Geir Karlsen

Hvilke sammenhenger kan vi se mellom elevers forkunnskaper om brøk og hvordan de løser oppgaver knyttet til divisjon med brøk?

Hvilke forkunnskaper synes å være mest sentrale for å kunne løse oppgaver med divisjon med brøk?

Hovedoppgave i Master i Matematikkdidaktikk 5.-10. trinn

Veileder: Svein Arne Sikko

Trondheim, mai 2017

Hovedoppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Geir Karlsen

Hvilke sammenhenger kan vi se mellom elevers forkunnskaper om brøk og hvordan de løser oppgaver knyttet til divisjon med brøk?

Hvilke forkunnskaper synes å være mest sentrale for å kunne løse oppgaver med divisjon med brøk?

Hovedoppgave i Master i Matematikkdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Svein Arne Sikko
Trondheim, mai 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Nå er arbeidet med masteroppgaven ferdigstilt. Det har vært tre utfordrende og krevende år. Mye har forandret seg, også til det bedre, siden jeg gikk på allmennlærerutdanningen 1993-1997. Studentene har blitt mye yngre, eller er det jeg som har blitt ørlite eldre? Arbeidsmåter og oppgavetyper har endret seg. Elevaktiviteten i studiet har økt og det er nye krav. Det faglige nivået har også vært betraktelig høyere enn der jeg avsluttet for 20 år siden. En liten personlig omstillingsprosess tvang seg frem. Utfordrende ja, men spennende – absolutt!

Jeg har i denne perioden hatt base på Oppdal og dermed ikke deltatt daglig i studiemiljøet på Rotvoll. Det har dermed vært en ekstra positiv erfaring å delta på studiesamlingene. Det å bli inkludert i det positive, reflekterte og interesserte miljøet som gruppen av masterstudenter og lærere/veiledere har skapt, har vært både inspirerende og lærerikt.

I arbeidet med denne oppgaven har jeg hatt flere bidragsytere på laget. Jeg vil spesielt få takke Roberth Åsenhus ved Matematikksenteret for tilgang til de læringsstøttende prøvene. Han har vært en god støttespiller og drøftingspartner i arbeidet med å skulle utarbeide egen kartleggingsprøve og analysere resultatene i etterkant.

En stor takk må jeg også rette til ledelse og kolleger ved Oppdal ungdomsskole for god tilrettelegging og støtte i forbindelse med arbeids- og skrivesituasjon i dette studiet.

Sist, men ikke minst, vil jeg få takke min veileder, Svein Arne Sikko, førsteamanuensis ved institutt for lærerutdanning, for grundig og konstruktiv tilbakemelding på min oppgave. Hans faglige oversikt og erfaring har vært avgjørende for å komme i mål med denne oppgaven.

Nå ser jeg frem til å, med fornyet inspirasjon og engasjement, ta i bruk ny lærdom. Både knyttet til egen undervisning og kommunens satsing på regning som en grunnleggende ferdighet. For egen del ønsker jeg å få til en praksisendring som kommer elevene til gode.

Geir Karlsen

Oppdal, mai 2017

Innhold

Tabeller og figurer

Tabeller

Figurer

1.0 Bakgrunn for oppgaven

Min inngang til denne masteroppgaven er noe annerledes enn hos de fleste. Jeg har nå arbeidet i Oppdal kommune siden 1997. I perioden frem til i dag har jeg undervist i blant annet matematikk på alle trinn i grunnskolen, fordelt på fire skoler (tre barneskoler og én ungdomsskole). I denne perioden har jeg også vært rektor ved to barneskoler. Fra og med 1. januar 2013 har jeg arbeidet ved Oppdal ungdomsskole, da hovedsakelig som inspektør med 50 % undervisningsressurs. Jeg underviser nå i matematikk både i klasse og gir spesialundervisning i liten gruppe. Gjennom en lang og variert arbeids – og undervisningspraksis har jeg møtt mange utfordringer som gir grunn til ettertanke. Jeg har blant annet sett tegn til at elever som har vansker med matematikk stagnerer i sin utvikling rundt 4. klasse. Etter dette lærer de svært lite og motivasjonen for faget synker naturlig nok som en konsekvens av det. I 5.-10. klasse har disse elevene da 641[1] timer med matematikk foran seg som gir dem lite eller ingen mening. Da er det naturlig å spørre seg selv om hva det er vi gjør feil. Med denne oppgaven har jeg et ønske om å finne ut mer om hvilke begreper som er sentrale for at elever skal kunne forstå mer komplekse regneoperasjoner. Dette er kunnskap jeg kan ta med inn i egen fremtidig praksis, både som lærer for egne elever og inn i kommunens satsing på regning som grunnleggende ferdighet.

Hva er problemet med utdanningen i matematikk? Julie Ryan og Julian Williams stiller dette spørsmålet i introduseringen av sin bok Children`s Mathematics 4-15 (Ryan & Williams, 2007, s. 32). I etterkant av offentliggjøring av resultatene fra Pisa-undersøkelsen 2012, uttrykte Kunnskapsminister Torbjørn Røe Isaksen også sin bekymring: «Den nye PISA-undersøkelsen viser at vi har et realfagsproblem i Norge. Det bekymrer meg sterkt. Resultatene er rett og slett ikke gode nok»[2]. Nå viser resultatene fra Pisa-undersøkelsen 2015 en bedring, men trekker vi linjene tilbake til 2003, så har vi likevel hatt en nedgang. I PISA 2015 er spredningen i de norske matematikkresultatene lav sammenliknet med tidligere PISA-undersøkelser. I tillegg er det færre elever med kompetanse på lavt nivå. Det er med andre ord flere tegn til bedring i resultatene til de norske elevene. Først i 2021, når matematikk igjen er hovedområde, vil vi se om de nye positive resultatene representerer en trend.

[1] https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Timetall
[2] https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/pisa-2012-svakere-resultater-i-matematik/id747180/

Nordtvedt og Pettersen sier i Stø kurs: norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015 at, ifølge Shimizu, så må elevene få arbeide med oppgaver og aktiviteter som lar dem utvide den matematiske kunnskapen de allerede har til nye gyldighetsområder (Shimizu, i Kjærnsli & Jensen, 2016, s. 131). Dette vil kunne gi elevene en dypere innsikt og motivere til videre læring. Nordtvedt og Pettersen viser i denne sammenhengen også til Olsen, som i sin analyse av resultatene i Pisa 2012, fant at over halvparten av de norske elevene sjelden eller aldri møtte kognitivt stimulerende oppgaver i matematikk – undervisningen (Olsen, i Kjærnsli & Jensen, 2016, s. 131). Dette er oppgaver som elevene ikke kan løse ved hjelp av innøvde rutiner eller prosedyrer, men som krever en problembasert tilnærming. Matematikksenteret fremhever at en problembasert oppgave innbyr til diskusjoner med andre når det gjelder deling av ideer og forståelse av matematiske begreper. I Japan legges det stor vekt på problembaserte oppgaver, som er nøye planlagt, tilpasset og organisert, i undervisningen. Lærerens rolle blir da å stimulere elevenes tenkning til at de finner sine egne metoder og prosedyrer for å løse problemene. Lærerens rolle skal ikke være å presentere løsninger på problemene som blir gitt. Nordtvedt og Pettersen viser også til Hiebert som i sin analyse av TIMSS 1999 video study fant at japanske elever i gjennomsnitt arbeidet med færre og mer krevende oppgaver i hver time enn elever i de andre landene som deltok i studien (USA, Australia, Tsjekkia, Hong Kong, Nederland og Sveits). Nordtvedt og Pettersen trekker også frem Geary som i sin forskning fant at lavtpresterende elever i stor grad får sin undervisning i form av trening på algoritmer (Geary, i Kjærnsli & Jensen, 2016, s. 132). Det påpekes her at også lavtpresterende elever må få arbeide med et bredere spekter av oppgaver og aktiviteter. Matematikksenteret skriver blant annet at bruk av rike oppgaver kan være én måte å skape en matematikkundervisning på der flere elever møter kognitivt stimulerende oppgaver. En undervisning der også lavtpresterende elever får mulighet til å tilegne seg en helhetlig matematisk kompetanse gjennom å resonnere, kommunisere, modellere problemer og vurdere svar. Rike oppgaver kan gis på alle faglige nivåer[3]. Det er viktig at alle elever får arbeide med oppgaver som virker kognitivt stimulerende på dem. Dette er oppgaver der de må hente frem og knytte sammen matematiske kunnskaper fra ulike fagområder. Nordtvedt og Pettersen viser her til Niss som sier at oppgaver er kognitivt stimulerende når elevene må streve litt, det vil si tenke lenge og dypt (Niss, i Kjærnsli & Jensen, 2016, s. 133). Dette er også i tråd med Boaler, som mener at når vi strever, så utfordres hjernen og som følge av det øker dens utvikling (Boaler & Dweck, 2016, s. 12).

[3] http://www.matematikksenteret.no/stottemateriell/veiledning/

For meg danner dette et bakteppe for hvorfor jeg ønsker å skrive en master i matematikkdidaktikk rettet mot opplæring i grunnskolen. For det første blir ikke opplæringen som blir gitt i matematikk oppfattet som god nok, spesielt ikke sett i sammenheng med internasjonale undersøkelser. Når vi så ser bak resultatene viser det seg at de landene som lykkes med sin opplæring i matematikk, har en annen tilnærming til undervisningen enn det vi tradisjonelt sett har i norske klasserom. Det er her snakk om relasjonelle kunnskaper og problembaserte oppgaver. Etter 20 år i norsk skole er jeg fremdeles nysgjerrig og ønsker å lære noe nytt, noe nytt som først og fremst kan gjøre meg til en bedre lærer. Sekundært ser jeg også at prosessen jeg går gjennom med å skrive master, også vil kunne gjøre meg til en bedre skoleleder. Dersom min forskning leder frem til interessante funn vil jeg gjerne dele disse med andre kolleger. I min kommune ligger det godt til rette for å dele ideer og erfaringer. På egen skole har vi ukentlig fagsamarbeid på trinn. Vi har også fagvise seksjonsmøter på tvers av trinn. Kommunalt er vi inne i en satsing på regning som grunnleggende ferdighet for 1.-10. trinn. Et viktig prinsipp i vår felles kompetanseheving er erfaringsdeling. Etter hvert er det tenkt at også barnehagene skal koble seg på denne satsningen.

I denne oppgaven ønsker jeg å sette elevenes kunnskaper og læring i fokus. Jeg har valgt meg et tema som for elevene ofte oppleves som abstrakt og vanskelig. Mitt hovedtema er brøk. Chapin og Johnson viser til Beezuk og Bieck som sier at forskere har konkludert med at brøk er det emnet som skaper størst vansker for elever i grunnskolen enn noe annet område i matematikken (Beezuk og Bieck, i Chapin & Johnson, 2006, s. 99). Bezuk og Cramer viser igjen til forskning gjort av Lindquist et al. som viste at elever i alderen 9, 13 og 17 år var lavtpresterende innen emnet brøk. Regningen som ble utført var med lite forståelse (Lindquist et al., i Bezuk & Cramer, 1989, s. 156). Brøk er derfor et både viktig og utfordrende tema å forske på. Innenfor temaet brøk har jeg valgt divisjon med brøk, igjen fordi dette er utfordrende, både for lærer og elev. Temaet er utfordrende fordi det er vanskelig å sette det i en kontekst og gi elevene ulike representasjoner for hva det innebærer å dividere to brøker. Av erfaring har jeg sett at flere læreverk legger opp til at det læres proseduralt.

Elevene gis da et eksempel med en formel som de i etterkant skal benytte i likelydende oppgaver (Gulbrandsen, Løchsen, & Melhus, 2007, s. 32).

I læreplanen, LK06, finner vi igjen temaet i kompetansemålene for 10. trinn, under hovedområdet Tall og algebra[4]:

> Mål for opplæringa er at eleven skal kunne:
>
> - samanlikne og rekne om mellom heile tal, desimaltal, brøkar, prosent, promille og tal på standardform, uttrykkje slike tal på varierte måtar og vurdere i kva for situasjonar ulike representasjonar er formålstenlege
> - rekne med brøk, utføre divisjon av brøkar og forenkle brøkuttrykk
> - behandle, faktorisere og forenkle algebrauttrykk, knyte uttrykka til praktiske situasjonar, rekne med formlar, parentesar og brøkuttrykk og bruke kvadratsetningane

(Kunnskapsløftet, 2006)

Vi ser at regning med brøk er et sentralt tema i matematikkfaget, og at det knyttes opp mot andre begreper og ferdigheter, som for eksempel regning med prosent og algebra.

1.1 Problemstilling for oppgaven

Jeg har derfor, med utgangspunkt i overnevnte, laget meg følgende problemstilling:

Hvilke sammenhenger kan vi se mellom elevers forkunnskaper om brøk og hvordan de løser oppgaver knyttet til divisjon med brøk?

Hvilke forkunnskaper synes å være mest sentrale for å kunne løse oppgaver med divisjon med brøk?

1.2 Oppgavens oppbygning

Som rammeverk for denne oppgaven ser jeg på Liping Mas teori om «knowledge package» for divisjon med brøk (Ma, 1999). Denne teorien kommer som et resultat fra hennes forskning som sammenligner læreres forståelse av grunnleggende matematikk i USA og Kina. «Knowledge package» har jeg oversatt direkte til kunnskapspakke.

[4] https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-10.-arssteget

Denne kunnskapspakken sier noe om hvilke underliggende begreper som må være til stede i elevenes begrepsapparat for at de skal kunne ha forutsetninger for å forstå divisjon med brøk. Det finnes flere ulike kunnskapspakker for divisjon med brøk. For eksempel finner vi en i Xuhua Suns artikkel Variation problems and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples (Sun, 2011). Disse er i hovedsak like, men jeg valgte å bruke Liping Ma sin som utgangspunkt fordi hun i større grad har knyttet den til lærerens undervisningskompetanse. For meg er det viktigst å få en større forståelse av hvordan en best mulig kan legge til rette for undervisning som bygger opp et solid begrep innenfor divisjon med brøk.

Ma trekker i sin forskning inn begrepene prosedural og konseptuell forståelse. Dette er sentrale begreper også i min oppgave. Det ble derfor nødvendig å definere hva de står for. Jeg valgte James Hiebert sin teori som referansegrunnlag (Hiebert & Lefevre, 1986). Hieberts teori er høyst relevant for og nærliggende å bruke i denne oppgaven, blant annet fordi han tar utgangspunkt i faget matematikk.

Når jeg er inne på forkunnskaper og hvilken forståelse elever har til oppgavene, er det for meg naturlig å knytte dette til teori om misoppfatninger. Utfordringen det er å nøste opp i elevenes tankegang bak de svar som er avgitt, er spennende. Samtidig gir det veldig viktig informasjon om hvordan en kan skape en kognitiv konflikt hos eleven slik at ny læring kan skje. Jeg har herunder valgt å bruke Gard Brekkes teori om diagnostisk undervisning. Hans arbeid utgjør også deler av grunnlaget Matematikksenteret arbeider etter når de utarbeider nye læringsstøttende prøver, etter oppdrag fra Utdanningsdirektoratet (Brekke, 1995). For å få en dypere forståelse innen dette emnet, har jeg også valgt å trekke inn Jo Boalers forskning innen matematiske holdninger. Hun ser på hvordan vi kan frigjøre elevenes potensiale gjennom kreativ matematikk, inspirerende tilbakemeldinger og innovativ undervisning. Et viktig element i denne forskningen er kraften som ligger i det å gjøre feil og anstrenge seg litt ekstra i arbeidet med å løse oppgaver. Elevene skal arbeide problembasert og gjenoppdage matematikken (Boaler & Dweck, 2016).

I dette elementet av forskningen ligger også det å arbeide med elevenes misoppfatninger. Teori om misoppfatninger og ulike typer misoppfatninger knyttet til brøkforståelse er viktig kunnskap når jeg skal tolke og drøfte elevsvarene fra kartleggingen.

Teori om diagnostisk undervisning vil i denne sammenhengen gi klare implikasjoner for fremtidig undervisningspraksis. Derfor har jeg i tillegg tatt inn Constance Kamiis forskning på hvilken effekt for tidlig undervisning av algoritmer kan gi. Hun har et sterkt fokus på hvor viktig det er å arbeide grundig med forståelse av begrepene (Kamii & Dominick, 1998).

Dette fokuset på at elevenes forståelse av begreper må ligge til grunn, kan lett settes i sammenheng med en problembasert tilnærming av fagstoffet. I en forskningsbasert læringskultur vil det også være nærliggende å arbeide med elevenes misoppfatninger.

For å kartlegge elevenes forkunnskaper innen divisjon med brøk, har jeg tatt utgangspunkt i Matematikksenterets pilotering av en læringsstøttende prøve innen brøk og prosent. Denne prøven har jeg videreutviklet og tilpasset, slik at den tester det jeg ønsker i forhold til Mas kunnskapspakke for divisjon med brøk. Den ferdige kartleggingsprøven gjennomførte jeg med elever på 10. trinn på egen skole. Elevsvarene jeg fikk har jeg analysert for å se om det finnes et mønster for hvilke forkunnskaper som kreves for å løse oppgaver med divisjon med brøk. Eller for å snu det på hodet: Hvilke forkunnskaper mangler elever som ikke kan løse oppgaver med divisjon med brøk.

Deretter har jeg drøftet de funn jeg har gjort i analysen opp mot valgt teori. Denne drøftingen belyser hvilke årsakssammenhenger som er av størst betydning for at elever ikke har forutsetninger for å kunne løse oppgaver med divisjon med brøk. I påfølgende konklusjon trekker jeg frem de viktigste funnene fra min forskning.

Fra en lærers ståsted er det videre interessant å se nærmere på hvilke implikasjoner de funn jeg har gjort kan ha for min videre undervisning, ikke bare i forhold til regning med brøk, men også i andre emner. Derfor vil jeg i etterkant av konklusjonen trekke noen tråder i retning av hvilke didaktiske implikasjoner funnene gir, med å stille spørsmålet:

Hvordan kan vi i undervisning legge til rette for at elevene skal lære sentrale forkunnskaper slik at de kan arbeide med forståelse i overordnede begreper?

Her vil jeg også trekke inn Ludvigsenutvalgets utredning, «Fremtidens skole» og fremheve noen sammenhenger mellom sentrale elementer i denne oppgaven og viktige kompetanseområder for fremtiden (NOU 2015:8, 2015).

2.0 Forståelse og kunnskap i matematikk

Konseptuell og prosedural kunnskap representerer en forskjell som ofte har vært gjenstand for diskusjon og debatt opp gjennom årene (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 1). Spørsmål om hvordan elever lærer matematikk, og spesielt hvordan de skal undervises, gir problemstillinger som:

Hvilken kunnskap er viktigst?

Eller eventuelt

Hvilken balanse mellom konseptuell og prosedural kunnskap er passende?

Denne diskusjonen foregår også utover matematikkfaget. Skillet mellom begreper og prosedyrer spiller en viktig rolle også i mer generelle spørsmål om kunnskapstilegnelse.

