgt for å illustrere den ønskede ekvivalensen er inspirert av *Proofs without words* av Roger Nelsen (1993, s. 78). En modell av målkunnskapen illustreres i Figur 8, her gitt ved et generisk eksempel for $n = 5$. Siden figuren illustrerer en ekvivalens, vil figurmønsteret falle under det Strømskag Måsøval (2011) definerer som ekvivalensmønstre. I det følgende vil jeg forklare hva modellen av målkunnskapen illustrerer nærmere.



Figur 8. Figurmønster som illustrerer den tilsiktede målkunnskapen.

For å kunne identifisere den ønskede ekvivalensen fra figurmønsteret i Figur 8, må man se på figuren i flere steg. Dette er fordi figurmønsteret er noe komplekst, og blant annet består av ekvivalensmønsteret fra Figur 7 (summen av de n første påfølgende oddetallene er lik det n-te kvadratet). Det er dette ekvivalensmønsteret som er sentralt i det første steget. Nøkkelobservasjonen er å identifisere sammenhengen mellom det n-te kvadratet og det foregående kvadratet. Hensikten er altså å identifisere at antall komponenter som må legges til det foregående kvadratet for å lage det n-te kvadratet er lik det n-te oddetallet $2n - 1$. Dekomponeringen som illustrerer denne sammenhengen er gitt i Figur 9. Fra dekomponeringen kan man observere at økningen fra et kvadrat til det påfølgende kvadratet kan uttrykkes som $2(n-1) + 1 = 2n - 1$. Relasjonen kan også uttrykkes eksplisitt: $n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$.



Figur 9. Dekomponering som illustrerer sammenhengen mellom økningen av komponenter fra det (n-1)-te kvadratet til det n-te kvadratet.

Det neste steget omhandler rammen og det fargede tårnet som er gitt til høyre i Figur 8. Oddetallene (de fargede L-ene) som dannet kvadratene (elementene) i forrige steg, er nå splittet opp og systematisk samlet sammen. Det n-te oddetallet $2n - 1$ er rettet ut og plassert i midten på den nederste raden i rammen. Deretter er det foregående oddetallet $2n - 3$, som stammer fra både det n-te og (n-1)-te kvadratet, plassert over to ganger (et fra hvert kvadrat). Øverst i tårnet er det n representanter av det første oddetallet, siden det første oddetallet er å finne i samtlige n kvadrater. For det generiske eksemplet for $n = 5$ har vi altså følgende sammenheng for summen av de fem første kvadratene (i matematisk notasjon): $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 5(2 \cdot 1 - 1) + 4(2 \cdot 2 - 1) + 3(2 \cdot 3 - 1) + 2(2 \cdot 4 - 1) + 1(2 \cdot 5 - 1)$. Tallene foran parentesene illustrerer at rammens høyde kan uttrykkes ved hjelp av de n første naturlige tallene $(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$. Dette kan også observeres direkte fra det fargede tårnet, da hvert oddetall (hver farge) avbilder det påfølgende naturlige tallet sett nedenfra. Relasjonen om at summen av de n

første naturlige tallene er lik $n(n+1)/2$ kan rettferdiggjøres eksempelvis med Gaussmetoden[4] eller ved et induksjonsbevis[5].

Kunnskapen fra det første steget (det *n*-te oddetallet kan uttrykkes som $2n-1$) kan brukes til å observere at bredden i rammen til høyre i Figur 8 kan uttrykkes som det (*n*+1)-te oddetallet. Dette er som en konsekvens av at én komponent legges til på hver side av tårnets nederste rad (som tilsvarer det *n*-te oddetallet).

Det siste steget som gjenstår er å observere at summen av de *n* første påfølgende kvadratene illustrert til venstre i Figur 8 er å finne *tre ganger* i rammen til høyre i figuren. Den ene summen kan identifiseres av det fargede tårnet i midten, slik forklart i et tidligere avsnitt. De to andre summene er representert av de hvite komponentene på henholdsvis høyre og venstre side av det fargede tårnet. Det *n*-te kvadratet i summen befinner seg øverst i rammen, med foregående kvadrater nedover. Den hvite komponenten på hver side av tårnets nederste rad illustrerer det første kvadratet i de to summene.

Gjennom det generiske eksemplet for $n=5$ illustrerer altså modellen av målkunnskapen at summen av de *n* første påfølgende kvadratene er lik en sjettedel av produktet av det *n*-te (naturlige) tallet, det (*n*+1)-te tallet og det (*n*+1)-te oddetallet. Med algebraisk notasjon: $(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Ekvivalensen kan rettferdiggjøres med et generisk eksempel[6] eller via et induksjonsbevis[7].

4.3.2 En situasjon som bevarer mening for den tilsiktede målkunnskapen

Basert på *den epistemologiske analysen* og *modellen av målkunnskapen* utviklet jeg en situasjon som baserte seg på en fiktiv kunstner ved navnet Kvadratoni. Han skal dekorere en av ytterveggene til Oslo Plaza. Kunstverket skal illustrere et tårn og basere seg på summen av et *tilfeldig* antall påfølgende kvadrater. Elevene skal hjelpe Kvadratoni å kartlegge hvor mye av

---

[4] Du finner et generelt funksjonsuttrykk for summen av *n* ledd ved å summere første og siste ledd, det andre med det nest siste etc. Dette gir deg $\frac{n}{2}$ par med summen $(n+1)$.

[5] Viser for basis $n=1$ (ok). Induksjonshypotese: antar at det er sant for $n=k$: $1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$. Induksjonssteg: $n=k+1$? Venstre side [VS]: $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)=(k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$. Høyre side [HS]: $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$. VS=HS → hypotesen stemmer.

[6] Eksempelvis ved å se på arealet til tårn nr. 6, beregnet både ved sumformelen for $n=6$ og for $n=5$ addert med det sjette kvadratet: $A_5+6^2=A_6$.

[7] Viser for basis $n=1$ (ok). Induksjonshypotese: antar sant for $n=k$: $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ Induksjonssteg: $n=k+1$? VS: $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$. HS: $\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$. VS=HS → hypotesen stemmer.

ytterveggens *areal* som vil kreves for å konstruere tårnet. Undervisningssituasjonen består av to didaktiske faser: finne sammenhengen mellom påfølgende kvadrater; og arealbetraktninger av rammen og tårnet. Elevene vil måtte bruke kunnskapen de tilegner seg i den første fasen for å finne den optimale løsningen på problemet i den andre fasen.

Intensjonen med den første didaktiske fasen var at elevene skulle lære seg at økningen fra det foregående kvadratet til det *n*-te kvadratet er lik det *n*-te oddetallet, med algebraisk notasjon: $n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$. Min hypotese var at elevene gradvis skulle utvikle denne matematiske kunnskapen ved å jobbe seg gjennom Oppgave a og b. Intensjonen med den andre didaktiske fasen var at elevene skulle lære seg den endelige målkunnskapen: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Hypotesen min var at elevene gradvis skulle utvikle denne kunnskapen ved å jobbe seg gjennom Oppgave c – g. De skulle først lage en modell av det sjette tårnet og tilhørende ramme, samt fylle ut rammens høyde og bredde i en tabell (Oppgave c). De skulle så utvikle en formel for det *n*-te trekanttallet gjennom en introduksjon av Gaussmetoden (Oppgave d). Deretter skulle de bruke de generelle uttrykkene til å først uttrykke rammens areal, og deretter tårnets areal (henholdsvis Oppgave e og f). I Oppgave g skulle formelen for tårnets areal begrunnes.

For å unngå misforståelser har jeg gjennom oppgaveheftet vært nøye på presisjon og tydelighet i formuleringer. Tilsvarende har jeg vært oppmerksom på at både komponentene (glassflisene) i hvert kvadrat og kvadratet selv kan refereres til som kvadrater. For å unngå forvirring har jeg derfor valgt å konsekvent kalle komponentene for enhetskvadrater.

På grunn av institusjonelle rammer (eksempelvis kun 90 minutter tilgjengelig), ønsket jeg å tone ned den første hoveddelen, og la hovedfokuset være på arealbetraktningene. Årsaken til denne prioriteringen var at jeg anså dette som mest hensiktsmessig med tanke på den tilsiktede målkunnskapen. Mitt eksperiment ble også benyttet som introduksjon til algebrakapitlet for R2-klassen, noe som satte visse begrensninger til elevenes forkunnskaper.

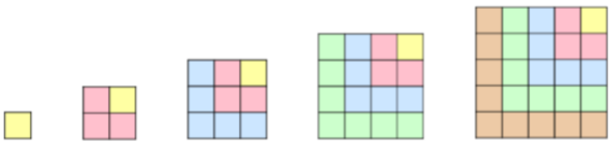
4.3.3 Miljø for aksjon, formulering og validering

Det designede oppgaveheftet som ble utlevert til elevene er gitt i sin helhet i Vedlegg D. I det følgende vil jeg forklare nærmere ulike valg som ble gjort med tanke på miljøene for aksjon, formulering og validering. I denne sammenhengen vil jeg presentere utdrag fra det egendesignede oppgaveheftet som belegg for analytiske påstander gitt i a priori analysen. Som et overordnet mål forsøkte jeg å lage åpne oppgaver, som samtidig fulgte en stram struktur. Dette med mål om å skape adidaktiske formuleringer. Med *adidaktiske formuleringer* mener jeg her oppgaveformuleringer som muliggjør intensjonen om at elevene gradvis utvikler målkunnskapen gjennom å operere på oppgavene i en adidaktisk situasjon.

4.3.3.1 Miljø for aksjon 1

I den didaktiske analysen ble jeg gjort oppmerksom på flere studier som dokumenterer at elever møter på utfordringer i overgangen fra mønstre og tabeller til algebraiske regler. I Oppgave a valgte jeg derfor å gi elevene et materielt miljø som kunne hjelpe dem å identifisere mønstre og strukturer via en figurativ og/eller en numerisk tilnærming (se Figur 10). Det materielle miljøet var et tilsvarende figurmønster som gitt i Figur 7, i tillegg til én tabell hvor elevene skulle fylle ut sammenhenger for de fem første kvadratene. Gjennom å fylle ut sammenhenger for de fem første elementene i figurmønsteret, var målet at elevene skulle utvikle en *implisitt modell* av målkunnskapen.

Som et første steg i konstruksjonen tipser Kvadratoni gruppen om å studere nærmere sammenhengen mellom påfølgende kvadrater.



a) Skriv av tabellen nedenfor og fyll ut for alle de åpne rutene (også for den n-te posisjonen). Merk at de to rutene lengst til høyre på den nederste linjen (posisjon n) vil få et likt funksjonsuttrykk.

Posisjon (kvadrat nr.)	Sum	Resultat	Økning (fra forrige)	Økningen som funksjon av posisjonen
1	1	$1 = 1^2$	–	–
2	$1 + 3$	$4 = 2^2$	3	$2 \cdot 2 - 1$
3	$1 + 3 + 5$	$9 = 3^2$	5	$2 \cdot 3 - 1$
4				
5				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n				

La en annen gruppe prøve det generelle uttrykket deres for økningen mellom to påfølgende kvadrater, og se om den fungerer for to tilfeldige (påfølgende) kvadrater.

Figur 10. Oppgave a.

4.3.3.2 Miljø for formulering 1

I tabellen i Oppgave a (Figur 10) var én rad satt av for den *n*-te posisjonen. Tanken var at elevene skulle generalisere mønstrene og strukturene identifisert i aksjonssituasjonen. Jeg valgte å ha med to kolonner som uttrykte økningen, både for å tydeliggjøre oddetallene og få med aritmetiske uttrykk. Hensikten ved å la elevene studere strukturen i de aritmetiske relasjonene, var å gjøre overgangen til det algebraiske uttrykket lettere. For å unngå forvirring hos elevene presiserte jeg i oppgaveteksten at de to kolonnene for økningen ville få et likt funksjonsuttrykk for det generelle tilfellet.

For å skape behov for en *eksplisitt modell* av målkunnskapen ønsket jeg at elevene skulle operere indirekte på det materielle miljøet. Avslutningsvis i Oppgave a skulle elevene derfor la en annen gruppe få prøve ut gruppens generelle uttrykk (for økningen mellom to påfølgende kvadrater) på to vilkårlige (påfølgende) kvadrater (se Figur 10). Ved å la en annen gruppe teste ut metoden, så jeg også for meg at elevene ville få mulighet til å gi hverandre *feedback* mens de enda befant seg i en adidaktisk situasjon.

4.3.3.3 Miljø for validering 1

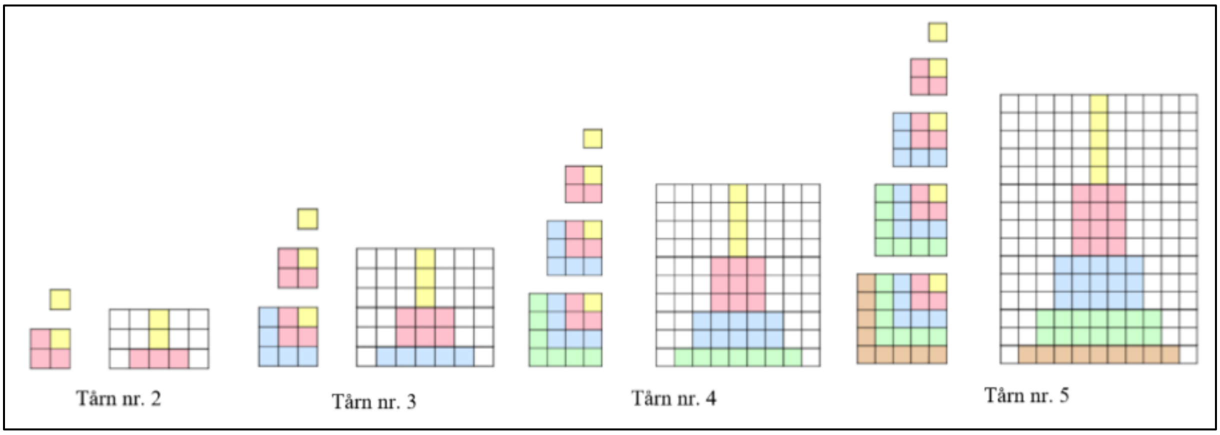
Hensikten med valideringssituasjonen var å få elevene til å rettferdiggjøre egen løsningsstrategi. I Oppgave b (Figur 11) skulle de derfor begrunne sitt generelle uttrykk for økningen. Målet med dette var å skape et behov for å endre kunnskapsstatusen fra kun å omhandle løsningen på oppgaven, til en mer formell, matematisk form. Jeg så for meg at denne oppgaven kunne være utfordrende for enkelte, men tanken var at elevene skulle snakke og diskutere innad i gruppen.

b) Begrunn at det generelle uttrykket for *økningen som funksjon av posisjonen* er riktig for økningen mellom alle påfølgende kvadrater.

Figur 11. Oppgave b.

4.3.3.4 Miljø for aksjon 2

I oppgaveheftet valgte jeg å introdusere elevene til den andre didaktiske fasen ved å presentere fire modeller av tårnet og rammens areal for henholdsvis summen av de to, tre, fire og fem første kvadratene (se Figur 12).



Figur 12. Illustrasjon av modellene gitt i oppgaveheftet.

I Oppgave c fikk elevene i tillegg en tabell hvor de skulle fylle ut rammens høyde og bredde (se Figur 13). Ved hjelp av mønstrene og strukturene de observerte herfra (og fra modellene) skulle de konstruere tårnet og rammen som baserer seg på summen av de seks første kvadratene. I tillegg til informasjonen gitt i oppgaveheftet besto det materielle miljøet av sakser, ruteark og fargeblyanter. I tabellen konstruerte jeg én kolonne for rammens bredde som funksjon av posisjon. Her var tanken at elevene skulle benytte seg av forkunnskapen fra den første didaktiske fasen, og se at rammens bredde var to mer enn tårnets nederste rad (det *n*-te oddetallet). Konstruksjonen av det sjette tårnet og utfylling av tabellen var ment for å skape en *implisitt modell* av målkunnskapen hos elevene.

c) Bruk tilgjengelig utstyr og tegn tårn nr. 6, som baserer seg på summen av de seks første kvadratene. Klipp opp slik at rammen får korrekt størrelse. Skriv av tabellen nedenfor og bruk den som hjelp til konstruksjonen.

Tårn nr. (posisjon)	Rammens høyde	Rammens bredde	Rammens bredde som funksjon av posisjonen

Figur 13. Oppgave c.

4.3.3.5 Miljø for formulering 2

For å la elevene operere indirekte på det materielle miljøet, skulle de la en annen gruppe få teste ut metoden deres for å beregne tårnets areal. For å kunne få til dette måtte de derfor utvikle en egen løsningsstrategi. På grunn av kompleksiteten ved figurmønsteret valgte jeg å la utviklingen fra en *implisitt* til *eksplisitt modell* av målkunnskapen skje over flere oppgaver. Intensjonen var at elevene stegvis skulle utvikle en strategi for å beregne tårnets areal basert på rammens høyde og bredde.

Siden dette undervisningsopplegget skulle brukes som introduksjon til algebra i den utvalgte R2-klassen, valgte jeg å kort introdusere elevene for Gaussmetoden i Oppgave d (se Figur 14). Tidsbegrensninger medførte at jeg kun presenterte metoden gjennom to eksempler for summen av partall. Dersom noen elever stusset på dette, var jeg forberedt på å bryte den adidaktiske situasjonen og gi eksempler på hvordan Gaussmetoden også vil gjelde for oddetall. Da jeg kun viste Gaussmetoden gjennom to eksempler, ville valideringen av Gaussmetoden fremstå som *naiv empirisme* (Balacheff, 1988). Målet med Oppgave d var at elevene skulle uttrykke høyden til tårn nr. n som $\frac{1}{2}n(n+1)$.

d) Høyden til tårn nr. n (og dermed rammen) kan beskrives som en sum av de n første naturlige tallene $(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$, hvor hvert tall representeres av en ny farge i tårnet (se modellene på forrige side).

For å gjøre det lettere å beregne rammens areal ønsker Kvadratoni at dere ved hjelp av sumformelen skal uttrykke tårnets høyde som en funksjon av *posisjonen* (altså tårnets nummer). Et tips er å summere to og to ledd (slik illustrert nedenfor) og bruke dette, samt *posisjonen*, for å finne et generelt funksjonsuttrykk for summen.

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4}{2}\,(1 + 4)$$

5

5

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6}{2}\,(1 + 6)$$

7

7

7

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) + n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$n+1$

$n+1$

$n+1$

Figur 14. Oppgave d (Gaussmetoden).

Etter å ha funnet et generelt uttrykk for både bredden og høyden til rammen, skulle elevene i Oppgave e utvikle en metode for å uttrykke hvor stort areal (rammen) som krevdes for å konstruere et tilfeldig tårn (se Figur 15). Intensjonen med oppgaven var altså at elevene skulle uttrykke rammens areal som $\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$. Her tenkte jeg det som en mulig *feedback* at elevene sjekket metoden sin for rammens areal opp mot en (eller flere) av figurene gitt i oppgaveheftet.

> e) Bruk sammenhengene dere har identifisert ovenfor til å lage en metode for å uttrykke hvor stort *areal* (rammen) som kreves for å konstruere et tårn basert på summen av et *tilfeldig* antall påfølgende kvadrater.

Figur 15. Oppgave e.

