Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Lars Helge Staldvik

"Alle måtene er jo riktige"

En kvalitativ studie av elevers oppfatning og forståelse av matematikk og funksjoner i deres arbeid med ulike representasjoner av funksjoner

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Yvonne Grimeland
Trondheim, mai 2017

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Lars Helge Staldvik

"Alle måtene er jo riktige"

En kvalitativ studie av elevers oppfatning og forståelse av matematikk og funksjoner i deres arbeid med ulike representasjoner av funksjoner

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Yvonne Grimeland
Trondheim, mai 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Denne oppgaven markerer slutten på en 6 år lang utdanning for å bli lærer. I den anledning vil jeg gjerne takke alle som har gjort studietiden til en opplevelse for livet. Vil takke venner som har blitt venner for livet, medstudenter jeg har gått i klasse med, medstudenter som har gjort eksamenstider lettere, medstudenter som jeg har delt kontor med og familie som har hatt troen på meg helt fra starten og aldri mistet den. Dere har alle satt spor og er noen jeg har lært utrolig mye av gjennom 6 år ved lærerutdanningen.

I arbeidet med denne oppgaven vil jeg takke skolen og lærerne for å avse elever til min datainnsamling, jeg vil selvfølgelig takke elevene som var ivrige etter å bidra til prosjektet og jeg vil takke veileder for tålmodighet og veiledning.

Trondheim, mai 2017

Lars Helge

Innholdsfortegnelse

1.0. Innledning

1.1. Bakgrunn for oppgaven «Vi kan lykkes i realfag»

«Vi kan lykkes i realfag» (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016) er overskriften som møter deg når du leser Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) rapport fra 2015. Denne undersøkelsen måler elevenes ferdigheter i matematikk og naturfag på 4./5. trinn og 8./9. trinn. Datamaterialet består i tillegg av relevant info om skolen, elevene og lærerne som brukes i analysen. Det er en undersøkelse som blir gjort hvert fjerde år og det er nå femte gang at Norge er med. Siden 2014 har TIMSS-undersøkelsen blitt obligatorisk for norske skoler etter at deltakelse i internasjonale undersøkelser bestemt av kunnskapsdepartementet ble en del av paragraf 2-4 i opplæringsloven. Hensikten med undersøkelsen er å samle inn data og analysere slik at det kan brukes til å drøfte endringer et lands utdanningspolitikk (Bergem et al., 2016, s. 11). Da er det viktig med info av høy kvalitet og gjennom flere spørreskjemaer til rektorer og lærere, oppgavehefter og spørreskjema til elever i tillegg til annen relevant info for å kunne si hvilke faktorer som virker inn på elevenes læringsutbytte og resultater. Utvalget er hele skoleklasser og er dermed et statistisk utvalg som kan generaliseres til resten av landet. Undersøkelsen går dermed over ulike faktorer på prestasjon og læringsutbytte på elevnivå, klassenivå og skolenivå. Det at undersøkelsen har vært gjennomført hvert fjerde år siden 1995 gjør også at det går an å si noe om elevenes utvikling over tid. Dette vil dermed gi et sterkt grunnlag for å endre utdanningssystem og reformer. Nesten 60 land der alle verdensdelene er representert er med i TIMSS undersøkelsen i 2015. Noe som også gjør at vi kan sammenligne elevkompetanse på tvers av land og verdensdeler selv om det er mest relevant å sammenligne seg først og fremst med de andre nordiske landene.

TIMSS undersøkelse er som sagt basert på hvilken score elevene får og det er lagt ned mye arbeid i å analysere hvilken kompetanse elevene må ha for å få en spesifikk score. Deretter vil ulike kompetansebeskrivelser som er utviklet av TIMSS selv kunne si noe kvalitativt om hvilken kompetanse elevene sitter med. Disse kompetansebeskrivelsene er empirisk basert og endrer seg dermed fra år til år. Kompetansenivåene som er beskrevet innenfor algebra er fra et lavt nivå der elevene er i stand til å lage enkle grafer, mens på det nest laveste nivået er elevene i stand til å tolke og lese diagrammer og tabeller. På det høyeste nivået er elevene i stand til å løse førstegradslikninger og uttrykke generaliseringer.

De seneste års realfagsatsning og kompetanseheving av lærere innen realfag har gitt avkastning. Det er en positiv trend på de aller fleste områdene som viser at satsningen er verdt å fortsette med (Bergem et al., 2016, s. 41). Ifølge TIMSS er det flere faktorer som kan vise seg å spille inn. En av de viktigste er et godt læringsmiljø og lærerkompetanse. Elever i Norge føler seg trygge på skolen og det skaper et godt læringsmiljø. Norske elever scorer jevnt over bra også i de ulike områdene innenfor matematikk. Norske elever på 5. trinn er for eksempel blant de beste i Europa i matematikk, mens 9. trinn kan sies å score middels i matematikk. Det som er spesielt med hvilken kompetanse elevene på ungdomstrinnet sitter med er at det er såpass forskjeller innenfor de ulike emnene i matematikken. I emneområdene tall og statistikk er Norge best sammenlignet med referanselandene England, Sverige og USA. Det som trekker scoren spesielt ned på 9. trinn er emnet algebra. Her er dermed kompetansenivået så lavt at gjennomsnittet havner så vidt over det laveste kompetansenivået i matematikk utviklet av TIMSS for 9. trinn. Selv om gjennomsnittet i kompetanse totalt sett ikke er så forskjellig har til sammenligning USA som scorer best på algebra mye mindre variasjon i kompetanse. TIMSS har da indikert at algebra prioriteres mye høyere i USA enn i Norge. Siden 2007 har norske 8. klassinger blitt bedre på emneområdene tall, geometri og statistikk i henholdsvis 2011 og 2015. Også her er algebra det eneste emneområdet som elevene ligger på samme nivå i 2007 som i 2015. Algebra har norske elever scoret lavt på i flere år og scorer fortsatt lavt.

Overskriften «Vi kan lykkes i realfag» klinger fortsatt i hodet etter å ha gått igjennom matematikkresultatene for ungdomstrinnet fra TIMSS. Ifølge TIMSS sin konklusjon er resultatet i realfag totalt sett veldig bra sammenlignet med referanselandene. Da jobber Norge veldig bra med utdanningen sin på mange områder. Det som trekkes fram er som nevnt over skolemiljø. Likevel er det en merkbar nedgang i både motivasjon og prestasjon fra 4. og 5. trinn til 8. og 9. trinn. Hva kan det være som gjør at algebra skiller seg ut som det klart dårligste emnet i matematikk på 8. og 9. trinn? Hva kan dette skyldes når både emneområdene tall, statistikk og geometri har blitt bedre? Er algebra for abstrakt og for vanskelig for en 9. klassing å mestre? Man kan neppe skylde på vanskelighetsgraden da elever i samme aldersgruppe fra land som England, Sverige og spesielt USA scorer mye bedre enn oss (Bergem et al., 2016). Det finnes utallige artikler og forskning om både læring og undervisning av algebra. Likevel ser det ut som et emne som både norske lærere sliter med å undervise og norske elever sliter med å lære.

Når jeg som realfagslærer skulle velge tema for masteroppgaven min i matematikkdidaktikk var det viktig at jeg kunne lære noe av det. Det var da naturlig å velge et emne innenfor matematikk som var utfordrende for elevene. Som vi ser av TIMSS-undersøkelsen sine resultater blir algebra sett på som utfordrende for mange så var algebra et emne jeg kunne tenke meg å se mer på. I tillegg har betydningen av ulike representasjoner i matematikk vært et interessant fagområde innenfor didaktikken gjennom studieløpet. Så godt som all forskning som gjelder læring av matematikk har tatt et teoretisk valg angående rollen til ulike representasjoner av matematikken (Sfard, 1991). Det var dermed ikke et vanskelig valg å se for seg at ulike representasjoner også kunne spille en rolle i min studie. Funksjoner er et felt innenfor algebra som undervises på ungdomsskolen. I dette emnet er en rekke ulike representasjoner er tilgjengelig og ifølge kompetansemålene etter 10. trinn skal elevene kunne veksle mellom ulike representasjoner av funksjoner (Utdanningsdirektoratet, 2013b). Valget falt derfor på å undersøke elevers oppfatning og forståelse av funksjoner i matematikk der bruk av ulike representasjoner er viktig.

1.2. Forskningsspørsmål

Min utfordring er ikke å finne ut hvorfor mange elever sliter med algebra og hvorfor algebra er både utfordrende å lære og undervise. Dette ville vært et problem med så mange faktorer at det i ville vært nærmere nivået til TIMSS-undersøkelse. Jeg vil se på hva elevene faktisk mestrer og hvilken kognitiv tankegang som ligger bak det de gjør. En generell løsning av dette problemet som ville funket for alle er nok like vanskelig som å finne en effektiv løsning på hungersnød og alle verdens konflikter. Det er vanskelig og omfattende å se på hvordan elevene tenker siden dette er noe som skjer inni hodet på eleven. Derfor har jeg valgt å se på det elevene faktisk gjør i form av elevarbeid og diskusjon. Representasjoner av matematikken kommer til syne gjennom både elevarbeid og diskusjon. Disse representasjonene kan da være med på å gi meg en indirekte tilgang til elevenes oppfatning og forståelse av funksjonene. Mitt forskningsspørsmål blir da som følger: **Hvilken oppfatning og forståelse av matematikk og funksjoner kommer til syne i deres arbeid med representasjoner av funksjoner?** Med oppfatning av matematikk mener jeg de to typene oppfatning, prosessuell og strukturell oppfatning (Sfard, 1991) som vil bli beskrevet senere i teorikapitlet. Det er da spesielt hvilken oppfatning som kommer til syne i elevenes arbeid med funksjoner. Når jeg skal undersøke oppfatning og forståelse har jeg valgt å se på i hvilken grad elevene klarer å løse problemløsningsoppgaver innenfor funksjoner. Det er aktuelt å diskutere om de klarer å løse oppgaven, men også hvordan de løser oppgaven og hvilken begrunnelse de gir. Selv her er det mange faktorer som spiller inn. Elevene kan løse oppgaven på utrolig mange måter og med veldig forskjellig utgangspunkt og forståelse. Et elevarbeid kan vise at eleven har fått riktig svar, men elevarbeidet viser ikke alene nødvendigvis mye om hvilken forståelse elevene sitter med. Diskusjonen imellom elevene er derfor brukt for å forklare hvordan elevene har gjort elevarbeidet. I tillegg kan diskusjonen være med å sette ord på hva elevene tenker. Selvsagt er denne analysen relativt hypotetisk siden jeg ikke har direkte adgang til elevenes hoder. En tolkning og analyse av elevenes arbeid og diskusjon gir kun indirekte adgang til det som foregår oppi hodet. Likevel kan et analyseverktøy av elevenes forståelse hjelpe oss som lærere å forstå elevenes arbeid bedre for å videre kunne legge opp undervisning som passer hver enkelt elev.

1.3. Teoretisk rammeverk og metode

Det teoretiske rammeverket jeg har brukt er Sfard (1991) som beskriver forholdet mellom to typer oppfatning av matematikk og ulike stadier i utviklingen av et matematisk konsept. Dette er en teoretisk analyse som videre brukes som et analytisk verktøy for å si noe om hvilket stadium elevene er på i læringen av et matematisk konsept. I tillegg har jeg valgt å bruke Duval (2006) som skriver om hvilke kognitive krav og forståelse som kreves når det jobbes med overgangen mellom ulike representasjoner og representasjonssystem. Dette er en empirisk basert studie som jeg bruker til å nærmere kunne si noe om forståelsen til elevene og sette det i lys av teoriene til Sfard (1991) om de ulike stadiene i utviklingen av et matematisk konsept. Begge rammeverkene kan anvendes til å analysere oppfatning og forståelse i alle emner av matematikken og ikke kun til å analysere oppfatning og forståelse av funksjoner som jeg har gjort i min oppgave.

Datamaterialet består av kvalitative data som jeg har samlet inn gjennom deltagende observasjon og elevarbeid fra 4 elever i en 9. klasse. Elevarbeidet er viktig for å se på hva elevene har gjort mens diskusjonen brukes som støtte for å forklare hvordan elevene har gjort det. Tidsbruken var på en klokketime der jeg både tok video- og lydopptak for å få med meg mest mulig av det elevene sa og inntrykkene de ga. Ut ifra et sosiokulturelt syn på læring skjer læring i samhandling med andre. Det er derfor naturlig for meg å se på hvilken matematikk elevene klarer sammen i diskusjonen. Elevene vil jobbe med det samme temaet i tre oppgaver. Det er da naturlig å tenke seg at de i løpet av økta vil vise at de har fått mer erfaring med denne typen oppgaver.

1.4. Oppbygging av oppgaven

Denne oppgaven er delt opp i seks hovedkapitler. I kapittel 2 vil jeg forklare det teoretiske rammeverket av i hovedsak Sfard (1991) og Duval (2006). Dette er et perspektiv som jeg vil ta med meg videre gjennom oppgaven for å analysere datamaterialet og svare på forskningsspørsmålet. I kapittel 3 blir det presentert hvilken metode som er brukt og hvordan jeg metodisk har jobbet meg gjennom oppgaven i fra start til slutt. Dette helt fra ide-stadiet gjennom datainnsamling og analyseprosessen. Her vil jeg presentere og gi en analyse av oppgavene elevene jobbet med undervegs i økta. Valg vil bli begrunnet både i teori, validitet og etiske spørsmål. I kapittel 4 vil analyse av elevarbeid og elevutsagn bli presentert. Disse er presentert i kronologisk rekkefølge før det kommer en liten oppsummering og sammenbinding til slutt i kapitlet. I kapittel 5 vil jeg presentere funn og drøfting av disse opp imot forskningsspørsmålet og teorien som jeg presenterte i kapittel 2. I tillegg vil jeg drøfte den forståelsen som kommer til syne opp imot forventet matematikkompetanse på 9. trinn. I det siste kapitlet vil det komme et konklusjon/avslutning kapittel der jeg svarer kort på forskningsspørsmålet. Her vil jeg også se tilbake på oppgaven med et kritisk blikk og si noe om veien videre.

For meg vil arbeidet med denne oppgaven hjelpe meg å kunne reflektere over egen undervisning når det gjelder bruk av representasjoner. Jeg vil også kunne argumentere for hvordan jeg legger opp undervisningen og hvilken matematisk oppfatning jeg ønsker at elevene skal sitte igjen med i et praksisfelleskap. Det å kunne veilede elevene og bruke min teoretiske kunnskap til å vurdere elevenes forståelse og oppfatning av matematikk vil bli nyttig.

2.0. Teorikapittel

Innenfor vitenskap er materie et sentralt begrep. Materie er de minste byggesteinene som fysikken forsker på. Den består av atomer, molekyler og grupperes i flere ulike kjemiske forbindelser. Materien vi kjenner til har en masse. Det betyr at den eksisterer, er tilgjengelig, kan observeres og undersøkes direkte i vår verden. Matematikk ser ut til å forbigå alle andre vitenskapelige disipliner når det kommer til utilgjengelighet. Det er noe spesielt og unikt i måten å tenke på når et matematisk univers konstrueres. Folk sier ofte at matematikk er den mest abstrakte vitenskapen, men det gir ikke noe direkte svar på problemet. Avansert matematikk er der forskjellen mellom matematikk og andre vitenskaper er mest tydelig. Ulikt fra materie er ikke avanserte matematiske objekter tilgjengelig for sansene våre. De kan kun sees gjennom våre egne tanker. En matematiker vil likevel kunne hevde at disse matematiske objektene eksisterer, nesten på lik linje med materie. Når matematikere snakker om matematikk snakker de jo også om et univers bestående av objekter som har spesifikke egenskaper og som kan utsettes for ulike prosesser bestemt av meget definerte lover. Dette på samme måte som andre forskere presenterer egenskaper og lover som påvirker atomer og molekyler. Det å være i stand til å se matematiske objekt som er usynlig utenom å representere det som en semiotisk representasjon er en utfordring i matematisk læring. Utfordringen er å skille representasjonen av det matematiske objektet med selve objektet. I geologien er det nok ikke mange som vil slite med å skille en stein med en tegning av en stein. Det har vært endeløs forskning på hvordan man kan forbedre matematikkundervisningen. Enda ser det ut til å være vanskelig å komme med et godt svar. Dette er et problem som er belyst i begge rammeverkene for dette studiet, både Sfard (1991) og Duval (2006).

Under vil jeg presentere to forskjellige rammeverk for analyse av både matematisk aktivitet, oppfatning av matematikk og forståelse. Disse utviklet nettopp av Sfard (1991) og Duval (2006). Sfard ser på hvilke typer oppfatning man kan ha av matematikk og utviklingen og læring av et matematisk konsept. For at det skal skje læring stilles det visse kognitive krav til den matematiske aktiviteten som foregår. Duval ser på den kognitive betydningen av hvordan elever veksler mellom ulike representasjoner og bruker det til å kunne analysere både den matematiske aktiviteten og se indirekte på elevenes forståelse. Selv om disse er utviklet med 15 års mellomrom presenteres de samme utfordringene i begge artiklene dog fra litt forskjellige utgangspunkt. Sfard setter utvikling og læring av matematiske konsept i fokus, mens Duval går spesifikt inn på hvordan overgangen mellom representasjoner har innvirkning på elevenes forståelse. Disse to rammeverkene har jeg prøvd å se i sammenheng ved at Duval skriver om hvilke kognitive krav som en oppgave krever og Sfard har delt inn utvikling av matematisk oppfatning i hierarkiske stadier.

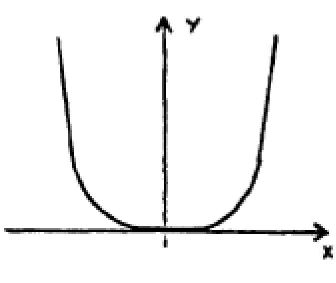
2.1. Utviklingen av et matematisk konsept

Sfard (1991) skriver om ulike oppfatninger av matematikken og sammenhengen mellom dem. Dette kan brukes til å si noe om hvilken oppfatning elevene har av matematikk. Først beskriver hun to typer oppfatning som er viktig når man skal oppdage og lære matematikk. Matematiske konsept har igjennom historien blitt oppdaget ved hjelp av å gjennomføre ulike matematiske prosesser som til slutt har blitt et konsept. Sfard kaller denne prosessuelle oppfatningen matematikken for «operational conception» (Sfard, 1991, s. 4). Prosessuell oppfatning av matematikk kommer til syne i elevarbeid så lenge det er en prosess involvert. Når elevene regner i boka må elevene kunne prosessen for å komme fram til svaret. Man kan si at dette er den eneste oppfatningen av matematikk man da trenger for å finne et svar. Utover i dette delkapitlet vil jeg prøve å argumentere for hva prosessuell oppfatning innebærer og hvorfor det er viktig med en annen type oppfatning i tillegg for å få en fullstendig forståelse av matematikken.

Det å være i stand til å se en matematisk enhet som et objekt betyr å referere til objektet som om det skulle vært virkelig. En statisk struktur som eksisterer i tid og rom. Det vil også si å kunne kjenne igjen objektet og kunne manipulere det som en helhet. Dette abstrakte objektet eksisterer for matematikere på samme måte som materie. Det er disse matematiske objektene som matematikere tenker på som matematikk. For å sette denne typen oppfatning på spissen så er som å tenke på objektet som en unik ting, uansett hvor komplisert det er. Det kan sammenlignes med ansiktet til et menneske når det gjelder hvor unikt det er. Sammenlignet med prosessuell oppfatning av matematikk som kan sees på som en enhet med et potensial er den strukturelle oppfatningen selve enheten. Selve konseptet eller den matematiske ideen kaller hun for «structural conception» (Sfard, 1991, s. 4). Dette blir da sett på som et stillestående matematisk objekt og ikke en prosess. Videre i denne oppgaven vil det bli brukt strukturell oppfatning om dette utrykket.

Det å eksakt kjenne igjen alle aspektene og formulere en presis definisjon ved den prosessuelle og den strukturelle måten å tenke matematikk på er praktisk talt umulig. Det som er verdt å nevne er at selv om disse er to fundamentalt to forskjellige måter å tenke matematikk på kan den ene tankegangen komplementere den andre. For eksempel er det viktig å se en funksjon eller et tall både som en prosess og som et objekt for å få en dyp forståelse av matematikken. Hvis vi ser på definisjonen av et matematisk konsept kan det ofte defineres både som en prosess og som en struktur. En funksjon er blant annet definert som et sett av ordnede par som er en strukturell oppfatning av konseptet. Det kan også defineres som en regneprosess eller en metode for å komme fra et system til et annet noe som er en prosessuell oppfatning av matematikken (Skemp, 1971).

Den tosidige oppfatningen av matematikk er ikke bare synlig gjennom verbale beskrivelser, men også gjennom de ulike typene av symbolske representasjoner. Selv om tankegangen bestemmes av den som tenker og ikke av de symbolske representasjonene som brukes er det noen representasjoner som lettere kan tolkes med en strukturell oppfatning. Samtidig som noen representasjoner som kan tolkes med en prosessuell oppfatning av matematikken. Figur 1 under viser eksempler på hvordan ulike representasjoner av en funksjon lettest kan sees på som konseptuell oppfatning, prosessuell oppfatning eller begge. I koordinatsystemet er alle komponentene i funksjonen satt sammen til en graf og det kan derfor være lettere å se på det som en helhet, altså strukturell oppfatning. Dataprogrammet ser på en funksjon som en regneprosess og man kan lettere se det som prosessuell oppfatning. Det algebraiske utrykket kan lett sees på som en prosess der man bruker utrykket til å finne en ukjent verdi når man allerede har en kjent verdi. Det kan også sees på med strukturell oppfatning ved å kun se på uttrykket som forholdet mellom to størrelser.