I enkelte teorier om læring og utvikling er dette skillet det sentrale (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 1). Selv om det er variasjoner i typer kunnskap som identifiseres i de ulike teoriene, så overlapper de hverandre. Forskjellene går hovedsakelig på grad av vektlegging innenfor begrepene som benyttes. Det synet som Hiebert utdyper på konseptuell og prosedural kunnskap drar veksler på flere andre, deriblant Scheffler, som beskriver dette som «knowing that» og «knowing how to» (Scheffler, i Hiebert & Lefevre, 1986, s. 1). Skemp skiller disse begrepene med relasjonell forståelse og instrumentell forståelse. Relasjonell forståelse er her å vite både hvordan og hvorfor, mens instrumentell forståelse er regler uten begrunnelse (Skemp, 2006, s. 89).

Matematikk har en stram struktur og et klart definert innhold. Faget har derfor blitt en arena der konseptuell og prosedural kunnskap diskuteres. Det største skillet i denne diskusjonen går mellom ferdighet og forståelse. Utgangspunktet for denne diskusjonen er ofte og dypest sett, om det er ferdighet eller forståelse som i størst grad skal vektlegges i undervisningen. Jeg skriver «dypest sett» fordi jeg av erfaring vet at diskusjonene tilsynelatende dreier seg om metode, men der den egentlige diskusjonen handler om kunnskaps- og læringssyn.

Konseptuell og prosedural forståelse er også sentrale begreper i teorien bak Liping Mas kunnskapspakke, både den for divisjon med brøk, og for subtraksjon med omgruppering og multiplikasjon av flersifrede tall, som hun beskriver i sin forskning.

For bedre å forstå innholdet i og bakgrunnen for kunnskapspakken, vil jeg utdype hva konseptuell og prosedural forståelse er.

2.1 Konseptuell og prosedural forståelse

Konseptuell forståelse er karakterisert som kunnskap som er rik på relasjoner (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3). Vi kan tenke på konseptuell kunnskap som et nettverk av begreper, der relasjonene som holder nettverket sammen er like fremtredende som de ulike begrepene det består av. Relasjonene gjennomsyrer enkeltstående fakta og påstander, slik at alle deler av informasjon er koblet til et nettverk. En enhet av konseptuell kunnskap kan ikke være en isolert bit av informasjon. Per definisjon snakker vi kun om konseptuell kunnskap hvis en kjenner til dens relasjoner til annen informasjon (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 4). Utvikling av konseptuell kunnskap oppnås dermed gjennom konstruksjon av relasjoner mellom deler av informasjon. Denne «koblingsprosessen» kan oppstå mellom to deler av informasjon eller begreper som allerede er lagret i minnet. Koblingsprosessen kan også oppstå mellom forkunnskaper og nylig lært kunnskap. Ifølge Robert Lawler (Lawler, i Hiebert & Lefevre, 1986, s. 4) kan relasjoner koble sammen små deler av informasjon eller hele nettverk av begreper. Når tidligere uavhengige nettverk kobles sammen, får relasjoner til hverandre, skjer det en betydelig kognitiv reorganisering. Robert Davis sier at «Forståelse» kanskje er det mest brukte begrepet når en skal beskrive hvilken form for kunnskap en innehar når ny matematisk kunnskap er hensiktsmessig koblet til eksisterende kunnskap (Davis, i Hiebert & Lefevre, 1986, s. 4).

Begrepet prosedural forståelse består i henhold til Hiebert (1986) av to ulike deler. Den ene delen består av matematikkens formelle språk, systemet for de matematiske symboler. Den andre delen inneholder algoritmene, eller reglene, for å løse matematiske oppgaver.

Å kjenne matematikkens formelle språk innebærer å være fortrolig med symbolene som brukes til å representere matematiske ideer. Samtidig må en ha en bevissthet om de syntaktiske reglene for å skrive symboler på en akseptabel måte.

Kunnskap om matematikkens formelle språk inkluderer bare en bevissthet om overfladiske egenskaper, ikke en kunnskap om forståelse/mening.

Å kjenne matematikkens algoritmer, regler og prosedyrer, innebærer å kunne instruksjoner som beskriver steg for steg hvordan matematiske oppgaver skal fullføres. En nøkkelegenskap hos disse prosedyrene er at de utføres i en forutbestemt lineær sekvens. Den klare sekvensielle egenskapen til disse prosedyrene skiller dem fra andre former for kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 6). Prosedyrene som her beskrives kan karakteriseres som oppskrifter som utføres i en bestemt rekkefølge.

Knyttet til konseptuell forståelse av et emne og læreres kunnskaper om en algoritme setter Ma konseptuell og prosedural kunnskap i relasjon til hverandre (Ma, 1999, s. 25 og 39). Hun sier med dette at prosedural kunnskap er en viktig del av konseptuell kunnskap. Hverken prosedural kunnskap eller konseptuell kunnskap står godt alene. I undervisning vil rekkefølge og vektlegging være av betydning. Dette kommer jeg tilbake til i neste delkapittel om knowledge package.

Denne problematikken tar også Constance Kamii opp i «The Harmful Effects of Algorithms in Grades 1-4» (Kamii & Dominick, 1998). Hennes forskning tok utgangspunkt i dokumentasjon som viste at elever feilaktig endret algoritmene for regning med flersifrede tall. Reglene som elevene kom opp med viste at deres fokus var på å forsøke å huske algoritmene steg for steg, i stedet for å logisk forsøke å løse oppgavene. Dette førte til at flere forskere begynte å stille spørsmål til hvor hensiktsmessig det er å undervise i konvensjonelle algoritmer. De vil si undervisning med proseduralt fokus. Ifølge Kamii viste forskning gjort av Carragher og Schliemann at elever som brukte egne løsningsmetoder hadde større sjanse for å få riktig svar enn elever som brukte algoritmer. De begynte derfor å tro at algoritmer heller var til hinder enn til hjelp for elevenes tenkning og forståelse (Carragher og Schliemann, i Kamii & Dominick, 1998, s. 130). Noen forskere gikk i 1990-årene lengre og konkluderte med at algoritmer var skadelige for elevene. Kamii refererer også til Narode, Board og Davenport. De sammenlignet 2. klassinger før og etter de ble lært algoritmer og konkluderte med at elevene mistet konseptuell forståelse når de lærte regler (Narode, Board og Davenport, i Kamii & Dominick, 1998, s. 131). Kamii selv sammenlignet elever, fra 2. – 4. klasse, som hadde lært algoritmer med elever som aldri hadde lært algoritmer. Hun fant at de elevene som tenkte selv, det vil si ikke baserte seg på algoritmer, fikk flere riktige svar og hadde en mye bedre forståelse av plassverdisystemet.

Kamii påpekte i denne forbindelse at våre nå konvensjonelle algoritmer kunne hoppe over hele denne prosessen frem mot algoritmen (Kamii & Dominick, 1998).

I egen forskning sier Kamii at undervisning i algoritmer baserer seg på en feilaktig antakelse om at matematikken er en kulturell arv som må overføres til neste generasjon. Basert på blant annet Piagets konstruktivisme laget Kamii en hypotese som står sterkt i kontrast til denne antakelsen: Elever i barneskolen skal være i stand til å finne opp sin egen tallteori eller regning (Piaget, i Kamii & Dominick, 1998, s. 132). De skal være i stand til å gjenoppdage matematikken uten de instruksjoner de i dag får fra lærebøker. Kamii sier med dette at algoritmer er viktige, men at elevene selv må finne frem til dem.

Dette er også i tråd med hvordan Hans Freudenthal argumenterte (Freudenthal, 1972, s. 118), og er en bærende ide innen RME, Realistic Mathematic Education. Det å la elevene gjenoppdage matematikken kalles innen RME for Guided reinvention[5]. Med hypotesen om at algoritmer er skadelige for elevers læring, sammenlignet Kamii prestasjonene til elever som aldri hadde blitt undervist i konvensjonelle regler mot elever som har fått slik undervisning. Elevene som ikke hadde blitt undervist i algoritmer løste oftere oppgavene riktig. Samtidig, hvis de løste oppgavene feil, var feilene mer fornuftige. Ut i fra sine funn konkluderer Kamii med at algoritmene er skadelige for elevenes læring av to årsaker. For det første fratar de elevene sin egen tenkning. For det andre avlærer de elevene kunnskap om plassverdisystemet. Dermed forhindrer de også elevene i å utvikle sin tallforståelse. Funnene i Kamiis forskning innebærer at elevene må gjennom prosessen med å konstruere sin egen kunnskap, slik at de kan øve opp egen evne til å løse problemer (Kamii & Dominick, 1998).

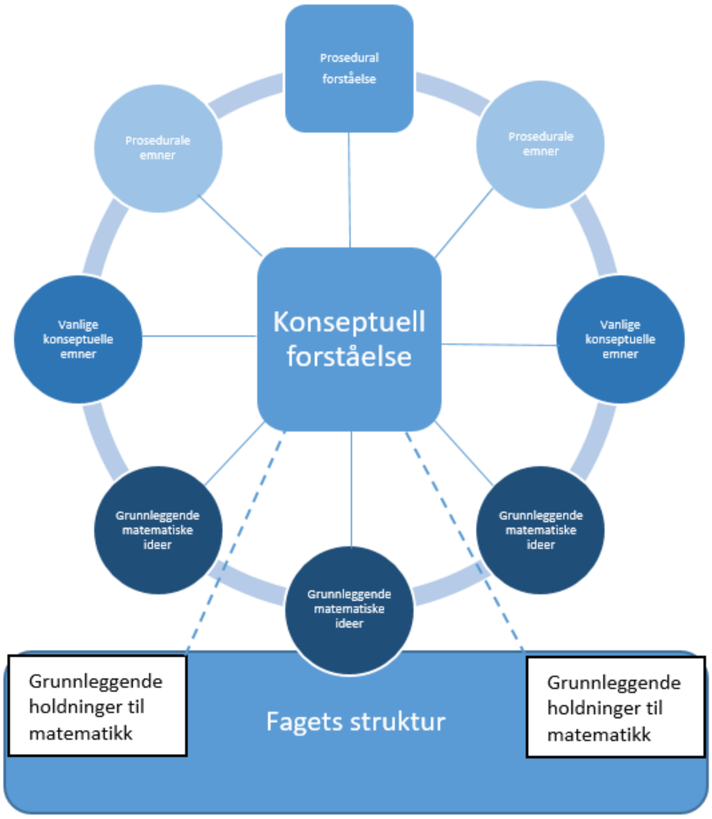
2.2 Knowledge package

Vektlegging av konseptuell forståelse er en av grunnpilarene i kinesisk undervisning. Det innebærer at en forstår fagets struktur. Da har en opparbeidet seg en forståelse som gir meningsfulle relasjoner til andre begreper. Liping Ma siterer Bruner som sier at å lære seg fagets struktur, er nært knyttet til å lære hvordan begreper står i relasjon til hverandre (Bruner, i Ma, 1999, s. 24).

[5] http://www.fius.org/

Mas forskning (1999) viser at lærere som inkluderer fagets grunnleggende ideer i sin undervisning, ikke bare fremmer konseptuell forståelse, men de forbereder også elevene til fremtidig læring.

Dette innebærer blant annet at de også utvikler en holdning til læring og undersøkelse. Elevene vil da gis bedre muligheter til å på egenhånd løse problemer (Bruner, i Ma, 1999, s. 24). Sammenhengen mellom fagets struktur via prosedural forståelse og til konseptuell forståelse kan ifølge Ma visualiseres gjennom følgende modell:



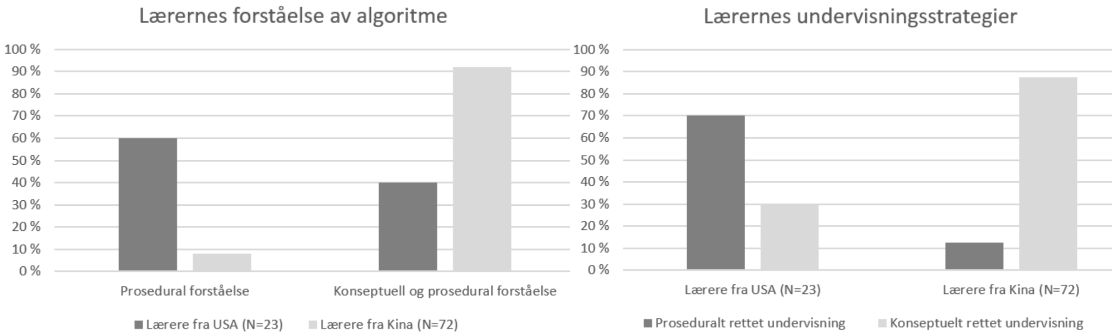
Figur 1 Konseptuell forståelse av et emne (Ma, 1999, s. 25)

Figur 1 viser, med fagets struktur og våre holdninger til matematikk som grunnlag, de relasjoner konseptuell forståelse har til grunnleggende matematiske ideer, konseptuelle emner, prosedurale emner og ikke minst prosedural forståelse. Alle begrepene står i klar relasjon til hverandre.

Det er viktig at det tas utgangspunkt i fagets struktur når undervisningen skal planlegges. Utgangspunkt i fagets struktur vil gi en bedre oversikt over hvilke begreper som står i hvilken relasjon til hverandre.

Læreren vil da på en bedre måte kunne bestemme hvilken faglig tilnærming som er best og hvilken konkretisering som støtter denne i størst mulig grad. Ifølge Liping Ma (1999) er det en klar sammenheng mellom lærerens fagkunnskap og dens tilnærming til undervisning. Lærere som selv kun har prosedural forståelse av emnet vil naturlig nok ha en tendens til å vektlegge prosedyrene.

For eksempel vil de rett frem fortelle elevene at de må memorere algoritmen for divisjon med brøk. Det er fokus på hvordan algoritmen skal utføres og ikke hvorfor det er slik. Lærere med konseptuell forståelse av emner vil i større grad knytte ny læring til elevenes forståelse. Feil eleven gjør vil også i større grad knyttes til dens tankeprosess eller resonnement, fremfor hvor i den aktuelle prosedyren det har sviktet. I emnet multiplikasjon med flersifrede tall, viser Mas forskning, som sammenligner lærere fra USA og lærere i Kina, denne sammenhengen tydelig:



Figur 2 Sammenligning av læreres forståelse av algoritme og undervisningsstrategier (Ma, 1999, s. 39)

Diagrammene ovenfor (se figur 2) viser at lærere fra USA i langt større grad kun har prosedural forståelse av algoritmene for multiplikasjon med flersifrede tall. Samtidig velger de også i større grad en proseduralt rettet undervisningsstrategi. De samme diagrammene viser også at lærerne fra Kina i stor grad både har prosedural og konseptuell forståelse av algoritmene for multiplikasjon med flersifrede tall. Lærerne fra Kina velger i hovedsak en konseptuelt rettet undervisningsstrategi. Funnene er så signifikante at det med stor sikkerhet kan sies å være en klar sammenheng mellom lærerens fagkunnskap og deres tilnærming til undervisning.

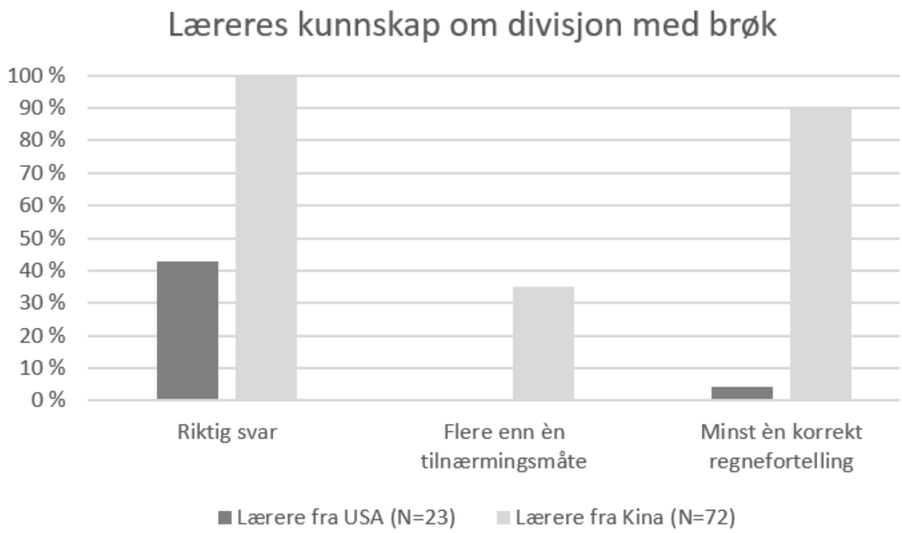
Vi ser her (jfr. figur 2) at Ma knytter sammen konseptuell og prosedural forståelse. Enten har lærerne kun prosedural forståelse, eller så har de både prosedural og konseptuell forståelse. Denne relasjonen kommer også frem i figur 1, Konseptuell forståelse av et emne.

Her er det en direkte kobling mellom prosedural og konseptuell forståelse. Vi kan forstå det slik at vi ikke kan ha konseptuell forståelse av et emne uten å ha prosedural forståelse om emnet.

Forskningen viser, også blant de kinesiske lærerne, at hvordan læreren hjelper elevene sterkt avhenger av hans eller hennes egne kunnskaper i emnet. De fleste lærerne fra Kina presenterte derfor konseptuelt baserte strategier for å hjelpe elevene til å forstå et problem. Ingen av de observerte lærerne fremmet læring utenfor deres egen matematiske kunnskaper. «The teachers` perspectives on the problem parallelled their subject matter knowledge of the topic» (Ma, 1999, s. 54).

I Liping Mas forskning ble lærerne presentert for oppgaven $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$.

Kun 43 % av de amerikanske lærerne løste denne riktig, med rett algoritme og fullstendig svar:



Figur 3 Læreres kunnskaper om divisjon med brøk (Ma, 1999, s. 73)

Som en følge av dette kom det også frem at de amerikanske lærerne kun hadde én tilnærming til problemet: «invert and mutiply», som er standard algoritme for å løse oppgaver med divisjon med brøk. De hadde i tillegg usikre representasjoner av divisjon med brøk. Flere blandet divisjon med $\frac{1}{2}$ med divisjon med 2. Andre blandet divisjon med $\frac{1}{2}$ med multiplikasjon med $\frac{1}{2}$. En annen utfordring var å knytte oppgaven til en praktisk situasjon/regnefortelling. Det viste seg at en utilstrekkelig forståelse av prosedyren vanskeliggjorde det å skape en god representasjon av problemet.

Som vi ser av diagrammet ovenfor (se figur 3) løste alle de kinesiske lærerne denne oppgaven riktig, med rett algoritme og fullstendig svar. 90 % av dem kunne knytte problemet til en eller flere praktiske situasjoner/ regnefortellinger. 17 % av dem foreslo flere situasjoner for å få frem ulike aspekter av meningen med algoritmen. Som gruppe representerte de kinesiske lærerne begrepet ved å ta i bruk tre modeller for divisjon: Målingsdivisjon, delingsdivisjon og som multiplikasjon (produkt og faktorer).