Oppgaven om å beregne rammens areal (Oppgave e) ble designet for å lede elevene inn mot neste spørsmål. I Oppgave f skulle elevene ved hjelp av *rammens* areal finne en formel for *tårnets* areal (se Figur 16). Dersom elevene hadde funnet korrekt formel for rammens areal, visste de at den var lik $\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$. Jeg anså det som mer usikkert at elevene ville være klar over at rammens areal også kunne uttrykkes som $3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$. En betingelse for at elevene skulle utvikle kunnskapen videre, var derfor at oppgaveteksten minnet leseren på at figuren til venstre i figurmønsteret (se Figur 8) var summen av påfølgende kvadrater. Det var utfordrende å formulere oppgaven på en slik måte at elevene skulle skjønne at antallet enhetskvadrater i tårnet var lik summen av kvadrater, men ikke tro at $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ var løsningen. Dette medførte at oppgaveformuleringen i Oppgave f ble preget av mye tekst.

> f) Som en siste del av kartleggingsfasen ønsker Kvadratoni at dere skal finne en metode for å uttrykke hvor mange av enhetskvadratene (glassflisene) fra rammens areal som opptas av tårnet (altså de fargede glassflisene som representerer summen av de *n* første påfølgende kvadratene).
>
> La en annen gruppe prøve metoden deres for en bestemt sum av påfølgende kvadrater og se om den fungerer.

Figur 16. Oppgave f.

4.3.3.6 *Miljø for validering 2*

I Oppgave g (illustrert i Figur 17) ønsket jeg at elevenes kunnskap skulle utvikle seg i en mer eksplisitt, *formell* retning. Målet mitt var å konstruere betingelser som fikk elevene til å forklare egne resonneringer, forsvare begrunnelser og ha et kritisk blikk på eget arbeid. Oppgaven gikk derfor ut på at elevene skulle begrunne hvorfor deres generelle uttrykk for tårnets areal gjaldt i alle tilfeller. Jeg så for meg at dette ville være den mest utfordrende oppgaven i oppgaveheftet, og forberedte meg derfor på at elevene kunne trenge veiledning på veien.

g) Begrunn at det generelle uttrykket dere fant i d) (hvor stor andel av rammens areal som opptas av den opprinnelige summen av *n* påfølgende kvadrater) gjelder i alle tilfeller.

Figur 17. Oppgave g.

4.4 Implementering

I dette delkapitlet vil jeg redegjøre for målene jeg satte a priori for realiseringen i klasserommet (devolusjon, regulering, institusjonalisering). Disse målsettingene vil i Kapittel 5 sammenlignes med a posteriori analyser.

4.4.1 Devolusjon – a priori

Devolusjonen skulle benyttes for å presentere den adidaktiske situasjonen med tilhørende problem. Jeg så for meg å fortelle om oppdraget og om størrelsesforholdene mellom Oslo Plaza og glassflisene. Et viktig mål med devolusjonen er å få elevene til å overta ansvaret for å løse problemet (Strømskag, 2017b). For å gjøre dette ønsket jeg å fastsette den didaktiske kontrakten, og slik skape noen gjensidige forpliktelser. Noen av disse forpliktelsene ønsket jeg å sette i forkant av implementeringen. Faglæreren skulle informere elevene om prosjektet i forkant, og fortelle at elevene skulle samarbeide i mindre grupper. Under devolusjonen så jeg også for meg at elevene skulle få beskjed om å resonnere innad i gruppen, men at de kunne stille spørsmål til læreren om det var noe som fremsto som uklart eller om de satt fast. Deler av den didaktiske kontrakten ville også dannes implisitt gjennom informasjon gitt i oppgaveheftet. Jeg forventet at gruppene leste informasjonen som ble gitt i oppgaveheftet.

I devolusjonen så jeg også for meg å informere om at undervisningssituasjonen var todelt, og at den andre fasen bygde på den første. Til slutt, før jeg overleverte ansvaret til elevene, tenkte jeg å gå gjennom enkelte begreper på tavla. Da jeg ville komme som en utenforstående inn i klasserommet, var det vanskelig å forutse elevenes forkunnskaper. For å forhindre at elevene mistet ønsket progresjon som følge av uklarhet rundt begreper, la jeg derfor opp til en felles begrepsavklaring. Jeg ønsket spesielt å forklare hva som mentes med *økningen som funksjon av posisjonen*.

I devolusjonen av den andre didaktiske fasen hadde jeg som intensjon å presisere at resultatet elevene kom frem til i den forrige fasen var en forkunnskap de ville trenge for å gjøre arealberegninger. Jeg tenkte også at jeg ville repetere kort betydningen av *funksjon av posisjon*. Da oppgavene besto av mye tekst, ønsket jeg også å understreke i devolusjonen at elevene kunne spørre om hjelp dersom de ikke klarte å få tak i hva oppgavene spurte om. Før elevene overtok ansvaret ville jeg også informere om det tilgjengelige materielle miljøet.

4.4.2 Regulering – a priori

I de tre (tiltenkte) adidaktiske fasene (aksjon, formulering, validering) var målet mitt som lærer å håndtere utviklingen av miljøet. Her så jeg for meg at enkelte reguleringer ville komme som følge av den didaktiske kontrakten som var satt (både i devolusjonen og gjennom oppgaveheftet). Dersom elevenes interaksjoner med miljøene ikke førte til ønsket progresjon i kunnskapen, ville jeg komme med såkalte *informasjonshopp*. Informasjonshopp er når jeg som lærer endrer den adidaktiske situasjonen ved å gi en form for informasjon som ikke allerede er gitt, eller ved å gi en ny oppgave (Mangiante-Orsola, Perrin-Glorian & Strømskag, under publisering).

Som fortalt i Kapittel 3 vil lærerrollen endres noe gjennom de ulike adidaktiske situasjonene. I aksjonssituasjonen så jeg for meg å opptre noe passivt, og stole på at det materielle miljøet gav tilstrekkelig feedback. I formuleringssituasjonen ønsket jeg å legge til rette for at to grupper samarbeidet, og i valideringssituasjonen sørge for å synliggjøre alle ulike argumenter gjennom en helklassesamtale.

4.4.3 Institusjonalisering – a priori

Målet mitt med institusjonaliseringen var å generalisere kunnskapen slik at elevene kunne benytte kunnskapen også utenfor situasjonen hvor den var utviklet. Her så jeg for meg å bygge videre på resonneringer og begrunnelser elevene hadde gitt i valideringssituasjonen. Jeg ønsket å trekke frem de ulike metodene for å løse oppgaven (altså oppskrift og begrunnelse), for så å belyse hvilke begrunnelser som var gyldige.

Som en del av institusjonaliseringen hadde jeg også som mål at elevene skulle snakke matematikk. I den første institusjonaliseringen hadde jeg derfor en intensjon om å få elevene til å utrykke med egne ord hva de ulike symbolene i målkunnskapen betyr: $n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$. Målet med dette var å bevare meningen til symbolene.

I den andre institusjonaliseringen ønsket jeg å forklare kort hva en aritmetisk rekke er, og hvorfor vi kan benytte Gaussmetoden for å bevise sumformler for aritmetiske rekker. Jeg ville i tillegg presisere at metoden også gjelder for oddetall, selv om det bare ble vist for partall her (på grunn av tidsbegrensninger). Dersom ingen av gruppene presenterte et generisk eksempel i valideringssituasjonen, så jeg for meg å gjøre dette i fellesskap på tavla. Her ønsket jeg å bevisstgjøre elevene på hvordan egenskapene til strukturen var bevart. På grunn av de institusjonelle tidsrammene så jeg for meg at jeg måtte gjøre prioriteringer med tanke på hva jeg ønsket å fokusere på i institusjonaliseringen. Siden elevene ikke hadde lært om induksjonsbevis enda ville jeg ikke forklare denne i sin helhet, men kort fortelle om bevisets bruk av «dominoeffekt». Intensjonen ved å kort introdusere elevene for induksjonsbeviset var å vise at formelen de hadde utviklet kan bevises på mer enn én måte, vise at det er tilfeller hvor induksjonsbevis har en nytteverdi, og inspirere elevene til videre arbeid i algebra. En viktig årsak til at jeg ville prioritere generiske eksempler framfor induksjonsbevis i institusjonaliseringen, var det generiske eksemplets forklarende tilnærming. Induksjonsbeviset ville bare vise *at* ekvivalensen stemmer (bevisende bevis), mens et generisk eksempel i tillegg ville vise *hvorfor* teoremet stemmer (forklarende bevis) (Hanna, 1990). I likhet med institusjonaliseringen i den første didaktiske fasen, ønsket jeg også her å ha et fokus på at elevene skulle snakke matematikk. Dette var for å bevare meningen til referansekonteksten, samt bevisstgjøre elevene om hva den tilsiktede målkunnskapen var.

4.5 A posteriori analyse – en kort oversikt

I det følgende vil jeg i korte trekk forklare hvordan realiseringen i klasserommet gikk. For å ikke bli gjentakende i Kapittel 5 (sammenligning av a priori og a posteriori analyser) vil dette kapitlet fungere som et overordnet sammendrag av realiseringen i klasserommet.

Implementeringen av den første didaktiske fasen (sammenhengen mellom påfølgende kvadrater) tok lengre tid enn forventet. I ettertid ser jeg at dette kanskje ikke er så overraskende. Elevene virket å være uvant med å samarbeide i matematikk, noe som medførte at det ikke var like mye diskusjon innad i gruppene som jeg forventet. Dette påvirket progresjonen. I tillegg ble undervisningsopplegget mitt brukt som introduksjon til algebrakapitlet, og det virket som om elevene trengte tid til å omstille seg fra forrige tema. Denne omstillingsprosessen fikk konsekvenser for hvor langt elevene kom med oppgavene, og vi fikk dermed ikke landet hele opplegget. Det var bare Gruppe 4 som klarte å løse Oppgave f (finne en generell formel for tårnets areal) og dermed fikk startet på Oppgave g (arealbetraktninger) i den andre didaktiske fasen. I institusjonaliseringen valgte jeg derfor å gi en kortfattet forklaring på løsningen i Oppgave f. I tillegg fikk jeg forklart hva som var målet med timen, og hvilket teorem elevene hadde kommet frem til. På grunn av tidsbegrensninger ble denne oppsummeringen både kjapp og kortfattet, og jeg er usikker på om elevene egentlig fikk dekontekstualisert den tiltenkte målkunnskapen.

5 Sammenligning av a priori og a posteriori analyser

I dette kapitlet vil studiens funn legges frem og diskuteres. Disse funnene baserer seg på en sammenligning av *a priori* og *a posteriori analyser*, og er en validering av situasjonen jeg har designet. Sammenligningen har skjedd i henhold til Figur 3, presentert i Kapittel 3.7. Gjennom sammenligningen ønsket jeg å besvare forskningsspørsmålet for studien: «Hvilke aspekter ved en designet undervisningssituasjon påvirket elevenes muligheter for å nå den tilsiktede målkunnskapen?» Jeg har valgt å strukturere analysen etter tre delkapitler: *Muliggjørende trekk ved miljøet*; *Forhindrende trekk ved miljøet*; og *Styrker og svakheter ved den epistemologiske analysen*. Merk at jeg her bruker begrepet *miljø* som en samlefortegnelse for miljøene for aksjon, formulering og validering.

Kapittel 5.1 og 5.2 (muliggjørende/forhindrende trekk ved miljøet) tar for seg faktorer ved miljøet som muliggjorde og forhindret intensjonen om å lære den tilsiktede målkunnskapen. Kapittel 5.3 viser hvordan jeg i a posteriori analysen fikk belyst et nytt aspekt som jeg ikke oppdaget i den epistemologiske analysen, og hvordan den epistemologiske analysen medførte at jeg som lærer var godt forberedt til potensielle utfordringer. I det følgende vil jeg trekke ut episoder fra datamaterialet og bruke disse som belegg for de analytiske påstandene jeg kommer med. En diskusjon av resultatene vil presenteres etter hvert delkapittel. I Kapittel 6 vil jeg gi en oppsummering over studiens oppdagelser.

Ytringene fra observasjoner og intervjuer er nummerert fortløpende, og en ytring varer helt til en annen tar over talen. Dette medfører at en ytring kan bestå av flere setninger. Se Vedlegg E for transkripsjonskoder.

5.1 Muliggjørende trekk ved miljøet

I dette delkapitlet vil jeg presentere fire episoder som beskriver muliggjørende trekk ved miljøet: Kombinasjon av figurativ og numerisk tilnærming (Kapittel 5.1.1); Feedbackpotensial fra medelever (Kapittel 5.1.2); Direkte operasjoner på materielt miljø (Kapittel 5.1.3); og Begrunnelser rettferdiggjort i helklassesamtale (Kapittel 5.1.4). I Kapittel 5.1.5 vil jeg diskutere hvorfor jeg mener episodene ovenfor kan kategoriseres som muliggjørende trekk ved miljøet.

5.1.1 Kombinasjon av figurativ og numerisk tilnærming

Gjennom den didaktiske analysen ble jeg gjort oppmerksom på at elever kan møte utfordringer på det Lee (1996) kaller et oppfattelsesnivå (identifisere mønstre og strukturer). Som en del av a priori analysen utviklet jeg derfor oppgaver og et miljø jeg så for meg ville gi elevene nok feedback til å mestre disse utfordringene i en adidaktisk situasjon. Dette så jeg for meg kunne gjøres ved å la elevene kombinere bruken av en figurativ og numerisk tilnærming i den innledende fasen av de to didaktiske situasjonene. Den figurative tilnærmingen var representert av figurmønstrene, og den numeriske tilnærmingen av tabellene elevene skulle fylle ut. A posteriori analysen viser indikasjoner på at denne kombineringen gav ønsket mengde feedback til elevene, da gruppene klarte å fylle ut nesten samtlige numeriske, aritmetiske og algebraiske uttrykk uten for store utfordringer, både i den første og siste fasen. Utfordringene elevene støtte på her, var å skrive et generelt uttrykk for summen av påfølgende oddetall (fase 1), samt uttrykke rammens bredde (fase 2). A posteriori analysen viser derimot at disse utfordringene var et resultat av andre faktorer. Disse to utfordringene vil derfor diskuteres nærmere i Kapittel 5.2, som omhandler forhindrende trekk ved miljøet.

På spørsmål om hvordan Karoline syntes det var å jobbe med figurmønsteret svarte hun:

849. Karoline	Jeg skjønte ikke helt oppbygningen sånn til å begynne med. Men etter hvert når vi gikk gjennom det, så var det jo ikke så avansert. Til slutt i alle fall.

[I_G1_09.03.18][8]

Fra dette tolker jeg at Karoline opplevde at oppgavene og miljøet gav ønsket mengde feedback når de skulle utvikle kunnskap om relasjonene i figurmønsteret. Figurmønsteret virket komplisert i starten, men ble forståelig etter å ha jobbet seg gjennom oppgavene. Dette indikerer at oppgavene sammen med figurmønsteret gav Karoline ønsket feedback med tanke på progresjon i kunnskapen. Introduksjonen til oppgavene gjennom en kombinasjon av figurativ og numerisk tilnærming ble i tillegg trukket frem som en positiv innfallsvinkel av Arne i intervjuet:

871. Lærer	Hva synes du om oppgavene?
872. Arne	jeg synes det var en veldig bra måte å starte på. Fordi du fikk oss inn i ganske kompliserte formler, men du startet ikke veldig komplisert.
873. Lærer	Ja, tenker du med tabellene her?
874. Arne	Ja, med de tabellene der. (…)

[I_G1_12.03.18]

Fra Arnes ytringer tolker jeg at han opplevde at tabellene og figurmønstrene hadde et adidaktisk potensial, og gav ønsket mengde feedback når gruppen identifiserte mønstre og strukturer. Både

[8] [I_G1_09.03.18] refererer til [Intervju av deltaker fra Gruppe 1 dato]. Tilsvarende står [O_G2] for [Observasjon av Gruppe 2] og [O_H] for [Observasjon av Helklassesamtale]. Se Vedlegg E for en mer detaljert forklaring.

Karoline og Arne gir altså uttrykk for at de ikke skjønte figurmønsteret i starten, men at de gjennom å jobbe seg gjennom oppgavene utviklet forståelse for de ønskede relasjonene. Dette indikerer at kombinasjonen av figurmønstre og tabell var en styrke ved miljøet.

5.1.2 Feedbackpotensial fra medelever

Et viktig mål jeg satte meg i a priori analysen var at de adidaktiske situasjonene skulle ha et adidaktisk potensial, altså at elevene skulle få feedback fra miljøet hvorvidt de var på rett spor eller ikke. A posteriori analysen av Gruppe 1 sitt arbeid med Oppgave a viser indikasjoner på at miljøet designet for denne oppgaven hadde et slikt adidaktisk potensial. Tabellen gav rom for å identifisere mønstre på flere ulike måter, og interaksjon mellom gruppemedlemmene åpnet opp for at disse metodene ble belyst. Karoline, Arne og Mari fant hvert sitt generelle uttrykk for *økningen (fra forrige)*. Fra de aritmetiske uttrykkene observerte Karoline at økningen kunne uttrykkes som $2n-1$, Arne så at økningen kunne uttrykkes som $n+(n-1)$, og Mari så at man kunne finne økningen ved å ta et kvadrat minus det forrige kvadratet: $n^2-(n-1)^2$. Hvilke av de ulike løsningsstrategiene som var korrekt ble dermed et samtaletema innad i gruppen. Samtalen nedenfor er et utdrag hvor Mari argumenterer for at Arnes strategi ikke kan være korrekt, da den ikke passer overens med mønsteret hun identifiserte:

41. Mari — For det her, den her *n*-en og den her *n*-en er jo forskjellig (peker på posisjon *n* og resultatet n^2). Og så når man finner økningen, så tar man jo ni minus fire og seksten minus ni. Tjuefem minus seksten (peker på de respektive rutene i tabellen). Og da kan man jo ikke ta *n* minus den forrige på en måte. Det er jo det her_

42. Arne — Nei, nei! Det her er bare en generell formel.

43. Mari — Ja, ja. Det skjønner jeg, men liksom. Jeg vet ikke om det blir rett om man bare har *n*. Siden ikke det er tallet man skal bruke for å trekke ifra. Men jeg er litt usikker. Hvis dere skjønner hva jeg mener (Karoline: Mhm). For *n* er jo bare den generelle for et tall liksom. Eller et nummer.

[O_G1]

I ytring 41 argumenterer Mari for at økningen må uttrykkes ved hjelp av n^2, siden økningen identifiseres fra kvadratene. Arne sier seg uenig, og forsvarer at løsningen hans er en generell formel. Mari forklarer deretter nærmere hvor det skurrer hos henne. På dette tidspunktet kommer Karoline inn i samtalen med det som skal vise seg å være nøkkelobservasjonen som åpner opp forståelsen blant gruppa:

44. Karoline — Vi har jo funnet den bare på.. som en funksjon av posisjonen (Mari: Mhm)… Men altså, du kunne jo tatt å utlede *den* fra den (Peker først på $2n-1$, deretter

på $n^2 - (n-1)^2$). For []. Det blir jo fem i andre minus fire i andre (mumler, og noterer på arket sitt).