Graph	Algebraic expression	Computer program
	$y = 3x^4$	10 INPUT X 20 Y = 1 30 FOR I = 1 TO 4 40 Y = Y * X 50 NEXT I 60 Y = 3 * Y

Figur 1 (Sfard, 1991, s. 6)

Matematikk kan også representeres gjennom mentale bilder i hodet vårt og verbale utsagn. Ofte kan de mentale bildene sees på som en strukturell oppfatning av matematikken, mens verbale utsagn ofte kommer fram som prosessuell oppfatning. Siden strukturell oppfatning er et usynlig bilde av matematikken er det ofte noe vi visualiserer i hodet vårt akkurat som de skulle vært materielle enheter. Mentale bilder kan nesten manipuleres som ekte reelle objekter. Som ansiktsgjenkjenning så vil bildet bevare sin identitet og mening uavhengig hvilken vinkel det blir observert fra. I motsetning til mentale bilder inni hodet vårt kan ikke verbale utsagn bli grepet med et blikk og må presenteres sekvensielt. Det er da mer hensiktsmessig til å beskrive regneprosesser med en prosessuell oppfatning. Selv om det ofte er slik er det viktig å påpeke at det ikke alltid er det.

Selv om kjernen av disse måtene å tenke matematikk på er lett å definere er det vanskeligere sette ytterpunkter. Strukturell og prosessuell oppfatning av matematikk er som nevnt tidligere komplementerende til hverandre. Istedenfor å se på de som to motsetninger ser vi mer på en tosidig oppfatning av samme sak. Det er dermed nytteløst å prøve og bestemme hvilken av de to oppfatningene er viktigst da det vil være like meningsløst som å bestemme hvilken fot som er viktigst for å gå. Videre vil jeg prøve å overbevise leseren mer om dette skillet og hvordan dette kan brukes som to viktige begreper når jeg skal analysere elevenes oppfatning og forståelse av funksjoner og deres representasjoner.

Når vi ser på matematiske objekt må vi se på det som en helhet uten å se på prosessen som utgjør objektet. Når vi skal se på konseptet funksjoner må vi dermed ignorere hvordan selve funksjonen er bygd opp. Det er vanskelig å tenke seg at vi kan ha en slik strukturell oppfatning av funksjoner før vi i det hele tatt har brukt det i en prosess. Vi kan derfor argumentere for at når det gjelder utviklingen av et matematisk konsept kommer det en prosessuell oppfatning før den strukturell oppfatning. Dette gjelder ofte som nevnt over historisk sett, men også ofte når det gjelder læring av matematikk. Funksjoner ble for eksempel brukt som en prosess lenge før det ble laget strukturelle definisjoner og representasjoner. Hvis vi ser på den historiske utviklingen av konseptet tall ser vi en gjentagende tendens. Først ble tall brukt som en ren prosess til å telle objekter. Dette utviklet seg over tid til å bli definert som naturlige tall og videre til å bli et matematisk objekt. Denne nye definisjonen ga tilgang til å deling og positive brøker som igjen ble til konseptet om positive rasjonale tall. Dette skjer igjen og igjen i en lang kjede med det å gå fra en prosess til å bli en struktur og konseptet blir mer og mer avansert. Denne historien gjentar seg også når det gjelder funksjoner. Det som kjennetegner eksemplene om utviklingen av en strukturell oppfatning er at det ofte er en lang og vanskelig prosess. Dette kan da også tenkes å være tilfellet når det gjelder læring av matematiske konsept (Sfard, 1991).

På bakgrunn av hvordan et konsept oppstår historisk sett har Sfard (1991) oppgitt tre stadier for læring og utvikling av et matematisk konsept. Dette begrunnes i den teoretiske analysen av forholdet mellom en matematisk prosess og et matematisk objekt. Hvis formodningen om at den prosessuelle opprinnelsen til matematiske objekt er sann så må det gjennomføres en prosess på et allerede kjent matematisk objekt. Dette vil blir da til en selvstyrende enhet før den blir et selvstendig matematisk objekt. Metodisk sett er det vanskelig å undersøke elevers oppfatning av matematikk direkte. For å kunne si noe om elevers oppfatning av matematikk har Sfard sett på eksterne karakteristikker som oppførsel, holdninger og ferdigheter i matematikk. Dette siden det er vanskelig å analysere og bestemme hva som skjer av matematisk tenkning inne i hodet på eleven. Disse stadiene har som mål å bli brukt som et verktøy for å si noe om hvor elevene er i utviklingen og deres egenskap til å tenke strukturelt.

Det første stadiet kaller hun «interiorization» (Sfard, 1991, s. 18) der elevene blir kjent med en matematisk prosess. På dette stadiet blir prosesser utført på relativt enkel matematikk. Denne prosessen som på dette stadiet er i startfasen i læringen av et matematisk konsept vil til slutt bli til et matematisk konsept. Dette kan for eksempel være telling som kan føre til konseptet naturlige tall og algebraiske manipulasjoner som kan føre til konseptet funksjoner. På dette nivået vil elevene bli gradvis flinkere til å gjennomføre prosessen. I funksjoner så vil dette for eksempel være å kunne finne ut en løsning ved hjelp av en formel og ideen om at du kan bruke en variabel til å finne disse løsningene. Videre i denne oppgaven vil dette stadiet bli kalt for internalisering.

Neste steg er «condensation» (Sfard, 1991, s. 19) der den lærende korter ned lange operasjoner og prosesser inn i kortere enheter. På dette stadiet tenker den lærende mer på den gitte prosessen som en helhet og går ikke inn i detaljer og mellomregninger like mye. Det er som å få et dataprogram til å gjennomføre en rekke kommandoer med et tastetrykk. Det å kombinere en prosess med andre prosesser, sammenligne prosesser og generalisere prosesser er lettere på dette stadiet. Når man er på dette stadiet vil også det å veksle mellom ulike representasjoner av et matematisk konsept bli lettere. Hvis man møter på vanskeligheter med å utføre en operasjon det føre til at nye matematiske enheter blir til. For eksempel å subtrahere et stort tall fra et mindre tall som fører til konseptet negative tall. Det er dermed på dette stadiet at en ny matematisk enhet for den lærende blir til. Denne enheten kan bli gitt et «nytt navn» som beskriver operasjonene som en helhet. Når det gjelder funksjoner blir den lærende flinkere til å se helheten i en funksjon uten å måtte se på spesifikke verdier. Ferdigheter som å undersøke funksjoner mer, tegne grafen til funksjonen og kombinere flere funksjoner. Condensation-stadiet varer så lenge som den matematiske enheten er tett knyttet til en prosess. Det er ofte et tidkrevende stadium å komme igjennom. Videre vil dette stadiet bli kalt kondensering.

Bare når en person klarer å se en matematisk enhet som et fullverdig matematisk objekt kan vi si at han eller hun er på det siste stadiet. Dette stadiet kalles «reification» (Sfard, 1991, s. 19), eller reifikasjon videre, som definerer et skifte på hvordan man ser på det matematiske konseptet. Når både internalisering og kondensering er gradvis og kvantitativt er reifikasjon et kvalitativt og umiddelbart skifte. Istedenfor å være en matematisk prosess vil det bli et matematisk objekt som har en statisk struktur. Dette er stadiet da strukturell oppfatning av et matematisk konsept kommer til syne. Ulike representasjoner av matematikken blir til et matematisk konsept. Den lærende kan undersøke sammenhengen mellom de ulike representasjonene av et konsept og nye matematiske objekt kan bli konstruert videre fra denne. Det er dermed på dette stadiet at internalisering starter på nytt igjen for å utvikle et matematisk objekt på et høyere nivå. Det nye matematiske objektet vil dermed bli brukt i nye prosesser som en del av kondensering og ny reifikasjon. Når det gjelder funksjoner kan vi kjenne igjen dette stadiet hvis man klarer å løse likninger der den ukjente er en funksjon, for eksempel differensiallikninger.

Disse tre stadiene blir sett på som et hierarki som innebærer at et stadium ikke kan nåes før de foregående stadiene er fullført. Modellen foreslår dermed at en matematisk forståelse vil bli fullverdig først når både den prosessuelle og den strukturelle oppfatningen er mestret. Et sånt trestegs skjema er nok høyst spekulativt når det kommer til analyse noe som er naturlig. Det er vanskelig å bestemme den kognitive forståelsen til en elev direkte. Rammeverket er hypotetisk fordi det er en teoretisk analyse av forholdet mellom prosessuell og strukturell oppfatning av matematikk. Det er også forenklet for å gjøre det til et nyttig verktøy både når det gjelder planlegging, integrering og tolking i empiriske forskningsstudier.

Teoretisk sett kan vi klare å utføre nesten all matematikk prosessuelt. Historisk sett var store deler av matematikken bygd opp av ulike prosesser i ulik grad. Regneprosesser ble presentert verbalt som lange sekvenser og tilfredsstilte ikke kravene til kondensering og reifikasjon. Referanser til abstrakte matematiske objekt ble ikke tatt i bruk i det hele tatt. Det er først i senere tid at matematikere fikk en mer strukturell oppfatning av matematikken. Det er allerede slått fast at vi trenger både prosessuell og strukturell oppfatning av matematikk for å få et fullt begrep om og forståelse av matematikken. Fra et kognitivt synspunkt kan vi da anta at vi mister noe hvis vi bare ser en av oppfatningene. Uten en strukturell oppfatning vil matematikken bli en rekke endeløse prosesser og på mer avanserte nivåer av matematikken kan dette hindre videre utvikling og læring. Det vil til slutt bli utfordrende å huske alle prosessene uten å koble dem sammen til en større enhet. Strukturell tenkning øker både problemløsningsferdigheter og læring. Da vil flere prosesser gi mening og man kan ut ifra strukturell tenkning også tenke seg fram til hvilke prosesser som er lovlig på det matematiske objektet.

På stadiet kondensering og reifikasjon er det viktig å kunne si noe om rollen til navn, symboler, grafer og andre representasjoner. Representasjoners rolle i utviklingen av nye konsept og reifikasjon kan ikke undervurderes. Historisk sett var for eksempel introduksjonen av tallinja viktig for reifikasjon av negative tall. Dermed kan det tenkes at ulike representasjoner kan spille en lignende rolle i individuell læring.

2.2. Instrumentell og relasjonell forståelse

Strukturell oppfatning kan vi si er underliggende relasjonell forståelse (Skemp, 1976) definert som at man vet hva man skal gjøre og hvorfor man skal gjøre det. Relasjonell forståelse bygger på at du skal ha generelle prinsipper som bygger under den matematiske forståelsen. Det å kun ha en prosessuell oppfatning gir ikke noe annet enn instrumentell forståelse (Skemp, 1976) der man vet hva man skal gjøre, men ikke hvorfor. Instrumentell forståelse krever da at du kan en mengde regler for å gjøre matematikk. Det blir da til slutt utfordrende å huske alle reglene og prosessene som er kan gjøres på et matematisk objekt.

Hvis elevenes mål kun er å forstå matematikken instrumentelt kan det oppstå et problem når det gjelder relasjonell læring av matematikk. Med en gang elevene får høre en regel memorerer de den og ignorerer resten. Hvis det da kommer et spørsmål som ikke helt passer regelen vil ikke elevene være i stand til å løse problemet. Dette kan selvsagt også oppstå hvis læreren har et instrumentelt fokus og det vil da være enda mer skadende for elevenes læring. Innenfor sin egen kontekst er instrumentell matematikk som regel mye lettere å forstå. Det krever dermed mindre kognitiv tenkning og kunnskap innenfor den smale konteksten (Skemp 1976).

Relasjonell forståelse er mye mer anvendelig når det kommer til nye oppgaver. Selv om det er vanskeligere å lære er det lettere å huske. I tillegg ser det ut til at relasjonell forståelse er en motivasjonsfaktor for elevene i seg selv (Skemp, 1976). Som tidligere nevnt av Sfard (1991) er det vanskelig å bestemme hvilken forståelse elevene sitter med inne i hodet. Skemp (1976) påpeker også at det er en utfordring og vi må se på det elevene gjør i kombinasjon med det elevene sier.

2.3. Betydningen av ulike representasjoner og semiotiske systemer

Så godt som all forskning om læring av matematikk har tatt et teoretisk valg angående den mulige sammenhengen mellom og rollen til representasjoner (Sfard, 1991). Det har skjedd et skifte fra om vi skal bruke ulike representasjoner til hvordan flere representasjoner kan brukes i undervisningen og hvordan de legger til rette for læring. Når et matematisk konsept læres gjelder det ikke å bare forstå meningen med det enkelte konseptet, men også å se de ulike sammenhengene dette konseptet har med andre ideer (Tripathi, 2008).

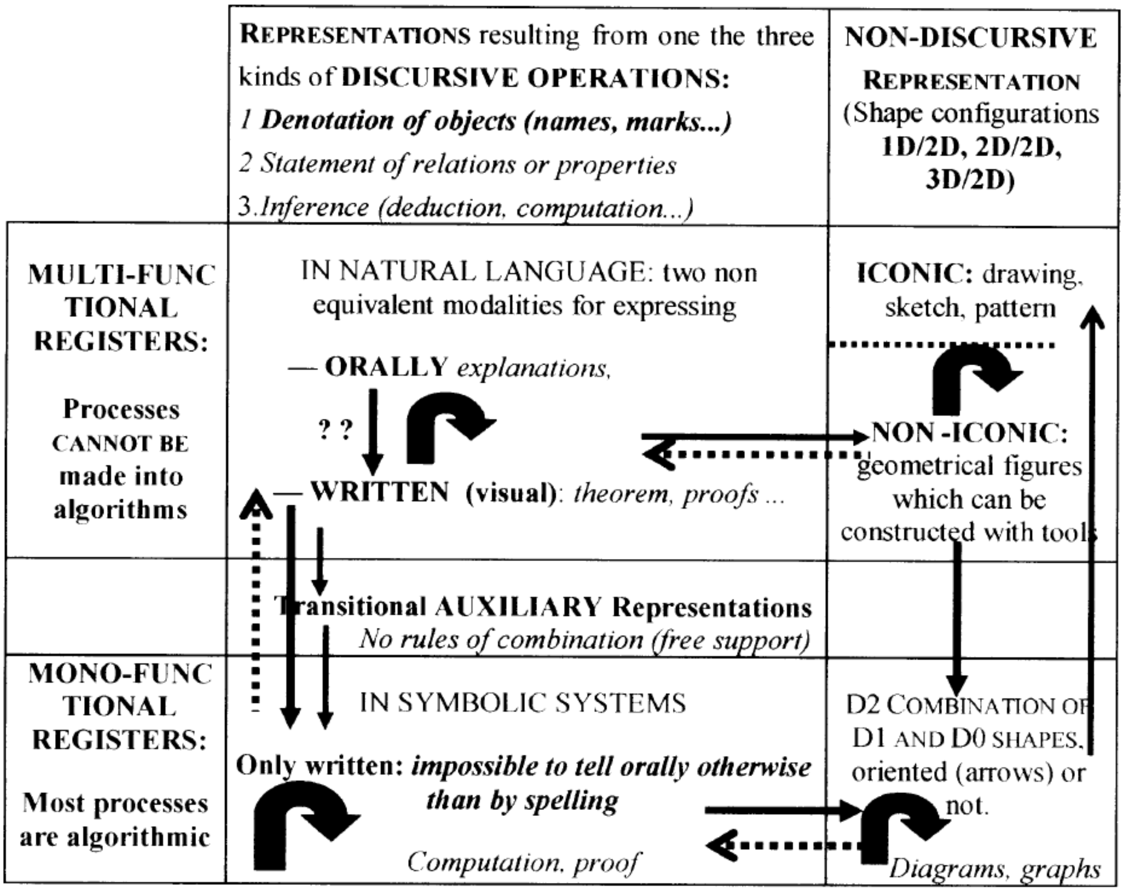
For å få tak på elevenes problemer og forståelse av matematikk er det aktuelt å se på den matematikken elevene faktisk gjør. Den abstrakte matematikken kommer ofte ut i lyset i form av en representasjon. Representasjoner i matematikken er noe som står for noe annet, men som kan stå veldig formelt for et matematisk konsept. Representasjoner kan være en elevs oppfatning eller misoppfatning av et begrep som læreren kan få tilgang til gjennom elevens arbeid eller muntlige forklaring. Representasjoner kan også være ulike tegn som har bestemte regler som igjen kan brukes til å beskrive matematiske systemer, operasjoner eller fenomener. Disse brukes da igjen for å tilegne seg ny kunnskap og beskrive nye systemer. Dermed ikke bare for å beskrive en spesiell mental representasjon (Duval, 2006). Tripathi (2008) skriver også at ulike matematiske representasjoner av et matematisk konsept får fram konseptets ulike strukturer. Det å eksaminere hvert enkelt konsept ved bruk av ulike representasjoner er som å se på konseptet med ulike briller som gjør konseptet rikere og dypere. En mengde forskning peker mot at det å se på et konsept fra flere perspektiv og representasjoner gjør at elevene forstår konseptet bedre. Dette i tillegg til at de er i stand til å bevege seg mellom de ulike representasjonene uten store problemer. Den matematiske diskursen som oppstår i klassen når elever og lærer jobber med å bevege seg mellom ulike representasjoner av et konsept kan være med på å berike klasseromskulturen. I tillegg kan det hjelpe elevene til å bli aktive deltakere i sin egen læringsprosessen.

Elevenes representasjoner er bare den forståelsen som kommer til syne på overflaten og ikke nødvendigvis den underliggende kognitive forståelsen. Det å kunne analysere denne forståelsen krever dermed en forklaring på hvilke kognitive strukturer som gjør elevene i stand til å gjennomføre ulike matematiske aktiviteter. Først må vi da søke etter hvilke kognitive funksjoner som ligger bak ulike matematiske prosesser. Duval (2006, s. 104) stiller seg et spørsmål angående dette: Hvilke kognitive systemer trengs og mobiliseres for å gi adgang til matematiske objekter og på samme tid gjør det mulig å gjøre de ulike transformeringene som utgjør en matematisk prosess?

Når det snakkes om matematisk forståelse forklares det ofte med det matematiske konseptet og dets gyldighet. Historisk sett kan matematikken og dets gyldighet forklares i konseptets oppdagelse, men dette forklarer ikke den underliggende kognitive aktiviteten. Et semiotisk system har gjennom historien vært nødvendig for å drive med matematikk. I kjernen av matematisk aktivitet finner vi transformering av semiotiske representasjoner til andre semiotiske representasjoner. Dette kan være å løse et funksjonssuttrykk. Istedenfor at uttrykket blir selve representasjonen blir det løst til å bli representert med et funksjonspar. Her er skjer det en transformering av representasjonen selv om de semiotiske symbolene som brukes er de samme.

Fra et epistemologisk synspunkt er matematisk kunnskap gjort tilgjengelig gjennom tegn og semiotiske representasjoner. I matematiske aktiviteter må semiotiske representasjoner brukes og valget går på hvilken type semiotisk representasjon som brukes. Det er viktig å påpeke at de semiotiske representasjonene ikke må forveksles med det matematiske objektet. Her oppstår det en kognitiv konflikt mellom disse to kriteriene. Det at den lærende skal skille mellom semiotiske representasjoner og det matematiske objektet er en utfordring. Dette siden du ikke får tilgang til det matematiske objektet uten de semiotiske representasjonene. Det vil dermed være viktig å kunne gå fra et representasjonssystem til et annet for at matematisk læring skal ha framgang. Enkelte matematiske prosesser er enklere å representere i et semiotisk system enn i et annet.

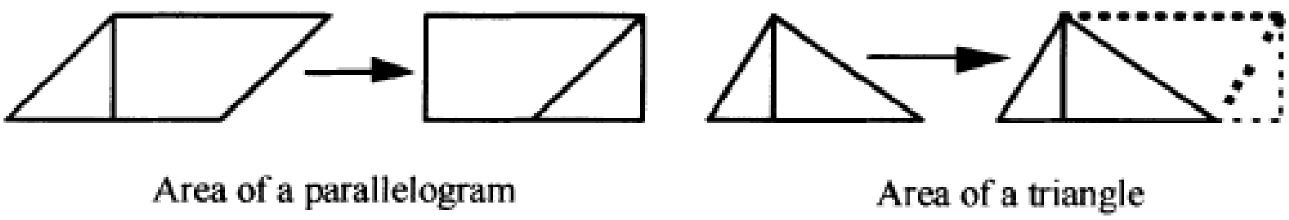
2.4. Representasjonssystem



Figur 2, Duval, 2006, s. 110

Figuren ovenfor klassifiserer ulike semiotiske representasjonssystem som kan brukes i en matematisk prosess og hvordan disse representasjonssystemene kan transformeres til et annet system. Dette kan igjen brukes som et analyseverktøy for matematisk aktivitet og hvilke kognitive krav som kreves av eleven. Representasjonene er delt opp etter hvilket semiotisk system de ligger i. De monofunksjonelle representasjonssystemene finner vi igjen spesifikt i matematikk og brukes ikke andre steder. Mens de multifunksjonelle representasjonssystemene brukes i flere sammenhenger slik som kommunisering, informasjonsbehandling i tillegg til matematikk. Øverst finner vi de mulitfunksjonelle representasjonssystemene. Prosesser i disse representasjonssystemene kan ikke gjøres om til algoritmer. Øverst til venstre finner vi språk som enten uttrykkes muntlig eller skriftlig. Øverst til høyre finner vi visuelle figurer som for eksempel tegninger eller geometriske figurer. Nederst finner vi de monofunksjonelle representasjonssystemene der de fleste prosessene er algoritmer. Til venstre har vi symbolrepresentasjonssystem der matematiske notasjoner brukes. Dette kan for eksempel være beregninger og bevis der matematiske notasjoner er brukt. Nederst til høyre finner vi diagrammer eller grafer ofte representert i et koordinatsystem (Duval, 2006). Det finnes andre rammeverk som har delt inn de ulike representasjonene på en liknende måte. Blant annet Lesh, Post og Behr (1987) deler opp representasjonene i konkreter, språk, symboler, semikonkrete representasjoner. I dette studiet er det brukt Duval (2006) sitt rammeverk for å forklare de ulike representasjonssystemene.

Det finnes to typer transformering av semiotiske representasjoner som Duval (2006) kaller for treatment og conversion. Treatment er når det utføres en matematisk operasjon innenfor et og samme representasjonssystem. For eksempel kan dette være å løse en ligning innenfor et representasjonssystem eller å reorganisere en figur for å finne dets areal. Bildet under viser hvordan man kan vise arealet til et parallellogram og en trekant ved å reorganisere dem. Figurene kan reorganiseres visuelt uten å referere til en matematisk lov. Disse eksemplene blir ofte brukt i matematikkundervisning for å forklare et matematisk konsept eller resultat. Videre i teksten vil jeg bruke behandling av representasjonen innenfor et semiotisk representasjonssystem for å beskrive denne prosessen. I figur 2 ovenfor representerer de bøyde pilene behandling av representasjoner innenfor et semiotisk representasjonssystem.