Eksemplet som ble brukt, $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, kan da representere:

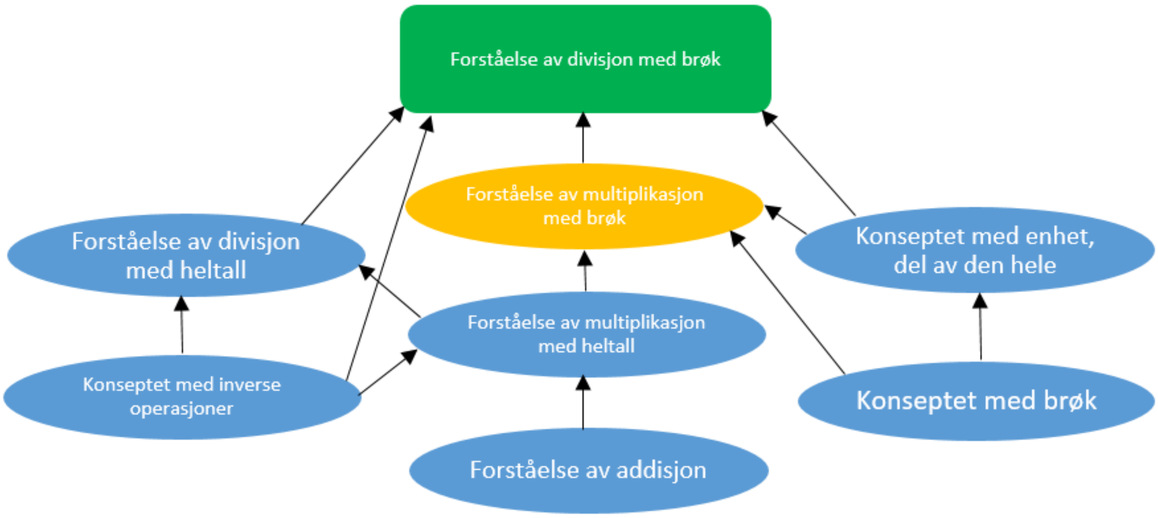
1. Målingsdivisjon: $1\frac{3}{4}$ meter : $\frac{1}{2}$ meter = $\frac{7}{2}$
2. Delingsdivisjon: $1\frac{3}{4}$ meter : $\frac{1}{2}$ = $\frac{7}{2}$ meter
3. Multiplikasjon: $1\frac{3}{4}$ kvadratmeter : $\frac{1}{2}$ meter = $\frac{7}{2}$ meter

Dette kan korrespondere med:

1. Hvor mange $\frac{1}{2}$ – meters lengder er det i noe som er $1\frac{3}{4}$ meter langt? En søker da å finne hvor mange $\frac{1}{2}$ det er i $1\ \frac{3}{4}$, eller hva du må gange $\frac{1}{2}$ med for å få $1\ \frac{3}{4}$.
2. Hvis halvparten av en lengde er $1\frac{3}{4}$ meter, hvor lang er hele? Her vil en finne verdien av et tall når deler av det er kjent.
3. Hvis en side av et rektangel med areal $1\frac{3}{4}$ m^2 er $\frac{1}{2}$ meter, hvor lang er den andre siden? Hvilket tall er det som multiplisert med $\frac{1}{2}$ blir $1\frac{3}{4}$?

Modellene som ble brukt i undervisning la til rette for å drøfte forståelsen av divisjon med brøk. De gir flere innfallsvinkler og representasjoner til regnestykket. Lærerne nevnte flere underliggende begreper som de betraktet som deler av kunnskapspakken relatert til dette emnet.

De underliggende begrepene er visualisert i følgende modell (se figur 4):



Figur 4 Kunnskapspakke for divisjon med brøk (Ma, 1999, s. 77)

Liping Mas kunnskapspakke for divisjon med brøk gir en oversikt over underliggende begreper og deres relasjoner. De kinesiske lærerne trekker frem sju underliggende begreper til divisjon med brøk som de mener det er viktig å legge vekt på: forståelse av addisjon, forståelse av multiplikasjon med heltall, forståelse av divisjon med heltall, konseptet med inverse operasjoner, konseptet med brøk, konseptet med enhet og forståelse av multiplikasjon med brøk. Relasjonene mellom begrepene innebærer at ny læring kan knyttes til elevenes forkunnskaper. Kunnskapspakken for divisjon med brøk er derfor både en oversikt over underliggende begreper, og deres relasjoner til hverandre. Dette gir en sterk vekselvirkning mellom elevens forkunnskaper og ny læring. Å ta utgangspunkt i forkunnskaper når nye kunnskaper skal læres forsterker dem og gir dybdelæring (NOU 2015:8, 2015). Dette innebærer samtidig at en, ved å relatere nye begreper til forkunnskaper, også legger til rette for ny innsikt. «Gaining new insight through reviewing old ones». (Ma, 1999, s. 77)

Læring er en kontinuerlig prosess. Ny kunnskap støttes av forkunnskaper. Forkunnskaper forsterkes og fordypes av ny kunnskap hvis de læres i relasjon til hverandre.

I denne kunnskapspakken trekkes «forståelsen av multiplikasjon med brøk» frem som nøkkelen til å kunne forstå divisjon med brøk. Multiplikasjon med brøk betraktes som «concept knot». Concept knot kan oversettes til begrepsknute.

Gitt at eleven har en god forståelse av at multiplikasjon med brøk betyr å finne en brøkdel av en enhet, så vil hun/han kunne følge resonnementet til hvordan den motsatte operasjonen fungerer.

På den andre siden, så vil elever som ikke har en klar ide om hva multiplikasjon med brøk betyr, ha store vansker med å forstå divisjon med brøk. Derfor retter kinesiske lærere hovedinnsatsen mot en gjennomgående forståelse av multiplikasjon med brøk og relasjonen mellom multiplikasjon og divisjon (og ikke direkte mot divisjon med brøk). Forståelsen av multiplikasjon med brøk er også av stor betydning, fordi den knytter sammen flere av divisjon med brøk sine underliggende begreper: modeller for divisjon med heltall, konseptet brøk, konseptet med enhet og forståelse av multiplikasjon med heltall. En gjennomgående forståelse av multiplikasjon med brøk vil derfor legge godt til rette for at elevene skal kunne forstå divisjon med brøk. Samtidig vil det å utforske divisjon med brøk gi en god mulighet for å repetere og få en dypere forståelse av de underliggende begrepene (Ma, 1999, s. 115).

I kunnskapspakkene er prosedurale og konseptuelle emner sammenvevd. Lærerne som hadde konseptuell forståelse av emnet og ville fremme elevenes konseptuelle læring, overså ikke den prosedurale kunnskapen. Fra deres ståsted er konseptuell forståelse aldri separert fra de korresponderende prosedyrene, der forståelsen ligger (Ma, 1999, s. 115).

De tre kunnskapspakkene Ma refererer til i sin forskning, subtraksjon med omgruppering, multiplikasjon med flersifrede tall og divisjon med brøk, har samme struktur (Ma, 1999, s. 19, 47 og 77). Kunnskapspakken for divisjon med brøk har en sekvens i midten der Forståelse av addisjon, Forståelse av multiplikasjon med heltall, Forståelse av multiplikasjon med brøk og Forståelse av divisjon med brøk inngår. Sekvensen i midten er hovedlinjen for hvilke kunnskaper og ferdigheter som kreves. Denne sekvensen av begreper er lenket til omkringliggende begreper som Konseptet med brøk, Konseptet med enhet, Begrepet inverse operasjoner og Forståelse av divisjon med heltall. I følge Ma betrakter ikke de kinesiske lærerne elementene i kunnskapspakkene som likeverdige. Hver kunnskapspakke har nøkkelbrikker som veier tyngre enn andre deler. Noen av nøkkelbrikkene er lokalisert i den lineære sekvensen i midten, mens andre kan ligge i den omkringliggende sirkelen. Hvilke deler som betraktes som nøkkelbrikker for å lære et overordnet begrep kan bestemme hva de spesielt retter oppmerksomheten mot når et begrep eller en ferdighet introduseres.

Kinesiske lærere mener ifølge Ma at hvis elevene lærer et begrep grundig første gangen det blir introdusert, så får vi dobbelt resultat med halv innsats i senere læring. Læres ikke begrepene grundig skjer det motsatte, vi får halve resultatet med dobbel innsats.

Kinesiske læreres dype forståelse av divisjon med brøk og sammenhengen til de underliggende begreper som kunnskapspakken fremhever, gir dem et godt grunnlag for å utvikle deres pedagogiske kunnskap. De er bedre rustet til å lage rike oppgaver som representerer varierte aspekter til emnet. En av lærerne i Liping Mas forskning (1999) var også bevisst på å lage flere representasjoner til samme oppgave ($1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$). Samme tall i regneoperasjonene gjorde ulikhetene/forskjellene i modellene for divisjon klarere for elevene.

Å generere representasjoner for et matematisk begrep er et kjent problem innen undervisning. Ifølge Liping Ma (1999) benyttet lærere fra USA i større grad representasjoner for divisjon med brøk hentet fra virkeligheten. Emnene som kinesiske lærere brukte var videre og mindre knyttet til elevenes erfaringsverden. Å knytte læring av begreper til elevenes erfaringer ville utvilsomt ha hjulpet elevene til å forstå mer av matematikken.

Når kinesiske lærere allikevel ikke legger vekt på dette, er det fordi de mener de uansett ikke klarer å lage en konseptuelt riktig representasjon for den enkelte elev. Til det har de for utilstrekkelig kjennskap til elevenes liv utenfor skolen.

2.3 Misoppfatninger

Oppgavesettet jeg har brukt baserer seg i hovedsak på Matematikksenterets læringsstøttende prøver. De oppgavene som de har utarbeidet søker å avdekke vanlige misoppfatninger som elever har. Disse misoppfatningene vil jeg gå nærmere inn på i analysen av de data jeg har innhentet. Misoppfatningene vil også være en del av kapitlet didaktiske implikasjoner. Jeg ser det derfor som nødvendig å definere hva en misoppfatning er. Samtidig vil jeg også beskrive de vanligste misoppfatningene vi finner i elevenes arbeid med brøk.

Misoppfatninger er ikke synonymt med feil (Brekke, 1995, s. 10). Misoppfatninger betegner en tankeprosess som forårsaker en rekke feil, alt på grunn av en eller flere feil i de underliggende premisser til tankeprosessen. I motsetning til dette kan vanlige feil være sporadiske, uten forbindelse til begrepet og usystematiske. Det er ikke alltid enkelt å følge en elevs tankeprosess for så å avsløre hvor systematisk og konsekvent den er.

Kartlegginger vi gjør, som for eksempel Nasjonale prøver i regning, ser på klassifisering av feil og hvor hyppig de forekommer, men de forklarer ikke hvordan feil oppstår. Vi får derfor vansker med å implementere disse funnene til en forbedret undervisning.

Misoppfatninger har vanligvis utspring fra elevenes forkunnskaper, som omfatter systemer av begreper og oppfatninger. Det oppstår en misoppfatning dersom noen av disse forkunnskapene blir feil knyttet til et overordnet begrep. Hvis misoppfatninger blir behandlet som noe som er veldig negativt, vil dette kunne forvirre eleven og svekke dens tillit til egne forkunnskaper. Når en misoppfatning avdekkes må det ses på som en positiv situasjon og en mulighet til å lære noe nytt (Boaler & Dweck, 2016, s. 15-20). Ny læring bør knyttes til elevenes konseptuelle begreper og settes i riktig perspektiv. Vi finner ikke misoppfatninger kun der det er gjort feil, de kan også skjule seg bak riktige svar. En hvilken som helst instruksjonsteori vil måtte skifte fokus, fra å se på feil til en forståelse av elevens nettverk av begreper som helhet. Det vil endre ens prinsipper for veiledning av eleven. Ut i fra dette kan vi definere misoppfatning som elevens logiske forklaring på et matematisk problem, ut i fra de forutsetninger eleven har (Nesher, 1987, s. 35). Gard Brekke refererer til misoppfatninger som ufullstendige tanker knyttet til et begrep (Brekke, 1995, s. 10).

De diagnostiske oppgavene som skiller mellom solide begreper og misoppfatninger, er ikke nødvendigvis de samme som vanligvis brukes i øvelser og tester i skolen. Ikke alle oppgaver er diagnostiske. En god diagnostisk oppgave vil gi diagnostisk informasjon om hvilke tanker elevene har om bestemte begreper. For eksempel vil ikke 4,20 : 2 fungere diagnostisk, mens 4,10 : 2 vil gjøre det. Det er fordi at en her søker å avdekke om eleven ser på desimaltall som par av tall. Hvis eleven har denne misoppfatningen vil ikke den første oppgaven vise det, da den gir samme svar uansett strategi. Hvis eleven har denne misoppfatningen vil den andre oppgaven gi svaret 2,5 (i stedet for 2,05). En diagnostisk oppgave må derfor konstrueres for å identifisere og fremheve misoppfatninger som elevene har utviklet. Slike oppgaver kan også gis elevene før det er gjennomført formell undervisning i det emnet en ønsker å undersøke. En forutsetning for å gjøre det er at læreren kjenner til hvilke misoppfatninger som er vanlig innenfor det aktuelle emnet. Svarene elevene her gir vil gi lærerne informasjon om hvilke løsningsstrategier de bruker når de løser ulike typer oppgaver. Gjennom svarene elevene gir, så kan en vurdere om en oppgave vil fungerer diagnostisk. Læreren får da muligheten til å rette sin undervisning mot å avdekke eventuelle misoppfatninger elevene har. Elevene gis da muligheten til å korrigere sine begreper og oppnå en korrekt konseptuell begrepsforståelse.

I etterkant kan også de diagnostiske oppgavene brukes til å se hvordan undervisningen har virket på elevene (Brekke, 1995). Bruk av diagnostiske oppgaver knyttet til vanlige misoppfatninger i divisjon med brøk, kommer jeg tilbake til nedenfor.

Diagnostisk undervisning har ifølge Brekke fire faser. For det første må en gjennom kartlegging identifisere hvilke misoppfatninger elevene har. En slik kartlegging kan gjøres på flere måter. Foruten diagnostiske prøver/læringsstøttende prøver og dialog med elevene, så anbefaler Matematikksenteret «my favorite no», eller «my favorite mistake» som metode[6]. Elevene blir da gitt en felles diagnostisk oppgave som de løser på ark. Læreren tar inn løsningsforslagene og ser gjennom dem. Finnes det et løsningsforslag som representerer en vanlig misoppfatning, så brukes den (anonymt) i den videre undervisningen. Fase to er der læren tilrettelegger undervisningen med tanke på å fremheve de eventuelle misoppfatningene elevene har. Formålet med dette er å skape en kognitiv konflikt hos elevene. De oppfatter at deres egen tankeprosess ikke fører frem og får et behov for å forstå riktig. Da er vi i fase tre hvor en gjennom diskusjon, utprøving og refleksjon i undervisningen søker å løse den kognitive konflikten.

Til slutt er det viktig at det nå nye og utvidete begrepet brukes i andre sammenhenger. Dette er viktig for å styrke forståelsen av begrepet og de relasjoner det har til omkringliggende begreper (Brekke, 1995, s. 19).

Det kan være flere årsaker til at elever har vansker med begreper og ferdigheter innen brøkregning. En av årsakene kan være at elevene memorerer prosedyrer før de har utviklet en konseptuell forståelse av de relaterte begrepene. Begynneropplæring i matematikk fokuserer på heltall. Det kan også være en årsak at elevene overgeneraliserer det de kan om regning med heltall og overfører denne kunnskapen til brøkregning. Det er vanlig at en misoppfatning har som utgangspunkt at elevene betrakter brøk som to heltall som ikke står i forhold til hverandre. Regning med brøk er vanskeligere enn å regne med heltall. Å forstå notasjonen i brøkregning er utfordrende hvis elevene ikke forstår hva det øverste og det nederste tallet representerer. Det å vite hva som er teller og nevner, samt hva de tallene betyr, er sentralt. Det er viktig at vi bygger på elevenes intuitive forståelse og hjelper dem til å gjøre mening av ideer de møter på skolen med (Sherman, Richardson, & Yard, 2005).

---

[6] http://www.matematikksenteret.no/content/6120/Papiroppgaver-Laringsstottende-prover-i-matematikk

De vanligste misoppfatningene i tilknytning til divisjon med brøk finner vi ifølge Chapin og Johnson i områdene (2006): Brøk som del av en hel eller del av en mengde, brøk som et resultat av å dividere to tall, brøk som forholdet mellom to mengder, brøk som operator og brøk som mål. For bedre å forstå innholdet i disse begrepene vil jeg utdype dem videre og gi eksempler på hvordan de kan forstås:

1. Del av en hel eller del av en mengde: Et objekt kan deles i to eller flere like deler. En mengde kan deles i like store delmengder. For eksempel vil en pizza delt i like store deler representere deler av en hel. En kasse epler som fordeles likt i mindre esker vil kunne representere meningen med del av en mengde. Det er ulike måter å vise sammenhengen mellom deler og hele: Den hele kan være representert med månedslønnen din. Hvor mye er $\frac{1}{10}$ av månedslønnen? En annen måte å vise sammenhengen mellom delen og den hele er hvis en har gitt mengden til både delen og den hele og skal bestemme hvor stor brøkdel delen representerer. For eksempel hvis seks appelsiner representerer den hele, hvor stor brøkdel utgjør to appelsiner av den hele? En tredje sammenheng er å finne den hele hvis en mengde og brøkdel er gitt. For eksempel hvis 8 egg i en eske er hvite og den resterende $\frac{1}{3}$ er brune. Hvor mange egg er det da totalt i esken? Denne typen oppgaver er viktige for å forstå relasjonene mellom delen og den hele. Deler av en hel eller del av en mengde er grunnleggende for å kunne forstå brøk.
2. Brøk som et resultat av å dividere to tall: En brøk kan også representere svaret når en deler et tall med et annet. Denne tolkningen av brøk er referert til som «forståelsen av kvotient» (the quotient meaning), siden kvotienten er svaret på en oppgave med divisjon. For eksempel så vil to pizzaer som deles likt på tre personer, gi $\frac{2}{3}$ pizza på hver av dem. Oppdeling, som er prosessen med å dele objekter eller sett i deler, er den grunnleggende ferdigheten som ligger til grunn for at elevene skal forstå denne tolkningen av brøk.
3. Brøk som forholdet mellom to mengder: Det er her snakk om sammenligning mellom to mengder. Når et forholdstall sammenligner en del av en hel, tas ofte del av en hel -tolkningen i bruk. For eksempel vil 15 barn i en familie på totalt 33 kunne skrives med forholdstallet 15:33, men det er like vanlig å referere til dette som brøken $\frac{15}{33}$. Alle brøker er forholdstall, men ikke alle forholdstall representerer brøker. For eksempel kan vi sammenligne de 15 barna og de 18 voksne med forholdstallet 15:18.