45. Arne — Fem minus fire. Det blir.. (mumler). Ja, okei. Jo, jo! *n* minus [].

46. Karoline — Nei, men den er jo [].

47. Arne — Jo, jo! Du får økningen for *n* her.

48. Karoline — Oj, jo! Ja, for du får.. For du får den her.. minus $2n$ pluss én.

[O_G1]

I ytring 44 begynner Karoline å leke med tanken om at uttrykket hun har funnet for økningen ($2n - 1$) kan utledes fra mønsteret Mari har identifisert ($n^2 - (n-1)^2$). Gruppen studerer denne ideen nærmere. Karolines ytring hjelper Arne til det punktet at han klarer å identifisere at Maris mønster også viser økningen for det generelle tilfellet *n* (ytring 47). Dette får lyset til å gå opp for Karoline, som videre kommer med følgende begrunnelse:

50. Karoline — Sånn. For du får jo.. Trekker i fra inne i parentesen, så da får du jo *n* i andre minus *n* i andre pluss 2*n* minus 1. Og da stryker du jo de igjen. (Fra notatene: $5^2 - 4^2$ | $n^2 - (n-1)^2$ | $n^2 - (n^2 - 2n + 1)$ | $\cancel{n^2 - n^2} + 2n - 1$). (Arne: Ja, ok) (Mari: Mhm). Siden da nuller jo de hverandre ut, og da sitter du igjen med $2n - 1$.

[O_G1]

Begrunnelsen Karoline gir i ytring 50 er et eksplisitt algebraisk uttrykk, tilsvarende det gitt i Kapittel 4.3.1. Både Arne og Mari virker å la seg overbevise av denne begrunnelsen. Arne viser videre til sitt eget løsningsforslag, og hvordan også dette uttrykket kan skrives som $2n - 1$:

51. Arne — Ja, og samme med den. Du får $2n - 1$ på den også (peker på sitt uttrykk: $n + (n-1)$). (Mari: Ja). Da er vi alle enige? Tre forskjellige måter å komme frem til samme svar på (Mari og Karoline: mhm).

[O_G1]

Til slutt forsikrer Arne seg om at samtlige i gruppen er enige om at de tre løsningsstrategiene gir samme uttrykk for det generelle tilfellet. Utdragene ovenfor illustrerer at oppgaven og miljøet (som inkluderer interaksjonen med medelever) ga elevene feedback på løsningsstrategiene, og at dette hjalp dem å utvikle en mer eksplisitt modell av målkunnskapen i den første didaktiske fasen.

5.1.3 Direkte operasjoner på materielt miljø

I Oppgave c skulle elevene tegne tårn nr. 6 og klippe rammen i en korrekt størrelse. Tanken min da jeg konstruerte denne oppgaven var at elevene skulle utvikle en implisitt modell av målkunnskapen gjennom å operere direkte på et materielt miljø. Jeg så også for meg at konstruksjonen av figuren ville åpne opp for matematiske samtaler i gruppa, og legge til rette for at elevene skulle sette ord på tanker og ideer. Oppgaven om å skulle fargelegge ble derimot tatt imot med ulike reaksjoner blant elevene. Eksempelvis stilte Arne (fra Gruppe 1) følgende spørsmål til gruppa:

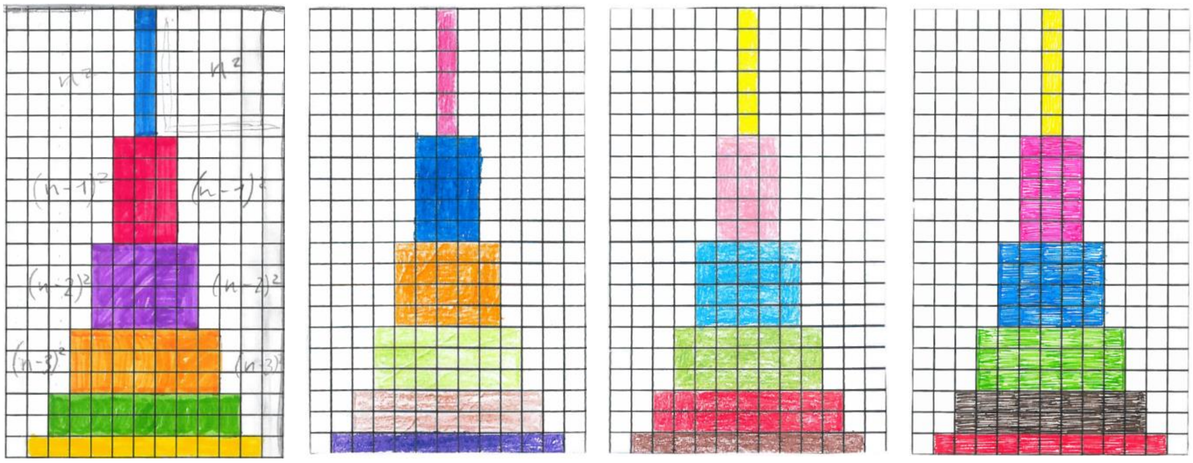
349. Arne	Ok. Skal vi bare begynne å fargelegge, eller skal vi bare jobbe gjennom oppgavene?

[O_G1]

Fra dette kan det tolkes at Arne ikke anså fargeleggingen som en faktor som kunne påvirke kunnskapsutviklingen, og at det ikke var nødvendig å fargelegge det sjette tårnet dersom man hadde fylt ut tabellen. Kristoffer fra Gruppe 2 uttalte på sin side at fargeleggingen gav nostalgi fra barneskolen, og antydet at fargeleggingen ikke hadde noen funksjon.

Til tross for ulike reaksjoner blant elevene til fargeleggingsoppgaven, har jeg i etterkant konkludert at elevene hadde godt av å få roet ned tempoet, og bruke mer tid på å studere mønsteret og strukturene i figurmønsteret. Til tross for at de behersket å fylle ut tabellen uten å møte på store utfordringer, viser samtalene under konstruksjonen at det fremdeles var strukturer i figurmønsteret som gruppene ikke hadde kontroll på. I Kapittel 5.2.4 vil jeg blant annet se nærmere på hvordan Gruppe 1 og Gruppe 2 misforsto hva som mentes med rammens bredde, noe som fikk konsekvenser for deres progresjon i kunnskapen. Diskusjonene som oppsto fra fargeleggingen indikerer derimot at både Gruppe 1 og Gruppe 2 skjønte forskjellen på rammen og tårnet når de skulle tegne figuren, noe som også illustreres i gruppenes konstruksjoner. I Figur 18 nedenfor illustreres de ulike modellene konstruert av de fire gruppene. Som figurene illustrerer, klarte samtlige grupper å konstruere en korrekt modell for det sjette tårnet og tilhørende ramme. Dette indikerer at konstruksjonsoppgaven gjorde det mulig for alle gruppene å utvikle en implisitt modell av målkunnskapen.

Den konstruerte figuren gav også meg som lærer feedback underveis på hvorvidt elevene utviklet en implisitt modell av målkunnskapen. Dette var nyttig informasjon for meg med tanke på reguleringer av de adidaktiske situasjonene.



Gruppe 1 *Gruppe 2* *Gruppe 3* *Gruppe 4*

Figur 18. Gruppenes konstruksjoner av tårn nr. 6.

5.1.4 Begrunnelser rettferdiggjort i helklassesamtale

Fra a posteriori analysen kom det tydelig fram at elevene ikke var vant til å begrunne. Dette skapte usikkerhet hos samtlige grupper da de skulle løse Oppgave b (begrunne det generelle uttrykket for økningen som funksjon av posisjon). Gruppe 1 hadde funnet et generelt uttrykk ved tre ulike løsningsstrategier, og hadde problemer med å se at den ene metoden også var en gyldig rettferdiggjørelse. Gruppe 2 begrunnet det generelle uttrykket ved at summen var av oddetall, og at økningen alltid var på to. Gruppe 3 overbeviste seg selv med et generisk bevis, men omgjorde beviset til en beskrivende setning i sin besvarelse. Gruppe 4 leverte blankt.

Usikkerheten hos Gruppe 1 kommer blant annet til uttrykk i følgende samtale jeg hadde med gruppa:

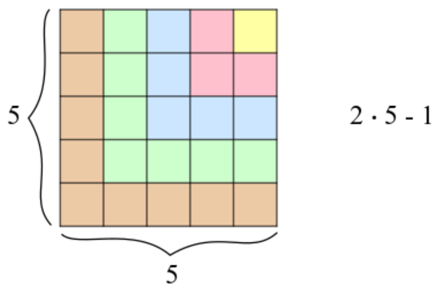
54. Karoline	Begrunn at det generelle uttrykket for økningen som funksjon av posisjon er riktig for økningen mellom alle påfølgende kvadrater… skal vi ha noe mer enn tre forskjellige utregninger da? (Spør lærer).
55. Lærer	Hva mener du med tre utregninger?
56. Karoline	Nå har vi.. Altså vi har tre forskjellige.. vi har den her som vi har funnet fra den (peker henholdsvis på uttrykket $2n-1$ og kolonne *Økning som funksjon av posisjon*) også fant vi den fra den her (peker på $n-(n-1)$ og kolonne *økning fra forrige*) og så har vi en som vi har fra det (peker på det eksplisitte uttrykket $n^2-(n-1)^2$).
57. Arne	Ja, men de er jo alle like. Så sånn sett..
58. Karoline	Jojo, alle blir jo like, men jeg tenker svaret, om *det* blir én av disse.
59. Lærer	Her har dere tatt det *n*-te kvadratet minus det forrige kvadratet? (Karoline: Ja) og vist at det blir? (Karoline: Økningen) Ja.
60. Arne	Trenger vi å vise det? Er det ikke bare logisk?

61. Karoline	Men er det meningen at vi skal sette inn andre tall for å vise det, liksom?
62. Lærer	Hva tror dere?
63. Arne	Personlig har jeg overhode ikke noe godt grep på hva bevis, dette med hensyn på dette, betyr.
64. Karoline	Jeg ville sagt at dette var det her (peker på det eksplisitte uttrykket).
65. Lærer	Hvorfor vil det være det da?
66. Karoline	Fordi den liksom… viser algebraisk at det stemmer.

[O_G1]

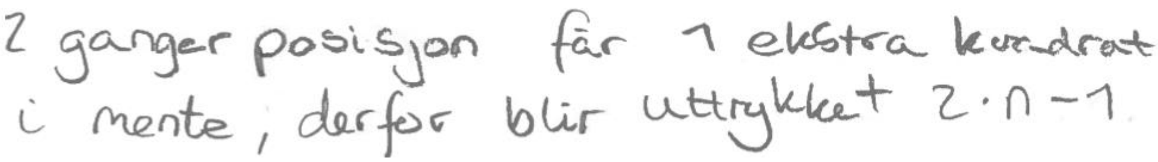
I ytring 57 og ytring 60 gir Arne uttrykk for at det er begrunnelse nok at de har funnet samme svar på tre ulike måter, og han stiller derfor spørsmål rundt behovet for mer validering. Samtidig innrømmer han i ytring 63 at han ikke har noe godt grep på hva bevis innebærer. Karoline virker på sin side klar på at tre løsningsmetoder ikke trenger å være en gyldig begrunnelse. Videre spør hun om det er meningen å vise at det stemmer ved å sette inn tall, altså rettferdiggjøre med det Balacheff (1988) kaller for naiv empirisme. På spørsmål om hva Karoline selv tror, svarer hun at hun tror det eksplisitte algebraiske uttrykket er en gyldig rettferdiggjørelse. I ytring 66 begrunner hun dette med at denne metoden viser algebraisk at uttrykket stemmer. Utdraget ovenfor illustrerer altså hvordan Gruppe 1 var usikre på hva som var en god begrunnelse.

Jeg var hos Gruppe 3 da de skulle diskutere seg frem til en begrunnelse i Oppgave b. Denne hendelsen har jeg notert ned i forskningsdagboken min. Gruppen rettferdiggjorde sitt generelle uttrykk for økningen $(2n - 1)$ ved å gjøre det Balacheff (1988) kaller for et «generisk eksempel» for $n = 5$. Dekomponeringen deres av figurmønsteret er illustrert i Figur 19 nedenfor.



Figur 19. Illustrasjon av Gruppe 3 sitt resonnement i Oppgave b.

Figur 19 illustrerer hvordan gruppen dekomponerte det femte elementet i figurmønsteret, og observerte at økningen fra det fjerde kvadratet til det femte kunne uttrykkes som $2 \cdot 5 - 1$. Fra dette generaliserte de at økningen fra et kvadrat til det påfølgende kvadratet kunne uttrykkes som $2n - 1$. Elevenes usikkerhet for hva som er en matematisk gyldig begrunnelse kommer derimot til uttrykk i den skriftlige besvarelsen Gruppe 3 leverte inn. Der har de ikke med en figur som illustrerer egenskapene som er nødvendige for at resultatet skal gi mening. I notatene har de gjort om sitt resonnement til en kortfattet beskrivelse, se Figur 20. Med ett ekstra kvadrat i mente tolker jeg at gruppa refererer til komponenten i hjørnet (i Figur 19) som tas med to ganger. De trekker derfor fra én i uttrykket.


2 ganger posisjon får 1 ekstra kvadrat i mente, derfor blir uttrykket $2 \cdot n - 1$

Figur 20. Gruppe 3 sin skriftlige besvarelse på Oppgave b.

Usikkerheten rundt en gyldig, matematisk begrunnelse kom også til uttrykk hos Gruppe 4 og Gruppe 2. Gruppe 4 leverte blankt på Oppgave b, mens Gruppe 2 begrunnet at det generelle uttrykket kommer som følge av at summen er av oddetall, og at økningen alltid er to. Partall skrives på formen $2n$, altså må oddetall skrives som $2n - 1$. Samtalen innad i Gruppe 2 indikerer at gruppen ikke var helt fornøyde med begrunnelsen sin, men at de ikke klarte å finne en alternativ rettferdiggjørelse. I denne sammenheng gav Kristoffer blant annet uttrykk for at det var lenge siden klassen hadde hatt om bevis:

272. Kristoffer	Jeg husker ikke helt hvordan man skal.. Vi vet jo at det skal være. Det er lenge siden vi har hatt sånt.. direkte hvordan man skal bevise.

[O_G2]

Dette var også noe Karoline gav uttrykk for i intervjuet. På spørsmål fra meg om de hadde jobbet mye med bevis tidligere svarte hun:

813. Karoline	Eh, nei ikke *mye*. Ikke sånn utover det ene kapitlet i R1, eller sånn. (…)

[I_G1_09.03.18]

Ifølge Karoline hadde altså ikke klassen jobbet noe særlig med bevis siden et kapittel i R1. Dersom dette stemmer er det ikke overraskende at elevene møtte på utfordringer med oppgavene som gikk på å begrunne. Dette var ukjent terreng for dem.

Etter at gruppene hadde utarbeidet begrunnelser for de sine løsningsstrategier hver for seg, hadde jeg planlagt at elevene skulle argumentere for disse i en helklassesamtale. Gruppe 2 startet ved å begrunne sitt generelle uttrykk (økningen var alltid et oddetall, og økte med to):

285. Kristoffer	Eeh.. Vi ser jo at med.. sånn med det uttrykket her så kan du aldri få partall.
286. Lærer	Ja, hvordan ser dere det?

287. Kristoffer Eh, fordi at du ganger noe med to, og det vil.. $2 \cdot n$ vi alltid gi et partall, og minus 1 vil alltid gi et oddetall.

288. Lærer Ja, så økningen vil alltid være et oddetall?

289. Kristoffer Ja, (Lærer: Ja) og det vil alltid være en økning med to da, hvis *n* går sånn som fra en til to til tre til fire. Da vil det alltid øke med to (Lærer: Ja). Hvert fall.

[O_H]

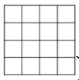
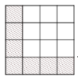
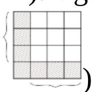
Gruppe 2 hadde altså ikke klart å gi en gyldig matematisk rettferdiggjørelse for sitt generelle uttrykk, men fikk forklart sentrale observasjoner: økningen fra et kvadrat til det neste var alltid et oddetall. Som tidligere forklart hadde Gruppe 1 funnet et direkte uttrykk som begrunnelse for sitt generelle uttrykk for økningen. Denne delte de i helklassesamtalen:

291. Karoline Ja, vi fikk eh.. På.. Tok kvadratet av *n* minus det forrige kvadratet, som gir at du altså får $n^2 - (n-1)^2$ (Lærer noterer ned sammenheng på tavla).

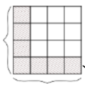
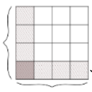
[O_H]

Karoline forklarte videre hvordan algebraiske manipuleringer av dette direkte uttrykket ville gi en økning på $2n - 1$. Videre delte Gruppe 3 sitt resonnement:

295. Espen Ja, den var ikke så matematisk, men.. Ja, posisjonen er jo hvor mange klosser det er liksom i det ytterste laget, så da kom vi fram til at 2 ganger da posisjonen får da en ekstra klosse i mente, så derfor blir da uttrykket $2 \cdot n - 1$.

296. Lærer Så, hvis dere hadde (tegner det fjerde kvadratet på tavla: ) det fjerde kvadratet. (Espen: ja) Så så dere på (Fargelegger den ytterste L-en: ) den ytterste linja? (Espen: Mhm). Også så dere at.. Var det slik dere så det? (Tegner dekomponering på tavla: ).

297. Espen Eh, nei. (Lærer: Nei). Hvis man liksom ganger posisjonen med hver side der, så ser man at man da får én ekstra klosse. Så der blir det fire ganger fire.. Så (Didrik: 2 ganger 4) Ja, 2 ganger 4 mener jeg.

298. Lærer Ja! Så du ganger 4, og 4 (Tegner på dekomponeringen som Gruppe 3 har gjort: ). Så du får 2 ganger 4. Så har du tatt den to ganger (peker på enhets-kvadratet nederst til venstre: ) så vi må trekke i fra én? (Kristoffer: Ja). (…)

[O_H]

Som illustrert i Figur 20 hadde Gruppe 3 gjort om sitt generiske eksempel til en kortfattet beskrivelse i sine notater. I helklassesamtalen gjorde jeg derfor et bevisst valg ved å bringe tilbake figuren som jeg var klar over at gruppen hadde brukt i sitt eget resonnement. Slik ble rettferdiggjørelsen til Gruppe 3 omgjort til et generisk bevis. Jeg synes det derimot er interessant at Espen i ytring 295 definerte denne figurative tilnærmingen som en mindre matematisk begrunnelse. Fra dette tolker jeg at han ikke anså det som nok å se på strukturene og egenskapene til et element i figurmønsteret (altså et generisk eksempel).