Figur 3, Duval, 2006, s. 112

Conversions brukes om transformasjoner av representasjoner uten å endre det matematiske objektet. Det matematiske objektet gjennomgår en transformasjon i fra et semiotisk representasjonssystem til et annet. Dette kan for eksempel være å gå fra en algebraisk notasjon til en funksjon dets grafiske representasjon eller gå fra en muntlig forklaring av en sammenheng til å bruke bokstaver og tall som notasjon. Videre vil jeg bruke en overgang mellom semiotiske representasjonssystem for å beskrive denne prosessen. Siden en overgang mellom semiotiske representasjonssystem er en transformasjon av selve representasjonen, er det mer kompleks enn behandling av representasjoner innenfor et representasjonssystem. Et skifte av semiotisk representasjonssystem kan gjøres så enkelt som å oversette en tekst til å skrive det med matematikk. For eksempel antall druer i fruktkurven er større enn antall appelsiner. Dette kan skrives som $x > y$ på det matematiske symbolspråket. Kompleksiteten i eksempelet over er likevel ikke så stor. For å virkelig forstå en overgang av et semiotisk representasjonssystem må man kunne kjenne igjen den matematiske enheten i de ulike semiotiske representasjonssystemene som ofte ikke har så mye til felles. Ifølge Duval (2006) handler tradisjonell matematikkundervisning ofte om å plassere punkter i et koordinatsystem og dermed konstruere en graf uten et forhold til den matematiske enheten. Dette ville dermed flere av elevene være i stand til å gjøre. Hvis vi derimot skal gå andre veien å se en graf først og kunne si noe om x verdien i forhold til y verdien ut ifra den ville mange elever slitt. Den prosessen krever da at de har erfaring med begge semiotiske representasjonssystemene for å kunne kjenne igjen den matematiske enheten i begge representasjonene. Den kognitive kompleksiteten når det gjelder læring av matematikk og matematiske aktiviteter kommer vi mer innpå når vi driver med de ulike typene overganger mellom semiotiske representasjonssystem. De rette linjene i figur 1 representerer overgangen mellom representasjonssystem.

Når man gjør en overgang fra et semiotisk representasjonssystem til et annet endres ikke bare hvilke behandlinger av representasjonen man kan gjøre, men også de matematiske lovene som kommer til syne. Innholdet til den aktuelle representasjonen bestemmes da mer av hvilket semiotisk representasjonssystem den ligger i enn av det matematiske objektet som representeres. Det å skille mellom den semiotiske representasjonen og selve objektet er i matematikk ganske utfordrende siden det matematiske objektet kun er tilgjengelig gjennom en semiotisk representasjon. Problemet til elevene blir da å kjenne igjen det samme matematiske objektet i to ulike representasjoner. Dermed må elevene kjenne igjen hva som er matematisk relevant og hva som ikke er det i en semiotisk representasjon.

Mellom det opprinnelige representasjonssystemet og dens overgang til det andre representasjonssystemet finnes det ifølge Duval (2006) to ulike forhold. Enten så er de kongruente eller så er de ikke det. Faktorer som beskriver dette kan være om det er mulig å direkte oversette fra det ene systemet til det andre eller om det ikke er det. Hvis det er en direkte oversettelse vil det være en til en relasjon mellom for eksempel ord og matematiske symboler. Det kan også være om det for hver komponent i det semiotiske representasjonssystemet vi ender opp i har bare en betydning eller ikke. I tillegg er det om de meningsfulle verdiene eller komponentene og deres organisering i det opprinnelige representasjonssystemet er endret eller beholdt etter en overgang til det nye representasjonssystemet. Hvis verdiene er endret er det dermed en ikke kongruent overgang mellom semiotiske representasjonssystem, men hvis verdiene er organisert på samme måte er overgangen mellom semiotiske representasjonssystem kongruent.

Et annet fenomen når det gjelder overgangen mellom semiotiske representasjonssystem er at hvis de fleste elevene mestrer å gå fra et bestemt semiotisk representasjonssystem til et annet, vil mange mislykkes hvis de får en oppgave om å gå motsatt vei. Dette kan for eksempel være å tegne grafen til en funksjon noe som mange elever mestrer, men skal de skrive funksjonen ut ifra grafen er det mange som mislykkes. Det å ikke mestre overgangen mellom semiotiske representasjonssystem kan være med på å hemme elevenes læring i matematikk. Bare det å gå fra en tekstoppgave til å løse den med tall er vanskelig for mange elever. Isolert sett er det ingen representasjonssystem som mestres bedre enn andre. Prestasjonen til elever varier fra hvilken representasjon de starter med og hvilken representasjon de skal til. Noe av roten til at mange elever har vanskelig for å lære matematikk er at de ikke klarer å gå fra ethvert representasjonsregister til et annet uten hjelp. Elever ser ofte på to ulike representasjoner av samme matematiske objekt som to ulike matematiske objekt. Dette problemet gjør at elever ikke mestrer å bruke kunnskap utenfor en smal læringskontekst. Da spesielt hvis det er en ikke kongruent overgang mellom semiotiske representasjonssystem.

Det å kjenne igjen hva som er matematisk relevant og ikke i ulike semiotiske representasjoner er en kognitiv utfordring. Det å kunne tegne grafen til en funksjon er langt fra nok til å kunne kjenne igjen den samme funksjonen i de ulike semiotiske representasjonssystemene. Man må kunne se at to ulike grafer som ser visuelt like ut er matematisk forskjellig. Denne ulikheten er ikke åpenbar for elevene og spesielt når grafene ser visuelt like ut. Ved å undersøke ulike variasjoner i det opprinnelige semiotiske representasjonssystemet, samtidig som de undersøker ulike variasjoner i det semiotiske representasjonssystemet de skal over i kan gjøre det lettere for elever å se hva som er matematisk relevant i de ulike representasjonene. Det gjør det også lettere å skille mellom innholdet av representasjonen med det matematiske objektet som er representert.

Muntlig og skriftlig språk og matematiske symbol har kognitivt veldig stor avstand. Likevel er dette en overgang som lærere er avhengig av og bruker hele tiden. Det å forklare matematikken med språk og deretter gjøre behandling av representasjonen med matematiske symboler på tavla. Her er det også viktig med variasjon innenfor de ulike semiotiske representasjonssystemene. Dette kan for eksempel være endring av kontekst og endring i hvordan spørsmål stilles i en tekstoppgave og variasjon i hvordan oppgaven løses i et annet semiotisk representasjonssystem.

Når matematisk aktivitet skal analyseres fra et kognitivt synspunkt må tre punkt som er tett koblet sammen tas til etterretning. Først at aktiviteten går igjen en transformasjon av semiotiske representasjoner som involverer bruken av et semiotisk system. For det andre når disse transformasjonene gjennomføres kan ulike register av semiotiske representasjoner brukes. Og for det tredje må det matematiske objektet aldri bli misforstått med de semiotiske representasjonene som brukes. Dette selv om tilgangen til det matematiske objektet kun er tilgjengelig gjennom en semiotisk representasjon.

I matematikken kommer overgangen mellom semiotiske representasjonssystem først og fremst fram når en representasjon skal velges der det er enklest å gjennomføre behandling av representasjoner innenfor et semiotisk representasjonssystem. Det kan også komme fram hvis et annet representasjonsregister brukes som støtte til den første. Overgangen mellom semiotiske representasjonssystem spiller ingen fremtredende rolle i den matematiske prosessen for å bevise et konsept. Disse er basert på behandling av representasjoner innenfor et og samme semiotiske representasjonssystem. Da ofte også i et monofunksjonelt representasjonssystem. For matematisk forståelse er det ifølge Duval (2006) viktig å kunne koordinere mellom flere ulike semiotiske representasjonssystem. For ofte legger matematikkundervisningen fokus på hvilket semiotisk representasjonssystem som best forklarer det matematiske konseptet. Dette gjør at elevene bare rører overflaten av det matematiske konseptet og ikke er i stand til å skille ut hva som er matematisk relevant, se det samme matematiske objektet i to ulike representasjonssystem og kun tenker at den semiotiske representasjonen og det matematiske objektet er det samme (Duval, 2006).

2.5. Matematikkompetanse på 9. trinn

Algebraiske uttrykk er ofte veldig abstrakte, i tillegg til at det kan gjøres mange ulike transformasjoner. Dette kan være noe av grunnen til at elever synes dette er vanskelig (Brenner et al., 1997). Læreplanen i Norge legger stor vekt på representasjoner av både algebra og funksjoner. Når jeg skal se på matematisk aktivitet og forståelse er det naturlig å se på hva elevene burde kunne. Jeg har derfor tatt utgangspunkt i kompetansemålene i matematikk etter 10. trinn siden dette er overordnede mål for alle offentlige skoler i Norge.

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne:

- lage funksjonar som beskriv numeriske samanhengar og praktiske situasjonar, med og utan digitale verktøy, beskrive og tolke dei og omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar, som grafar, tabellar, formlar og tekstar

(Utdanningsdirektoratet, 2013b)

Oppgaven elevene jobber med krever at elevene har en viss kompetanse innenfor dette kompetansemålet. Da spesielt det å kunne veksle mellom ulike representasjoner av funksjoner.

I innledningen så vi at sammenlignet med andre referanseland så gjør vi det dårligst i algebra på 9. trinn i TIMSS-undersøkelsen. For å bestemme hvilken kompetanse elevene hadde i den undersøkelsen lagde TIMSS kompetansenivå fra lavt nivå til avansert nivå innenfor matematikk på 9. årstrinn. Under er de kompetansekarakteristikkene som har med algebra å gjøre. På det laveste nivået skal elevene ha noe kunnskap om tall og enkle grafer. Dette ser jeg da på som enkle lineære grafer. På middels nivå skal elevene ha mer kunnskap om grunnleggende matematikk i flere situasjoner. De har noe kunnskap om lineære uttrykk og er i stand til å lese og tolke data i diagrammer og tabeller. På høyt nivå må elevene kunne matematikk på relativt komplekst nivå og vise forståelse i ulike situasjoner. Det innebærer å løse oppgaver der ulike tall og operasjoner inngår, kunne grunnleggende prosedyrer for å løse algebraiske uttrykk og analysere data ut ifra mange grafiske representasjoner. På det høyeste nivået, avansert nivå må eleven kunne anvende matematikk og resonnere matematisk når får ulike typer problemløsningsoppgaver. Elevene kan løse førstegradslikninger, utrykke generaliseringer og kunne begrunne svarene sine. I TIMSS-undersøkelsen 2015 hadde elevene på 9. trinn i gjennomsnitt en poengsum som tilsvarer rett over lavt nivå i kompetansenivåene til TIMSS (Bergem et al., 2016).

3.0. Metodekapittel

3.1. Mål med oppgaven og kvalitativ forskningsmetode

«Begrepene vitenskap og metode henger nøye sammen» (Dalland, 2007a, s. 80). Allerede fra starten av oppgaven var det viktig med en metodisk tilnærming til forskningsprosjektet. I dette kapitlet vil jeg beskrive og begrunne de valgene som er gjort med tanke på de ulike delene av oppgaven. Forskningsprosessen deles ofte inn i fire faser. Forberedelse, datainnsamling, dataanalyse og rapportering (Christoffersen & Johannessen, 2012). Mitt forskningsprosjekt har hatt samme fire faser som nevnes her og vil bli beskrevet videre i dette kapitlet.

Veien mot en problemstilling begynte tidlig i skoleåret da jeg satte meg ned og så på ulike temaer jeg hadde interesse av. Representasjoner ble det temaet jeg til slutt bestemte meg å jobbe ut ifra. Videre ble det en del lesing av artikler og eksisterende teori for å skaffe meg kunnskap om temaet og finne inspirasjon til en problemstilling. Fremdeles var tankeprosessen ganske flytende og etter en gruppediskusjon fikk jeg øynene opp for oppfatning og forståelse av matematikk. Dette ble brukt som utgangspunkt i arbeidet videre.

Målet mitt med oppgave var å finne ut hvilken oppfatning og forståelse av funksjoner som kom til syne i elevenes arbeid med representasjoner av funksjoner. Kvalitative forskningsmetoder søker å utforske det indre i deltakerne og hvordan meninger er formet. Metodene er også veldig åpne og prosessen endrer seg ofte undervegs etter hvilket datamateriale som er funnet (Corbin & Strauss, 2015). Dermed var det ikke et vanskelig valg å gå for en kvalitativ forskningsmetode når arbeidet med dette forskningsprosjektet startet.

Innen kvalitative forskningsmetoder er deltagende observasjon blitt en av de mer sentrale (Fangen, 2004). Deltagende observasjon frembringer engasjement hos forskeren i arbeidet elevene holder på med. Derfor er det vanskelig å være helt nøytral. Det er hele tiden valg som må tas ut ifra det som skjer. Fangen (2004, s. 28) beskriver deltagende observasjon som «innsamling av data ved å delta i det daglige livet til de menneskene du studerer, og å se på hvilke situasjoner de går inn i, og hvordan de oppfører seg i dem». Metoden omfatter også ikke dagligdagse situasjoner og hendelser. Når forskeren driver deltagende observasjon er det to handlinger som skjer samtidig. Man må både delta og observere. Vi kan da si at deltagende observasjon strekker seg fra å kun delta til å kun observere. Det å finne en god måte å kombinere disse to er viktig når man bruker deltagende observasjon som forskningsmetode. Forskeren kan gå inn i klasserommet over tid og dermed bli en del av gruppen. På den andre siden av skalaen kan forskeren gå inn mer som en observatør, men risikerer da å ikke forstå den interne kommunikasjonen i gruppa. I mitt forskningsprosjekt har deltagende observasjon vært sentralt. Dette har vært en inngang til mye av det datamaterialet jeg til slutt har endt opp med. Under «3.4.2. Gjennomføringen» i dette delkapitlet vil min rolle som forsker bli beskrevet også med tanke på hvor deltagende jeg var til enhver tid.

Ved bruk av deltagende observasjon som forskningsmetode vil man sitte igjen med en førstehåndserfaring med datamaterialet. Selv om inntrykkene kan være vanskelig å sette ord på vil likevel forskerens forståelse bli preget av situasjonen. Noe som videre gir et bredt utgangspunkt i hvordan materialet tolkes og analyseres (Fangen, 2004).

Cohen, Manion, Morrison og Bell (2011) påpeker at mange forskere dropper mye tid med elevene nettopp på grunn av tidsbruken. Det blir også samlet inn gode data på kortvarige prosjekter hvis temaet er avgrenset, selv om man ikke får testet ut forskningsproblemet i ulike situasjoner over tid. I dette forskningsprosjektet blir det kun lagt fokus på en undervisningstime nettopp på grunn av tidsbruk og tilgang til skole. Det ble også antatt på forhånd at en time skulle skaffe meg nok datamateriale.

3.2. Læringssyn

To viktige deler av den norske læreplanen i matematikk innebærer at elevene skal ha muntlige ferdigheter og regneferdigheter. Muntlige ferdigheter går ut på at elevene skal kunne skape mening gjennom å lytte, tale og samtale om matematikk. De skal kunne argumentere, drøfte problem og løsninger, strategier og bruke et presist matematisk språk. Å kunne regne i matematikk må elevene kunne bruke symbolspråk, ulike framgangsmåter og strategier til problemløsningsoppgaver, praktiske, dagligdagse og matematiske problem. Man må kunne kjenne igjen og beskrive matematiske situasjoner og metoder for å kunne løse ulike problemstillinger. Videre går utviklingen gjennom å kunne enkel tallforståelse og kunne løse enkle problem til å løse et variert utvalg av mer komplekse problemer (Utdanningsdirektoratet, 2013a).

Den norske læreplanen har et sosiokulturelt syn på læring og da er det samarbeidende mennesket viktig. Personlighet og identitet utvikler seg i samspill med andre. Mennesket former omgivelsene samtidig som de blir formet av den (Utdanningsdirektoratet, 2013). Ut ifra et sosiokulturelt syn på læring valgte jeg å ta utgangspunkt i en gruppesamtale når jeg skulle samle inn data. Veldig enkelt kan vi si at dette synet på læring ser på samspillet mellom individet og kollektivet. Når elevene deltar i kommunikasjon oppstår muligheten til å finne nye måter å tenke, resonnere og handle på. Tenkningen og diskusjonen er med på å opprettholde og utvikle den forståelsen vi i felleskapet sitter med (Säljö & Moen, 2001). I enhver situasjon har elevene mulighet til å ta til seg og overta kunnskap i samspill med andre.

Vygotskij, Cole, John-Steiner, Scribner og Souberman (1978) beskriver hvordan man kan se på utvikling og læring med begrepet den nærmeste utviklingssonen. Det er ikke bare interessant å se på hvilken kompetanse en elev allerede innehar, men også hvilken potensiell forståelse eleven har på dette tidspunktet. En elev kan i samspill med andre elever kunne bevege seg innenfor disse ulike sonene. I den nærmeste utviklingssonen vil da den mer kompetente veilede den mindre kompetente.

Et av mine virkemiddel får å få tak i elevenes oppfatning og matematiske forståelse var diskusjon. Dette ved at elevene ble oppfordret til å komme med forklaringer av hva de gjorde. I en slik situasjon vil elevene bevege seg innenfor ulike utviklingssoner og kunne prøve sine argumenter med de andre elevene. Det kan derfor hende at de mindre kompetente elevene beveger seg inn i den nærmeste utviklingssonen ved hjelp av mer kompetente elever. Ulikhetene blant utvalget av elever kan da i diskusjonen tenkes å utlignes til en viss grad.

3.3. Kontekst og utvalg

Innhenting av data ble gjennomført i en 9. klasse ved en ungdomsskole. Grunnen til at jeg brukte et utvalg fra 9. klasse var at de har gått igjennom enkle funksjoner og representasjoner av disse tidligere. Jeg hadde også sett på læreplanen og kompetansemålene etter 10. trinn samtidig som jeg gikk inn i matematikkbøkene til de ulike trinnene for å se hva fokuset var der. Jeg kontaktet skolen via E-post og fikk svar fra to lærere som var veldig behjelpelig med å stille elevene sine til disposisjon.

Jeg ønsket at utvalget skulle være relativt tilfeldig. Dette for å kunne tenke seg at det er et mest mulig representativt utvalg og at det vil finnes flere liknende tilfeller andre steder i Norge. Siden jeg var inne i klassen kun en gang var det viktigere for meg at utvalget ble plukket ut på bakgrunn av at elevene hadde gode muntlige ferdigheter. Dette for å være sikker på at det ville bli en diskusjon og at jeg ville ende opp med noe datamateriale. Etter en samtale med kontaktlærer om kriteriene for utvalget ble fire elever, to jenter og to gutter plukket ut til å være med på forskningsprosjektet.

Elevene ble gjennom samtykkeskjema og av meg selv informert om at det å være deltager innebar frivillighet og muligheten til å trekke seg på ethvert tidspunkt. Elevene ble da tatt med til et eget grupperom der jeg selv forklarte situasjonen. Det at de var deltakere i et forskningsprosjekt og at jeg ønsket at de skulle stå for det meste av diskusjonen og praten. De skulle få noen oppgaver de skulle løse og diskutere i grupper på 2 og 2 og alle 4. Dette i håp om at alle elevene skulle bidra med sine meninger samtidig som de skulle få muligheten til å forklare løsningen sin til alle på gruppa. Når elevene kom inn i grupperommet satte de to jentene seg på den ene siden av bordet og de to guttene på den andre siden av bordet. Jeg antok da at det å dele de to gruppene inn etter kjønn ville være en grei løsning for å få mest mulig diskusjon. Siden jeg ikke hadde noen relasjon til elevene fra før så brukte jeg de 10 første minuttene på å bli litt kjent med elevene og løse opp stemningen litt. Deretter varte arbeidet med oppgavene i 45 minutter før vi avsluttet med en samtale om hvordan de syntes det hadde vært å være med på forskningsprosjektet. Økta varte til sammen i en klokketime.

Som forsker prøvde jeg å framstå mest mulig menneskelig samtidig som jeg var helt åpen om situasjonen. For meg føltes situasjonen ganske naturlig og trygg da jeg har erfaring fra både vikariat og praksis der jeg ikke har kjent elevene så godt. Målet var da å smitte mest mulig av tryggheten og roen over på elevene. Med dette hadde jeg som mål ufarliggjøre situasjonen og dempe effekten av at det å bli observert i et forskningsprosjekt for elevene kunne påvirke hvordan de oppførte seg. Mer om dette kommer under utfordringer og etiske spørsmål der jeg stiller spørsmål ved forskningseffekten (Dalland, 2007).

3.4. Gjennomføringen

3.4.1. Forarbeid

Etter at tema og en foreløpig problemstilling var satt måtte det sendes inn en søknad til personvernombudet for forskning (NSD) der jeg beskrev prosjektet mitt og ble forsikret om hvilke forhåndsregler jeg måtte ta når jeg samlet inn data og hvordan dataen ble behandlet. Allerede her ble det satt en del rammer for forskningsprosjektet om hvordan det kunne gjennomføres. Spesielt med tanke på hvilke data som kunne samles inn. Jeg søkte derfor om å få ta både lyd og videoopptak, samle inn elevarbeid og informerte om jeg skulle drive deltagende observasjon. Et av kravene til NSD var at jeg måtte lage et samtykkeerklæringsskjema som skulle sendes med elevene hjem til foreldrene. Her var målet å gi både foreldrene og elevene informasjon om prosjektet å få deres samtykke til deltakelse i form av en signatur. Etter at søknaden til NSD ble sendt var det bare å kontakte en skole der jeg fikk positiv respons ganske kjapt. En oppgave som vil bli beskrevet senere i kapitlet ble planlagt og en pilottest ble avtalt med lærerne.