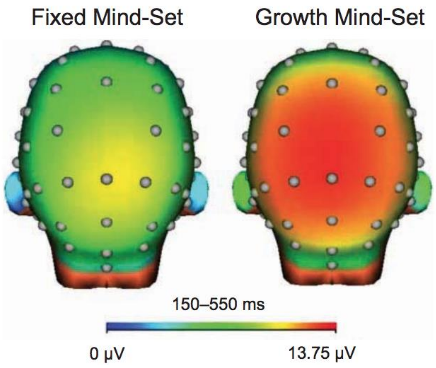
Denne del mot del sammenligningen er ikke en brøk, da den ikke svarer direkte til et rasjonalt tall. Den representerer en sammenligning av to tall og ikke en del av en mengde. Videre vil den formelle definisjonen av et rasjonalt tall ikke tillate at nevneren er null. For eksempel vil det ikke være tillatt å skrive $\frac{2}{0}$. Forholdet 2:0 derimot, er tillatt, og kan for eksempel brukes til å beskrive forholdet mellom to stafettgull i VM på ski til Norge og null stafettgull til Sverige. Det kan være interessant å legge merke til at elever av og til benytter del mot del sammenligning for å skape mening til del av den hele i brøk.

4. Brøk som operatorer: Her er brøk forstått som et tall som påvirker omfanget av et annet tall. En operator som er $\frac{3}{4}$ kan tenkes på som en «funksjon» som forvandler et sett av objekter til et annet sett med $\frac{3}{4}$ så mange objekter. Et annet eksempel kan være, hvis vingespennet til et Hercules transportfly er 40 m og vingespennet til en modell er $\frac{1}{25}$ av dette, så vil vi finne vingespennet til modellen ved å multiplisere $\frac{1}{25}$ med 40 m ($\frac{1}{25} \cdot 40$ m). Brøk som operator er brukt i situasjoner med multiplikasjon. Det anvendes ikke i addisjon og subtraksjon av brøk, da tallene i de situasjonene ikke påvirker hverandre.
5. Brøk som måling: Det sentrale i denne tolkningen er brøk som en lengde på tallinjen, som deler enheter inn i underenheter. Vi kan måle en lineær distanse og notere resultatet som et intervall fra null. En måleenhet kan alltid deles i mindre og mindre underenheter. Tallinjen inneholder uendelig mange rasjonale tall. Når vi måler en gjenstand med linjal, så måles den i forhold til en findelt skala med merker. Hvis avlesningen ikke blir presis, betyr ikke det at gjenstanden ikke kan måles. Vi blir nødt til å ta med flere underenheter. Størrelsen på brøken vil derfor avhenge av hvor mange underenheter vi tar i bruk. Ved å ta i bruk brøk i målingen vil nøyaktigheten øke. Størrelsen på underenhetene til en enhet er avhengig av hva som kreves for å måle en distanse. Når ulike underenheter benyttes til å måle samme distanse, vil vi få ulike brøker som representerer resultatet. Siden avstanden fra null er den samme, vil disse brøkene representere det samme rasjonale tallet. Brøkene er da likeverdige. Når elevene forstår denne tolkningen av brøk, så kan de dele enheter på en tallinje i alle mulige like deler. De kan også finne brøker mellom hvilke som helst andre gitte brøker og måle en distanse fra null ved å bruke ulike størrelser på intervallene.

> Bruk av linjal er relatert til disse emnene, like mye et emne innen brøk som et emne i måling. Det at vi kan ta en lengde og dele den inn i hele enheter og deler av enheter gir brøk som måling en relasjon til tolkningen av del av en hel eller del av en mengde.

(Chapin & Johnson, 2006, s. 99-131)

Jo Boaler tar utgangspunkt i kraften som ligger i det å gjøre feil og streve (Boaler & Dweck, 2016). Hun refererer til psykologen Jason Moser som har forsket på hvilke nevrale mekanismer som settes i gang i hjernene våre når vi gjør feil (Moser, i Boaler & Dweck, 2016, s. 11-13). Det viste seg at hjernen har to måter den kan respondere på. Den første er med økt elektrisk aktivitet når hjernen erfarer konflikt mellom riktig respons og feil. Denne hjerneaktiviteten oppstår uavhengig om personen vet om hun/han har gjort feil eller ikke. Den andre responsen er et signal fra hjernen som reflekterer en bevisst oppmerksomhet mot feil. Dette signalet sendes når det er klart at det er gjort en feil, og oppmerksomheten er rettet mot feilen. Denne responsen fra hjernen oppstår, ifølge Moser, ikke når vi løser oppgaver riktig.



Figur 5 Hjerneaktivitet hos personer med tankegang som er fast og tankegang som er i utvikling (Moser, i Boaler & Dweck, 2016, s. 12)

Figuren (se figur 5) ovenfor viser resultatene fra Mosers forskning. De fant ut at elevenes hjerner reagerte med høyere elektrisk aktivitet når de gjorde feil enn når de hadde riktige svar. Samtidig fant de at hjerneaktiviteten var større hos elever med en tankegang i utvikling enn hos elever med en fast tankegang. Jeg oversatte her begrepet fixed mindset til fast tankegang og growth mindset til tankegang i utvikling. Begrepet tankegang i utvikling kan knyttes til konseptuell forståelse og læring, da ny informasjon relateres til eksisterende kunnskaper. Begrepet fast tankegang vil jeg knytte til prosedural forståelse og læring, da ny informasjon innen et emne her vil relateres til én oppskrift, én måte å løse oppgaven på.

Boaler betegner funnet av at vår hjerneaktivitet øker når vi gjør feil som svært viktig. Forskningen viste også at elever med en tankegang i utvikling hadde en større bevissthet om feil, slik at de oftere gikk tilbake og korrigerte dem. Ifølge Boaler støttes dette av annen forskning: Elever med en tankegang i utvikling viser økt respons i hjernen og en større oppmerksomhet rettet mot feil de gjør. Alle elevene responderte med en «gnist» i hjernen, med å utvikle en synapse når de gjorde feil. Forskjellen lå i at med en tankegang i utvikling, så var sannsynligheten for at hjernen «gnistret» igjen større, for å vise bevissthet om at en feil er gjort. Den senere nevrologiske forskningen på hjernens respons på feil vi gjør er ifølge Boaler viktige for lærere som underviser i matematikk, da den viser at det å gjøre feil er positivt. Når vi gjør feil «gnistrer» hjernen og utvikler seg. Feil er ikke bare en mulighet for læring, men også en mulighet for at hjernen kan utvikle seg. Dette skjer selv om vi ikke er klar over at vi har gjort feil. Kraften som ligger i feil er viktig informasjon, spesielt siden mange elever opplever det som negativt å gjøre feil i matematikk. Boaler mener elevene knytter dette til egne ferdigheter, fordi de er oppvokst i en prestasjonskultur der feil ikke er verdsatt. Lærere i andre nasjoner, som for eksempel Kina, behandler feil helt annerledes.

De innarbeider en kultur der det er lov til og trygt å gjøre feil. Feil verdsettes og brukes aktivt i undervisningen. Knyttet til det å ha en tankegang i utvikling blir troen på seg selv viktig. Hvis vi tror at vi kan lære og at feil vi gjør er verdifulle, så vil hjernen vår utvikle seg når vi gjør feil. Dette funnet er signifikant og forteller oss hvor viktig det er at elevene tror på seg selv. De må tørre å gjøre feil. I den forbindelse er det viktig at vi som lærere verdsetter feil og misoppfatninger i klassesituasjonen. Samtidig må vi ikke glemme å gi positive tilbakemeldinger til elevene i 1-1 – situasjoner.

I tilknytning til tangegang i utvikling trekker Piaget inn begrepet «disequilibrium», eller i ubalanse (Piaget, i Boaler & Dweck, 2016, s. 18). Piaget peker på at sann læring avhenger av en forståelse av hvordan ideer passer sammen. Han antok at elevene har mentale modeller som viser hvordan ideer henger sammen. Når de mentale modellene gir mening for elevene, er de i en tilstand han kaller «equilibrium», eller i balanse. Når elevene møter nye ideer vil de forsøke å tilpasse de nye ideene til deres nåværende mentale modeller. Hvis de nye ideene ikke ser ut til å passe, eller at deres eksisterende modeller må endres, vil de gå inn i en tilstand Piaget kaller ubalanse. En elev som er i en slik tilstand av ubalanse, vet at den nye informasjonen ikke kan innlemmes i deres læringsmodeller, men den nye informasjonen kan heller ikke avvises, fordi den gir mening. Elevene må derfor adaptere egne modeller for læring.

Denne prosessen, hvor eleven er i ubalanse, er ukomfortabel for eleven, men Piaget påstår at den leder frem til sann visdom. Piaget viste at læring er en prosess som flytter seg fra å være i balanse, der alt henger sammen, til å komme i ubalanse, der nye ideer ikke passer, for så å komme i balanse igjen. Denne prosessen, understreker Piaget, er essensiell for læring (Piaget, i Boaler & Dweck, 2016, s. 18). Boalers tankegang i utvikling har mange likhetstrekk med denne prosessen. Dette med tanke på at begge prosesser, der læreren tar utgangspunkt i elevenes konseptuelle forståelse, gir dem utfordringer der de havner i ubalanse og gjør feil og bruker dette for å utvikle deres konseptuelle forståelse.

Forskningen på misoppfatninger og disekvilibrium har store implikasjoner for undervisningen i matematikk. Ikke bare for hvordan vi håndterer feil, men også for hvilke oppgaver vi gir elevene. Boaler mener at hvis vi ønsker at elevene skal gjøre feil, så må vi gi dem utfordrende oppgaver som gjør det vanskelig for dem, som vil gi ubalanse. Dette arbeidet må følges opp med problemstillinger som skaper kognitive konflikter. Med utgangspunkt i elevenes kognitive konflikter kan vi dermed søke å bryte elevenes misoppfatninger. Vi må gi positive kommentarer og fremovermeldinger som motiverer elevene til å arbeide hardere, gjøre feil og stå på videre.

Dette vil innebære en stor endring for mange lærere som i dag planlegger oppgaver som de fleste elevene vil mestre og løse riktig. Dette betyr samtidig at disse elevene ikke trenger å anstrenge seg nok. De får ikke tilstrekkelige muligheter for å lære og utvikle hjernen sin optimalt. For å sette det på spissen så har en elev som i en time har løst alle oppgavene riktig, blitt fratatt muligheten til å lære noe nytt den timen. Boaler sier at: «When mathematic is taught as an open an creative subject, all about connections, learning and growth, and mistakes are encouraged, incredible things happen» (Boaler & Dweck, 2016, s. 20). Til tross for dette oppleves matematikkfaget, ifølge Boaler, som et prestasjonsfag. Elevene opplever sin rolle som å svare riktig på spørsmål. Svært sjelden får de muligheten til å stille de dype spørsmålene, til å utforske de rike relasjonene som faget er bygd opp av. De lærer også lite om hvor og hvordan matematikken kan anvendes. Elevene ser i tidlig alder at matematikkfaget skiller seg fra andre fag. Læring knyttes til å kunne svare på spørsmål og testing. De må prestere. Boaler siterer en elev som sier at: «Math was too much answer and not enough learning time». Eleven var seks år og opplevde allerede at matematikken hadde fokus på riktige svar fremfor læring, det prosedurale fremfor det konseptuelle. Boaler trekker også frem Reuben Hersh som sier at matematikk fremstilles svært feilaktig i undervisningen (Hersh, i Boaler & Dweck, 2016, s. 26).

Hun sier videre at forskning viser at når elevene selv gis muligheten til å lage matematiske problemstillinger, til å betrakte en situasjon og selv stille spørsmål til den, så viser de et større engasjement og presterer på et høyere nivå. I dagens undervisning erfarer ikke elevene dette, som er essensen i virkelig matematikk. De bruker tiden til å svare på spørsmål de ikke har stilt. Gjennom år har skolematematikken blitt mer og mer atskilt fra matematikken matematikere benytter og fra hverdagsmatematikken. Elevene bruker tiden til å lære prosedyrer og regler de aldri vil ta i bruk. (Boaler & Dweck, 2016, s. 27). I denne forbindelsen trekker Boaler frem Conrad Wolfram, direktør i Wolfram-Alpha. Han har kritisert tradisjonell undervisning i matematikk og argumenterer for at matematikk ikke er lik regning. Wolfram mener at å arbeide med matematikk har fire steg:

1. Stille et spørsmål
2. Gå fra den virkelige verden til en matematisk modell
3. Gjennomføre en regneoperasjon
4. Gå tilbake til den virkelige verden for å se om spørsmålet ble besvart

Dette knytter han til at det arbeidsgivere trenger er, personer som kan stille gode spørsmål, stille opp modeller, analysere resultater og tolke matematiske resultater. Kort sagt vil han ha personer som kan tenke og resonnere.

Hvilke egenskaper samfunnet verdsetter har også endret seg. I 1970 var topp tre egenskaper skriving, regneferdigheter og lesing, mens det i 1999 var teamarbeid, problemløsning og mellommenneskelige ferdigheter. De samme ferdighetene finner vi igjen, blant andre, i 21th Century Skills[7], som Ludvigsenutvalget brukte som deler av sitt grunnlag for utredningen Fremtidens skole (NOU 2015:8, 2015). Dette kommer blant annet til syne i de fire kompetanseområdene som fremheves i rapporten (se figur 16). Utviklingen har gått fra ferdigheter du sitter alene med til ferdigheter du deler og utvikler sammen med andre. Wolfram konkluderer med at de som ikke kan resonnere om matematikk er ineffektive i dagens arbeidsplasser. Når ansatte resonnerer og snakker om matematiske algoritmer, så kan andre utvikle nye ideer basert på algoritmene og samtidig se om det er gjort feil underveis (Wolfram, i Boaler & Dweck, 2016, s. 29). Boaler oppsummerer dette med å sitere Laurent Schwartz: «What is important is to deeply understand things and their relations» (Schwartz, i Boaler & Dweck, 2016, s. 30). Dette understreker viktigheten av å arbeide grundig med den konseptuelle forståelsen av begrepene, før en kan oppnå prosedural forståelse.

[7] http://www.p21.org/index.php

3.0 Metode for å innhente data

I min datainnsamling har jeg benyttet både kvantitativ og kvalitativ metode. Jeg har gjennomført en kartleggingsprøve og semistrukturerte intervjuer. Kvantitativ forskning handler om det vi kan erfare i tall-, mengde- og størrelsesforhold (Rienecker & Stray Jørgensen, 2013, s. 168). Hvis en har tilgang til mange målbare data, kan det formuleres mer generelle problemstillinger som det kan konkluderes i forhold til. Kvantitative data er egnet til å kunne se sammenhenger og trender. Her kan det trekkes slutninger om årsaksforhold og hvor vidt ulike variabler henger sammen. Ut i fra min problemstilling er det derfor naturlig å tenke kvantitativ datainnsamling:

Hvilke sammenhenger kan vi se mellom elevers forkunnskaper om brøk og hvordan de løser oppgaver knyttet til divisjon med brøk?

Hvilke forkunnskaper synes å være mest sentrale for å kunne løse oppgaver med divisjon med brøk?

Jeg ville se om det finnes mønstre eller sammenhenger i elevenes forkunnskaper knyttet til om de behersker oppgaver med divisjon med brøk eller ikke. Jeg valgte derfor å gjennomføre en spørreundersøkelse/kartlegging. For bedre å kunne tolke dataene fra kartleggingen riktig, valgte jeg i tillegg å benytte en kvalitativ metode, intervju. Dette var for bedre å kunne forstå hvordan elevene har tenkt når de løste oppgavene. Data fra kvalitative metoder kan virke utfyllende og dermed redusere risikoen for mistolkninger av kvantitative data/resultater. Validitet er en viktig nøkkel til vellykket forskning. Hvis en del av forskningen er ugyldig, er hele forskningen verdiløs. Validitet er derfor et absolutt behov i både kvantitativ og kvalitativ forskning. Valid forskning måler det den er tenkt til å måle. Validitet i forskning sier derfor noe om hvor gyldig den kan sies å være. Jeg har da planlagt en forutsigbar forskningsprosess (forutsigbarhet) med et kontrollerbart resultat (kontrollerbarhet). Viktige prinsipper her er oppgaver som måler det de er tenkt til, et frivillig utvalg og en, for utvalget, kjent prøvesituasjon. Dette kommer jeg tilbake til. Forskningsprosessen må ikke være påvirket av forskerens/andres ønsker og meninger om hva resultatet skal være (objektivitet). Dette kan det være ekstra viktig for meg, som har undervist i snart 20 år, å være bevisst. Jeg har en erfaring som gir meg oppfatninger om hva jeg kan finne av resultater.

Denne planleggingen må også ta høyde for at resultatet ikke er påvirket av kontekst (kontekstfrihet), samtidig som resultatet må representere en helhet, og ikke bare et utdrag (fragmentering). Resultatene må igjen bli de samme uavhengig av hvilken rekkefølge funnene blir vist. Funnene må således stå i relasjon til hverandre (tilfeldiggjøring). Dette ønsker jeg å ivareta gjennom at oppgavene i kartleggingen er nært knyttet til kunnskapspakken til divisjon med brøk. De står i relasjon til hverandre og besitter begreper som gjør det mulig å forstå meningen med divisjon med brøk. Analysen og den statistiske fremstillingen jeg gjør på bakgrunn av resultatene vil gjøre dette synlig også for andre (observerbarhet). Med en godt planlagt og strukturert forskningsprosess, vil andre kunne gjenta denne forskningen med samme resultat (reproduserbarhet). Forskningen vil da være reliabel.

Som forsker må en sørge for at overnevnte faktorer blir tilstrekkelig vektlagt. I mange tilfeller handler dette om å være trofast og ærlig mot hva de statistiske data sier, og validiteten til ideen og innholdet om måling og prøvetaking.

3.1 Utvalg av elever

Jeg underviser inneværende skoleår på 10. trinn. Det var derfor hensiktsmessig å gjennomføre datainnsamling på dette trinnet. Elevene på trinnet er delt i fire klasser. I faget matematikk er det tre lærere som deler på undervisningen av elevene på trinnet.

Tjueseks elever gjennomførte kartleggingen, av totalt 84 elever på trinnet. I gjennomføringen ble elevene tatt ut av klassen sine og fikk sitt eget rom, for å kunne arbeide uforstyrret.

Rammene rundt kartleggingen ble da lik rammene for en vanlig prøvesituasjon, som elevene er godt kjent med. Ut fra hvilke resultater de har fått på tidligere prøver og kartlegginger dekker utvalget et bredt spekter av elevene på trinnet, selv om det ikke er mulig å fastslå at det er representativt for trinnet. Utvalget består av fjorten jenter og tolv gutter, slik at det er jevn kjønnsfordeling. Alle kommunens barneskoler er representert, om enn ikke alle like sterkt. Dette kommer naturlig av at vi per i dag mottar elever fra fire barneskoler med veldig ulikt elevtall (15 elever – 38 elever – 66 elever – 410 elever)[8].

