Kunnskap for en bedre verden

R1-elevers begrepsbilde av bevis i geometri

En studie av R1-elevers syn på bevis i geometri, og samspillet mellom begrepsbilder av bevis og argumentasjon

Øyvind Haugan Lien

Master i realfag
Innlevert: juni 2018
Hovedveileder: Heidi Strømskag, IMF

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven markerer nå slutten,
på fem år som studiegutten.
Det gikk litt i stå,
da jeg tok opp 4K.
Men glem nå det: Det er tid for salutten!

Jeg må nå få inderlig takke,
alle som har dratt meg opp en bratt bakke.
Bakken var tung.
Flaks jeg var ung!
Og at vi bestandig gikk i allværsjakke.

Takk til Anita Valenta, min veileder.
Sammen har vi smidd oppgave som to smeder.
Din ærlige mening
har ført til en ening.
Du fortjener virkelig all verdens heder!

Takk til skoler og elever som har deltatt
i studien som har blitt til (både på dag og natt).
Uten dere en master det ei
ville blitt i slik en fei.
Jeg takker dere for å ha bidratt.

Takk til Susann og Magne og Rikke.
Den støtten jeg fikk glemmer jeg ikke!
Mange fantastiske stunder,
men ei med irske hunder,
får meg støtt til å smile og nikke.

Takk til bordtennisrommet og venner,
som stiller opp hver gang jeg sender
et blikk i den lei
der baller rører seg.
Det gjør at konkurranseinstinktet mitt tenner.

Takk til de mange sportslige muligheter
i regi av Spanskrørets beste atleter.
Både på strek med ball i hand
og ved vantet for å drikke litt vann
har jeg satt pris på alt av kamper mot alle densiteter.

En takk til NTNU må også gå.
Takk for at jeg lærte å kunnskap få.
Og også til SiT
som matet meg litt,
både i kantiner og i kiosken òg.

Takk til Polet og gode kolleger.
På lørdager vi alltid sentrum preger.
Med et meget blidt sinn
og lønsjer med litt Kinn.
For dere jeg hever mitt beger!

Til sist må jeg takke den øvrige gjengen:
Takk til venner og familie i Schengen.
Uten støtten fra dere
hadde jeg tatt meg en ferie
og trolig lagt meg rett ned i sengen.

Øyvind Haugan Lien
Trondheim, juni 2018

Sammendrag

Denne studien tar for seg hvordan R1-elevers begrepsbilde av bevis ser ut i geometri, hvordan elevene argumenterer i geometri, og hvilken sammenheng det er mellom elevers begrepsbilde av bevis og hvordan de argumenterer. Forskningsspørsmålet lyder som følger:

> Hvilke aspekter av R1-elevers begrepsbilde av bevis er observerbare i geometri, og hvordan kommer det til uttrykk i elevenes argumentasjon?

I tillegg til dette forskningsspørsmålet er det et underspørsmål som lyder slik:

> Hvilken sammenheng, om noen, er det mellom koblingen av begrepsbildet av bevis og argumentasjon, og det å kunne konstruere et gyldig bevis?

For å svare på disse spørsmålene deltok tre grupper med tre elever per gruppe i et intervju. Intervjuet var todelt, der elevene først skulle argumentere for hvorfor noen påstander relatert til firkanter innen geometri var sanne. Deretter skulle elevene vurdere ti ulike bevis for Thales' setning, og begrunne hvorfor de mente bevisene var gyldige eller ugyldige. Intervjuene ble filmet, og filmene ble transkribert. Deretter ble transkripsjonene analysert ved hjelp av tematisk koding.

Forskningsspørsmålene er satt i sammenheng med det analyserte datamaterialet ved hjelp av teori om representasjoner i matematikk av Duval (2006), didaktisk teori om bevis av Hanna (1990, 2000); Hanna og Barbeau (2008); Hersh (1993); Balacheff (1988, 2010) og Stylianides (2007, 2014), teori om begrepsbilder og begrepsdefinisjoner av Vinner (1983) og Tall og Vinner (1981), teori om prototypeeksempler av Schwarz og Hershkowitz (1999), og teori om bevis av Cupillari (2011). Også annen forskning på området blir tatt med i diskusjonen av funnene i denne studien.

Funnene er at elevers begrepsbilde av bevis i geometri består av de følgende kategoriene:

- Gyldige bevismetoder
- Ugyldige bevismetoder
- Bevis skal ha en formell form
- Bevis bruker aksepterte resultater
- Bevis er gyldige hvis aksiomer og regler følges
- Bevis skal gjelde generelt
- Gode bevis er lette å forstå

Av disse kategoriene var ’gyldige bevismetoder’, ’bevis bruker aksepterte resultater’ og ’gode bevis er lette å forstå’ de kategoriene som var synlig i argumentasjonen til elevene. De resterende kategoriene var synlige hos noen grupper og ikke-synlige hos de andre gruppene, noe som gjør at underspørsmålet blir interessant. Hvilken sammenheng er det mellom det å ha synlige eller ikke-synlige kategorier i argumentasjonen og det å presentere gyldige bevis? Studien viser at de elevene som presenterer gyldige bevis har et begrepsbilde av bevis der alle kategoriene er synlige i argumentasjonen, og at kategoriene også samsvarer med anerkjente oppfatninger av hva et bevis er.

Andre funn er at elever bruker empiri som bevis samtidig som de sier at det er en ugyldig bevismetode, at noen elever vektlegger formen på et bevis i stor grad når de vurderer gyldigheten av beviset, at elever ikke mener kontrapositive bevis er verken forklarende eller gode bevis, og at noen elever bruker egenskaper ved representasjonen heller enn egenskaper ved det matematiske objektet som utgangspunkt for bevis.

Summary

This master thesis is looking at R1-students' concept image of proof in geometry, how students argue in geometry, and which connections that are visible in both the concept image of proof and in arguments constructed by the students. The question in the research is:

> Which aspects in R1-students' concept image of proof is observable in geometry, and in what way is this expressed in the argumentation presented by the students?

In addition the following question is asked:

> What kind of connections, if any, are there between the relationship between the concept image of proof and the argumentation presented by the students, and the construction of a valid proof.

To answer these questions three groups consisting of three students per group were interviewed. The interviews had two parts. The first one consisted of the students trying to prove that claims related to geometry and quadrilaterals were true. In the second part of the interview the students were introduced to ten different proofs of Thales' theorem, and were asked to assess the proofs: Are they valid or not, and why? The interviews were video-taped, and the videos were transcribed, and the transcriptions were analysed using a thematic coding process.

The reseach questions and the analysed data material were discussed using the following theories: Representations in mathematics by Duval (2006), didactical theories connected to proof by Hanna (1990, 2000); Hanna and Barbeau (2008); Hersh (1993); Balacheff (1988, 2010) and Stylianides (2007, 2014), theory about concept images and concept definitions by Vinner (1983) and Tall and Vinner (1981), theory about prototypes by Schwarz and Hershkowitz (1999), and theory about proof by Cupillari (2011). In addition, research done by other people on the field of interest was used in the discussion.

The findings related to the concept image of proof in geometry are summarised in the following categories:

- Valid methods of proof
- Non-valid methods of proof
- Proofs should be presented in a formal way
- Proofs use accepted mathematical results
- Proofs are valid if axioms and rules of inference are followed
- Proofs are general

- A good proof is easy to understand

Out of these categories, the following were expressed in the argumentation by the students: 'Valid methods of proof', 'proofs use accepted mathematical results' and 'a good proof is easy to understand'. The rest of the categories were expressed in some cases in some groups, and not expressed in the rest of the cases. This brings us to the additional research question: What kind of connections are there between the concept image of proof, the expressed parts of the concept image in the argumentation, and the construction of valid proofs? This study has found that the students that can construct valid proofs also have a concept image where all the categories are expressed in the argumentation, and also that the categories in the concept image of these students coincides with the accepted ideas about what a proof is.

Other findings in the study are that students tend to use empirical arguments and at the same time saying that they know it is not considered to be a valid proof; that students think that contrapositive proofs are neither explaining nor a good method of proving; and that some students tend to use the characteristics of the representation rather than the characteristics of the mathematical object itself when constructing proofs.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning **1**
- 1.1 Bakgrunn for studien . . . 1
- 1.2 Forskningsspørsmål . . . 2
- 1.3 Studiens oppbygging . . . 3
- 1.4 Notasjon . . . 3

2 Teori **5**
- 2.1 Representasjonsteori . . . 5
- 2.2 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon . . . 6
  - 2.2.1 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon i arbeid med matematikk . . . 7
- 2.3 Bevis i matematikk . . . 9
  - 2.3.1 Bevis i undervisning . . . 11
    - 2.3.1.1 Annen forskning på bevis i undervisning . . . 12
  - 2.3.2 Typer bevis . . . 13
  - 2.3.3 Prototypeeksempler . . . 15

3 Metode **17**
- 3.1 Forskningsdesign . . . 17
- 3.2 Valg av deltakere . . . 17
- 3.3 Datainnsamlingsmetode . . . 18
  - 3.3.1 Firkantoppgaven . . . 18
  - 3.3.2 Trekantoppgaven og prat om bevis . . . 19
  - 3.3.3 Intervju . . . 19
- 3.4 Bearbeiding og analyse av datamaterialet . . . 19
  - 3.4.1 Transkribering . . . 19
  - 3.4.2 Analyseprosessen . . . 20
    - 3.4.2.1 Tematisk koding . . . 20
    - 3.4.2.2 Gjøre seg kjent med datamaterialet . . . 20
    - 3.4.2.3 Lage koder . . . 21
    - 3.4.2.4 Identifisere kategorier . . . 21
    - 3.4.2.5 Lage et tematisk nettverk . . . 21
    - 3.4.2.6 Integrering og tolking . . . 21
- 3.5 Etiske betraktninger . . . 22
  - 3.5.1 Informert og fritt samtykke . . . 22

3.5.2 Håndtering av opplysninger 22
3.5.3 Innsiktsrett for deltakere 23
3.5.4 Barn og unge i forskning 23

4 Presentasjon og analyse av oppgaver 25
4.1 Firkantoppgaven 25
4.1.1 Kvadrat 25
4.1.2 Rektangel 26
4.1.3 Rombe 26
4.1.4 Parallellogram 28
4.1.5 Vilkårlig firkant 28
4.2 Trekantoppgaven 29
4.2.1 Bevis 1 29
4.2.2 Bevis 2 og 3 30
4.2.3 Bevis 4 og 5 30
4.2.4 Bevis 6 31
4.2.5 Bevis 7 32
4.2.6 Bevis 8 32
4.2.7 Bevis 9 33
4.2.8 Bevis 10 33
4.3 Hvorfor disse oppgavene? 34

5 Analyse 35
5.1 Gruppe 1 35
5.1.1 Begrepsbilde 35
5.1.1.1 Gyldige bevismetoder 35
5.1.1.2 Ugyldige bevismetoder 36
5.1.1.3 Bevis skal ha en formell form 36
5.1.1.4 Bevis bruker aksepterte resultater 37
5.1.1.5 Gyldig hvis aksiomer og regler følges 37
5.1.1.6 Bevis skal gjelde generelt 38
5.1.1.7 Gode bevis er lette å forstå 38
5.1.2 Argumentasjon 38
5.1.3 Oppsummering 40
5.2 Gruppe 2 41
5.2.1 Begrepsbilde 41
5.2.1.1 Gyldige bevismetoder 41
5.2.1.2 Ugyldige bevismetoder 42
5.2.1.3 Bevis skal ha en formell form 42
5.2.1.4 Bevis bruker aksepterte resultater og er gyldige hvis aksiomer og regler følges 43
5.2.1.5 Gode bevis er lette å forstå 43
5.2.2 Argumentasjon 44
5.2.3 Oppsummering 45
5.3 Gruppe 3 46
5.3.1 Begrepsbilde 46

5.3.1.1 Gyldige bevismetoder 46
5.3.1.2 Ugyldige bevismetoder 47
5.3.1.3 Bevis bruker aksepterte resultater 48
5.3.1.4 Gyldig hvis aksiomer og regler følges 48
5.3.1.5 Bevis skal gjelde generelt 49
5.3.1.6 Gode bevis er lette å forstå 49
5.3.2 Argumentasjon 50
5.3.3 Oppsummering 52
5.4 Hva er felles i begrepsbildet og argumentasjonen? 52

6 Diskusjon **55**
6.1 Forskningsresultater 55
6.1.1 Gyldige bevismetoder 55
6.1.2 Ugyldige bevismetoder 56
6.1.3 Bevis skal ha en formell form 57
6.1.4 Bevis bruker aksepterte resultater 59
6.1.5 Bevis er gyldige hvis aksiomer og regler følges 59
6.1.6 Bevis skal gjelde generelt 60
6.1.7 Gode bevis er lette å forstå 61
6.1.8 Oppsummering av diskusjonen 62
6.2 Studiens kvalitet 63

7 Avsluttende refleksjoner **65**

Referanseliste **67**

Vedlegg **69**

1. Innledning

1.1 Bakgrunn for studien

Både geometri og bevis er viktige områder i matematikken, og burde dermed også være det i matematikkundervisningen. Geometri kan for det første hjelpe elever å se mønstre som kan knytte ulike felt i matematikken sammen. Det brukes i arkitektur og ingeniørvitenskap, i fysikk med vektorer og symmetrier, i kunst, og også som ”ren matematikk”. Geometri er dessuten et av feltene i matematikk med tettest kobling til aksiomene, og er på grunn av denne oppbyggingen et fint område å lære seg kunstene å utforske, å se sammenhenger, å være kritisk til det en ser i form av representasjoner, å være strukturert, å være tålmodig, å skrive presist, og å generalisere og bevise (Kutluca, 2013).

Bevis kan i likhet med geometri være kjærkomment i matematikkundervisning. Det kan gi elever både verktøy, metoder, strategier og begreper knyttet til problemløsing (Hanna og Barbeau, 2008). Dessuten er bevis en fundamental del av matematikken som dukker opp overalt, bortsett fra i skolematematikken. Ordet bevis er ikke nevnt i læreplanen for grunnskolen. Heller ikke i læreplanen for første trinn på videregående skole. Kun tre matematikkemner har læreplaner med ordet bevis i seg, og de er alle programfag i andre og tredje trinn på videregående: R1, R2 og Matematikk X (Utdanningsdirektoratet, 2006a,b). Det bør nevnes at selv om det ikke står ordet ”bevis” i andre læreplaner enn i R1, R2 og Matematikk X, så er det som kalles ”argumentere” og ”logiske resonnement” en del av de grunnleggende ferdighetene lesing, muntlig ferdighet og skriftlig ferdighet i matematikk på alle årstrinn (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Det at bevis er en fundamental del av matematikken, men at det nesten ikke er tilstede i skolematematikken mener jeg blir feil fordi bevis da ikke blir en del av elevenes forhold til matematikk. Balacheff (2010) er enig med meg. Han kaller dette for et didaktisk gap av flere grunner: (1) Matematikk i skolen og matematikk på forskningsnivå blir to separate deler av matematikk. (2) Bevis oppfattes som kun en teknikk av elevene, og ikke som det som binder matematikken sammen. (3) Faginnholdet og bevis sees på som separate deler. Balacheff (2010) skriver også om at det er vurdert flere forskjellige måter å implementere bevis i skolematematikken, men at ingen har fungert nevneverdig bra. Den måten som brukes i Norge i dag, og forsåvidt også i mange andre land, baserer seg på at elevene først lærer seg det som regnes som grunnleggende matematikk: Regnemetoder og regler. Balacheff (2010) mener derimot at læring av matematikk ikke kan separeres fra den valideringen som brukes; matematiske bevis. Hanna (2000) skriver også om at det i USA er foreslått av the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) at det bør brukes bevis og resonnering i undervisningen på alle alderstrinn fordi det er en sentral del av matematikken.

Det som til nå er nevnt er grunnen til at jeg valgte å forske på geometri og bevis i masterstudien; i et håp om at det å belyse temaet vil gi en endring med tanke på bevisbruk i den norske skolen.

1.2 Forskningsspørsmål

I denne studien er det overordna temaet hva elever forbinder med bevis i geometri, hvordan elever argumenterer i geometri, og om det er en kobling mellom disse to. Forskningsspørsmålet er:

> Hvilke aspekter av R1-elevers begrepsbilde av bevis er observerbare i geometri, og hvordan kommer det til uttrykk i elevenes argumentasjon?

Studien er lagt til R1-nivå fordi det er det første matematikkfaget som har bevis i læreplanen. Det er også en del geometri i faget. En forklaring av forskningsspørsmålet følger: Med ”aspekter av R1-elevers begrepsbilde som er observerbare” menes det hva elever trekker fram som viktig med et bevis i geometri. Et begrepsbilde er en persons oppfatning av et begrep eller objekt, og ved å kartlegge dette vil en få innsikt i hva elevene kan tenke på når de er i en situasjon som involverer bevis. Med ”hvordan kommer dette til uttrykk i elevenes argumentasjon” menes det hvilke deler av begrepsbildet som er synlige når eleven prøver å argumentere for at en påstand er sann.

Hvordan akkurat disse elevene argumenterer og hvordan akkurat deres begrepsbilde av bevis ser ut er kanskje ikke representativt for alle R1-elever i Norge. Likevel er det ikke usannsynlig at en god del elever på dette matematikknivået har begrepsbilder og argumentasjon som kan ligne på det de ni informantene i denne studien har. Begrepsbilder er et individuelt konsept, mens denne forskningen er gjennomført med elevgrupper. Studien søker likevel ikke etter hvert individs begrepsbilde, men etter hva som kan finnes i et begrepsbilde hos en R1-elev, og funnene kan derfor gi et innblikk i hvordan et begrepsbilde kan se ut.

I tillegg til forskningsspørsmålet er det et underspørsmål som går på konstruksjon av gyldige bevis og hvordan det er koblet til forholdet mellom begrepsbildet og argumentasjonen.

> Hvilken sammenheng, om noen, er det mellom koblingen av begrepsbildet av bevis og argumentasjon, og det å kunne konstruere et gyldig bevis?

Dette underspørsmålet handler om det at det er en sammenheng mellom det at en elev får til å konstruere et gyldig bevis og måten eleven bruker begrepsbildet sitt på i argumentasjonen. Finnes det en slik sammenheng, hvordan er i så fall sammenhengen, og hvilke implikasjoner fører det med seg?

For å svare på forskningsspørsmålene ble det foretatt tre intervjuer av elevgrupper. Elevgruppene besto av tre elever, og de ble intervjuet på følgende måte. I den første delen av intervjuet skulle elevene argumentere for at en geometrisk påstand knyttet til firkanter er sann. Andre del besto av ti bevis for Thales’ setning som elevene skulle vurdere gyldigheten av. De måtte begrunne hvorfor de mente de ulike bevisene var gyldige eller ikke. I tillegg var det noen mer generelle spørsmål om hva elevene mente om bevis. Denne datainnsamlingen mente jeg var god for å (1) få innblikk i hvordan elevene argumenterte og beviste i geometri, og (2) få innblikk i elevenes begrepsbilde av bevis i en sammenheng der de ikke måtte konstruere argumenter selv.

1.3 Studiens oppbygging

Masteroppgaven er bygd opp på følgende måte. Først presenteres teori om ulike tema som jeg mener er relevant for å forstå datamaterialet og for å kunne svare på forskningsspørsmålene. Teorien består av temaene representasjoner i matematikk, didaktisk teori om bevis, begrepsbilder og begrepsdefinisjoner, prototypeeksempler, og matematisk teori om bevis. Også annen forskning på området blir presentert.

Kapittel 3 består av en presentasjon og begrunnelse for de metodiske valgene som er gjort i studien. Det er også diskutert om forskningen er etisk god.

Neste kapittel er en presentasjon av oppgavene som ble brukt i datainnsamlingen. Det blir forklart hvorfor akkurat disse oppgavene ble brukt, og det er også en matematisk vinkling på analysen av oppgavene.

Deretter kommer analyseprosessen; hvorfor det analyserte datamaterialet ser ut som det gjør. Her presenteres også svaret på hovedforskningsspørsmålet. En diskusjon av det analyserte datamaterialet følger deretter. Her kobles funnene mot teori og annen forskning, og det andre forskningsspørsmålet blir diskutert. En vurdering av kvaliteten i studien blir også diskutert.

Til sist er det en oppsummerende avslutning, før referanser og vedlegg presenteres.

1.4 Notasjon

Det brukes en del forskjellig notasjon innen geometri. Den følgende notasjonen er den som blir brukt i forbindelse med geometri i denne masteroppgaven, og er i samsvar med notasjonen brukt av Venema (2012).

$\triangle ABC$ betyr trekanten med hjørner A, B og C. $\square ABCD$ betyr firkanten med hjørner A, B, C og D. $A * B * C$ betyr at punktene A, B og C ligger på samme linje og at B ligger mellom A og C. $\overline{AB}$, AB, $\overrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AB}$ betyr henholdsvis segmentet med endepunkter i A og B, lengden av $\overline{AB}$, strålen fra A gjennom B, og linjen definert av A og B. $\angle ABC$ betyr vinkelen mellom $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{BC}$. $\mu(\angle ABC)$ betyr vinkelmålet til vinkelen mellom $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{BC}$. $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{CD}$ og $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ betyr at $\overleftrightarrow{AB}$ henholdsvis er parallell og står normalt på $\overleftrightarrow{CD}$. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ betyr at $\triangle ABC$ er kongruent med $\triangle DEF$, noe som igjen betyr at $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$, $\mu(\angle BAC) = \mu(\angle EDF)$, $\mu(\angle ABC) = \mu(\angle DEF)$ og $\mu(\angle ACB) = \mu(\angle DFE)$. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ betyr at de to trekantene er formlike, noe som igjen betyr at vinklene i de to trekantene er parvis kongruente.

2. Teori

I teorikapittelet presenteres det først representasjonsteori. Det omhandler hvordan en arbeider med matematiske objekter. Deretter presenteres teori i forbindelse med begrepsbilde og begrepsdefinisjon. Dette handler om hvordan en arbeider med begreper i matematikk. Noen avsnitt om hva bevis er følger så. Både om hva bevis er i matematikk og hva det er i matematikkundervisning. Ulike studiers funn relatert til hva bevis er i matematikkundervisningssammenheng er også presentert. Til sist i kapittelet er det en kort presentasjon av hva som menes med prototypeeksempler.

2.1 Representasjonsteori

Har du noen gang tenkt på hva en egentlig jobber med i matematikk? Er det objekter en kan ta på og se på, eller er det ikke det? Kan du som matematiker studere egenskaper ved en funksjon på samme måte som en biolog studerer egenskapene hos ei solsikke? Hva med geometriske figurer; kan de studeres på samme måte som konkrete fysiske objekter? Du har trolig allerede gjettet at svaret er at matematiske objekter er forskjellige fra mange andre objekter en ellers møter i verden; de kan ikke sees, berøres eller sanses på andre måter. For å studere matematiske objekter må disse objektene representeres på et vis (Duval, 2006). En funksjon kan representeres ved for eksempel en graf, et algebraisk uttrykk eller en tabell, mens en representasjon av en firkant for eksempel kan være en konstruksjon av firkanten på et papir. Det som er viktig å merke seg i forbindelse med representasjoner av matematiske objekter er at representasjonene ikke bestandig representerer alle egenskapene ved det matematiske objektet, og at en også kan ende opp med en representasjon som har egenskaper objektet ikke har.

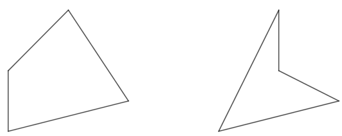
Et eksempel på det første er en tabell som representerer en funksjon. Betrakt funksjonen med det algebraiske uttrykket $f(x) = 2x$. Tabellen som representerrer funksjonen vil ha et utvalg av tallpar på form $(x, f(x))$ som passer med funksjonen, men tabellen viser kun egenskaper knyttet til akkurat disse tallparene. Hvis det for eksempel er slik at funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, så vil det være uendelig mange tallpar, og tabellen vil ikke kunne beskrive alt ved funksjonen fordi den ikke kan inneholde uendelig mange tallpar. Tabellen *er* med andre ord ikke funksjonen f, og det algebraiske uttrykket $f(x) = 2x$ *er* heller ikke funksjonen.

Det finnes også eksempler på at en representasjon av et matematisk objekt har egenskaper som objektet ikke har; blant annet objektet kvadrat og representasjonen som består av et kvadrat som er tegnet på et ark. Representasjonen av kvadratet vil ha en gitt sidelengde fordi en kan måle sidelengden, mens objektet kvadratet ikke har en målbar sidelengde. En kan selvsagt presisere at objektet for eksempel er et kvadrat med sidelengder på 7 cm, men om en har objektet kvadrat uten en slik presisering vil representasjonen av kvadratet ha ekstra egenskaper.

Duval (2006, s. 107) skriver at representasjonen av et objekt ikke *er* objektet, og at det er viktig å være klar over at en ikke må blande hvilke egenskaper som hører til representasjonen og hvilke som hører til objektet i matematisk arbeid. Likevel er en helt avhengig av å bruke representasjoner i arbeid med matematikk, og det å skille mellom egenskaper ved objektet og egenskaper ved representasjonen er utfordrende for en del elever (Duval, 2006).

2.2 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon

I matematikk, som overalt ellers i livet, møter en på begrep (*concepts*). Et matematisk begrep kan for eksempel være ”firkant”, ”funksjon” eller ”bevis”, mens et begrep i dagliglivet for eksempel kan være ”oransje”, ”kjærlighet” eller ”familie”. Men hva et begrep egentlig betyr og hva en person tenker at begrepet betyr er ikke nødvendigvis det samme. En person kan for eksempel tenke at en firkant er en geometrisk figur som vil se ut som den til venstre i figur 2.1. Den samme personen kan tenke at firkanten til høyre ikke er en firkant siden den ikke er konveks.



Figur 2.1: Firkanten til venstre er konveks. Den til høyre er ikke det.

Andre personer vil kanskje inkludere den ikke-konvekse firkanten i tankene sine rundt firkanter. Slike mentale bilder formes av erfaring. Om en person kun har sett konvekse firkanter i løpet av livet, vil det naturlig nok være denne typen firkanter som dukker opp i tankene når begrepet firkant nevnes for personen. Disse mentale bildene kalles *begrepsbildet* (*concept image*) personen har til begrepet (Vinner, 1983, s. 293). På samme måte som med firkantene kan personer ha forskjellige mentale bilder av hva et matematisk bevis er. Noen kan for eksempel tenke at et matematisk bevis kun er et gyldig bevis om det er bygd opp med logiske slutninger helt fra aksiomnivå, mens andre kan tenke at begrepet matematisk bevis inkluderer det å vise til empiri. Også begreper i dagliglivet kan gi forskjellige mentale bilder. Det er lite trolig at alle har det samme mentale bildet når ordet kjærlighet nevnes, nettopp fordi begrepsbildet formes av erfaringene hver person har.

I forskjellige situasjoner kan forskjellige deler av en persons begrepsbilde bli aktivert, og nøyaktig hva som fremkalles vil avhenge av stimulusen personen får fra omgivelsene. Tall og Vinner (1981, s.152) introduserer det de kaller *fremkalt begrepsbilde* (*evoked concept image*) for å beskrive dette. Det at en person kan få fremkalt forskjellige deler av begrepsbildet sitt avhengig av situasjonen, medfører at det kan aktiveres motstridende begrepsbilder. Om slike motstridende bilder blir aktivert samtidig kan det føre til forvirring (Tall og Vinner, 1981, s. 152).

I dagliglivet finnes det ikke bestandig en universell og presis definisjon av hva som ligger i et begrep, mens begrep i andre sammenhenger, spesielt innen matematikk, har presise definisjoner som er anerkjente av majoriteten av fagpersonene innenfor det aktuelle feltet. For eksempel er firkant et begrep med en presis og anerkjent definisjon: En firkant er en todimensjonal geometrisk figur bestemt av fire punkter A, B, C og D som oppfyller følgende to krav. De fire punktene må være plassert slik at det aldri ligger tre av dem på linje, og samtidig må linjestykkene $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ og $\overline{DA}$ enten ikke ha noen felles punkter, eller kun ha endepunktene felles (Venema, 2012, s. 88). En slik definisjon av er begrep kalles *begrepsdefinisjonen* (*concept definition*) (Vinner, 1983, s. 293). Begrepsdefinisjonen er med andre ord en samling av ord som spesifiserer hva som menes med begrepet (Tall og Vinner, 1981, s. 152).

