Bruk av digitale øvinger i grunnutdanningen i matematikk

Frode Rønning, Aslak Bakke Buan, Mette Langaas, og Marius Thaule, Institutt for matematiske fag, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

SAMMENDRAG: Siden høsten 2013 har det vært gjort betydelige endringer i strukturen på grunnemnene i matematikk og statistikk ved NTNU, fra januar 2014 innenfor rammene av prosjektet KTDiM (Kvalitet, tilgjengelighet og differensiering i grunnundervisningen i matematikk), ett av de innovative utdanningsprosjektene ved NTNU. Ett av elementene i KTDiM har vært å innføre ukentlige datamaskinbaserte øvinger (basert på systemet Maple T.A.), delvis til erstatning for klassiske skriftlige innleveringer. Et visst antall slike øvinger må være godkjent for å få gå opp til eksamen, og i noen av emnene vil godkjente øvinger også telle på den endelige karakteren i emnet. I starten kom det betydelig kritikk fra studentene på at Maple T.A.-oppgavene var for vanskelige, og man forsøkte å etterkomme denne kritikken ved å tilstrebe å lage lettere oppgaver. Som konsekvens kunne man gjennom spørreundersøkelser observere mindre kritikk mot vanskelighetsgraden, og det ble rapportert større opplevd læringsutbytte. Gjennom en analyse av utvalgte oppgaver gitt i Matematikk 1 i en fireårsperiode vil vi i denne artikkelen karakterisere den utviklingen som har skjedd med Maple T.A.-oppgavene i denne perioden, og koble det til studentenes tilbakemeldinger gjennom spørreundersøkelsene. Dette kan også bidra til å si noe om for hvilke formål et elektronisk øvingssystem kan være tjenlig, og om det kan være formål der mer manuelle vurderingssystemer kan være bedre.

1. INNLEDNING

Å bruke datamaskiner til tester og til å vurdere øvingsoppgaver i matematikk er ingen ny idé. Slik bruk av datamaskiner kan spores tilbake til ideene om *programmert læring* som stod sterkt på 1960-tallet, beskrevet blant annet av Gagné som "one particular form of ordering the stimulus and response events designed to bring about productive learning" (Gagné, 1962, s. 355). Disse ideene var i utgangspunktet ikke knyttet til bruk av datamaskiner, men etter hvert som datamaskiner ble tilgjengelige, var ideene lett overførbare til programmeringsspråk. Ved NTNU (NTH) kan slike tanker spores minst 30 år tilbake da det på 1980-tallet ble etablert et *Senter for datastøttet undervisning* der det ble utviklet undervisningsprogrammer i programmeringsspråket (forfattersystemet) PLATO, som ble lansert i USA i 1976 (Control Data, 1983). I en lang periode kan det se ut som denne bruken av datamaskiner i matematikkundervisning har vært nokså fraværende, og at man heller har konsentrert seg om å utvikle og bruke *verktøyprogrammer* som for eksempel GeoGebra, som er svært utbredt i skolen, og mer avanserte programpakker som for eksempel Maple og Mathematica i høyere utdanning. Imidlertid kan en i den senere tid se en fremvekst av systemer som legger opp til automatiserte tester og øvinger. Eksempler på dette er kommersielle systemer som Pearson MyLab Math[12] og Maple T.A.[13] og systemer utviklet i akademiske miljøer som for eksempel STACK (Sangwin, 2013).

Ved NTNU har Maple T.A. vært brukt i matematikkemner siden 2013, senere også i statistikk. Obligatoriske ukentlige øvinger har vært gitt i Maple T.A., og øvingene har også talt med på den endelige karakteren i enkelte av emnene. Disse øvingene har delvis erstattet de tradisjonelle skriftlige innleveringene. Bruken av Maple T.A. har vært én av komponentene i prosjektet KTDiM[14] (Kvalitet, tilgjengelighet og differensiering i grunnundervisningen i matematikk). Dette er ett av prosjektene innenfor satsingen Innovativ utdanning ved NTNU. Gjennom spørreundersøkelser og intervjuer er det samlet mye data om studentenes erfaringer og