[8] https://www.oppdal.kommune.no/navigasjonsmenytjenesteomrader/oppvekst-og-utdanning/skoler-og-sfo/

3.2 Spørreundersøkelse/Kartlegging

Jeg ønsket å finne ut hvilke forkunnskaper som er sentrale for å kunne løse oppgaver knyttet til divisjon med brøk. Forkunnskapene som kreves har jeg valgt å hente ut i fra Liping Mas kunnskapspakke for divisjon med brøk (Ma, 1999, s. 77). Denne kunnskapspakken skisserer sju underliggende begreper som er sentrale for å kunne løse oppgaver med divisjon med brøk:

1. Forståelse av multiplikasjon med brøk
2. Konseptet med enhet, del av den hele
3. Konseptet med brøk
4. Konseptet med inverse operasjoner
5. Forståelse av divisjon med hele tall
6. Forståelse av multiplikasjon med hele tall
7. Forståelse av addisjon

Med kunnskapspakken som referanseramme har jeg utarbeidet en kartleggingsprøve med totalt trettito oppgaver som dekker de ulike kategoriene i kunnskapspakken (se vedlegg 1). Oppgavene baserer seg i hovedsak på andrepiloteringen av læringsstøttende prøver, som Matematikksenteret utarbeider etter oppdrag fra Utdanningsdirektoratet[9]. Oppgavene skal avdekke vanlige misoppfatninger innenfor temaene brøk og prosent.

At det er en andrepilotering innebærer at oppgavene i to omganger er testet ut på elever for å se om de måler det de er tenkt til. I førstepiloteringen ble oppgavene gitt slik at elevene selv måtte skrive svar. I andrepiloteringen var oppgaver som ikke fungerte som tenkt utelatt og de øvrige var gitt flervalgssvar, slik at elevene kan krysse av selv. Oppgavenes svaralternativer ble gitt med utgangspunkt i innkomne svar i førstepiloteringen, og representerer således vanlige misoppfatninger elever på de aktuelle alderstrinn har. For å få tilgang til oppgavene og tilhørende resultater har jeg søkt Utdanningsdirektoratet, Avdeling for vurdering 2 (navn på avdeling). I gjennomgang og drøfting av oppgavene har jeg samarbeidet med Matematikksenteret. I og med at oppgavene har vært gjennom en første – og andrepilotering er de kvalitetssikret i forhold til at de måler det de er tenkt til. Matematikksenteret analyserer sine oppgaver diagnostisk. Det vil si at de tester samme misoppfatning med flere diagnostiske oppgaver.

[9] Se https://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/laringsstottende-prover/

På denne måten kan de med større sikkerhet si om elevene er i en misoppfatning eller ikke. Dette prinsippet går også igjen i denne kartleggingen, spesielt innenfor konseptet med enhet og konseptet med brøk.

De læringsstøttende prøvene innenfor brøk og prosent blir tilgjengelig for alle i løpet av høsten 2017/vinteren 2018. Øvrige oppgaver i kartleggingsprøven har jeg laget selv. Det gjelder 13 av 32 oppgaver. Jeg går ikke nærmere inn på hver enkelt oppgave her. De mest sentrale oppgavene kommer jeg nærmere inn på i arbeidet med analyse av resultatene.

Nedenfor er en oversikt (se tabell 1) over hvordan jeg har fordelt de ulike oppgavene i kunnskapspakkens kategorier:

Kategorier/begreper	**Tilhørende oppgaver**
Forståelse av divisjon med brøk	7, 16, 28, 29, 30, 31, 32
Forståelse av multiplikasjon med brøk	18, 23, 24
Konseptet med enhet, del av den hele	1, 6, 8, 12, 13, 14, 17, 20, 21, 25, 27
Konseptet med brøk	3, 5, 10, 11
Konseptet med inverse operasjoner	4
Forståelse av divisjon med hele tall	15, 19
Forståelse av multiplikasjon med hele tall	2, 9
Forståelse av addisjon	22, 26

Tabell 1 Oppgavefordeling i kunnskapspakkens kategorier

Denne kategoriseringen av oppgaver er ikke entydig, da flere av oppgavene også kan gå inn under andre kategorier i tillegg til den der de er plassert. Felles for disse oppgavene er at de har flere mulige løsningsstrategier.

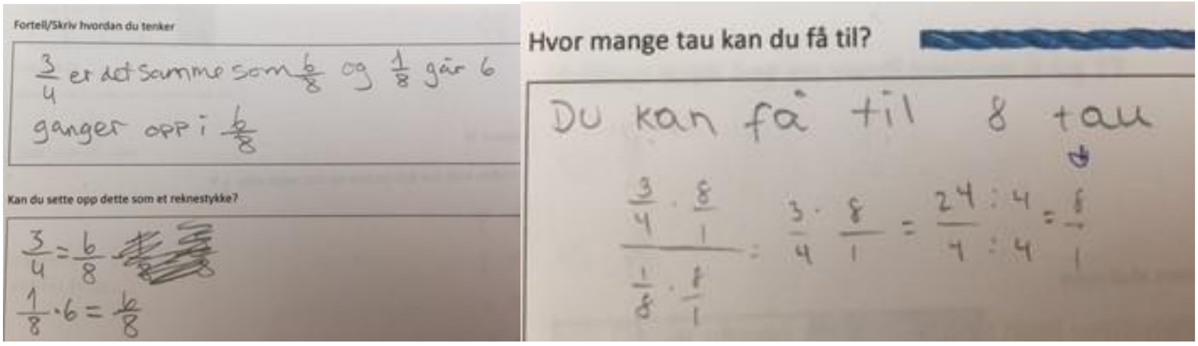
Kategorien Begrepet inverse operasjoner vil da kunne fått flere oppgaver. For eksempel er oppgave 29, som egentlig er en oppgave tenkt løst med divisjon med brøk, av flere løst med multiplikasjon med brøk.

Et tau er $\frac{3}{4}$ m langt. Det skal deles opp slik at hvert tau blir $\frac{1}{8}$ m.

Hvor mange tau kan du få til?

Figur 6 Oppgave 29

Elevenes ulike tilnærmingsmåter kommer godt frem i figur 7:



Figur 7 Elevsvar på oppgave 29, Elev 3 og Elev 26

I elevsvarene ovenfor ser vi at Elev 3 har løst oppgave 29 ved hjelp av multiplikasjon: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ og $\frac{1}{8}$ går seks ganger opp i $\frac{6}{8}$. Elev 26 har her løst den samme oppgaven ved hjelp av divisjon: $\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$. Begge strategiene fører frem til riktig svar (selv om elev 26 hadde en regnefeil).

Det er også en glidende overgang mellom innholdet i oppgavene som er plassert i kategoriene Konseptet med enhet og Konseptet med brøk. Et eksempel her er oppgave 3 (se figur 8), der en skal sammenligne størrelsen til to brøker. Med konseptet med enhet forstås det at hver del blir større om den hele er delt i åtte i forhold til om den hele er delt i ni. Med konseptet brøk vet en at hvis teller er lik, vil økende nevner gi mindre verdi på brøken.

Figur 8 Oppgave 3

Hvilke oppgaver elevene har vansker med å løse ville blitt synlig i tabellene, uavhengig av plassering i kunnskapspakken. Det kan imidlertid vanskeliggjøre det å se elevenes vansker knyttet opp mot begrepenes relasjoner til hverandre.

Dette i forhold til hvilke begreper som er over-/underordnet hverandre. Hvilke begreper vi oppfatter som over-/underordnet har med fagets struktur å gjøre, og hva vi forutsetter som forkunnskaper i forhold til ny læring.

For å få en bedre oversikt over innholdet i kunnskapspakkens kategorier vil jeg utdype hva som ligger i de ulike begrepene og beskrive oppgavene som hører til i hver kategori. Det kan da være en fordel å se på dette sammen med oppgavene i kartleggingen (se vedlegg 1).

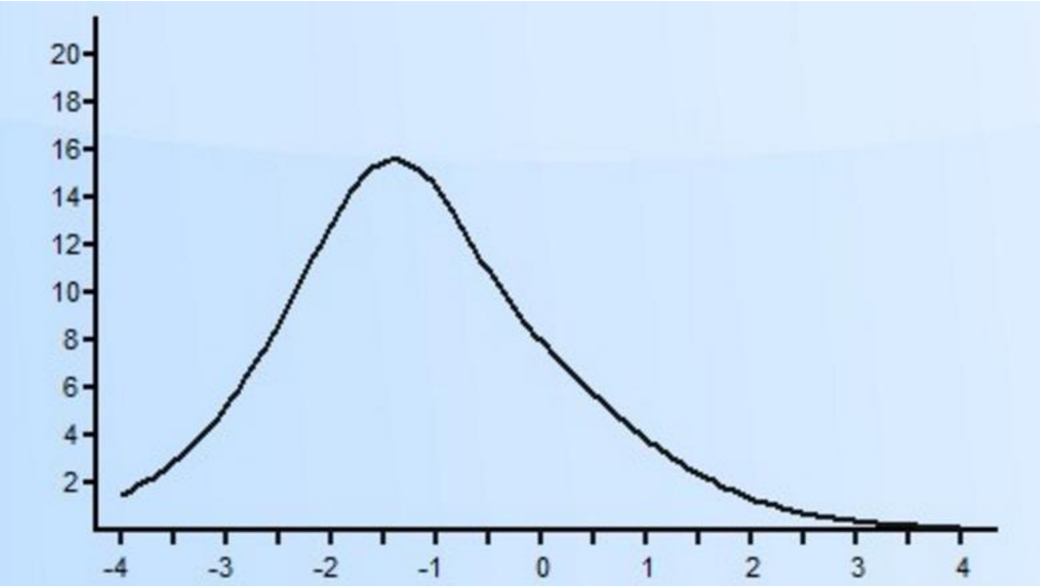
Forståelse av divisjon med brøk: Dette er den overordnede kategorien i Liping Mas kunnskapspakke. Her finner vi oppgaven jeg analyserer elevenes kunnskaper opp mot, oppgave 32. Dette er en oppstilt oppgave som tester om de behersker algoritmen for divisjon med brøk. I tillegg inneholder denne kategorien tre oppgaver knyttet til kontekst (oppgave 29, 30 og 31). Disse tre oppgavene er laget ut i fra funn Liping Ma gjorde vedrørende kinesiske læreres tilnærming til meningen med divisjon med brøk. De har tre tilnærmingsmåter som går igjen. De tar i bruk en modell for målingsdivisjon, der oppgavens kontekst er oppdeling av tauverk, «Hvor mange taulengder får du»? De tar også i bruk en modell for delingsdivisjon. Her er også oppgavens kontekst knyttet til oppdeling av tauverk. Problemstillingen er rette mot hvor stor del av hele dividenden utgjør, «Hvor langt er hele tauet»? Den siste modellen som tas i bruk ser på produkt og faktorer, og knyttes til beregning av areal, «Hvor lang er den andre siden»? Kategorien inneholder også to problemløsningsoppgaver/tekstoppgaver med ulik vinkling til halvering av brøker (oppgave 7 og 16). De tester i utgangspunktet om eleven kan dividere brøk med heltall, men det kan også benyttes multiplikasjon med brøk for å løse disse oppgavene.

Oppgavene er ulike med tanke på hva de tester. Oppgavene som hører til under Konseptet med enhet og Konseptet med brøk undersøker i større grad elevenes generelle forståelse og om de har misoppfatninger innen disse begrepene. Oppgavene som hører til under Divisjon med brøk, Multiplikasjon med brøk og Begrepet inverse operasjoner undersøker ferdigheten, i og utenfor kontekst. Oppgavene som tilhører de øvrige underbegrepene, Forståelse av addisjon, Forståelse av multiplikasjon med heltall og Forståelse av divisjon med heltall, undersøker kun om elevene er trygge på ferdigheten.

De oppgavene som er satt i en kontekst utfordrer i tillegg elevenes forståelse omkring ferdigheten. Elevene må, ut i fra konteksten, kunne velge riktig ferdighet for å løse oppgaven.

Når det gjelder kartleggingens vanskegrad, så viser en IRT-analyse at de fleste oppgavene har en høy p-verdi eller løsningsprosent. Det vil si at de fleste elevene klarte å løse oppgavene.

P-verdien henger sammen med b-verdien til oppgaven, oppgavens vanskegrad. En enkel oppgave vil få en negativ b-verdi.



Tabell 2 Kartleggingens vanskegrad

I diagrammet ovenfor (se tabell 2) viser kurven over testinformasjonen som prøven gir, at den forteller mest om elever som har en Theta (dyktighet) på -1,4. Det vil si 1,4 standardavvik fra gjennomsnittet.

Det viser at oppgavene i kartleggingen måler best på de svakest presterende elevene, og sier mindre om de sterkest presterende elevene. Dette stemmer overens med at Matematikksenterets pilotering er gjennomført på 6. og 9. trinn. Sterkt presterende elever på 10. trinn vil da ha gode forutsetninger for å løse oppgavene. Samtidig vil kartleggingen kunne gi nyttig informasjon om elevene som ikke klarte å løse oppgavene.

3.2.1 Forståelse av multiplikasjon med brøk

Denne kategorien er knutepunktet for begrepene i Liping Mas kunnskapspakke. Her har jeg tre oppgaver. Én tekstoppgave der de skal multiplisere heltall med brøk (oppgave 18). Her blir de også testet i forståelsen av begrepet «dobbelt så stor». Denne oppgaven kan også løses som addisjon av to like brøker. Den andre oppgaven er en oppstilt oppgave med multiplikasjon av to brøker (oppgave 23).

Her blir de testet i algoritmen for multiplikasjon med brøk. Den siste oppgaven er knyttet til kontekst og hentet fra læreverket skolen benytter, Nye Mega (Gulbrandsen et al., 2007, s. 51). Jeg har imidlertid endret litt på oppgaven. Ved å endre litt på problemstillingen i teksten tester den nå mer direkte det oppgaver i denne kategorien søker å gjøre. Spørsmålet i oppgaven ble endret fra «Hvor mye er igjen i flasken»? til «Hvor mye drikker han»? Da unngås en regneoperasjon, som erfaring viser, at elevene av og til utelater på grunn av at de ikke har lest oppgaven godt nok.

I Liping Mas kunnskapspakke er meningen med multiplikasjon med brøk «concept knot» (Ma, 1999, s. 81-82 og 115). Det vil si at det å beherske multiplikasjon med brøk er mest grunnleggende for å kunne løse oppgaver med divisjon med brøk. Ser vi på Liping Mas modell for denne kunnskapspakken er det også multiplikasjon med brøk som knyttes direkte til forståelsen av brøk som ide og som enhet/del av en hel.

3.2.2 Konseptet med enhet, del av den hele

Oppgavene i denne kategorien (og konseptet brøk) tester i større grad elevenes forståelse, og ikke bare rene regneferdigheter. Derfor inneholder den forholdsvis mange (10) oppgaver. Disse oppgavene er hentet fra Matematikksenterets læringsstøttende prøver for brøk og prosent.

Fem av oppgavene i denne kategorien går ut på å koble sammen/finne riktig brøk og figur med farget andel/avgrenset mengde (oppgave 1, 6, 14, 17 og 25). Tre øvrige oppgaver tester om en kan finne en brøk som ligger mellom to gitte brøker (oppgave 8, 13 og 20). De to siste oppgavene (oppgave 3 og 12) handler om å sammenligne brøker: Hvilken brøk er størst av… og…? Hvilken brøk er mindre enn…? Kategorien inneholder tilsynelatende flere like oppgaver, men ser en nærmere på problemstillingene, så ser en at de har ulike innfallsvinkler for å teste elevenes begreper.

For eksempel angriper oppgave 1 og 17 begrepet del av en hel med ulike figurer og ulike inndelinger. Da kan en få sjekket ut hvilken forståelse elevene legger til grunn for sine svar. Én oppgave ville da vært utilstrekkelig (jfr. Matematikksenterets didaktiske tilnærming).

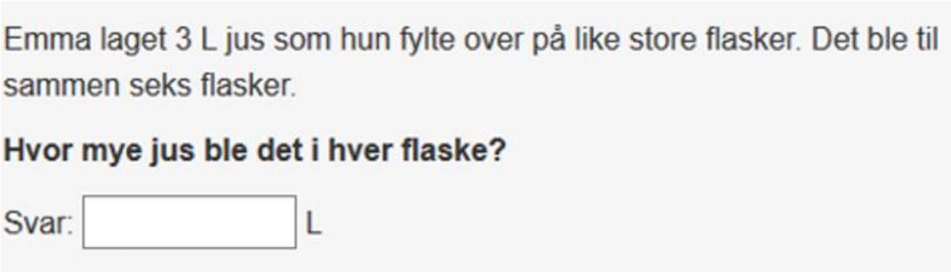
3.2.3 Konseptet med brøk

I denne kategorien er det fem oppgaver som tester elevenes generelle forståelse av arbeid med brøk som konsept. Disse oppgavene er også hentet fra Matematikksenterets pilotering av læringsstøttende prøver for brøk og prosent. To av oppgavene går ut på å sammenligne størrelsen av til to eller flere brøker. I dette sjiktet er det også tre oppgaver som går ut på å finne likeverdige brøker (oppgave 11 og 21) eller ha kunnskap om likeverdige brøker (oppgave 27). Den sistnevnte oppgaven i denne er problembasert og går ut på å finne ut hvor mange flere ruter som må fargelegges i et rutenett for at en gitt andel skal være fargelagt. De to siste oppgavene jeg har tatt med her handler om addisjon og subtraksjon av brøker med ulik nevner. Addisjon og subtraksjon med brøk har sine egne kunnskapspakker og hører i utgangspunktet ikke til i denne kategorien, men jeg valgte allikevel å innlemme dem her. Forklaringen til dette ligger i at denne typen oppgaver tester elevens forståelse av at brøker må ha lik nevnere for at de skal kunne adderes eller subtraheres. Kun elementer av samme «sort» kan adderes eller subtraheres. I enkel hoderegning løses dette ofte med kunnskap om likeverdige brøker.

3.2.4 Begrepet inverse operasjoner

En invers operasjon er en «motsatt» operasjon. For eksempel så har vi at den inverse operasjonen til addisjon er subtraksjon og den inverse operasjonen til multiplikasjonen er divisjon. Å forstå konseptet med inverse operasjoner innebærer å se sammenhengen mellom dem og kunne anvende denne sammenhengen i oppgaveløsing. Oppgaver i denne kategorien kan løses på to måter, med motsatt utgangspunkt, altså ved å benytte inverse operasjoner. For eksempel: Hvis $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$, så må $\frac{7}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$. På samme måte, hvis $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$, så må $\frac{1}{10} : \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$. Sammenhengen i inverse operasjoner gjelder både i regning med brøk og regning med heltall. Nå ble det bare én oppgave i denne kategorien (oppgave 4), men det kunne vært flere.

Oppgave 4 (se figur 9) skiller seg også ut med tanke på at det i oppgave teksten benyttes heltall, mens det i svaret blir en brøk. Det er heller ikke gitt i oppgaveteksten hvilken regneart som skal/kan benyttes.


Emma laget 3 L jus som hun fylte over på like store flasker. Det ble til sammen seks flasker.

Hvor mye jus ble det i hver flaske?