Etter at disse tre rettferdiggjørelsene var gitt på tavla svarte Gruppe 4 at de ikke hadde noe å tilføye. Som nevnt tidligere var også besvarelsen de leverte inn i etterkant blank på denne oppgaven (Oppgave b). Som lærer opplevde jeg denne gjennomgangen i fellesskap som en rik klassesamtale, hvor flere begrunnelser ble presentert og argumentert for av elevene. På dette tidspunktet hadde jeg ikke kommet med en eneste kommentar på hvorvidt svarene til elevene var korrekte eller ikke. Det var elevene selv som bidro til framdriften i helklassesamtalen. I intervjuet med Karoline i etterkant fortalte hun at hun likte oppgavene hvor de skulle begrunne og at man fikk høre hva andre hadde tenkt:

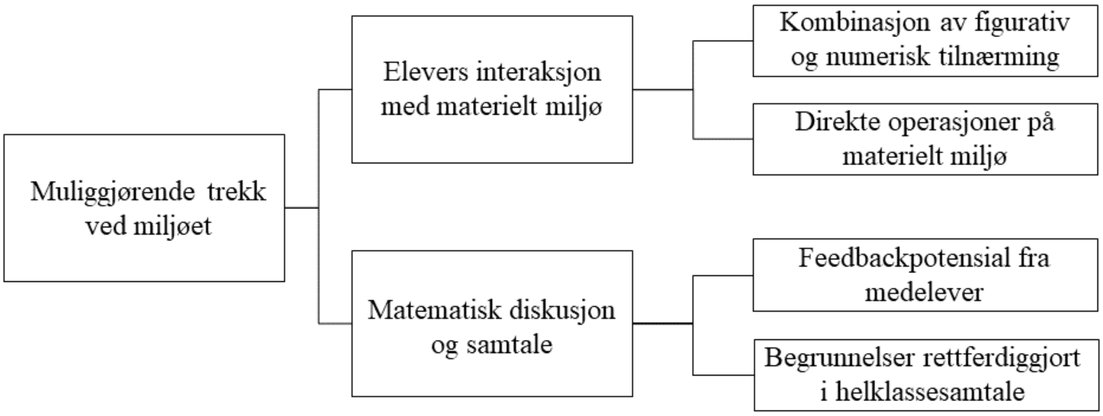
867. Karoline	(…) Vi fikk jo gått gjennom svaret og hørt.. Det synes jeg egentlig var veldig fint med de begrunn-oppgavene. At vi fikk høre litt forskjellig.
868. Lærer	Hva forskjellige grupper hadde resonnert?
869. Karoline	Ja, altså forskjellige måter å forklare det på.

[I_G1_09.03.18]

Fra dette tolker jeg at Karoline hadde et utbytte av valideringssituasjonene, og at hun opplevde det som nyttig å høre ulike løsningsstrategier. Dette var også inntrykket jeg fikk av elevene i undervisningssituasjonen. Datamaterialet gir altså indikasjoner på at denne gjennomgangen i fellesskap var en styrke ved miljøet.

5.1.5 Diskusjon av funn i forhold til muliggjørende trekk ved miljøet

Resultatene av analysen viser at styrkene ved miljøet kan karakteriseres etter to aspekter: Elevers interaksjon med det materielle miljøet (kombinasjon av figurativ og numerisk tilnærming og direkte operasjoner på materielt miljø); og kunnskapsutvikling gjennom å snakke og diskutere matematikk (feedbackpotensial fra medelever og rettferdiggjøre begrunnelser i helklassesamtale). Figur 21 illustrerer de identifiserte styrkene ved miljøet med et flytdiagram.



Figur 21. Oversikt over identifiserte muliggjørende trekk ved miljøet.

Elevenes interaksjoner med det materielle miljøet muliggjorde intensjonen om å utvikle implisitte modeller av målkunnskapen. Gjennom å kombinere bruken av en figurativ (figurmønstre) og numerisk (tabell) referansekontekst virket det som om elevene taklet overgangen fra numerisk til algebraisk tenkning uten å møte på store utfordringer. Resultatene indikerer altså at elevene fikk den nødvendige feedbacken de trengte for å kunne uttrykke egne generaliseringer mens de befant seg i en adidaktisk situasjon. Dette ble i den epistemologiske analysen trukket frem som avgjørende for at algebraisk tenkning skal finne sted. Ved å la elevene konstruere sin egen modell av tårn nr. 6, fikk de også muligheten til å utvikle en *egen* referansekontekst som skapte mening til den algebraiske notasjonen (symbolene). Dette tror jeg var et sentralt aspekt ved undervisningssituasjonen, da elevenes forståelse for symbolene så ut til å utvikle seg betydelig gjennom konstruksjonsoppgaven. Inputen jeg fikk fra den didaktiske analysen viste seg altså å bidra positivt under designet av oppgavene. Datamaterialet indikerer at jeg lyktes i å gjøre overgangen fra numerisk til algebraisk tenkning mindre utfordrende, og at elevene evnet å formulere generelle funksjonsuttrykk basert på en egenutviklet implisitt modell av målkunnskapen. Mine funn står altså i kontrast til funnene i studier presentert i den didaktiske analysen. Dette illustrerer hvordan man ved å studere resultater fra annen relevant forskning kan designe undervisningssituasjoner som tar hensyn til utfordringer identifisert tidligere. Den didaktiske analysen gav meg feedback på utfordringer elever møter i overgangen fra mønstre og tabeller til algebraiske regler, slik at jeg kunne utforme oppgaver deretter.

I likhet med studier presentert i den didaktiske analysen viste også min studie at elevene sliter med å forklare og begrunne egen løsningsstrategi. To av gruppene evnet å gi matematiske gode begrunnelser når de skulle overbevise seg selv om identifiserte sammenhenger og strukturer, men var ikke overbeviste om at dette var gyldige rettferdiggjørelser. Eksempelvis brukte Gruppe 3 et generisk eksempel for å overbevise seg selv i Oppgave b, men omgjorde rettferdiggjørelsen til en beskrivende setning i sin besvarelse. Dette indikerer at elevene var uvante med å evaluere egne løsninger og formulere en gyldig begrunnelse. Dette funnet samsvarer med Breiteig og Grevholm (2006) og Strømskag Måsøval (2011) sine resultater.

Som nevnt i den epistemologiske analysen deler Radford (1996) algebra i skolen inn i to tilnærminger: problemløsning og generalisering av mønstre. Han hevder elever må stimuleres fra begge tilnærmingene for å utvikle algebraisk forståelse. Da det logiske grunnlaget ved generalisering av mønstre er en bevisprosess, tyder mine funn på at elevene som deltok i min studie ikke har blitt stimulert nok fra denne tilnærmingen. Jeg vil derfor hevde at helklassesamtalen (valideringssituasjonen) la til rette for at flere ulike begrunnelser ble presentert og argumentert for i fellesskap. I den didaktiske analysen ble dette anbefalt av flere (Lannin, 2005; Breiteig & Grevholm, 2006; Orton, 1997). Gruppene hadde begrunnet økningen fra et kvadrat til det neste kvadratet på ulike metoder, men var samtidig usikre på om begrunnelsen deres var en god rettferdiggjørelse. Dette medførte at helklassesamtalen ble en rik samtale med mange ulike resonnementer og sammenhenger. Dette ble også trukket frem som en positiv tilnærming av Karoline i intervjuet. Som lærer fikk jeg inntrykket av at elevene gjennom samtalen i felleskap utviklet en mer formell, eksplisitt modell av målkunnskapen.

I etterkant ser jeg det også som en klar fordel at jeg som lærer hadde gjort en epistemologisk analyse i forkant av implementeringen, da ikke bare med tanke på designet av miljøet. Som lærer var jeg bevisst på hvilke matematiske prosesser og betingelser som skulle til for at elevene *anvendte* målkunnskapen, og kunne regulere de adidaktiske situasjonene deretter. Da jeg også hadde forutsett ulike scenarioer for helklassesamtalen på forhånd, var jeg godt forberedt på hvordan jeg skulle reagere på de ulike elevbegrunnelsene.

5.2 Forhindrende trekk ved miljøet

I dette delkapitlet vil jeg presentere fem episoder som beskriver forhindrende trekk ved miljøet: Samarbeid i grupper (Kapittel 5.2.1); Elevenes forkunnskaper (Kapittel 5.2.2); Manglende feedbackpotensial (Kapittel 5.2.3); Uklar begrepsavklaring (Kapittel5.2.4); og Gap mellom elevers språk og vitenskapelig språk (Kapittel 5.2.5). I Kapittel 5.2.6 vil jeg diskutere hvorfor jeg mener episodene ovenfor kan kategoriseres som forhindrende trekk ved miljøet, samt diskutere alternative oppgaveformuleringer.

5.2.1 Samarbeid i grupper

Som en del av a priori analysen la jeg opp til at mye av det adidaktiske potensialet skulle komme som følge av samarbeid innad i gruppene. Jeg så for meg at elevene skulle diskutere og jobbe sammen for å løse oppgavene, og at samarbeidet skulle være en faktor som muliggjorde intensjonen om at elevene skulle tilegne seg målkunnskapen. Resultatene fra a posteriori analysen viser derimot indikasjoner på at samarbeidet tidvis har hatt en motsatt funksjon, og at samarbeidet oppsto som en hindring for progresjon i kunnskapen. I forskningsdagboken min har jeg blant annet notert ned en kort samtale jeg hadde med Rolf fra Gruppe 2 i etterkant av undervisningen. Der gav han uttrykk for at oppgavene i seg selv var greie, men at gruppen var utfordrende. Han hevdet det ikke var mulig å få i gang en samtale, og at dette var noe jeg kom til å høre på videoopptakene. Dette var også noe jeg hadde lagt meg merke til gjennom undervisningsøkta. Kristoffer og Magne kom tydelig godt overens i samarbeidet, mens Rolf falt litt utenfor. Utdrag fra datamaterialet som støtter dette er blant annet følgende samtale hos Gruppe 2:

643. Kristoffer	(…) Har du funnet ut av det Rolf? (Rolf har sittet alene og jobbet med Oppgave d).
644. Rolf	Jeg vet ikke. Jeg har funnet ut at det er *n* delt på to..
645. Kristoffer	Ja, men vi stoler på deg.
646. Rolf	Nei, ikke stol på meg. (Kristoffer: Ja..) (Pause på 14 sekunder). Jeg bommet allerede. *n* delt på to, parentes én pluss *n* (leser opp notatene: $\frac{n}{2}(1+n)$)… Du ser jo at det er alltid *n* delt på to.. her.
647. Kristoffer	Ja, jeg ser det.
648. Rolf	Også har du alltid én også *n* (peker på de to eksemplene). (Kristoffer: Mhm) (Pause på 21 sekunder).

[O_G2]

Rolf har jobbet med Oppgave d alene en periode, og funnet et uttrykk for formelen for det *n*-te trekanttallet. Når Kristoffer gir uttrykk for at de stoler på Rolfs løsningsmetode, protesterer Rolf. Han gir i ytring 646 klart uttrykk for at han ikke ønsker at gruppen skal stole på at hans metode er korrekt, men at han vil diskutere hvordan man løser Oppgave d med gruppa. Dette utdraget illustrerer hvordan Rolf forsøker å inkludere seg selv i gruppa, men mislykkes. På dette tidspunktet så jeg meg nødt til som lærer å bryte den adidaktiske situasjonen og sørge for at hele gruppa gjorde en innsats for å forstå hvorfor det generelle funksjonsuttrykket for summen kunne uttrykkes som $\frac{n}{2}(n+1)$. Intensjonen min med samarbeidet var ikke at elevene skulle fordele arbeidsoppgaver.

Det var også tilfeller hvor elevene i Gruppe 1 foretrakk en individuell arbeidsmetode. Dette kommer blant annet til uttrykk i følgende ytring fra Arne:

192. Arne	Ok, ja vi har mistet Karoline forresten (Karoline forsøker å skjønne sammenhengen med de hvite kvadratene). (Mari ler). Vi får starte på Oppgave d alene. Så, ok.

[O_G1]

Gruppe 1 hadde på dette tidspunktet oppdaget at arealformelen deres for rammen var feil. Arne og Mari forsøkte å finne feilen, men fikk ikke med seg Karoline. Hun hadde oppdaget en mulig sammenheng for neste oppgave, og virket å ha låst seg bort til dette. I intervjuene jeg gjennomførte i etterkant hadde jeg derfor lyst til å snakke med elevene hvordan de mente samarbeidet hadde påvirket arbeidet. På spørsmål om hvordan Karoline opplevde oppgavene svarte hun at oppgavene var gøye, men at det var tungt å arbeide i grupper da folk jobbet i ulikt tempo. Karoline fortalte også at de normalt samarbeidet lite i matematikkfaget, og at det var mest individuelt arbeid. Dette fikk meg til å spørre om samarbeid opplevdes utfordrende:

796. Lærer	Ja.. Så synes du det var utfordrende da, å plutselig skulle samarbeide med flere om å løse en oppgave?
797. Karoline	Ja, det vanskeligste var liksom å få inkludert alle.
798. Lærer	Ja, fordi dere hadde litt ulike angrepsmåter på oppgaven?
799. Karoline	Ja… Også var det jo litt sånn at jeg og Arne sitter sammen og liksom spør hverandre og sånt. Så det var liksom bare at vi har *litt* sånn samme arbeidsmåte, mens hun siste ikke.. var.. La oss si tenkte på samme måte. (Lærer: mhm) Så det var litt å få.. at ikke hun bare falt utenfor. Det var nesten det vanskeligste.

[I_G1_09.03.18]

Karoline gav altså uttrykk for at det var utfordrende å få inkludert alle gruppa, da spesielt Mari. Dette begrunnet hun i ytring 799 ved utsagnet om at hun og Arne brukte å hjelpe hverandre under individuell jobbing, og at de hadde en mer lik arbeidsmetode. Fra videosekvensene har jeg derimot oppdaget indikasjoner på at det ikke først og fremst er ulike arbeidsmetoder som er den største utfordringen, men kommunikasjonen i gruppa. I sekvensene hvor gruppa har evnet å kommunisere godt og føre en dialog, har de ulike løsningsstrategiene vist seg å være fruktbare for kunnskapsutviklingen. Et eksempel på dette er gitt i Kapittel 5.1.2. I periodene hvor elevene har jobbet individuelt og ikke delt tanker og observasjoner, har derimot progresjonen i kunnskapen vært moderat. Elevenes manglende erfaringer med å samarbeide og snakke matematikk har altså hatt svekket feedbackpotensialet til de adidaktiske situasjonene. Min intensjon var at elevene gjennom diskusjoner skulle få feedback og hjelp fra hverandre.

5.2.2 Elevenes forkunnskaper

I Oppgave a viste det seg å være utfordrende for samtlige grupper å finne et algebraisk uttrykk for summen av de n første påfølgende oddetallene. Dette kommer til uttrykk i besvarelsene til gruppene, her illustrert i Tabell 1.

Tabell 1. Elevenes besvarelser av oppgaven om summen av de n første påfølgende oddetallene.

Gruppe 1	$(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) \ldots (2 \cdot n - 1)$
Gruppe 2	$1 + 3 + 5 + 7 \ldots 2 \cdot n - 1$
Gruppe 3	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + (2 \cdot n - 1)$
Gruppe 4	$2n - 1 + 2(n - 1) - 1 \ldots 2(n - (n - 1) - 1$

Tabell 1 viser at ingen av gruppene behersket å uttrykke summen for det generelle tilfellet korrekt med algebraisk notasjon. Likevel vil jeg hevde at løsningene indikerer at samtlige grupper har forstått at mønsteret i summen er de første påfølgende oddetallene opp til det n-te oddetallet. Dette tolker jeg da alle uttrykkene har med de første oddetallene og det siste oddetallet $2n - 1$. Årsaken til at elevene ikke har klart å formulere summen korrekt antar jeg kommer som følge av at det generelle uttrykket krevde bruk av notasjon som var fremmed for dem. Her skiller spesielt notasjonen med tre prikker seg ut som utfordrende. De tre prikkene brukes i matematisk notasjon for å antyde at tallene som kommer følger samme mønster som før. Ved å sette plusstegn før og etter prikkene viser du at også disse elementene er en del av summen. Tre av gruppene har tatt i bruk denne prikknotasjonen, men ingen av dem har med plusstegn før og etter. Gruppe 3 har med et plusstegn, men mangler prikkene.

Elevenes utfordringer med å uttrykke summen av n påfølgende oddetall med algebraisk notasjon er et eksempel på hvordan jeg som lærer vurderte forkunnskapene til elevene feil i a priori analysen. Dette skulle vise seg å skape en svakhet ved miljøet, da elevene brukte mye tid på å forsøke å forstå hvordan summen kunne uttrykkes. På et tidspunkt fikk jeg i tillegg inntrykk av at summen tok fokuset til elevene vekk fra økningen (altså målkunnskapen i fase 1). Jeg valgte derfor å bryte den adidaktiske situasjonen og be elevene om å hoppe over denne oppgaven:

146. Lærer	(I plenum) Ok, jeg ser tiden den går litt i fra oss. Så, fordi jeg har litt begrenset tid her i dag, så ønsker jeg nå at dere bare glemmer litt den summen som står der, også går dere videre på b-oppgaven (henviser til det generelle uttrykket for summen). Der skal dere begrunne økningen som funksjon av posisjonen. For den har alle klart å finne et uttrykk for.

[O_H]

Tanken min her var at jeg kort kunne fortelle hvordan den generelle summen kunne uttrykkes algebraisk i institusjonaliseringsfasen, eventuelt la faglæreren fange opp denne tråden ved en senere anledning. På grunn av de institusjonelle tidsbegrensningene ønsket jeg å holde fokuset rettet mot målkunnskapen.

5.2.3 Manglende feedbackpotensial

I a posteriori analysen identifiserte jeg svakheter ved det adidaktiske potensialet i Oppgave e. Her hadde jeg (a priori) tenkt det som en mulig feedback at elevene sjekket metoden sin for rammens areal opp mot én (eller flere) av figurene gitt i oppgaveheftet. Transkripsjonene viser derimot at verken Gruppe 1 eller Gruppe 2 gjorde dette. Dette indikerer at det som var en tiltenkt feedback ikke nådde frem til elevene. I ettertid innser jeg derfor at Oppgave e med fordel kunne vært formulert på en slik måte at elevene fikk sjekket formelen sin opp mot et eksempel. En alternativ oppgaveformulering vil diskuteres nærmere i Kapittel 5.2.6.

Det kom heller ikke klart fram i Oppgave e at et faktorisert uttrykk for arealet av rammen var ønsket form. Dette medførte at Gruppe 1 og Gruppe 4 begynte å manipulere sine uttrykk for rammens areal. Dette var et aspekt ved oppgaven jeg ikke hadde forutsett i a priori analysen. Ikke bare brukte Gruppe 1 og Gruppe 4 mye tid på å manipulere uttrykkene sine, men de beveget seg samtidig vekk fra den tilsiktede målkunnskapen. Ved å uttrykke rammens areal på en annen måte en faktorisert form ville fortsatt elevløsningene stemme overens med situasjonen (arealbetraktninger), men miste koblingen til det jeg ønsket at elevene skulle lære. Ved å uttrykke rammens areal $\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$ på formen $n^3 + \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2}$ ville altså elevene fortsatt kunne gjøre arealbetraktninger for dekorasjonen på Oslo Plaza. Intensjonen min var derimot at elevene ved hjelp av situasjonen med Kvadratoni skulle lære at summen av de n første påfølgende kvadratene er lik en sjettedel av produktet av det n-te tallet, det (n+1)-te tallet og det (n+1)-te oddetallet. For å se dette må elevene beholde rammes areal på faktorisert form. Oppgave e burde derfor ha gitt elevene feedback på at uttrykket for arealet skulle oppgis på faktorisert form. I Kapittel 5.2.6 vil jeg komme med en alternativ formulering.