[12] http://www.pearsonmylabandmastering.com/
[13] http://www.maplesoft.com/products/mapleta/
[14] http://www.ntnu.no//ktdim

opplevelser med det elektroniske vurderingssystemet og de andre komponentene som KTDiM har bestått av (Rønning, 2015). Det kom tidlig tilbakemeldinger om at Maple T.A.-oppgavene ble oppfattet som for vanskelige, at læringsutbyttet gjennom å arbeide med oppgavene var lavt, og at det foregikk kopiering av svar i betydelig grad mellom studentene. Som følge av dette ble det lagt vekt på å gjøre oppgavene enklere, og gjennom spørreundersøkelsene kan man over tid registrere en markert tilbakegang i andelen av studenter som synes oppgavene er for vanskelige, kombinert med en rapportert økning i det opplevde læringsutbyttet. Andre funn angående Maple T.A. tyder på at å bruke et slikt vurderingssystem, særlig i forbindelse med obligatoriske øvinger som også teller på karakteren, kan føre til at studentenes arbeid med oppgavene utvikler seg til "en jakt på det korrekte svaret" uten særlig refleksjon over hvordan man kom fram til dette svaret (Rønning, i trykk).

Helt i starten (høsten 2013) var alle innleveringene i Matematikk 1 basert på Maple T.A., men tradisjonelle skriftlige innleveringer ble senere gjeninnført, om enn i mindre omfang enn før. Det er relevant å spørre om til hvilke formål et system som Maple T.A. kan være hensiktsmessig, og til hvilke typer oppgaver det kan egne seg. I denne artikkelen er det særlig det siste spørsmålet som blir behandlet. Gjennom en analyse av utvalgte oppgaver gitt i Matematikk 1 vil vi karakterisere den utviklingen som har skjedd med Maple T.A.-oppgavene i denne perioden, og koble det til studentenes tilbakemeldinger gjennom spørreundersøkelsene.

2. METODE

Det har vært gitt 12 øvingssett i Maple T.A. hvert semester. Vi har samlet alle øvingssettene for Matematikk 1 for årene 2013, 2014 og 2016. For 2015 er dessverre ikke øvingssettene lagret. For hvert av de tre årene har vi valgt ut ett øvingssett, om temaet *integrasjon.* Dette temaet er valgt fordi det er et svært sentralt tema i Matematikk 1 og fordi det kommer et stykke ut i semestret, når studentene er forventet å ha kommet godt inn i arbeidet med emnet. Vi vil så analysere oppgavene i de valgte øvingssettene ut fra det teoretiske rammeverket som blir presentert nedenfor for å kunne karakterisere vanskelighetsgraden til oppgavene.

I spørreskjemaet blir studentene bedt om å ta stilling til flere påstander om Maple T.A.-øvingene. I denne artikkelen ser vi spesielt på disse påstandene:

- Oppgavene er for vanskelige
- Jeg lærer mye av å gjøre disse oppgavene
- Jeg "koker" noen oppgaver hver gang

Svaralternativene er "Helt enig", "Litt enig", "Litt uenig" eller "Helt uenig".

Gjennom å sammenholde den teoretiske analysen med utviklingen av svarene i spørreskjemaene vil vi forsøke å si noe om hvilke typer oppgaver som egner seg til bruk i Maple T.A. Her er det da en underliggende antakelse om at en oppgave ikke er godt egnet dersom den oppleves som altfor vanskelig eller at det opplevde læringsutbyttet er lavt.

3. TEORI

For å analysere oppgavene gjør vi bruk av et rammeverk utviklet av Lithner (2008). Han skiller her mellom *kreativ matematisk fundert resonnering* og *imitativ resonnering.* Kreativ resonnering kjennetegnes ved at det brukes et argument som er nytt for den som gjennomfører det, at valget av strategi følges av en argumentasjon som viser at konklusjonene er sanne eller i hvert fall plausible, og at argumentene er forankret i iboende matematiske egenskaper ved de objektene som er involvert i resonneringen (Lithner, 2008, s. 266). Imitativ resonnering deles i to kategorier, *memorert resonnering* og *algoritmisk resonnering.* Den første kategorien kjennetegnes ved at strategien baserer seg på å gjenkalle et fullstendig svar fra hukommelsen mens den andre strategien baserer seg på å gjenkalle en algoritme og at selve løsningen handler om å gjennomføre denne algoritmen (Lithner, 2008, s. 258-259). Bergqvist (2007) har brukt dette rammeverket til å analysere eksamensoppgaver ved svenske universiteter med tanke på å avgjøre i hvilken grad slike oppgaver kan løses med kreativ eller imitativ resonnering. Hun har videre delt inn oppgaver som krever kreativ resonnering i kategoriene *lokal* og *global* kreativ resonnering. Lokal kreativ resonnering betyr at det finnes en kjent algoritme for å løse oppgaven, men at det kreves en modifisering av algoritmen i den bestemte oppgaven. Global kreativ resonnering innebærer at måten å løse den på er ukjent for oppgaveløseren, men at den kan løses med den kunnskapen som oppgaveløseren er forventet å inneha. Bergqvist har videre delt denne kategorien i tre underkategorier, *å konstruere et eksempel*, *å bevise noe nytt* og *modellering* (Bergqvist, 2007, s. 358-365).