Svar: ______ L

Figur 9 Oppgave 4

Flere av oppgavene i divisjon og multiplikasjon med brøk kunne også vært plassert i denne kategorien. Dette gjelder for eksempel oppgave 7, 18, 29 og 31. I disse oppgavene er imidlertid løsningsmåten mer direkte gitt. Allikevel ser jeg i elevenes løsningsforslag at den inverse operasjonen er benyttet. Dette gjelder spesielt oppgave 29 og 31 (se vedlegg 1). Oppgavene som er plassert i denne kategorien er formulert slik at den kan løses både med multiplikasjon og divisjon.

3.2.5 Forståelse av divisjon med heltall

De to oppgavene i denne kategorien tester enkel divisjon med heltall (oppgave 15 og 19). Jeg valgte å bruke denne typen oppgaver fordi de tilfredsstiller de krav til divisjon elevene er nødt til å ta i bruk i oppgavene med de overliggende begrepene, opp mot divisjon med brøk. I denne kartleggingen stilles det ikke krav til å kunne andre algoritmer for oppstilt divisjon. Hvis elevene er usikre i hoderegning med divisjon med heltall, så vil de kunne få vansker i arbeid med overordnede begreper i denne kunnskapspakken.

3.2.6 Forståelse av multiplikasjon med heltall

I denne kategorien tester de to oppgavene jeg har valgt å ta med enkel tabellkunnskap knyttet til multiplikasjon (oppgave 2 og 9). I oppgavene med de overliggende begrepene, opp mot divisjon med brøk, kreves det ikke kunnskaper i multiplikasjon ut over den lille multiplikasjonstabellen. Det stilles derfor ikke krav til å kunne andre algoritmer for oppstilt multiplikasjon.

Også her er det slik at hvis elevene er usikre i hoderegning med multiplikasjon med heltall, så vil de kunne få vansker i arbeid med overordnede begreper i denne kunnskapspakken. Elevene vil da også få vansker med å ta i bruk konseptet med inverse operasjoner.

3.2.7 Forståelse av addisjon

I Liping Mas kunnskapspakke er det ikke beskrevet om dette gjelder heltall eller brøk (Ma, 1999). Av begrepets plassering i hennes kunnskapspakke for divisjon med brøk (se figur 4) forstår jeg det dithen at det gjelder addisjon med heltall. Forståelse av addisjon med heltall må ligge til grunn for å ha forutsetninger for å kunne arbeide med multiplikasjon med heltall. Det ser vi også i kunnskapspakken for divisjon med brøk. Der er addisjon med heltall plassert under multiplikasjon med heltall, og forstås dermed som en underliggende ferdighet. Pilen opp til multiplikasjon med heltall indikerer relasjonen dem imellom. Oppgavene som er i denne kategorien (oppgave 22 og 26) tester derfor kun elementær hoderegning i tallområdet 0-20.

3.3 Elevintervjuer

For å redusere mulige feiltolkninger av viktige elevsvar gjennomførte jeg også intervjuer med fire av elevene. Elevene ville også kunne gi meg dybdekunnskap om sine tanker i prosessen med å løse oppgavene. Jeg valgte da ut elevsvar fra to oppgaver som hadde høy feilandel i elevsvarene. Med dette som utgangspunkt valgte jeg, til hver av oppgavene, ut en elev som hadde svart riktig og en elev som hadde svart feil. Her passet jeg på at elevene jeg spurte hadde samtykket i at de kunne delta i intervju der det ble gjort lydopptak.

De som ble valgt ble deretter spurt om de ønsket å delta i et intervju knyttet til kartleggingen de hadde gjennomført. Jeg valgte å gjøre et semistrukturert intervju (se vedlegg 2) som la til rette for at elevene best mulig skulle få fortelle om sine tanker bak sitt svar. Intervjuene ble gjort med elevene en og en. Etter en kort informasjon om hva som skulle skje i intervjuet, innledet jeg alle intervjuene med samme åpningsspørsmål:

> «Kan du fortelle meg hvordan du tenkte da du løste denne oppgaven»?

Spørsmålet er åpent og legger til rette for at elevene kan fortelle på egne premisser. Oppfølgingsspørsmålene var ikke bestemt på forhånd, men jeg hadde sett for meg ulike scenarioer slik at jeg var forberedt på å kunne bidra til at elevenes tankerekker ble fullført. For at jeg best mulig skulle kunne konsentrere meg om å lede intervjuet og med det holde innholdet i det som ble sagt på elevenes premisser, ble det gjort lydopptak. Da slapp jeg å notere underveis og dermed stå i fare for å miste viktig informasjon eller for å stille feil eller dårlige oppfølgingsspørsmål som begrenset elevenes tenkning rundt sine oppgavesvar.
I etterkant av at alle intervjuene var gjennomført ble lydopptakene transkribert.

3.4 Analysemetode

I analysemetoden vil jeg, i henhold til problemstillingen, se nærmere på hvilke forkunnskaper som ikke er til stede hos elever som ikke løser oppstilte oppgaver med divisjon med brøk. Der det er mulig vil jeg også se på hvilke misoppfatninger disse elevene har. Dette er viktig for å kunne si noe om hvilke implikasjoner dette kan gi for fremtidig undervisning.

For å få en oversikt over elevenes forståelse av de underliggende begrepene og ferdighetene til divisjon med brøk, gjorde jeg en kartlegging.

Elevenes resultater systematiserte jeg i en tabell (se vedlegg 3), slik at jeg kunne se hvilke oppgaver de hadde løst riktig og galt. Oppgavene ble satt opp i stigende rekkefølge oppgave 1 til oppgave 32. Elevene ble satt under hverandre, slik at jeg også fikk en oversikt over hvilke oppgaver som var utfordrende for dem. Da fikk jeg også oversikt over hvilke oppgaver utvalget som helhet hadde vansker med å løse. Riktig svar registrerte jeg med 1, og galt svar registrerte jeg med 0, i tillegg til at cellen ble skravert grå. Dette ga meg en oversikt over hva jeg kunne se etter i den videre analysen av resultatene.

I analysen av de innsamlede data valgte jeg så å sette sammen svarene til de elevene som svart feil på oppstilt oppgave med divisjon med brøk, oppgave 32, nemlig regnestykket $\frac{3}{5} : \frac{2}{7}$ (se tabell 4). Det samme ble gjort med svarene til de elevene som svarte riktig på oppgave 32 (se tabell 5). Dette ble gjort som et ledd i å nærme seg et svar på problemstillingen, som etterspør hvilke forkunnskaper som er mest sentrale for å kunne løse oppgaver med divisjon med brøk. Denne sammensettingen vil blant annet kunne gi svar på hvilke oppgaver elever som ikke løste oppgaven med oppstilt divisjon riktig, ellers har hatt vansker med.

Samtidig vil vi kunne se om det er ulikheter i hvilke oppgaver de to gruppene ikke har klart å løse. For at en oppgave skal være interessant å se nærmere på har jeg satt en grense på at 50% eller flere av elevene må ha svart feil på den. 50% ble satt som grense for da får jeg med resultater fra og med medianverdien og lavere. Dette blir kommentert videre når resultatene knyttes til kunnskapspakken og brøkforståelse.

Neste steg i analysen var å sette resultatene til gruppene, som henholdsvis løste divisjon med brøk riktig og som løste divisjon med brøk feil, inn i kunnskapspakkens kategorier. Oppgavene ble da kategorisert som vist i tabell 1. Hensikten med denne sammensettingen var å se om det innenfor de ulike kategoriene kom til syne noe mønster i hvilke oppgaver elevene ikke hadde klart å løse. Det å analysere elevenes forkunnskaper opp mot Mas kunnskapspakke for divisjon med brøk, er også sentralt for å svare på problemstillingen.

For å avgrense området jeg så på ytterligere og spisse fokus, valgte jeg å skille ut kategoriene forståelse av konseptet enhet og konseptet med brøk. Jeg kommer tilbake til hvorfor jeg kunne utelate begrepet inverse operasjoner, forståelse av divisjon med heltall, forståelse av multiplikasjon av heltall og forståelse av addisjon i 4.0 Analyse av elevsvarene i kartleggingen.

Til slutt i analysen så jeg på resultatene i kategorien forståelse av multiplikasjon med brøk. Jeg valgte å se på denne kategorien alene, fordi den er av Ma uttrykt som begrepsknute og dermed sentral i kunnskapspakken.

Samlet sett vil denne analysen kunne få frem eventuelle mønstre for hvilke forkunnskaper elever trenger for å kunne løse oppgaver med divisjon med brøk.

3.5 Kartleggingsprøvens reliabilitet

Det er av avgjørende betydning at kartleggingsprøven er treffsikker og måler det den skal måle. Kartleggingsprøven skal ikke bare måle hvor gode ferdigheter og forståelse elevene har innen området brøk. Oppgavene i prøven skal også ha en klar sammenheng med forståelsen av divisjon med brøk. Oppgavene skal samlet sett ivareta de underliggende begreper til divisjon med brøk, i henhold til Mas kunnskapspakke. De fleste av oppgavene er utprøvd gjennom Matematikksenterets første- og andrepilotering av læringsstøttende prøver, så det er sikret at de oppgavene måler det de skal måle.

Spørsmålet er om det er god nok sammenheng mellom oppgavesettet som helhet og den oppstilte oppgaven med divisjon med brøk, $\frac{3}{5} : \frac{2}{7} =$. For å se om denne sammenhengen er god nok, gjorde jeg en analyse av kartleggingen ved å teste oppgavene i forhold til gale/riktige svar med et 95 % konfidensintervall i Excel (se vedlegg 4) (Lysø, 2006, s. 171-208). Her ser vi at de elevene som ikke klarte å løse oppgave riktig med 95 % sikkerhet har fått en poengsum som ligger innenfor intervallet 17,01 – 22,99. De elevene som klarte å løse oppgave 32 riktig ligger innenfor intervallet 24,91 – 29,21. Det som er av betydning her er, for det første at intervallene ikke overlapper hverandre. For det andre ligger intervallet for poengsummen til de elevene som klarte å løse oppgave 32 riktig høyest. Det betyr at elevene som ikke klarte å løse oppgave 32 riktig med 95 % sikkerhet ikke har en poengsum som ligger innenfor intervallet til de elevene som klarte å løse oppgave 32 riktig (24,91 – 29,21). Og motsatt, de elevene som klarte å løse oppgave 32 riktig vil med 95 % sikkerhet ikke ha en poengsum innenfor intervallet til de elevene som ikke klarte å løse oppgave 32 riktig (17,01 – 22,99). Det betyr igjen at det er en sammenheng mellom det å klare å løse oppgave 32 riktig og hvor mange riktige svar elevene får til på de foregående oppgavene. De elevene som ikke løser oppgave 32 riktig har også færre riktige svar i de foregående oppgavene.

Det er i disse oppgavene vi kan lete etter om det er et mønster for hvilke oppgaver som er av betydning for å kunne løse oppgaver med divisjon med brøk riktig.

Ser vi i tillegg på verdien for Cronbachs Alfa, så ser vi at den er 0,88 (se vedlegg 4). Ifølge Wikipedia er verdier større enn 0,8 å regne som et godt resultat. Et godt resultat betyr her at resultatet er entydig. Det vil si at det er en entydig sammenheng mellom oppgavene i kartleggingen og oppgaven med divisjon med brøk. Hadde denne verdien vært høyere enn 0,9, ville resultatet blitt kategorisert som enestående[10].

Det ville ikke nødvendigvis vært et godt resultat for denne kartleggingen. En så høy verdi kan også indikere at oppgavene som testes er for like. Denne kartleggingen skal ivareta et bredt spekter av begreper innenfor brøk, og fordrer derfor en stor variasjon av oppgaver for å teste disse begrepene. En stor variasjon i hvilke oppgaver kartleggingen tester, kan redusere Cronbachs Alfa.

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Cronbach%27s_alpha

3.6 Etiske aspekter

De etiske aspekter innebærer at jeg i denne oppgaven har et ansvar for hvordan jeg fremstår, både som enkeltmenneske og som en del av et forskermiljø.

I dette arbeidet berører jeg flere etiske aspekter som danner grunnlaget for de vurderinger som er gjort. Min oppgave baserer seg på empirisk forskning der elever på 10. trinn (14-15 år) bidrar som informanter. Det er da etisk riktig at de samtykker til å delta på et fritt og informert grunnlag. Jeg planla derfor mitt forskningsprosjekt nøye, fylte ut et søknadskjema og søkte NSD om godkjenning av prosjektet. I denne søknaden var prosjektet beskrevet i et informasjonsskriv til foreldrene (se vedlegg 5). Det ble også beskrevet hvilke opplysninger jeg ønsket, hvordan disse skal anvendes med tanke på anonymitet og hvordan lagring foregår. Elevene som informanter har krav på at de opplysninger de gir, blir behandlet konfidensielt. Forskningsmaterialet skal anonymiseres. Praktiseringen av dette kan komme i konflikt med metodekrav der det vil være behov for etterprøving av funn og eventuell gjentakelse av forskningsprosjektet. Det har med kobling av data fra ulike kilder å gjøre. Til slutt står det også hva som skjer med de innhentede data etter prosjektets slutt.
Det stilles strenge krav til hvordan navnelister oppbevares, hvordan data lagres og til makulering og sletting av data.
På grunn av elevenes alder måtte de ha samtykke fra foreldre for å kunne delta. Sammen med informasjonsskrivet ble det derfor sendt ut et samtykkeskjema (se vedlegg 6). De samtykket da til å delta i kartlegging og intervju eller kun kartlegging. De som ikke ønsket å delta i prosjektet hadde vanlig undervisning den timen jeg gjennomførte kartleggingen med utvalget av elever som samtykket.

Krav til foreldresamtykke kommer av at barn og unge har spesielt behov for å beskyttes.
I tillegg til samtykke fra foreldre, må barnet/ungdommen også selv uttrykke informert samtykke. Deltakeren må ha en reell sjanse til å reservere seg fra å delta. For å ivareta barn/unge som bidrar i en forskningsprosess, må er det en forutsetning at forskeren har kunnskaper om den aldersgruppen som skal delta for å kunne tilpasse innhold og metode.

Kravet til konfidensialitet og anonymisering handler om vern av privatlivet. Målet er å hindre at publikasjon av data skal være til skade for personer som er deltar i forskningsarbeid.

Hvis forskningen skal være til å stole på, er det viktig at jeg legger eventuelle utenforliggende forhold og forutinntatte vurderinger utenfor.

De funn og tilhørende tolkninger som gjøres må baseres på et sant og saklig grunnlag. Den vitenskapelige evidens som følger av objektive, faglige analyser går foran konklusjoner som kan være av større egeninteresse. Nå er mine hoveddata hentet fra en kartlegging der svarene er enten riktige eller gale. Systematisert i forhold til riktig/galt vil det gi en tydelig og objektiv oversikt. Et subjektivt og tendensiøst utgangspunkt vil da lett bli avslørt.

I forhold til forskersamfunnet er det og et grunnleggende og selvsagt krav at en skal være redelig og til å stole på i sin forskning. Det vil si at en skal gjennomføre sin forskning med validitet og kvalitet. Dette innebærer at de resultater jeg publiserer er mine egne, sanne og ekte. Der jeg bruker andres teorier eller forskning har jeg en pålitelig og fullverdig henvisningspraksis. Jeg tilegner ikke meg selv andres innsats. Dette er god forskningsskikk og forskningsetiske grunnholdninger.

4.0 Analyse av elevsvarene i kartleggingen

I tabell 3 er resultatene fra alle elevene oppsummert. I denne delen i oppgaven går jeg gjennom de ulike sammensettingene av elevsvar som er nevnt i 3.4 Analysemetode. Dette vil gi en god oversikt over hvilke oppgaver og begreper som for elevene er generelt vanskelige.

4.1 Oppbygning av analyse av elevsvar

I denne analysen vil jeg først se på hvilke oppgaver elevene har hatt vansker med. For at jeg skal se nærmere på en oppgave, har jeg satt en grense på at 50% eller flere av elevene må ha løst oppgaven galt. I analysen går jeg gjennom elevsvarene i forhold til om de har løst oppgave 32 galt eller riktig. Denne grupperingen av elevsvarene beholder jeg når jeg så knytter dem til de ulike kategoriene i Mas kunnskapspakke. I forhold til grensen som er satt for at oppgavene skal være interessante å se nærmere på (50 %), går jeg gjennom de aktuelle oppgavene. Dette blir gjort oppgave for oppgave for å gi en best mulig oversikt over hvilke oppgaver som er interessante å se nærmere på.

Deretter vil jeg, med utgangspunkt i tabell 6 – Elever som løste oppgave 32 galt, satt inn i kunnskapspakkens kategorier, også se på hva som skjer hvis jeg øker denne grensen til 60%. Det å øke grensen til 60 % vil redusere antall oppgaver som blir aktuelle å se nærmere på.

Det er interessant å se om det er et mønster i hvilke typer oppgaver som faller fra og om det har betydning for de funn jeg gjør. Jeg gjør den samme øvelsen med tabell 7 – Elever som løste oppgave 32 riktig. Jeg vil her trekke frem funn jeg kan lese direkte ut av elevsvarene, før jeg i 4.2 Resultater og deltolkninger og 5.2 Drøfting går nærmere inn på de feil og misoppfatninger som kommer frem i funnene.

4.1.1 Elevsvar fra kartlegging

Tabellen nedenfor (se tabell 3) gir en oversikt over elevsvarene fra kartleggingen, ut i fra om elevene har svart riktig eller galt på de ulike oppgavene. Tabellen viser også antall gale svar og prosentvis gale svar innenfor hver oppgave.

Navn	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Elev 1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
Elev 2	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1
Elev 3	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
Elev 4	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
Elev 5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
Elev 6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
Elev 7	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
Elev 8	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
Elev 9	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
Elev 10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elev 11	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
Elev 12	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
Elev 13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Elev 14	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elev 15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elev 16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Elev 17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
Elev 18	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
Elev 19	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
Elev 20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
Elev 21	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
Elev 22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
Elev 23	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
Elev 24	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
Elev 25	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
Elev 26	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
Antall feil	4	2	1	4	9	0	5	12	1	13	3	2	9	1	1	10	7	14	2	10	6	0	6	20	2	1	4	9	6	15	11	10
Prosent feil	15	8	4	15	35	0	19	46	4	50	12	8	35	4	4	38	27	54	8	38	23	0	23	77	8	4	15	35	23	58	42	38

Tabell 3 Elevsvar fra kartlegging. 1 betyr rett svar. 0 betyr galt svar.

Hvis vi tar utgangspunkt i valgte grenseverdi som sier at 50% eller flere av elevene må ha løst oppgaven feil for at vi skal se på den, så sitter vi, for hele gruppa som gjennomførte kartleggingen, igjen med oppgave 10, 18, 24 og 30.

Oppgave 10 er subtraksjon av brøker med ulik nevner: $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} =$. Av de 13 elevene som løste denne oppgaven galt, har 10 av dem svart $\frac{2}{3}$. De resterende tre i denne gruppen har svart $\frac{2}{10}$.

Oppgave 18 handler om dobling av brøken $\frac{1}{3}$. I denne oppgaven ga 15 av elevene galt svar. 13 av dem svarte $\frac{2}{6}$, mens de resterende to svarte $\frac{1}{6}$.