På grunn av tidsbegrensninger var det kun tre av de fire gruppene som kom i gang med Oppgave f. Disse gruppene slet med å identifisere rett mønster, altså at summen av de n første påfølgende kvadratene er å finne tre ganger i rammen. Gruppe 4 identifiserte at tårnet var $\frac{1}{3}$ av arealet til rammen ved å regne ut forholdet mellom tårnet og rammen, og fant altså svaret uten å se på strukturen til elementene. Gruppe 4 virker i sin besvarelse å ha blitt forvirret av hva oppgaven spurte om. De skrev: $\frac{n^2+(n-1)^2\ldots}{(2n+1)\cdot\frac{n}{2}(n+1)}$, altså at tårnet divideres på rammen, noe som ikke vil gi et nytt uttrykk for tårnets areal. Gruppe 1 identifiserte at de hvite komponentene økte med $2n^2$ og at tårnet økte med n^2. De klarte derimot ikke å ta steget videre til å identifisere at arealet av tårnet ville være arealet av rammen dividert på 3. I valideringssituasjonen i helklassesamtalen klarte derimot Gruppe 1 å koble sammenhengene da Gruppe 4 delte sine oppdagelser. Utfordringene elevene møtte i denne oppgaven indikerer at feedbackpotensialet kan forbedres. Både med tanke på å muliggjøre intensjonen om at elevene skal se på strukturen til elementene, og for å tydeliggjøre hvilken informasjon de skal benytte seg av. I Kapittel 5.2.6 vil jeg diskutere dette nærmere, og komme med en alternativ formulering av Oppgave f.

Jeg identifiserte også svakheter ved det adidaktiske miljøet i Oppgave c, hvor elevene skulle finne formelen for summen av de n første påfølgende naturlige tallene ved hjelp av Gaussmetoden. Her viste det seg at samtlige grupper i hovedsak benyttet høyre side av ekvivalensene som var gitt som eksempler til å identifisere et mønster. Dette medførte at alle gruppene kom fram til den korrekte formelen $\frac{n}{2}(n+1)$ trolig uten å ha forståelse for hvordan sammenhengen var mellom summen og sumformelen. Jeg valgte derfor å gjøre et informasjonshopp og veilede de ulike gruppene gjennom oppgaven. Dette innebar at jeg først ba elevene forklare hvordan de hadde tenkt, for deretter å høre om de kunne bruke venstre side i et av eksemplene for å forklare samme relasjon. Deretter stilte jeg oppfølgingsspørsmål som fikk belyst egenskapene på venstre side av ekvivalensene. Jeg var da nøye ved å stille spørsmål som ikke reduserte den matematiske utfordringen (altså endret målkunnskapen), men som fikk elevene til å reflektere rundt mønstrene og strukturene de identifiserte. Dette informasjonshoppet mener jeg var nødvendig for å sikre elevenes kunnskapsutvikling og forståelse for sumformelen.

5.2.4 Uklar begrepsavklaring

I konstruksjonen av oppgavene valgte jeg å definere ulike deler av figurmønsteret illustrert i Figur 8 som tårn og ramme. De fargede komponentene dannet det jeg kalte for tårnet, og de hvite komponentene pluss de fargede dannet rammen. A posteriori analysen viser derimot at både Gruppe 1 og 2 mistolket hva som mentes med rammens bredde, og tolket dette for å være tårnets bredde. De resterende to gruppene tolket begrepene rett. Misforståelsen hos Gruppe 2 kommer til uttrykk i følgende samtale:

603. Magne	Rammens bredde. Bredden skal være der. (Peker på neste kolonne). Teller vi med hvite brikker eller bare høyden? Så tre og fem. (Kristoffer: Hæ?) Tre eller fem? På bredden.
604. Kristoffer	Eh, det blir jo.. Tårnet. Det blir vel tre.
605. Magne	Ja, ok. Da skriver vi det. Så kan du skrive fem, så kan du skrive sju, og ni.
606. Kristoffer	Også elleve.

[O_G2]

Utdraget ovenfor viser hvordan Kristoffer og Magne ble enige om at rammens bredde ikke inkluderte de hvite komponentene på tårnets nederste rad. En lignende diskusjon fant også sted hos Gruppe 1:

332. Karoline	Tårn nr. 6, da blir det 21… også bredden.
333. Arne	Det blir jo økningen. Der, der blir den én, der blir den tre (peker på tårn nr. 2), der blir den fem (peker på tårn nr. 3), der blir den sju (peker på tårn nr. 4), der blir den ni (peker på tårn nr. 5). Vent litt; én, to, tre, fire, fem, seks, sju, åtte, ni… Alle enige? (Mari: mhm)
334. Karoline	Tre, fem, ja (Arne noterer ned sammenhengen).

[O_G1]

Fra Arnes ytring 333 er det rimelig å tro at han tolket rammens bredde som bredden på tårnets nederste rad, som igjen var lik økningen mellom kvadrattallene identifisert i den første didaktiske fasen. Dette var en tolkning Karoline og Mari sa seg enige i.

I devolusjonen informerte jeg om at rammen illustrerte arealet av ytterveggen. Dette ble det også informert om på oppgaveheftets første side. Der sto det også presisert at det skulle være én blank glassflis på hver side av tårnets nederste rad. Det virker derimot som om dette var informasjon som ikke nådde frem til Gruppe 1 og 2. Etter en stund måtte jeg derfor gjøre reguleringer underveis for begge gruppene. Hos Gruppe 1 viste jeg til oppgaveheftets første side, og regulerte dermed ved å vise til den didaktiske kontrakten. Hos Gruppe 2 ba jeg dem fortelle meg om de kunne vise meg på en av modellene hva de tolket som bredden til rammen, og hva som var bredden til tårnet. Dette vil jeg også kalle en regulering ved hjelp av den didaktiske kontrakten, da jeg ba elevene gjøre en begrepsavklaring av de ulike begrepene som ble benyttet. Disse reguleringene fikk begge gruppene tilbake på rett spor. I a posteriori analysen har jeg innsett at miljøet med fordel kunne ha hatt en feedback som gjorde elevene oppmerksomme på denne informasjonen når den andre didaktiske fasen ble introdusert. En mulig løsning vil diskuteres nærmere i Kapittel 5.2.6.

I intervjuet med Karoline kom det frem at det ikke nødvendigvis kun var uklare begrepsavklaringer som forhindret elevene i å tolke rammens bredde korrekt. Karoline hadde nemlig følgende innrømmelse:

803. Karoline Jeg skal innrømme det at jeg ikke i det hele tatt leste, nesten (peker på første arket). Jeg hoppet rett dit (Peker på Oppgave a). Det ble litt sånn, hvor mye av det er det som er viktig egentlig? Så da gikk vi jo glipp av noe som var viktig til oppgaven og. Med den der på siden (Peker på setningen som sier det skal være en blank glassflis på hver side av tårnets nederste rad).

[I_G1_09.03.18]

Karoline innrømmer altså at hun ikke hadde lest oppgaveteksten som ble gitt innledningsvis, til tross for at det ble gitt beskjed om å gjøre det. Dette medførte at Karoline brøt reglene for å operere i situasjonen, noe som igjen svekket det adidaktiske miljøet hos gruppa. Dette er et eksempel på hvordan elevenes progresjon kan ha blitt forhindret som følge av brudd på den didaktiske kontrakten.

5.2.5 Gap mellom elevers språk og vitenskapelig språk

Som beskrevet i a priori analysen hadde jeg lagt vekt på at det matematiske språket i oppgavene skulle være presist og tydelig. Intensjonen min med dette var å unngå misforståelser. Resultatene fra a posteriori analysen indikerer derimot at det matematiske språket ble en potensiell hindring for elevenes kunnskapsutvikling. Dette kommer blant annet til uttrykk i følgende ytring fra Arne:

451. Arne finne en metode for å uttrykke hvor mange enhetskvadrater fra rammens areal som opptas av tårnet.. altså de fargede glassflisene som representerer summen av de *n* første påfølgende kvadratene. Det var litt rart ordlagt. De fargelagte glassflisene som representerer summen av de *n* første påfølgende kvadratene. Nesten som det er et hint i den setningen der, men det er jo helt.. Rent bokmålmessig så fungerer den ikke helt. Alt for komplisert... Nesten så den prøver å guide oss til et svar. (Pause på 15 sek) Ok, så_

[O_G1]

Arne hevdet altså at oppgaveformuleringene var for kompliserende og preget av dårlig bokmål. Fra ytring 451 kan det virke som han da spesielt siktet mot den matematiske forklaringen: summen av de *n* første påfølgende kvadratene. Det var også andre tilfeller hvor Arne reagerte på det matematiske språket. I flere av tilfellene valgte han å oversette de vanskelige ordene for seg selv. I Tabell 2. nedenfor har jeg samlet tre av hans oversettelser.

Tabell 2. Arnes oversettelser av ulike matematiske begrep.

I oppgavene	Arne sin oversettelse
Funksjon av posisjon	Ligning
Resultat	Totalantall
Summen av kvadrater	Summen av firkanter

Som illustrert i Tabell 2 har Arne blant annet oversatt funksjon av posisjon til ligning og summen av kvadrater til summen av firkanter. Det matematiske språket var derfor et tema jeg ønsket å diskutere nærmere med Arne under intervjuet. Arne fortalte da at det tok en god stund før han skjønte hva gruppa skulle gjøre:

884. Arne (…) jeg skjønte ikke helt i starten når du sa hva vi skulle gjøre i denne timen. (Lærer: Ja?) Jeg tror du snakket litt for presist. Litt for matematisk.

885. Lærer Litt for matematisk? Greit..

886. Arne Ja, jeg kan skjønne at det fungerer veldig bra i mattelabben på NTNU, men jeg.. jeg klarte ikke å følge med på det. (…) Fundamentalt sett tror jeg problemet ditt var at du skrev for mye. For jeg tror.. jeg tror vi kan si at det er tre word-sider her med kun tekst. Eller i alle fall to.

[I_G1_12.03.18]

I intervjuet gav Arne altså uttrykk for at det var utfordrende å trekke de rekke koblingene på grunn av vanskelig språk og mye tekst. Dette medførte at han forsvant helt i teksten:

893. Lærer Så var det vanskelig å trekke ut hva som var viktig fra teksten?

894. Arne Ja. (…)

[I_G1_12.03.18]

Siden Arne opplevde det presise og matematiske språket som rart, ønsket jeg å høre om han kunne tenke seg til alternative formuleringer som virket mer beskrivende:

899. Lærer (…) Så du synes at man i stedet for å kalle det summen av påfølgende kvadrater, så skulle man ha kalt det?

900. Arne Økning. Ja, det er det jeg mener med at ordene dine var litt for.. jeg følte litt at jeg ikke klarte helt å følge med i teksten fordi at det var såpass mange vanskelige ord at du ikke helt klarte å lese dem. Du måtte tenke over dem hva de betyr.

901. Lærer Mhm. Har du noen eksempler på hva som er vanskelige ord?

902. Arne Ehm. Sammenhengen mellom påfølgende kvadrater.

903. Lærer Ok, så du mener at jeg burde ha presisert det_

904. Arne	Altså du kunne ha skrevet det lettere.

905. Lærer	Ja? Hvordan kunne jeg ha skrevet det?

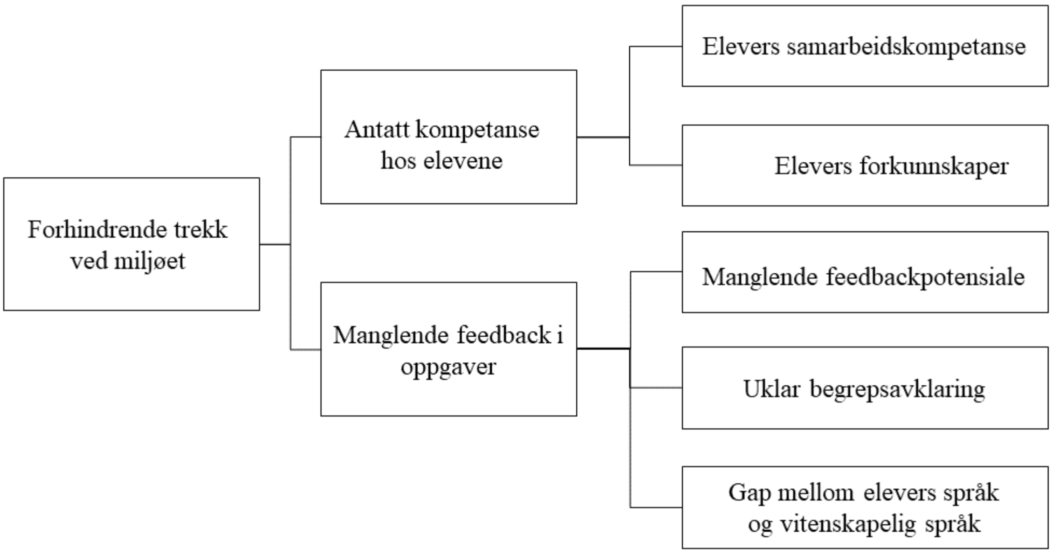
906. Arne	Figuren nedenfor viser summen av økningen. Eller, viser økningen eller noe slikt.

[I_G1_12.03.18]

I utdraget ovenfor kommer Arne med mulige alternative formuleringer av summen av påfølgende kvadrater. Disse er summen av økningen, og økningen. Økningen vil derimot ikke være et korrekt begrep for summen av påfølgende kvadrater. Til tross for at Arne i sine alternative formuleringer gir noe mangelfulle forklaringer på begrepet, er det rimelig å tro at han fortsatt har forstått essensen i begrepet. Dette basert på måten han løste oppgavene i undervisningssituasjonen. I Kapittel 5.2.6 vil jeg diskutere nærmere hvordan presisjonen i det matematiske språket eventuelt kan oversettes til et språk mer forståelig for elevene.

5.2.6 Diskusjon av funn i forhold til forhindrende trekk ved miljøet

De oppdagede svakhetene ved miljøet kan karakteriseres etter to typer: Antatt kompetanse hos elevene (elevers samarbeidskompetanse og elevers forkunnskaper); og Manglende feedback i oppgaver (manglende feedbackpotensial, uklar begrepsavklaring og gap mellom elevers språk og vitenskapelig språk). Figur 22 illustrerer identifiserte svakheter i miljøet med et flytdiagram.



Figur 22. Oversikt over identifiserte forhindrende trekk ved miljøet.

Elevenes samarbeidskompetanse og forkunnskaper skulle vise seg å være faktorer som forhindret intensjonen om at elevene skulle tilegne seg den tilsiktede målkunnskapen. Jeg som lærer måtte derfor gjøre reguleringer underveis for å sørge for at elevene allikevel fikk progresjon i kunnskapen. Disse to hindringene viser utfordringer ved å komme inn som ekstern forsker. I forkant av utprøvingen måtte jeg gjøre antakelser for hvordan jeg trodde forkunnskapene til elevene var, og hvordan jeg så for meg et mulig samarbeid kunne være. De manglende forkunnskapene er noe jeg kanskje kunne ha forebygget ved å ha en bedre dialog i forkant med den aktuelle faglæreren. Jeg kunne da ha tilpasset situasjonen bedre. Samarbeid er mer komplisert. Samtlige av de tre elevene jeg intervjuet gav uttrykk for at de trivdes best med individuelt arbeid i matematikk. Jeg mener derimot at det også er viktig å få trene seg på å samarbeide og diskutere med medelever. Ikke bare for å trene på en generell samarbeidskompetanse, men også for å trene på å snakke matematikk, noe som for øvrig også er en av de grunnleggende ferdighetene i den norske læreplanen for matematikk (UDIR, 2006). Jeg mener samarbeidskompetansen til elevene var en forhindrende faktor som kun kan forebygges ved å trene på samarbeid, og jeg vil derfor hevde at samarbeidet var noe elevene hadde godt av.

A posteriori analysen av Oppgave e viste (som nevnt tidligere) at oppgaven manglet feedbackpotensial, både med tanke på å sjekke egen løsningsmetode opp mot en (eller flere) av modellene, og at faktorisert form var ønsket form på uttrykket. Dette var altså en svakhet ved det adidaktiske miljøet, hovedsakelig forårsaket av oppgavedesignet. Dette er funn som samsvarer med andre studier (Strømskag Måsøval, 2011; Noss, Healy & Hoyles, 1997; Moss & Beatty, 2006). Som nevnt i den didaktiske analysen oppdaget blant annet Strømskag Måsøval (2011) at et uegnet adidaktisk miljø var en begrensning i lærerstudenters arbeide med mønstergeneralisering.

Lannin et al. (2006) beskriver oppgaveformuleringer som en påvirkende faktor for elevers strategier i arbeidet med generalisering. I ettertidens klokskap ser jeg at det var optimistisk å forvente at elevene på eget initiativ skulle gjøre en kontrollsjekk av formelen sin opp mot en av figurene. I Figur 23 har jeg derfor valgt å presentere en alternativ formulering av Oppgave e som jeg tror vil gi elevene nødvendig feedback, både med tanke på hvorvidt de er på rett spor (kontrollsjekk av egen formel) og at faktorisert form er ønsket form. En ulempe med denne alternative formuleringen, er at den er preget av mye tekst. Dette var noe elevene gav uttrykk for at de mislikte.

e) Bruk sammenhengene dere har identifisert ovenfor til å lage en metode for å uttrykke hvor stort *areal* (rammen) som kreves for å konstruere et tårn basert på summen av et *tilfeldig* antall påfølgende kvadrater. Oppgi arealet på faktorisert form.

Bruk metoden til å beregne hvor mange glassfliser konstruksjonen av tårn nr. 6 (inkludert rammen) vil kreve. Stemmer antallet glassfliser overens med figuren dere konstruerte i Oppgave c?

Figur 23. Alternativ oppgaveformulering av Oppgave e.

Den alternative oppgaveformuleringen som er gitt i Figur 23 gir elevene mulighet til å kontrollere formelen sin opp mot en konkret referansekontekst. Dette gir mulighet både for å gi feedback på hvorvidt de er på rett spor, men også for å holde koblingen mellom symbolene og referansekonteksten til stede. Dette tror jeg er viktig med tanke på elevenes kunnskapsutvikling på dette stadiet. Som lærer vil det derimot være viktig å gjøre elevene bevisste på at denne feedbacken kan gi indikasjoner på om de er på rett vei, men at det ikke er en gyldig rettferdiggjørelse av formelen. Denne formen for begrunnelse vil falle under det Balacheff (1988) kaller for et *avgjørende eksperiment* (sjekker et «vanskelig» eksempel).

Oppgave f skulle vise seg å være en oppgave som var utfordrende for elevene på flere måter. I ettertid ser jeg derfor at også denne oppgaven har et adidaktisk forbedringspotensial. For en elev som ser mønsteret for første gang er det ikke åpenbart hvilke relasjoner man skal lete etter. Dette er funn som samsvarer med oppdagelser Strømskag Måsøval (2011) har gjort sin doktorgrad. Den tilsiktede målkunnskapen var da at det *n*-te kvadrattallet er ekvivalent med summen av de *n* første oddetallene. Forskningsdeltakerne i Strømskag Måsøvals studie evnet å identifisere både oddetall og kvadrattall fra figurmønstrene. Da forskningsdeltakerne i studien skulle uttrykke hva figurmønsteret illustrerte i en matematisk setning, ble derimot uttrykket gitt som en formel som uttrykker at det *n*-te elementet har n^2 komponenter. Resultatet ble altså at venstre side av ekvivalensen (summen av de *n* første oddetallene) ble oversett da elevene skulle formulere en matematisk setning. Feedbackpotensialet relatert til aritmetiske relasjoner mellom oddetall og kvadrattall var altså ikke adekvat i denne studien. I ettertid ser jeg at feedbackpotensialet relatert til aritmetiske relasjoner mellom kvadratene og formelen $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ muligens ikke har vært adekvat i Oppgave f i min studie. Oppgave f kunne derfor med fordel gi elevene mer feedback som belyser strukturen til elementene. En mulig alternativ formulering av Oppgave f er derfor gitt i Figur 24.

f) Innledningsvis fikk dere vite av Kvadratoni at tårnet (de fargede glassflisene) representerer summen av de n første påfølgende kvadratene: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. Dere har nå også funnet en metode for å uttrykke rammens areal.