2.2.1 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon i arbeid med matematikk

En har altså både det som kalles begrepsbilde og det som kalles begrepsdefinisjon. Om en nå ser på de to som to deler i en persons kognitive struktur kan en stille seg spørsmålet: Hvordan brukes begrepsbildet og begrepsdefinisjonen i arbeid med matematikk? Når begrepsdefinisjon her omtales er det snakk om den personlige begrepsdefinisjonen, altså den begrepsdefinisjonen en person kjenner. Formell begrepsdefinisjon er den andre typen begrepsdefinisjon, og er den definisjonen som er allment anerkjent i det matematiske fagmiljøet.

Det første som bør påpekes er at en eller begge av disse delene kan være ikke-eksisterende. En person har ikke nødvendigvis et begrepsbilde eller en begrepsdefinisjon for ethvert matematisk begrep. I tillegg kan det være en interaksjon mellom de to delene, altså at begrepsdefinisjonen kan påvirke begrepsbildet, og at begrepsbildet kan påvirke begrepsdefinisjonen. Det er også mulig at de to delene er uavhengige av hverandre.

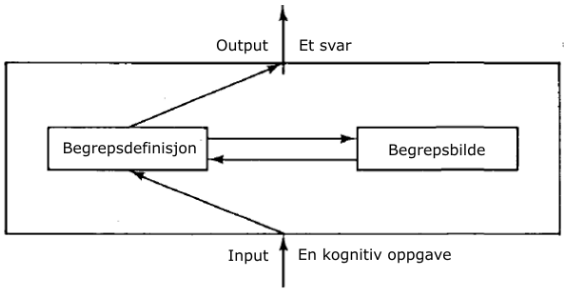
Hvordan begrepsbilde- og begrepsdefinisjonsdelene konstrueres mener Vinner (1983) kan deles i de to følgende scenarioene:

Det første er at personen har et begrepsbilde som er konstruert med bakgrunn i erfaringer med begrepet. Om personen da introduseres for en formell begrepsdefinisjon, vil denne håndteres på en av tre måter. Første mulighet er at begrepsbildet blir endret slik at det passer med den nye formelle begrepsdefinisjonen. Andre mulighet er at begrepsbildet forblir uforandret samtidig som den personlige begrepsdefinisjonen blir som den formelle begrepsdefinisjonen ei stund. Etterhvert vil den personlige begrepsdefinisjonen forsvinne eller forandres slik at den passer med begrepsbildet. Tredje mulighet er at begrepsbildet er uforandret mens den personlige begrepsdefinisjonen er lik den formelle begrepsdefinisjonen. Vinner (1983) påstår at personen da vil bruke begrepsbildet sitt i alle tilfeller bortsett fra om personen bli bedt om å definere begrepet. Da, og kun da, brukes begrepsdefinisjonen.

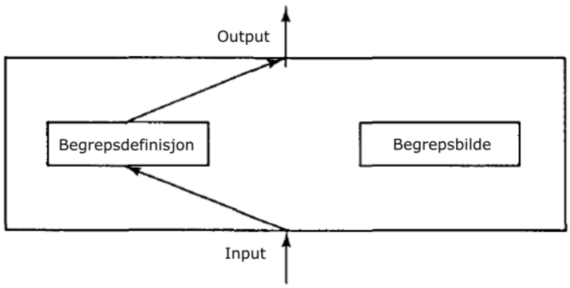
Andre scenario er at en person ikke har et begrepsbilde får en begrepsdefinisjon presentert. Da vil denne definisjonen legge grunnlaget for formingen av begrepsbildet. Men begrepsbildet vil ikke nødvendigvis ta inn alle detaljene som ligger i begrepsdefinisjonen, noe som fører til at begrepsbildet og begrepsdefinisjonen ikke nødvendigvis vil være like.

Når personen har et utviklet begrepsbilde og en utviklet begrepsdefinisjon knyttet til et begrep blir spørsmålet hvordan disse brukes i arbeid med kognitive oppgaver knyttet til begrepet. Figur 2.2, 2.3 og 2.4 illustrerer ønskelige veier fra en kognitiv oppgave til et svar.

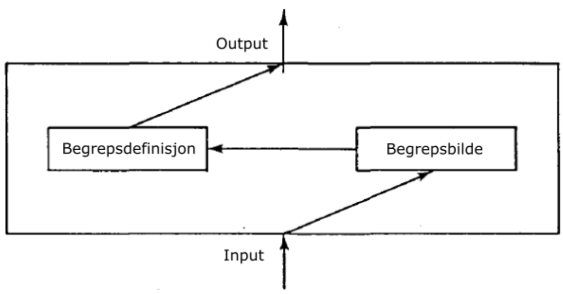
Alle disse fremgangsmåtene bruker begrepsdefinisjonen, noe som vil gi et svar som ikke burde være i konflikt med matematikkens regler såfremt den personlige begrepsdefinisjonen samsvarer med den formelle. Men Vinner (1983) mener en kognitiv prosess ikke vil foregå på noen av disse måtene. Grunnen er at den kognitive strukturen ikke kan presses til å bruke definisjoner. Definisjoner er for det første generelle. Det kreves et begrepsbilde



Figur 2.2: Illustrasjon av tilfellet der en persons kognitive prosess først går til begrepsdefinisjonen, for deretter å gå til begrepsbildet, tilbake til begrepsdefinisjonen, og så gi et svar (Vinner, 1983, s. 295). Inputen er en kognitiv oppgave og outputen er et svar på oppgaven, noe som også gjelder for figur 2.3, 2.4 og 2.5.

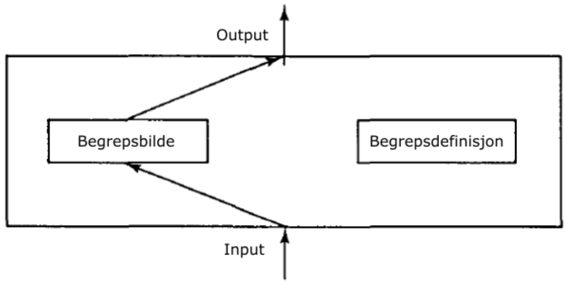


Figur 2.3: Illustrasjon av tilfellet der en persons kognitive prosess kun går gjennom begrepsdefinisjonsdelen for å gi et svar (Vinner, 1983, s. 295).



Figur 2.4: Illustrasjon av tilfellet der en persons kognitive prosess først går til begrepsbildet og deretter begrepsdefinisjonen for å gi et svar (Vinner, 1983, s. 296).

for å prosessere konkrete oppgaver eller eksempler. I tillegg påstår Vinner (1983) at definisjoner ofte er for kompliserte for effektiv bruk, og at de dermed forblir inaktive, eller til og med glemmes, i møte med oppgaver. Figur 2.2, 2.3 og 2.4, som bruker begrepsdefinisjoner, er dermed for ueffektive prosesser, og den mest riktige modellen av kognitive prosesser er derfor den som er illustrert i figur 2.5.



Figur 2.5: Illustrasjon av tilfellet der en persons kognitive prosess kun går gjennom begrepsbilde-delen for å gi et svar (Vinner, 1983, s. 296).

Det er med andre ord begrepsbildet som er den viktigste delen når det kommer til arbeid med et begrep. Derfor vil det være av interesse at begrepsbildet til en person inneholder korrekte og mest mulig fullstendige opplysninger om det aktuelle begrepet, og at ulike deler av begrepsbildet ikke er i konflikt med hverandre, og at begrepsbildet heller ikke er i konflikt med noen av typene av begrepsdefinisjoner. Denne studien søker å kartlegge elevers begrepsbilder av bevis, og også hva som er synlig av begrepsbildet av bevis i argumentasjonssammenheng. Før resultatene av studien presenteres er det imidlertid greit å vite noe om hva et bevis i matematikk egentlig er, om hvilke typer bevis som finnes, og om bevis i undervisning.

2.3 Bevis i matematikk

Så hva er et matematisk bevis? Det er ingen entydig definisjon på begrepet, men Hersh (1993, s. 391) foreslo at det er et argument som overbeviser ”kvalifiserte dommere” eller at det er ”en kjede av transformasjoner av teorem eller aksiomer som gjennomføres i henhold til logikkens regler”. Gyldigheten av bevis avhenger av at logikken er fulgt, og at det godkjennes av en ekspert på feltet. Men hva er det egentlig en matematiker i så fall vektlegger i aksepten av et bevis? Heinze (2010, s. 102) listet opp følgende fem punkter som må være involvert for at en matematiker skal akseptere et matematisk resultat.

1. Matematikeren forstår resultatet, konseptene som har med resultatet å gjøre, logikken som fører til resultatet, og implikasjonene av resultatet. Det er heller ingen ting som antyder at resultatet er feil.

2. Resultatet er signifikant i form av å ha implikasjoner i en eller flere deler av matematikken.

3. Resultatet bryter ikke med allerede beviste resultater.

4. Forfatteren av resultatet er anerkjent som en ekspert innen sitt felt.

5. Argumentasjonen for at resultatet er korrekt er overbevisende, og er på en form matematikeren tidligere har sett.

Matematikere godkjenner resultater om en kombinasjon av de fem punktene er til stede, og det er ikke usannsynlig at punkter fra denne lista også kan være til stede i elevers tankegang i forbindelse med det å akseptere matematiske resultater. De følgende avsnittene omhandler det at det finnes forskjellige kategorier bevis, og at bevis kan være forklarende eller bevisende. Alt dette henger sammen med punkt 1, 3 og 5 i lista over, og er dermed relevant i forbindelse med det å godkjenne matematiske resultater.

Et bevis kan ta mange former. Ifølge Hanna (1990) er det tre kategorier: *Formelle bevis*, *akseptable bevis* og *undervisningsbevis* (the teaching of proof). Formelle bevis følger en aksiomatisk oppbygging av argumentet, og kan sees på som det ideelle beviset (Hanna, 1990, s. 6). Likevel vil en nesten aldri se eller bruke fullt ut formelle bevis fordi det for det første tar lang tid å bevise på denne måten, og for det andre som regel ikke er selve verifiseringen av påstanden som er målet med et bevis. Et bevis har flere aspekter ved seg enn bare det å ha slått fast at en matematisk påstand er korrekt eller ukorrekt, blant annet det å vite *hvorfor* påstanden er korrekt eller ukorrekt (Hersh, 1993, s. 390).

Akseptable bevis er alle mulige bevis som den matematiske verden aksepterer som godkjente bevis. Det er ikke nødvendig å bygge opp et akseptabelt bevis med aksiomer som i formelle bevis, men en viss struktur må det likevel ha. Beviset må starte på kjent og akseptert grunn, for deretter å ha et feilfritt argument, for så å komme fram til et resultat som ikke strider med allerede akseptert matematikk (Hanna, 1990, s. 8). Disse kriteriene for godkjenning av bevis er ikke absolutte, og åpner derfor opp for at matematikkens gyldighet er avhengig av god bedømming av matematikere. For hva er et feilfritt argument? Det er det ikke full enighet om i matematikkverden.

Undervisningsbevis omhandler bevis som brukes som en aktivitet i undervisning. Målet med bevisene er å vise *hvorfor* en påstand er sann, mer enn *at* påstanden er sann, samt at det å bruke bevis på denne måten kan gi elever innsikt i matematiske ideer kobla til beviset eller påstanden (Hanna, 1990, s. 6). I tillegg mener Hanna (1990, s. 9) at det i undervisning også legges opp til at elevene skal skjønne at og hvorfor det er viktig å bevise i matematikk.

I tillegg til de tre nevnte kategoriene av bevis, kan en også dele inn bevis i to typer: *Bevis som forklarer* og *bevis som beviser* (Hanna, 1990, s. 9). Generelt kan en si at formelle bevis har som mål å bevise at en matematisk påstand stemmer, og er dermed av typen 'bevis om beviser'. Av undervisningsbevis bør alle havne i 'bevis som forklarer', fordi hovedmålet med slike bevis er å vise elevene hvorfor noe er sant. I kategorien akseptable bevis finnes det både forklarende og bevisende bevis. For eksempel vil induksjonsbevis havne i denne kategorien, og samtidig være et bevisende bevis, mens direkte bevis ofte både havner i samme kategori men er forklarende. Hanna (1990, s. 10) skriver at et forklarende bevis er et bevis som tar i bruk og viser fram en karakteristisk egenskap som omhandler det som skal bevises. Det blir også presentert et eksempel på denne forskjellen: Gauss sitt bevis av at summen av de naturlige tallene opp til n er lik $n(n+1)/2$ som forklarende bevis, og et induksjonsbevis av samme matematiske resultat som bevisende bevis.

Beviset til Gauss tar i bruk en egenskap ved summer: At summen kan skrives i en vilkårlig rekkefølge, og er dermed et forklarende bevis. Induksjonsbeviset tar ikke i bruk noen karakteristiske egenskaper ved summer, og regnes derfor som et bevisende bevis. Begge bevisene havner i kategorien akseptable bevis, og ikke i formelle bevis, fordi de ikke bygger argumentasjonen fra aksiomnivå. Gauss' bevis kunne også blitt klassifisert

Beviset til Gauss:

$$
\begin{array}{rl}
& [\ S = 1 \quad + 2 \quad + \cdots + (n-1) + n\ ] \\
+ & [\ S = n \quad + (n-1) + \cdots + 2 \quad + 1\ ] \\
\hline
& 2S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) \\
& 2S = n(n+1) \\
\Longrightarrow & S = \dfrac{n(n+1)}{2}
\end{array}
$$

Induksjonsbevis:

Vil vise at $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Utsagnet er sant for $n = 1$

Antar at utsagnet er sant for en vilkårlig k

$S(k+1) = S(k) + (k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

Det betyr at utsagnet stemmer for $k+1$ hvis den stemmer for k, og dermed er utsagnet korrekt for alle n.

som et undervisningsbevis om en for eksempel la vekt på at addisjon er kommutativt og at det er en viktig del av beviset. Da ville både addisjonskommutativiteten og formelen blitt belyst av beviset.

2.3.1 Bevis i undervisning

Ved bevis i undervisning opererer en altså med forklarende bevis. Men hvorfor skal en bruke bevis i undervisning? Stylianides (2014, s. 102) mener det er tre grunner til det. Første punkt er at bevis viser elevene hvordan, for dem, ny kunnskap kan utledes. Det gjør at elevene senere kan utlede og bekrefte gyldigheten til ny kunnskap selv. For at dette skal gå an er det ikke nok at læreren presenterer bevis for elevene. Elevene må aktiviseres og jobbe med bevisene selv (Stylianides, 2014, s. 103), men for at elevene skal ha utbytte av slik jobbing, må bevisene være forklarende. Hanna (1990, s. 12) argumenterer for at det å bytte ut formelle, bevisende bevis med forklarende bevis ikke bare gagner skoleelever, men også matematikere. I de aller fleste tilfellene et bevis blir brukt, så er det for å forstå hvorfor en påstand stemmer. Dette er relatert til punkt 1 og 2 i Heinze (2010, s. 102) sine punkter for aksept av matematiske resultater. Det er ikke noe poeng i å vise et resultat hvis det ikke gir utvidet kunnskap om matematikken rundt resultatet, og det er heller ikke noe poeng i å skrive et bevis på en form som gjør at ingen skjønner resultatet og/eller beviset.

Grunn nummer to er at det er en sentral del av utforskingen av matematikken som fagområde. Dermed bør det også være en sentral del av skolematematikken (Stylianides, 2014, s. 102). Dette skriver også Balacheff (2010, s. 117) om. Det vil oppstå et *didaktisk gap* i matematikkundervisning om matematikk i skolen ikke bruker bevis, når det i matematikkfaget forøvrig er en sentral del. Grunnen til dette gapet er at en ikke kan separere det å forstå matematikk og det å forstå hvordan matematikken er validert. Og valideringen skjer nettopp gjennom bevis.

Tredje grunn er den forklarende og koblende funksjonen et bevis kan ha. Elever som jobber med å bevise en påstand vil sette den aktuelle påstanden inn i en større sammenheng, og dermed ofte knytte sammen deler av matematikken elevene tidligere har sett på som urelaterte deler (Stylianides, 2014, s. 102). Hanna (2000, s. 7) skriver at bruken av bevis i undervisningssammenheng kun kan legitimeres hvis det fører til økt matematisk forståelse hos elevene. I en annen artikkel mener Hanna og Barbeau (2008, s. 346) at bevis kan gi elevene både verktøy, metoder, strategier og konsepter relatert til problemløsing. Hvis dette er tilfellet, så kan en si at Hanna (2000, s. 7) sitt krav om økt matematisk forståelse hos elever er møtt, og dermed at bevisbruk kan legitimeres.

Det finnes imidlertid kritikere av det å bruke bevis i undervisning. Hovedargumentet er at bevisbruk stjeler tid fra problemløsing, og at undervisning med bevis ikke i stor nok grad gir elevene problemløsingskompetanse (Hanna, 2000, s. 9). En studie i USA viste at bevis i skolen blir mindre og mindre framtredende i læreplanene (Hanna, 2000, s. 10). Etter å ha sett på det norske læreplanverket for matematikk fra førsteklassen på barneskolen til tredjeklassen på videregående skole, dukker ordet bevis opp kun ti ganger. De ti gangene ordet er skrevet er dessuten fordelt på kun tre av matematikkfagene: To ganger i 'Matematikk X', fem ganger i 'R1-matematikk' og tre ganger i 'R2-matematikk' (Utdanningsdirektoratet, 2006a,b). Elever behøver altså ikke å møte bevis før de går det nest siste året i et tretten år langt skoleløp. Og om elevene velger å ikke spesialisere seg innen matematikk på videregående skole, så er det ikke sikkert de møter bevis i løpet av skolegangen. Dette er et didaktisk gap på to måter fordi det for det første ellers i matematikken i stor grad brukes bevis, og for det andre skaper et skille i matematikkundervisninga med 'matematikk uten bevis' og 'matematikk med bevis' (Balacheff, 2010, s. 115-116). Matematikk uten bevis er da all matematikkundervisning bortsett fra de tre omtalte matematikkfagene på videregående skole.

2.3.1.1 Annen forskning på bevis i undervisning

Det er gjort mange studier som har sett på bevis i undervisningssammenheng. En kort presentasjon av noen av studiene følger her.

Reid og Knipping (2010, s. 59) har laget et sammendrag av funnene i flere ulike studier om bevis, og det står at det generelt er bred aksept for funnene som presenteres i matematikkdidaktikkforskningsmiljøet.

- Mange (og kanskje de fleste) elever godtar eksempler som verifisering av en påstand.
- Mange elever godtar ikke deduktive bevis som verifisering.
- Mange elever godtar ikke moteksempler som motbevis.
- Elever godtar mangelfulle deduktive bevis som verifisering.
- Mange elever godtar argumentasjon som ikke er bygd opp med logiske resonnementer.
- Elever bruker empiri for å verifisere påstander.

- De fleste elever kan ikke å skrive korrekte bevis.

Det presenteres også en utfyllende forklaring for hvert av punktene i lista: Det første punktet har sitt opphav i mange studier. Mellom 20 og 80 prosent av elever (og lærere!) mener det er nok å ha et utvalg eksempler for å verifisere en påstand. Det blir samtidig sagt at det i en studie kom fram at mange av de som godtok eksempler som verifikasjon også sa de var klare over at det ikke var gyldige bevis. Likevel mente de eksemplene var meget overbevisende med tanke på verifikasjon av påstander. Det andre punktet i lista har også dukket opp i flere studier. Det kommer blant annet fram at mange elever mener det fortsatt kan finnes moteksempler selv om et deduktivt bevis er gjennomført, og at et bevis som bruker en figur kun vil gjelde for tilfeller med lignende figurer, og ikke generelt for alle tilfeller av påstanden. Det tredje punktet har også sin rot i flere studier. De viste at både elever og lærere til en viss grad var usikre på om ett moteksempel var nok for å motbevise en påstand. Punkt fire i lista er basert på tre studier. Der kommer det fram at både lærere og elever godtar bevis med mangler, og at det i noen tilfeller skyldes at formen på beviset ser korrekt ut. Med andre ord har formen på beviset og metoden som brukes i beviset en innvirkning på om beviset blir godtatt eller ikke. Også det neste punktet omhandler formen på beviset: Det ble i en studie funnet at elever ofte godtar argumentasjon som har et utseende som ligner eller på andre måter minner om bevis, og det uten at innholdet i argumentasjonen nødvendigvis er gyldig. Punkt seks kommer også fra flere studier. Funn inkluderer blant annet at elever bruker empiri fordi de ikke vet av bedre måter å argumentere på, og at selv om elevene ble presentert for deduktive bevis så ville de fortsatt kontrollere at påstanden stemte ved å bruke empiri. Det sistnevnte er også trukket fram som et interessant funn av Hanna (2000, s. 19). Det skrives om at dette kanskje ikke er så rart fordi det i alle andre fagkretser enn i matematikken brukes empiri for å slå fast at noe er sant; også i andre realfag som for eksempel fysikk. Reid og Knipping (2010, s. 67) føyer til at det også blant matematikere er vanlig å bruke eksempler for å både forstå påstanden, for å hjelpe dem med å lage et bevis, og for å kontrollere påstanden. Men det kommer et gyldig bevis i tillegg til alt dette i matematikerens tilfelle. Det siste punktet på lista kan også finnes igjen i flere studier. Majoriteten av disse studiene fant at under halvparten av elever får til å skrive et gyldig bevis. Den tredje internasjonale matematikk- og naturfagsundersøkelsen (TIMSS) fant i midt på 1990-tallet at gjennomsnittlig 35% av elevene fikk til bevisskriving (Reid og Knipping, 2010, s. 69).

2.3.2 Typer bevis

Det finnes flere gyldige måter å gjennomføre et bevis på. En kan for eksempel gjennomføre deduktive bevis eller gjennomføre uttømmende søk, og det finnes også andre varianter. Innen deduktive bevis finnes det flere metoder: Direkte bevis, kontrapositive bevis, motsigelsesbevis eller ad absurdum-bevis, og induksjonsbevis. Heretter blir kontrapositive bevis, motsigelsesbevis og induksjonsbevis av og til omtalt som antagelsesbevis.

Om en har en implikasjon på form $A \implies B$, der A og B er påstander, så vil en med et direkte bevis ha påstand A som utgangspunkt for å dedusere seg fram til påstand B. Implikasjonene mellom A og B vil bestandig peke mot påstand B i et slikt bevis. Et eksempel på et slikt bevis er som følger. Påstanden som skal bevises er: ”Hvis trekant

ABC er likebent ($AB = AC$), så vil grunnvinklene ($\angle ABC$ og $\angle ACB$) i trekant ABC være kongruente".

La punkt M være midtpunktet på $\overline{BC}$, og trekk linjestykket $\overline{AM}$. Trekantene AMB og AMC er kongruente fordi $AM = AM, AB = AC$ og $BM = CM$ ved side-side-side-teoremet (Venema, 2012, s. 76). Siden trekantene er kongruente AMB og AMC er også vinklene $\angle ABC$ og $\angle ACB$ kongruente, og beviset er fullført.

I et direkte bevis tar en altså utgangspunkt i det en vet, og deduserer ut fra det til en er kommet fram til at påstand B også er sann når A er sann. Men det er ikke alltid like lett å bevise på denne måten. Den følgende sannhetsverditabellen gir en oversikt over hvilke utsagn som er ekvivalente med det opprinnelige utsagnet 'hvis A, så B'.

A	B	$\overline{\text{A}}$	$\overline{\text{B}}$	A $\Longrightarrow$ B	$\overline{\text{A}} \Longrightarrow \overline{\text{B}}$	B $\Longrightarrow$ A	$\overline{\text{B}} \Longrightarrow \overline{\text{A}}$	$\overline{\text{A} \wedge \overline{\text{B}}}$
S	S	U	U	S	S	S	S	S
S	U	U	S	U	S	S	U	U
U	S	S	U	S	U	U	S	S
U	U	S	S	S	S	S	S	S

Tabell 2.1: Sannhetsverditabell for utsagnet 'Hvis A, så B', 'Hvis ikke-A, så ikke-B', 'Hvis B, så A', 'Hvis ikke-B, så ikke-A', og 'Ikke (A og ikke-B)'. Kolonne 5 gir sannhetsverdiene for det opprinnelige utsagnet 'Hvis A, så B'. Kolonne 6, 7, 8 og 9 viser sannhetsverdiene for henholdsvis det inverse utsagnet, det konverse utsagnet, det kontrapositive utsagnet, og motsigelsesbevis. S betyr sann, U betyr usann, $\overline{\text{A}}$ betyr ikke-A, og $\wedge$ betyr "og" (Cupillari, 2011, s. 22-25).

Som en kan se av tabell 2.1 er sannhetsverdiene i kolonne 5, 8 og 9 like. Det betyr at det kontrapositive utsagnet i kolonne 8 er ekvivalent med det opprinnelige utsagnet, og det er også utsagnet i kolonne 9 som brukes i motsigelsesbevis. Sannhetsverdiene i kolonne 6 og 7 er like hverandre, men de er forskjellige fra det opprinnelige utsagnet. Derfor er det inverse og det konverse utsagnet ekvivalente med hverandre, mens de ikke er ekvivalente med det opprinnelige utsagnet. Sannhetsverditabellen gir dermed to bevismetoder som er ekvivalente med direkte bevis: Motsigelsesbevis og kontrapositive bevis.

Kontrapositive utsagn er det inverse utsagnet av det konverse utsagnet av det opprinnelige utsagnet. Et kontrapositivt bevis brukes gjerne dersom det er lettere å ha 'ikke-B' som utgangspunkt for implikasjonen enn det å ha A som utgangspunkt. Det kontrapositive beviset starter med 'ikke-B' og deduserer seg fram til 'ikke-A'. Om den implikasjonen holder, så vil også det opprinnelige utsagnet holde. Et eksempel på et kontrapositivt bevis finnes i oppgavene som er brukt i datainnsamlingen for studien. Oppgaven er presentert i avsnitt 4.2.7.

I et motsigelsesbevis vil en vise at A og ikke-B ikke kan holde samtidig. Oftest gjøres dette ved å anta at A og ikke-B holder for deretter å dedusere fram en motsigelse. Om en finner en motsigelse, vil det opprinnelige utsagnet være sant. Et eksempel på denne typen bevis er følgende. I nøytral geometri er en Lambertfirkant $ABCD$ en firkant der tre av vinklene er rette. La $\angle ADC$ være den vinkelen som ikke nødvendigvis er rett. Påstanden er at $AD \geq BC$ i en Lambertfirkant.

Anta at $AD < BC$ i Lambertfirkanten. Da kan en finne et punkt E på $\overline{BC}$ slik at $AD = BE$. Firkant $ABED$ er nå en Saccherifirkant, noe som betyr at $\mu(\angle BED) = \mu(\angle ADE) \leq 90°$. Ytre vinkler-teoremet sier at en ytre vinkel til enhver trekant må være ekte større enn hver av de motstående indre trekantene. I trekant ECD er dette ikke oppfylt fordi $\mu(\angle BED) \leq 90° = \mu(\angle ECD)$. Antagelsen har ført til en motsigelse, og den opprinnelige påstanden må dermed være sann.

Induksjonsbevis er, på tross av navnet, også en form for deduktivt bevis. Det fungerer på følgende måte: En viser at en påstand er sann for et tilfelle. Deretter antar en at påstanden gjelder for et vilkårlig tilfelle og viser at da må også påstanden være sann for det påfølgende tilfellet. Om en har kontrollert at det første mulige tilfellet er sant, så vil induksjonsbeviset garantere at det også er sant for tilfelle 2, som igjen fører til at den er sant for tilfelle 3, og så videre. Induksjonsbevis fungerer kun for påstander der tilfellene er tellbare og kommer i en gitt rekkefølge. Det kan være uendelig antall tilfeller så lenge de kommer i en viss rekkefølge.