4. ANALYSE

4.1 Resultater fra spørreundersøkelser

Vi vil nå vise svarutviklingen på de tre ovennevnte spørsmålene om Maple T.A.-oppgavene fra spørreundersøkelsene i Matematikk 1 i perioden 2013-2016. Vi har slått sammen svarprosentene på helt og litt enig og tilsvarende på helt og litt uenig.

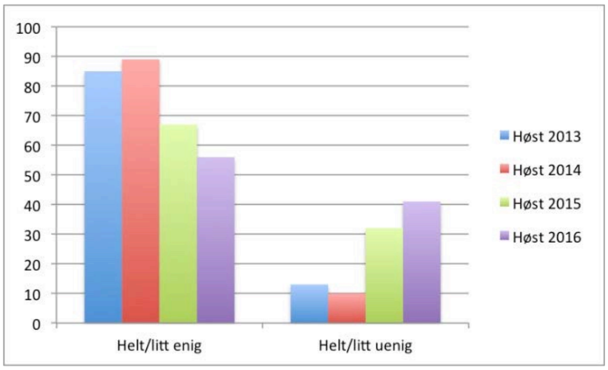

Fig. 1. Oppgavene er for vanskelige

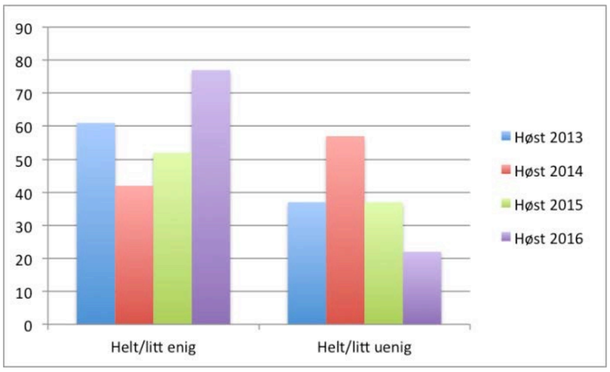

Fig. 2. Jeg lærer mye av å gjøre disse oppgavene

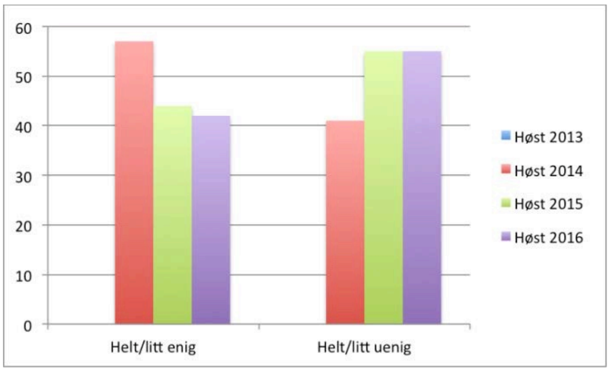

Fig. 3. Jeg ”koker” noen oppgaver hver gang

Figur 1 viser utviklingen for påstanden ”Oppgavene er for vanskelige”. Her er det en nedgang fra mellom 80 og 90 % som er enig i denne påstanden de to første årene til ca. 55 % i 2016. Tilsvarende øker opplevd læringsutbytte (Figur 2) fra bunnivået 40 % i 2014 til litt under 80 % i 2016. Graden av ”koking” (dvs. kopiering) av oppgaver går også ned fra nær 60 % i 2014 til litt over 40 % i 2016. (Dette spørsmålet ble ikke stilt i 2013.) Det har vært utfordrende å finne ”riktig” nivå på Maple T.A.-oppgavene, og det finnes vel heller ikke noe klart svar på hva som er ”riktig”, men man kan hevde at når 80-90 % av dem som svarer på spørreundersøkelsen synes oppgavene er for vanskelige, så er det et signal om at de ikke fungerer godt nok. Spørreundersøkelsene har en svarrate på mellom 40 og 50 %, og det finnes dokumentasjon på at det er en skjevhet i undersøkelsene mot en overrepresentasjon av studenter som gjør det relativt godt på eksamen. Dette styrker inntrykket av at oppgavene nok var for vanskelige i de to første årene.