Pilottesten var med på å gi meg erfaring med de oppgavene jeg hadde laget slik at jeg kunne gjøre eventuelle endringer til selve datainnsamlingen. Det var også viktig for meg som forsker å øve på situasjonen og det å drive deltagende observasjon på forhånd. Det gjaldt både hvilke notater jeg skulle ta, hvordan jeg kunne drive diskusjonen framover uten å gi de for mye svar og hvilke regler elevene måtte holde seg innenfor (Cohen et al., 2011). Et annet mål med pilottesten var å finne ut om oppgavene jeg hadde laget var for vanskelig eller lette for gruppen deltakere. Den siste oppgaven var litt annerledes enn de to første og hadde ikke ett riktig svar. Elevene hadde da litt problemer med å skjønne hva det ble spurt etter og at elevene ikke hadde vært borti denne type oppgave før. Jeg måtte da tenke over om ordlyden i oppgaven burde endres. Mer om dette kommer inn under analyse av oppgavene senere i dette delkapitlet. Etter å ha tenkt litt rundt ordlyden i oppgaven selv, samt en samtale med veileder bestemte jeg meg for å beholde oppgaven slik den var. Dette for at en endring i kontekst og variasjon i tekstoppgavene kunne være med på å gi meg mer og bedre data.

Det var også interessant å se om utvalget av deltakere fungerte greit. Både med tanke på antall deltakere, sammensetningen og hvilke ferdigheter jeg ønsket at de skulle ha. Gruppestørrelsen fungerte under pilottesten bra da jeg fikk en todelt diskusjonsdel på hver oppgave. Først diskuterte elevene oppgavene to og to før de delte sine erfaringer sammen. Da fikk jeg en diskusjon der elevene kunne prøve ut sine argumenter ovenfor den andre gruppa. Oppgavene jeg laget hadde elevene mulighet til å mestre på egenhånd samtidig som de ble utfordret til å tenke på sammenhengen mellom oppgavene og hvorfor de løste oppgaven slik.

3.4.2. Gjennomføringen

Når jeg gjennomførte datainnsamlinga bestemte jeg meg for å kjøre samme opplegg som ved pilottesten. Både ordlyden i oppgavene og utvalget ble det samme. En endring jeg gjorde var å la elevene bruke kalkulator for å slippe og bruke så mye tid på hoderegning. Jeg valgte istedenfor å bruke mer tid på diskusjon rundt elevenes løsning for å kaste lys over deres forståelse.

Vi startet med oppgave 1 som vi gjorde felles. Der var jeg mer delaktig for å drive samtalen framover og hjelpe elevene. Oppførselen min der var dermed mer som en vanlig lærer og ikke som en forsker. Dette gjorde jeg for å gjøre elevene mer trygge på de to neste oppgavene. På de to neste oppgavene trakk jeg meg mer tilbake og observerte. Min rolle som deltagende observatør vil nok i mitt tilfelle ligge nærmere observatørrollen enn deltagende. Det er veldig vanlig som deltagende observatør å veksle slik mellom rollen som observator og deltager (Fangen, 2004). Jeg satte meg selv i en posisjon der elevene sto for mesteparten av diskusjonen, mens jeg stilte enkelte spørsmål underveis for å prøve og drive diskusjonen framover. Hadde også notert meg noen spørsmål som jeg ønsket å stille på slutten av økten. Disse handlet om hvorfor svaret var riktig og hvilken sammenheng de ulike løsningene hadde.

Når man driver deltagende observasjon er det ofte en fordel å ta videoopptak (Cohen et al., 2011). Man må passe på at kameraet har en god vinkel. Da kan materialet analyseres veldig grundig og man kan se opptaket flere ganger. Forskeren er dermed ikke like avhengig av forberedelser og et satt teoretisk rammeverk på forhånd. Ulempen med videoopptak er at elevene kan oppføre seg annerledes når de vet at de blir filmet og dermed føle litt angst rett og slett (Cohen et al., 2011). For å sikre meg tok jeg både video- og lydopptak. Dette for å være helt sikker på at jeg fikk med meg diskusjonen i de ulike gruppene.

3.4.3. Etter datainnsamling

Rett etter datainnsamlingen satte jeg meg ned og tok noen feltnotater om diskusjonen. Transkripsjonen ble også påbegynt og jobbet jevnt med over en lang periode. Når jeg transkriberte ble både videoopptak, lydopptak og elevenes svar på papir brukt. Dette for å mest mulig forstå sammenhengen mellom det som ble sagt og det som ble gjort. Etter at transkripsjonen ble ferdig satte jeg av litt tid hver dag for å se på den.

3.4.4. Tilleggsinfo

Elevarbeid ble tatt inn for å bedre forstå det som ble sagt i diskusjonen av hver enkelt elev. Hvis elevene henviste til noe de har gjort på arket kan jeg se på det for komme med en bedre tolkning av det som skjer og hvilken forståelse elevene har. Det å kombinere deltagende observasjon med andre datainnsamlingsteknikker er vanlig (Fangen, 2004). Som nevnt i teorien av Duval (2006) er det aktuelt å se på hva elevene faktisk gjør for å kunne si noe om deres forståelse. Derfor har elevarbeidet vært et viktig datamateriale å se på.

3.5. Oppgaven elevene ble gitt

Oppgaven som elevene ble gitt var på formen y=mx+b og ble inspirert av (Brenner et al., 1997). De mener at en viktig underliggende kognitiv ferdighet i algebra er «problem representation skills» (Brenner et al., 1997, s. 671). Dette innebærer for eksempel å mestre det å produsere og koordinere ulike representasjoner av funksjoner. Vi kan sammenligne dette med hva Duval (2006) sier er viktig for matematisk forståelse. Det å kunne veksle mellom enhver representasjon uten problemer. Brenner et al. (1997) sin studie har som mål å hjelpe elever til å få erfaring med å produsere og koordinere flere ulike representasjoner av funksjoner. Ifølge dem krever følgende oppgave problem representation skills innenfor funksjoner for å løse: «Mary Wong just got a job working as a clerk in a candy store. She already has $42. She will earn $7 per hour. How many hours will she have to work to have a total of $126?» (Brenner et al., 1997, s. 671). Denne oppgaven kan løses både ved hjelp av en likning, tabell eller en graf. Det ble også gjort instrukser på hvordan denne oppgaven skulle løses. Lag et diagram, tabell eller en graf som representerer problemet og lag en likning som representerer problemet. Hvis elevene innehar problem representation skill vil de være bedre i stand til å løse oppgaver som denne (Brenner et al., 1997).

Jeg har dermed stilt som krav at oppgaven som blir gitt til elevene kan løses ved hjelp av ulike representasjoner og også gå igjennom flere ulike representasjonssystem beskrevet av Duval (2006). Oppgavene er laget slik at elevene kan løse den på flere ulike måter. Både ved hjelp av en tabell, graf og en likning for å få et svar. Elevene ble ved de to første oppgavene bedt om å løse oppgaven ved hjelp av en tabell, så en graf og fikk til slutt spørsmålet om det var andre måter å løse oppgaven på. Den siste oppgaven var litt annerledes. Der skulle elevene beskrive forholdet mellom fart og tid ved hjelp av en valgfri representasjon. Dette er en litt mer åpen oppgave der man ikke får en enkelt verdi som svar. Grunnen til at jeg hadde med denne oppgaven til slutt var for å se om elevene forsto at de kunne bruke de samme representasjonene for å løse problemet. I tillegg var det interessant å se hvilken representasjon de foretrakk å bruke etter å ha jobbet spesielt med tabell og graf. En liten variasjon i hvordan tekstoppgaven ser ut kan være med på å utfordre elevene mer kognitivt og gi de erfaring med flere variasjoner innenfor et og samme representasjonssystem.

Ifølge (Utdanningsdirektoratet, 2013b) skal elevene kunne beskrive, tolke og omgjøre ulike representasjoner av funksjoner. De skal også kunne jobbe med likninger av første grad. Vanskelighetsgraden på oppgavene ble satt med disse målene i bakhodet. Siden utvalget var fra en 9. klasse brukte jeg pilottesten for å finne ut om oppgavene hadde passe vanskelighetsgrad. Noe jeg til slutt konkluderte med at oppgavene hadde.

3.5.1. Analyse av oppgaven

Oppgave 1 så slik ut:

Når du skal sende en pakke i posten koster det 140kr for å sende en pakke på 2kg og 700kr å sende en pakke på 10kg. Hvor mye koster det å sende en pakke på 6kg?

* Lag en tabell som løser oppgaven

* Lag en graf som løser oppgaven

* Er det andre måter å løse oppgaven på?

Oppgaven er hentet fra en hverdagssituasjon som går an å kjenne seg igjen i. Elevene blir spesifikt bedt om å løse oppgaven ved hjelp av en tabell, en graf og andre måter å løse oppgaven. Dette for å se hvordan elevene går fra en representasjon til en annen og hvilken forståelse av det matematiske objektet i de ulike representasjonene. Problemet ligner veldig på Brenner et al. (1997) sitt eksempel på en problemløsningsoppgave innenfor funksjoner. Forskjellen er ordlyden og verdiene som er med i oppgaven. Den har heller ikke en start verdi siden det vil koste 0 kr å sende en pakke på 0 kg. Istedenfor å spørre elevene om å løse oppgaven ved hjelp av en likning spør jeg om det er andre måter å løse oppgaven på. Erfaringer fra pilottesten var at elevene ofte ville løse oppgaven ved hjelp av aritmetiske operasjoner først så jeg trengte ikke å spørre spesifikt etter det. Min vurdering er dermed at elevene trenger problem representation skills for å bedre kunne løse oppgaven.

Oppgaven får elevene til å gjøre en overgang fra et semiotisk representasjonssystem til et annet flere ganger. Den krever også at man gjør flere behandlinger av representasjoner innenfor et og samme system. Ifølge Duval (2006) krever det mer kognitivt å gjøre en overgang fra et representasjonssystem til et annet enn det å gjøre behandling av representasjoner i samme system. Bare det å gå fra en tekstoppgave til å løse den med tall er vanskelig for mange elever. Det at det koster 140 kr å sende en pakke er hentet fra posten sine hjemmesider. Videre koster det 700 kr å sende en pakke på 10 kg for at funksjonen skal bli lineær. Denne oppgaven ble gått igjennom med mye hjelp fra læreren for å få elevene til å bli trygge på å diskutere og få i gang tankegangen.

Oppgave 2 var noenlunde lik oppgave 1, men her kunne elevene hatt litt flere framgangsmåter.

Oppgave 2:

Mari jobber i en sportsbutikk og tjener 165kr i timen. Når hun allerede har 250kr, hvor mange timer må hun jobbe for å få 2165kr?

* Løs oppgaven ved hjelp av en graf

* Løs oppgaven ved hjelp av en tabell

* Er det andre måter å løse oppgaven på?

I denne oppgaven elevene enten trekke fra det hun allerede har tjent fra det hun skal ha eller legge det til fra starten av når de lager tabell eller graf. Dette for å variere litt hvordan oppgaven ser ut og se om elevene kjenner igjen at de kan løse den på samme måte som forrige oppgave. Her er konteksten helt lik Brenner et al. (1997) sin eksempeloppgave og har en startverdi å gå ut ifra. Instruksene som gis er de samme som i forrige oppgave og gis med samme begrunnelse. I denne oppgaven fikk som nevnt elevene mindre hjelp av læreren. Grunnen til det er for at jeg ville se om elevene klarte å bruke flere representasjoner uten hjelp. Dette er viktig for å se at elevene mestrer å bruke kunnskap utenfor en smal kontekst (Duval, 2006). Denne oppgaven som den forrige krever også at elevene gjør overganger mellom flere ulike representasjonssystem og stiller dermed større kognitive krav enn om oppgaven bare hadde inneholdt behandling av representasjoner innenfor samme semiotiske representasjonssystem.

Oppgave 3:

En bil kjører med jevn fart i 80 km/t.

* Hvordan kan vi vise/beskrive forholdet mellom avstand og tid?

* Begrunn svaret i diskusjon, hvorfor er dette riktig?

Spørsmål 3 er formulert litt annerledes enn de foregående oppgavene, men kan løses på akkurat samme måte. Hvis elevene ikke har god nok relasjonell forståelse kan det hende at de ikke er i stand til å løse oppgaven når spørsmålet endres (Skemp, 1976). Her spørres det ikke om noe spesifikt svar, men hvordan de kan vise sammenhengen. Oppgaven er dermed enda mer åpen enn de forrige. Her er det ingen instrukser om hvilken representasjon elevene skal bruke. Poenget med denne oppgaven er å finne ut om elevene ser sammenhengen med de andre oppgavene og se hvilken representasjon de velger å bruke.

På alle oppgavene kan elevene både gjøre kongruente og ikke kongruente overganger mellom de ulike semiotiske representasjonssystemene. Hvilken av disse overgangene som kommer til syne vil i stor grad bestemme hvilke kognitive krav som stilles til oppgaven og den matematiske aktiviteten. Verdiene kan organiseres likt i de ulike semiotiske representasjonssystemene eller de kan organiseres ulikt. Dette vil da også være med på å bestemme hvilken forståelse av matematikken som kommer til syne (Duval, 2006).

3.6. Bearbeiding og analyse av datamaterialet

Når det kvalitative datamaterialet skal analyseres må det bearbeides og tolkes (Christoffersen & Johannessen, 2012). I mitt datamateriale vil det si å tolke både, lyd, video, transkripsjon og elevarbeid. Diskursanalyse har i senere tid kommet med viktige bidrag for å forstå barns tenkning og oppfatning. Ved å sette barnas utsagn opp imot en generell modell som er nivådelt kan forskeren si noe om hvilket nivå barna er på. Diskursanalyse krever en nøye gjennomlesing og tolkning av datamaterialet (Cohen et al., 2011). Til slutt vil disse tolkningene bli satt sammen til en ny helhet, ofte i lys av teori.

Først gikk jeg igjennom hele datamaterialet for å få et overblikk og et inntrykk av hvilke funn jeg kunne finne. På dette stadiet så jeg også på feltnotatene mine for å se hvilke inntrykk jeg satt igjen med etter observasjonen. Dette inntrykket vil naturlig nok ha en innflytelse på den endelige tolkningen, selv om den kan endre seg desto mer man arbeider med dataene (Christoffersen & Johannessen, 2012). Etter å ha skaffet seg et helhetsinntrykk jobbet jeg med å skille ut det som kunne være relevant for problemstillingen. Da brukte jeg en markeringstusj og gikk systematisk i gjennom datamaterialet for å markere ulike utsagn og utdrag i transkripsjonen som jeg synes var interessant. Jeg hadde på forhånd skrevet og lest meg opp på en del teori og brukte fargekoder for å skille hvilke utdrag jeg kunne tolke med en spesiell teori.

Analyse av kvalitative data blir nesten alltid fortolkende (Cohen et al., 2011). I min analysedel har jeg tatt med utdrag som kan være med å belyse problemstillingen. Disse har jeg beskrevet, tolket og drøftet ut ifra teori. Samtidig som jeg gikk igjennom analysen har jeg hele tiden gått tilbake til teorien for å kunne bestemme hvilke utsagn som kunne være med på å si noe om elevenes oppfatning av matematikken. Jeg har dermed analysert, sett på litteratur og deretter analysert i en gjentagende sirkel. Det er denne jobben som har gitt meg grunnlaget til å si noe om elevenes oppfatning og forståelse av matematikken.

Jeg har i hovedsak brukt to teoretiske rammeverk for å si noe om elevenes oppfatning og forståelse av funksjoner. Det første er Sfard (1991) som sier noe om forholdet mellom to typer oppfatning og hvordan læring av ulike matematiske konsept blir bygd opp. Dette har da endt i beskrivelsen av tre stadier som kan brukes til å analysere og si noe om elevers oppfatning og veien til å forstå et matematisk konsept. Sfard's rammeverk er en teoretisk analyse og dermed ikke alltid lett å koble til det som skjer i praksis. Elevene kan løse oppgaven med flere ulike metoder og hver metode stiller ulike kognitive krav til elevene. Derfor har jeg brukt Duval (2006) som har laget et rammeverk for å analysere de ulike kognitive kravene i matematisk aktivitet for å bedre kunne si noe om hvilken forståelse elevene har også. Duval sitt rammeverk er laget på bakgrunn av flere av hans empiriske studier og er mer operasjonalisert enn Sfard sitt og dermed lettere å koble inn mot empiri. Jeg vil dermed prøve å se de to rammeverkene i sammenheng og bruke Duval (2006) til å kunne si mer om hvilket stadium elevene er på i Sfard (1991).

Jeg har valgt å presentere de delene av transkripsjonen som belyser problemstillingen. I tillegg har jeg vist fram enkelte bilder av elevarbeid som var interessante. Her har jeg valgt å kun ta med bilder der noe ble gjort annerledes enn de andre og kun tatt med bilde fra en av elevene hvis alle elevene hadde gjort det samme. Selv om begrunnelsen og argumentasjonen til elevene har variert har mye av elevarbeidet vist seg å være det samme. Elevarbeidet blir dermed sett i sammenheng med hva elevene kommer med av forklaringer. Elevenes forklaringer har gitt meg innblikk i prosessen mot det ferdige elevarbeidet.

En fordel med å bruke videopptak og lydopptak er at jeg kan se opptaket flere ganger og dykke dypere inn i samtalen (Cohen et al., 2011). Ved å se på videoopptaket og høre på diskusjonen flere ganger, samt transkribere er det lettere for meg å sammenligne dataen med teori. Det er først når jeg har sett på og gjennomgått det datamaterialet jeg allerede har samlet inn at jeg vet om jeg må samle inn mer data. Datamaterialet ble vurdert tilstrekkelig og det ble dermed ikke funnet noen grunn til å samle inn mer data til min studie. På videoopptaket har kameraet en god vinkel og det er mulig til en viss grad å se ansiktsuttrykk. Det kan jeg bruke til å si mer om elevene ser usikre ut, hvor lang tid de bruker på forklaringene og hvor mye de nøler. Konteksten blir tydeligere når jeg kan se igjen videoopptaket flere ganger. Likevel vil observasjonsnotatene bli viktige. Der er min forståelse av situasjonen notert ned rett i etterkant av observasjonen og vil bli viktig når dataen skal tolkes, analyseres og diskuteres rundt validitet og reliabilitet.

Det er vanskelig å se på elevers oppfatning direkte og derfor må man se på ytre karakteristikker som holdninger, oppførsel og matematiske ferdigheter (Sfard, 1991). For å si noe om elevenes forståelse er det naturlig å se på det elevene faktisk gjør (Duval, 2006). Når datamaterialet ble analysert var både diskusjonen og elevarbeidet som nevnt viktige å se på. Alt elevene sa i diskusjonen som kunne si noe om deres forståelse ble analysert og drøftet opp imot teorien.

3.7. Utfordringer og etiske spørsmål

Ved å gå inn i gruppen i et så kort tidsrom som en klokketime risikerer jeg ifølge Fangen (2004) å ikke forstå den interne kommunikasjonen i gruppa. Jeg kan for eksempel ikke forutse hvordan elevene oppfører seg før jeg møter dem og vet heller ikke hvordan deres samhold påvirker situasjonen. Tidsbruken kan problematiseres på flere ulike måter. Cohen, Manion og Morrison (2011) skriver at det kan være naturlig å stoppe datainnsamling når den har nådd teoretisk metning. Dette er for meg vanskelig å se uten å et fullt overblikk over det teoretiske rammeverket jeg benytter meg av. Jeg har derfor over gjennom arbeidsprosessen gått inn i datamaterialet og tilbake til teori i en sirkel hele veien for å finne ut om jeg hadde nok data.

Elevene var fullt klar over at de ble observert både av meg og ved hjelp av video/lydopptak. Dette påvirket nok elevene og vi kan se «forskningseffekten» som Dalland (2007) skriver om. Dette innebærer at mange oppfører seg annerledes når de vet at de blir observert enn om de ikke hadde visst det. Det kan hende at elevene svarer på spørsmål og sier noe de tror forskeren vil høre. I mitt forskningsprosjekt har jeg prøvd å dempe denne effekten så mye som mulig gjennom valg som ble tatt i datainnsamlingsøkta. Dette var som nevnt tidligere blant annet at jeg tok meg 10 minutter før økta for å bli litt kjent med dem og ufarliggjøre situasjonen. I tillegg oppførte jeg meg relativt folkelig og rolig undervegs i økta. Slik som jeg tolket det prøvde en av elevene veldig hardt uten helt å få det til, mens to elever var ganske stille den første tiden. Etter hvert løsnet praten litt og det kan virke som forskningseffekten spilte mindre inn på elevene. Likevel er det nok sannsynlig at situasjonen ville vært annerledes om elevene kjente meg fra før. For å unngå dette kunne jeg har vært med i klasserommet og miljøet over tid. Det hadde i mitt tilfelle vært for tidkrevende.

3.7.1. Validitet og reliabilitet

Det å vurdere validiteten til datamateriale samlet inn med deltagende observasjon som forskningsmetode er ifølge Fangen (2004) være lettere enn for eksempel et spørreskjema. Elevens oppførsel er viktig når validiteten skal bestemmes. Dette er noe jeg skrev om i observasjonsnotatene både underveis og i ettertid av observasjonen. Siden det ble tatt videoopptak har jeg flere ganger kunne gått inn og sett på elevenes oppførsel. Dette har til sammen vært med på å gi meg grunnlaget til å si noe om oppgavens validitet.

En annen ting jeg må tenke over er hvilke briller jeg som forsker bruker når jeg observerer. Det er en rekke faktorer som bestemmer hva jeg ser, hvordan jeg ser det og hva jeg har bestemt meg for å se etter (Dalland, 2007). Jeg hadde et teoretisk rammeverk som jeg prøvde å se etter. Dette kan gjøre at jeg ikke ser viktige hendelser utenfor dette rammeverket. Videoopptaket og transkripsjonen kan hjelpe meg med å se nye situasjoner, men jeg må hele tiden tenke på hva som kan tolkes og regnes som bevis på det jeg forsker på. Som tilleggsmateriale til transkripsjonen av diskusjonen mellom elevene har jeg samlet inn elevarbeid. Det kan være med å støtte opp under mine tolkninger (Dalland, 2007).