Uttømmende søk er også en gyldig bevismetode. Det består av å kontrollere at alle mulige tilfeller stemmer med påstanden som skal vises. I noen situasjoner vil dette være en effektiv måte å bevise en påstand, men det forutsetter at det er få tilfeller påstanden gjelder for. For påstander der det er uendelig mange tilfeller er dette en umulig bevismetode. I forbindelse med forskning i matematikk brukes denne bevismetoden i relativt liten grad fordi den kun er bevisende. Den gir overhodet ingen forklaring på hvorfor en påstand er sann. Dermed vil den også være uegnet som bevisform i undervisningssammenheng, fordi i undervisning bør bevisene være forklarende.

Det er også verdt å nevne at et søk ikke er uttømmende om noen tilfeller er utelatt fra søket; det vil si hvis noen tilfeller ikke blir kontrollert. Da har en kun kontrollert noen tilfeller, og en vet ikke hva som skjer i de resterende tilfellene. Dette kalles empiri, og er, som tidligere nevnt, noe en stor andel elever mener er overbevisende nok. Empiri kan aldri sikre generell gyldighet av en påstand fordi det kun kontrolleres at enkelte spesialtilfeller er sanne (Cupillari, 2011, s. 40). Da er det noe annet med moteksempler. Det er nok med ett moteksempel for å motbevise en påstand fordi en da har vist at påstanden ikke gjelder generelt (Cupillari, 2011, s. 40).

2.3.3 Prototypeeksempler

I forbindelse med undervisning om funksjoner dukker det opp et konsept som kalles *prototypeeksempel* (Schwarz og Hershkowitz, 1999). Dette omhandler at hvis elever kun får se noen få eksempler på typer funksjoner i læringen av bevis, så kan dette bli elevenes hovedoppfatning av funksjoner. Innen funksjoner er prototypeeksempler gjerne lineære funksjoner og andregradsfunksjoner. Om en elev blir bedt om å forklare hva en funksjon er, så vil eleven ofte vise til enten linære funksjoner eller andregradsfunksjoner i sin forklaring. Dette er med i teoridelen i denne masteroppgaven om geometri og bevis selv om det er et konsept opprinnelig brukt innen funksjoner. Det er ikke umulig at dette konseptet med prototypeeksempler også vil gjelde i forbindelse med læring av bevis: Om en elev for eksempel kun ser skriftlige, direkte bevis i undervisning, så kan det tenkes at den eleven vil ha med seg dette som et prototypeeksempel i videre arbeid med bevis.

3. Metode

I dette kapittelet står det om hvordan studien er designet. Forskningsdesignet begrunnes ut fra teori om kvalitativ forskning og forskningsspørsmålet. Først beskrives forskningsdesignet, deretter hvordan deltakerne ble rekruttert til studien. Hvordan dataene til studien ble samlet inn forklares etter det, før det blir beskrevet hvordan dataene ble behandlet og analysert. Til slutt i kapittelet presenteres ulike forskningsetiske hensyn en forsker må tenke over, og hva jeg har tenkt om dette før og under arbeidet med studien.

3.1 Forskningsdesign

Hensikten med denne studien er å kartlegge elevers begrepsbilde av bevis, og å undersøke om formen på begrepsbildet har en sammenheng med hvordan elever argumenterer i geometri. Studien har et fleksibelt design, og har trekk som kan minne om en casestudie siden den empirisk undersøker et fenomen i miljøet fenomenet opptrer i ved å bruke flere datakilder (Robson og McCartan, 2016, s. 150). Fenomenet det er snakk om er her elevers begrepsbilde av bevis og elevers argumentasjon i geometri, og studien bruker matematikkelever som tar R1-matematikk som informanter. Viktige ting med en casestudie er ifølge Robson og McCartan (2016, s. 150) at casestudien mer er en strategi enn en metode, at den er et produkt av forskning, at den er empirisk, at den omhandler et avgrenset tema, at den studerer et fenomen i konteksten fenomenet opptrer, og at den bruker flere datakilder. Alle disse gjenspeiles i denne studien av R1-elevers syn på bevis.

3.2 Valg av deltakere

Datainnsamlingen til denne studien ble gjennomført på to forskjellige videregående skoler av middels størrelse i en middels stor by i Norge, og elevene som deltok ble rekruttert ved at de tok R1-matematikk ved disse to skolene. I og med at elevene har valgt å ta R1-matematikk er det grunn til å tro at dette er elever som har en viss interesse for matematikk.

Pseudonymene som er gitt informantelevene er Arne, Bjørn og Chris i den ene gruppa, Dina, Eline og Frida i gruppe 2, og Gustav, Håkon og Inge i den siste gruppa.

To av elevgruppene i datainnsamlingen er rekruttert fra samme skole. Hele R1-klassen til disse elevene fikk tilbud om å delta etter å ha mottatt muntlig informasjon om studien, og det var da seks elever som takket ja til deltakelse. Disse elevene fikk så utdelt et samtykkeskjema og skriftlig informasjon om studien i tillegg til at de fikk muntlig informasjon om at de når som helst kunne trekke seg fra deltakelse uten å oppgi grunn. Informasjonen og samtykkeskjemaet er lagt ved som vedlegg A og B. Selve datainnsamlingen foregikk utenfor tidsrommet R1-timene var i fordi læreren ikke godkjente bruk av timene til dette formålet. Ingen av elevene som deltok fra denne skolen hadde kjennskap til meg fra tidligere, og jeg visste heller ingenting om dem.

Den siste gruppa ble rekruttert gjennom en R1-klasse på den andre videregående skolen. En del av elevene i denne klassen deltok i pilotstudien som ble gjort høsten før denne studien. Denne klassen ble på nytt spurt om de var villige til å delta, og tre av dem sa ja. Elevene som deltok fikk skriftlig informasjon per e-post i forkant av datainnsamlingen, samt muntlig informasjon og samtykkeskjema umiddelbart før gjennomføringen. Jeg hadde ikke kjennskap til akkurat disse elevene fra før, og for å ikke frata elevene undervisning ble gjennomføringen lagt til et tidspunkt der elevene ikke hadde timer.

3.3 Datainnsamlingsmetode

De følgende avsnittene inneholder en detaljert beskrivelse av gjennomføringen av datainnsamlingen. I tillegg til det som står ble også læreren på skolen med to elevgrupper uformelt spurt om hvordan undervisningen som omhandlet bevis og geometri var lagt opp, og om hvilken lærebok som ble brukt. Datainnsamlingen besto av en økt med både observasjon av og intervju med tre elevgruppers arbeid med geometrioppgaver, heretter kalt firkantoppgaven, samt et påfølgende intervju som omhandlet geometriske bevis og bevis generelt, heretter kalt trekantoppgaven. Datainnsamlingsøktene varte mellom 60 og 90 minutter, og både geometriarbeidene og intervjuene ble filmet for å sikre at alle detaljer rundt hva elevene snakker om og peker på og tegner på figurene ble registrert.

Intervju som datainnsamling ble valgt fordi det er en god måte å få innblikk i deltakernes ideer, oppfatninger og vurderinger (Befring, 2015, s. 74), og denne studien søker etter elevers ideer og oppfatninger rundt bevis, samt vurderinger av ulike bevis. I og med at intervjuene i denne studien foregår på elevenes skoler, kalles det for *oppsøkende intervju*. Det at intervjuet gjennomføres i lokaler elevene vanligvis oppholder seg gjør ifølge Tjora (2012, s. 121) at deltakerne vil føle seg tryggere og mer komfortable med situasjonen. Det å ha rom som hindrer forstyrrelser utenfra er også viktig for at deltakerne skal føle seg trygge. Rommene som ble brukt i denne studien var lukkbare rom med vinduer ut mot fellesareal. Vinduene hadde gardiner slik at deltakerne ikke ble forstyrret av omgivelsene og slik at omgivelsene ikke kunne se deltakerne i intervjusituasjonen.

3.3.1 Firkantoppgaven

Tanken bak disse oppgavene var at et slikt elevarbeid kan gi innsikt i hvordan elevene argumenterer og gjennomfører bevis i geometri. Det er viktig å kunne si noe om dette for å svare på den andre delen av forskningsspørsmålet:

> Hvilke aspekter av R1-elevers begrepsbilde av bevis er observerbare i geometri, og hvordan kommer det til uttrykk i elevenes argumentasjon?

Resultatet bak oppgaven, altså at det i enhver firkant vil bli et indre parallellogram med sidemidtpunktene i den første firkanten som hjørner, er dessuten et morsomt resultat i matematikken. Jeg tenkte at elevene kanskje også ville synes at dette var litt interessant, og at de dermed følte de fikk noe igjen for deltakelsen.

Den første delen av datainnsamlingen besto av at elevene skulle tegne midtpunktene på sidene i ulike firkanter, trekke linjestykker mellom disse midtpunktene, og deretter både finne ut hvilken firkant de hadde tegnet inn, og om og hvorfor det alltid vil bli den typen indre firkant. Elevene fikk gjennom økten utdelt seks forskjellige ark med firkanter de kunne tegne på. Arkene er nummererte fra en til seks, og elevene fikk kun ett ark om gangen; i stigende rekkefølge. Instruksjonene sto ikke på arkene, men ble gitt muntlig av meg. Mens elevene jobbet med oppgavene stilte jeg spørsmål og ga instruksjoner er det var nødvendig. Elevene hadde gradskive, linjaler og kalkulator som tilgjengelige hjelpemidler.

3.3.2 Trekantoppgaven og prat om bevis

Andre del av datainnsamlingen besto av et intervju med diskusjonsoppgaver. Intervjuguiden er lagt ved i vedlegg C. Her spurte jeg elevene om hvilke tanker de hadde rundt bevis og gyldigheten til et bevis. Diskusjonsoppgavene besto av ti ulike "bevis" for halvsirkelteoremet eller Thales setning; at en innskrevet trekant i en sirkel der den ene siden av trekanten er diameteren i sirkelen bestandig er en rettvinklet trekant. "Bevisene" er ikke alle gyldige bevis, og elevene skulle derfor diskutere hvilke bevis som de mente er gyldige, og hvorfor bevisene er gyldige eller ikke. Elevene fikk først påstanden som skulle bevises på et ark foran seg, og fikk deretter ett og ett bevis utdelt.

Tanken bak denne oppgaven var at bevisene skulle få elevene i gang med praten om bevis, og at det ville komme diskusjoner som ikke nødvendigvis er direkte knyttet opp mot akkurat disse bevisene. Forskningsspørsmålet omhandler begrepsbildet av bevis hos elever, og håpet var et disse oppgavene sammen med intervjuspørsmålene ville gi svar på det.

3.3.3 Intervju

Det finnes flere ulike måter å strukturere et intervju på. Et *åpent intervju* er et intervju der det er en ganske fri samtale, ofte med tema eller åpne, generelle spørsmål som utgangspunkt. Et *strukturert intervju* har mer konkrete spørmål der det også lett går an å kategorisere svarene deltakerne gir (Befring, 2015, s. 74). Intervjuene i denne studien var mest strukturerte. Jeg mener noen av spørsmålene jeg stilte var av åpen art, men at det alt i alt var konkrete og strukturerte spørsmål. Oppgaveløsingen elevene gjorde var mer åpen, der de fikk trekke inn det de tenkte på der og da, og der de fikk velge sin egen vei i bevisføringen og vurderingen av bevisene. Totalt sett var det derfor det som kalles et *semi-strukturert intervju* (Befring, 2015, s. 75), med bestemte oppgaver og spørsmål, men med mulighet for mer åpne svar.

3.4 Bearbeiding og analyse av datamaterialet

I dette delkapitlet kommer en beskrivelse av hvordan datamaterialet er behandlet. Først forklares det hvordan transkripsjonen foregikk. Deretter kommer en forklaring av og begrunnelse for valg av analysemetode.

3.4.1 Transkribering

Alle videoopptakene fra de tre datainnsamlingsøktene ble transkribert før analysen av datamaterialet begynte. Transkripsjon er en skriftlig gjenfortelling av det som skjer på et lydeller videoopptak, og den gjør det enklere å få en oversikt over datamaterialet i forbindelse med analysen.

I min transkripsjon er alle elev-, lærer- og skolenavn anonymisert, og en transkripsjonsnøkkel er brukt for å vise hva de forskjellige tegnene i transkripsjonen betyr, se vedlegg D. Etter endt transkribering fikk de deltagende elevene tilsendt transkripsjonen for sin datainnsamlingsøkt slik at de fikk mulighet til å se over teksten. Dette ble gjort for at elevene skulle føle seg sikre på at ikke dataene ble manipulert på noe vis, og at de skulle vite at de i transkripsjonen ikke er fremstilt på en annen måte enn de så for seg. Dette kaller Robson og McCartan (2016, s. 172) for *member checking*, og er ett av flere grep for å sikre studiens kvalitet. Mer om dette finner du i avsnitt 6.2.

3.4.2 Analyseprosessen

Analyseprosessen i studien er tredelt. Først er det induktiv del der begrepsbildet av bevis kartlegges for hver av gruppene ved hjelp av tematisk koding. Deretter blir argumentasjonen i forhold til firkantoppgaven gjennomgått med tanke på å finne ut om argumentasjonen følger begrepsbildet til gruppa. Den siste delen av analysen kobler sammen de tre gruppenes forhold mellom begrepsbildet av bevis og egen argumentasjon, og gir dermed svar på forskningsspørsmålet.

> Hvilke aspekter av elevers begrepsbilde av bevis vises i geometri, og hvordan kommer det til uttrykk i elevenes argumentasjon?

I de følgende avsnittene blir det forklart hvordan de tre delene av analysen er gjennomført.

3.4.2.1 Tematisk koding

I denne studien har jeg valgt å bruke tematisk koding i den første, induktive delen av analysen av datamaterialet. Dette er en fleksibel måte å tilnærme seg datamaterialet på fordi kodene kan bestemmes underveis i arbeidet med databehandlingen. I tillegg mener Robson og McCartan (2016, s. 470) at denne formen for koding er den som er enklest å gjennomføre med tanke på kvalitativt analysearbeid. En mulig ulempe med tematisk koding er at siden det er en så fleksibel metode som det er, så kan datamaterialet lede studien i mange ulike retninger. Det kan dermed være utfordrende å bruke datamaterialet på en måte som gjør analysen fokusert og spisset mot forskningsspørsmålet (Robson og McCartan, 2016, s. 470).

Jeg har fulgt Robson og McCartan (2016, s. 467-480) sine fem steg for gjennomføring av en tematisk kodingsprosess. I avsnittene som følger er de fem stegene i den tematiske kodingen forklart.

3.4.2.2 Gjøre seg kjent med datamaterialet

Jeg gjorde meg kjent med datamaterialet ved å først transkribere videoene. Deretter ble transkripsjonene gjennomlest. I gjennomlesingen ble det skrevet ned stikkord på Post-it-lapper, og sidetall og hvilken transkripsjon det var hentet fra ble notert på hver av Post-it-ene. Dette gjorde det lett å i etterkant finne ut hvilke elevutsagn som ga hvilke koder.

Post-it-lappene ble brukt for å lage koder som omhandlet hvordan elevene snakket om bevis og argumentasjon.

3.4.2.3 Lage koder

Post-it-lappene ble sortert ved å bruke et tankekart der lapper med samme tematikk ble koblet sammen. Lappene som jeg mente hadde noe til felles ble deretter plassert på et eget ark. Lappenes innhold ble studert, og koder ble generert. Ofte ga lappene som var samlet på samme ark opphav til flere forskjellige koder. I tillegg kan det nevnes at lappene noen ganger ble flyttet til et annet ark, og noen ganger ble koder og lapper også forkastet.

Kodingen ble gjort med Post-it-lapper på denne måten for å få kodene så empirinære som mulig. Et poeng med en slik koding er at kodene skal reflektere innholdet i datamaterialet på en så korrekt måte som mulig, og uten å dra inn holdninger eller tanker forskeren har med seg fra tidligere. Det er også umulig å lage slike koder før en går gjennom datamaterialet, noe Tjora (2012, s. 201) mener er noe som gjør at denne kodingsmetoden kan kalles empirinær.

3.4.2.4 Identifisere kategorier

Kategoriene ble generert ved at koder med samme tematikk ble satt sammen og gitt et navn som beskrev det som var felles ved kodene. Post-it-lappene var stort sett organisert slik at kodene som ble generert fra ett ark ga opphav til en kategori, men i noen tilfeller ga også koder opphav til en kategori på tvers av arkene. En tabell over kategorier og tilhørende koder ble satt opp.

Etter dette var gjort ble det kartlagt hvilke koder og kategorier som hørte til hver av gruppene, og alle de tre gruppene fikk hver sin tabell over kategorier og koder i begrepsbildet av bevis. Dette ble gjort for å kunne si noe om hvordan ulike begrepsbilder henger sammen med de ulike gruppenes argumentasjon.

3.4.2.5 Lage et tematisk nettverk

I denne delen av analyseprosessen ble kategoriene satt i sammenheng med argumentasjonen elevene brukte på firkantoppgaven. Transkripsjonene ble studert med kategoriene i bakhodet, og hvis en kategori var synlig både i begrepsbildet og i argumentasjonen til gruppa ble dette notert i en tabell. Tabellen gir en oversikt over hvilke deler av begrepsbildet som er synlig i hver av gruppenes argumentasjon, og dette kunne brukes for å si noe om hvilke aspekter ved begrepsbildet som var synlig for alle gruppene, og også for å sammenligne hva som var forskjellig mellom gruppene.

3.4.2.6 Integrering og tolking

I dette stegen av analysen skal en se hva det til nå analyserte datamaterialet prøver å fortelle. Her koblet jeg funnene sammen med teori og annen forskning. Dette diskuteres i kapittel 6.

3.5 Etiske betraktninger

Befring (2015, s. 30) skriver om forskjellige betraktninger en må gjøre seg når en driver med forskning innen utdanning. Det første som nevnes er *redelighet* og *hederlighet*. Med dette menes det at forskeren skal være ærlig og troverdig i forskningen. Det betyr igjen at forskeren ikke skal drive med plagiering, fabrikkering eller forfalsking av data. En forsker er redelig og hederlig om det kommer tydelig fram hvor og hvordan teori og data er hentet eller funnet, samt at de forskningsetiske normene er fulgt.

I Norge finnes det regler og normer som beskriver god forskning. De mest sentrale i forbindelse med utdanningsforskning er *informert og fritt samtykke*, *trygg håndtering av opplysninger*, *innsiktsrett for deltakere* og det å ta *særlige hensyn til barn og unge*. En beskrivelse av disse ulike reglene og normene følger i avsnittene under. I tillegg forklarer jeg hvorfor jeg mener denne studien oppfyller alle gjeldende krav til god forskningsetikk.

3.5.1 Informert og fritt samtykke

Et prinsipp i forskningsetikk er ifølge Befring (2015, s. 31) at all deltakelse i forskning skal bygge på samtykke på et fritt, informert og forstått grunnlag. Det vil si at forskeren har ansvar for at deltakerne har fått forståelig informasjon om studien, og at deltakerne ikke på noen måte føler seg presset til å delta.

Dette prinsippet mener jeg er oppfylt i denne studien. Jeg formidlet informasjon om forskningen både skriftlig og muntlig til elevene, og elevene skrev under på at de hadde forstått informasjonen på samtykkeskjemaet. Ingen av elevene ble presset til deltakelse på noe vis, og samtlige meldte selv interesse for å delta. Elevene har også mulighet til å trekke seg fra deltakelse. I tillegg er dette en studie der belastningen av å delta kan anses å være minimal, mens nytten av å delta er tilstede. Den største belastningen av deltakelse er tidsbruken deltakerne har, som er på rundt 90 minutter. Nytteverdien kan være stor i og med at elevene får diskutert og trent på matematisk argumentasjon og resonnering. Dette er både en del av et læreplanmål innen geometri i R1-matematikk, og også en stor del av den grunnleggende ferdigheten "å kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig i matematikk" (Utdanningsdirektoratet, 2006a, s. 4).

3.5.2 Håndtering av opplysninger

Under dette prinsippet er det flere viktige punkter. Det at informantene har konfidensiell og anonym deltakelse er ett av dem, og det handler om at deltakerne skal være sikre på at personlige opplysninger ikke havner på avveie og at deres navn ikke kan kobles til deler av eller hele innholdet i studien. Det finnes regler for hvordan data skal oppbevares og lagres, og også krav om makulering av datamaterialet. Forskeren eller forskerne har dessuten taushetsplikt i forhold til alle opplysninger rundt deltakerne. Målet med disse reglene er å verne informantenes personlige integritet og privatliv.

Også her mener jeg kravene til en god forskningsetikk er oppfylt i denne studien. Den eneste plassen elevenes navn og kontaktinformasjon er notert er på samtykkeskjemaet de signerte, og dette skal kun brukes av meg for å sende transkripsjonen og ved eventuelle spørsmål til elevene i etterkant av datainnsamling. Alle transkripsjoner er anonymisert, elevene har fått pseudonymer, og skolenavnene er ikke nevnt. En ting jeg derimot ikke kan garantere er at den ene gruppas deltakere ikke kan bli gjenkjent av elever og lærere i klassen. Denne gruppa besto utelukkende av jenter, og er den eneste gruppa som gjør det. Dermed kan deltakerne bli gjenkjent som deltakere i gruppa, men individene i gruppa har likevel anonymitet fordi ingen andre enn jeg vet hvem av dem som har fått hvilket pseudonym i transkripsjonen.

Alt datamateriale blir oppbevart enten på ark på et låst rom eller på en ekstern harddisk fram til det blir makulert, og jeg har ikke utlevert, og kommer heller ikke til å utlevere, datamateriale til noen andre; verken muntlig eller skriftlig.

3.5.3 Innsiktsrett for deltakere

Dette handler om at deltakerne i forskning skal ha mulighet til å få vite hva som skrives om dem. Innsiktsretten er ett av flere punkter som støtter opp om at forskningen er utført på redelig og hederlig vis.

I denne studien har deltakerne fått muntlig og skriftlig informasjon om at de har innsynsrett, og de har også fått kontaktinformasjon til meg og veileder, og kunne dermed når som helst spørre om å få innsyn. Deltakerne fikk også transkripsjonen for deres egen elevgruppe tilsendt slik at de hadde mulighet til å se at dataene var framstilt på korrekt vis.

3.5.4 Barn og unge i forskning

Ved forskning på barn og unge er det særskilte krav til beskyttelse av deltakerne. Barn som er opp til 15 år må ha samtykke fra foreldre i tillegg til at de selv gir et informert samtykke. Men dette med at de gir et informert samtykke kan være problematisk med barn og unge fordi denne gruppen ifølge Befring (2015, s. 32) ”har vanskelig for å vegre seg”, og dermed kan det hende barn og unge gir samtykke til deltakelse selv om de egentlig ikke ønsker å gjøre det.

I denne studien er deltakerne elever på andre trinn på videregående skole, og dermed minst 16 år gamle. Studien handler dessuten ikke om personlige egenskaper hos deltakerne eller andre identifiserende eller konfidensielle områder i deltakernes identitet eller liv, og jeg så derfor ingen grunn til å be om samtykke fra foreldre. Elevene ga i uformelle samtaler uttrykk for at de syntes det hørtes interessant ut å delta, og jeg mener derfor at det frie og informerte samtykket de ga er tilstrekkelig til å si at studien oppfyller kravene til god forskningsetikk på dette området.

Til sist bør en spørre seg om deltakelsen vil være en ulempe for elevene på noe slags vis. I og med at elevene ikke mistet undervisning i forbindelse med deltakelsen, og at alle de nevnte forskningsetiske kravene er oppfylte, mener jeg at det ikke er grunn til å si at deltakelse var en ulempe for elevene. I verste fall har elevene ikke lært noe nytt ved å delta, og tiden de brukte på deltakelsen kunne i så tilfelle blitt brukt på noe annet. Men ut fra uformelle samtaler med deltakerne er det grunn til å tro at elevene fikk repetert matematikk de hadde glemt, og også at de har lært noe nytt, noe som betyr at elevene kan ha hatt en viss nytte av å delta.

4. Presentasjon og analyse av oppgaver

I datainnsamlingen ble det brukt to oppgavesett. Det ene oppgavesettet, firkantoppgaven, ble brukt i den delen av datainnsamlingen der elevene skulle argumentere for at en påstand stemmer. I det andre oppgavesettet, trekantoppgaven, fikk elevene presentert ulike måter å argumentere for at Thales' setning er sann. Her skulle de diskutere hvilke argumenter som er gyldige bevis, samt hvorfor de er gyldige eller ugyldige. Oppgavene blir i dette kapittelet presentert og analysert.

4.1 Firkantoppgaven

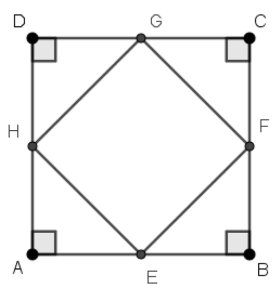
Elevene ble i denne oppgaven bedt om å markere midtpunktene på sidene i ulike firkanter. De kunne enten bruke de ferdigtegnede firkantene eller tegne firkantene selv. Deretter skulle elevene lage en ny firkant inni firkanten, der hjørnene i den nye firkanten er midtpunktene på sidene i den større firkanten. Elevene ble spurt om hvilken type firkant den nye firkanten er, og måtte argumentere for om dette bestandig vil stemme om en starter med en firkant av samme type. Tilgjengelige hjelpemidler var gradskive, linjal og kalkulator.

Den første firkanten elevene skulle lage en ny firkant inni er et kvadrat. Deretter var det rektangel, rombe, parallellogram, og en tilfeldig firkant elevene fikk som utgangspunkt. Den tilfeldige firkanten de fikk utdelt er en konveks firkant der det ikke er noen rette vinkler, og der ingen av sidene verken er parallelle eller like lange. Arkene elevene fikk utdelt i denne oppgaven er lagt ved som vedlegg E.

Ulike gyldige argumentasjonsmåter for hvorfor den innerste firkanten er den firkanten den er blir presentert i de følgende avsnittene.

4.1.1 Kvadrat

Firkanten $EFGH$ inni kvadratet $ABCD$ er et kvadrat, som vist i figur 4.1, og det er flere måter å vise dette på.



Figur 4.1: Hjørnene i $\square EFGH$ er midtpunktene på sidene til kvadratet $ABCD$.

En kan bruke Pytagoras' setning for å fastslå at $EF = FG = GH = HE = \sqrt{2}AE$ siden $AE = EB = BF = FC = CG = GD = DH = HA$. Dette betyr at $\square EFGH$ er en rombe. For å si noe om vinklene kan en se på $\triangle AEH$. Den er likebent siden $AE = AH$, og dermed er vinkelmålet til $\angle AEH$ og $\angle AHE$ likt. Vinkelsummen i trekanter er $180°$, og siden $\angle EAH$ er en rett vinkel må summen av vinkelmålene til $\angle AEH$ og $\angle AHE$ være $90°$, noe som gir at vinkelmålet til hver av disse vinklene er $45°$. Det samme vil gjelde for $\triangle BEF$, $\triangle CFG$ og $\triangle DGH$. I tillegg til at vinkelsummen over ei linje er $180°$ gir dette:

$$\begin{aligned} 180° &= \mu(\angle AEH) + \mu(\angle HEF) + \mu(\angle FEB) \\ &= 45° + \mu(\angle HEF) + 45° \\ &= \mu(\angle HEF) + 90° \\ \implies \mu(\angle HEF) &= 90° \end{aligned}$$

Siden de tidligere nevnte trekantene er kongruente ved SSS (Venema, 2012, s. 76), vil tilsvarende regning gi at de resterende vinklene i $\square EFGH$ også er rette vinkler, og dermed at $\square EFGH$ er et kvadrat. I stedet for Pytagoras setning kan en også bruke cosinussetningen (Venema, 2012, s. 117) for å gjennomføre dette beviset.