Spørreundersøkelsene sier kun noe om opplevd læringsutbytte, og det er vanskelig å måle det egentlige læringsutbyttet. Vi vil imidlertid hevde at det er uheldig dersom det opplevde læringsutbyttet er svært lavt fordi det vil kunne føre til svekket motivasjon og mestringstro. Det bør dessuten være et mål å redusere "kokingen" slik at studentene faktisk løser oppgavene selv og ikke bare kopierer fra andre og leverer innen fristen fordi de må. Imidlertid kan det sies at andelen som "koker" jevnlig fortsatt er høy, med ca. 40 %.

4.2 Analyse av oppgaver

Som det framgår av Figur 1 var andelen som var enig i at oppgavene var for vanskelige på topp i 2014. Det ble derfor gjort tiltak for å gjøre oppgavene lettere, og som følge av dette gikk andelen som oppfattet oppgavene som for vanskelige, ned.

Vi vil nå forsøke å beskrive nærmere hva prosessen med å gjøre oppgavene lettere faktisk har innebåret. Dette vil vi gjøre ved å se på ett øvingssett i Matematikk 1 fra hvert av årene 2013, 2014 og 2016 som omhandler samme fagtema og som dermed bør være sammenlignbare. For å få et bedre inntrykk burde vi ideelt sett ha sett på alle øvingssettene for hvert av årene, men det er det ikke rom for i dette arbeidet. De valgte oppgavene vil bli analysert ved hjelp av rammeverket om kreativ og imitativ resonnering (Lithner, 2008) som er presentert i seksjon 3. Nedenfor presenterer vi to oppgaver, kalt Oppgave 1 og 2, som begge ble gitt i essensielt lik form både i 2013 og 2014 (tallene i oppgavene varierer for hver student), men som ikke ble gitt i 2016. Som nevnt tidligere, har vi dessverre ikke oppgavene fra 2015 tilgjengelige.

La f og g være integrerbare på intervallet $[-5,5]$ og la

$$I = \int_{-5}^{3} \big(5f(x) - 2g(x)\big)dx + \int_{5}^{3} \big(2g(x) - 5(x)\big)dx.$$

Hva er I når det er gitt at f er en like funksjon, g er

Fig. 4. Oppgave 1 (2013 og 2014).

I Oppgave 1 presenteres to integrerbare funksjoner, f og g, men de er ikke representert ved et funksjonsuttrykk eller på annen måte slik at de kan kobles til bestemte funksjoner. De må derfor oppfattes som vilkårlige integrerbare funksjoner, men med noen gitte tilleggsegenskaper, nemlig at f er en like funksjon og g er en odde funksjon. Videre er middelverdien til f og g på intervallet $[0,5]$ oppgitt til å være 8. Med denne informasjonen skal verdien til det angitte integralet finnes. Siden f og g ikke er eksplisitt gitt, er det ingen algoritme som kan tas i bruk for å regne ut integralet. Verdien av integralet må finnes gjennom resonnering basert på de teoretiske begrepene som inngår. Dette er egenskaper som vil komme inn:

- For $a \in [0,5]$ er $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ siden f er like.
- For $a \in [0,5]$ er $\int_{-a}^{a} g(x)dx = 0$ siden g er odde.
- $\int_{5}^{3} h(x)dx = -\int_{3}^{5} h(x)dx$ for en vilkårlig integrerbar funksjon h.

- $\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)dx = 8$ per definisjon av middelverdi.

Ved å bruke punktene ovenfor, samt additivitet av integralet, vil en kunne finne verdien av *I*. Informasjonen om middelverdien til *g* er unødvendig.

> **Definer funksjonen f ved**
>
> $$f(\theta) = \int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{dx}{1-x^2}$$
>
> **med definisjonsområde $(0, \pi/2)$. Finn vendepunktet til f.**
>
> **Svaret skal bli to eksakte tall, som representerer henholdsvis x- og y-koordinaten til vendepunktet. Skriv π som Pi. Tallene skal skilles med et komma.**

Fig. 5. Oppgave 2 (2013 og 2014).