Oppgave 24 er en tekstoppgave knyttet til multiplikasjon med brøk. Konteksten her er drikke målt i liter. 20 av elevene løste oppgaven galt. Blant disse elevene var det mange ulike svar: Fem elever svarte $\frac{7}{15}$, tre svarte $\frac{5}{15}$, to svarte $\frac{1}{3}$ og to svarte 0,47.
Resterende svar var det bare ett av hver av: $\frac{17}{15}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{2}{3}$ og 1,213. Én elev leverte uten å avgi svar på denne oppgaven.

Oppgave 30 er en tekstoppgave knyttet til divisjon med brøk gjennom regning på areal, der måleenheten som er brukt er meter. 15 av elevene løste denne oppgaven galt.
Tre elever svarte $\frac{4}{2}$ og to svarte $\frac{1}{4}$. Resterende svar var det bare ett av hver av: $\frac{6}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{2,3}{2}$, $\frac{0,5}{2}$, 1,5 og 1,66. Sju elever leverte uten å avgi svar på denne oppgaven.

4.1.2 Elever som løste oppgave 32 galt

I tabellen nedenfor (se tabell 4) har jeg samlet elevsvarene fra de som løste oppgave 32 galt. Dette for å se om det er noen sammenheng i hvilke oppgaver disse elevene har vansker med å løse.

Galt svar på oppgave 32																																
Navn	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Elev 1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
Elev 12	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
Elev 18	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
Elev 19	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
Elev 20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
Elev 21	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
Elev 22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
Elev 23	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
Elev 24	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
Elev 25	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
Antall feil	3	2	1	2	5	0	3	8	0	7	0	2	5	1	1	5	4	8	2	6	2	0	6	10	2	1	3	5	3	9	6	10
Prosent feil	30	20	10	20	50	0	30	80	0	70	0	20	50	10	10	50	40	80	20	60	20	0	60	100	20	10	30	50	30	90	60	100

Tabell 4 Elever som løste oppgave 32 galt. 1 betyr rett svar. 0 betyr galt svar.

I tillegg til oppgavene nevnt ovenfor (oppgave 10, 18, 24 og 30), kommer det i tabell 4 frem at elevene som løste oppgave 32 galt, også hadde vansker med oppgave 5, 8, 13, 16, 20, 23 og 31.

Oppgave 5 er addisjon av brøker med ulik nevner: $\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$ =. Av de fem i denne gruppa som hadde løst oppgave 5 galt, hadde tre av dem svart $\frac{3}{6}$ og to av dem hadde svart $\frac{3}{4}$.

Oppgave 8 går ut på å bestemme hvilken brøk som har verdi mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{3}$. Her hadde åtte elever svart galt. Av dem hadde tre svart at det er umulig, to svarte $\frac{1}{3}$ og én svarte $\frac{2}{2}$. I tillegg hadde én elev unnlatt å svare på denne oppgaven.

Oppgave 13 måler det samme som oppgave 8 og går ut på å bestemme hvilken brøk som har verdi mellom 1 og 3. Fem elever svarte galt på denne oppgaven. Av dem svarte tre elever $\frac{2}{3}$, én svarte $\frac{1}{2}$ og én svarte $\frac{1}{3}$.

Oppgave 16 går ut på å dele en brøk på et heltall: $\frac{1}{4}$: 2 =. På denne oppgaven hadde fem av elevene galt svar. To svarte $\frac{0,5}{2}$ og to svarte $\frac{2}{8}$. I tillegg hadde én elev gjort et forsøk på å gjøre om til desimaltall og utføre divisjon, uten å komme frem til et svar.

Oppgave 20 måler det samme som oppgave 8 og 13 og går ut på å bestemme hvilken brøk som har verdi mellom 0 og 1. Seks av elevene hadde galt svar her. Av dem svarte tre at det er umulig, mens de resterende tre leverte blankt på denne oppgaven. Én av elevene som unnlot å svare på denne oppgaven, gjorde det samme på oppgave 8.

Oppgave 23 er multiplikasjon av to brøker: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$ =. Seks elever avga galt svar. Tre svarte med $\frac{14}{35} \cdot \frac{15}{35}$ i svaret, to svarte $\frac{14}{15}$ og den siste svarte $\frac{2}{16}$.

Oppgave 31 er tenkt som divisjon med brøk: Halvparten av et tau er $3\frac{1}{4}$ m langt. Hvor langt er hele tauet? Denne oppgaven kan også løses med den inverse operasjonen, multiplikasjon med brøk. Seks av elevene løste denne oppgaven galt og alle ga ulike svar: $1\frac{2}{4}$, $3\frac{2}{8}$, 3,25, 12, 13 og 14.

Det kan også være interessant å se på de oppgavene som også utvalget som helhet hadde vansker med (se tabell 3). Et argument for det er at elever som svarte galt på oppgave 32 kanskje har andre misoppfatninger i tilknytning til disse oppgavene.

Oppgave 10: $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$ =. Sju av elevene løste denne oppgaven galt. Av dem svarte seks elever $\frac{2}{3}$ og én elev svarte $\frac{2}{10}$.

Oppgave 18: Dobling av brøken $\frac{1}{3}$. Åtte elever svarte galt. Sju elever svarte $\frac{2}{6}$ og én svarte $\frac{1}{6}$.

Oppgave 24: Multiplikasjon av brøk i kontekst. Ingen av elevene hadde svart riktig på denne oppgaven. Tre elever har svart $\frac{5}{15}$, og to elever har svart $\frac{1}{3}$. De resterende elevene ga alle ulike svar: $\frac{2}{15}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{5}{12}$ og $\frac{2}{3}$. Én elev leverte uten å avgi svar på denne oppgaven.

Oppgave 30: Divisjon med brøk i kontekst. Ni elever løste denne oppgaven feil. To elever svarte $\frac{4}{2}$. Resten avga ulike svar: $\frac{1}{4}$, $\frac{0,5}{2}$ og 1,5, mens fire elever leverte uten å avgi svar.

4.1.3 Elever som løste oppgave 32 riktig

I tabellen nedenfor (se tabell 5) er elevsvarene fra de som løste oppgave 32 riktig samlet. Det er også interessant å se om det er oppgaver disse elevene hadde vansker med, og om det eventuelt er noen sammenheng i hvilke oppgaver dette gjelder. Det kan da også være interessant å gjøre en sammenligning mellom svarene til de som løste oppgave 32 galt og de som løste oppgave 32 riktig.

Riktig svar på oppgave 32																																
Navn	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Elev 2	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1
Elev 3	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
Elev 4	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
Elev 5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
Elev 6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
Elev 7	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
Elev 8	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
Elev 9	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
Elev 10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elev 11	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
Elev 13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Elev 14	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elev 15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elev 16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Elev 17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
Elev 26	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
Antall feil	1	16	16	14	4	16	14	12	1	6	3	16	4	16	16	5	3	7	16	4	4	16	16	10	16	16	1	4	3	6	5	16
Prosent feil	6	100	100	88	25	100	88	75	6	38	19	100	25	100	100	31	19	44	100	25	25	100	100	63	100	100	6	25	19	38	31	100

Tabell 5 Elever som løste oppgave 32 riktig. 1 betyr rett svar. 0 betyr galt svar.

Her kommer det ikke frem noen nye oppgaver å se nærmere på. Oppgave 24, multiplikasjon med brøk i kontekst står imidlertid igjen frem som en oppgave med høy andel feil. Ti av seksten elever svarte feil på denne oppgaven. Tre elever svarte $\frac{7}{15}$, to svarte 0,47 og én svarte $\frac{2}{5}$. Resterende svar var det bare ett av hver av: $\frac{17}{15}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{12}{5}$ og 1,213.

4.1.4 Elever som løste oppgave 32 galt, satt inn i kunnskapspakkens kategorier

Her (se tabell 6) ser vi igjen på elevsvarene til de som løste oppgave 32 galt, men nå satt inn i Mas kunnskapspakke. Oppgavene står ikke lenger i numerisk rekkefølge, men er kategorisert i forhold til hvilke begreper/områder av begreper de tester. En annen endring fra tabellene ovenfor i dette kapitlet, er at jeg i tillegg har tatt med opplysninger om antall feil og prosentvis feil for de enkelte elevene. Dette har jeg gjort for å se på hvilke feil de elevene som har flest feil i tillegg har gjort.

Det er interessant å vite om det dukker opp andre feil, eller om det er feil i samme kategori som de andre elevene som ikke løste oppgave 32 har gjort.

Galt på oppgave 32																																			
Kategori	Divisjon med brøk							Multi. med brøk			Konseptet med enhet (del av hele)										Konseptet med brøk					Inv. Op	Divi. Ht		Multi. Ht		Addi. Ht		Ant. Feil	% feil
Navn	7	16	28	29	30	31	32	18	23	24	1	3	6	8	12	13	14	17	20	25	5	10	11	21	27	4	15	19	2	9	22	26		
Elev 1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	15	47 %
Elev 12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	21	66 %
Elev 18	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	16 %
Elev 19	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	38 %
Elev 20	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9	28 %
Elev 21	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	15	47 %
Elev 22	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	25 %
Elev 23	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	14	44 %
Elev 24	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	28 %
Elev 25	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	11	34 %
Antall feil	3	5	5	3	9	6	10	8	6	10	3	1	0	8	2	5	1	4	6	2	5	7	0	2	3	2	1	2	2	0	0	1		
Prosent feil	30	50	50	30	90	60	100	80	60	100	30	10	0	80	20	50	10	40	60	20	50	70	0	20	30	20	10	20	20	0	0	10		
I kategorien				68					80				32								34					20		15		10		5		

Tabell 6 Elever som løste oppgave 32 galt, satt inn i kunnskapspakkens kategorier. 1 betyr rett svar. 0 betyr galt svar. «I kategorien» er prosent feil av alle tilhørende oppgaver.

I tabell 6 er oppgavene omgruppert og kategorisert i forhold til Mas kunnskapspakke, med divisjon med brøks underliggende begreper. Det vil derfor ikke komme frem andre oppgaver som elevene har vansker med, men oppgavene er organisert i forhold til hvilket begrepsområde de tilhører.

Vi ser at innen Begrepet inverse operasjoner, Forståelse av divisjon med heltall, Forståelse av multiplikasjon med heltall og Forståelse av addisjon, så har de fleste elevene ingen vansker med å løse de tilhørende oppgavene.

I kategorien Konseptet med brøk har elevene vansker med oppgave 5 og 10.

Knyttet til Konseptet med enhet er det oppgave 8, 13 og 20 elevene har de største vanskene med å løse. I kategorien Forståelse av multiplikasjon med brøk ser vi at elevene strever med alle oppgavene (oppgave 18, 23, 24 og 28).

Dette gjentar seg nesten (fem av seks oppgaver) i Forståelse av divisjon med brøk, der elevene har vansker med oppgave 16, 29, 30, 31 og selvsagt oppgave 32.

Gjør vi et eksperiment og øker prosenten for antall elever som har løst oppgaven feil til 60, så ser vi at oppgave 5, 13 og 16 faller ut. Disse oppgavene omhandler addisjon av brøker med ulik nevner, å finne en brøk mellom to heltall og divisjon av brøk med heltall. Hva dette innebærer kommer jeg tilbake til i kapittel 4.2.4 60 % som grense for andel elever som løste oppgave 32 galt.

4.1.5 Elever som løste oppgave 32 riktig, satt inn i kunnskapspakkens kategorier

I tabellen nedenfor (se tabell 7) har vi elevsvarene til de elevene som har svart riktig på oppgave 32, nå satt inn i Mas kunnskapspakke. Tabellen gir for øvrig samme type informasjon som tabell 7.

Riktig på oppgave 32																																				
Kategori	Divisjon med brøk							Multi. med brøk			Konseptet med enhet (del av hele)										Konseptet med brøk					Inv. Op	Divi. Ht		Multi. Ht		Addi. Ht		Ant. Feil	% feil
Navn	7	16	28	29	30	31	32	18	23	24	1	3	6	8	12	13	14	17	20	25	5	10	11	21	27	4	15	19	2	9	22	26		
Elev 2	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	16	50 %
Elev 3	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	3	9 %
Elev 4	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	6	19 %
Elev 5	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	6 %
Elev 6	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	6 %
Elev 7	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	8	25 %
Elev 8	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	5	16 %
Elev 9	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	12	38 %
Elev 10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0 %
Elev 11	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6	19 %
Elev 13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	6 %
Elev 14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3 %
Elev 15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3 %
Elev 16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	6 %
Elev 17	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	16 %
Elev 26	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	16 %
Antall feil	2	5	4	3	6	5	0	7	0	10	1	0	0	4	0	4	0	3	4	0	4	6	3	4	0	2	0	0	0	1	0	0		
Prosent feil	13	31	25	19	38	31	0	43,8	0	62,5	6	0	0	25	0	25	0	19	25	0	25	38	18,8	25	0	12,5	0	0	0	6,25	0	0		
I kategorien				26					32,8				11										21,3			12,5		0		3,13		0		

Tabell 7 Elever som løste oppgave 32 riktig, satt inn i kunnskapspakkens kategorier. 1 betyr rett svar. 0 betyr galt svar. «I kategorien» er prosent feil av alle tilhørende oppgaver.

For de elevene som løste oppgave 32 riktig ser vi at de har størst vansker med oppgave 24, multiplikasjon med brøk. Sett bort i fra den oppgaven, så er disse elevene som gruppe innenfor grenseverdien for andel feil, uavhengig om den settes til 50 % eller 60 %. (Oppgave 24 har 62,5 % feil svar).

4.1.6 Elever som løste oppgave 32 galt – Brøkforståelse

For å få en bedre oversikt over oppgavene innen Konseptet med enhet og Konseptet med brøk (les brøkforståelse), så har jeg i tabell 8 valgt å trekke dem ut fra de øvrige kategoriene i kunnskapspakken. Tabellen gir for øvrig samme opplysninger som tabell 6, men jeg har valgt å markere prosentvis feil hos de to elevene som har flest feil. Det har jeg gjort fordi jeg vil se på om disse elevene i tillegg har gjort feil som forsterker funn hos gruppen for øvrig, eller om de i tillegg har gjort andre typer feil.

Galt på oppgave 32 - Brøkforståelse																	
Kategori	Konseptet med enhet (del av hele)										Konseptet med brøk					Ant. feil	% feil
Navn	1	3	6	8	12	13	14	17	20	25	5	10	11	21	27		
Elev 1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	5	33 %
Elev 12	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	9	60 %
Elev 18	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	2	13 %
Elev 19	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	4	27 %
Elev 20	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	7 %
Elev 21	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	7	47 %
Elev 22	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	3	20 %
Elev 23	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	6	40 %
Elev 24	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	3	20 %
Elev 25	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	4	27 %
Antall feil	3	1	0	8	2	5	1	4	6	2	5	7	0	2	3		
Prosent feil	30	10	0	80	20	50	10	40	60	20	50	70	0	20	30		
I kategorien			32								34						

Tabell 8 Elever som løste oppgave 32 galt – Brøkforståelse. 1 betyr rett svar. 0 betyr galt svar.

I tabell 8 har jeg isolert de oppgavene som overordnet går på brøkforståelse. Oppgavene er fra Matematikksenterets læringsstøttende prøve og tester elevenes forståelse av brøk. Jeg fjernet Inverse operasjoner, Divisjon med heltall, Multiplikasjon med heltall og Addisjon da elevene hadde få vansker innenfor de områdene. Multiplikasjon med brøk og Divisjon med brøk vil jeg se på hver for seg. Likt som i tabell 7 er det oppgavene 8, 13, 20, 5 og 10 som elevene har størst vansker med å løse.

I tillegg kan vi legge merke til at de to elevene som har flest feil (Elev 12 og Elev 21) også har løst oppgave 1 (1), 17 (2), 21 (0), 27 (1) og 12 (0) feil. Tallet i parentes står for antall andre elever i gruppen med samme feil.

Oppgave 1 går ut på å krysse av for den/de sekskantene som er fargelagt $\frac{1}{3}$ blå. Her har elevene krysset av for en/flere figurer som er delt i tre og har én del fargelagt, uavhengig om delene er like store.

Oppgave 17 har samme tema, men her skal det krysses av for den/de sirklene som er fargelagt $\frac{1}{5}$ blå. Samme feiltype som i oppgave 1 gjentar seg også her.

Oppgave 21, her skal elevene finne en annen brøk som har samme verdi som $\frac{3}{4}$. De elevene som svarte feil har svart $\frac{2}{5}$ og $\frac{1,5}{2}$.

I oppgave 7 skal $\frac{1}{4}$ deles likt på to personer. Her svarte elevene med feil $\frac{2}{8}$ og $\frac{1}{2}$.

Oppgave 12 går ut på å finne brøken som er mindre enn $\frac{1}{4}$. Elevene med feil svarte her $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{2}$.

4.1.7 Elever som løste oppgave 32 riktig – Brøkforståelse

Tabellen nedenfor (se tabell 9) viser en oversikt over elevsvarene til de som svarte riktig på oppgave 32, her med fokus på brøk forståelse – Konseptet med enhet og Konseptet med brøk. Også her har jeg markert feilprosenten til de elevene som har flest feil (Elev 2 og Elev 9). Dette er gjort for å se om oppgavene disse elevene har svart feil på samsvarer med de feil gruppen som svarte feil på oppgave 32 ellers har gjort.

Riktig på oppgave 32 - Brøkforståelse																	
Kategori	Konseptet med enhet (del av hele)										Konseptet med brøk					Ant. feil	% feil
Navn	1	3	6	8	12	13	14	17	20	25	5	10	11	21	27		
Elev 2	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	7	47 %
Elev 3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0 %
Elev 4	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	3	20 %
Elev 5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0 %
Elev 6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0 %
Elev 7	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	3	20 %
Elev 8	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	7 %
Elev 9	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	6	40 %
Elev 10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0 %
Elev 11	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	7 %
Elev 13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	7 %
Elev 14	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	7 %
Elev 15	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	7 %
Elev 16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	7 %
Elev 17	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	2	13 %
Elev 26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	2	13 %
Antall feil	1	0	0	4	0	4	0	3	4	0	4	6	3	4	0		
Prosent feil	6,3	0	0	25	0	25	0	19	25	0	25	38	19	25	0		
I kategorien			10								21						

Tabell 9 Elever som svarte riktig på oppgave 32 – Brøkforståelse. 1 betyr rett svar. 0 betyr galt svar.

Ut i fra tabell 9 ser vi at de fleste elevene ikke har spesielle vansker innenfor Konseptet med brøk og Konseptet med enhet.

Hos de to elevene som har flest feil (Elev 2 og Elev 9) skiller oppgave 17 (1) og 21 (2) seg ut fra de fleste andre i gruppen, som de samme oppgavene også gjør hos de to elevene med flest feil fra tabell 8.