En kan også bevise dette ved å bruke formlikhet. $\triangle AEH$ er formlik med $\triangle ABD$ med forhold 1:2 ved SAS-formlikhetskriteriet (Venema, 2012, s. 113) fordi $2AE = AB$, $2AH = AD$, $AE/AH = AB/AD$ og $\angle BAD \cong \angle EAH$. Siden trekantene er formlike, vil $\overleftrightarrow{BD}$ være parallell med $\overleftrightarrow{EH}$. Med tilsvarende argumentasjon er også $\overleftrightarrow{FG}$ parallell med $\overleftrightarrow{BD}$, samt $\overleftrightarrow{GH} \| \overleftrightarrow{EF} \| \overleftrightarrow{AC}$. $\square EFGH$ er dermed et parallellogram. I tillegg er $FG = EH = BD/2 = AC/2 = EF = GH$ siden diagonalene i $\square ABCD$ er like lange, og $\square EFGH$ er dermed en rombe. $\square EFGH$ er et kvadrat fordi diagonalene i $\square ABCD$ står vinkelrett på hverandre. Fra de de tidligere viste parallellitetene at $\overline{GH} \| \overline{EF} \perp \overline{EH} \| \overline{FG}$.

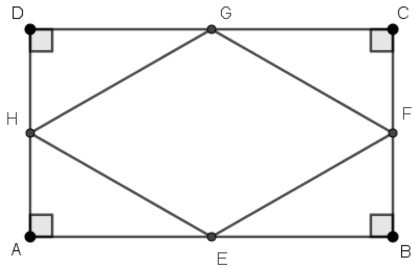
Et tredje bevis får en ved å se på kongruens mellom trekantene $\triangle AEH$, $\triangle BEF$, $\triangle CDF$ og $\triangle DGH$. Avstanden fra et hjørne i $\square ABCD$ til de nærmeste hjørnene i $\square EFGH$ er lik uansett hvilket hjørne en ser på. Dermed har en at $AE = BE = BF = CF = CG = DG = DH = AH$. SAS-kongruens-kriteriet (Venema, 2012, s. 64) er dermed oppfylt for de omtalte trekantene siden trekantene er rettvinklede, og $EF = FG = GH = EH$.

4.1.2 Rektangel

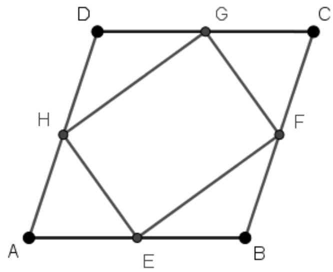
I rektangelet $ABCD$ får en romben $EFGH$, som vist i figur 4.2.
$AE = BE = CG = DG$ og $AH = DH = BF = CF$, og vinklene i $\square ABCD$ er rette, noe som fører til at beviset for at $EF = FG = GH = EH$ blir tilsvarende som for tilfellet der $\square ABCD$ er et kvadrat.

4.1.3 Rombe

Hvis $\square ABCD$ er en rombe vil $\square EFGH$ være et rektangel. Se figur 4.3.



Figur 4.2: Hjørnene i $\square EFGH$ er midtpunktene på sidene i rektangelet $ABCD$.



Figur 4.3: Hjørnene i $\square EFGH$ er midtpunktene på sidene i romben $ABCD$.

I en rombe er det ikke nødvendigvis rette vinkler, og Pytagoras-beviset vil dermed ikke fungere. Cosinussetningen kan derimot brukes, og beviset vil da bli følgende. I $\triangle AEH$ er $AE = AH$. Kall vinkelmålet til $\angle EAH$ for α. Cosinussetningen gir da at $HE = \sqrt{AE^2 + AH^2 + 2 \cdot AE \cdot AH \cdot \cos\alpha} = AE\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$. Ser en på $\triangle CGF$ vil en få at $FG = CF\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$. Siden $AE = CF$ og $\alpha = \alpha$ er $EH = FG$. Tilsvarende argumentasjon gir at $EF = GH$, som igjen betyr at $\square EFGH$ er et parallellogram. For å slå fast at vinklene i $\square EFGH$ er rette kan en se på vinkelsummer. Kall vinkelmålet til $\angle BAD$ for α, $\angle ABC$ for β, $\angle AEH$ for γ og $\angle BEF$ for δ. Fra $\square ABCD$ vet en at $2\alpha + 2\beta = 360°$. Fra $\triangle AEH$ vet en at $\alpha + 2\gamma = 180°$ siden trekanten er likebeint, og fra $\triangle BEF$ at $\beta + 2\delta = 180°$ av samme grunn. En får da at:

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= 180^\circ \\
\alpha + 2\gamma &= 180^\circ \\
\beta + 2\delta &= 180^\circ \\
\implies \alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta &= 180^\circ + 180^\circ \\
180^\circ + 2(\gamma + \delta) &= 360^\circ \\
\gamma + \delta &= 90^\circ
\end{aligned}$$

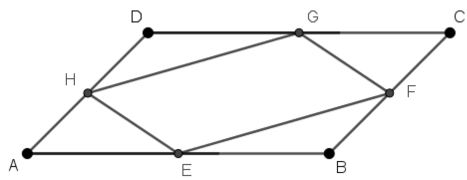
Summen av vinkelmål over ei linje er $180°$, noe som betyr at $\gamma + \mu(\angle HEF) + \delta = 180°$. Summen av γ og δ er $90°$, noe som igjen betyr at $\angle HEF$ er rett. Tilsvarende gjelder for de resterende vinklene i $\square EFGH$, og denne firkanten er dermed et rektangel.

Beviset med formlikhet vil fungere på samme måte som for rektangel og kvadrat fordi det i en rombe også er slik at $\triangle ABD \sim \triangle AEH \sim \triangle CGF \sim \triangle CDB$ fra SAS-formlikhetskriteriet. Dermed er $\overline{EF} \| \overline{GH}$ og $\overline{FG} \| \overline{EH}$, og også at $EF = GH$ og $FG = EH$. $\square EFGH$ er dermed et parallellogram.

Beviset med kongruente trekanter vil også fungere, men i en rombe vil en generelt kun ha at $\triangle AEH \cong \triangle CGF$ og $\triangle BEF \cong \triangle DGH$ fra SAS-kongruens-kriteriet. Dette fører til at $EH = FG$ og $EF = GH$, noe som betyr at $\square EFGH$ er et parallellogram.

4.1.4 Parallellogram

Hvis $\square ABCD$ er et parallellogram vil også $\square EFGH$ være et parallellogram. Dette er illustrert i figur 4.4.



Figur 4.4: Hjørnene i $\square EFGH$ er midtpunktene på sidene i parallellogrammet $ABCD$.

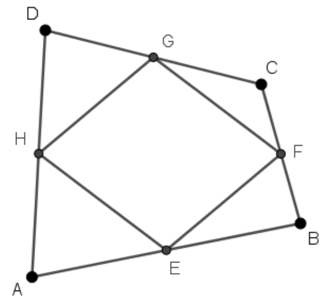
Dette kan bevises ved å bruke de samme bevisene som for en rombe. I cosinussetnings-beviset har en at $AE = CG$, $AH = CF$ og $\mu(\angle EAH) = \mu(\angle GCF)$, noe som gir at $EH = FG$ ved cosinussetningen. Tilsvarende argumentasjon kan brukes for å vise at $EF = GH$, og $\square EFGH$ er dermed et parallellogram. SAS-formlikhetskriteriet fungerer fordi $2AE = AB$, $2AH = AD$ og $\angle BAD$ er felles for trekantene ABD og AEH. Tilsvarende for $\triangle CGF \sim \triangle CDB$, noe som gir at $EH = FG$ i tillegg til at de er parallelle. Tilsvarende blir det også for de to resterende sidene i $\square EFGH$ slik at $EF = GH$ og at de er parallelle, og $\square EFGH$ er dermed et parallellogram. SAS-kongruenskriteriet vil gjelde mellom $\triangle AEH$ og $\triangle CGF$ fordi $AE = CG$, $AH = CF$ og $\angle EAH \cong \angle GCF$. Tilsvarende argumentasjon kan brukes for $\triangle BEF \cong \triangle DGH$, og $GH = EF$ og $EH = FG$, noe som medfører at $\square EFGH$ er et parallellogram.

4.1.5 Vilkårlig firkant

Hvis $\square ABCD$ er en firkant vil $\square EFGH$ være et parallellogram. Et eksemplel på en vilkårlig firkant kan en se i figur 4.5.
For å bevise at $\square EFGH$ er et parallellogram vil både SAS-formlikhetskriteriet og argumentasjon med cosinussetningen fungere.

Se på $\triangle AEH$ og $\triangle ABD$. Disse er formlike. Men $\overline{BD}$ inngår også i $\triangle CDB$ som er formlik med $\triangle CGF$. Dermed er $\overline{EH} \| \overline{BD} \| \overline{FG}$ og $EH = FG$. Med tilsvarende argumentasjon er $EF = GH$ og $\overline{EF} \| \overline{GH}$, og $\square EFGH$ et parallellogram.

Ved bruk av cosinussetningen på trekantene ABD, AEH, CFG og CBD finner en at $2EH = BD = 2FG$, noe som betyr at $EH = FG$. Tilsvarende for $GH = EF$.



Figur 4.5: Hjørnene i $\square EFGH$ er midtpunktene på sidene i firkanten $ABCD$.

I vedlegget er det også en ikke-konveks firkant på det sjette firkantoppgavearket. Denne var med i kun ett av intervjuene, og er dermed ikke relevant for analyse. Den blir ikke brukt videre verken i analysekapittelet, diskusjonskapittelet eller avslutningen.

4.2 Trekantoppgaven

Påstanden elevene skulle vurdere bevis for i trekantoppgaven er halvsirkelteoremet eller Thales' setning. Teoremet sier at om en har $\triangle ABC$ der $\overline{AB}$ er diameteren i en sirkel og C ligger på sirkelen, så er $\angle ACB$ en rett vinkel. Elevene fikk presentert ti ulike "bevis" for denne påstanden, og måtte finne ut om de er gyldige bevis, samt hvorfor de er eller ikke er gyldige. Arkene elevene fikk utdelt er lagt ved i vedlegg F, og består av påstanden og ti bevis.

4.2.1 Bevis 1

> Det finnes et teorem som sier at en periferivinkel alltid er halvparten av sentralvinkelen for en gitt sirkelbue (Sentralvinkelteoremet). Sentralvinkelen ($\angle AOB$) er i dette tilfellet $180°$, og periferivinkelen ($\angle ACB$) må derfor være halvparten av $180°$, altså rett.
>
> $\square$

Dette er et gyldig bevis. Sirkelbuen det er snakk om er buen mellom A og B gjennom C, og periferivinkelmålet $\mu(\angle ACB)$ er dermed halvparten av sentralvinkelmålet $\mu(\angle AOB)$ ifølge sentralvinkelteoremet (Venema, 2012, s. 208). I R1-matematikk er det gjennom følgende læreplanmål bestemt at undervisningen skal omhandle det som i læreplanen kalles "setningen om periferivinkler" (Utdanningsdirektoratet, 2006a, s. 4):

> Mål for opplæringen er at eleven skal kunne bruke linjer og sirkler som geometriske steder sammen med formlikhet og setningen om periferivinkler i geometriske resonnementer og beregninger.

Om denne setningen derimot ikke hadde vært kjent for elevene, og et bevis for den ikke hadde blitt presentert, så er det ikke sikkert elever ville akseptert beviset. Setningen om periferivinkler hadde da ikke kvalifisert som en akseptert sannhet i klassemiljøet.

4.2.2 Bevis 2 og 3

> Jeg har målt størrelsen på $\angle ACB$ i 20 ulike trekanter konstruert på papir.
>
> Påstanden om at denne vinkelen er rett stemmer i alle disse trekantene, og stemmer derfor for alle slike trekanter.
>
> $\square$

> Jeg har målt størrelsen på $\angle ACB$ i 500 000 000 ulike trekanter konstruert på papir.
>
> Påstanden om at denne vinkelen er rett stemmer i alle disse trekantene, og stemmer derfor for alle slike trekanter.
>
> $\square$

Disse er ikke gyldige bevis men empiriske argumenter. Når du har prøvd 20 ulike trekanter begynner du å ekskludere en del av trekantene i forhold til det å finne et motbevis for påstanden. Det samme gjelder for det å prøve 500 000 000 ulike trekanter. Da er det mange som er ekskludert fra settet med mulige motbevis-trekanter. Men selv om en har prøvd dette ut på 500 000 000 trekanter, så er det likevel uendelig mange trekanter igjen i settet med de mulige motbevis-trekantene, og dermed har en ingen garanti for at det ikke fortsatt kan finnes et motbevis etter de 500 000 000 konstruksjonene. I tillegg er det totalt uoverkommelig for en person å konstruere 500 000 000 trekanter innenfor en overkommelig tidsperiode. Om hver konstruksjon tar 2 minutter, og denne personen kontinuerlig konstruerer trekanter, vil det ta omtrent 1900 år å konstruere det antallet.

4.2.3 Bevis 4 og 5

> Jeg har målt størrelsen på $\angle ACB$ i 20 ulike trekanter konstruert i GeoGebra.
>
> Påstanden om at denne vinkelen er rett stemmer i alle disse trekantene, og stemmer derfor for alle slike trekanter.
>
> $\square$

> Jeg har målt størrelsen på $\angle ACB$ i 500 000 000 ulike trekanter konstruert i GeoGebra.
>
> Påstanden om at denne vinkelen er rett stemmer i alle disse trekantene, og stemmer derfor for alle slike trekanter.
>
> $\square$

Bevis 4 og 5 er også empiriske argumenter, og dermed ikke gyldige bevis. Dette er likevel en mer praktisk gjennomførbar empirisk undersøkelse enn tilsvarende undersøkelse ved konstruksjon på papir. GeoGebra tillater opp til 28 siffer i tall som skal brukes i grafikkfeltet, der maksimalt antall desimaler er 15 av de 28. Om en da konstruerer en sirkel med sentrum i O som har diameter $\overline{AB}$ og et bevegelig punkt C på sirkelen, så er det med det antallet tilgjengelige siffer fullt mulig å plassere C på mer enn 500 000 000 forskjellige steder på sirkelen. Tidsbruken for en slik undersøkelse er fortsatt stor hvis den gjøres manuelt, men om en bruker et dataprogram som både konstruerer trekanter og måler vinkelen for alle trekantene som skal konstrueres og måles, så vil den brukte tiden kunne reduseres til noe overkommelig.

4.2.4 Bevis 6

La $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ og $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, og anta at punktene A, B, O og C har koordinatene $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$ og (x, y) der $x^2 + y^2 = 1$ siden C ligger på sirkelen. $x^2 + y^2 = 1$ kan skrives om til $x^2 - 1 = -y^2$.

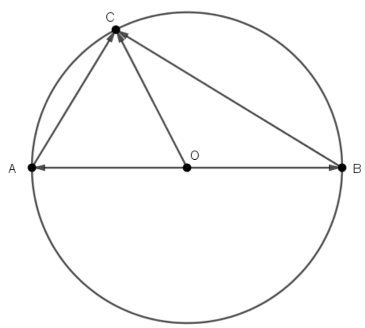
Om $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, så er $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$, og $\angle ACB$ er dermed rett.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\\ &= -[-1, 0] + [x, y]\\ &= [(x + 1), y]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\\ &= -[1, 0] + [x, y]\\ &= [(x - 1), y]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= [(x + 1), y] \cdot [(x - 1), y]\\ &= (x + 1)(x - 1) + y^2\\ &= x^2 - 1 + y^2\\ &= -y^2 + y^2 = 0\end{aligned}$$

□



Figur 4.6: Figuren som var lagt ved 'Bevis 6'.

Dette mener jeg er et gyldig direkte bevis. Beviset bruker egenskaper ved vektorer og sirkler i og med at skalarproduktet, vektoraddisjon og sirkelligningen inngår. Det at punktene

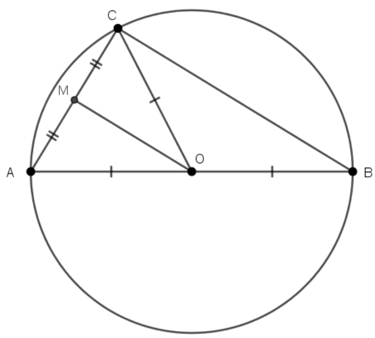
A, B og O er plassert i et koordinatsystem på denne måten mener jeg er uproblematisk. I utregningen av skalarproduktet mellom vektorene er det uvesentlig hvilke koordinater som inngår så lenge punktene tilhørende koordinatene er de to endepunktene og midtpunktet på diameteren til sirkelen. Punktet C må selvsagt også ligge på den samme sirkelen, og sirkelligningen må oppfylle $x^2 + y^2 = r^2$ når $r = AO = BO$ og C har koordinatene (x, y).

4.2.5 Bevis 7

Lag $\overline{CO}$. Både $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ og $\overline{CO}$ er radius i sirkelen, og har dermed lik lengde. Lag midtpunktet M på $\overline{AC}$. Siden M er midtpunktet på grunnlinja i den likebente trekanten AOC, vil $\overline{OM}$ stå vinkelrett på $\overline{AC}$.

Se nå på $\triangle AOM$ og $\triangle ABC$. Disse er formlike med forhold 1:2 siden $AC = 2 \cdot AM$ og $AB = 2 \cdot AO$. Linja gjennom OM og linja gjennom BC er dermed parallelle, og $\overline{BC}$ står derfor også vinkelrett på $\overline{AC}$.

□



Figur 4.7: Figuren som var lagt ved 'Bevis 7'.

Dette er et gyldig direkte bevis som benytter formlikhet og egenskaper ved parallelle linjer i argumentasjonen. Om en aksepterer SAS-formlikhetskriteriet (Venema, 2012, s. 113) som sier at to trekanter, $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike om de har sider som oppfyller det følgende: $AB/DE = AC/DF$. I tillegg må vinklene mellom de nevnte sidene, $\overline{AB}$ og $\overline{AC}$, og $\overline{DE}$ og $\overline{DF}$, altså vinklene $\angle BAC$ og $\angle EDF$, være kongruente.

4.2.6 Bevis 8

Jeg har målt størrelsen på $\angle ACB$ i $\triangle ABC$ for alle mulige plasseringer av punktet C på sirkelen (bortsett fra i A og i B).

Påstanden om at denne vinkelen er rett stemmer i alle disse trekantene, og stemmer derfor for alle slike trekanter.

□

Dette er en umulighet fordi det finnes uendelig mange plasseringer av C på sirkelbuen mellom A og B. Gitt at det var et endelig antall mulige plasseringer hadde det vært en annen sak. Da ville 'Bevis 8' vært et gyldig bevis på at alle trekantene har en rett vinkel i C fordi det da ikke er mulig at det finnes moteksempler fordi alle mulige trekanter allerede er kontrollert.

4.2.7 Bevis 9

Anta at $\angle ACB$ ikke er rett. Det betyr at sentralvinkelen ($\angle AOB$) må være ulik 180°, og dermed at punktene A, O og B ikke ligger på linje. Dette betyr igjen at $\overline{AB}$ ikke kan være diameteren siden segmentet ikke går gjennom sentrum av sirkelen. $\triangle ABC$ er dermed ulik trekanten i påstanden som skulle vises, og påstanden må derfor være sann.

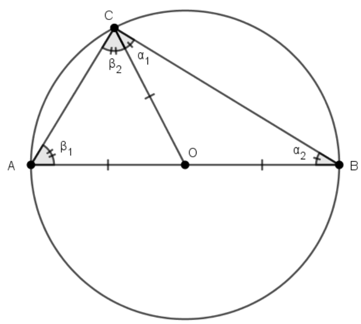
□

Dette er et gyldig kontrapositivt bevis som baserer seg på sentralvinkelteoremet. Ved gjennomføring av et kontrapositivt bevis for implikasjonen 'påstand A' $\implies$ 'påstand B' velger en å bevise implikasjonen 'det motsatte av påstand B' $\implies$ 'ikke påstand A'. I 'Bevis 9' er 'påstand A' at $\triangle ABC$ har følgende to egenskaper: $\overline{AB}$ er diameteren i en sirkel, og C ligger på sirkelbuen mellom A og B. 'B' er at $\mu(\angle ACB) = 90°$.

4.2.8 Bevis 10

Lag $\overline{CO}$. Både $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ og $\overline{CO}$ er radius i sirkelen, og har dermed lik lengde. Det fører til at $\triangle AOC$ og $\triangle BOC$ er likebeinte trekanter, som gir at α_1 og α_2 er like og at β_1 og β_2 er like. Vinkelsummen i trekanter er 180°. Vinkelsummen i $\triangle ABC$ er $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 180°$, eller $2 \cdot (\alpha_1 + \beta_1) = 180°$. Dette medfører at $\alpha_1 + \beta_2 = 90°$.

□



Figur 4.8: Figuren som var lagt ved 'Bevis 10'.

Dette er et gyldig direkte bevis om en aksepterer to ting. Det ene er at grunnvinklene i likebente trekanter er kongruente, noe som er en matematisk sannhet i alle plangeometrier

(Venema, 2012, s. 65). Det andre er at vinkelsummen i trekanter er 180°. Dette er ekvivalent med det Euklidske parallellpostulatet (Venema, 2012, s. 94), og gjelder dermed i Euklidsk geometri.

4.3 Hvorfor disse oppgavene?

Grunnen til at firkantoppgaven ble valgt ut som intervjuoppgave var at det kan bevises at det blir et parallellogram som den indre firkanten kun med kjennskap til formlikhet. Håpet var at oppgaven ikke var så enkel at alle fikk til å bevise alt uten problem, men at den heller ikke var så vanskelig at elevene ikke fikk til noe. Målet var at firkantoppgaven ville gi svar på hvordan elevene argumenterer, og for å få de til å prate om blant annet empiri og generalitet i argumentasjonssammenheng.

Trekantoppgavene var mest ment som en metode for å få elevene i gang med prat om bevis, og da tenkte jeg det var lurt å bruke et teorem elevene har en viss kjennskap til fra tidligere. Thales' setning står i Sinus R1-boka, som er den læreboka elevene brukte. Spesielt ønsket jeg at elevene skulle prate om hva de tenker rundt gyldige bevis, hvilke bevismetoder de mener er best, og selvfølgelig hvorfor de tenker som de gjør. Majoriteten av bevisene er direkte bevis, og dette er fordi jeg tenkte det var det de hadde størst kjennskap til fra tidligere. Det er også noe empiri. Dette var med fordi teori og forskning sier at elever ofte bruker empiri både som erstatning for og som supplement til bevis. Det kontrapositive beviset var med fordi pilotoppgaven til denne masteroppgaven dreide seg om elevers første møte med kontrapositive bevis, og jeg var nysgjerrig på om disse ni elevene også hadde de samme oppfatningene rundt kontrapositive bevis som det elevinformantene i pilotoppgaven hadde. Det uttømmende søket, som i dette tilfellet ikke er mulig på grunn av uendelig mange tilfeller, var med for å få elevene til å diskutere om denne bevismetoden generelt er mulig å bruke eller ikke.

5. Analyse

I dette kapittelet blir det først presentert hvorfor kategoriene og kodene fra den tematiske kodingen for gruppe 1 er som de er. Deretter presenteres det hvilke kategorier en kan finne igjen i den samme gruppas argumentasjon på firkantoppgaven. Så kommer en oppsummering av hva forholdet mellom begrepsbildet av bevis i geometri og argumentasjonen på firkantoppgaven er for gruppa. Dette gjøres også for de to andre gruppene.

Til slutt presenteres det som er felles for gruppenes forhold mellom begrepsbilde av bevis i geometri og argumentasjon i firkantoppgaven, noe som gir svar på det følgende forskningsspørsmålet.

> Hvilke aspekter av R1-elevers begrepsbilde av bevis er observerbare i geometri, og hvordan kommer det til uttrykk i elevenes argumentasjon?

5.1 Gruppe 1

5.1.1 Begrepsbilde

Begrepsbildet til denne gruppa beskrives av kategoriene og kodene i tabell 5.1. Disse kategoriene og kodene er funnet gjennom en tematisk kodingsprosess, og framgangsmåten for denne prosessen er beskrevet i avsnitt 3.4.2.

Kategorier	Koder
Gyldige bevismetoder	Sjekke at alle tilfeller passer med påstanden Direkte bevis
Ugyldige bevismetoder	Empiri generelt Måling på tegnede eller konstruerte figurer
Bevis skal ha en formell form	Bevis må ha et ordentlig og formelt språk
Bevis bruker aksepterte resultater	Bevis bygger på resultater som er bevist Må være sikker på at resultater som brukes er korrekte
Gyldig hvis aksiomer og regler følges	Om reglene følges vil et bevis være gyldig Bevis er enten gyldige eller ugyldige
Bevis skal gjelde generelt	Bevis skal ikke bruke eksempler
Gode bevis er lette å forstå	Bevisene antar ikke ting Bevisene er enkle og forklarende

Tabell 5.1: Kategorier og koder fra den tematiske kodingen for gruppe 1.

I de følgende avsnittene blir kategoriene forklart og forankret i datamaterialet.

5.1.1.1 Gyldige bevismetoder

Den første gruppa prater om hva de tenker er gyldige bevismetoder i forbindelse med trekantoppgaven, og det som kommer fram er følgende. Jeg tolker det de sier som at de tenker direkte bevis er en type gyldig bevis i og med at de tror bevis 1, 6, 7 og 10 er gyldige bevis. I tillegg snakker Arne og Bjørn om at det må være gyldig å kontrollere alle mulige tilfeller av en påstand der det er mulig i forbindelse med prat om bevis 8.

718. B: Du kan jo ikke måle i alle mulige plasseringer av C, det er jo det som er greia da.
719. A: Det er jo sant at han ikke kan ha gjort det. Men sett at han har gjort det da (avbrytes av Bjørn)
720. B: Men det går ikke!
721. A: ...så hadde det vært et gyldig bevis.

Det virker som at elevene er klar over at det i noen tilfeller ikke vil være mulig å bruke denne argumentasjonsformen fordi det er uendelig mange tilfeller å kontrollere opp mot påstanden, men at det vil være greit å gjøre det hvis det er et endelig antall.

5.1.1.2 Ugyldige bevismetoder

Det kommer også fram at denne gruppa tenker at empirisk testing, både i GeoGebra og uten digitale hjelpemidler, og at måling på figurer ikke er gyldige bevis. Dette diskuteres i flere sammenhenger i løpet av datainnsamlingen, blant annet i forbindelse med bevis 4 og 5 og i forbindelse med snakk om gyldighet av bevis. De følgende vekslingene omhandler diskusjonen rundt GeoGebra-"bevisene".

611. Ø: Så det kommer på det samme om du gjør det på ark eller i GeoGebra?
612. A: Det kommer ikke på det samme. Det er jo mer troverdig når du gjør det i GeoGebra. Men i forhold til hvordan de har skrevet, og i forhold til bevis... Så er det like lite et bevis som bevis 2 og 3.

Jeg tolker dette som at disse elevene stoler på figurer i GeoGebra mer enn de stoler på en figur på papir, men at det likevel ikke er et bevis fordi en kun kontrollerer noen av tilfellene påstanden gjelder for. For at det skal være gyldig må alle tilfellene kontrolleres.

5.1.1.3 Bevis skal ha en formell form

Denne kategorien med tilhørende koder kommer fra utsagn i forbindelse med trekantoppgaven. Bjørn sier følgende om bevis 2 og 3.

563. B: Du kan jo ikke lage dine egne trekanter og ta det som et bevis. Bevis må jo skrives med bokstaver og ord liksom... Jeg synes det generelt bare var dårlig jeg altså.