Bruk denne informasjonen til å lage en metode for å uttrykke tårnets areal.

La en annen gruppe prøve metoden deres for en bestemt sum av påfølgende kvadrater og se om den fungerer.

Figur 24. Alternativ formulering av Oppgave f.

Den alternative oppgaveformuleringen som er gitt i Figur 24 mener jeg tydeliggjør for elevene hva de vet på dette tidspunktet som er relevant for å løse oppgaven. Dette tror jeg kan være en feedback som muliggjør intensjonen om at elevene skal se det korrekte mønsteret, da feedbacken i større grad enn den originale formuleringen belyser strukturen til elementene (altså begge sider av ekvivalensen). Dette tror jeg gjør den alternative oppgaveformuleringen har et større potensial som en adidaktisk formulering.

Samtlige grupper behersket å uttrykke formelen for summen av de *n* første påfølgende naturlige tallene uten å koble sammenhengen mellom summen og sumformelen de identifiserte (Oppgave d). Dersom jeg som lærer ikke hadde vært oppmerksom på at elevene skulle tilegne seg denne forståelsen, hadde elevene kunnet bevege seg videre til neste oppgave med klare kunnskapshull. Jeg mener dette derfor er et godt eksempel på hvordan en epistemologisk analyse av den tilsiktede målkunnskapen kan være med å bidra til å tette kunnskapshull hos elever. I Kapittel 3 ble det trukket frem at hensikten med den epistemologiske analysen blant annet var å identifisere mulige epistemologiske hindre og bevisstgjøre seg over hvilke betingelser som vil føre til at elevene må *anvende* kunnskapen. Til tross for at jeg ikke evnet å utvikle en adidaktisk oppgaveformulering i Oppgave d, hadde jeg fremdeles kunnskapen om hvilke betingelser som ville føre til at elevene anvendte kunnskapen. Når jeg i realiseringen så at de nødvendige matematiske prosessene ikke fant sted, hadde jeg dermed mulighet til å regulere slik at elevene kom tilbake til rett spor. Dette er et eksempel på hvordan en godt forberedt lærer kunne regulere underveis der miljøet viste svakheter.

I a posteriori analysen innså jeg videre at miljøet med fordel kunne ha hatt en type feedback som tydeliggjorde for elevene hva som var rammens bredde når den andre didaktiske fasen ble introdusert. Både Gruppe 1 og 2 misforsto hva som mentes med rammens bredde, og jeg som lærer måtte etter hvert bryte den adidaktiske situasjonen og regulere ved å referere til den didaktiske kontrakten. En mulig forbedring tror jeg kan være å tydeliggjøre hva som er rammens bredde i devolusjonen. Dette tror jeg er en effektiv og god måte å forebygge slike potensielle misforståelser. Denne informasjonen vil være en viktig del av den didaktiske kontrakten, da den er med å sette rammene for den adidaktiske situasjonen.

Resultatene fra sammenligningen av a priori og a posteriori analyser indikerer også at det presise, matematiske språket var fremmed og utfordrende for elevene å forholde seg til. Arne gav blant annet tilbakemeldinger på at jeg snakket for matematisk og presist, samt at jeg brukte rare ord og rar setningsstruktur. I den epistemologiske analysen gikk jeg i dybden på den tilsiktede målkunnskapen for å forstå hvilke matematiske prosesser som fant sted. I a priori analysen designet jeg deretter oppgaver og et miljø som skulle muliggjøre intensjonen om at elevene skulle tilegne seg denne målkunnskapen. For å unngå misforståelser var jeg gjennom oppgaveheftet bevisst nøye på presisjon og tydelighet i formuleringer. A posteriori analysen antyder derimot at språket oppsto som en forhindring for elevene. Dette kan kobles opp mot et begrep Chevallard (1988) kaller for *didaktisk transposisjon* av målkunnskapen. Funnene mine indikerer at det presise, matematiske språket burde vært oversatt mer til klasserommet. Dette viser hvordan jeg som kom utenfra (som forsker/lærer) ble en forhindrende faktor i forhold til målet med situasjonen. Forskningsdeltakerne mine var ikke vant til det presise, matematiske språket jeg benyttet. Dette tror jeg derimot de kunne blitt dersom jeg hadde vært læreren deres over en lengre periode. Jeg vil hevde at en lærer som praktiserer å foreta epistemologiske analyser kan legge grunnlag for et presist språk i klassen.

Likevel finnes det potensielle forbedringer i a priori analysen, hvor jeg har gjort antakelser om prosessen fra vitenskapelig kunnskap (epistemologisk analyse) til skolekunnskap (designede oppgaver). I det følgende vil jeg diskutere mulige forbedringer for undervisningsopplegget, da med tanke på presisjonen i det matematiske språket og didaktisk transposisjon til klasserommet (oversettelse til elevenes språk).

Innledningsvis på oppgaveheftets første side informerte jeg om at tårnet skulle basere seg på *summen av påfølgende kvadrater*. Dette informerte jeg også om i devolusjonen. Det jeg derimot ikke gikk gjennom i fellesskap med elevene, var presist hva denne setningen forteller oss med algebraisk notasjon. I ettertid har jeg innsett at dette kan ha vært en mulig årsak til at språket opplevdes som utfordrende for elevene. Det var kanskje ikke like åpenbart for samtlige elever at summen av de n første påfølgende kvadratene tilsvarer $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ i algebraisk notasjon. Dette kan kobles opp mot Duvals teori om *semiotiske representasjoner*.[9] Duval (2004, 2006) hevder overgangen mellom ulike semiotiske representasjoner (eksempelvis naturlig språk til algebraisk notasjon) er selve terskelen til forståelse i en matematisk læringsprosess. Det er altså ikke utenkelig at elevene møtte på utfordringer ved å oversette det naturlige språket til algebraisk notasjon.

Da forskningsdeltakerne i min studie var elever fra matematikk R2, som er det vanskeligste matematikkfaget i den norske videregående skolen, mener jeg likevel at det ikke er urealistisk å forvente at elevene behersker den presise, matematiske notasjonen. Som nevnt tidligere mener jeg det ville vært overkommelig for elevene å lære det matematiske språket dersom de hadde fått trent på dette over en lengre periode. Likevel er det ting jeg kunne ha gjort i implementeringen for å forebygge misforståelser. Eksempelvis kunne jeg som lærer ha lagt opp til en begrepsavklaring av det vitenskapelige språket i devolusjonen. Dette innebærer å belyse summen av de *n* første påfølgende kvadratene, både i det Duval (2004, 2006) kaller naturlig språk og algebraisk notasjon. Dette tror jeg kunne forebygget noe av forvirringen som oppsto blant forskningsdeltakerne i min studie. Da summen av påfølgende kvadrater er det matematiske begrepet som hele undervisningssituasjonen bygger på, tror jeg dette kan være en sentral begrepsavklaring å understreke i devolusjonen. For å fjerne all tvil, kunne det også presiseres at kvadratene representeres av firkantene i figurmønsteret.

En annen omformulering jeg ser for meg kan fjerne noe forvirring hos enkelte, er å følge rådet fra Arne og bytte ut ordet *Resultat* med *Totalantall* i tabellen i Oppgave a. Dette tror jeg vil være et begrep som er mer gjenkjennelig og beskrivende for elevene. I intervjuet foreslo Arne også å omformulere summen av de *n* første påfølgende kvadratene til økningen, eller summen av økningen. Dette er derimot omformuleringer som har klare mangler i seg, og som dermed ikke vil forklare sammenhengen korrekt. Disse formuleringene vil blant annet ikke gjenspeile den tilsiktede målkunnskapen for undervisningssituasjonen, som nettopp baserer seg på summen av påfølgende kvadrater. Formuleringene kan også potensielt skape forvirring hos elevene, da begrepet *økning* representerer differansen mellom to påfølgende kvadrater i den første didaktiske fasen.

[9] Med *semiotiske representasjoner* menes de representasjoner som lar oss betegne, kommunisere og arbeide på og med abstrakte og uobserverbare matematiske objekter (Duval, 2004, 2006).

5.3 Styrker og svakheter ved den epistemologiske analysen

I dette delkapitlet vil jeg presentere to episoder som beskriver styrker og svakheter ved epistemologisk analyse: En godt forberedt lærer (Kapittel 5.3.1); og Introduksjon av Gaussmetoden (Kapittel 5.3.2). I Kapittel 5.3.3 vil jeg diskutere hvordan en epistemologisk analyse kan være med å påvirke elevenes muligheter for å nå den tilsiktede målkunnskapen.

5.3.1 En godt forberedt lærer

I forskningsdagboken min har jeg i etterkant av realiseringen i klasserommet skrevet at jeg som lærer følte meg komfortabel i helklassesamtalen med de gode forberedelsene som var gjort i forkant. Gjennom den epistemologiske analysen hadde jeg blitt bevisst på hvilke matematiske prosesser som fant sted, og jeg hadde belyst ulike metoder for å rettferdiggjøre økningen fra et kvadrat til det neste. Jeg hadde også forberedt meg på potensielle begrunnelser som ikke er matematisk gyldige, og hvordan jeg eventuelt skulle reagere dersom disse kom. Dette gjorde at jeg som lærer var forberedt med mulige oppfølgingsspørsmål å stille til elevene. I forskningsdagboken har jeg også trukket frem hvordan det var lettere å regulere undervisningen underveis når jeg i forkant av realiseringen hadde forberedt potensielle oppfølgingsspørsmål. Dette gjorde det lettere å gi elevene hjelp som muliggjorde progresjon i kunnskapen uten å gi for mye hjelp på veien.

5.3.2 Introduksjon av Gaussmetoden

Hensikten min med å introdusere elevene for Gaussmetoden (Oppgave d) var å gi dem et innblikk i hvordan metoden kan benyttes for å finne summen til en aritmetisk rekke, i tillegg til å se sammenhengen mellom det *n*-te trekanttallet og sumformelen $\frac{n}{2}(n+1)$. I a posteriori analysen har jeg derimot konkludert med at dette var et dårlig eksempel å introdusere Gaussmetoden med. Dette ble jeg oppmerksom på da jeg i realiseringen ba Kristoffer forklare sammenhengen mellom formelen gruppa hadde identifisert ($\frac{n}{2}(1+n)$) og summen av de *n* første påfølgende naturlige tallene:

666. Kristoffer	Eh, altså du har jo at seks er jo det største tallet i (summen), også får du at én pluss seks er sju, to pluss fem er sju og sånn der. Og sånn.. Så får du at sånn totalverdien blir jo tre ganger sju. Det er jo det som egentlig står der. (…)

[O_G2]

Da Kristoffer kom med denne ytringen ble jeg selv oppmerksom på at dette eksemplet har en relasjon som *kun* stemmer for denne aritmetiske rekka. Antall elementer og tallverdien til det siste elementet i rekka er identiske. Som forklart i Kapittel 4.3.1 (Modell av målkunnskapen) skal Gaussmetoden illustrere at det finnes $\frac{n}{2}$ par med summen $(a_1 + a_n)$, der a_1 og a_n representerer henholdsvis det første og siste elementet i rekka. Det er altså slik at *n* representerer posisjonen til det siste elementet i rekka, og ikke tallverdien. Dette medfører at det er grunn til å være kritisk til å bruke de naturlige tallene fra og med 1 til *n* som eksempel på summen av en aritmetisk rekke. Selv om Kristoffer ikke nødvendigvis har misforstått sammenhengene her, er det en mulighet for at elever kan gjøre det dersom de introduseres til Gaussmetoden med dette spesielle eksemplet. I Kapittel 5.3.3 vil jeg derfor se nærmere på hvordan jeg kunne løst denne potensielle svakheten i a priori analysen.

5.3.3 Diskusjon av funn i forhold til den epistemologiske analysen

Resultatene fra sammenligningen av a priori og a posteriori analyser viser at den epistemologiske analysen ikke bare gav positive utslag for design av oppgaver og miljø, men også for mine reguleringer underveis i realiseringen. I forkant hadde jeg forberedt potensielle oppfølgingsspørsmål å stille elevene dersom det de adidaktiske situasjonene ikke gav ønsket progresjon i kunnskapen. Disse oppfølgingsspørsmålene var utviklet med bakgrunn i den epistemologiske analysen, og hadde som mål å ikke endre kunnskapen som skulle til for å svare på spørsmålene. Tilfeller hvor målkunnskapen forsvinner fullstendig er et fenomen Brousseau (1997) kaller for *Topaze-effekt*, og var noe jeg ønsket å unngå i mine reguleringer. Erfaringene jeg tok med meg fra den epistemologiske og didaktiske analysen påvirket også min egen opplevelse av helkassesamtalene. Til tross for at disse sekvensene ble filmet, opplevde jeg å være komfortabel i rollen som ordstyrer og lærer. Dette tror jeg kom som konsekvens av at jeg var godt forberedt og bevisst på hvilke matematiske prosesser som elevene måtte igjennom, i tillegg til at jeg var forberedt på ulike begrunnelser og forklaringer.

Mine funn viser at valget med å introdusere Gaussmetoden med summen av de *n* første påfølgende naturlige tallene lot elevene få mulighet til å mistolke hvordan sammenhengen fungerte. De tre eksemplene lot elevene se relasjoner som kun gjaldt i dette tilfellet, noe som kan ha gitt grobunn for det Tall og Vinner (1989) kaller *misoppfattelser* og *potensielle konfliktfaktorer*. Dette viser en svakhet ved den epistemologiske analysen jeg gjorde i forkant av a priori analysen. Summen av de *n* første påfølgende naturlige tallene viste seg altså å være et uegnet eksempel å introdusere Gaussmetoden med. Ball, Thames og Phelps (2008) hevder en sentral del av undervisning handler om å velge strategiske tall å bruke i eksempler. Dette er en didaktisk variabel som læreren har kontroll over. Det medfører at det finnes forbedringspotensial i den epistemologiske analysen jeg gjennomførte i forkant av a priori analysen.

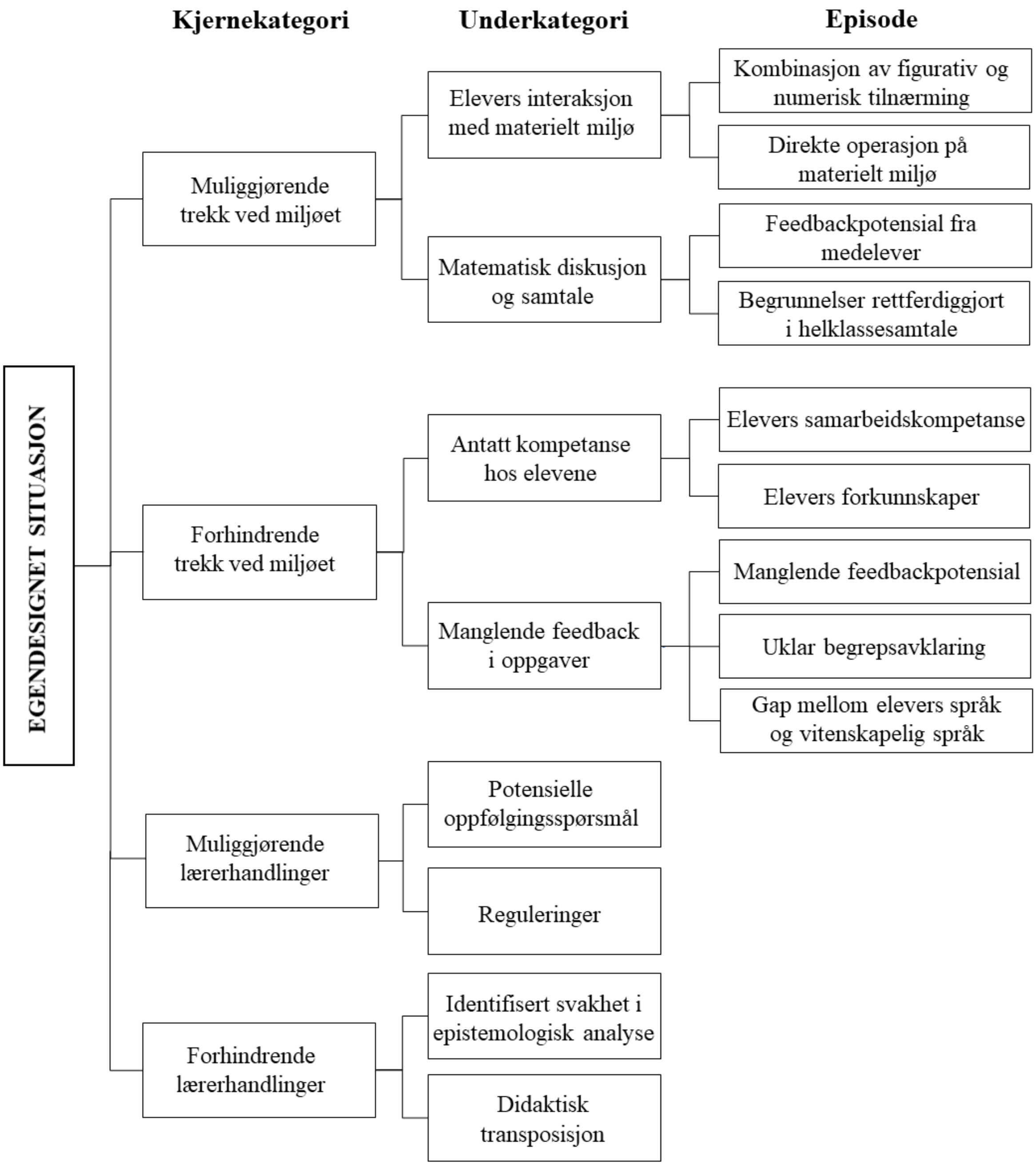
En mulig forbedring av undervisningsopplegget, som vil fjerne det *n*-te trekanttallets rolle som uheldig eksempel, er dersom man introduserer Gaussmetoden allerede i den første didaktiske fasen når elevene skal uttrykke summen av de *n* første påfølgende oddetallene. Et alternativ er da å lage en oppgave hvor elevene ved hjelp av Gaussmetoden skal vise at summen av de *n* første påfølgende oddetallene er ekvivalent med det *n*-te kvadratet. Et annet alternativ er at læreren introduserer Gaussmetoden gjennom dette generiske eksemplet i institusjonaliseringen av den første didaktiske fasen. Dette vil medføre at elevene blir introdusert for Gaussmetoden med et generisk eksempel som ikke legger grobunn for misoppfattelser som følge av spesielle egenskaper ved eksemplet. Dersom det generiske eksemplet blir forklart godt, vil sannsynligvis ikke de spesielle egenskapene til sumformelen for det *n*-te trekanttallet være en like stor potensiell konfliktfaktor for elevene.