Det er viktig at datamaterialet sier noe om forskningsproblemet da det er med på å bestemme datamaterialets gyldighet (Dalland, 2007). For meg er det vanskelig å si noe om dette uten å sette seg mer inn i datamaterialet. Jeg må spørre meg selv hele tiden hva som er relevant for mitt forskningsproblem. Siden forskningsspørsmålet handler om forståelse er det vanskeligere å få meg seg hvordan elevene gjør noe og hvilken forståelse som kommer til syne enn om jeg bare skulle funnet ut hvor ofte noe skjedde. Som Fangen (2004) påpeker har jeg tenkt å bruke annen forskning og teoretiske rammeverk som støtter de svarene jeg finner i mitt eget datamateriale. Disse rammeverkene er tidligere beskrevet i teorikapitlet.

I motsetning til validitet er reliabilitet vanskeligere å måle i et kvalitativt forskningsprosjekt. Mest sannsynlig vil to forskere tolke datamaterialet forskjellig og man kan da stille spørsmål om materialets reliabilitet. To forskere kan ha ulik bakgrunn og bruke ulike teoretiske rammeverk. Jeg vil dermed prøve mine tolkningers reliabilitet ved å begrunne hvorfor jeg har tolket det på denne måten for leseren (Fangen, 2004). Mine tolkninger vil bli prøvd og tolket med det teoretiske rammeverket som bakgrunn. Jeg vil også prøve å tolke like hendelser likt (Dalland, 2007b).

3.7.2. Etiske spørsmål

Det å ta etiske forholdsregler er viktig når man bruker deltagende observasjon som forskningsmetode (Cohen et al., 2011). Søknad til personvernombudet for forskning ble sendt inn midt i oktober og måtte bli godkjent før jeg kunne starte selve datainnsamlingen. I søknaden til personvernombudet for forskning måtte jeg ta en rekke valg angående masteroppgaven min. Hva prosjektet handlet om, hvilken metode jeg bruker og en skisse til samtykkeerklæring. Etter å ha fått svar ble en del små endringer foreslått for å tydeliggjøre for forskningsdeltakerne hva de deltok på og hvilke rettigheter de har. Da påpekte de viktigheten av å gi de som skal observeres grundig informasjon om prosjektet, hva det innebærer å bli observert, hvordan data samles inn og hva som skjer med materialet (Dalland, 2007). Elevene selv var klar over at de kunne trekke seg fra undersøkelsen, men ut ifra de signalene jeg fikk fra både elevene og lærerne i ettertid virker ikke det sannsynlig.

Jeg kan oppleve et etisk dilemma når jeg skal vurdere og tolke datamaterialet. Det er viktig å passe på at analysen og tolkningene er godt begrunnet i et teoretisk rammeverk. Med den bakgrunnen kan et eventuelt kritisk blikk på hvordan elevene løser oppgavene rettferdiggjøres (Dalland, 2007). Det er ikke min hensikt å prøve og begrunne hvorfor elevene presterer slik de gjør da jeg ikke har noen data om verken lærere eller undervisningen til å kunne begrunne det i teori. Det jeg kan si noe om er hvilke erfaringer elevene kan ha nytte av for å få en bedre forståelse av matematikken siden dette er belyst i det teoretiske rammeverket.

Anonymisering er et viktig etisk dilemma jeg må ta forholdsregler på. Når jeg skal transkribere blir elevene anonymisert og vil få fiktive navn og skolen vil forbli hemmelig. Info som jeg må ha med slik som hvilket trinn og at det faktisk er elever jeg skriver om kan bidra til at personalet på skolen kjenner igjen hvilke elever det er snakk om. Siden jeg tok ut kun fire elever vet også lærerne til disse elevene hvilke elever det er snakk om. Som Dalland (2007) skriver er det at lokalmiljøet rundt objektene ofte forstår hvem det er snakk om et problem. Da blir det enda viktigere å ikke komme med for mye kritikk og å begrunne tolkningene sine nøye.

Det datamaterialet jeg har samlet inn er gradert informasjon helt til jeg har anonymisert det. Likevel vil jeg ta vare på videoen til prosjektets slutt og det er da viktig at jeg tar vare på videoopptaket på en sikker måte. Videoopptaket er sikret med passord både på fila og ved at datamaskinen er passordbeskyttet. Videoopptaket vil bli slettet etter prosjektets slutt.

4.0. Analysekapittel

I begynnelsen av denne oppgaven presenterte jeg følgende forskningsspørsmål: Hvilken oppfatning og forståelse av matematikk og funksjoner kommer til syne i deres arbeid med representasjoner av funksjoner?

Denne problemstillingen vil jeg prøve å finne et svare på i løpet av dette analysekapitlet. Målet mitt med dette kapitlet er dermed å se hvilken oppfatning og forståelse som kommer til syne gjennom elevenes diskusjon. I deres arbeid funksjoner og representasjoner av dem har jeg brukt Sfard (1991) til å analysere hvilken oppfatning som kommer til syne og hvilket stadium de er på i utviklingen av et matematisk konsept. Som støtte til det har jeg brukt Duval (2006) til å si noe om hvilke kognitive krav som stilles i måten de går gjennom de ulike representasjonssystemene på. I denne analysen har elevarbeidet og elevenes diskusjon og forklaringer vært viktig for å si noe om det som skjer.

Selv om det er utsagn av hver enkelt elev som blir analysert kommer disse utsagnene i samspill med andre. Ut i fra et sosiokulturelt syn på læring så er det en naturlig del av analysen å ta høyde for at elevene jobber sammen og hva de klarer sammen. Det elevene sier i diskusjonen vil være mitt verktøy for å få tak i hvilken oppfatning og forståelse av matematikken som kommer til syne.

I analysekapitlet har jeg delt opp analysen i flere ulike deler. Først har jeg dratt fram interessante utsagn samt elevarbeid. Dette har jeg tolket og kommentert i lys av teori. Til slutt har jeg en del der jeg har oppsummerer og presenterer hvilke funn som går igjen i analysen. Får å få tak i elevenes oppfatning og forståelse av matematikken har jeg valgt å presentere noen lengre utdrag, noen kortere utdrag og enkeltutdrag elevene har kommet med. Min rolle som deltakende observatør har vært med på å påvirke situasjonen og elevene. Det er derfor en del av analysearbeidet å ta høyde for dette.

4.1. Veien til en løsning

6. Elev 4: vi kan lage en tabell og så skriver vi først, errrhm, vi skriver kilo for kilo opptil 10 kilo og så skriver vi prisen ved siden av, hvor mye det koster per kilo. Så vi må først finne ut hvor mye det koster for en kilo.

Her gir elev 4 en forklaring på hvordan hun steg for steg ville løst oppgaven. Jeg vil derfor anta at hun er kjent med hvordan man representerer løsningen med en tabell. Hun er dermed også kjent med prosessen for hvordan man lager en tabell som passer til denne konteksten. Oppgaven spør etter hvor mye det koster å sende en pakke på 10 kg og det ser ut til at eleven forstår at hun ikke trenger å lage tabellen lenger enn til 10 kg for å få et svar, noe hun sier i forklaringen. Eleven viser da gjennom muntlig tale og elevarbeid en prosessuell oppfatning av matematikk. Dette kommer spesielt til syne i elevens steg for steg forklaring på hvordan oppgaven ble løst. Ifølge Sfard (1991) må man kunne utføre enkle matematiske operasjoner for å være på stadiet internalisering. Eleven er her i stand til å utføre og beskrive verbalt oppgaven slik hun fikk beskjed om. I dette utsagnet ligger det ingen tegn på at eleven har kommet til stadiet kondensering da dette krever mer helhetlig tenkning. Det er først når prosesser har blitt kortet ned og elevene mestrer å gå mellom flere ulike representasjoner at vi kan nærme oss kondenseringstadiet. Det er som Sfard (1991) skriver at det er et kvantitativt steg som skal til. Det vil si at elevene må kunne vise at de mestrer det flere ganger i ulike kontekster. Ofte er det en prosess som tar veldig lang tid (Sfard, 1991).

Eleven må her gå fra en tekstoppgaverepresentasjon til å representere oppgaven i en tabell. Dette går igjen via en tredje representasjon der eleven regner ut tallene som skal i tabellen i en egen regneprosess. I tillegg blir elevene utfordret av læreren til å forklare hva de gjør og hvordan de løser oppgaven, noe som kan regnes som en fjerde representasjon. Den muntlige forklaringen til eleven bærer preg av at det er en gjenfortelling av regneprosessen. Dermed kan det stilles spørsmål om det kan sees på som en forklaring. Elevenes gjenfortelling kan brukes til å se steg for steg hvordan elevene har kommet fram til svaret eller det ferdige produktet de har på papiret. Det er dermed viktig å se det sammen med elevarbeidet for å kunne analysere det elevene sier. Selv om det brukes flere ulike representasjoner er eleven kun innom to semiotiske representasjonssystem. Først går eleven fra en skrevet oppgave i et representasjonssystem til å representere oppgaven med symboler i en regneprosess og en tabell i et annet representasjonssystem. Her skjer det da en kongruent overgang mellom to ulike representasjonssystemer. Grunnen til det er at de verdiene som er i tekstoppgaven går igjen og organiseres likt i tabellen. Duval (2006) påpeker at selv det å gå fra en tekstoppgave til å løse den med tall er utfordrende for mange elever. Eleven har akkurat i denne konteksten de kognitive kravene som skal til for å gjøre en kongruent overgang fra tekstoppgave til tabell. Dette er ifølge Duval (2006) noe de fleste mestrer.

Duval (2006) sier også at prestasjonen til elevene varierer ut ifra hvilket representasjonssystem de starter i og hvilket de går til. Det å gå fra en tekstoppgave til å løse oppgaven med tall finner vi igjen i flere lærebøker i norsk skole. I tillegg presiserer også et av kompetansemålene i matematikk etter 10. trinn at elevene skal kunne veksle mellom ulike representasjoner av funksjoner og deriblant tekster og tabeller (Utdanningsdirektoratet, 2013b). Innenfor det semiotiske symbolsystemet driver elevene kun med behandling av representasjoner av tall fra regneprosessen og over i tabellen. I tillegg nevnte jeg at elevens muntlige forklaring på hvordan hun løste oppgaven kan sees på som en fjerde representasjon. Ifølge Duval (2006) er det umulige å gå fra det semiotiske symbolrepresentasjonssystemet til forklare det muntlig uten bruk av symboler i språkrepresentasjonssystemet. Unntaket er at eleven kan gjenfortelle hva som gjøres i regneprosessen. Dette er noe det går an å kjenne igjen i linje 6 da eleven gjenforteller steg for steg hvordan hun gikk fram i regneprosessen ved hjelp av symbolene hun brukte.

4.2. Tabell?

Når elev 1 får spørsmål om å lage en tabell virker han med engang usikker på hva han skal gjøre og lager et koordinatsystem. Spørsmålet er da om eleven er kjent med hva en tabell er eller om han bare har rotet med begrepene. Eleven lager et stolpediagram på tavla som løser oppgaven og viser dermed at han kan prosessen med å lage stolpediagram. Det er ikke dermed sagt at han forstår det matematiske konseptet. Bare det at han vet hvordan han lager et stolpediagram til denne spesifikke konteksten. Prosessen går steg for steg noe som kan ligne på internaliseringstadiet. Prosessuell oppfatning av matematikken kommer også her til syne. Det er naturlig at elevene viser en prosessuell oppfatning av matematikken når de løser en oppgave siden veien til løsningen er en prosess (Sfard, 1991).

Oppgaven starter i et representasjonssystem i form av en tekstoppgave og går over i et semiotisk symbolrepresentasjonssystem når eleven skal regne ut verdiene som han vil ha med i stolpediagrammet. Et tredje semiotisk representasjonssystem blir tatt i bruk når eleven lager et stolpediagram. Eleven da han må være i stand til å bruke tre forskjellige representasjonssystem. Selv om eleven mest sannsynlig ikke forstår det matematiske konseptet med funksjoner så klarer han å utnytte sammenhengen mellom tallene i tabellen og tallene som skal være med i stolpediagrammet. Han skjønner dermed at tallene er de samme. Dette gjør at det blir en kongruent overgang av representasjonssystem og dermed ikke er like kognitivt utfordrende ifølge Duval (2006).

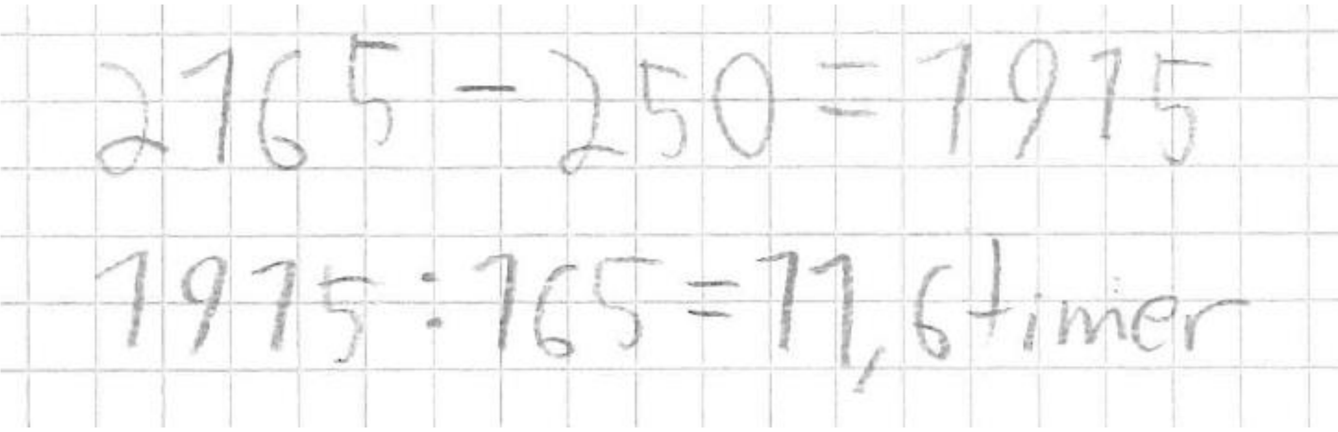
4.3. «gange 70 med 6»

32. Elev 1: går det ikke an å gange 70 med 6 da?

Her ser vi at elev 1 velger en annen måte å løse oppgaven på ved å gange 70kr med 6 kg. Eleven viser fortsatt ingen tegn på at han skjønner sammenhengen mellom de to representasjonene, men at han kan prosessen med å beregne svaret. På internaliseringstadiet til Sfard (1991) presiserer hun at ferdigheten med å løse funksjoner ved hjelp av en formel eller å kunne bruke variabelen til å finne løsningen er en del av stadiet. Elev 1 viser her evnen til å finne svaret ved å utnytte variabelen. Istedenfor å måtte innom tre representasjonssystemer går eleven her enkelt fra tekstoppgave til symboler. Dette er muligens den enkleste måten å komme fram akkurat til svaret på. Her skjer det en overgang i fra et system til et annet og en behandling av representasjonen for å løse oppgaven i det siste semiotiske representasjonssystemet. Dermed brukes overgangen mellom semiotisk representasjonssystem først og fremst for å komme over til det representasjonssystemet der det er enklest å gjennomføre behandling av representasjoner. I matematikk kommer ofte overganger mellom semiotiske representasjonssystem fram på denne måten (Duval, 2006). Her slipper eleven flere mellomregninger enn hvis han for eksempel skulle laget en tabell eller graf. Ifølge Duval (2006) krever det mindre kognitivt å holde seg innenfor et representasjonssystem.

4.4. «2165 minus 250»

83. Elev 2: Vi kan først ta 2165 minus 250 så får vi hvor mye vi skal ha, så 2165-250=1915. Så må vi dele det på 165.



Bilde 1, Elev 2 sin løsning av oppgave 2

Elev 2 løser her oppgaven sin ved hjelp av en beregningsprosess. Her ser vi også likheter med internaliseringstadiet til Sfard (1991) som påpeker at eleven viser at han kan enkle regneprosesser og finner løsningen ved å utnytte variabelen. Hun påpeker også at på neste stadiet faller mellomregninger ofte bort og i dette tilfellet er alle mellomregninger med som en del av prosessen.

Her kommer også overgangen mellom semiotiske representasjonssystem fram i form av at eleven går til det stadiet der det er lettest å gjennomføre behandling av representasjoner. Eleven går fra tekstoppgave til tallsymbol og bruker dermed to representasjonssystem for å løse oppgaven. Den muntlige forklaringen hans blir en ren gjenfortelling av prosessen. Selv om oppgaven spør om de kan løse oppgaven ved hjelp av en graf velger altså eleven å gå enklest vei. Dette kan være på grunn av at han ikke hadde lest oppgaven skikkelig. Noe han gir utrykk for senere i samtalen når han blir utfordret til å løse oppgaven ved hjelp av en tabell og en graf. Siden det er flere måter å representere løsningen på er det ikke feil å løse det slik eleven gjorde det. Det stiller ifølge Duval (2006) større kognitive krav å løse denne oppgaven ved hjelp av en graf da eleven må igjennom flere representasjonssystem for å finne løsningen. Begge gruppene løste denne oppgaven på samme måte. Hvis de får valget gjør de en overgang mellom semiotiske representasjonssystem for å komme seg til det representasjonssystemet der det er lettest å gjennomføre behandling av representasjoner. Dette gjør elevene i oppgave 2 da de går rett fra at problemet er representert med en tekstoppgave til å løse oppgaven med symbol, nærmere bestemt en aritmetisk beregning. Det kan hende at siden de satt på samme bord så ble de påvirket av hverandre, men det kan også si noe om hvilke tekstoppgaver av denne typen elevene har vært vant til å løse tidligere. Man kan tenke seg at de da med en gang ser hvordan oppgaven kan løses med en aritmetisk beregning.

Over har jeg vist til flere situasjoner som alle viser at elevene på dette stadiet sitter med en prosessuell oppfatning av matematikken som de nå holder på med. Prosessuell oppfatning kommer til syne i elevarbeid så lenge det er en prosess involvert (Sfard, 1991). Elevene viser at de er kjent med hvordan de løser oppgavene ved hjelp av representasjonene aritmetisk beregning og tabell. Fram til nå tyder det likevel på at elevene er på internaliseringstadiet. Men siden dette rammeverket kun er basert på en teoretisk analyse av forholdet mellom de to oppfatningene av matematikk blir det kun hypotetisk å plassere dem innenfor internalisering. Når elevene løser oppgaven ved hjelp av en tabell og en aritmetisk beregning så kommer naturlig nok prosessen fram mot svaret ekstra godt til syne. Dette kan også bidra mot internalisering-stadiet kommer godt til syne siden representasjonene i seg selv kan sees på som prosessuelle. Beregningen viser alle mellomregninger fram til svaret noe som kan hende er vektlagt at skal være med i matematikk. Tabellen i denne konteksten er en stige der elevene legger på 70 kroner for hver kilo i tabellen. Dermed kan det virke naturlig å se på begge representasjonene som en prosess. For å støtte opp under at elevene her viser at de er på internalisering-stadiet har jeg brukt Duval (2006) til å analysere hvilke kognitive krav elevene trenger for å løse oppgaven. Som diskutert over gjør elevene kongruente overganger mellom semiotiske representasjonssystem noe som ikke krever like mye kognitivt som overganger som ikke er kongruente. Dermed trenger ikke elevene like stor forståelse av funksjoner og de ulike representasjonssystemene for å løse oppgaven. Oppgaven legger heller ikke opp til at elevene skal jobbe med ulike variasjoner innenfor hvert enkelt representasjonssystem slik at deres mulig dypere forståelse ikke kommer like godt til syne.

4.5. «Ja, en stigende graf»

Elev 1:

57. Lærer: hvis dere skal lage en graf her nå da?

58. Elev 1: ja, en stigende graf

59. Lærer: ja, det blir jo en stigende graf

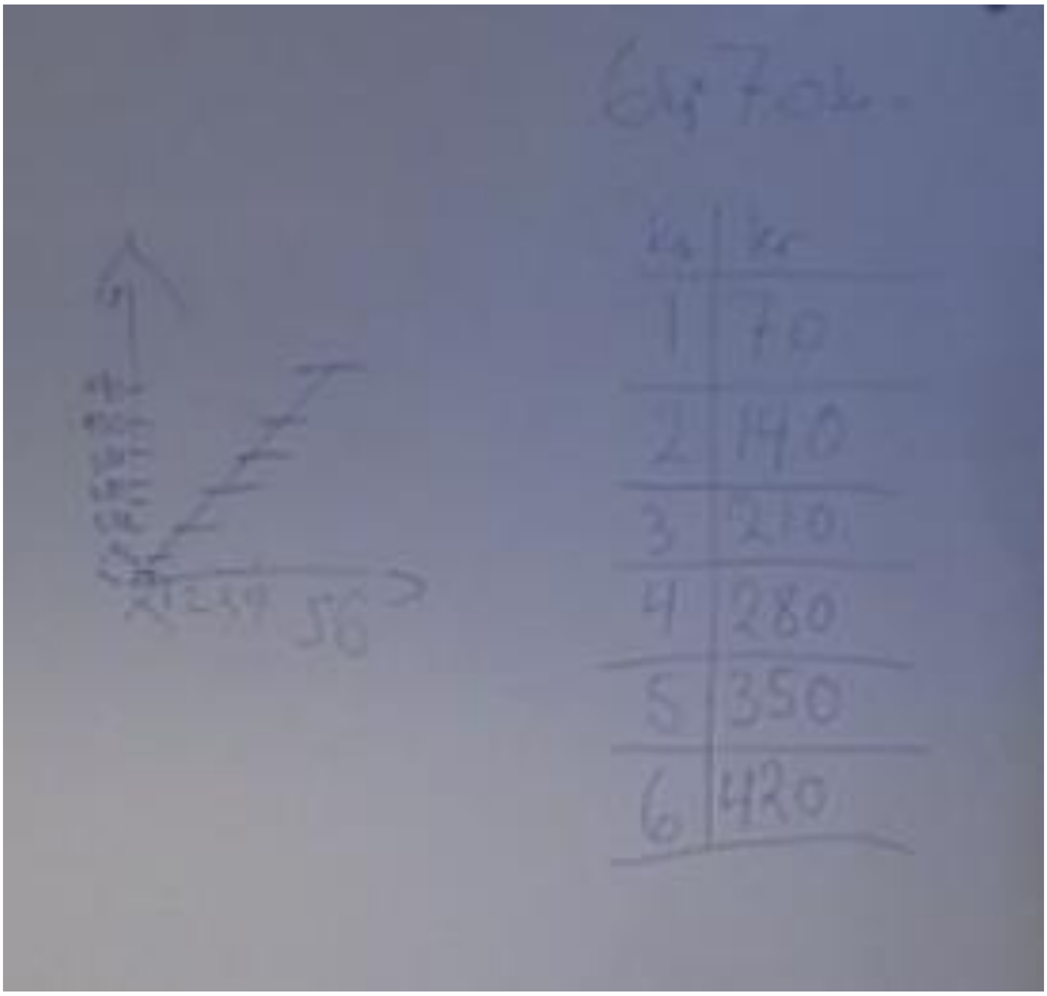
61. Elev 1: «tegner bare en strek ca. 45 grader fra origo og opp»

62. Lærer: Hvordan vet du at den grafen er riktig nå da?

63. Elev 1: jo for det er en stigende greie, eller den går i hvert fall oppover

64. Lærer: ja

65. Elev 1: den stiger med det samme hver gang, den stiger med 70 hver gang



Bilde 2, løsning av oppgave 1 på tavla

Når elevene skal løse den første oppgaven ved hjelp av en graf er bildet over sluttproduktet. Her klarer eleven å beskrive hvilken retning grafen vil ha, men ikke hvordan man lager den. Eleven laget som det kommer fram av samtalen over kun en rett linje på frihånd inn i koordinatsystemet for å svare på spørsmålet. Når eleven da får litt veiledning og spørsmål tegner han på alle punktene for hvert kilo oppover på linjen. Han bruker dermed den linjen han har satt ifra før til å sette punktene. Det skjer her en kongruent overgang ifra tabellen til koordinatsystemet med en graf. Verdiene i tabellen blir organisert i x- og y-aksen i koordinatsystemet når grafen tegnes. Forholdet mellom verdiene på x og y-aksen gjør at grafen blir tegnet noenlunde riktig, 45 grader oppover. Det å gjøre en kongruent overgang ifra tabell til en graf kan føre til en misoppfatning. Hvis elevene putter de samme verdiene som i tabellen inn i aksene i koordinatsystemet vil de få en graf som peker 45 grader opp så lenge funksjonen er positiv og lineær. Alle grafene han lager med denne metoden vil da se visuelt lik ut. Han klarer etter hvert å se at grafen vil stige med 70 hver gang, men heller ikke da skjønner han at han kun trenger å lage to punkter.