I Oppgave 2 defineres en funksjon ved et integral, der den uavhengig variable (θ) forekommer i to andre funksjoner i øvre og nedre grense for integralet. I oppgaven spørres det etter koordinatene til vendepunktet til *f*. I utgangspunktet kan man tenke seg at en slik oppgave kan løses med imitativ resonnering ved først å gjenkalle fra hukommelsen (memorert resonnering) at for å finne vendepunktet undersøker man de punktene der den dobbelderiverte er lik null. Å regne ut den dobbelderiverte og finne nullpunktene til denne kan så gjøres med algoritmisk resonnering. I og med at det er mulig å skrive opp den antideriverte til funksjonen $1/(1-x^2)$, så er det også mulig å finne et eksplisitt uttrykk for $f(\theta)$, derivere dette to ganger og sette den dobbelderiverte lik null. Dette vil imidlertid kreve nokså mye regning der det er lett å gjøre feil. Hvis man derimot bruker Analysens fundamentalteorem i kombinasjon med Kjerneregelen for derivasjon vil man få nokså direkte at $f'(\theta) = -2/\sin\theta - 2/\cos\theta$. Dette kan betraktes som kreativ resonnering, og videre herfra vil man ved algoritmisk resonnering kunne finne et uttrykk for $f''(\theta)$, og ut fra dette følger det at $f''(\theta) = 0$ for $\theta = \pi/4$ som gir $f(\theta) = 0$. Grafene til *f* og dens deriverte er vist i Figur 6 som illustrasjon.

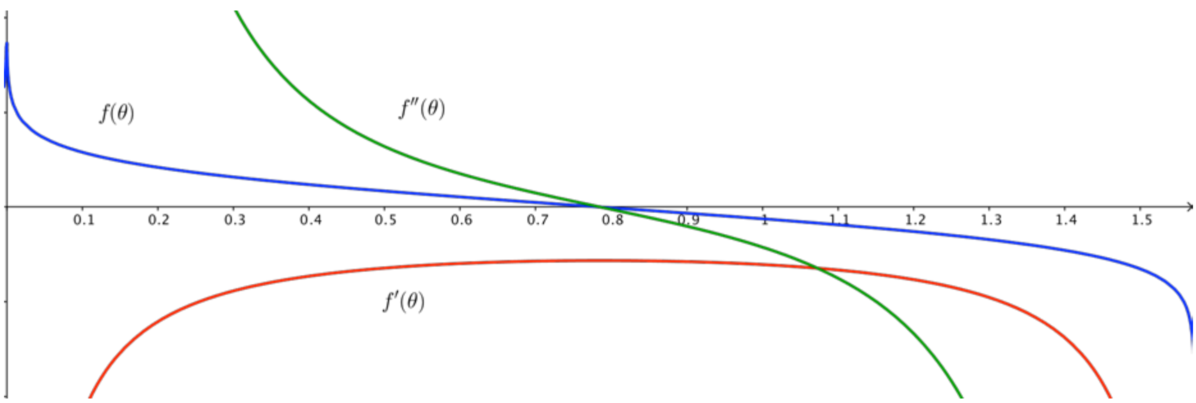

Fig. 6. Grafene til *f* i Oppgave 2 og dens første og andrederiverte.

Konklusjonen er at Oppgave 2 vil kreve kreativ resonnering for i det hele tatt å komme i gang fordi den rent algoritmiske fremgangsmåten trolig vil være så regneteknisk krevende at det vil virke avskrekkende for de fleste.

En gjennomgang av oppgavene i det samme stoffet gitt i 2016 viser at de fleste oppgavene da har en annen karakter. Vi viser to eksempler i Figur 7 og 8 nedenfor.

Bruk substitusjon til å regne ut integralet

$$\int_0^2 x^4 e^{5x^5}\,dx.$$

Svaret skal være et eksakt reelt tall.

Skriv exp() eller e^ for eksponensialfunksjonen.

Fig. 7. Oppgave 3 (2016)

Bruk delvis integrasjon til å regne ut integralet

$$\int_0^{\pi} (x+5)\cos 7x\,dx.$$

Svaret skal være et eksakt reelt tall.

Fig. 8. Oppgave 4 (2016)

Begge disse oppgavene kan løses med imitativ, algoritmisk resonnering. I begge tilfellene blir det også gitt i oppgavene en indikasjon om hvilken algoritme, eller metode, som skal brukes, nemlig henholdsvis substitusjon og delvis integrasjon. Det er gitt flere oppgaver av tilsvarende karakter i 2016.

Vi har funnet én oppgave om integrasjon som ble gitt i 2013 og som også ble gitt i 2016. Den er gjengitt i Figur 9 nedenfor.

Regn ut integralet.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin(t^3)+4\right)dt.$$

Svaret skal være et eksakt reelt tall. Skriv "Pi" for π.