6 Oppsummering av funn

Målet med dette prosjektet var å teste validiteten til en egendesignet didaktisk situasjon der R2-elever skulle utvikle en formel for summen av de *n* første kvadrattallene. Forskningsspørsmålet jeg søkte å finne svar på er: «Hvilke aspekter ved en designet undervisningssituasjon påvirket elevenes muligheter for å nå den tilsiktede målkunnskapen?» Flytdiagrammet i Figur 25 illustrerer aspekter ved undervisningssituasjonen jeg har identifisert som påvirket elevenes muligheter for å nå den tilsiktede målkunnskapen. Hver av de fire kjernekategoriene (muliggjørende trekk ved miljøet, forhindrende trekk ved miljøet, muliggjørende lærerhandlinger og forhindrende lærerhandlinger) er igjen delt inn i to underkategorier. Underkategoriene som omhandler miljøet er videre delt inn i ni episoder, og tilsvarer delkapitlene i Kapittel 5.1 og 5.2. Underkategoriene til kjernekategoriene som omhandler lærerhandlinger er utviklet fra delkapitlene til Kapittel 5.3 og fra diskusjonen i Kapittel 5.2.6.

Resultatene av analysen viser at muliggjørende trekk ved miljøet kan karakteriseres etter to aspekter: Elevers interaksjon med det materielle miljøet (kombinasjon av figurativ og numerisk tilnærming og direkte operasjoner på materielt miljø); og kunnskapsutvikling gjennom matematisk diskusjon og samtale (feedbackpotensial fra medelever og begrunnelser rettferdiggjort i helklassesamtale). Forhindrende trekk ved miljøet kan karakteriseres etter to aspekter: Antatt kompetanse hos elevene (elevers samarbeidskompetanse og elevers forkunnskaper); og manglende feedback i oppgaver (manglende feedbackpotensial, uklar begrepsavklaring og gap mellom elevers språk og vitenskapelig språk).

Det er fire aspekter med elevenes muligheter for å nå den tilsiktede målkunnskapen jeg mener ble påvirket av lærerhandlinger. Muliggjørende lærerhandlinger var at jeg som lærer møtte godt forberedt med potensielle oppfølgingsspørsmål, og ved behov gjorde reguleringer på de adidaktiske situasjonene (enten ved å referere til didaktisk kontrakt eller informasjonshopp). Dette viser fordelen ved å utføre en epistemologisk analyse: Læreren er godt forberedt til å møte ulike utfordringer. Forhindrende lærerhandlinger var didaktisk transposisjon (jeg oversatte ikke tilstrekkelig det vitenskapelige språket til elevenes språk) og at jeg i den epistemologiske analysen overså spesielle egenskaper ved summen av de *n* første naturlige tallene. Dette medførte at den ene oppgaven kunne gi potensielle misoppfatninger som jeg ikke var oppmerksom eller forberedt på.



Figur 25. Oversikt over aspekter som påvirket elevenes kunnskapsutvikling.

Da det er kunnskapens epistemologi som står i sentrum i TDS (og ikke eleven), er den egendesignede undervisningssituasjonen presentert i denne studien overførbar til andre klasserom hvor elevene har tilsvarende forkunnskaper. En ting å merke seg er derimot hvordan a posteriori analysen gav tydelige indikasjoner på at tidsrammene var noe begrensende med tanke på å lande opplegget. Ved eventuelle realiseringer i klasserommet kan lærere derfor med fordel sette av mer enn 90 minutter for gjennomføringen. Dette mener jeg vil være forsvarlig, da undervisningssituasjonen tar opp en rekke sentrale temaer for matematikk R2 (eksempelvis aritmetiske rekker, Gaussmetoden, generalisering av figurmønstre, argumentasjon og rettferdiggjøring, induksonsbevis etc.).

7 Didaktiske refleksjoner

Forskningen jeg rapporterer om her baserer seg på en metodologi for instruksjonsdesign i matematikk, hvor oppgaver designes med mål om at en epistemisk og generisk elev skal lære en spesifikk matematisk kunnskap. Det faglige temaet for prosjektet er algebra og generalisering av figurmønstre. I Kapittel 7.1 vil jeg gjøre didaktiske refleksjoner rundt det faglige temaet algebra. Her vil jeg blant annet ta for meg figurmønstrets rolle i læreplaner og matematikkundervisning, samt se på hvilke muligheter en undervisningssituasjon tilsvarende den presentert her åpner opp for. I Kapittel 7.2 vil jeg reflektere rundt metodologien jeg har benyttet, og potensialet TDS har for utvikling av undervisningssituasjoner i matematikk.

7.1 Algebra i læreplaner og matematikkundervisning

Generalisering av figurmønstre er et tema inkludert i kunnskapsområdet algebra i læreplaner i mange ulike land; deriblant Norge (UDIR, 2006), England (Department for Education, 2014), USA (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), Canada (Ontario Ministry of Education and Teaching, 2005) og Australia (Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority, 2016). De norske lærebøkene Sinus R2 (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Svorstøl & Hals, 2015) og Matematikk R2 (Heir, Erstad, Moe & Skrede, 2008) benytter generelt figurmønstre lite i sine algebrakapitler. Dersom en lærer legger opp til en undervisning som følger læreboka, vil altså elevene bruke begrenset tid og ressurser på generaliseringsaktiviteter med figurmønstre. Med bakgrunn i den epistemologiske analysen gitt i Kapittel 4.1 mener jeg dette vil være en uheldig tilnærming i søken etter algebraisk tenkning og forståelse. Som Strømskag (2015) forfekter er hensikten med figurmønstre å bidra med en referansekontekst som gir de algebraiske symbolene mening. Dette mener jeg man kan dra nytte av i innlæringen av andre algebraiske temaer. Generalisering av figurmønstre kan eksempelvis benyttes som didaktiske verktøy for økt algebraisk forståelse av induksjonsbevis. I tradisjonell matematikkundervisning blir elevene gjerne introdusert til induksjonsbevis av læreren, hvorpå de jobber med oppgaver i boka. Med en slik tilnærming tror jeg induksjonsbeviset fort kan oppleves som nok en metode som skal læres. Den egendesignede didaktiske undervisningssituasjonen presentert i denne studien er derimot et eksempel på hvordan induksjonsbevis kan introduseres på en alternativ måte hvor elevene får se en faktisk nytte av det begrepsmessige, formelle beviset. Dette tror jeg kan gi elevene motivasjon og være verdifullt med tanke på elevenes kunnskapsutvikling og algebraiske forståelse. I stedet for å undervise temaer separat legger altså undervisningssituasjoner som den presentert i denne oppgaven til rette for at elever får satt lys på sammenhenger mellom ulike temaer og kompetansemål innenfor algebra. Dette tror jeg kan være sentralt og viktig for å øke norske elevers kompetanse innenfor algebra.

Min studie viste at forskningsdeltakerne var uvante med bevis og rettferdiggjørelse av egne løsningsstrategier. Ikke bare var de usikre på hvordan man beviser, men også hvordan de skulle evaluere gyldigheten til egne resonnement og begrunnelser. Dette er funn som samsvarer med andre studier presentert i den didaktiske analysen. Samtidig viser den epistemologiske analysen hvor viktig og sentral bevisets rolle er for algebraisk forståelse og tenkning. Dette mener jeg viser at det er viktig at man jobber med argumentasjon og bevis i matematikkundervisning, selv om elever selv viser motstand til tilnærmingen. Dersom elever blir eksponert for bevis og begrunnelser på tilsvarende måter som i undervisningssituasjonen presentert i denne studien, tror jeg elever kan øke sin kompetanse innenfor argumentasjon og rettferdiggjørelse. Jeg vil altså hevde at begrunnelser og bevis kan brukes som didaktiske verktøy for å skape progresjon i elevenes kunnskap og algebraisk forståelse.

7.2 TDS som didaktisk verktøy

Forskningen jeg rapporterer om her er relevant for matematikkdidaktikere og lærere som ønsker økt kunnskap og innsikt i designutvikling og implementering av undervisningssituasjoner med en tilsiktet matematisk målkunnskap. Fra dette prosjektet har jeg eksempelvis erfart at et presist matematisk språk ikke nødvendigvis gir elevene like mye informasjon som intensjonen tilsier. Mine funn viser at det i enkelte tilfeller kan være nødvendig å oversette det vitenskapelige språket til skolekontekst for at elevene skal få vist sitt potensial og ha progresjon i kunnskapen. Didaktisk transposisjon av matematisk kunnskap er derfor et begrep lærere må være bevisste på.

En annen didaktisk kunnskap som har blitt belyst gjennom dette prosjektet, er viktigheten av å velge gode eksempler. Jeg introduserte elevene for Gaussmetoden med et eksempel som potensielt kan skape misoppfatninger hos elever. Dette kunne ha fått konsekvenser for kunnskapsutviklingen hos mine forskningsdeltakere. Som Ball et al. (2008) forfekter avhenger god undervisning av evnen til å velge gode eksempler. Som lærer burde man derfor være oppmerksom på om eksemplene man introduserer har uegnede egenskaper, eller om de fungerer som gode generiske eksempler. Dette indikerer at god undervisning er nært knyttet til gode forberedelser, eksempelvis gjennom en a priori analyse basert på en epistemologisk og didaktisk analyse.

Fra dette prosjektet har jeg også erfart at man som lærer kan tilegne seg viktige didaktiske verktøy gjennom å studere målkunnskapens natur. Ved å studere nærmere hvilke matematiske prosesser elevene må gjennom for å tilegne seg den tilsiktede målkunnskapen *før* realiseringen i klasserommet, har man mulighet til å utvikle oppgaver som muliggjør elevenes potensiale for å lære målkunnskapen. Dette vil også medføre at man som lærer er godt forberedt på hvordan undervisningssituasjonen kan utvikle seg, og dermed kan stille forberedt med potensielle oppfølgingsspørsmål. Epistemologiske analyser kan med andre ord benyttes som didaktiske verktøy hvor læreren får dra nytte av og utviklet sin faglige kompetanse.

Ovenfor har jeg beskrevet hvordan dette prosjektet har bidratt med ny didaktisk kunnskap for egen undervisningspraksis. Sett fra et større perspektiv vil jeg hevde TDS er et rammeverk som tillater deg som lærer (eller forsker) å forstå ulike didaktiske fenomen som kan oppstå i en lærings- og undervisningssituasjon hvor målet er at elevene skal tilegne seg en spesifikk matematisk kunnskap. Gjennom ulike vitenskapelige begreper får du som lærer (eller forsker) de verktøyene som trengs for å analysere og sammenligne intensjonen med resultatet (sammenligning av a priori og a posteriori analyser). Dette medfører at TDS gir deg som lærer den støtten du trenger for å planlegge, designe, implementere, analysere og evaluere egen undervisning. Dette kan gi flere positive følger, både for lærerutvikling og undervisningspraksis, for å skape ressurser for og variasjon i undervisning og læring, og for å finne svar på spørsmål knyttet til matematikkundervisning og matematikkdidaktikk. I så måte kan TDS ansees som et didaktisk verktøy.

Gjennom dette prosjektet har jeg bidratt med innsikt i hvordan en didaktisk undervisningssituasjon om algebraisk generalisering kan designes, basert på grundige epistemologiske og didaktiske analyser av en spesifikk algebraisk kunnskap. Likevel er det en rekke forskningsspørsmål det gjenstår å finne svar på. Et relevant tema for videre forskning kunne eksempelvis være å forske på hvordan lærerens epistemologiske kunnskap påvirker elevenes progresjon i kunnskapen. Det kunne også vært spennende å gjøre nærmere undersøkelser på institusjonaliseringsfasen og overgangen fra kunnskapen som utvikles i selve situasjonen og til dekontekstualisert, generalisert kunnskap.

I tillegg til at situasjoner som baserer seg på TDS legger til rette for forskning og utvikling, har undervisningssituasjoner basert på TDS også positive konsekvenser for elevene. Eksempelvis legger Strømskag (2017b) sitt instruksjonsdesign i matematikk til rette for at elevene selv får stå for oppdagelser av matematiske relasjoner. Dette kan få positive konsekvenser for elevenes forståelse den matematiske kunnskapen, samt bidra til økt mestringsfølelse i matematikkfaget.

Dersom den adidaktiske situasjonen har et adekvat potensial, vil det ikke være behov for signifikant hjelp fra læreren. Fundamentale situasjoner som baserer seg på TDS kan altså bidra til økt selvstendighet, mestring og kunnskapsutvikling hos elevene. Samtidig tillater rammeverket at læreren har kontroll på utviklingen, da oppgavene (og eventuelle reguleringer av læreren) bidrar med feedback på hvorvidt elevene er på rett spor.

Samarbeidskompetanse er også et viktig kunnskapsområde innenfor matematikk som elever trenger å trene på. I tillegg er det å snakke matematikk en av de grunnleggende ferdighetene i den norske læreplanen for matematikk (UDIR, 2006). Gjennom den egendesignede didaktiske undervisningssituasjonen presentert i denne oppgaven har jeg vist at Strømskag (2017b) sitt instruksjonsdesign i matematikk kan benyttes som en ressurs for å skape adidaktiske situasjoner hvor elever må samarbeide og skape matematiske diskusjoner og samtaler. Dette viser at TDS kan bidra til variert matematikkundervisning hvor elever får trent på ferdigheter som ansees som sentrale og viktige, men som ikke blir fokusert på i like stor grad ved tradisjonell matematikkundervisning (hvor læreren underviser ved tavla, etterfulgt av individuelt arbeid med oppgaver fra læreboka).

I lys av diskusjonen ovenfor ser jeg det derfor som gode muligheter for å benytte TDS i utviklingen av undervisningssituasjoner innenfor andre fagområder i matematikk. Fremtidige prosjekt kan blant annet ta for seg didaktiske situasjoner hvor elevene skal utvikle kunnskap innenfor eksempelvis funksjonslære og geometri. En mulighet er å designe en fundamental situasjon hvor elevene skal utvikle kunnskap om relasjonen mellom strekning, fart og akselerasjon. Dette vil kunne gi positive følger for elevenes forståelse i både matematikk og fysikk. Dersom en ønsker kan man også dra inn vektorer i et slikt opplegg. Et alternativt opplegg innenfor geometri kan være å designe en situasjon hvor elever skal utvikle kunnskap om formlikhet. Her kan eksempelvis elevene få i oppgave å konstruere en småskala modell (med materielt miljø) som skal representere samme modell i en større skala (eksempelvis en bygning). Ved utvikling av nye situasjoner kan også *Proofs without words* av Roger Nelsen (1993) anbefales som god kilde for idémyldring. Denne boka tar for seg mange spennende sammenhenger (særlig innenfor algebra og geometri) som man kan la seg inspirere av.

På grunn av rammene rundt min studie fikk jeg kun testet ut den egendesignede didaktiske undervisningssituasjonen én gang. I fremtiden ser jeg det derfor som en gyllen mulighet at jeg undersøker situasjonen med de skisserte alternativene empirisk i eget klasserom. Slik vil jeg kunne evaluere opplegget enda en gang, for å igjen identifisere mulige forbedringer.

Referanseliste

Artigue, M., Haspekian, M., & Corblin-Lenfant, A. (2014). Introduction to the theory of didactical situations (TDS). I A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Red.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (s. 47-65). Berlin: Springer.

Artigue, M. (2015). Perspectives on design research: The case of didactical engineering. I A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Red.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (s. 467-496). Dordrecht: Springer.

Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority. (2016). *The Australian Curriculum Mathematics.* Hentet fra https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics teachers and children* (s. 216-230). London: Hodder and Stoughton.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bergem, O. K., Kaarstein, H., & Nilsen, T. (Red.). (2016). *Vi kan lykkes i realfag: Resultater og analyser fra TIMSS 2015*. Oslo: Universitetsforlaget.

Bjørndal, K. E. (2013). Pedagogisk designforskning – en forskningsstrategi for å fremme bedre undervisning og læring. I M. Brekke & T. Tiller (Red.), *Læreren som forsker: Innføring i forskningsarbeid i skolen* (s. 245-259). Oslo: Universitetsforlaget.

Breiteig, T. & Grevholm, B. (2006). The transition from arithmetic to algebra: To reason, explain, argue, generalize and justify. I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Red.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, s. 225-232). Praha: PME.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques.* Dordrecht: Kluwer.

Calderhead, J. (1981). Stimulated recall: A method for research on teaching. *The British Journal of Educational Psychology*, *51*, 211-217.

Chevallard, Y. (1989). On didactic transposition theory: Some introductory notes. I H. G. Steiner & M. Hejny (Red.), *Proceedings of the International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education* (s. 51-62). University of Bielefeld, Germany, and University of Bratislava, Slovakia.

Denzin, N. K. (1997). Triangulation in Educational Research. I J. P. Keeves (Red.), *Educational Research, Methodology, and Measurement: An international Handbook* (2. utg.) (s. 318-322). Oxford: Elsevier.

Department for Education. (2014). *National curriculum in England: mathematics programmes of study*. Hentet fra https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study

Duval, R. (2004). A crucial issue in mathematics education: The ability to change representation register. *Regular lecture at ICME 10, Copenhagen*.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Heir, O., Erstad, G., Moe, H., Skrede, P. A. (2008). *Matematikk R2*. H. Aschehoug & Co.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. I E. Fennema & T. Romberg (Red.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (s. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 390-419). New York: Macmillan.

Kjærnsli, M. & Olsen, R. V. (Red.). (2013). *Fortsatt en vei å gå: Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo: Universitetsforlaget.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*, 231 -258.

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3). 3-28.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. I. N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (s. 87-106). Dordrecht: Kluwer.

Lee, L. & Wheeler, D. (1987). *Algebraic thinking in high school students: their conceptions of generalization and justification*. Concordia University: Montreal.

Lee, L. & Wheeler, D. (1989). The Arithmetic Connection. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 41-54.

Mangiante-Orsola, C., Perrin-Glorian, M.-J., & Strømskag, H. (under publisering). Theory of didactical situations as a tool to understand and develop mathematics teaching practices. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 23*.

Margolinas, C. & Drijvers, P. (2015). Didactical engineering in France; an insider's and outsider's view on its foundations, its practice and its impact. *ZDM Mathematics Education, 47*, 893-903.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (s. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Moss, J., & Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning, 1*, 445-465.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: Forfatter.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking*. Washington: The Mathematical Association of America.

Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 203-233.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O., & Hals, S. (2015). *Sinus matematikk R2: Lærebok i matematikk, studiespesialiserende program*. Oslo: Cappelen Damm.

Ontario Ministry of Education and Training. (2005). *The Ontario curriculum, Grades 1-8: Mathematics (Rev. ed.)*. Hentet fra http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/elementary/math18curr.pdf

Orton, J. (1997). Matchsticks, pattern and generalisation. *Education 3-13, 25*(1), 61-65.

Postholm, M. B. & Moen, T. (2009). *Forsknings- og utviklingsarbeid i skolen. En metodebok for lærere, studenter og forskere*. Oslo: Universitetsforlaget.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. I. N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (s. 107-111). Dordrecht: Kluwer.

Robson, C., & McCartan, K. (2016). *Real world research: A resource for users of social research methods in applied settings* (4.utg.). Chichester: Wiley.

Sollid, H. (2013). Intervju som forskningsmetode i klasseromsforskning. I M. Brekke & T. Tiller (Red.), *Læreren som forsker: Innføring i forskningsarbeid i skolen* (s. 124-137). Oslo: Universitetsforlaget.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Strømskag, H. (2015). A pattern-based approach to elementary algebra. I K. Krainer & N. Vondrová (Red.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (s. 474-480). Praha: European Society for Research in Mathematics Education.