Dette er et litt spesielt tilfelle da eleven gir uttrykk for å se tendensen visuelt uten å kunne vise prosessen bak. Eleven viser dermed at han ikke mestrer å løse oppgaven representert ved en graf på egen hånd. Ut ifra det eleven gjør vil alle stigende grafer se like ut og det som er matematisk relevant kommer ikke godt til syne. Det gjør det også vanskelig å skille mellom to grafer som er matematisk forskjellig, men visuelt like.

Siden funksjoner kan sees på som et sett med ordnede par (Skemp, 1971) kommer det matematiske konseptet av en funksjon ikke spesielt godt fram. Selv om det her kommer liten forståelse av konseptet funksjoner til syne viser eleven en forståelse av hvilken retning grafen til funksjonen vil ha. Eleven gir uttrykk for at han skjønner at det blir dyrere å sende en pakke for hver kilo den veier. Dermed kan det tenkes at han ser relasjonen mellom disse verdiene og grafen. Siden verdien stiger med det samme hver gang så må også grafen til disse verdiene stige. Selv om det ikke kommer til syne en dyp forståelse av konseptet funksjoner ser det ut til at han viser en viss forståelse av at det er en sammenheng mellom de to representasjonene av oppgaven tabell og graf. Som vi ser på bildet står tabellen og grafen ved siden av hverandre noe som kan gjøre det enklere for elevene å se denne sammenhengen. Sfard (1991) peker på at prosessuell oppfatning ofte kommer før strukturell oppfatning, men at i sjeldne tilfeller er det omvendt. Her kan det minne om et slikt tilfelle da eleven ser for seg helheten, men ikke prosessen. Det er vanskelig å bestemme hvilken strukturell oppfatning og hvilket matematisk konsept eleven viser forståelse av. Selv om ikke eleven klarte å løse oppgaven helt på egenhånd, kommer han til slutt i linje 65 fram til at grafen også stiger med 70 hver gang. Hans forståelse av tabellen kunne da med litt hjelp hjulpet eleven til å løse oppgave korrekt ved hjelp av å representere problemet med en graf. Matematikk kan også oppstå som mentale bilder inni hodet samt verbale utsagn. Dette er vanskelig å si noe sikkert om uten å se inn i hodet på eleven, men det kan hende eleven har et mentalt bilde av hvordan grafen vil komme til å se ut. Samtidig som at analyseverktøyet utviklet av Sfard (1991) kun tar i betraktning eksterne karakteristikker.

4.6. Møtes i krysset

69. Elev 2: hvis du tar den strek fra 6kg opp til der den treffer 440 eller 490 står, så møtes de i et kryss og da skal streken gå igjennom der x og y møtes og gjennom krysset der oppe

Elev 2 prøver å forklare hvordan elev 1 kan vise at grafen til oppgaven blir riktig. Her ser vi at eleven mestrer prosessen med det å tegne en graf for å løse oppgaven. I tillegg nevner han kun to punkter i grafen, punktet som dannes av 6kg og 490kr og origo. Elev 1 hadde allerede tegnet en lineær graf så det kan ha fått elev 2 til å tenke at grafen ble lineær og derfor bare trenger to punkter for å tegne den. Det kan også hende at han også skjønner at grafen vil bli lineær på grunn av tallene som allerede er regnet ut i tabellen. Sfard (1991) påpeker at hvis man er i stand til å tegne grafen til en funksjon er man på kondenseringsstadiet. Dette blir likevel en hypotetisk vurdering siden eleven kun har vist at han mestrer det å lage en graf i denne konteksten. Sfard sitt rammeverk er som nevnt basert på en teoretisk analyse. I praksis så vil all analyse av elevutsagn og elevarbeid være hypotetisk. Ifølge Duval (2006) så viser ikke det å bare plotte inn punkter av en funksjon i et koordinatsystem nødvendigvis veldig stor forståelse. Eleven bør være i stand til å løse flere oppgaver i ulike kontekster og variasjoner innenfor og mellom ulike semiotiske representasjonssystem for å kunne vise at han er på kondenseringsstadiet. I denne situasjonen utnyttet elev 2 tallene fra tabellen til å finne to punkter i koordinatsystemet. Igjen må eleven gjennom tre forskjellige representasjonssystemer. Det starter med en overgang fra tekstoppgave til symboler og tabell før det skjer en overgang av semiotisk representasjonssystem igjen til en graf. Verdiene som er organisert i tabellen er organisert likt i koordinatsystemet noe som gjør det til en kongruent overgang mellom semiotiske representasjonssystem (Duval, 2006). Elev 2 forklarer kun hvordan elev 1 kan tegne grafen i koordinatsystemet og bruker derfor grafen som allerede er tegnet til å forklare det.

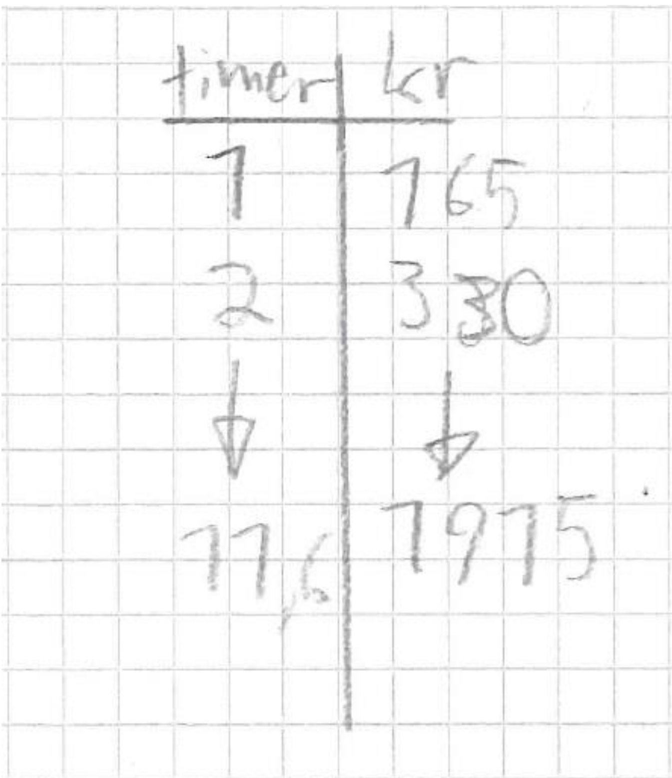
Elevene viser i denne oppgaven at de mestrer å finne løsningen ved hjelp av representasjonen en graf med veiledning fra læreren. De har da måttet gjennomføre overganger mellom tre ulike semiotiske representasjonssystem og flere behandlinger av representasjoner innenfor hvert system. De viser da at de har de kognitive kravene som skal til for å gjøre kongruente overganger mellom semiotiske representasjonssystem av problemet. Det er viktig å påpeke at de kun har vist at klarer å gjøre kongruente overganger mellom semiotiske representasjonssystem den veien oppgaven legger opp til. Altså fra tekstoppgave via aritmetiske beregninger og tabell og til slutt en graf. Gjennomgående i måten elevene jobber på er at de har en prosessuell oppfatning av matematikken. Det synes spesielt i de aritmetiske beregningene og tabellen, men også i grafen da de bruker flere punkter enn nødvendig for å lage en graf av en lineær funksjon.

4.7. «lage den her i evigheten så går det»

111. Elev 1: skal vi bare ta til 12 da

112. Elev 2: og bare ganga på 1 og 1 helt til vi fikk altså da eeh, 1915 så har vi fått 11,6. sånn ja. Skjønner du noen ting? 1 og 2 og så jobber vi oss bare opp helt til vi får 11 da, men det blir ikke nøyaktig da, eller det blir jo nøyaktig, men det blir ikke sånn akkurat

113. Elev 1: Hvis vi tar oss tida til å lage den her i evigheten så går det, eller 11,6.



Bilde 3, hvordan elev 2 framstiller tabellen

Tabellen elev 2 lager viser at han har hoppet over flere trinn i tabellen for å komme til svaret. Noe som kan minne om det Sfard (1991) sier, at et tegn på at man er kommet til kondenseringsstadiet er at man ofte hopper over mellomregninger. Det er likevel viktig å prøve og tenke seg hvorfor eleven gjør det slik. Det kan være at eleven ikke trenger å skrive opp alle tallene i tabellen siden han allerede vet hva svaret blir. Det kan være sannsynlig at eleven måtte ha skrevet opp alle tallene i tabellen hvis han ikke hadde funnet svaret fra før. Eleven begrunner at han gjør det slik fordi tabellen kommer til å bli stor og foreslår å hoppe over litt. Så det han sier i diskusjonen sammenlignet med det han gjør av elevarbeid trenger ikke tyde på at eleven hopper over trinn i tabellen fordi han har en bedre forståelse av det matematiske konseptet. På kondenseringsstadiet er ofte flere mellomregninger satt sammen til en prosess (Sfard, 1991). Dette ser ikke ut til å skje her da eleven fremdeles regner ut hver enkelt verdi som han har med i tabellen på samme måte som tidligere. Da uten å komprimere noen mellomregninger når hvert enkelt funksjonsspar skal regnes ut og puttes inn i tabellen. Elevene brukte dermed den samme aritmetiske beregning som de brukte for å løse oppgaven tidligere når de skulle finne verdiene de ville ha med i tabellen. Jeg ser på dette som en behandling av representasjonen innenfor et og samme representasjonssystem siden de samme symbolene går igjen i tabellen. Likevel er det en annen måte og framstille svaret på som elevene mestrer. Samtidig har både elev 1 og elev 2 påpekt hver for seg i linje 105 og 113 at de kunne laget tabellen mye større for å få et nøyaktig svar. Dette ville dermed ta en evighet. Det at de kan lage tabellen større er et forslag som går igjen i diskusjonen flere ganger gjennom de to siste oppgavene. Det kan da høre ut som at elevene vet at de kan finne uendelig med verdier å putte inn i tabellen. Andre veien er det også et poeng å tilpasse tabellen etter konteksten og dermed ikke ha med alle verdiene som ikke trengs. Den andre gruppa hadde laget hele tabellen med hele tall opp til 12. Et utsagn som kommer fram der er at de må finne midten av 11 og 12 siden 11,6 ligger inni der en plass. Det ser dermed ut til at de vet at svaret ligger i tabellen uten at de har satt 11,6 inni tabellen.

Som nevnt i teorien var ofte matematikken historisk sett av prosessuell oppfatning (Sfard 1991). Den bestod av lange sekvenser med beregninger og det er det elevene ville fått her hadde de skulle løst den med alle verdiene opp til og med 11,6. Prosessen mot det riktige svaret er dermed viktigst for elevene og tyder på en prosessuell oppfatning av matematikk. Her som tidligere krever det at elevene gjør en overgang fra tekstoppgave til symbol som er et skifte i representasjonssystem. Vi kan begynne å stille spørsmål ved om akkurat dette skiftet er noe elevene mestrer godt. Nå har de vist at de mestrer de kognitive kravene som trengs for å gå fra en tekstoppgave til å finne svaret med en aritmetisk beregning i denne konteksten.

4.8. «sette piler her?»

141. Elev 1: det blir samme som grafen på tavla siden den stiger jo alltid med 165 kr

142. Elev 2: mhm

143. Elev 2: timer oppover, nei, timer under mente jeg, så pengene opp, så eeh, mellom her skal det jo være 5 da, så eeh, (skriver) og x, nei nå tok jeg feil plass (teller stille 1-12)

144. Elev 1: du må jo sette på sånne piler for den fortsetter jo etter 12, det er aldri en stopp på en sånn her graf, eller tabell

145. Elev 2: sette piler her?

146. Elev 1: ja, du må det

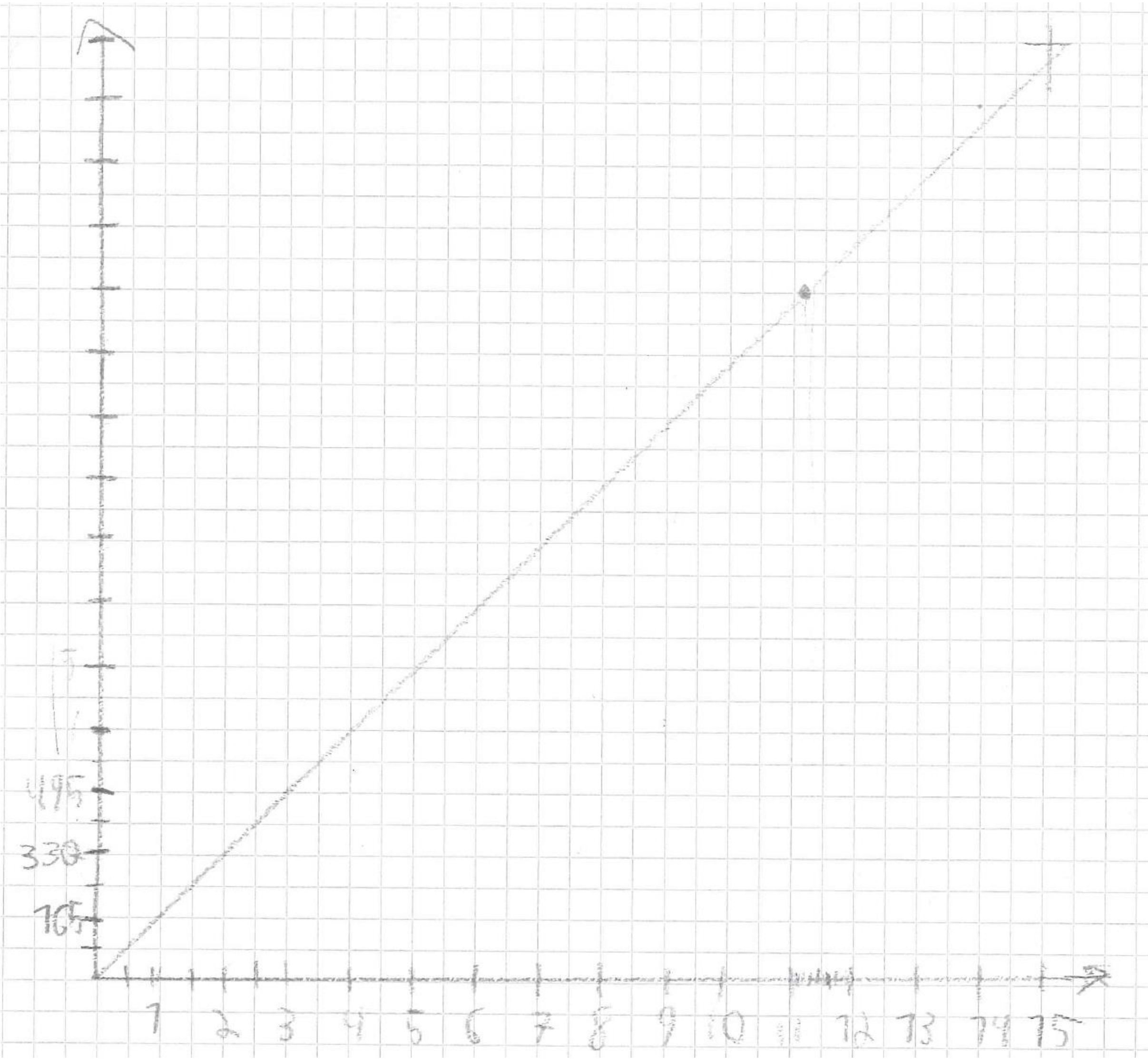
147. Elev 2: sånn, fornøyd?

148. Elev 1: mhm, x og y akse

149. Elev 2: jadda, det er ikke så viktig

Det elev 1 sier i linje 144 er interessant. Eleven sier at koordinatsystemet og grafen aldri stopper noe som peker mot at eleven ser en større helhet ved matematikken. De har også nevnt tidligere at tabellen kan lages uendelig stor i denne konteksten. Dette har de nå påpekt ved tabellen og koordinatsystemet flere ganger i løpet av to oppgaver. En egenskap som er viktig når det gjelder funksjoner på dette matematiske nivået. Du kan putte inn hvilken som helst verdi og få ut en løsning. Det kan også hende at dette er noe eleven har hørt fra læreren uten helt å forstå matematikken bak den tanken.

Videre i samtalen påpeker også elev 1 at man måtte skrive x og y akse og det kan da se ut som om eleven har lært at et koordinatsystem skal se ut slik og er opptatt av det. Elev 2 derimot sier at det ikke er så viktig å ha med disse merkene i koordinatsystemet. Det er viktig å gjøre seg forstått både skriftlig og muntlig i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2013). Siden matematikk kun kan representeres med semiotiske representasjoner er det et poeng å bruke riktig notasjoner på ulike elementer som for eksempel x og y-akse. Med tanke på selve matematiske konseptet skriver Sfard (1991) at dette ofte blir representert som et mentalt bilde oppi hodet vårt. Dermed ikke med noe notasjonssystem eller fysisk representasjon på papiret. Så for å selv forstå det matematiske konseptet trenger ikke eleven nødvendigvis å bruke riktige notasjoner. I tillegg klarer elev 1 å se en matematisk sammenheng mellom de to grafene de har laget, nemlig at begge er lineære og stiger. Det kan tenkes at han kjenner igjen likheten mellom de to tekstoppgavene og dermed danner seg et mentalt bilde av at grafen til begge vil bli stigende og lineær. Faren her er at dette kan føre til en misoppfatning på grunn av kongruente overganger mellom semiotiske representasjonssystem fra tabell til graf i begge oppgavene. Verdiene som kan organiseres i tabellen er organisert likt i koordinatsystemet og fører dermed til at begge grafene ser helt like ut. Dette kan vi se på bilde 2 av grafen fra oppgave 1 og fra bilde 4 av grafen til oppgave 2 som vist under. Begge grafene ser visuelt like ut og det kan være vanskelig å skille hva som er matematisk relevant i representasjonen.



Bilde 4, Elev 2 sin løsning av oppgave 2 ved hjelp av et koordinatsystem

Elev 2 påpeker her at svaret finnes i grafen selv om det ikke er merket. Det kan tyde på at eleven da ser noe mer med grafen enn det som er merket på den. Det kjenner vi også igjen fra tidligere diskusjon om verdien 11,6 i tabellen som ligger et sted midt imellom 11 og 12. Duval (2006) sier at det er viktig å kjenne igjen det samme matematiske objektet i to ulike representasjoner og at elevene da må kjenne igjen hva som er matematisk relevant i en semiotisk representasjon. I dette tilfellet er det matematisk relevant at eleven vet at svaret finnes i grafen selv om det ikke er merket. Det er vanskelig å si noe helt sikkert om hvilket stadium (Sfard, 1991) eleven er på kun ut ifra dette utsagnet. Istedenfor å snakke om prosessen sier eleven noe om egenskapene til grafen. På elevarbeidet (Bilde 4) har eleven prøvd å merke av 11,6 i grafen, men bommet litt og merket av nærmere 11. Han har heller ikke markert tall på y-aksen høyere enn 495. Det har hele tiden vært et fokus og en diskusjon rundt at svaret skal bli 11,6 noe som de allerede har funnet ut før de tegnet denne grafen. Fokuset ser da igjen ut til å havne på hvordan de skal finne den verdien. De andre verdiene i funksjonsparene er ikke merket av i koordinatsystemet en gang. Eleven gir uttrykk for i samtalen at han ikke trenger å regne ut alle verdiene oppover og at det viktigste kommer når han kommer opp til der svaret skal være. Det ser da ut til at eleven her ikke har løst oppgaven ved hjelp av en graf i et koordinatsystem, men bare plottet inn et svar han allerede visste.