Fig. 9. Oppgave 5 (2013 og 2016)

Denne oppgaven har litt til felles med Oppgave 1 (Figur 4). Den kan ikke løses ved algoritmisk resonnering fordi det ikke er mulig å skrive opp en antiderivert til $\sin(t^3)$. Løsningen må baseres på et resonnement som innebærer at både funksjonen t^3 og sinusfunksjonen er odde funksjoner, og at en sammensetning av odde funksjoner også er odde, og videre at integralet av en odde funksjon på et intervall fra $-a$ til a er 0. Forskjellen sammenlignet med Oppgave 1 er at i Oppgave 5 er det gitt en konkret funksjon, $\sin(t^3)$, og man kan ha nytte av memorert kunnskap om at å integrere $\sin t$ fra $-\pi$ til π gir 0, så spørsmålet er da hvilken forskjell det gjør å integrere $\sin(t^3)$. Siden det er gitt en konkret funksjon, kan man også ha hjelp av å tegne grafen i et dataprogram og gjennom symmetriegenskaper til grafen få støtte for at integralet er null. Denne muligheten finnes ikke i Oppgave 1 fordi man der presenteres for funksjoner som ikke er eksplisitt gitt.

5. DRØFTING

Hvis vi skal basere oss på graden av fornøydhet blant studentene, målt ved at oppgavene ikke oppleves som altfor vanskelige og at læringseffekten oppleves som stor, så kan man si at de endringene som har vært gjort med Maple T.A.-oppgavene har vært vellykkete. Dette er naturligvis ikke de eneste kriteriene for vellykkete oppgaver, men det er heller ikke noe mål at oppgavene skal oppleves som altfor vanskelige, noe som kan se ut til å ha utstrakt kopiering (koking) som resultat. Vi har også data fra studentene som sier at det er ødeleggende for selvfølelsen å oppleve gang på gang å få feil på Maple T.A.-oppgaver, blant annet fordi systemet ikke gir beskjed om *hva* som er feil. Studentene rapporter at ved skriftlige innleveringer har de større toleranse for vanskelige oppgaver fordi da kan de prøve på oppgavene, kommer kanskje bare et stykke på vei, eller de gjør noe feil, men da har de muligheten til å få tilbakemelding fra læreren, noe som har mye større opplevd læringseffekt enn Maple T.A.-oppgavene (Rønning, i trykk).

Basert på de stikkprøvene som er gjort kan vi konkludere med at det har vært en utvikling mot større grad av oppgaver som kan løses ved imitativ resonnering og mindre grad av oppgaver som krever kreativ resonnering (Lithner, 2008). Dette kan lede til en konklusjon om at det er mer rutinepregede oppgaver (treningsoppgaver) som egner seg for elektronisk evaluering og at oppgaver som krever større grad av kreativitet bør evalueres av mennesker.

Denne konklusjonen støtter dermed opp under at det var fornuftig å gjeninnføre skriftlige innleveringer, og at oppgaver som krever kreativ resonnering heller bør legges dit, eller til de interaktive forelesningene (se Thaule, Buan, Langaas, & Rønning, 2017). I Statistikk, som kom inn i KTDiM senere, har Maple T.A. alltid blitt brukt til treningsoppgaver (Langaas, Buan, Rønning, Skauvold, Tjelmeland, & Thaule, 2017), og slike oppgaver har jo også sin plass i et læringsforløp.

Referanser

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 26,* 348-370.

Control Data Corporation. (1983). *PLATO. Computer based instruction.* Minneapolis, MN: Forfatteren.

Gagné, R. M. (1962). The acquisition of knowledge. *Psychological Review, 69*(4), 355-365.

Langaas, M., Buan, A. B., Rønning, F., Skauvold, J., Tjelmeland, H., & Thaule, M. (2017). Læringsressurser i grunnutdanningen i matematikk – kvalitet, tilgjengelighet og differensiering. *Læringsfestivalen.*

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 255-276.

Rønning, F. (2015) Innovativ utdanning i matematikk. *Uniped, 38*(4), 319-326.

Rønning, F. (i trykk). Influence of computer aided assessment on ways of working with mathematics. *Teaching Mathematics and its Applications: International Journal of the IMA.*

Sangwin, C. (2013). *Computer aided assessment of mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

Thaule, M., Buan, A. B., Langaas, M., & Rønning, F. (2017). Alternativ forelesningsstruktur i grunnutdanningen i matematikk. *Læringsfestivalen.*