Strømskag, H. (2017a). Et miljø for algebraisk generalisering og dets innvirkning på studenters matematiske aktivitet. *Nordic Studies in Mathematics Education, 22*(2), 71-91.

Strømskag, H. (2017b). A methodology for instructional design in mathematics - with the generic and epistemic student at the centre. *ZDM Mathematics Education, 49*, 909-921.

Strømskag Måsøval, H. (2011). *Factors constraining students' establishment of algebraic generality in shape patterns: a case study of didactical situations in mathematics at a university college* (Doktoravhandling). Universitetet i Agder, Kristiansand.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplanverket for kunnskapsløftet*. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/

Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. & Nieveen, N. (2006). *Educational design research*. London: Routledge.

Vedlegg A

Intervjuguide

Spørsmålene som vil stilles vil være koblet opp mot oppgaveteksten og situasjonen som designes. Fokuset for intervjuet vil være på hva som har vært katalysatorer for at elevene utvikler ønsket kunnskap, og hva som har vært hindringer.

Det vil være et gruppeintervju med en gruppe som har samarbeidet gjennom hele undervisningsopplegget.

Stimulated recall:

Vil ha med materiale (oppgavetekst, konkretiseringsmateriell, løsninger) → og snakker og reflekterer med elevene ut fra det.

Ønsker spesifikt å spørre om de ulike fasene i undervisningsopplegget:

- Devolusjonen
- Aksjonsfasen
    - Hvordan startet dere å arbeide med oppgavene?
    - Hadde dere en bestemt plan, eller bare satte dere i gang med å prøve noe?
- Formuleringsfasen
- Valideringsfasen
    - Hvilken erfaring har du med å rettferdiggjøre formler og uttrykk?
- Institusjonaliseringsfasen

Generelle spørsmål:

- Fortell meg om oppgaven. Hva gikk den ut på?
- Var det noe med oppgaveteksten som opplevdes som uklar?
- Opplevde dere at det var for mye tekst? Hvordan kunne i så fall dette vært løst?
- Har dere løst lignende oppgaver i matematikk tidligere?
    - Hvis nei; hvordan opplevde dere denne metoden?
    - Hvis ja; Husket dere dette mens dere arbeidet med disse oppgavene?
      Brukte du dette mens du løste denne oppgaven? Hvordan da?
- Var det noen gang underveis at dere sto fast, eller følte at strategien dere utviklet ville ta for lang tid?
- Hvilke matematiske temaer mener dere at dere har jobbet med i dag?

- Følte dere at det var greit med tid på oppgavene?
    - Hvis nei; Kunne dere tenkt dere å bruke lengre tid på et slikt undervisningsopplegg?
      Opplevde dere at tiden ble en hindring for utviklingen?
- Hvilke deler av oppgavene opplevde dere som mest utfordrende? Hvorfor?
- Hvilke erfaringer har du/dere med gruppesamarbeid i matematikk? Følte du det hjalp å samarbeide med medelever?
- Følte du oppgaven hadde en hensikt og mening?

Struktur: Intervjuet vil være strukturert med oppvarmingsspørsmål, refleksjonsspørsmål og avrundingsspørsmål.

Underveistolkninger: Dersom jeg underveis er usikker på hva elevene mener, vil jeg stille spørsmål av typen:

- Kan jeg forstå deg dithen at du mener at… ?
- Hvis jeg forstår deg riktig nå, mener du at… ?
- Jeg prøver å få tak i hva du sier; er det slik at du mener at… ?
- Jeg må prøve å oppsummere det du sier. Først sier du at…, og så sier du at… Er det riktig oppfattet?

Vedlegg B

Heidi Strømskag

7491 TRONDHEIM

Vår dato: 01.02.2018	Vår ref: 58387 / 3 / AGL	Deres dato:	Deres ref:

Vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning § 31

Personvernombudet for forskning viser til meldeskjema mottatt 15.01.2018 for prosjektet:

58387	*Design av adidaktiske undervisningssituasjoner i matematikk*
Behandlingsansvarlig	*NTNU, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Heidi Strømskag*
Student	*Solveig Voktor Svinvik*

Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon finner vi at prosjektet er meldepliktig og at personopplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet er regulert av personopplysningsloven § 31. På den neste siden er vår vurdering av prosjektopplegget slik det er meldt til oss. Du kan nå gå i gang med å behandle personopplysninger.

Vilkår for vår anbefaling

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:
•opplysningene gitt i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon
•vår prosjektvurdering, se side 2
•eventuell korrespondanse med oss

Vi forutsetter at du ikke innhenter sensitive personopplysninger.

Meld fra hvis du gjør vesentlige endringer i prosjektet

Dersom prosjektet endrer seg, kan det være nødvendig å sende inn endringsmelding. På våre nettsider finner du svar på hvilke endringer du må melde, samt endringsskjema.

Opplysninger om prosjektet blir lagt ut på våre nettsider og i Meldingsarkivet

Vi har lagt ut opplysninger om prosjektet på nettsidene våre. Alle våre institusjoner har også tilgang til egne prosjekter i Meldingsarkivet.

Vi tar kontakt om status for behandling av personopplysninger ved prosjektslutt

Ved prosjektslutt 01.09.2018 vil vi ta kontakt for å avklare status for behandlingen av

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

personopplysninger.

Se våre nettsider eller ta kontakt dersom du har spørsmål. Vi ønsker lykke til med prosjektet!

Dag Kiberg

Audun Løvlie

Kontaktperson: Audun Løvlie tlf: 55 58 23 07 / audun.lovlie@nsd.no

Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Solveig Voktor Svinvik, solveivs@stud.ntnu.no

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 58387

Du har opplyst i meldeskjema at utvalget vil motta skriftlig og muntlig informasjon om prosjektet, og samtykke skriftlig til å delta. Vår vurdering er at informasjonsskrivet til utvalget er godt utformet.

Personvernombudet forutsetter at du/dere behandler alle data i tråd med NTNU sine retningslinjer for datahåndtering og informasjonssikkerhet. Vi legger til grunn at bruk av privat pc er i samsvar med institusjonens retningslinjer.

Prosjektslutt er oppgitt til 01.09.2018. Det fremgår av meldeskjema/informasjonsskriv at du/dere vil anonymisere datamaterialet ved prosjektslutt.
Anonymisering innebærer vanligvis å:
- slette direkte identifiserbare opplysninger som navn, fødselsnummer, koblingsnøkkel
- slette eller omskrive/gruppere indirekte identifiserbare opplysninger som bosted/arbeidssted, alder, kjønn
- slette lydopptak
- slette eller sladde bilde- og videoopptak

For en utdypende beskrivelse av anonymisering av personopplysninger, se Datatilsynets veileder:
https://www.datatilsynet.no/globalassets/global/regelverk-skjema/veiledere/anonymisering-veileder-041115.pdf

Vedlegg C

Solveig Voktor Svinvik
<adresse>
<tlf, epost>

<Sted>, 09.03.2018

Til elever i matematikk R2 ved [redacted] videregående skole

Anmodning om tillatelse til video-/lydopptak av undervisning/intervju, og ev. innsamling av elevbesvarelser/tekster.

Jeg er student på lektorprogrammet i realfag ved NTNU. Denne våren skal jeg skrive min masteroppgave, og skal i denne sammenheng utvikle og gjennomføre et eksperiment i matematikkundervisning. Eksperimentet handler i korte trekk om at elevene skal lære en tilsiktet målkunnskap gjennom å aktiveres av en situasjon. Målet med eksperimentet er å utvikle mer kunnskap og forståelse for hvordan matematikkundervisning kan legges opp med et økt fokus på adidaktiske situasjoner (elevarbeid uten hjelp fra lærer). Gjennom dette eksperimentet ønsker jeg altså å finne svar på hva som er katalysatorer for at elevene utvikler ønsket kunnskap, og hva som oppleves som hindringer.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, er det ønskelig å gjøre videoopptak av undervisningssekvenser og intervju med elever. Derfor ber jeg om deres tillatelse til å kunne gjøre videoopptak og lydopptak, samt samle inn tekster skrevet av dere som elever i R2 ved [redacted] videregående skole. Det er snakk om 2-3 skoletimer. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Under selve observasjonen vil elevene bli delt opp i grupper på tre. De skal samarbeide om å finne en best mulig løsning på en gitt situasjon, og vil få i oppgave å formulere og validere strategien som utvikles. Til slutt vil det være en helklassefrekvens der jeg (studenten) sørger for å trekke inn formell matematikk. Det er disse sekvensene jeg ønsker å utføre videoopptak av. I etterkant ønsker jeg også å samle inn notater elevene har gjort seg underveis for å få et større datagrunnlag. Enkelte elever vil også kunne bli forespurt om å delta i et kort gruppeintervju som omhandler gjennomføringen av undervisningsopplegget. Opptakene vil kun bli sett/hørt av meg og min veileder ved NTNU. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil involverte personer bli anonymisert. Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, senest 1. september 2018 (etter sensurdato).

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer).

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å være med på det. Jeg ber dere om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til å være med på prosjektet i klassen.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen

Solveig Voktor Svinvik

Tillatelse

Som del av min masteroppgave gjennom lektorutdanningen ved NTNU ber jeg om tillatelse til å samtale med deg, gjøre lyd- og videoopptak der du er med og kopiere/bruke tekster skrevet av deg.

Forutsetningen for tillatelsen er at tekster og annet innsamlet materiale blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

Sett kryss i den ruta som passer:

☐ Jeg gir tillatelse.

☐ Jeg gir ikke tillatelse.

Dato: ………………………

Elevens fornavn og etternavn: ……………….……………………. …………………..

Underskrift av elev: …………………………………………………………..

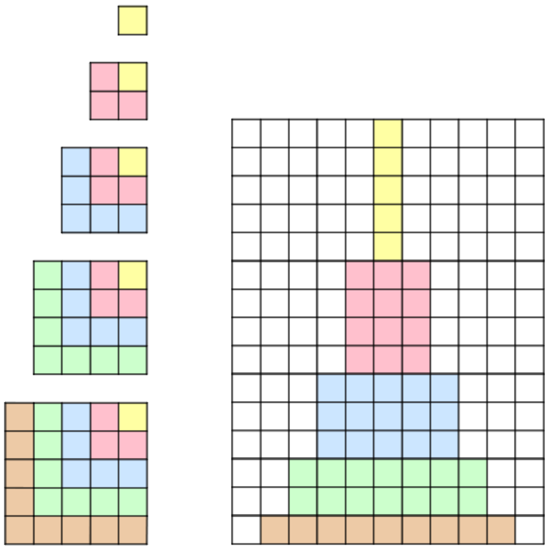
Vennligst returner svarslippen til lærer så snart som mulig.

Vedlegg D

Kvadratisk Kunst på Oslo Plaza

Kunstneren Kvadratoni har fått i oppdrag å dekorere en av ytterveggene til Oslo Plaza. Kunstverket skal illustrere et tårn. Kvadratoni spesialiserer seg på kvadratiske mønster, og ønsker å skape et unikt tårn som baserer seg på *summen av påfølgende kvadrater*.

En illustrasjon av hvordan konstruksjonen av tårnet vil se ut for summen av de fem første kvadratene er gitt i figuren til høyre. Til venstre i figuren er de fem kvadratene, bygd opp av mindre enhetskvadrater. Rammen til høyre i figuren illustrerer arealet av ytterveggen som kreves for å konstruere tårnet. Merk at det er én blank glassflis på hver side av tårnets nederste rad, altså der tårnet er tykkest.

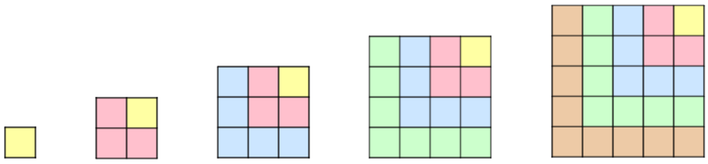


Illustrasjon av Oslo Plaza. Høyden på bygget er 117m, og bredden er 50m.

Gruppen deres har fått i oppgave av Kvadratoni å kartlegge hvor mye av ytterveggens *areal* (tilsvarer rammen) som vil kreves for å konstruere det unike tårnet som baserer seg på summen av et *tilfeldig* antall påfølgende kvadrater. Dette vil gjøre det lettere for Kvadratoni å finne den maksimale størrelsen på kunstverket som vil passe på ytterveggen til Oslo Plaza.

Kunstverket skal lages av glassfliser i ulike farger. Størrelsen på en glassflis (et enhetskvadrat) er 1x1 dm^2.

Som et første steg i konstruksjonen tipser Kvadratoni gruppen om å studere nærmere sammenhengen mellom påfølgende kvadrater.



a) Skriv av tabellen nedenfor og fyll ut for alle de åpne rutene (også for den *n*-te posisjonen). Merk at de to rutene lengst til høyre på den nederste linjen (posisjon *n*) vil få et likt funksjonsuttrykk.

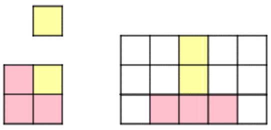
Posisjon (kvadrat nr.)	Sum	Resultat	Økning (fra forrige)	Økningen som funksjon av posisjonen
1	1	$1 = 1^2$	$-$	$-$
2	$1+3$	$4 = 2^2$	3	$2 \cdot 2 - 1$
3	$1+3+5$	$9 = 3^2$	5	$2 \cdot 3 - 1$
4				
5				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n				

La en annen gruppe prøve det generelle uttrykket deres for økningen mellom to påfølgende kvadrater, og se om den fungerer for to tilfeldige (påfølgende) kvadrater.

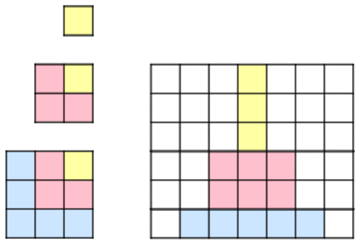
b) Begrunn at det generelle uttrykket for *økningen som funksjon av posisjonen* er riktig for økningen mellom alle påfølgende kvadrater.

Arealbetraktninger

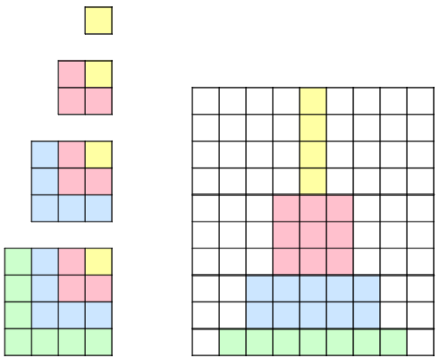
Neste steg er nå å kartlegge hvor stort rammens areal (ytterveggens areal) må være for å dekke et tårn som baserer seg på summen av et *tilfeldig* antall påfølgende kvadrater. Nedenfor har Kvadratoni gitt fire modeller av hvordan tårnet og rammens areal vil se ut for henholdsvis summen av de to, tre, fire og fem første kvadratene.



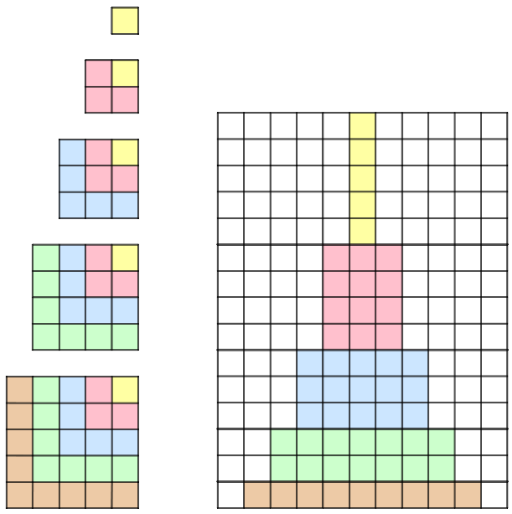
Tårn nr. 2



Tårn nr. 3



Tårn nr. 4



Tårn nr. 5

c) Bruk tilgjengelig utstyr og tegn tårn nr. 6, som baserer seg på summen av de seks første kvadratene. Klipp opp slik at rammen får korrekt størrelse. Skriv av tabellen nedenfor og bruk den som hjelp til konstruksjonen.

Tårn nr. (posisjon)	Rammens høyde	Rammens bredde	Rammens bredde som funksjon av posisjonen

d) Høyden til tårn nr. *n* (og dermed rammen) kan beskrives som en sum av de *n* første naturlige tallene ($1 + 2 + 3 + \cdots + n$), hvor hvert tall representeres av en ny farge i tårnet (se modellene på forrige side).

For å gjøre det lettere å beregne rammens areal ønsker Kvadratoni at dere ved hjelp av sumformelen skal uttrykke tårnets høyde som en funksjon av *posisjonen* (altså tårnets nummer). Et tips er å summere to og to ledd (slik illustrert nedenfor) og bruke dette, samt *posisjonen*, for å finne et generelt funksjonsuttrykk for summen.

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4}{2}\,(1 + 4)$$

5 5

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6}{2}\,(1 + 6)$$

7 7 7

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) + n = \underline{\hspace{6em}}$$

$n+1$ $n+1$ $n+1$

e) Bruk sammenhengene dere har identifisert ovenfor til å lage en metode for å uttrykke hvor stort *areal* (rammen) som kreves for å konstruere et tårn basert på summen av et *tilfeldig* antall påfølgende kvadrater.

f) Som en siste del av kartleggingsfasen ønsker Kvadratoni at dere skal finne en metode for å uttrykke hvor mange av enhetskvadratene (glassflisene) fra rammens areal som opptas av tårnet (altså de fargede glassflisene som representerer summen av de n første påfølgende kvadratene).

La en annen gruppe prøve metoden deres for en bestemt sum av påfølgende kvadrater og se om den fungerer.

g) Begrunn at det generelle uttrykket dere fant i d) (hvor stor andel av rammens areal som opptas av den opprinnelige summen av n påfølgende kvadrater) gjelder i alle tilfeller.

Ekstraoppgave:

Oslo Plaza er 117m høyt og 50m bredt. Størrelsen på en glassflis er 1x1 dm^2.

Hvor stor kan summen av påfølgende kvadrater maksimalt være for å passe på ytterveggen til Oslo Plaza?

Vedlegg E

Transkripsjonskoder:

<u>Understreket tekst</u>	Tekst resitert fra oppgaven de jobber med (leser oppgaveteksten på nytt)
[]	Uartikulert eller ikke hørbar ytring
…	Pause (opp til 3 sekunder)
..	Liten nøling
_ (understrek)	Avbrytelse
Kursiv	Trykk
(Tekst i parentes)	Redegjørelse for ikke-verbal handling, eller kommentar
(NN: interjeksjon)	Interjeksjon ved NN i løpet av en annens ytring
(…)	Har hoppet over deler av ytringen.

For å skille data fra observasjon og data fra intervju bruker jeg følgende notasjon:

[O_G1]	Utdrag fra observasjon av Gruppe 1
[O_G2]	Utdrag fra observasjon av Gruppe 2
[I_G1_dato]	Utdrag fra Intervju med deltaker fra Gruppe 1 og dato
[I_G2_dato]	Utdrag fra Intervju med deltaker fra Gruppe 2 og dato
[O_H]	Utdrag fra observasjon av helklassesamtale