4.9. «alle måtene er jo riktige»

203. Elev 1: alle måtene er jo riktige, de stiger med akkurat det samme, det spørs hvor nøyaktig man vil ha det egentlig

204. Elev 4: det er lettere å ordne den grafen hvis du har en tabell fra før av

205. Elev 1: mhm

206. Elev 4: fordi at da er det mye lettere å skrive opp og du slipper å regne ut for hver gang

--

216. Elev 2: Tabellen så har du jo tallene da så kan du bare plusse på 70 for hver gang så den er jo ganske sånn simpel å lage, mens den her (grafen) så må du regne mer da

Etter å ha representert oppgaven ved hjelp av en aritmetisk beregning, tabell og graf er det mulig å se en sammenheng mellom de ulike representasjonene. Elev 1 mener at alle måtene er riktige og at de stiger med akkurat det samme. Verdiene som elevene har brukt går igjen i alle representasjonene gjennom kongruente overganger mellom semiotiske representasjonssystem og det kan være derfor at eleven ser likheten og mener at de stiger med det samme. Eleven avslutter med å si «spørs hvor nøyaktig man vil ha det egentlig». Elevene har gjennom hele oppgaven hatt fokus på hvordan de skal finne den nøyaktige løsningen det spørres etter.

Elev 4 påpeker en kobling mellom tabell og graf siden det å lage en tabell på forhånd gjør det enklere å fylle inn i grafen etterpå. Hun bruker dermed sammenhengen mellom tabellen og grafen av en funksjon til sin fordel. Duval (2006) påpeker viktigheten av å se sammenhengen og det samme matematiske objektet i to ulike representasjoner. En overgang mellom semiotiske representasjonssystem er når en går fra et representasjonssystem til et annet uten å endre det matematiske objektet. Som vist til tidligere er dette kongruente overganger og det synes dermed ikke om elevene ser det samme matematiske objektet i to ulike representasjoner. Verdiene er organisert likt i de to ulike representasjonene av det matematiske objektet. Elev 1 påpeker også at alle stiger med akkurat det samme, noe han også har nevnt ved flere anledninger tidligere. Da er han også i stand til å se en likhet. Etter å ha løst oppgaven ved hjelp av tre ulike representasjoner og vært innom tre ulike semiotiske representasjonssystem kan det hende de kjenner igjen verdiene. Dette påpeker elev 4 i linje 206 at siden hun har laget en tabell på forhånd slipper hun å regne ut verdiene i koordinatsystemet. Da bruker hun et annet representasjonssystem som støtte til et annet noe som Duval (2006) sier at ofte kommer fram som overganger mellom semiotiske representasjonssystem i matematikken. Dette ofte som en kongruent overgang og dermed stilles det ikke like store kognitive krav.

4.10. «det er snedig å vite tiden også»

221. Lærer: hvordan kan dere vise/beskrive forholdet mellom avstand og tid når en bil kjører 80 km/t

222. Elev 2: det er tid delt på avstand

223. Elev 4: er det ikke strekning delt..

224. Elev 2: nei, strekning delt på tid er lik

225. Elev 1: det spørs hvor langt han skal kjøre da, det er snedig å vite tiden også

226. Elev 2: hmm?

227. Elev 1: det hadde vært snedig å vite tida og

228. Elev 2: men det finner vi jo ut hvis, det står jo ikke hvor langt han har kjørt da

229. Lærer: nei

230. Elev 2: så formelen for å finne ut det er strekning delt på tid er lik kilometer i timen eller meter i sekundet da

231. Elev 1: hmmm, okei

Når spørsmålet ble stilt på en litt annen måte sliter elevene med å komme med et ordentlig svar. Den prosessuelle oppfatningen av matematikk kommer fram da de prøver å bli enige om hvilken algoritme de skal bruke. Skemp (1976) skriver om instrumentell forståelse da elevene vet hvordan de løser oppgaven men ikke hvorfor. Elevene har jobbet med to oppgaver som er nesten helt like, men møter problemer når spørsmålet endres. Selv om de kan løse oppgaven på akkurat samme måte som de foregående oppgavene. Det kan hende elevene er litt usikker på hva det spørres etter siden oppgave 3 er en mer åpen oppgave. De har tidligere vært opptatt av å finne et nøyaktig svar og her spørres det etter hvordan forholdet mellom de to verdiene i funksjonsuttrykket kan beskrives. Dermed er det ikke nok å komme med kun en verdi som svar lenger. Sfard (1991) skriver at en ren prosessuell oppfatning av matematikk kan være hemmende for læring da det kun blir en rekke prosesser og regler man bruker uten å vite hvorfor. Det kan derfor hende at elevene sliter med å huske akkurat hvilken regel eller algoritme de skal bruke fordi de ikke vet hvorfor de kan bruk de ulike algoritmene.

Duval (2006) skriver at mange elever sliter med å gjøre en overgang mellom semiotiske representasjonssystem fra en tekstoppgave til å representere løsningen med tallsymboler. Problemet til mange elever er å gå fra et representasjonsregister til et annet uten hjelp og at de dermed ikke klarer å benytte kunnskap utenfor en smal kontekst. Elevene har allerede bevist at de klarer å gå fra en tekstoppgave til å løse oppgaven med tall tidligere. Duval (2006) skriver også at det er viktig med variasjon innenfor et semiotisk representasjonssystem. Når spørsmålet stilles annerledes kan det være at dette blir utenfor den smale konteksten som elevene mestrer uten hjelp.

4.11. «bare gange til det du skal ha»

244. Elev 2: så kunne vi jo tatt 80 delt på 60 og da fått 1 og så bare gange derifra og oppover

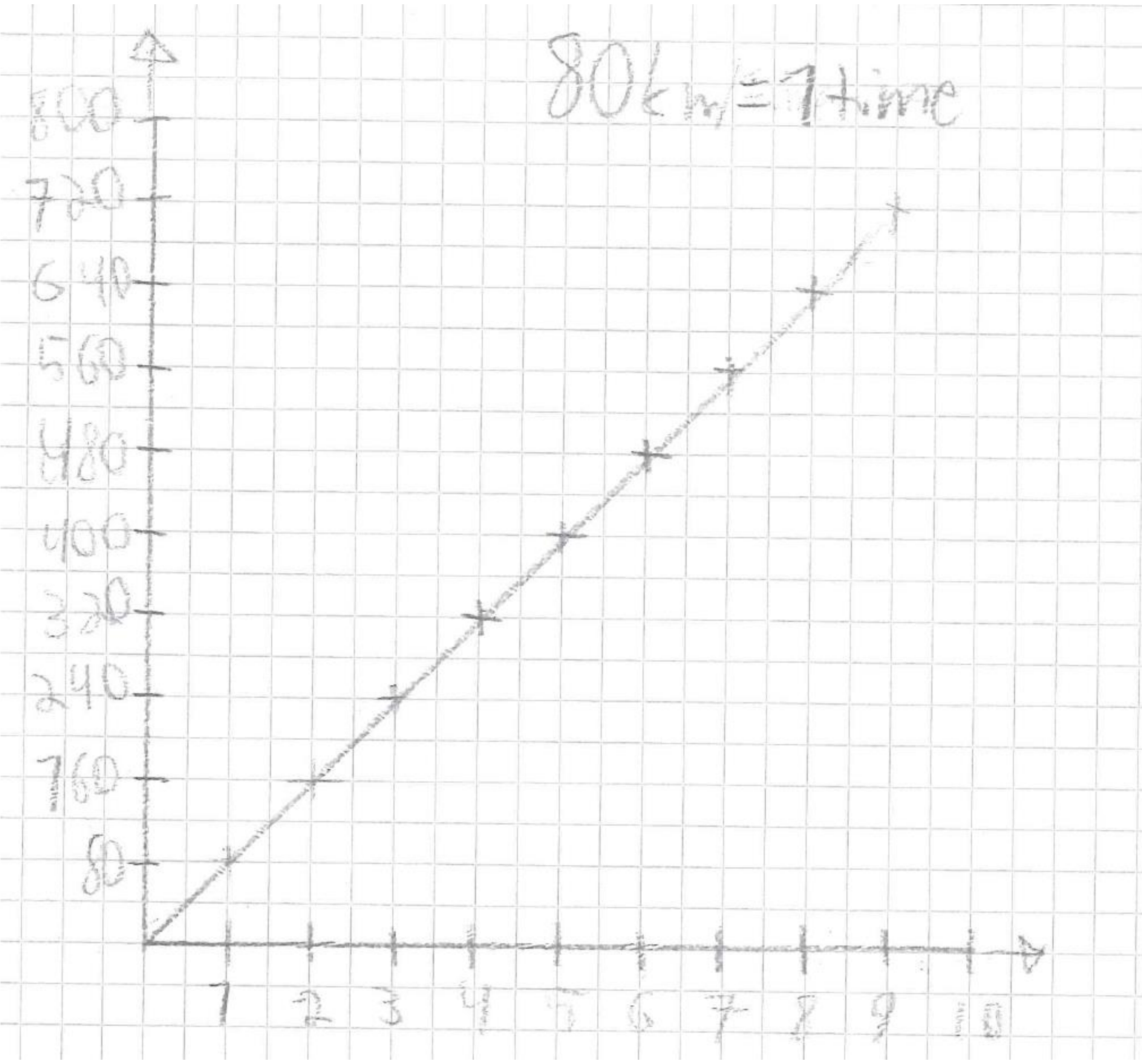
Etter litt veiledning fra forsker der det ble spurt etter eksempler på hvor langt bilen hadde kjørt etter 40 km, 80 km og 100 km kommer elevene med et forslag på hvordan problemet kan løses. Da ser det ut til at elevene med den veiledningen er i stand til å gjøre en kongruent overgang ifra tekstoppgaven til å løse oppgaven med en algoritmisk beregning. Det kan være at ved å få slike eksempler fra forskeren ble likheten til de andre oppgavene mer tydelig siden de også spør etter spesifikke verdier. Her kommer vi tilbake til en algoritmisk beregning og det blir mer tydelig at det er i dette semiotiske representasjonssystemet elevene føler seg mest trygge og dermed ser ut til å prestere best. Denne representasjonen har elevene brukt og løst alle oppgavene med uten tilsynelatende problemer. Som Duval (2006) påpeker kommer ofte overganger mellom semiotiske representasjonssystem fram i matematikken ved å gå over til det semiotiske representasjonssystemet som er lettest å gjør behandling av representasjoner i.

4.12. «kan jo lage en graf der og da»

250. Elev 2: kan jo lage en graf der og da

251. Lærer: ja

252. Elev 2: da går det jevnt 80 oppover og så blir det den samme jevne aksen



Bilde 5, Elev 2 sin løsning av oppgave 3

Elevene trenger litt veiledning for å komme på at også denne oppgaven kan løses ved hjelp av både en tabell og en graf. Det er først når de blir minnet på hvordan de løste de andre oppgavene at de sier at de kan løse oppgaven med disse representasjonene. Likevel har de da mest sannsynlig sett en sammenheng mellom oppgavene. Det er spesielt ved denne typen oppgaver at det er en fordel å løse den med en graf. Da blir sammenhengen mellom fart og tid presentert på en god måte.

Elev 2 påpeker også likheten mellom de tre oppgavene, at det blir en lineær graf som stiger jevnt med det samme. Siden de bruker de samme verdiene som i tabellen som i koordinatsystemet vil grafen se helt lik ut som de foregående oppgavene. Dette har jeg tidligere skrevet at kan føre til en misoppfatning. Hvis vi sammenligner grafen fra alle oppgavene er de visuelt helt like. Da er det vanskeligere å se hva som er matematisk relevant og ikke i de representasjonene av de ulike matematiske objektene (Duval, 2006). Elevene har merket alle punktene for hver time der han i den forrige oppgaven kun merket av svaret. Dette kan være fordi spørsmålet ble stilt annerledes og ikke spør etter et spesifikt svar, men er ute etter å vise sammenhengen. Det kan tenkes at eleven ser på alle punktene som et svar på spørsmålet. Også her har elevene lagd en tabell for så å lage koordinatsystemet siden de samme verdiene går igjen. Det kan også være derfor de har merket av flere punkter på grafen siden tabellen også innehar disse verdiene. Dermed har de også i den siste oppgaven gjort en kongruent overgang mellom semiotiske representasjonssystem.

288. Elev 4: vi kan lage tabell først og så

289. Elev 3: ja lage tabell og så ordne grafen ut av tabellen

290. Elev 4: ja

Etter å ha laget en tabell først og grafen etterpå i alle foregående oppgavene har elevene begynt å skjønne at de samme verdiene går igjen. Kongruent overgang fra en tekstoppgave til en graf via en tabell ser dermed lettere ut for dem. Sfard (1991) påpeker at etter elevene har blitt kjent med en matematisk prosess blir de gradvis flinkere til å gjennomføre prosessen. Dette skjer på internaliseringstadiet. Videre på kondenseringsstadiet blir elevene flinkere til å se en helhet og skifte mellom ulike representasjoner og tegne grafen til en funksjon. Selv om elevene er flinkere til å gjennomføre prosessen som er beskrevet over er det enda ikke sikkert de er på kondenseringsstadiet når det gjelder funksjoner. Dette på bakgrunn av at de fortsatt går igjennom alle mellomregninger og ikke har vist at de kan lage grafen uten å lage en tabell først. Duval (2006) vil jeg også si at støtter opp under dette da elevene kun har gjort kongruente overganger mellom de ulike semiotiske representasjonssystemene.

4.13.0. Oppsummering av analyse

4.13.1. «vi kan løse de på samme måte alle oppgavene»

355. Lærer: klarer dere å se noen flere sammenhenger mellom oppgavene dere har gjort nå?

356. Elev 1: ja, alle sammen stiger jevnt hele veien, den endrer seg ikke, den stiger jevnt

357. Elev 3: ja, vi har løst alle sammen på litt forskjellige måter

358. Elev 4: og vi kan løse de på samme måte alle oppgavene

359. Lærer: og alle er riktige?

360. Elev 4: mhm

Elevene har på alle tre oppgavene løst oppgavene ved hjelp av ulike representasjoner i ulike semiotiske representasjonssystem. De har også løst alle oppgavene ved hjelp av de samme representasjonene og det er bare konteksten på oppgaven som har endret seg. Det er da mulig å se om elevene har utviklet seg i løpet av de tre oppgavene og om forståelsen har blitt noe bedre på den siste oppgaven kontra den første. Under vil jeg oppsummere kort en del funn som er kommet fram igjennom analysedelen.

Først og fremst ser det ut til at elevene hele veien viser en prosessuell oppfatning av matematikken. Dette kommer til syne i alle mellomregningene og forklaringene elevene gjør gjennom oppgavene. I den første oppgaven forklarer eleven steg for steg hvordan hun ville lage tabellen noe som i dette tilfellet tolkes som prosessuell oppfatning. Videre hvis vi ser på elev 2 sin løsning av oppgave 2 (Bilde 1) så er den delt opp i to beregninger for å komme fram til et svar noe som også viser en prosessuell oppfatning av matematikken. I den siste oppgaven laget elevene en graf der de merket av alle punktene fra tabellen inn i koordinatsystemet for å lage en lineær graf. Den prosessuelle oppfatningen av matematikk kommer til syne gjennom hele økta og i alle oppgavene.

Elevene har gjennom økta arbeidet med overgangen mellom representasjoner og semiotiske representasjonssystem. Dette er føringer som har blitt gitt i alle oppgavene siden de har blitt bedt om å løse oppgaven både ved hjelp av en tabell, graf og eventuelle andre måter å løse oppgaven på. Det første de gjorde var å lage en tabell ut ifra en tekstoppgave. Her gjorde de en kongruent overgang mellom semiotiske representasjonssystem siden de verdiene som var med i tekstoppgaven ble organisert på samme måte i tabellen. Denne typen overganger mellom semiotiske representasjonssystem kommer også igjen når de går fra tabell til graf i samme oppgave. De samme verdiene som de beregner i tabellen bruker de i koordinatsystemet. Dette er noe de ender opp med å gjøre med alle oppgavene. De forklarer til slutt at det er lettere å lage en graf hvis de har laget en tabell i fra før. Dette har ført til at alle grafene de laget har blitt seende visuelt like ut.

Hvis elevene har fått valget har de gjort en overgang mellom semiotiske representasjonssystem til det semiotiske representasjonssystemet som det er lettest å gjøre behandling av representasjoner i. Dette har for dem vært å løse oppgavene med en aritmetisk beregning. I de to første oppgavene er dette en grei måte å løse oppgaven på og de har sammen fått til å løse begge oppgavene på denne måten. På den tredje oppgaven er det ikke naturlig å løse oppgaven med en algoritmisk beregning siden oppgaven ikke spør etter et spesifikt svar. Likevel kommer dette forslaget om at de kan bare gange opp til det de skal ha.

Elevene har gjennom tre oppgaver fått mer erfaring i å løse problemløsningsoppgaver ved hjelp av en aritmetisk beregning, tabell og graf. De er tydeligere på hva de vil gjøre i oppgave 2 enn i oppgave 1 der de er mer spørrende. Dette kan selvsagt begrunnes i flere faktorer som forskningseffekten, men også at de gjennom erfaringene de fikk i oppgave 1 var bedre i stand til å løse oppgave 2. I oppgave 3 er spørsmålet stilt litt annerledes, men når de skjønner at de kan løse også denne oppgaven på samme måte så finner de en løsning på problemet. Elevene ser da ut som gruppe å bedre være i stand til å løse oppgaver med lignende kontekst enn de var før undervisningsøkta.

5.0. Funn og drøfting

I innledningen av denne oppgaven presenterte jeg et forskningsspørsmål som jeg har prøvd å finne et svar på. Det spørsmålet er som følger: **Hvilken oppfatning og forståelse av matematikk og funksjoner kommer til syne i deres arbeid med representasjoner av funksjoner?**

Spørsmålet kan virke omfattende og vanskelig å svare på ved første øyekast. Hvordan skal man undersøke forståelsen til noen? Skjer ikke dette inni hodet på hver enkelt? Jeg har gjennom oppgaven presentert både teori og metode som har hjulpet meg å svare på spørsmålet. Istedenfor å se på hva som skjer inni hodet på hver enkelt elev har jeg sett på hva de faktisk gjør. Dette i form av elevarbeid og diskusjon elevene imellom. De teoretiske rammeverkene har gitt meg verktøy til å analysere og si indirekte noe om elevers forståelse ved å se på eksterne karakteristikker. Noe som er mye mer tilgjengelig enn det som skjer inni hodet på elevene. I dette kapitlet vil jeg dermed ta for meg hvert enkelt funn og drøfte det opp imot teori og så jeg deretter kan kunne svare på forskningsspørsmålet.

5.1. Oppfatning av matematikk

I forskningsspørsmålet er det spesifisert at jeg lurer på hvilken oppfatning elevene har av matematikk. Med oppfatning av matematikk menes de to typene, prosessuell og strukturell oppfatning presentert i teorikapitlet og utarbeidet av Sfard (1991). Gjennom analysekapitlet har jeg derfor skrevet mye om hvilken oppfatning av matematikk elevene har. Sfard (1991) sier at prosessuell oppfatning kommer til syne så lenge det er en prosess involvert i matematikken. I skolematematikken kommer dermed dette til syne hver gang elevene regner en oppgave i boka si. Denne typen oppfatning holder hvis man kun skal komme fram til et svar. Elevene har gjennom hele økta vist at de både med og uten hjelp av læreren er i stand til å finne svaret på oppgavene. Siden oppgavene spør etter et svar er det naturlig å ha en prosessuell oppfatning siden det alltid det er en prosess mellom problemet og svaret. Elevene har fra derfor start til slutt vist en prosessuell oppfatning av matematikk. En aritmetisk beregning sees lett på som prosessuell oppfatning av matematikk samtidig som at en graf kan kunne sees på med strukturell oppfatning av matematikk (Sfard, 1991). Elevene viser gjennom arbeidet med oppgavene en prosessuell oppfatning av matematikk gjennom aritmetiske beregninger, men også når de skal tegne grafen da de plotter flere punkter enn nødvendig for å lage grafen. Elevenes verbale utsagn viser også til en prosessuell oppfatning av matematikk da de flere ganger steg for steg prosessen fram mot et svar.

Historisk sett er oppdagelsen av matematiske konsept gått igjennom flere matematiske prosesser. Det som kjennetegner utviklingen av strukturell oppfatning er at det er en lang og vanskelig prosess (Sfard, 1991). Derfor er det også naturlig at elevene først har en prosessuell oppfatning av matematikk før den strukturelle oppfatningen av matematikk kommer til syne. Den strukturelle oppfatningen av matematikk henger relativt høyt når det kommer til funksjoner. Så i en 9. klasse hadde det vært meget bra om jeg hadde sett klare tegn på denne typen oppfatning.

Utfordringen med kun å sitte på en prosessuell oppfatning av matematikk er at all matematikk blir ganske mange prosesser som må huskes (Sfard, 1991). Dette kan sammenlignes med Skemp (1976) sitt begrep instrumentell forståelse der elevene vet hva de må gjøre, men ikke hvorfor. Det vil til slutt si stopp og elevene vil mest sannsynlig blande prosesser eller ikke huske dem i det hele tatt. Med både en strukturell oppfatning og en prosessuell oppfatning blir det mye lettere å organisere det vi kan og klare å løse oppgaven selv om vi ikke husker alle prosessene. Dette blir viktigere jo vanskeligere og mer abstrakt matematikken blir (Sfard, 1991). Alle oppgavene er naturlig koblet til en prosess da elevene skal løse et problem og finne et svar. Oppgavene kan også da sies å legge opp til at en prosessuell oppfatning av matematikken i funksjoner skal komme til syne. Selv om elevene hadde hatt en strukturell oppfatning av matematikk og funksjoner er det ikke sikkert den har kommet til syne gjennom elevenes arbeid med de oppgavene de fikk.