Dette tolker jeg som at Bjørn tenker at det ikke kan være et bevis hvis det ikke bruker språk med en viss formalitet. Måten bevis 2 er skrevet på er muntlig og uformelt med fraser som "jeg har målt". Bevis elevene har sett tidligere er trolig ikke skrevet på den måten, så elevene klarer ikke å se på dette "beviset" som et bevis. Denne tolkningen synes jeg bekreftes når Arne i veksling 704 sier at "med en gang det står *jeg har målt størrelsen*, så blir jeg litt sånn i tvil". Med en gang elevene ser formuleringen i teksten gjør de seg opp en mening om dette er et bevis eller ikke, og hvis språket er uformelt blir elevene skeptiske til om det kan være et bevis. Arne sier også senere i intervjuet at når han tenker på et bevis, så tenker han at det skal inneholde "masse sånn tekst og formler og opplegg" (veksling 744). Elvene sier også at de likte språket i vektorbeviset i trekantoppgaven best fordi det var best "matematisk språk" (Arne, veksling 790), men at bevis 7 og 10 hadde best "humant språk" (Arne, veksling 790). Når elevene sier humant språk tolker jeg det som at det er både formelt nok og matematisk nok til at beviset ser pent ut, men at det samtidig er forståelig.

5.1.1.4 Bevis bruker aksepterte resultater

Den fjerde kategorien i den første gruppa omhandler at et bevis skal bruke resultater som er vist på et tidligere tidspunkt, og at en ikke kan stole på bevis som bruker resultater en ikke er kjent med. Arne sier følgende i forbindelse med prat om hva et bevis egentlig er.

> 382. A: Man bruker jo andre ting som er bevist tidligere for å bevise nye bevis sikkert. Man bruker jo ting man vet fra før for å finne ut nye ting. Men jeg tror vi mangler å vite det vi må vite før det her [viser til firkantarket] for å kunne komme fram til noe.

Dette utsagnet tolker jeg dit at elevene mener at en må bruke aksepterte resultater i bevis. Senere, i forbindelse med bevis 1 i trekantoppgaven, sies det at en ikke kan stole på et resultat om en ikke kjenner til det eller ikke har sett et bevis for det. Arne føler ikke det er nok at det bare står at "det finnes et teorem som sier at" i beviset når han ikke kjenner til akkurat dette teoremets gyldighet.

5.1.1.5 Gyldig hvis aksiomer og regler følges

Denne kategorien har også sitt opphav i diskusjonen rundt hva et bevis er, og omhandler det at beviset er gyldig om det ikke gjøres ukorrekte matematiske steg i beviset.

> 487. A: Alt det du bruker er slike ting som stemmer. Og du gjør ikke noe som er galt... Og du må bare passe på at du ikke gjør noe som ikke går an. Bare gjøre ekte ting, skulle jeg til å si. Å gjøre om uttrykkene på lik måte, og på rett måte ...

Jeg tolker dette som at elevene tenker at bevis kun må bruke regler og framgangsmåter som er gyldige for at beviset skal være gyldig. De sier derimot ingenting om hva eller hvem som bestemmer hva en gyldig regel eller framgangsmåte er. Et utsagn av Arne på slutten av intervjuet forsterker troen min på at elevene ikke vet hva eller hvem som avgjør om et bevis er gyldig.

> 794. A: Et bevis er jo enten gyldig eller ugyldig? Det er ikke noe skjønn på sånt?

Jeg tolker dette som at elevene enten ikke vet hva som avgjør gyldigheten til bevis eller at de tenker at så lenge de matematiske reglene følges, vil et bevis bestandig være gyldig.

5.1.1.6 Bevis skal gjelde generelt

I forbindelse med vektorbeviset kommenterer Bjørn at det er bra at det ikke brukes et konkret punkt som C, men at det skrives på en generell form. Hvis det hadde vært et bevis der alle de fire punktene A, O, B og C hadde hatt spesifikke koordinater ville de ikke akseptert det som et generelt bevis. Siden punktet C har fått koordinatene (x, y) der $x^2 + y^2 = 1$ og 1 er radius i sirkelen vil beviset gjelde generelt. Etterpå nevner Bjørn at hvis en skal bevise noe for et oddetall, så kan en ikke bruke ett oddetall, men en må bruke det generelle oddetallet $2n - 1$. Dette tolker jeg som at elevene er klar over at hvis en bruker konkrete eksempler i bevis, så vil ikke beviset nødvendigvis være gyldig.

5.1.1.7 Gode bevis er lette å forstå

Denne kategorien har to koder i gruppe 1: Gode bevis antar ikke ting, og gode bevis er enkle og forklarende. Den første koden kommer fra prat om kontrapositive bevis. Gruppa sier at de ikke synes kontrapositive bevis forklarer de hva som egentlig skjer. Alt kommer i feil rekkefølge, og det er vanskelig å koble det som er i beviset med den påstanden som skal vises. Dette tolker jeg som at et kontrapositivt bevis ikke er et godt bevis i denne gruppas øyne, og dermed at et godt bevis ikke skal være et bevis som antar noe.

Den andre koden om at bevis er enkle og forklarende kommer fra den følgende vekslingen. Her prates det om bevis 7 i trekantoppgaven.

687. C: Jeg synes nesten denne var bedre enn den forrige
688. B: Det var nesten lettere å forstå den her.
689. Ø: Ok... Hvorfor er det lettere å skjønne denne?
690. B: Den andre var det så mange tall på, og så mye hit og dit, og ditten og datten, og hiten og diten. Den her forklarer mer med ord da.
691. Ø: Så du synes dette beviset forklarer bedre?
692. B: Ja, jeg skjønte det før du forklarte det, mens det gjorde jeg ikke på det forrige.

Jeg tolker det elevene sier som at bevis 7 er et godt bevis fordi det på en enkel måte forklarer hva som skjer underveis, og fordi det er lett å forstå hva alt som inngår i beviset er. De sammenligner bevis 7 med bevis 6, og i bevis 6 inngår det flere matematiske objekter en R1-elev ikke nødvendigvis har et utviklet forhold til; for eksempel sirkelligningen og skalarprodukt mellom vektorer.

5.1.2 Argumentasjon

De følgende analyseavsnittene omhandler hvilke kategorier fra begrepsbildet en finner igjen i argumentasjonen til elevene i firkantoppgaven.

Elevene i denne gruppa prøver å bruke gyldige bevismetoder i alle de fire første firkantoppgavene; kvadrat, rektangel, rombe og parallellogram. I forbindelse med kvadratoppgaven ser de først på om de klarer å vise at den indre firkanten er et kvadrat ved å se på hjørnetrekantene i $\square ABCD$, men de finner ikke noe de kan bruke i beviset. Arne sier det følgende.

30. B: Nei, likebeint mente jeg ja.
31. A: De er rettvinklet også... Og disse er jo like [trekantene i hjørnene av $\square ABCD$]
32. B: Ja, den er rettvinklet og også likebeint [$\triangle BEF$] hvis du ser på den sånn..
33. A: Skal vi bruke det til noe da?
34. B: Nei, men kanskje det er noe som betyr noe, og som vi kan bruke hvis vi vil vise det da?

Dette utdraget fra intervjuet tolker jeg som at de ser etter egenskaper eller resultater som er kjent for dem, og som er bevist før, og som de kan bygge visere på i utformingen av et bevis. Videre velger de å måle sidelengdene og vinkelmålene på figuren for å slå fast at det er et kvadrat inni kvadratet på oppgavearket. Deretter bruker de at alle kvadrater er formlike for å argumentere for at det vil stemme i alle kvadrater.

73. A: Ja, du får et kvadrat inni, og det blir jo... Forholdet mellom den store og den store på den andre (det tenkte kvadratet), og forholdet mellom det lille og det lille kvadratet inni blir jo like stort. Altså forholdet mellom det store og det lille kvadratet på begge to (i begge tilfellene).

Denne gruppas argumentasjon inneholder altså argumentasjon som er direkte bevis. Men det de sier er likevel ikke gyldige direkte bevis fordi argumentasjonen ikke er gyldig gjennom hele implikasjonskjeden. Før de brukte at alle kvadrater er formlike målte de på figuren for å verifisere at det var et kvadrat inni kvadratet, noe de selv har med som en ugyldig bevismetode i begrepsbildet.

På vilkårlig firkant-oppgaven brukte elevene ren empiri for å slå fast at det blir et parallellogram inni alle firkanter. Her tegnet de fire forskjellige firkanter og så at det stemte for alle dem. Dette sa de at de stolte på, men at det trolig ikke ville overbevist en lærer eller en sensor på eksamen. Jeg tolker dette som at de dermed er klare over at det ikke er en gyldig bevismetode, noe som også kommer fram i begrepsbildet. De sier også at de gjorde det fordi de ikke hadde noen andre framgangsmåter å ty til. Denne kategorien er dermed både ikke synlig og synlig i ulike deler av argumentasjonen siden gruppa bruker måling og empiri samtidig som de sier at det de har gjort ikke kan regnes som gyldige bevis.

Kategorien "bevis skal ha en formell form " er ikke synlig i argumentasjonen til elevene. I forbindelse med prat om parallellogram i par blir følgende sagt.

291. B: Hvis du ser for deg at du trekker de ut da [viser på figuren at $\overline{BC}$ flyttes vekk fra $\overline{AD}$], så ser du at den [parallellogrammet inni] blir med liksom.
292. A: Men vi må slutte å se for oss. Vi skal liksom snakke sånn om geometriske steder-snakk.
293. B: Men hvis du tenker [bruker hendene for å illustrere hva som skjer hvis parallellogrammets vinkel BAD blir spissere]...

296. C: Men det må uansett følge etter [viser med hendene at firkanten inni følger etter hvis vinkelene i parallellogrammet endres]... Vinklene vil bare bli annerledes, og den der blir jo bare mer på skrå [den indre firkanten]
297. A: Hvis den der [$\overline{BC}$] kommer lengre hit [vekk fra $\overline{AD}$], så blir jo den [$\angle EFG$] spissere
298. B: Alt går jo med
299. A: Ja, jeg skjønner jo det. Og da blir jo den vinkelen spissere, og den [$\angle FGH$] stumpere.
300. B: Ja, og hvis du drar det ut den veien [$\overline{CD}$ bort fra $\overline{AB}$], så skjer jo det samme. Da følger jo alt med.
301. A: Ja.

Jeg tolker dette som en uformell argumentasjon der en kun ser for seg hva som vil skje med den indre firkanten hvis en endrer på figuren. Kategorien med formelt språk i bevis er derfor ikke synlig i argumentasjonen til gruppa.

Den neste kategorien i begrepsbildet er ”bevis bruker aksepterte resultater”. Dette prøver elevene å gjøre i de direkte bevisene sine, blant annet ved å bruke formlikhet, Pytagoras teorem, og at de siste sidene i to trekanter med to par like sider og kongruente vinkler mellom må være like. Den sistnevnte var de imidlertid usikker på om stemte, og de valgte derfor å ikke bruke dette i argumentasjonen. Dette samsvarer med begrepsbildet i og med at de mener at det i et bevis ikke skal brukes noe en er usikker på.

Kategorien ”gyldig hvis aksiomer og regler følges” kommer ikke til syne i denne gruppa. I argumentasjonen dukker det opp noen regelbrudd. Gruppa prøver seg på noen direkte bevis i tillegg til måling og empiri, men grunnen til at denne gruppa ikke presenterer et gyldig bevis er at argumentasjonen enten er for usammenhengende eller fordi de direkte bevisene de prøver seg på baserer seg på målinger gjort på en figur. Regelbruddene er dermed at argumentasjonsformen ikke er gyldig.

Generaliteten til argumentasjonen i gruppa er til stede. Dette er noe gruppa mener er en viktig del av et bevis ifølge kategorien som omhandler generalitet i begrepsbildet. I argumentasjonen prøver de som regel å bruke generelle egenskaper ved firkanten de ser på, blant annet i forbindelse med rektangel i rombe der de bruker at trekantene i hjørnene er likebeinte og i forbindelse med kvadrat i kvadrat der de bruker at alle kvadrater er formlike. Likevel bruker de et eksempel i starten på argumentasjonskjeden både i rombe- og kvadratoppgaven fordi de baserer seg på måling på figurene. Dette er en kategori som kommer til syne i noen deler av argumentasjonen i firkantoppgaven, men som i andre deler ikke er synlig.

Den siste kategorien om at ”gode bevis er lette å forstå” er oppfylt. Elevene bruker ingen indirekte bevis, og de bruker enkle regler i argumentasjonen.

5.1.3 Oppsummering

Denne gruppa har et begrepsbilde som inneholder de følgende sju kategoriene: Gyldige bevis, ugyldige bevis, bevis skal ha en formell form, bevis bruker aksepterte resultater, gyldig hvis aksiomer og regler følges, bevis skal gjelde generelt, og gode bevis er lette å forstå. Tre av kategoriene kommer til uttrykk i argumentasjonen: Gyldige bevis, bevis bruker aksepterte resultater, og gode bevis er lette å forstå. To kategorier kommer ikke til uttrykk i argumentasjonen: Bevis skal ha en formell form, og gyldig hvis aksiomer og regler følges. De siste to kategoriene er både synlige og ikke synlige i ulike deler av argumentasjonen. De er ugyldige bevismetoder og bevis skal gjelde generelt.

Gruppa har innslag av gyldige bevis i argumentasjonen sin, men det følgende gjør at bevisene likevel ikke kan regnes som gyldige: Mangel på sammenheng i argumentasjonen og/eller det at de tar utgangspunkt i måling på figurer i forkant av de gyldige bevisene.

5.2 Gruppe 2

5.2.1 Begrepsbilde

Denne gruppas begrepsbilde av bevis beskrives av kategoriene og kodene i tabell 5.2.

Kategorier	**Koder**
Gyldige bevismetoder	Ingen moteksempler Direkte bevis Empiri i GeoGebra
Ugyldige bevismetoder	Empiri Måling på tegnede eller konstruerte figurer
Bevis skal ha en formell form	Bevis må ha et ordentlig og formelt språk
Bevis bruker aksepterte resultater	Bevis bygger på resultater som er bevist
Gyldig hvis aksiomer og regler følges	Om reglene følges vil et bevis være gyldig
Gode bevis er lette å forstå	Bevisene antar ikke ting Bevisene er enkle og forklarende

Tabell 5.2: Kategorier og koder fra den tematiske kodingen for gruppe 2.

En forklaring på hvorfor disse kategoriene og kodene beskriver begrepsbildet av bevis for denne gruppa er presentert i de følgende avsnittene.

5.2.1.1 Gyldige bevismetoder

I forbindelse med diskusjon rundt bevis generelt ble det sagt følgende.

196. E: Hvis det var en firkant det ikke stemte for, så måtte vi kanskje ha tenkt annerledes. Men når vi får det på alle, så tenker vi kanskje ikke så mye på det da.
197. F: Jeg tenker at alle disse her, både kvadrat, rektangel og rombe, har jo regler for hvordan de skal se ut; hvordan sidene skal være i forhold til hverandre og hvordan vinklene er.
198. E: Og da blir man kanskje enda mer overbevist når det fungerer på alle dem, og når det i tillegg på en tilfeldig firkant også da. Når det ikke er en regel som sier noe om hvordan den ser ut.

199. F: Og i kvadratet, rektangelet og romben så er det jo sånn at hvis du endrer på ei side, så vil du automatisk også endre på resten av sidene.

Dette tolker jeg som at de mener at en påstand må være gyldig dersom en ikke finner eller blir presentert med et moteksempel for påstanden. Gruppa mener også at det å konstruere figurer i GeoGebra vil bevise en påstand dersom alle de konstruerte figurene stemmer med påstanden, noe som kommer fram i den følgende ordvekslinga som omhandler bevis 4 i trekantoppgaven.

254. E: Men tjue, det er fortsatt ganske få da... Så jeg tenker...
255. F: Men det er jo konstruert i GeoGebra da!
256. E: Ja, og at man da liksom kan ha færre da?
259. F: Men jeg ville likevel sagt at det er gyldig.
260. D: Vi stoler på GeoGebra.
261. E: Men vi tror ikke på papir.

Eline synes det er litt lite å bare sjekke tjue trekanter her, men så blir det sagt at det er er i GeoGebra, noe som fører til at elevene i gruppa blir enige om at det er nok å kontrollere påstanden for tjue tilfeller. Jeg tolker dette som at elevene mener empiri i GeoGebra er en gyldig bevismåte.

Den siste koden i denne kategorien er at direkte bevis er gyldige bevis. Dette kommer fra gruppas godkjenning av bevis 1, 6, 7 og 10 i trekantoppgaven. Alle disse er gyldige direkte bevis, og når elevene mener de er gyldige betyr det at de aksepterer bevis som kommer i dette formatet.

5.2.1.2 Ugyldige bevismetoder

Empiri utenfor GeoGebra havner i denne kategorien. Dette kommer av at elevene ikke godtar bevis 2 og 3 i trekantoppgaven fordi de tenker det ikke er presist nok. Likevel sier de at de føler seg overbevist om de ser at en påstand stemmer for mange tilfeller, men de understreker at det ikke ville overbevist en sensor på eksamen. De mener også at det ikke vil være bra nok å måle på figurer for å slå fast at en påstand er sann eller usann fordi tegninger og målinger ikke er nøyaktige nok for dette formålet. Denne koden kom i forbindelse med prat om bevis 2 og 3 i trekantoppgaven.

5.2.1.3 Bevis skal ha en formell form

Kategorien om formell form i bevis kommer også fram i forbindelse med snakk om bevis 2 og 3. Dina sier det følgende.

223. D: Dette er feil fordi det står ”jeg har” i beviset, og vi leser jo ikke i læreboka at ”jeg har”.

Jeg tolker dette som at gruppa mener at bevis 2 og 3 ikke virker som ordentlige bevis fordi de bruker et språk som elevene ikke forbinder med bevisføring. Bevis skal ifølge tolkningen av elevene inneholde et mer profesjonelt matematisk språk med formler og regler. Dette nevner de senere i intervjuet i forbindelse med vektorbeviset. Vektorbeviset er et bevis de sier ser profesjonelt ut, og som de dermed godtar som et bevis selv om det virker som de egentlig ikke helt skjønner sirkelligningen og valget av (x, y) som koordinatene til punktet C.

5.2.1.4 Bevis bruker aksepterte resultater og er gyldige hvis aksiomer og regler følges

Kategorien bevis bruker aksepterte resultater kommer fra prat om hva et bevis egentlig er. Hva skal en gjøre om en oppgave ber deg vise at noe stemmer er spørsmålet gruppa har fått i forkant av følgende utsagn.

> 374. E: Nei, jeg tenker vel at den vil at vi skal bruke regler og formler for å komme fram til det vi skal vise.

Jeg tolker dette som at Eline mener et bevis skal bruke regler og formler for å vise det som skal vises. De får videre spørsmål om det er en forskjell på det å vise at noe stemmer og det å bevise at noe stemmer.

> 392. F: Jeg tenker litt... Altså i stad så sa vi at vi nå bare brukte en regel... I starten av kapittelet så gjør vi alle utregninger og sånn, så jeg tenker at når det står ”vis at”, så kan du bare bruke den regelen. Men når det står ”bevis at” så må du kanskje også bevise regelen eller reglene du bruker.

Dette tolker jeg som at elevene møter de to ulike frasene ”vis at” og ”bevis at” i forskjellige situasjoner i undervisninga. ”Vis at” brukes stort sett i forbindelse med utregninger, mens når det står ”bevis at” må en bruke regler og formler en enten vet er sanne eller som en må bevise før en bruker dem. Dette utsagnet gir også kategorien gyldig hvis aksiomer og regler følges i og med at Frida sier at en må bevise reglene en bruker, eller eventuelt bruke regler som er kjent, i bevis.

5.2.1.5 Gode bevis er lette å forstå

Denne kategorien stammer fra gruppas prat rundt hva som var de beste bevisene i trekantoppgaven. På spørsmål om hvorfor de godtok og likte bevis 10 godt svarte Eline følgende.

> 357. E: Fordi det var lett å forstå alt.

Dette tolker jeg som at gruppa mener at i et godt bevis skal alt være forklart på en enkel måte slik at det blir lett å forstå det. I gruppas prat rundt det kontrapositive beviset i bevis 9 kommer det fram at de ikke synes dette er et godt bevis. Grunnen til det er at de ikke føler beviset henger sammen med påstanden og at det er forvirrende med bevis som snur rundt på implikasjonen og antar at noe ikke stemmer. Alt dette gjør at de ikke føler beviset er lett å forstå.

5.2.2 Argumentasjon

De følgende analyseavsnittene omhandler hvilke kategorier fra begrepsbildet en finner igjen i argumentasjonen til elevene i firkantoppgaven.

I gruppe 2 tar de utgangspunkt i egenskaper som alle kvadrater har i argumentasjonen på kvadratoppgaven; at sidelengdene er like og at vinklene er rette. Dette gjør de også for både rektangeloppgaven og parallellogramoppgaven. Videre bruker de Pytagoras' teorem for å slå fast at sidene er like lange, men sier ingenting om vinklene i $\square EFGH$ i kvadratoppgaven. Vinkelmålene i den tegnede firkanten i kvadratet finner de ved å måle med gradskive, og argumenterer videre for at det vil bli et kvadrat inni alle kvadrater fordi alle kvadrater er formlike. Argumentasjonen i kvadratoppgaven gir synlighet av kategoriene gyldige bevismetoder i form av direkte bevis, bevis bruker aksepterte resultater i form av at kvadrater er formlike og Pytagoras' teorem, og gode bevis er lette å forstå i form av at det brukes enkle resultater og at det ikke antas noe i argumentasjonen. Kategorien ugyldige bevismetoder, i form av måling på figur, er ikke synlig i argumentasjonen fordi elevene bruker noe de definerer som en ugyldig bevismetode.

Ugyldige bevismetoder i form av empiri er heller ikke synlig i oppgaven med vilkårlig firkant. Der sier elevene at det må bli et parallellogram inni alle firkanter fordi de har sett at det ble parallellogram inni mange forskjellige typer firkanter i kvadrat-, rektangel-, rombe-, parallellogram- og vilkårlig firkant-oppgaven.

180. E: Det har jo stemt for utrolig mange firkanter til nå da.
181. F: Men det er jo ikke et bra argument for det da...
182. E: Nei, men har du noe bedre?
183. F: Nei, jeg har ikke det da.

Det de sier her tolker jeg som at de egentlig vet at empirien ikke er et gyldig bevis, men at de føler de ikke har noen annen argumentasjon å bruke. Dermed viser de et tegn på at empirikoden er synlig i argumentasjonen, og dermed blir denne kategorien både ikke synlig og synlig.

I forbindelse med rektangeloppgaven, rombeoppgaven og parallellogramoppgaven ser gruppa for seg hvordan den indre figuren endres hvis en endrer sidelengder og/eller vinkelmålene på vinklene på den ytre firkanten. Det følgende ble sagt da elevene diskuterte rombeoppgaven.

124. E: Hvis vi tar de der ut [illustrerer at en "drar ut" A og C med hendene], blir ikke de der kortere da [FG og AH]?
125. F: Men da blir ikke alle sidene like lange...
126. E: To og to kommer fortsatt til å være like lange da.
127. D: Men i en rombe er jo alle like lange.
128. E: Åja, sånn ja... At rombesidene må være like lange ja...
129. F: Men hvis man... Nei, da blir det jo et kvadrat. Da blir det feil. Vent da... Hvis man bikker den enda lengre ned
130. D: Vil ikke bare rektangelet dette etter da?

131. F: Jo, det tenker egentlig jeg også... For når den sida [$\overline{AD}$] legges ned slik [vinkelmålet i $\angle BAD$ blir mindre], så vil jo den også følge etter [$\overline{BC}$].

Dette tolker jeg som en uformell form for argumentasjon fordi gruppa kun ser for seg hvordan noe endres uten å verken konkret kontrollere at det stemmer eller å vise det med en gyldig bevisform i etterkant av argumentasjonen. Det skal sies at dette kan være et viktig visualiseringssteg for denne gruppa i prosessen med utforskingen av påstanden som skal vises. Likevel er det ikke et gyldig bevis, og heller ikke en veldig formell argumentasjon, og kategorien med at et bevis skal være på formell form er dermed ikke synlig i elevenes argumentasjon.

Kategorien gyldig hvis aksiomer og regler følges er ikke synlig i argumentasjonen. Elevene bruker regler, som for eksempel Pytagoras' teorem, på en korrekt måte. Likevel blir ikke beviset gyldig fordi beviset ikke fullføres. Siden ingen av bevisene er gyldige i firkantoppgaven vil denne kategorien heller ikke kunne være synlig.

5.2.3 Oppsummering

Gruppe 2 har et begrepsbilde som inneholder de følgende seks kategoriene: Gyldige bevismetoder, ugyldige bevismetoder, bevis skal ha en formell form, bevis bruker aksepterte resultater, gyldig hvis aksiomer og regler følges, og gode bevis er lette å forstå. Av disse kommer tre til syne i argumentasjonen i firkantoppgaven: Gyldige bevismetoder, bevis bruker aksepterte resultater, og gode bevis er lette å forstå. To av kategoriene er ikke synlige i argumentasjonen: Bevis skal ha en formell form og gyldig hvis aksiomer og regler følges. En kategori er både ikke synlig og synlig i ulike deler av argumentasjonen: Ugyldige bevismetoder.

Denne gruppa har, i likhet med den første gruppa, innslag av gyldige, direkte bevis i argumentasjonen. Likevel har de ingen gyldige bevis. Mye av argumentasjonen stopper opp der elevene møter en hindring, eller er basert på måling av en konkret figur. I forbindelse med vilkårlig firkant-oppgaven brukes det ren empiri.

5.3 Gruppe 3

5.3.1 Begrepsbilde

Denne gruppas begrepsbilde beskrives av kategoriene og kodene i den følgende tabellen.

Kategorier	**Koder**
Gyldige bevismetoder	Sjekke at alle tilfeller passer med påstanden Direkte bevis Indirekte bevis
Ugyldige bevismetoder	Empiri generelt Måling på tegnede eller konstruerte figurer
Bevis bruker aksepterte resultater	Bevis bygger på resultater som er bevist Må være sikker på at resultater som brukes er korrekte
Gyldig hvis aksiomer og regler følges	Om reglene følges vil et bevis være gyldig
Bevis skal gjelde generelt	Bevis skal bruke generelle egenskaper ved objekter Bevis skal ikke bruke eksempler
Gode bevis er lette å forstå	Bevisene antar ikke ting Bevisene er enkle og forklarende Hvor bra beviset er avhenger av øyet som ser

Tabell 5.3: Kategorier og koder fra den tematiske kodingen for gruppe 3.

I de følgende avsnittene er det beskrevet hvorfor kategoriene og kodene i tabell 5.3 er som de er for denne gruppa.

5.3.1.1 Gyldige bevismetoder

Denne kategorien består av tre koder. Den første koden er at det er gyldig å sjekke at alle tilfeller passer med påstanden som skal vises. Koden kommer fra gruppas diskusjon rundt bevis 8 i trekantoppgaven. De sier først at akkurat det beviset er umulig å gjennomføre fordi det er uendelig antall tilfeller. Deretter sier de at hvis det var en påstand med et tellbart antall tilfeller, og en kontrollerer at alle disse passer med påstanden, så vil påstanden være sann.

Andre kode er direkte bevis og kommer fra gruppas diskusjon rundt de direkte bevisene 1, 6, 7 og 10 i trekantoppgaven. De godkjente alle disse som gyldige bevis, noe jeg tolker som at de mener direkte bevis er en gyldig bevismetode.

Tredje kode er indirekte bevis. Dette ble diskutert i forbindelse med bevis 9 i trekantoppgaven. Gruppa brukte lang tid på å gjenkjenne at dette er et kontrapositivt bevis, men fant ut at det er det etter hvert. De sa deretter det følgende.

223. H: Men det er vanskelig å se for seg da. Hvis du ikke skriver det opp på den måten vi gjorde her [$\triangle ABC \implies 90°$ og $\overline{90°} \implies \overline{\triangle ABC}$]. Det er på en måte litt vanskelig å se at det at du beviser den nederste også betyr at den øverste er grei.
224. G: Ikke sett den her i en lærebok.
225. I: Nei.

226. G: Vær så snill!
227. I: Det her er ikke et eksempel på god bevisføring. Det er et sånt ekstremt... Bare sånn... [rister på hodet]
228. G: Det her kan være et eksempel på et sånt tricky bevis.
229. I: Ja, men det er jo et gyldig kontrapositivt bevis. Men jeg så ikke at det var flippa om her.