5.2. Overgangen mellom representasjoner

Representasjoner er en viktig del av matematikken siden det er slik vi utrykker den både på papiret og når vi beskriver den verbalt. For å finne ut av elevenes forståelse har jeg sett nettopp på deres representasjoner av matematikken de har arbeidet med. Da både semiotiske symboler, verbalt språk og grafer. I teorikapitlet presenterte jeg rammeverket av Duval (2006) som skriver om hvilke kognitive krav som kreves for å gå mellom ulike semiotiske representasjonssystem. Han skiller mellom to ulike måter elevene kan gå mellom semiotiske representasjonssystem på. Det er kongruente overganger og ikke kongruente overganger mellom semiotiske representasjonssystem. Disse begrepene har jeg forklart nærmere i teoridelen. I tillegg kan elevene transformere representasjonen innenfor et og samme representasjonssystem. Dette kaller Duval for treatments og i min studie har jeg kalt det behandling av representasjoner. Det gjøres i teoridelen klart at det er ikke kongruente overganger mellom semiotiske representasjonssystem som krever mest kognitivt og dermed mest forståelse av matematikken for å mestre. I forskningsspørsmålet er det nettopp satt fokus på hvilken forståelse som kommer til syne i elevenes arbeid med representasjoner av funksjoner. Disse funnene har jeg trukket fram under her.

Det som kommer til syne gjennom elevenes elevarbeid og muntlige forklaringer når det gjelder overgangen mellom semiotiske representasjonssystem er kongruente overganger. Dette gjenspeiler seg at de verdiene som kan organiseres, organiseres på samme måte i de to forskjellige representasjonene i de ulike semiotiske representasjonssystemene. Kongruente overganger mellom semiotiske representasjonssystem er ifølge Duval (2006) typiske i skolen og krever mindre kognitivt enn ikke kongruente overganger. Problemet til mange elever er at de ikke klarer å gå fra ethvert semiotisk representasjonssystem til et annet uten hjelp. Duval hevder faktisk at de fleste elevene vil klare å gjøre en kongruent overgang mellom semiotiske representasjonssystem noe som også stemmer i min økt. Dette har jeg diskutert i analysen hvorfor kan føre til en misoppfatning, spesielt når det kommer til å plotte grafen til funksjonen. Han sier også at flere elever ikke ville fått det til om de hadde måttet gjøre en ikke kongruent overgang mellom semiotiske representasjonssystem. Ikke kongruente overganger mellom semiotiske representasjonssystem kommer ikke fram i det hele tatt under hele økta. På de oppgavene elevene har jobbet med er det ikke nødvendig å gjøre en ikke kongruent overgang mellom semiotiske representasjonssystem for å finne en løsning. Det kan også være en av grunnene til at det ikke kommer til syne.

Duval (2006) skriver at det er viktig å kjenne igjen det samme matematiske objektet i to ulike representasjoner av samme matematiske objekt. Han påpeker også at det ikke er nok å kunne plotte punktene til en funksjon i en graf for å kunne kjenne igjen det samme matematiske objektet i de to ulike representasjonene. Elevene viser at de er i stand til å plotte punktene til en funksjon i en graf, men det krever likevel mer bevis for at vi skal se at elevene kjenner igjen det samme matematiske objektet i de ulike representasjonene. Det krever ifølge Duval (2006) mer erfaring med variasjoner innenfor hvert enkelt semiotisk representasjonssystem, samt evnen til å kunne gå mellom ethvert semiotisk representasjonssystem uten hjelp. Dette kommer ikke til syne gjennom elevenes arbeid med representasjonene av de ulike funksjonene.

Noe som går igjen gjennom hele økta er at elevene helst vil gjøre en overgang mellom semiotiske representasjonssystem til det representasjonssystemet der det er lettest å gjennomføre behandling av representasjoner. Dette er ifølge Duval (2006) også veldig vanlig i skolematematikken. Det semiotiske representasjonssystemet elevene trives best i synes gjennom hele økta å være å løse oppgaven ved hjelp av en aritmetisk beregning. Her kommer de til en løsning relativt raskt hver gang og gjør kun en kongruent overgang ifra tekstoppgave til aritmetisk beregning.

For matematisk forståelse er det ifølge Duval (2006) viktig å kunne koordinere mellom flere ulike semiotiske representasjonssystem. Hvis elevene ikke klarer det er de ikke i stand til å løse oppgaver utenfor en smal læringskontekst. Elevene viser gjennom økta at de er i stand til å veksle mellom noen semiotiske representasjonssystem, men greier det ikke uten hjelp når spørsmålet endres litt og blir mer generelt. Noe som vi ser i oppgave 3. Derfor kan jeg si at elevene ikke er i stand til å gå mellom ethvert semiotisk representasjonssystem uten hjelp og stor matematisk forståelse kommer dermed ikke til syne. Elevene rører bare overflaten av det matematiske konseptet og det kan tenkes at de ikke klarer å skille mellom den semiotiske representasjonen av det matematiske objektet og selve objektet (Duval, 2006).

5.3. Utviklingen av et matematisk konsept

Historisk sett har utviklingen av matematisk konsept gått igjennom en lang rekke av prosesser før konseptet har oppstått. Sfard (1991) hevder at dette da også vil gjelde læring av matematikk og matematiske konsept. Hun har derfor laget ulike stadier på veien til å lære et matematisk konsept, noe som jeg har beskrevet i teoridelen og brukt gjennom analysen. I drøftinga over har jeg presentert hvilken oppfatning og forståelse som kommer til syne når elevene jobber med representasjoner av funksjoner. Dette bruker jeg da til å bestemme hvilket stadium elevene er på i læringen av et matematisk konsept.

Først og fremst er det igjen viktig å påpeke at elevene gjennom hele økta har vist en prosessuell oppfatning av matematikken. Elevenes arbeid og forklaringer av matematikken er hele tiden koblet til en prosess. Dette utelukker det øverste stadiet til Sfard (1991) som er reifikasjon der elevene klarer å se på matematikk med strukturell oppfatning og dermed uten å koble matematikken til en prosess.

Siden rammeverket til Sfard (1991) er en teoretisk analyse av forholdet mellom de to ulike oppfatningene matematikk er det ingen empiri koblet direkte til rammeverket. Dette kan i enkelte tilfeller gjøre at det er vanskelig å plassere det elevene sier og gjør inn i ulike stadier. Jeg vil herunder prøve å argumentere for hvorfor elevene på bakgrunn av både Sfard (1991) og Duval (2006) viser at de er på det første stadiet av utvikling og læring av det matematiske konseptet funksjoner. For det første inneholder alle prosessene de gjør mellomregninger noe som kjennetegner internaliseringstadiet. I tillegg mestrer elevene hele veien å løse oppgavene ved hjelp av en aritmetisk beregning noe som er operasjonalisert i Sfard (1991).

Oppgavene elevene løste burde ifølge Brenner et al. (1997) kreve at elevene innehar problemløsningsferdigheter. Elevene blir i løpet av oppgavene bedt om å gjøre overganger mellom flere ulike semiotiske representasjonssystem. Ifølge Duval (2006) har hvordan de gjør disse overgangene innvirkning på hvilken forståelse av det matematiske konseptet som kommer til syne. Siden elevene har løst alle oppgavene er det ingen tvil om at de innehar enkelte problemløsningsferdigheter. Det er likevel ikke god nok grunn til å si at de har full forståelse for det matematiske konseptet funksjoner.

Elevene viser utover i økta at de mestrer å tegne grafen til en funksjon. Dette er ifølge Sfard (1991) et tegn på at elevene er på kondenseringsstadiet. Jeg har likevel valgt å stille spørsmål ved hvilken framgangsmåte og hvordan elevene gjorde en overgang mellom semiotiske representasjonssystem ifra tekstoppgave til graf. Hvis elevene hadde tegnet en graf direkte fra et funksjonsuttrykk kunne jeg bedre tolket det dit Sfard (1991) antyder, at elevene er på kondenseringsstadiet. For å få til det må elevene gjøre en ikke kongruent overgang og det vil dermed være mer kognitivt utfordrende og mest sannsynlig mer forståelse som skal til. Gjennom analysekapitlet har jeg vist hvorfor elevene hele veien har gjort kongruente overganger mellom ulike semiotiske representasjonssystem. Dermed kommer det ikke like stor forståelse til syne i det arbeidet elevene gjør verken på papiret eller muntlige forklaringer. Med bakgrunn i det føler jeg at elevene fortsatt er på internaliseringstadiet.

Det er viktig å poengtere at selv om ikke dypere forståelse av matematikken kommer til syne betyr ikke det at elevene ikke har det. Det betyr bare at gjennom det opplegget som jeg hadde med elevene så kommer den forståelsen til syne som jeg har drøftet over. Det kan godt hende at andre opplegg eller oppgaver hadde lagt til rette for at elevene hadde vist mer forståelse for matematikk og funksjoner enn de viser her.

5.4. Matematikkompetanse på 9. trinn

Veien til forståelse av et matematisk konsept er en lang prosess (Sfard, 1991). Forståelsen som synes kan derfor drøftes opp imot den forståelsen som elevene burde sitte inne med på dette tidspunktet. Dette vil så klart variere fra skole til skole, elev til elev og fra lærer til lærer. Jeg har derfor valgt å ta utgangspunkt i kompetansemålene etter 10. trinn i tillegg til kompetansemålene som er karakterisert i TIMSS i emnet matematikk.

Kompetansemålene etter 10. klasse (Utdanningsdirektoratet, 2013b) sier at elevene skal kunne veksle mellom flere ulike representasjoner av funksjoner. En enkel tolkning av dette kan være at de skal kunne lage grafer, tabeller, løse funksjonsuttrykk og tekstoppgaver. En tolkning som er nærmere Duval (2006) sin beskrivelse av hvordan matematisk forståelse kommer til syne kan være at elevene skal kunne veksle mellom enhver representasjon av funksjoner uten problem. Dette vil si at elevene ikke bare mestrer å gå en vei, men begge veiene mellom flere ulike representasjoner og representasjonssystem. Den enkle tolkningen av kompetansemålene etter 10. trinn kan sammenlignes med karakteristikkene på TIMSS-undersøkelsen 2015 middels nivå i matematikk på 9. trinn. Den andre tolkningen kan sammenlignes med karakteristikkene vi finner på høyt og avansert nivå i matematikk på 9. trinn. I TIMSS-undersøkelsen 2015 fikk elevene i gjennomsnitt en poengsum som tilsvarer rett over lavt nivå i matematikk på 9. trinn i emnet algebra (Bergem et al., 2016).

Det elevene viser av kompetanse opp mot kompetansemålene ligner nok mer på den enkle tolkningen av målene. Dette siden elevene er i stand til å lage både grafer, tabeller og løse tekstoppgaver. Det kommer ikke til syne at de er i stand til å gå fra enhver representasjon og representasjonssystem til et annet. Sammenligner vi det som kommer til syne i undervisningsøkta med det TIMSS-undersøkelsen 2015 fant ut om kompetansen til elevene i matematikk på 9. trinn i algebra stemmer det også godt overens. Det kan dermed se ut til at elevene trenger mer erfaring med ulike representasjoner og det å kunne veksle mellom ulike representasjonssystem uten problem for å få en bedre forståelse av konseptet funksjoner. Hvordan dette kan oppnås er derimot ikke en del av dette studiet.

6.0. Konklusjon

Gjennom ulike deler av denne teksten har jeg både presentert et forskningsspørsmål, spesifisert og svart på spørsmålet. Under vil jeg svare på dette spørsmålet kort og konsist for å gi leseren en kort oppsummering av hva forskningen har ført til. Jeg vil også komme med metodekritikk og hva studien vil ha å si for forskningsfeltet videre.

6.1. Tilbake til forskningsspørsmålet

Følgende forskningsspørsmål ble stilt: **Hvilken oppfatning og forståelse av matematikk og funksjoner kommer til syne i deres arbeid med representasjoner av funksjoner?**

Dette har jeg funnet ved hjelp av å samle inn kvalitative data gjennom deltagende observasjon og elevarbeid. Økta ble filmet og transkribert for å kunne analysere diskusjonen mellom elevene.

Oppfatningen som har kommet til syne gjennom hele økta har vært prosessuell oppfatning av matematikk og funksjoner. Dette har kommet fram gjennom analysen av elevarbeid og en analyse av diskusjon elevene imellom og forsker. Den forståelsen som kommer til syne er plassert på internaliseringstadiet til Sfard (1991). Internaliseringsstadiet er det første stadiet i utviklingen og læringen av et matematisk konsept der elevene blir kjent med og får erfaring med ulike prosesser innenfor funksjoner. Dette er drøftet med bakgrunn i hvilke oppgaver elevene mestret og hvordan de løste de aktuelle oppgavene. Den prosessuelle oppfatninga som kommer til syne minner om instrumentell forståelse (Skemp, 1976) da elevene vet hva de skal gjøre men ikke hvorfor. Det kan da til slutt bli et problem å huske alle reglene og prosessene som kan brukes på de ulike matematiske objektene.

En viktig del av analysen av elevenes forståelse av funksjoner var deres arbeid med overgangen mellom representasjoner og representasjonssystem. Her kom det til syne at elevene løste oppgavene ved hjelp av kongruente overganger mellom representasjonssystem. Det som gjorde overgangen mellom semiotiske representasjonssystem kongruent var at verdiene ble organisert på samme måte i begge representasjonene i de ulike representasjonssystemene. Dette er noe ifølge Duval (2006) noe de fleste elever vil klare. Det kommer ikke til syne at elevene mestrer å gjøre en ikke kongruent overgang mellom de ulike representasjonssystem og heller ikke at de er i stand til å gå fra ethvert representasjonssystem til et annet uten hjelp. Det blir vanskeligere å se det samme matematiske objektet i de to ulike representasjonene. Elevene kan da få problemer med å løse oppgaver utenfor en smal læringskontekst (Duval, 2006).

Som Brenner et al. (1997) påpeker og som nevnt i analysen av oppgavene elevene ble gitt trenger elevene problemløsningsferdigheter for å løse oppgavene. Siden elevene klarte å løse oppgaver av denne typen er det ingen tvil om at de innehar enkelte problemløsningsferdigheter. Elevene ender opp med å se at de kan løse alle oppgavene ved hjelp av de samme representasjonene. Likevel er også hvordan de løser oppgaven viktig for å si noe om hvilken forståelse av det matematiske konseptet som kommer til syne (Duval, 2006). For at mer forståelse skulle kommet til syne gjennom arbeidet med representasjoner av funksjoner så måtte elevene vist mer erfaring med variasjon innenfor hvert enkelt semiotiske representasjonssystem. I tillegg burde de vist at de kunne gå fra ethvert semiotisk representasjonssystem til et annet uten hjelp. Det er viktig å kommentere at jeg kun har sett på hvilken oppfatning og forståelse som har kommet til syne i min økt. Det kunne vært andre funn med andre oppgaver, andre forskere eller andre lærere til stede.

6.1.1. Metodekritikk

Som en del av metodekritikken vil jeg trekke fram at elevene kunne fått enda mer varierte oppgaver. Dette kunne vært å kjenne igjen utrykket til en graf, fått elevene til å løse en oppgave der de hadde vært tvunget til å gjøre en ikke kongruent overgang mellom semiotiske representasjonssystem. Da kunne jeg med mer sikkerhet sagt noe om elevene mestret eller ikke mestret den typen ikke kongruent overgang mellom representasjonssystem.

Det å si noe sikkert om matematisk forståelse er vanskelig da det ikke er mulig å se inn i hodet på elevene. Denne typen kvalitativ forskning vil dermed bli veldig spekulativ og datamaterialet kan tolkes på flere ulike måter. Samtidig har jeg prøvd å begrunne godt nok i teori hvorfor ulike valg er tatt og tolkninger gjort.

6.1.2. For videre forskning

For videre forskning kan det være en ide å tenke på hvordan man kan legge opp undervisningen for at elevene skal sitte igjen med den dype forståelsen av matematikk som vi ønsker. De rammeverkene jeg her har brukt kan hjelpe en lærer både til å planlegge og undervise matematikk. Selv om jeg kun har sett på elevenes arbeid med representasjoner av funksjoner kan rammeverkene brukes i alle deler av matematikken. Som Sfard (1991) skriver så er veien mot utviklingen av konsept både historisk og når det gjelder læring en lang prosess. Dette ser jeg for meg i læreryrket krever god planlegging og veiledning av hvilke oppgaver og opplegg elevene får erfaring gjennom.

Arbeidet med dette prosjektet viser at det er mulig å benytte seg av disse rammeverkene i praksis. Med kunnskap om dette rammeverket kan læreren kunne tenke seg noe om hvilken forståelse som kommer til syne i elevenes diskusjoner og elevarbeid. Læreren kan da fortløpende se hvilken forståelse som kommer til syne hos hver enkelt elev. Videre kan læreren hjelpe elevene til å få mer erfaring med varierte representasjoner innenfor et semiotisk representasjonssystem og kunne gå fra ethvert semiotisk representasjonssystem til et annet. Jeg er overbevist om at vi ikke bare kan lykkes i realfag, men at vi også kan lykkes bedre i emnet algebra.

7.0. Litteraturliste

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag*. Oslo: Universitetsforlaget.

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Reed, B. S. & Webb, D. (1997). Learning by Understanding: The Role of Multiple Representations in Learning Algebra. *American Educational Research Journal, 34*(4), 663-689.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forl.

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K. & Bell, R. C. (2011). *Research methods in education* (7th ed. utg.). London: Routledge.

Corbin, J. M. & Strauss, A. L. (2015). *Basics of qualitative research : techniques and procedures for developing grounded theory* (4th ed. utg.). Thousand Oaks, Calif: Sage.

Dalland, O. (2007a). *Metode og oppgaveskriving for studenter* (4. utgave. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Dalland, O. (2007b). *Metode og oppgaveskriving for studenter* (Helse- og sosialfag Høgskole, 4. utgave. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-102), p.103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Fangen, K. (2004). *Deltagende observasjon*. Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. I C. Janvier (Red.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *An International Journal, 22*(1), 1-36. doi:10.1007/BF00302715

Skemp, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. Harmondsworth: Penguin.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*.

Säljö, R. & Moen, S. (2001). *Læring i praksis : et sosiokulturelt perspektiv* (Lärande i praktiken ett sociokulturellt perspektiv). Oslo: Cappelen akademisk.

Tripathi, P. N. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438-445.

Utdanningsdirektoratet. (2013a). *LÆREPLAN I MATEMATIKK FELLESFAG: Grunnleggjande ferdigheiter*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Grunnleggende_ferdigheter

Utdanningsdirektoratet. (2013b). *LÆREPLAN I MATEMATIKK FELLESFAG: Kompetansemål etter 10. årssteget*. (2016): Utdanningsdirektoratet. Hentet fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-10.-arssteget

Vygotskij, L. S., Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S. & Souberman, E. (1978). *Mind in society : the development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Vedlegg 1: Infoskriv og samtykkeskjema

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjekt i matematikk

«Overgangen mellom representasjoner og begrepsforståelse»

Bakgrunn og formål

Denne studien er en mastergradsstudie ved grunnskolelærerutdanningen ved NTNU. Formålet med studiet er å se på hvordan elever jobber med ulike representasjoner og deres forståelse av en matematisk ide. Studiet vil være en stor del av å utvikle min egen kompetanse som lærer. Elevene som blir med i studien blir valgt ut etter samtale med kontaktlærer og kun etter underskrevet samtykkeerklæring av en forelder/foresatte.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Det vil under studien bli valgt ut en liten gruppe elever som blir med i en egen undervisningsøkt på ca. en klokketime som omhandler algebra. Elevenes diskusjon rundt utvalgte oppgaver i ettertid av undervisningen vil bli gjenstand for observasjon der meg selv som lærer også er deltakende. Observasjon vil si at det vil bli tatt notater og lyd/filmopptak som igjen vil bli transkribert til et dokument. Elevarbeid vil også bli samlet inn i etterkant av diskusjonen.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Datamaterialet vil bli lagret og kryptert på privat datamaskin og ekstern harddisk beskyttet med passord. Tilgang til datamaterialet som samles inn vil være tilgjengelig for prosjektansvarlige ved NTNU, og bearbeidete data vil formidles i masteroppgaven. Data som publiseres vil være anonymisert og vil ikke kunne knyttes til enkeltdeltakere.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 30.06.2017. Alle data vil da bli fullstendig anonymisert, og lyd- og video-opptak vil slettes.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert. Frivillig deltakelse innebærer også at barnet selv kan trekke seg fra undersøkelsen uten grunn.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med masterstudent Lars Helge Staldvik, larshsta@stud.ntnu.no, tlf 91512237 eller veileder og førsteamanuensis Yvonne Grimeland, yvonne.grimeland@ntnu.no, tlf 48114352

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS, med prosjektnummer 50535

Samtykke til deltakelse i studien

Forelders/ foresattes samtykkeskjema

Jeg bekrefter at jeg har lest informasjonsarket og samtykker i at mitt barn deltar i aktiviteter knyttet til studien.

Barns navn/klasse:____

Jeg samtykker i at: (Kryss av der det passer)

- Mitt barn deltar i diskusjoner og at det gjøres lydopptak av diskusjonene til transkribering og analyse. Anonymiserte sitater fra barnet, der barnet ikke skal nevnes eller identifiseres, brukes i studiets rapporter, publikasjoner og begivenheter.

- Det tas videoopptak av barnet, som en del av matematikkundervisning og diskusjon. Videoen kan brukes av masterstudent og veileder. Videoen skal ikke offentliggjøres.

Sted og dato:____

Forelders/ foresattes underskrift: ____

Vennligst lever skjemaet til _________________

Tusen takk!

Vedlegg 2: Oppgaveark

Oppgaveark
Oppgave 1:
Når du skal sende en pakke i posten koster det 140kr for å sende en pakke på 2kg og 700kr å sende en pakke på 10kg. Hvor mye koster det å sende en pakke på 6kg?

- Lag en tabell som løser oppgaven
- Lag en graf som løser oppgaven
- Er det andre måter å løse oppgaven på?

Oppgave 2:
Mari jobber i en sportsbutikk og tjener 165kr i timen. Når hun allerede har 250kr, hvor mange timer må hun jobbe for å få 2165kr?

- Løs oppgaven ved hjelp av en graf
- Løs oppgaven ved hjelp av en tabell
- Er det andre måter å løse oppgaven på?

Oppgave 3:
En bil kjører med jevn fart i 80 km/t.

- Hvordan kan vi vise/beskrive forholdet mellom avstand og tid?
- Begrunn svaret i diskusjon, hvorfor er dette riktig?