Jeg tolker dette som at de vet at det er en gyldig bevismåte, men at de egentlig ikke vet helt hvorfor det er det. I tillegg sier de at det er vanskelig å se for seg hvordan beviset fungerer og at det ikke er en god måte å bevise på. Koden er plassert under gyldige bevismåter fordi gruppa sier de vet det er en gyldig bevisform. Samtalen kom også inn på ad absurdum-bevis og induksjonsbevis, noe elevene også visste var gyldige bevismetoder som antar noe. Ifølge gruppa er indirekte bevis altså gyldige, men vanskelige og lite forklarende.

5.3.1.2 Ugyldige bevismetoder

Denne kategorien inneholder to koder: Empiri både med og uten digitale verktøy og måling på figurer. Disse kodene kommer fra prat rundt bevis 2, 3, 4 og 5 i trekantoppgaven og prat om hva et bevis er. Elevene sa følgende om GeoGebra.

393. I: Ja, det er jo ikke noe bevis å stå og riste på et punkt på GeoGebra da.
394. Ø: Hehe, ja... Men hvorfor er ikke det et ordentlig bevis da?
395. I: Du får jo ikke testet alle muligheter da.
396. G: Du får bare testet noen få.
397. I: Du får umulig testet alle muligheter, så derfor så funker det på en måte ikke da. Det er mye bedre å ha det matematisk rigid...

Selv ikke med nøyaktige GeoGebra-konstruksjoner i forbindelse med påstander får en kontrollert alle tilfeller, og det er ifølge elevene derfor ikke et bevis. I prat om bevis 2 til 5 sa elevene det følgende.

425. G: Det er ikke nok. Det er ikke uendelig.
426. H: Ja, hva med den 500 000 001-te gangen da. Hva hvis den er forskjellig?
427. G: Ja. Du vet aldri.

Dette tolker jeg som at elevene er klar over at en påstand kan stemme for veldig mange tilfeller uten at det betyr at påstanden er korrekt for alle tilfeller. Empiri er dermed en ugyldig bevismetode uansett om det gjøres på ei datamaskin eller på en annen måte. Elevene sier også at en ikke kan stole på måling på figurer fordi både tegninger og konstruksjoner alltid har en unøyaktighet.

5.3.1.3 Bevis bruker aksepterte resultater

Gruppas diskusjon rundt bevis 1 i trekantoppgaven gir opphav til den andre koden i denne kategorien.

410. Ø: Hadde dere stolt på beviset om dere ikke kjente til teoremet da?
411. I: Tja... Jeg har prøvd meg på Abel(-konkurransen) før med: Det finnes et teorem. Men det funka ikke.
412. H: Nei, jeg ville kanskje... Hmm... Når jeg vet at det er en greie skulle jeg til å si, så hadde det kanskje vært litt mer... Jeg hadde kanskje vært litt mer skeptisk til det, og hadde sjekka det litt selv før jeg stolte på det, for å si det sånn da.

Dette tolker jeg som at elevene ikke stoler fullt og helt på at et resultat er sant før de har "sjekka det litt", og at de har opplevd at matematikkeksperter i form av dommere i Abel-konkurransen heller ikke stoler på et bevis hvis det bare står at "det finnes et teorem eller resultat" som sier noe. En skal være sikker på at resultater som brukes i bevis er korrekte.

Praten rundt hvilket bevis elevene likte best i trekantoppgaven ga opphav til den første koden. Håkon sa at "det er jo umulig å bevise noe uten å bruke teoremer av noe slag" (veksling 600). Dette tolker jeg som at elevene tenker at et bevis må bygge på resultater som tidligere er bevist.

5.3.1.4 Gyldig hvis aksiomer og regler følges

I forbindelse med elevenes prat om hva et bevis er ble de spurt hva som skal til for at et bevis er gyldig. De sa det følgende.

611. I: Du må jo bare følge de aksiomene som en eller annen har skrevet ned da. Og så går det jo greit.
612. G: Ja. Følge reglene.
613. I: Dette er jo aksiomatisert geometri. Du har liksom disse... Du har regler for hvilke egenskaper parallelle linjer og sirkler har og sånn, og så kommer alt ut i fra det. Jeg har jo ikke bevis for at en likebeint trekant har to vinkler som er like store, men det er et teorem som er bevist, så da er det jo en ting en bare lærer og aksepterer fordi det tydeligvis stemmer. Så lenge alt virker sånn da-a for hvert steg, så er det et godt bevis for meg.

Dette tolker jeg som at elevene er klar over at geometri er aksiomatisert, og at hvis en følger aksiomene og matematiske regler vil et bevis være gyldig. Regler i dette tilfellet er både regler for egenskaper til objekter, som Inge snakker om i veksling 613, og regler for hvordan en gjennomfører matematisk korrekte bevis og/eller manipulasjoner av matematiske objekter.

5.3.1.5 Bevis skal gjelde generelt

I forbindelse med bevis 5 i trekantoppgaven blir det følgende sagt. Elevene har snakket om at GeoGebra-empiri ikke er gyldige bevis, men at det kan være kjekt å se på flere enn ett tilfelle som et steg på veien mot å bli overbevist, noe de gjorde i firkantoppgaven med en vilkårlig firkant.

441. H: Så vi trengte på en måte noen flere holdepunkter før vi følte at vi kunne si det med sikkerhet. Så vi må på en måte ha et bevis som ikke går ut fra et eksempel, men bare der ingen sider er gitt, men alt på en måte bare er generelt da...

Jeg tolker det Håkon sier som at det er greit å bruke eksempler som et utforskende trinn i bevisprosessen, men at det ikke er et gyldig bevis før en har argumentert på en generell måte uten å bruke egenskaper som kun en eller noen få eksempler har.

5.3.1.6 Gode bevis er lette å forstå

Denne kategorien har tre koder. Den første koden stammer fra diskusjonen rundt det kontrapositive beviset i trekantoppgaven (bevis 9). Elevene sa at de ikke liker bevis som antar ting, blant annet fordi det i kontrapositive bevis er vanskelig å se for seg hvordan beviset egentlig fungerer og beviser den påstanden det skal vise. Denne gruppa mener også at kontrapositive bevis heller ikke gir en utvidet forståelse for påstanden som skal vises, noe som de mener er et av poengene med å bevise påstander. I tillegg til det som allerede er skrevet ga elevene uttrykk for at de mente bevis 9 var et ad absurdum-bevis før de kom fram til at det var et kontrapositivt. Dette gir grunn til å tro at gruppa også mener at ad absurdum-bevis er er mindre god bevismetode, og dermed at bevis som antar noe generelt ikke er den bevisformen som er best.

Den andre koden koden omhandler at gode bevis er enkle og forklarende. Inge sa det følgende i samtale om bevis etter trekantoppgaven. Håkon sier også noe som støtter opp under den første koden.

613. I: Dette er jo aksiomatisert geometri. Du har liksom disse... Du har regler for hvilke egenskaper parallelle linjer og sirkler har og sånn, og så kommer alt ut i fra det. Jeg har jo ikke bevis for at en likebeint trekant har to vinkler som er like store, men det er et teorem som er bevist, så da er det jo en ting en bare lærer og aksepterer fordi det tydeligvis stemmer. Så lenge alt virker sånn da-a for hvert steg, så er det et godt bevis for meg.
614. Ø: Okei... Så du vil på en måte at det skal være selvsagt eller forklarende for at det skal være et gyldig bevis.
615. I: Ja!... Og jeg vil at du på en måte ikke skal ta noen ikke-trivielle hopp. Jeg vil at det skal gå steg-steg-steg med implikasjoner hele veien, og så funker det. Det er deilig. Eller du kan jo ha sånne kontrapositive også egentlig bare med implikasjoner hele veien også, men de er likevel ikke like trivielle.

616. H: Ja. Så lenge du ikke trenger å anta noe underveis, men at du kan vise alt hele veien...

Det at Inge sier at det skal virke ”da-a” hele veien i et bevis tolker jeg som at elevene mener et bevis skal være forklart godt og bruke enkle resultater. Det skal forklares slik at leseren av beviset ikke faller av i hopp i argumentasjonen, og på en form der det brukes implikasjoner hele veien. Kontrapositive bevis faller ikke innenfor implikasjonsgruppa til Inge fordi det som skjer ellers i beviset ikke er spesielt trivielt.

Den siste koden om at hva som er et godt bevis avhenger av hvem som ser på det kommer fra diskusjon rundt hva som er det beste beviset i trekantoppgaven. Håkon sier det følgende.

600. H: Men det er jo umulig å bevise uten å bruke teoremer av noe slag, så det handler jo mest om å si hvilke teoremer vi liker best, og som er mest anvendbare...

Dette tolker jeg som at elevene er klare over at det kan være forskjell på hvilke bevis som regnes som gode om en spør forskjellige personer. Hvilke teoremer eller resultater som brukes som utgangspunkt for beviset kan påvirke om en person synes det er et godt bevis eller ikke, og dette henger da sammen med hvilke teoremer eller resultater personen liker. Dette kommer også til uttrykk gjennom at Gustav synes bevis 1 ”er mest elegant” (veksling 606), mens Håkon og Inge likte bevis 10 best fordi det brukte de enkleste resultatene.

5.3.2 Argumentasjon

Avsnittene som følger inneholder en beskrivelse av hvilke kategorier i begrepsbildet av bevis en finner igjen i argumentasjonen i firkantoppgaven.

Kategorien gyldige bevis er synlig i argumentasjonen fordi gruppa bruker direkte bevis på alle firkantoppgavene. De tar bestandig utgangspunkt i egenskaper ved de matematiske objektene kvadrat, rektangel, rombe, parallellogram og firkant heller enn egenskaper ved de konkrete figurene. Dette er hvordan de argumenterte for at det må være et kvadrat inni kvadratet.

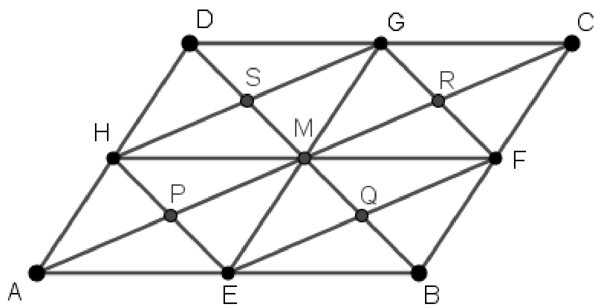
44. I: Vi har fått et kvadrat.
45. Ø: Og hvordan vet dere at det er et kvadrat?
46. I: Den siden der er like lang som den siden der, som er like lang som den siden der, som er like lang som den siden der [$\overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}$ og $\overline{EH}$]. Og det vet vi fordi... Det er på en måte at... Jo, den der er 90 grader, og det er den der og den der og den der også [vinklene i $\square ABCD$], og den er like den og den og den og den og den... [$AE = EB = BF = FC = CG = GD = DH = HA$] Så da blir alle hypotenusene like lange... Men du kan selvfølgelig ha en rombe da... Men du vet at siden alle disse sidene er like lange, så må den [$\angle FGH$] være 90 fordi den [$\angle CGF$] er 45 og den [$\angle DGH$] er 45 fordi de er viklene i likebeinte rettvinklede trekanter.

53. Ø: Men du snakket om at du har to sider som er like lange med en 90-grader imellom her. Hvorfor gjør det at hypotenusene er like lange i alle de trekantene?
54. H: Ja, du får jo kongruente trekanter her og her og her og her... Og da vet du at sidene bli like lange fordi du har katet i annen pluss katet i annen er lik hypotenus i annen, og siden du har de samme katetene her også, så blir jo hypotenusen den samme. Og det samme her og her også.
58. H: Jeg brukte kanskje Pytagoras...
59. I: Og cosinussetningen med 90 grader blir jo det samme som Pytagoras, ja...
76. I: Vi har ikke fått liksom at siden der er sju og siden der er sju. Vi har jo bare fått et kvadrat, så dette vil jo funke i alle kvadrater.
77. H: Ja, så det er jo bare å sette den til x, og så er det jo ganske trivielt. Hehe...
78. Ø: Ja, så dere mener at når dere har gjort det for denne, så vil det gjelde generelt da?
79. I: Ja, siden vi ikke brukte sidelengdene til noe... Vi bare brukte ting som gjelder for alle kvadrater, og da vil det funke for alle kvadrater.

De bruker Pytagoras' teorem eller cosinussetningen på hjørnetrekantene for å slå fast at sidene i den indre firkanten er like lange. Deretter bruker de at de samme trekantene er likebeinte og rettvinkla, og dermed at grunnvinklene må være like og med vinkelmål $45°$ for å slå fast at den indre firkanten har utelukkende rette vinkler. I denne argumentasjonen brukes også lineært par-teoremet som sier at summen vinkelmålet til vinkler som spenner over ei rett linje i er $180°$. Til slutt sier de at dette vil gjelde for alle kvadrat fordi de kun har brukt egenskaper som gjelder for alle kvadrater. Dette mener jeg er et gyldig, direkte bevis fordi det er en sekvens av implikasjoner som oppfyller Stylianides (2007) krav til gyldige bevis.

Her finner en ikke bare kategorien gyldige bevis, men også kategoriene bevis bruker aksepterte resultater, gyldig hvis aksiomer og regler følges, bevis skal gjelde generelt og gode bevis er lette å forstå. Kategorien bevis bruker aksepterte resultater er synlig fordi elevene bruker teoremer og resultater i argumentasjonen; blant annet Pytagoras' teorem og cosinussetningen. Den neste kategorien om at bevis er gyldige hvis aksiomer og regler følges er synlig fordi elevene ikke bryter noen matematiske regler i argumentasjonen. De klarer å fullføre implikasjonskjeden, og får dermed et gyldig bevis. Kategorien med at bevis skal gjelde generelt er synlig fordi elevene bruker de generelle egenskapene ved firkantene de ser på, og ikke for eksempel sidelengdene eller vinkelmålene i parallellogrammet når de argumenterer. Kategorien gode bevis er lette å forstå er synlig fordi elevene forklarer hvorfor det de gjør er mulig, og de tegner figurer med markeringer for å hjelpe til i argumentasjonen. Elevenes argumentasjon består dessuten ikke av antagelser, og de er noen ganger også uenige om hva som er den beste måten å bevise påstanden på. Inge mener det vil være best å bruke at "midtstrekene" i firkanten $\square ABCD$, det vil si $\overline{EG}$ og $\overline{FH}$, skjærer hverandre på midten, og at det gir at $\square EFGH$ er et parallellogram. Håkon mener derimot at det er bedre å se på parallellitet mellom $\overline{EH}$, $\overline{BD}$ og $\overline{FG}$. Se figur 5.1

for en oversikt over hvor de omtalte punktene befinner seg. Denne diskusjonen elevene har gjør at koden om at hva som er et godt bevis avhenger av hvem som vurderer det også er synlig i argumentasjonen til elevene.



Figur 5.1: Figur av parallellogrammet $\square ABCD$ som viser punktene som omtales i forbindelse med parallellogramargumentasjon i gruppe 3.

Kategorien ugyldige bevis er også synlig i argumentasjonen. Elevene bruker aldri noen av de ugyldige bevismetodene som argumentasjon. De brukte riktignok både empiri og måling på figurer, men kun som utforsking av figurene i forkant av bevisene.

5.3.3 Oppsummering

Gruppe 3 har et begrepsbilde med følgende seks kategorier: Gyldige bevismetoder, ugyldige bevismetoder, bevis bruker aksepterte resultater, gyldig hvis aksiomer og regler følges, bevis skal gjelde generelt, og gode bevis er lette å forstå. Alle disse kategoriene er synlige i gruppas egen argumentasjon i firkantoppgaven.

Denne gruppa har gyldige, generelle, direkte bevis på alle firkantoppgavene bortsett fra på parallellogramoppgaven. Der ble det for mange opplysninger på en gang, og elevene rotet seg bort i all informasjonen, ifølge dem selv. I parallellogramoppgaven hadde de kommet fram til et bevis som jeg ville akseptert, men som elevene ikke aksepterte fordi de ikke kjente til følgende resultat: Alle firkanter der de to motstående sidene er like lange for begge parene av motstående sider er parallellogram. De kom også fram til et annet bevis jeg ville godkjent, men som de heller ikke aksepterte fordi de ikke kjente til følgende resultat. Om diagonalene i en firkant skjærer hverandre på midten er firkanten et parallellogram. Det endte med at elevene brukte beviset for vilkårlig firkant på parallellogramoppgaven i etterkant av vilkårlig firkant-oppgaven, som de beviste med formlikhet som i avsnitt 4.1.5.

5.4 Hva er felles i begrepsbildet og argumentasjonen?

Et begrepsbilde hos en R1-elev kan inneholde kategoriene i tabell 5.4, som er en tabell som viser alle kategoriene og kodene som kom fram i de tre gruppene i den tematiske kodingsprosessen.
Denne tabellen viser at det elevene forbinder med bevis i geometrisammenheng er disse kategoriene: Gyldige og ugyldige bevismetoder, at bevis skal ha en formell form, at bevis

Kategorier	Koder
Gyldige bevismetoder	Sjekke at alle tilfeller passer med påstanden Direkte bevis Antagelsesbevis Empiri i GeoGebra
Ugyldige bevismetoder	Empiri i GeoGebra Empiri generelt Måling på tegnede eller konstruerte figurer
Bevis skal ha en formell form	Bevis må ha et ordentlig og formelt språk
Bevis bruker aksepterte resultater	Bevis bygger på resultater som er bevist Må være sikker på at resultater som brukes er korrekte
Gyldig hvis aksiomer og regler følges	Om reglene følges vil et bevis være gyldig Bevis er enten gyldige eller ugyldige
Bevis skal gjelde generelt	Bevis skal bruke generelle egenskaper ved objekter Bevis skal ikke bruke eksempler
Gode bevis er lette å forstå	Bevisene antar ikke ting Bevisene er enkle og forklarende Hvor bra beviset er avhenger av øyet som ser

Tabell 5.4: Kategoriene og kodene fra alle gruppene.

skal bruke aksepterte resultater, at et bevis er gyldig dersom aksiomer og regler følges i prosessen, at bevis skal gjelde generelt, og at gode bevis er bevis som er lette å forstå. De nevnte kategoriene er altså svaret på første del av forskningsspørsmålet.

> Hvilke aspekter av R1-elevers begrepsbilde av bevis er observerbare i geometri, og hvordan kommer det til uttrykk i elevenes argumentasjon?

De tre gruppenes forhold mellom begrepsbilde av bevis og argumentasjon i firkantoppgaven er presentert i følgende tabell. I forbindelse med kategorien ugyldige bevismetoder i tabellen betyr ✗ at gruppa brukte ugyldige bevismetoder, altså at de brukte noe som begrepsbildet sa var ugyldig argumentasjon. ✓ betyr at de ikke brukte det begrepsbildet deres viste at var ugyldige bevismetoder.

	Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3
Gyldige bevismetoder	✓	✓	✓
Ugyldige bevismetoder	✓✗	✓✗	✓
Bevis skal ha en formell form	✗	✗	-
Bevis bruker aksepterte resultater	✓	✓	✓
Gyldig hvis aksiomer og regler følges	✗	✗	✓
Bevis skal gjelde generelt	✓✗	-	✓
Gode bevis er lette å forstå	✓	✓	✓

Tabell 5.5: Oversikt over sammenhengen mellom kategoriene i begrepsbildet og argumentasjonen gjort av gruppene. ✗ betyr at denne delen av gruppas begrepsbilde ikke er synlig i argumentasjonen, ✓ betyr at det er synlig, mens - betyr at gruppa ikke hadde denne kategorien i begrepsbildet.

Tabellen viser at tre kategorier fra begrepsbildet av bevis var synlige i argumentasjonen i firkantoppgaven for alle gruppene. Disse tre kategoriene er gyldige bevismetoder, bevis bruker aksepterte resultater, og gode bevis er lette å forstå. Dette er det som kommer til uttrykk i alle gruppenes argumentasjon, og er dermed svar på andre del av forskningsspørsmålet i studien:

> Hvilke aspekter av R1-elevers begrepsbilde av bevis er observerbare i geometri, og hvordan kommer det til uttrykk i elevenes argumentasjon?

Elevers begrepsbilde av bevis i geometri kommer altså til uttrykk i argumentasjonen gjennom deres syn på hva som er gyldige bevismetoder, at bevis skal bruke aksepterte resultater, og at gode bevis skal være lette å forstå.

6. Diskusjon

I diskusjonskapittelet blir resultatene fra analysen diskutert i lys av forskningsspørsmålet; Hvilke aspekter av R1-elevers begrepsbilde av bevis er observerbare i geometri, og hvordan kommer det til uttrykk i elevenes argumentasjon? I tillegg diskuteres underspørsmålet til forskningsspørsmålet: Om hvordan dette henger sammen med det å konstruere gyldige bevis. Funnene blir både satt i sammenheng med annen forskning på bevis i skolen, og også med matematisk og matematikkdidaktisk teori om bevis.

Til sist i kapittelet drøftes studiens kvalitet. I forbindelse med det blir de kvalitative ekvivalentene til validitet, reliabilitet og generaliserbarhet i studien diskutert.

6.1 Forskningsresultater

I forbindelse med elevenes oppfatning av bevis er funnene oppsummert i kategoriene i tabell 5.4. Hvilke av disse kategoriene som var synlige i argumentasjonen finnes i tabell 5.5. De følgende avsnittene omhandler kategoriene og argumentasjonen til elevene, og inneholder drøfting som kobler kategoriene og argumentasjonen opp mot teori og tidligere forskning. Det blir også diskutert hvilke implikasjoner sammenhengen mellom begrepsbildet av bevis og argumentasjonen har for undervisning i matematikk og for elevers konstruksjon av bevis.

6.1.1 Gyldige bevismetoder

Denne kategorien inneholder fire typer bevismetoder som elevene gjennom intervjuet ga uttrykk for at de mente var gyldige. Direkte bevis er en av dem. Gjennom trekantoppgaven sa alle gruppene at de stolte på alle de direkte bevisene, som var bevis 1, 6, 7 og 10. Funnene i flere av undersøkelsene presentert i teoriavsnitt 2.3.1.1 viser at en betydelig andel personer mener deduktive bevis er ikke-gyldige bevis. Og direkte bevis er en type deduktivt bevis. Når det kommer til det jeg har omtalt som antagelsesbevis er det kun en av de tre gruppene som mener dette også er en gyldig bevismetode. De to andre gruppene sa at de på en måte visste at det er en gyldig metode, men at de ikke visste hvorfor det er gyldig. I tillegg ga de uttrykk for at de var meget usikre på om de kontrapositive beviset i trekantoppgaven var et gyldig bevis på påstanden. De sa de hadde problemer med å se at beviset og påstanden omhandlet det samme. Den gruppa som sa at antagelsesbevis er en gyldig bevismetode brukte også lang tid på å se at bevis 9 var et gyldig kontrapositivt bevis, noe som kan bety at de heller ikke er helt komfortable med den bevismetoden. Siden antagelsesbevis også er deduktive bevis samsvarer resultatet fra denne studien med resultatet fra de andre omtalte studiene: Noen elever godtar ikke deduktive bevis som et bevis på at påstanden er sann. Men funnene mine gir grunn til å dele inn deduktive bevis i direkte bevis og antagelsesbevis siden det er forskjell på aksepten av de to typene.

Dette vises også i at elevene bruker direkte bevis i sin egen argumentasjon i firkantoppgaven. Det er ingen av gruppene som bruker andre typer deduktive bevis, som kontrapositive eller ad absurdum-bevis. Om en også tar hensyn til kategorien om at et godt bevis skal være lett å forstå, så virker det ikke urimelig at elevene unngår disse antagelsesbevisene når de skal bevise noe selv. De uttrykte gjennom trekantoppgaven at antagelsesbevis ikke er lette å forstå, og at det blant annet derfor ikke er en god bevismetode. Når elevene mener noe ikke er en god metode, er det ikke rart de ikke bruker den.

6.1.2 Ugyldige bevismetoder

Elevene i studien ga i stor grad uttrykk for at empiri ikke kan aksepteres som gyldig bevis. Unntaket var at den ene gruppa ville godtatt empiri i GeoGebra fordi GeoGebra ikke tillater unøyaktigheter eller feil på de geometriske figurene. Dette funnet gir grunn til å tro at noen elever kan ha i overkant stor tillit til GeoGebra. For selv om empirien gjøres i GeoGebra kan det ikke regnes som et gyldig bevis fordi en ikke vet om alle tilfeller samsvarer med påstanden som skal vises.

For to av gruppene var denne kategorien både ikke synlig og synlig i firkantoppgaven. Det som menes med både synlig og ikke synlig er at elevene brukte empiri og måling som bevis, men at de samtidig sa at de visste at en lærer eller sensor ikke ville godkjent dette som bevis. I mangel av andre måter å argumentere på ble det likevel brukt empiri og måling. Dette er noe annen forskning også har funnet ut; at elever vet at empiri ikke er et gyldig bevis, men at det likevel brukes som et overbevisende argument. Forskningen gjort av Healy og Hoyles på temaet avdekket at elever som allerede var overbevist om at en påstand stemte i større grad godtok empiri som bevis enn elever som ikke allerede var overbevist (Reid og Knipping, 2010, s. 62). Dette finner en også i denne masterstudien. Gruppe 2 tok opp at de ikke så noen grunn til å bevise påstanden fordi de allerede var overbevist om at det stemte. De var riktignok overbevist av empirien, men sa samtidig at empiri ikke er et gyldig bevis. Det ble sagt at de følte det ikke var nødvendig med noe mer for å overbevise dem fordi all empirien stemte med påstanden. Balacheff (1988) skriver om forskning som kom fram til at elever tyr til empiri om de møter for stor motstand i bevisføringen. Motstanden kan bestå av flere ting, for eksempel at samarbeidet i gruppa ikke er godt på den måten at det ikke gir elevene en felles motivasjon til utforsking. Det er usikkert om det er dette som er tilfellet i denne studien, eller om det er andre årsaker til bruken av empiri. Men elevene sa at hvis det hadde vært en figur som ikke stemte med påstanden, så ville de prøvd å bevise påstanden på en annen måte. Dette utsagnet er interessant fordi det virker som om gruppa ikke ville akseptert dette som et moteksempel, men at dette empiriske bruddet med påstanden heller ville gjort at de ville forsøkt å finne en annen framgangsmåte for å bevise påstanden. Kanskje tenker elevene at en figur som ikke passer med påstanden bare er tegnet upresist, og at det derfor må brukes andre bevismetoder? Men det kan også tenkes at elevene, på tross av et moteksempel, fortsatt ville trodd påstanden var sann. Det at elever ikke godtar moteksempler som bevis på at påstanden ikke stemmer er også funnet i andre studier. Reid og Knipping (2010, s. 64) skriver om forskning som er gjort der en betydelig andel elever mener det kreves mer enn ett moteksempel for at en skal kunne slå fast at en påstand er ukorrekt. Gruppa mener at det ikke er nok med ett eller noen få eksempler for å slå fast at en påstand er sann. Kanskje har elevene den samme tankegangen rundt motbevis også? Fordi det ikke er gyldig med noen få eksempler for å bekrefte en påstand, og at det derfor ikke er nok med ett eller noen få motbevis for å avkrefte en påstand heller.

Det kan, ut fra det at elevene stoler på empiri og måling på figurer, også virke som elevene stoler på at representasjonene av objektene speiler alt ved det matematiske objektet de representerer. Kanskje er de ikke klar over at de jobber med en representasjon av et objekt? Eller kanskje tror de at representasjoner er helt korrekte gjengivelser av objekter, noe som det i teoridelen ble vist at ikke stemmer.

En annen ting som kom fram i forbindelse med empiri var at gruppe 3 gjerne brukte empiri for å utforske påstanden før de gjorde et direkte bevis. På vilkårlig firkant-oppgaven følte de at det var nødvendig å tegne noen ekstra firkanter for å se om det faktisk ble et parallellogram også inni disse. Dette sa de var fordi de var usikre på om oppgaven prøvde å lure dem til å tro at påstanden var sann for alle firkanter, mens det egentlig kanskje bare var sant for den ene firkanten de ble presentert for. Dette fenomenet finner en også igjen i annen forskning på bevis; at elever gjerne vil ha empiri i tillegg til et bevis. Hanna (2000, s. 19) snakker om at selv om elevene har fått se et bevis for en påstand, og også sier at de skjønner beviset, så vil de ofte spørre etter empiriske data på at påstanden stemmer. Dette kan ifølge Hanna (2000, s. 19) henge sammen med at det er slik bevis presenteres i andre sammenhenger; som empiri. Det er for eksempel utenkelig at en fysiker vil akseptere en påstand kun basert på en teoretisk og deduktiv argumentasjon. Fysikeren vil ha data som bekrefter at påstanden stemmer. Slik kan det være for elever også; at det er uvant eller føles utilstrekkelig å kun ha en teoretisk deduktiv tilnærming til det å verifisere en påstand. Gruppe 3 sin utforsking av den vilkårlige firkanten gir indikasjoner på dette. Og det gjør også annen forskning, ifølge Hanna (2000, s. 19).

6.1.3 Bevis skal ha en formell form

Denne kategorien er ikke synlig i de to første gruppenes argumentasjon. Grunnen til at den ble vurdert som ikke synlig var at de to første gruppene brukte argumentasjon der de så for seg hvordan den indre firkanten ville endret seg om en endret på den ytre firkanten. Dette blir et slags empirisk tankeeksperiment der elevene ser for seg hvordan mange indre firkanter vil bli seende ut ved å endre på vinkelmål eller sidelengder i den ytterste firkanten. Elevene snakket også om at de så for seg at de endret de ytre firkantene på samme måte som en kan gjøre i GeoGebra; ved å dra rundt på punkter eller ved å lage en glider. Gruppe 2 hadde empiri i GeoGebra som kode i kategorien gyldige bevismetoder, og det at de så for seg hvordan figuren endres er det nærmeste en kommer realiseringen av denne koden i argumentasjonen.

Andre studier har også sett på om formen på beviset påvirker personers aksept av beviset. Martin og Harel gjennomførte en studie som involverte 101 universitetsstudenter på 1980-tallet (Reid og Knipping, 2010, s. 66). Den viste at mange av studentene som aksepterte et gyldig deduktivt bevis også aksepterte deduktive bevis som hadde mangler. Martin og Harel kommenterte at studentene ble påvirket av formen på beviset i større grad enn av om innholdet i beviset var korrekt. Dette kan også sees i gruppe 2 i denne masterstudien. Elevene sa i forbindelse med vektorbeviset i trekantoppgaven at beviset ser gyldig ut. De skjønte ikke alt som ble sagt i beviset, men fordi det så ut som det gjorde så mente de det var et gyldig bevis. Av samme grunn som vektorbeviset raskt ble klassifisert som gyldig, ble gruppa i forbindelse med bevis 8 med en gang usikre på om det kunne være et bevis fordi det står ”jeg har” i starten av beviset. Dette var en frase elevene mente ikke hører hjemme i et bevis, og de ble derfor skeptiske til om dette kunne være gyldig; til og med før de hadde lest resten av teksten. Grunnen til at elevene mener bevis skal ha en formell form kan være at de kun har sett bevis skrevet på formell form. Læreboka Sinus R1, som er den læreboka elevene har brukt i R1-undervisninga, inneholder en god del bevis både i algebra- og geometrikapittelet (Oldervoll et al., 2013). Felles for alle disse bevisene er at de har et objektivt og matematisk språk, og majoriteten av bevisene er direkte bevis. Et utdrag av beviset for at de tre medianene i en trekant har et felles skjæringspunkt, og at dette skjæringspunktet deler medianene i forholdet 2:1, er står på følgende måte i boka (Oldervoll et al., 2013, s. 158):

> Vi tegner en trekant ABC og lar M_1 være midtpunktet på AB. La M_2 være midtpunktet på AC, og la S være skjæringspunktet mellom medianene BM_2 og CM_1. Vi forlenger AS til et linjestykke AE som er slik at $SE = AS$. Punktet S er dermed midtpunktet på linjestykket AE. Ettersom $AS : AE = 1 : 2$ og $AM_2 : AC = 1 : 2$ er trekantene ASM_2 og AEC formlike (se krav 2 på side 142). Dermed er EC parallell med SM_2. Da må EC være parallell med BS.

Beviset er et objektivt, deduktivt, direkte bevis som bruker resultater elevene kjenner fra tidligere. Det er også en blanding av tekst og matematiske symboler, noe elevene i den første gruppa mente et bevis burde inneholde. Arne sa at bevis skal inneholde ”tekst og formler og sånt” (veksling 744). Om undervisninga og læreboka er hovedkildene elevene har i forbindelse med det å se gyldige bevis, så er det ikke unaturlig at det de ser der blir reflektert i hva de forbinder med bevis. Schwarz og Hershkowitz (1999) skriver om at hvis elever kun får se et lite utvalg eksempler koblet til et begrep i matematikk, så vil disse eksemplene bli prototypeeksempler for eleven. Dette kan også være tilfellet i forbindelse med bevis. Om elevene kun får se og jobbe med bevis som er direkte bevis skrevet på en objektiv form med innslag av matematiske symboler, så er det ikke usannsynlig at denne formen for bevis blir prototypeeksempelet på et bevis. Hvis elevene får spørsmål om hva et bevis er, så vil de tenke på dette. En konsekvens av dette kan være at elevene finner det vanskelig å akseptere bevismetoder som ikke er på den samme formen, som for eksempel kontrapositive bevis, ad absurdum-bevis og induksjonsbevis. I undervisning kan det dermed være greit å passe på at ikke alle bevisene elevene møter er på den samme formen, men at de får se og jobbe med et bredere spekter av bevis.

I Heinze (2010, s. 102) blir det listet opp fem punkter som er knyttet til matematikeres aksept av nye bevis. Det femte punktet omhandler at det er et overbevisende matematisk argument for at påstanden er sann, der personen er kjent med den typen bevis. I punktet står det dessuten i parentes at det overbevisende argumentet er ”rigorous or otherwise”. Dette tolker jeg som at personer kan akseptere bevis som på en eller annen måte er på en form som personen er kjent med og som overbeviser. Også andre har inkludert det at hvordan et bevis er representert eller presentert har betydning for om det blir sett på som gyldig. Stylianides (2007) har det som det siste av tre punkt på ei liste over hva som skal til for at argumentasjon skal kunne kalles bevis. Dette med at presentasjonen av beviset har betydning gjør at jeg tenker på to ting: For det første; hvis elevene kun forbinder én type bevis med gyldige bevis på grunn av prototypeeksempler, så kan elevene potensielt sett feilaktig vurdere et bevis til å være ugyldig hvis dette beviset er på en annen form enn det de er kjent med. For det andre: Elever kan vurdere ugyldige bevis til å være gyldige om det ugyldige beviset er på en form som elevene forbinder med bevis. Dette ble observert i masterstudien i gruppe 2. I denne sammenhengen er det urelevant at vektorbeviset faktisk er et gyldig bevis, for elevene godkjente vektorbeviset i trekantoppgaven fordi formen på det så ut som et bevis. Også andre forskere på bevis i undervisning har funnet det samme. Reid og Knipping (2010, s. 65) skriver om forskning gjort av andre i forbindelse med det å feilaktig akseptere et bevis som gyldig. Der kom det fram at grunnen til aksepten av de ugyldige bevisene kunne ligge i at formen på det ugyldige beviset var likt gyldige bevis. Enten at det var gjennomført med en metode som minner om gyldige bevismetoder, eller at det hadde et språk som var likt språket personene forbinder med gyldige bevis.

6.1.4 Bevis bruker aksepterte resultater

Denne kategorien er en av de tre kategoriene som en finner igjen i argumentasjonen hos alle gruppene. Det å bruke resultater i bevis gjør at en slipper å skrive lange, formelle bevis fra aksiomnivå. De aller fleste bevis en ser i undervisningssammenheng bruker resultater, og bør også ifølge Hanna (1990) også gjøre det. Kategorien er tett koblet opp mot Stylianides (2007) sitt første punkt om hva et bevis er i skolematematikk: At et bevis bruker resultater som er akseptert i klassemiljøet, og som de involverte personene aksepterer uten videre forklaring eller verifisering. Gruppe 3 støtte på en utfordring i forbindelse med dette i argumentasjonen sin. De kunne vært ferdig med beviset om at en får et parallellogram inni et parallellogram da de fant ut at de motsatte sidene i den indre firkanten var parvis like lange, men siden det resultatet ikke var akseptert i miljøet, fortsatte de for å finne at den indre firkanten hadde parvis parallelle sider. Dette er noe som gjør at det er god grunn til å bruke bevis i undervisning; både miljøet og hver enkelt elev kan utvide sitt spekter av aksepterte sannheter, og elevene får også utforsket sammenhenger i matematikken.

6.1.5 Bevis er gyldige hvis aksiomer og regler følges

Denne kategorien finner en igjen i mange artikler som omhandler bevis i matematikken. I tabellen til McCrone og Martin (2009, s. 205), som tar for seg seks prinsipper som såkalte "informed members" i matematiske miljø er enige i at skal være til stede i et bevis, finner en prinsippet om at gyldigheten til bevis avhenger av den indre logikken i beviset. Det skrives også at det er den logiske oppbyggingen av beviset som avgjør gyldigheten heller enn formen beviset er presentert på, og at utsagnene i beviset må legges opp etter argumentasjonens regler i en rekkefølge som går fra påstand til konklusjon. Også Hersh (1993, s. 391) skriver om at et bevis er "en sekvens av transformasjoner av formelle setninger som utføres i overensstemmelse med reglene i førsteordens logikk". Han skriver samtidig at det sjelden skrives bevis som fullfører denne sekvensen fra aksiomnivå til konklusjon. Som regel bruker en et resultat som er vist tidligere i form av et teorem eller et lemma. I tillegg er det følgende også et interessant spørsmål: Hvem avgjør om logikken og transformasjonene som brukes er korrekte? Dette var det usikkerhet om i gruppe 1. Der mente de at det var reglene som avgjør om et bevis er gyldig eller ikke. Da jeg stilte spørsmål om hvem som avgjør om reglene brukes på rett måte, hadde ikke elevene noe svar. De stilte også til slutt i intervjuet spørsmålet om at et bevis er enten gyldig eller ugyldig, og at det ikke er noe skjønn i forbindelse med dette. Det gir en indikasjon på at elevene ikke er klar over at det er vi, menneskene, som avgjør om et bevis er gyldig eller ikke. Hersh (1993,

s. 391) skriver at en annen definisjon på bevis er at det er en form for ”argumentasjon som overbeviser kvalifiserte dommere”. Dommerne er i skolesammenheng en lærer eller en sensor. I andre deler av matematikken er dommerne matematikere; eksperter innen sitt felt av matematikken. Gruppe 1 og 2 sa i forbindelse med empiri og argumentasjonen de brukte i firkantoppgaven at de ikke trodde de ville overbevist en sensor på eksamen med det de hadde gjort, og er dermed på sett og vis klar over at argumentasjonen deres ikke kvalifiserer som et gyldig bevis. Alle gruppene hadde med kategorien i begrepsbildet av bevis, og forbinder dermed bevis med at regler for logikk må følges.

6.1.6 Bevis skal gjelde generelt

Generalitet i bevis ble funnet som kategori i to av gruppenes begrepsbilder. Kategorien inngår også i to av prinsippene for bevisforståelse i tabellen av McCrone og Martin (2009, s. 205). Det første prinsippet den inngår i er at et teorem ikke har unntak. Om teoremet gjelder generelt, så vil teoremet gjelde for alle tilfeller. Kategorien inngår også i prinsippet om at et bevis skal gjelde generelt, og at måter å vise det på er å kontrollere alle tilfeller eller å bruke direkte, antagelses- eller visuelle bevis. Det står også at empiriske argumenter ikke er bevis, og ei heller det å kontrollere noen kritiske tilfeller.

Kun i gruppe 3 var kategorien om at bevis skal gjelde generelt synlig i argumentasjonen. Gruppa brukte bestandig egenskaper ved de matematiske objektene i stedet for å bruke egenskaper ved de spesifikke representasjonene av objektet. De to andre gruppene prøvde å vise påstandene generelt, men brukte empiri og måling på figurene da de møtte hindringer. Dette er derfor ikke urimelig å anta at det å bevise en påstand på en gyldig måte henger sammen med elevenes forståelse av hva som er generelle egenskaper ved et matematisk objekt. Noe som er tett koblet til dette, er det å se hva som kun er egenskapene ved en representasjon av det matematiske objektet. Basert på det elevene uttrykte i intervjuene kan det se ut som det er en kobling mellom det å argumentere på matematisk gyldig vis og det å se forskjellen på egenskaper ved en representasjon og egenskaper ved det matematiske objektet. Mer presist: De elevene som bruker egenskapene ved objektet klarer i større grad å presentere et gyldig bevis. Dette vises ved at gruppe 3 la fram nesten utelukkende gyldig argumentasjon i firkantoppgaven. De ga også uttrykk for at det er en forskjell på objektet og representasjonen. Gruppe 1 brukte argumentasjon der deler av argumentasjonen var gyldig. Denne gruppa hadde også kategorien bevis skal gjelde generelt i begrepsbildet av bevis. Den siste gruppa, gruppe 2, hadde ikke kategorien i begrepsbildet av bevis. De prøvde å bruke direkte bevis, men tok hovedsaklig utgangspunkt i målinger på figuren. Duval (2006, s. 120) skriver om akkurat dette; at uten det å være trygg på representasjonsoverganger mellom ulike typer representasjoner, samt det å kjenne til at representasjoner kun er en måte å uttrykke et matematisk objekt på, vil ikke elever i like stor grad få til å skille mellom ugyldig og gyldig argumentasjon. Det å la elevene gjøre matematikk med ulike representasjoner kan gi dem et bedre utgangspunkt for å bevise påstander på en gyldig måte.

Gruppe 1 og 2 er imidlertid ikke alene om å ikke klare å presentere en gyldig form for argumentasjon. Annen forskning viser at en stor del av elevmassen ikke kan å skrive et korrekt bevis. Den tredje internasjonale matematikk- og naturfagsundersøkelsen (TIMSS) ble gjennomført midt på 1990-tallet, og fant ut at det gjennomsnittlig var 35% av elevene som klarte å skrive et gyldig, generelt bevis (Reid og Knipping, 2010, s. 68). Recio &

Godino gjennomførte også en undersøkelse, denne tidlig på 2000-tallet, der $32,9\%$ klarte å gjennomføre et gyldig bevis (Reid og Knipping, 2010, s. 68).

6.1.7 Gode bevis er lette å forstå

Denne kategorien mente jeg var synlig i argumentasjonen hos alle gruppene. Jeg argumenterte for dette med at de ikke hadde brukt antagelsesbevis, og at de forklarte hvordan de tenkte hele veien. Likevel går det an å stille spørsmål ved om en kan si at kategorien var synlig i argumentasjonen. Det vil jo trolig være sånn at en person vil synes sitt eget bevis er lett å forstå. Men i og med at jeg la den nevnte betydningen med at de ikke brukte antagelsesbevis og forklaring av framgangsmåte til grunn for vurderingen, mener jeg det er greit å tolke det på den måten som ble gjort. Det at elevene ikke bruker antagelsesbevis når de sier de ikke skjønner den typen bevis er ikke overraskende. Men det at de ikke har et godt forhold til denne typen bevis fra starten av kan by på utfordringer om elevene skal fortsette med matematikkutdanning. Allerede i R2 er induksjonsbevis en del av læreplanen, og i høyere utdanning kan en få bruk for både kontrapositive bevis, ad absurdum-bevis og induksjonsbevis. Men hvordan kan undervisning legges opp slik at elever får et bedre forhold til disse bevismetodene? Det kan være et interessant tema for videre forskning.

Gruppene mente også at et godt bevis skal være enkelt og forklarende. Enkelt i den forstand at det bruker enkle resultater, og forklarende i den forstand at det både forklarer godt hvordan beviset er gjennomført og at det gir litt mer forståelse rundt temaet. Gruppe 3 sa at det kontrapositive beviset ikke var et godt bevis fordi det ikke ga dem noe, og dette er forståelig. Kontrapositive bevis er en bevistype jeg ikke ville regnet som forklarende fordi det eneste beviset gir leseren er en bekreftelse på om påstanden som skal vises er sann. I samsvar med den presenterte teorien mener Hanna (1990, s. 10) at et forklarende bevis skal gi innsikt i viktige egenskaper som er knyttet til hvorfor påstanden må være sann. Fordi en ser på det inverse utsagnet av det konverse utsagnet av det opprinnelige utsagnet i et kontrapositivt bevis, vil det ikke være lett å koble innholdet i beviset til den opprinnelige påstanden. Pilotstudien til denne masterstudien omhandlet elevers første møte med kontrapositive bevis. Der kom det fram at elever har vanskelig for å skille mellom det kontrapositive utsagnet til en påstand, det motsatte utsagnet av en påstand og det inverse utsagnet til en påstand. Og om en ikke klarer å skille disse, vil det trolig være meget utfordrende å bruke kontrapositive bevis, og også det å få innsikt i egenskapene knyttet til den opprinnelige påstanden.

Elevene mente at gode bevis skal være enkle og forklarende. Dette henger sammen med McCrone og Martin (2009, s. 205) sitt andre prinsipp om bevisforståelse. Det omhandler det at et av formålene med et bevis er å forklare hvorfor påstanden er sann, og ikke bare at den er sann. Elevene er gjennom denne kategorien interessert i at beviset skal vise hvorfor påstanden er sann, og hvordan beviset kommer fram til at det er sant. Og gjerne på en enkel måte ved å bruke enkle resultater. Det at leseren forstår beviset og alt som omhandles i beviset er et av kriteriene listet opp i Heinze (2010, s. 102). Uten at leseren forstår innholdet eller konteksten til beviset, vil det ikke bli godkjent som gyldig. Med andre ord vil ikke et bevis som ikke er forklarende nok nødvendigvis bli godkjent. Hanna (1990, s. 9) skriver om bevis i undervisning: I undervisning er det viktig at bevis som brukes er forklarende, og at de utdyper ideer som elever bør kjenne til. Det er også viktig at elevene får innblikk i at aksept av bevis er avhengig av miljøet beviset presenteres i; en matematiker kan akseptere et bevis selv om en R1-elev ikke gjør det, og matematikere i ulike fagmiljø kan mene forskjellig om det samme beviset. I bevisundervisning mener Hanna (1990) at det er viktig at en har klasseromssituasjoner som gjør at elevene ser kompleksiteten i problemer, og at de også forstår hvor viktig det er å ha gyldige bevis for påstander. Dette gjøres best med bevis som forklarer både framgangsmåter og matematikken bak påstanden som skal vises.

6.1.8 Oppsummering av diskusjonen

Resultatene fra analysen av datamaterialet stemmer, ut fra det som er diskutert, bra overens med det annen forskning har funnet. Mange av kategoriene i begrepsbildet til elevene er ifølge bevisteori dessuten viktige aspekter ved bevis. Men hva har det å si at de tre kategoriene *gyldige bevismetoder*, *bevis bruker aksepterte resultater* og *gode bevis er lette å forstå* er synlige i argumentasjonen hos alle gruppene, mens de resterende kategoriene kun er synlig i den ene gruppa? Underspørsmålet til problemstillingen er:

> Hvilken sammenheng, om noen, er det mellom koblingen av begrepsbildet av bevis og argumentasjon, og det å kunne konstruere et gyldig bevis?

Teorien om begrepsbilder sier at det kan være forskjellige deler av begrepsbildet som fremkalles i forskjellige situasjoner. Dette kan være tilfellet for gruppe 1 og 2, i og med at ikke alle delene av begrepsbildet av bevis fra trekantoppgaven er synlig i elevenes argumentasjon i firkantoppgaven. For gruppe 3 er alle kategoriene synlige i argumentasjonen, noe som kan bety at de har det samme begrepsbildet i de to situasjonene, og at de i tillegg bruker begrepsbildet aktivt når de argumenterer. Denne gruppa har tre synlige kategorier som hos de to andre gruppene ikke er synlig. Dette kan bety at disse kategoriene er viktige for å gjennomføre gyldige bevis, og at når de ikke er til stede i begrepsbildet av bevis i argumentasjonssammenheng så vil ikke eleven i like stor grad presentere gyldig argumentasjon. Balacheff (2010, s. 118) skriver om at det å bevise i matematikk er tett knyttet til det å representere matematiske objekter. Om en ikke får representert det matematiske objektet på en fornuftig måte, vil en heller ikke få til å bevise noe knyttet til det matematiske objektet. I tillegg mener jeg at om en er bevisst på det at en representasjon av et matematisk objekt ikke *er* det matematiske objektet, så vil en lettere kunne bevise påstander generelt. Dette kan altså være av betydning i forbindelse med det å få presentert et gyldig bevis.

En annen ting som kom fram var at de elevene som sa at de visste at empiri eller målinger ikke var gyldige bevis, men som likevel brukte det i argumentasjonen, mente det ikke var helt nødvendig å bevise påstanden. Det var jo allerede vist at det stemte med empiri. Dette leder meg til å tro at hvis elevene ikke har noen grunn til å tro at påstanden er ugyldig, så ser de heller ikke poenget med å bevise den.

I forbindelse med empiri kan det derfor i undervisningssammenheng være verdt å bemerke at empiri kan være en fin måte å utforske påstanden på, og at det dermed ikke er dumt å bruke det. Men; det må understrekes at det likevel ikke er noe som i matematikken blir sett på som et gyldig bevis, og at det derfor må brukes en form for gyldig argumentasjon i tillegg. På grunn av prototypeeksempler kan det trolig også være en fordel å bruke mange forskjellige eksempler på bevis i undervisning: Både direkte bevis, motsigelsesbevis, kontrapositive bevis, bevis med og uten formler, bevis med og uten figurer, og så videre.

6.2 Studiens kvalitet

For å kvalitetssikre forskningsprosessen foreslår Postholm (2010, s. 132) flere ulike tiltak. *Triangulering* er ett av dem, og går ut på at en blant annet bruker ulike kilder og ulike datainnsamlingsstrategier i datainnsamlingsprosessen, samt forskningsresultater fra ulike forskere og også ulike teorier for å understøtte funnene i studien. Jeg har tre elevgrupper som gjennomgikk et todelt intervju. Den første delen gikk ut på at elevene skulle bevise påstander, mens den andre delen gikk ut på at elevene skulle vurdere ulike bevis og diskutere tema knyttet til bevis. Det er brukt ulike forskningsresultater, både fra Reid og Knipping (2010, s. 59) sin samling av ulike studier på området og fra Balacheff (1988). Det er også brukt teori fra ulike forfattere, blant annet Hersh (1993), Hanna (1990), Duval (2006), Balacheff (2010), Heinze (2010), McCrone og Martin (2009), Stylianides (2007) og Schwarz og Hershkowitz (1999). Jeg mener derfor jeg har gjennomført en studie som er triangulert på de nevnte måtene.

Et annet tiltak for å sikre kvaliteten i studien er *member checking* (Postholm, 2010, s. 132). Det betyr at forskeren ber informantene om å se over både transkripsjoner og tolkinger som forskeren har gjort seg. Dette er for å sikre at det ikke dukker opp faktafeil i datamaterialet og i tolkningen av datamaterialet. I denne studien ble hver gruppes transkripsjon tilsendt gruppa. Informantene så over og ga transkripsjonene godkjenning.

Denzin og Lincoln (2000, s. 393) skriver om hva som legges i *validitet* i kvalitative studier. Validitet handler om forklaring og beskrivelse, og om at forklaringer passer med beskrivelser i studien. Med andre ord at forklaringen er troverdig med tanke på teori, datamateriale og annen forskning på feltet. En kan ikke si noe generelt om hvorvidt en forklaring er rett eller gal, for det vil bestandig finnes flere tolkninger av kvalitativt datamateriale. Men en kan si om det er troverdig. Om forklaringene er troverdige, så har studien validitet. Dette mener jeg er tilfelle i denne masterstudien. Det er forklart hvordan datamaterialet er tolket, og det analyserte datamaterialet er knyttet opp mot teori og annen forskning.

Reliabilitet i studien omhandler det at datainnsamlingsmetoden vil gi konsistente eller stabile data (Robson og McCartan, 2016, s. 173). I en intervjusammenheng i en kvalitativ studie er det umulig å måle reliabiliteten fordi det ikke går an å finne måleusikkerheten på en forsker i intervjusammenheng. Dette er i motsetning til det å finne usikkerheten til et teknisk måleinstrument i en kvantitativ studie, noe som er mulig. Det beste en kan gjøre for å ha en studie som har reliabilitet er å sørge for minst mulig forstyrrelser i intervjusituasjonen, både i form av eksterne forstyrrelser og i form av teknisk svikt på utstyr som brukes. I intervjusituasjonen i denne masterstudien satt vi på nesten lydtette rom med gardiner foran vinduene, og jeg hadde satt meg inn i bruken av videokameraet på forhånd slik at det ikke skulle by på problemer. Det ble også brukt en intervjuguide med noen faste spørsmål, og alle oppgavene elevene så på var like i de forskjellige intervjusituasjonene. Med dette mener jeg studien har god reliabilitet.

Robson og McCartan (2016, s. 173) skriver også om *generaliserbarhet*. Det går ut på hvorvidt funnene i studien kan gjelde for andre situasjoner. Det finnes både intern og ekstern generaliserbarhet, og det handler om i hvilke situasjoner funnene kan gjelde for; for situasjoner i samme setting, eller for situasjoner i andre settinger. I kvalitative studier er det hovedsaklig snakk om intern generaliserbarhet om det i det hele tatt finnes generaliserbarhet i studien. Forskningsfunn kan være av en type som beskriver eller forklarer hva som skjer i en gitt situasjon, og da kan studien være delvis generaliserbar på tross av få informanter. I denne studien er det ikke umulig at kategoriene som ble funnet i forbindelse med elevers begrepsbilde av bevis også kan finnes igjen i andre R1-elevers begrepsbilder. Det kan også tenkes at koblingen mellom begrepsbilde og argumentasjon også er noe som finnes i andre R1-elevers arbeid med geometri. Men det er ikke sikkert. Gruppenes begrepsbilde inneholder i stor grad de samme kategoriene. Dette kan være fordi oppgavene og spørsmålene som ble stilt var relativt like for gruppene, og at det derfor ble ledende i forhold til hva som kom fram i intervjuet. Det er ikke utenkelig at min kartlegging av elevenes begrepsbilder av bevis derfor kan ha fått et annet resultat enn om en annen person med andre oppgaver og spørsmål hadde gjennomført studien.

7. Avsluttende refleksjoner

Denne masterstudien var designet for å finne ut mer om elevers begrepsbilder av bevis. Datainnsamlingen var et todelt intervju, der elevene først jobbet med geometrioppgaver knyttet til firkanter, for deretter å vurdere ulike bevis for Thales' setning. Målet med den første delen var å se hvordan elever argumenterer, mens målet med del to var å kartlegge begrepsbildet av bevis. Forskningsspørsmålet for denne studien var:

> Hvilke aspekter av R1-elevers begrepsbilde av bevis er observerbare i geometri, og hvordan kommer det til uttrykk i elevenes argumentasjon?

I tillegg hadde studien et underspørsmål til forskningsspørsmålet. Det var:

> Hvilken sammenheng, om noen, er det mellom koblingen av begrepsbildet av bevis og argumentasjon, og det å kunne konstruere et gyldig bevis?

Svaret på den første delen av forskningsspørsmålet er at elevers begrepsbilde kan se ut som begrepsbildet som ble funnet hos elevene i denne studien. To av kategoriene i begrepsbildet av bevis omhandler hvilke bevismetoder elevene mener er gyldige og ugyldige. Gyldige bevismetoder er ifølge elevene å sjekke at alle tilfeller passer med påstanden, direkte bevis og antagelsesbevis. Ugyldige bevismetoder er empiri og måling på tegnede eller konstruerte figurer. Én metode ble av de ulike gruppene plassert i forskjellig kategori. Det var "empiri i GeoGebra". De følgende fem kategoriene beskriver det resterende begrepsbildet av bevis i geometri hos elevene:

- Bevis skal ha en formell form
- Bevis bruker aksepterte resultater
- Bevis er gyldige hvis aksiomer og regler følges
- Bevis skal gjelde generelt
- Gode bevis er lette å forstå

De sju kategoriene som hittil er nevnt danner begrepsbildet av bevis i geometri hos disse elevene. Andre del av forskningsspørsmålet omhandler hva som er synlig av dette begrepsbildet av bevis i forbindelse med argumentasjonen til elevene. Det ble funnet at tre kategorier var synlig i argumentasjonen hos alle gruppene: Gyldige bevismetoder, bevis bruker aksepterte resultater, og gode bevis er lette å forstå. Samtidig var det en kategori som var synlig i ei av gruppene, og som både var synlig og ikke-synlig hos de to andre gruppene: Ugyldige bevismetoder. De to gruppene med både synlig og ikke-synlig kategori brukte en ugyldig bevismetode, men sa samtidig at de var klar over at det egentlig ikke var et gyldig bevis.

Svaret på underspørsmålet til forskningsspørsmålet er at de elevene som har det mest komplette begrepsbildet av bevis, samt et begrepsbilde av bevis som er synlig i argumentasjonen, har mindre utfordringer med å bevise påstander i geometri. Kategorien koblet til generaliteten til bevis kan ha stor betydning i forbindelse med det å presentere et gyldig bevis fordi det henger sammen med det å bruke egenskaper ved matematiske objekter heller enn å bruke egenskapene ved representasjonen av objektet. Elevene med færre synlige kategorier i argumentasjonen brukte i større grad empiri for å bevise, selv om de visste at det ikke var en gyldig bevismetode. Disse elevene mente også at siden empirien stemte med påstanden, så var det ikke noe poeng i å bevise den. Elever må altså trolig føle et behov for å bevise en påstand hvis det skal bli konstruert et bevis.

Denne studien har både bekreftet en del annen forsknings funn om bevis i undervisning, og har i tillegg kommet med nye eksempler på elevers syn på bevis innen geometri. Det at elever har vanskelig for å bevise, at mange elever bryr seg mer om formen på et bevis enn om hva som er innholdet i beviset, og at kontrapositive bevis og motsigelsesbevis er bevismetoder elevene ikke synes er lette å forstå er interessante funn som krever mer forskning for å forstå fullt ut. Forslag til videre forskning er derfor det følgende: Hvordan kan undervisning legges opp på en måte som gjør at elever får et godt forhold til bevismetodene kontrapositive bevis og ad absurdum-bevis? Hvilke koblinger er det mellom begrepsbildet av bevis og argumentasjon i andre felt av matematikken, for eksempel i tallteori og i algebra? Hvorfor bruker elever empiri som bevis selv om de vet at det ikke regnes som en gyldig bevismetode?

Referanseliste

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children*, 216–235.

Balacheff, N. (2010). Knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. I G. Hanna, H. N. Jahnke og H. Pulte (red.), *Explanation and proof in mathematics. Philosophical and educational perspectives*, s. 115-135. New York, NY: Springer.

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*. Cappelen Damm akademisk.

Cupillari, A. (2011). *The Nuts and bolts of proofs: An Introduction to mathematical proofs*. Academic Press.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2000). *Handbook of qualitative research. Second edition.* Sage publications, inc.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1-2), 103–131.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. I *Interchange*, Vol. 21, No. 1 (Vår, 1990), s. 6-13.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. I *Educational Studies in Mathematics*, 44, s. 5-23.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. I *ZDM Mathematics Education* (2008) 40: s. 345-353.

Heinze, A. (2010). Mathematicians' individual criteria for accepting theorems and proofs: An empirical approach. I *Explanation and proof in mathematics*, 101–111. Springer.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. I *Educational Studies in Mathematics*, 24, s. 389-399.

Kutluca, T. (2013). The effect of geometry instruction with dynamic geometry software; geogebra on van hiele geometry understanding levels of students. *Educational Research and Reviews*, 8(17), 1509.

McCrone, S. M., & Martin, T. S. (2009). Formal proof in high school geometry: Student perceptions of structure, validity, and purpose.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstø l, O., & Hals, S. (2013). Sinus R1. *Oslo: Cappelens Forlag*.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Universitetsforlaget.

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). Proof in mathematics education. *Research, Learning and Teaching*. Rotterdam: Sense Publishers.

Robson, C., & McCartan, K. (2016). *Real world research*. Chichester: John Wiley & Sons.

Schwarz, B. B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education*, 362–389.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 289–321.

Stylianides, A. J. (2014). Proof. I Brindley, S. (red.), *Masterclass in Mathematics Education: International Perspectives on Teaching and Learning*, London: Bloomsbury Publishing, s. 101-112.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151–169.

Tjora, A. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis*. Gyldendal akademisk.

Utdanningsdirektoratet (2006a). Læreplan i matematikk for realfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering. Henta 07.06.2018 fra http://data.udir.no/kl06/MAT3-01.pdf.

Utdanningsdirektoratet (2006b). Læreplan i matematikk x - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering. Henta 07.06.2018 fra http://data.udir.no/kl06/MAT2-01.pdf.

Utdanningsdirektoratet (2013). Læreplan i matematikk fellesfag. Henta 07.06.2018 fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf.

Venema, G. A. (2012). *Foundations of geometry*. Pearson.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293–305.

Vedlegg

Vedlegg A

Student
Øyvind Haugan Lien
[redacted]
oyvinhl@stud.ntnu.no

Veileder
Anita Valenta
[redacted]
anita.valenta@ntnu.no

Trondheim, 07.03.2018

Til elever på VG2 ved [redacted]

Anmodning om samtykke til lydopptak og videoopptak av intervju og elevarbeid, samt innsamling av elevbesvarelser.

Jeg er student på lektorprogrammet i realfag ved NTNU. I forbindelse med masteroppgaven min ønsker jeg å se på elevers arbeid med geometrioppgaver i R1-matematikk. Jeg kommer til å se på elevers skriftlige besvarelser i tillegg til å få elever til å utdype svarene i et intervju. Intervjuet vil ta utgangspunkt i geometrioppgaver. De innsamlede dataene vil bli brukt i en masteroppgave som skal leveres 01.06.2018.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, er det ønskelig å både gjøre videoopptak av elevarbeid knyttet til geometri, samt gjøre lydopptak av intervju med elever i etterkant av elevarbeidet. Derfor ber jeg om samtykke fra deg til å kunne gjøre video- og lydopptak, samt samle inn tekst skrevet av deg i R1-matematikk ved [redacted]
Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er helt frivillig å delta og du kan til enhver tid trekke deg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Opptakene vil kun bli sett og hørt av meg og min veileder ved NTNU. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil involverte personer bli anonymisert. Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, senest 15.10.2018.

Hvis du vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer). Prosjektet er godkjent av NSD, og mer informasjon om dette kan du finne ved å søke på prosjektnummer 58339 på http://www.nsd.uib.no.

Jeg ber deg om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt du gir eller ikke gir samtykke til at jeg tar video- og lydopptak der du er med, samt bruke tekst skrevet av deg.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen

Øyvind H Lien

Vedlegg B

Samtykkeerklæring

Som del av forskning på elevers arbeid med geometri ber jeg om ditt samtykke til å gjøre video- og lydopptak der du er med og bruke matematikktekst skrevet av deg.

Forutsetningen for tillatelsen er at tekster og annet innsamlet materiale blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

☐ Jeg har lest og forstått informasjonen og samtykker til deltakelse.

Dato: ………………………

Elevens fornavn og etternavn: ……………….…………………..…………………..

Elevens underskrift: ……………….…………………..…………………..

Vedlegg C

Gruppearbeid (info om prosjektet (og anonymisering) nok en gang. Må også ha e-postadressene til elevene for å få de til å godkjenne transkripsjonene.)

KVADRAT:

Marker midtpunktene på sidene på kvadratet, og lag linjestykker slik at dere får en firkant inni kvadratet.

Hvilken firkant fikk dere? -Hvordan vet dere det?

Se for dere at dere har et annet kvadrat der dere markerte midtpunktene på sidene og fikk en ny firkant inni kvadratet. Hvilken firkant ville det vært?

-Hvorfor?

-Hvordan kan dere være sikre på det?

REKTANGEL:

Marker midtpunktene på sidene av rektangelet, og lag linjestykker slik at dere får en firkant inni rektangelet.

Hvilken firkant fikk dere nå? -Hvordan vet dere det?

Se også nå for dere at dere har et annet rektangel der dere markerte midtpunktene på sidene slik at dere fikk en ny firkant inni rektangelet. Hvilken firkant ville det vært?

-Hvorfor?

-Hvordan kan dere være sikre på det?

ROMBE:

Marker midtpunktene på sidene av romben, og lag linjestykker slik at dere får en firkant inni romben.

Hvilken firkant fikk dere nå? -Hvordan vet dere det?

Se også nå for dere at dere har en annen rombe der dere markerte midtpunktene på sidene slik at dere fikk en ny firkant inni romben. Hvilken firkant ville det vært?

-Hvorfor?

-Hvordan kan dere være sikre på det?

PARALLELLOGRAM:

Marker midtpunktene på sidene av parallellogrammet, og lag linjestykker slik at dere får en firkant inni parallellogrammet.

Hvilken firkant fikk dere nå? -Hvordan vet dere det?

Se også nå for dere at dere har et annet parallellogram der dere markerte midtpunktene på sidene slik at dere fikk en ny firkant inni parallellogrammet. Hvilken firkant ville det vært?

-Hvorfor?

-Hvordan kan dere være sikre på det?

TILFELDIG FIRKANT:

Her kan dere enten bruke den jeg har tegnet, eller dere kan tegne en selv.

-Hvorfor valgte dere å bruke den/bruke den dere tegnet selv?

Marker midtpunktene på sidene av firkanten, og lag linjestykker slik at dere får en firkant inni firkanten.

Hvilken firkant fikk dere nå? -Hvordan vet dere det?

PÅSTAND:

Om en har en firkant der hjørnene er midtpunktene på sidene til en annen firkant, så vil den indre firkanten være et parallellogram.

-Hvordan kan dere være sikre på at dette stemmer?

-Vil det stemme for en firkant som ser slik ut (som den ikke-konvekse firkanten)?

Spørsmål/kommentarer?

Info om intervjuet. (Husk å si at de ikke skal snakke om hva de har gjort før etter neste gruppe har gjennomført det.)

Oppvarming:

Hvilket forhold har du til matematikk?

Hvordan synes dere det var å jobbe med geometrioppgavene dere akkurat jobbet med?

Hoveddel:

Se for deg at du sitter med en matematikkoppgave. Du leser: Vis at … . Hva tenker du at oppgaven mener du skal gjøre?

> Hvordan vet du at du har vist det du skal vise?

Hva er det første du tenker på når du hører «bevis»?

Se for deg at du sitter med en matematikkoppgave. Du leser: Bevis at … . Hva tenker du at oppgaven mener du skal gjøre?

> Hvordan vet du at beviset ditt er gyldig?

Dere får nå se en påstand og 10 ulike bevis. Diskuter hvilke bevis som er gyldige, samt hvilket som er det beste beviset, og hvorfor.

Oppgaver om bevis!

Kan en stole på en matematisk påstand uten å ha sett beviset for påstanden?

> Hva gjør at du stoler på et bevis? / Hva gjør at du ikke stoler på et bevis?

Takk, og spør om det er noen spørsmål/kommentarer.

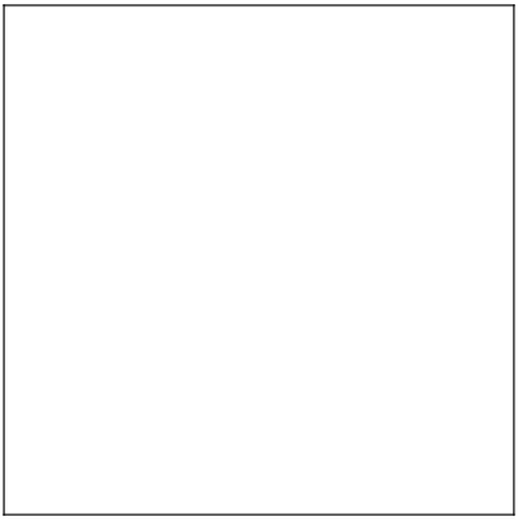
Vedlegg D

Transkripsjonsnøkkel

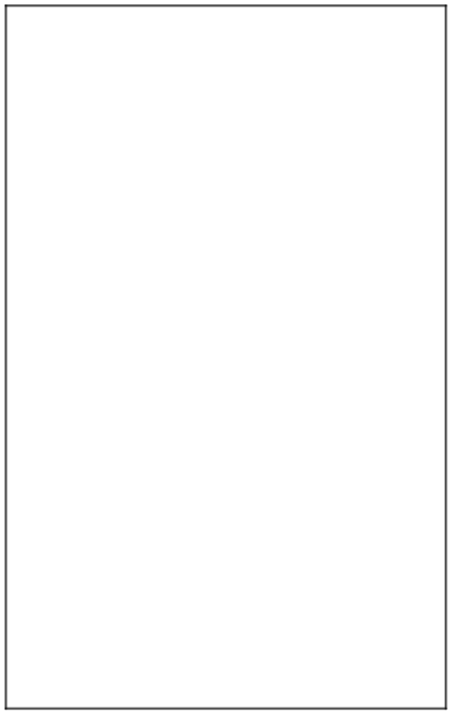
[tekst]	Teksten forteller hva som skjer visuelt.
(tekst)	Teksten forteller hva som skjer muntlig og visuelt i et hopp i transkripsjonen.
...	Stillhet inntil 5 sekunder.
(...)	En bit av videoen som ikke er transkribert på grunn av liten relevans for studien.
”tekst”	Tekst lest ordrett fra ark.

Vedlegg E

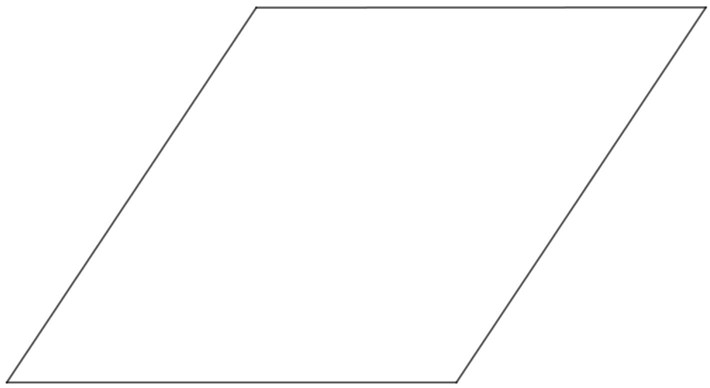
1 Kvadrat



2 Rektangel

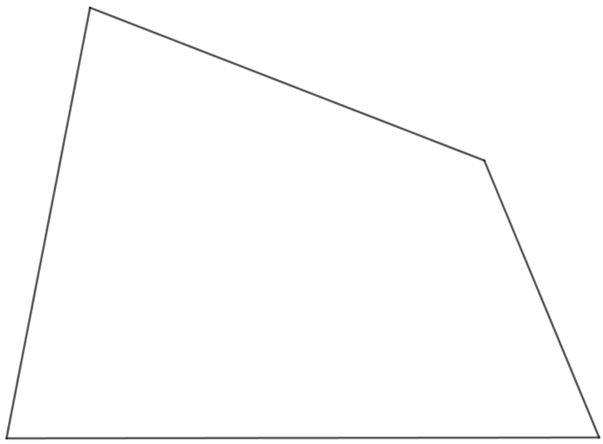


3 Rombe

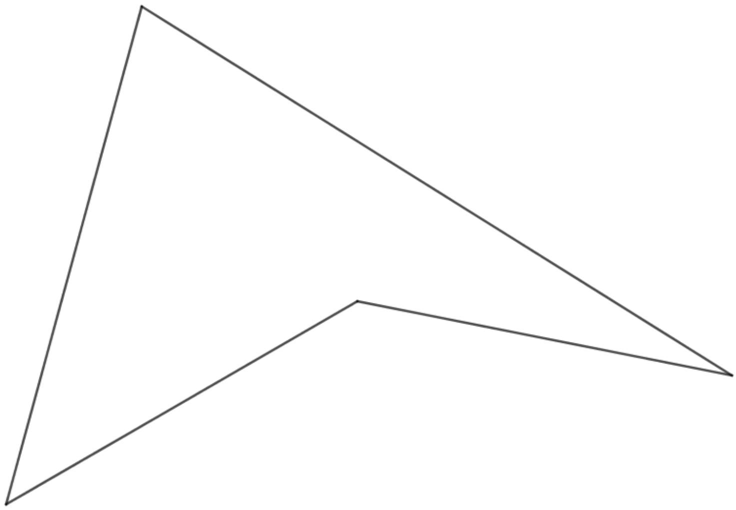


4 Parallellogram

5 Tilfeldig firkant



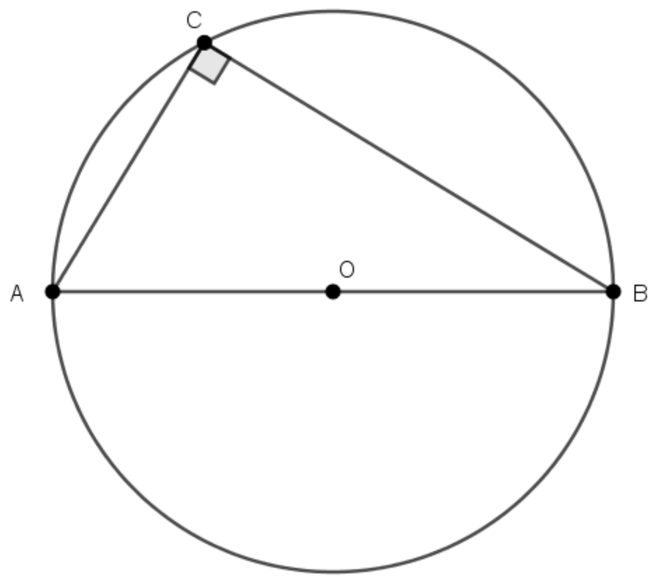
6 Ikke-konveks firkant



Vedlegg F

Påstanden som skal bevises er:

> **Hvis $\triangle ABC$ er en trekant slik at AB er diameteren i en sirkel og C ligger på sirkelen, så er $\angle ACB$ en rett vinkel.**

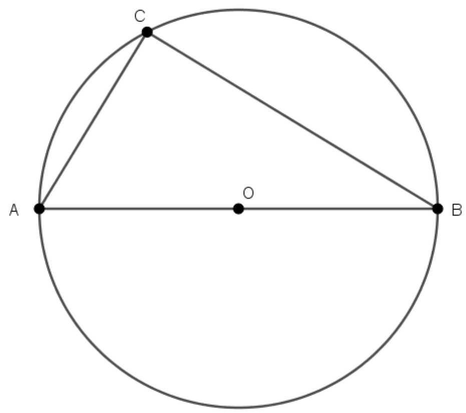


Figur 1

Bevis 1

Det finnes et teorem som sier at en periferivinkel alltid er halvparten av sentralvinkelen for en gitt sirkelbue (Sentralvinkelteoremet). Sentralvinkelen ($\angle AOB$) er i dette tilfellet $180°$, og periferivinkelen ($\angle ACB$) må derfor være halvparten av $180°$, altså rett.

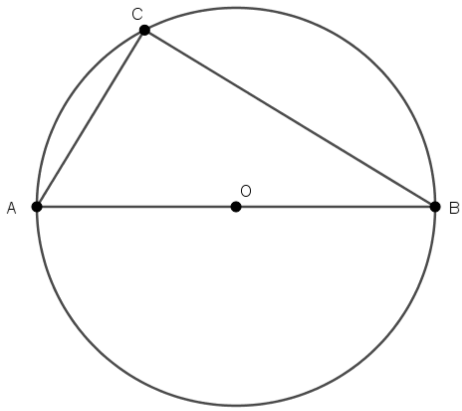
□



Bevis 2

Jeg har målt størrelsen på $\angle ACB$ i 20 ulike trekanter konstruert på papir.
Påstanden om at denne vinkelen er rett stemmer i alle disse trekantene, og stemmer derfor for alle slike trekanter.

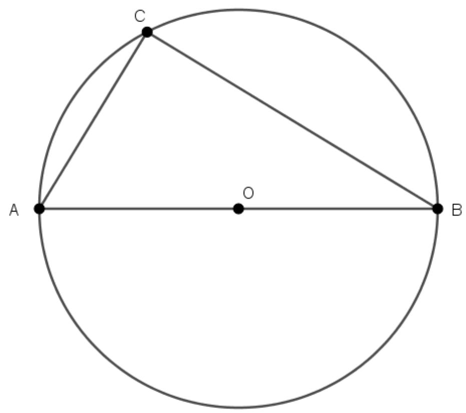
$\square$



Bevis 3

Jeg har målt størrelsen på $\angle ACB$ i 500 000 000 ulike trekanter konstruert på papir. Påstanden om at denne vinkelen er rett stemmer i alle disse trekantene, og stemmer derfor for alle slike trekanter.

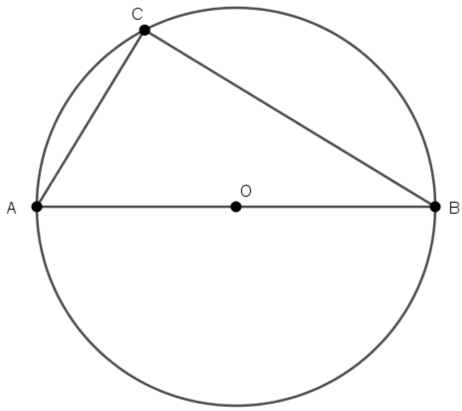
$\square$



Bevis 4

Jeg har målt størrelsen på $\angle ACB$ i 20 ulike trekanter konstruert i GeoGebra. Påstanden om at denne vinkelen er rett stemmer i alle disse trekantene, og stemmer derfor for alle slike trekanter.

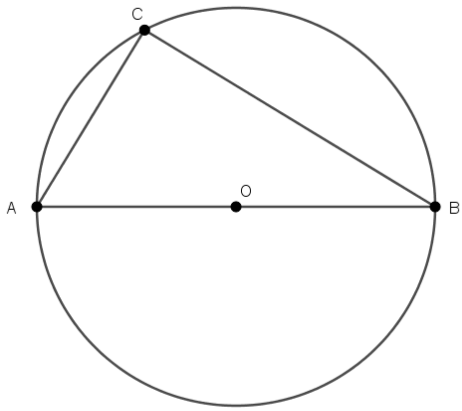
$\square$



Bevis 5

Jeg har målt størrelsen på $\angle ACB$ i 500 000 000 ulike trekanter konstruert i GeoGebra. Påstanden om at denne vinkelen er rett stemmer i alle disse trekantene, og stemmer derfor for alle slike trekanter.

$\square$



Bevis 6

La $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ og $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, og anta at punktene A, B, O og C har koordinatene $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$ og (x, y) der $x^2 + y^2 = 1$ siden C ligger på sirkelen. $x^2 + y^2 = 1$ kan skrives om til $x^2 - 1 = -y^2$.

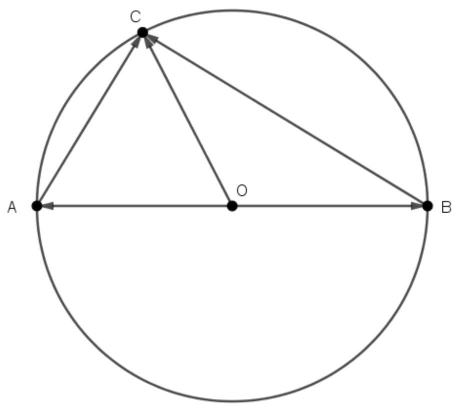
Om $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, så er $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$, og $\angle ACB$ er dermed rett.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \\ &= -[-1, 0] + [x, y] \\ &= [(x+1), y]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ &= -[1, 0] + [x, y] \\ &= [(x-1), y]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= [(x+1), y] \cdot [(x-1), y] \\ &= (x+1)(x-1) + y^2 \\ &= x^2 - 1 + y^2 \\ &= -y^2 + y^2 = 0\end{aligned}$$

$\square$

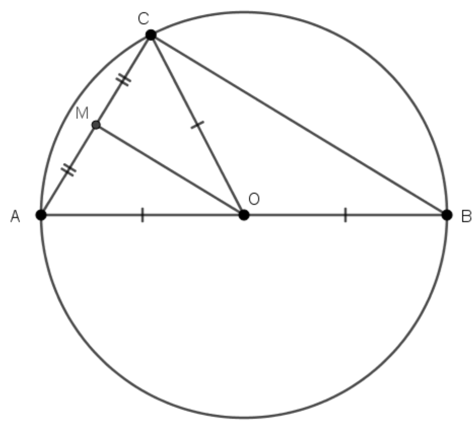


Bevis 7

Lag $\overline{CO}$. Både $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ og $\overline{CO}$ er radius i sirkelen, og har dermed lik lengde. Lag midtpunktet M på $\overline{AC}$. Siden M er midtpunktet på grunnlinja i den likebente trekanten AOC, vil $\overline{OM}$ stå vinkelrett på $\overline{AC}$.

Se nå på $\triangle AOM$ og $\triangle ABC$. Disse er formlike med forhold 1:2 siden $AC = 2 \cdot AM$ og $AB = 2 \cdot AO$. Linja gjennom OM og linja gjennom BC er dermed parallelle, og $\overline{BC}$ står derfor også vinkelrett på $\overline{AC}$.

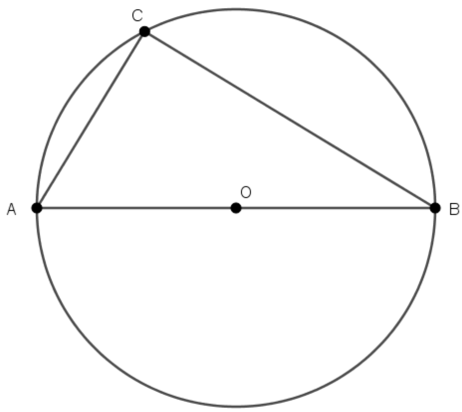
$\square$



Bevis 8

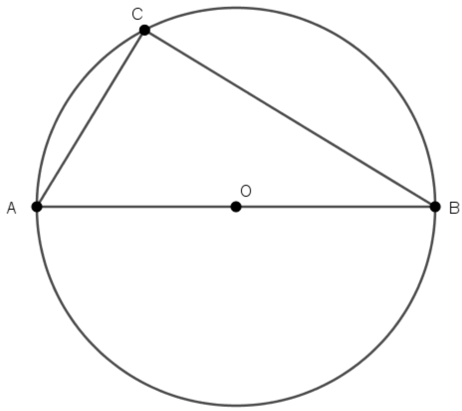
Jeg har målt størrelsen på $\angle ACB$ i $\triangle ABC$ for alle mulige plasseringer av punktet C på sirkelen (bortsett fra i A og i B).
Påstanden om at denne vinkelen er rett stemmer i alle disse trekantene, og stemmer derfor for alle slike trekanter.

$\square$



Bevis 9

Anta at $\angle ACB$ ikke er rett. Det betyr at sentralvinkelen ($\angle AOB$) må være ulik 180°, og dermed at punktene A, O og B ikke ligger på linje. Dette betyr igjen at $\overline{AB}$ ikke kan være diameteren siden segmentet ikke går gjennom sentrum av sirkelen. $\triangle ABC$ er dermed ulik trekanten i påstanden som skulle vises, og påstanden må derfor være sann. $\square$



Bevis 10

Lag $\overline{CO}$. Både $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ og $\overline{CO}$ er radius i sirkelen, og har dermed lik lengde. Det fører til at $\triangle AOC$ og $\triangle BOC$ er likebeinte trekanter, som gir at α_1 og α_2 er like og at β_1 og β_2 er like. Vinkelsummen i trekanter er $180°$. Vinkelsummen i $\triangle ABC$ er $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 180°$, eller $2 \cdot (\alpha_1 + \beta_1) = 180°$. Dette medfører at $\alpha_1 + \beta_2 = 90°$.

□