4.1.8 Elever som løste oppgave 32 galt – Multiplikasjon og divisjon med brøk

I tabell 10 ser vi på elevsvarene til de som har løst oppgave 32 galt, men nå fokuserer vi på Forståelse av multiplikasjon med brøk og Forståelse av divisjon med brøk. Her er det også bedret oversikt som er begrunnelsen for å isolere disse to kategoriene i kunnskapspakken fra de øvrige kategoriene. I tillegg er disse to kategoriene svært sentrale i henhold til Mas kunnskapspakke, da de representerer begrepsknuten (Forståelse av multiplikasjon med brøk) og det overordnede begrepet jeg kartlegger i forhold til.

Galt på oppgave 32										
Kategori	Divisjon med brøk							Multi. med brøk		
Navn	7	16	28	29	30	31	32	18	23	24
Elev 1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
Elev 12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Elev 18	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
Elev 19	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Elev 20	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
Elev 21	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
Elev 22	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
Elev 23	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Elev 24	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
Elev 25	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
Antall feil	3	5	5	3	9	6	10	8	6	10
Prosent feil	30	50	50	30	90	60	100	80	60	100
I kategorien				68					80	

Tabell 10 Elever som løste oppgave 32 galt - Multiplikasjon og divisjon med brøk. 1 betyr rett svar. 0 betyr galt svar.

Forståelse av multiplikasjon med brøk er Mas begrepsknute og i denne kategorien har elevene vansker med alle oppgavene (se tabell 10). Vi legger spesielt merke til at oppgave 24 har ingen av elevene klart å løse. Denne gruppen av elever har også en høy feilprosent på oppgave 18 (80%) og oppgave 23 (60%). Se også kapittel 4.1.2.

Vi ser også av tabell 10 at feilprosenten også er høy i Forståelse av divisjon med brøk, med et lite unntak av for oppgavene 7 og 29 der feilandelen er 30 %. Dette var også forutsett, da elevene i denne gruppen er de som ikke løste oppgave 32 riktig, og divisjon med brøk forutsetter at en behersker multiplikasjon med brøk.

4.1.9 Elever som løste oppgave 32 riktig – Multiplikasjon og divisjon med brøk

Tabellen nedenfor (se tabell 11) viser også en oversikt over riktig/galt i kategoriene Forståelse av multiplikasjon og Forståelse av divisjon med brøk, men nå for de elevene som løste oppgave 32 riktig.

Riktig på oppgave 32										
Kategori	Divisjon med brøk							Multi. med brøk		
Navn	7	16	28	29	30	31	32	18	23	24
Elev 2	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
Elev 3	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
Elev 4	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0
Elev 5	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
Elev 6	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
Elev 7	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0
Elev 8	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0
Elev 9	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
Elev 10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elev 11	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
Elev 13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Elev 14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elev 15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elev 16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Elev 17	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
Elev 26	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
Antall feil	2	5	4	3	6	5	0	7	0	10
Prosent feil	13	31	25	19	38	31	0	43,8	0	62,5
I kategorien				26					32,8	

Tabell 11 Elever som løste oppgave 32 riktig - Multiplikasjon og divisjon med brøk. 1 betyr rett svar. 0 betyr galt svar.

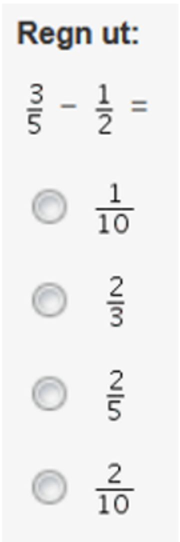
I Forståelse av multiplikasjon med brøk ser vi i oppgave 24 at elevene i denne gruppen har størst problemer i denne ferdigheten når oppgaven er gitt i kontekst. Elevenes svarfordeling er gitt i 4.1.3 under tabell 5. Det er kun denne oppgaven elever fra denne gruppen har vansker med i samme grad som elevene som ikke løste oppgave 32 riktig.

4.1.10 Utsagn fra intervju som støtter elevsvar

I etterkant av kartleggingen gjennomførte jeg fire intervjuer med elever. Jeg gjennomførte et semistrukturert intervju med elevene enkeltvis. Ut i fra elevsvarene i tabell 3 så jeg at svarene i oppgave 10 og oppgave 18 var interessante å se nærmere på.

Oppgavene hadde en feilprosent på 50% og 54% samlet sett for gruppen. Dette er over grensen for andel feil jeg i utgangspunktet hadde satt for å skulle se nærmere på en oppgave. Oppgave 10 tilhører kategorien Konseptet med brøk, mens oppgave 18 tilhører Forståelse av multiplikasjon med brøk.

Oppgave 10



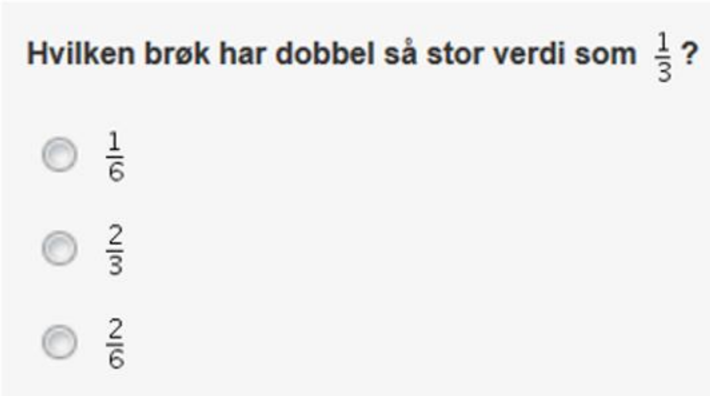
Figur 10 Oppgave 10

Oppgave 10 (se figur 10) er som vi ser en oppstilt oppgave med subtraksjon av brøker med ulik nevner. I analysen av elevsvarene så jeg at denne oppgaven hadde 50% av alle elevene, altså 13 stykker, løst feil. 10 av disse elevene krysset av for $\frac{2}{3}$. Dette indikerer at elevene har en misoppfatning i algoritmen for subtraksjon av brøker med ulik nevner. De subtraherer teller med teller og nevner med nevner. For eventuelt å få denne indikasjonen bekreftet, gjorde jeg et intervju med en av elevene som hadde svart $\frac{2}{3}$ på denne oppgaven. Jeg spurte eleven hvordan han hadde tenkt når han løste oppgave 10:

Elev 21: Jeg tror at jeg bare tatt, tatt minus tre minus en og fem minus to og fått to tredeler da

Svaret han ga støtter antakelsen jeg hadde om at svaret $\frac{2}{3}$ på denne oppgaven tilsier at han har subtrahert teller med teller (3-1) og nevner med nevner (5-2).

Oppgave 18



Figur 11 Oppgave 18

Oppgave 18 går ut på dobling av brøk eller multiplikasjon av brøk med heltall. Her så jeg at 58 % av elevene, eller 15 elever, hadde løste denne oppgaven feil. 13 av elevene hadde krysset av for at svaret på oppgaven er $\frac{2}{6}$. Dette svaret gir meg tilbakemelding om at disse elevene har en misoppfatning om at dobling av brøk innebærer å multiplisere både teller og nevner med to. At dette stemmer fikk jeg bekreftet i intervju med en av elevene som hadde gitt dette svaret:

Lærer: Kan du forklare hvordan du tenkte når du løste den?

Elev 26: Jeg ganget det med to

Lærer: Mm. Hva ganget du med to da?

Elev: En tredel med to, så da ganget jeg en med to og tre med to, så fikk jeg to seksdeler

(Transkripsjon fra intervju)

Her forklarer eleven at hun multipliserte teller med to ($1 \cdot 2$) og nevner med to ($3 \cdot 2$) og dermed fikk svaret $\frac{2}{6}$. Det er i samsvar med min tolkning av elevsvaret.

4.2 Resultater og deltolkninger

I denne delen av oppgaven vil jeg foreta en tolkning av elevsvarene fra kartleggingsprøven og se om det er noen sammenhenger og mønstre i eventuelle misoppfatninger elevene har. Jeg tar da utgangspunkt i funnene i kapittel 4.0 Analyse av elevsvarene i kartleggingen, avsnitt 4.1.1 – 4.1.9.

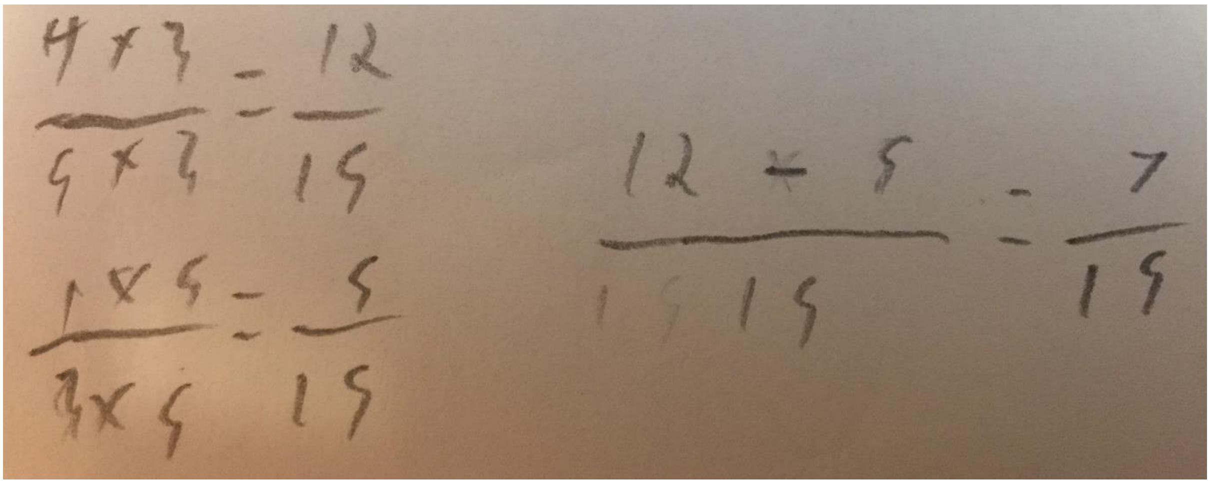
4.2.1 Elevsvar fra kartlegging

For alle elevene som gjennomførte kartleggingsprøven ser vi i tabell 3, at de som gruppe hadde størst vansker med oppgave 10, 18, 24 og 30.

Oppgave 10 handler om å forstå konseptet med brøk, knyttet til subtraksjon av brøker med ulik nevner, $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} =$. For å kunne subtrahere brøker må de ha eller gjøres om til å ha lik nevner. 10 av de 13 elevene som svarte galt på denne oppgaven har svart $\frac{2}{3}$. En tolkning av svaret de ga tilsier at de har subtrahert teller med teller og nevner med nevner, uten å utvide brøkene til å ha felles nevner. De resterende 3 elevene svarte $\frac{2}{10}$. De har da funnet felles nevner, men ikke utvidet telleren i samme forhold. Deretter har de subtrahert teller med teller og beholdt felles nevner.

Oppgave 18 omhandler dobling av brøken $\frac{1}{3}$. Hva skjer når vi dobler en brøk eller multipliserer en brøk med 2? 15 elever svarte galt på denne oppgaven. Av dem ga 13 elever svaret $\frac{2}{6}$. Her har elevene multiplisert både teller og nevner med to og med det bare utvidet brøken. De to andre elevene som løste denne oppgaven galt har gitt svaret $\frac{1}{6}$. Da har de multiplisert nevneren med to, beholdt telleren og med det halvert brøken.

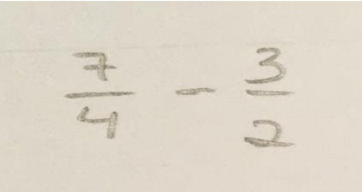
Oppgave 24 er en oppgave som omhandler multiplikasjon av brøker i kontekst, $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} =$.
Det var stor variasjon i elevsvarene som ble gitt. Svaret som oftest gikk igjen var $\frac{7}{15}$.



Figur 12 Elevsvar fra oppgave 24, Elev 18

Denne eleven (se figur 12) og flere andre har her funnet fellesnevner og utvidet brøkene. Deretter har de subtrahert: $\frac{12}{15} - \frac{5}{15}$ og ut i fra egen tankegang (men ikke riktig) egentlig funnet ut hvor mye som er igjen i flasken. Det er her en misoppfatning om hva som er den hele og hvordan du finner en del av den hele. Subtraksjon ville ha fungert hvis en skulle funnet ut hvor mye som var igjen i flasken og flasken hadde inneholdt 1 liter.

Oppgave 30 handler om divisjon med brøk i kontekst, $\frac{7}{4} : \frac{3}{2} =$. Også her er det stor variasjon i elevsvarene, men svaret som oftest går igjen er $\frac{4}{2}$.



Figur 13 Elevsvar fra oppgave 30, Elev 26

I figur 13 ser vi at denne eleven har subtrahert, $\frac{7}{4} - \frac{3}{2} = \frac{4}{2}$. Det avdekkes da to misoppfatninger. Den ene går på hvordan du finner lengden på den andre siden til et rektangel når du har oppgitt areal og lengden på én side. Den andre misoppfatningen handler om det samme som i oppgave 10 med subtraksjon av brøker med ulik nevner. Eleven har også her subtrahert teller med teller og nevner med nevner.

4.2.2 Tolkning av elevsvar hos elever som løste oppgave 32 galt

Ser vi på de elevene som løste oppgave 32 galt, ser vi i tabell 6 at de hadde størst vansker med oppgave 5 og 10 i Konseptet med brøk og oppgave 8, 13 og 20 i Konseptet med enhet.

Oppgave 5 og 10 handler begge om forståelsen av brøk som konsept, knyttet til addisjon og subtraksjon av brøker med ulik nevner. Misoppfatningen som er rådende her er den samme som referert til ovenfor (oppgave 10). Elevene adderer/subtraherer teller med teller og nevner med nevner.

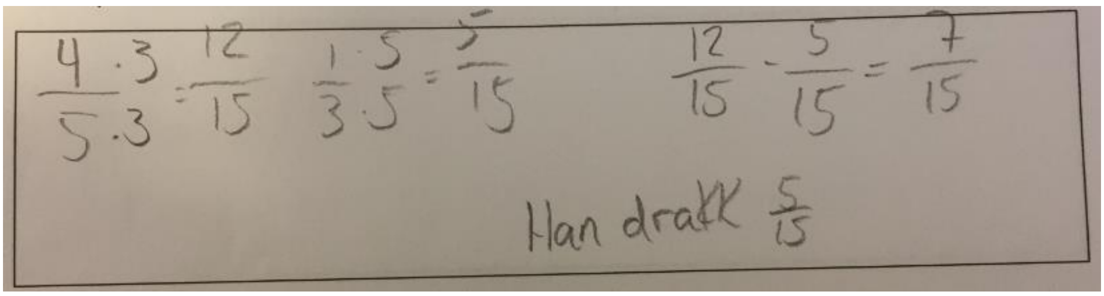
Oppgave 8, 13 og 20 omhandler det å finne mellomliggende brøker til to gitte verdier. Elevene i denne gruppen har vansker med strategier for å sammenligne brøker og for å finne brøker som er større/mindre enn gitte verdier. Elevsvarene fordeler seg forholdvis jevnt på de gitte svaralternativene.

Elevene i denne gruppen hadde også vansker med oppgave 18, 23 og 24 i Forståelse av multiplikasjon med brøk og oppgave 16, 28, 30 og 31 i Forståelse av divisjon med brøk.

Oppgave 18 går ut på å doble brøken $\frac{1}{3}$. Sju av de åtte elevene i denne gruppa som løste oppgaven galt svarte her $\frac{2}{6}$. Den siste eleven som svarte galt, krysset av for $\frac{1}{6}$. Felles for disse elevene er at de har en misoppfatning om hva en dobling av brøken innebærer. Eventuelt også hvordan en brøk multipliseres med et heltall. Eleven multipliserer her både teller og nevner med to, og utvider i stedet brøken med to. Denne tolkningen fant jeg også støtte for fra intervjuet med en av elevene (jfr. transkripsjon fra intervju, 4.1.10).

Oppgave 23 er multiplikasjon av brøkene $\frac{2}{5}\ og\ \frac{3}{7}$. Det er stor variasjon i elevsvarene som er gitt i denne oppgaven, men det svaret som går igjen oftest er $\frac{14}{35} \cdot \frac{15}{35}$. Elevene har da tenkt at de må utvide brøkene til å ha felles nevner. Det har de fått til, men så har det stoppet opp for dem. Strategien vil fungere siden en utvidelse av brøkene ikke endrer størrelsen på dem, men det er en tungvint måte å løse oppgaven på. Strategien indikerer også at de blander sammen med prosedyrene for å løse addisjon og subtraksjon av brøker med ulik nevner.

Oppgave 24 er multiplikasjon av brøker med utgangspunkt i kontekst, $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} =$. Ingen av elevene i denne gruppen løste oppgaven riktig. Det er også her stor variasjon i elevsvarene, men $\frac{5}{15}$ går igjen oftest.



Figur 14 Elevsvar fra oppgave 24, Elev 24

I dette elevsvaret (se figur 14) ser vi at denne eleven har utvidet brøkene til fellesnevner. Deretter har eleven foretatt subtraksjonen $\frac{12}{15}$ - $\frac{5}{15}$ og fått $\frac{7}{15}$. Til forskjell fra elevsvaret i figur 12, så har denne eleven sett av spørsmålet at svaret ikke kan være $\frac{7}{15}$, siden det er spurt etter hvor mye Bob Kåre drikker. Eleven har derfor skrevet $\frac{5}{15}$ som sitt svar. Svaret stemmer i forhold til andel av den hele, siden det er en utvidet brøk av andelen som er gitt i oppgaven (likeverdig brøk). Svaret stemmer imidlertid ikke i forhold til antall liter drikke. Det var kun denne oppgaven der både elevene som ikke løste oppgave 32 riktig og de som løste den riktig hadde vansker med. Det betyr at de andre oppgavene, som elevene ikke løste oppgave 32 riktig har vansker med, kan være av betydning for å forstå divisjon med brøk.

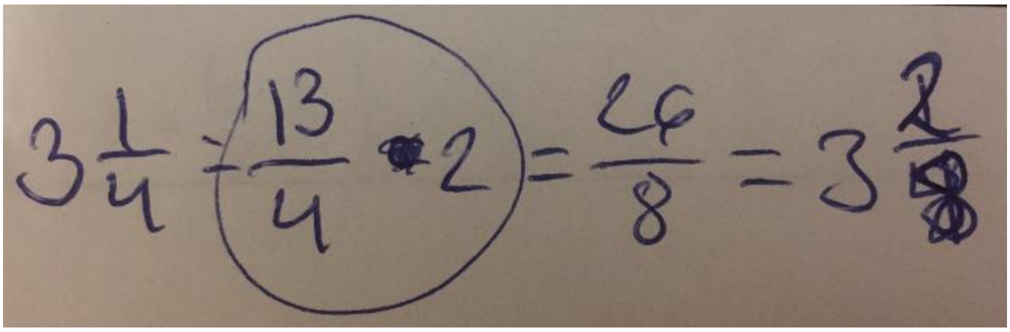
Ut i fra at denne gruppen elever ikke klarte å løse oppgave 32, er det ikke overraskende at de også hadde vansker med de fleste av oppgavene i kategorien Forståelse av divisjon med brøk.

Oppgave 16 går ut på å dividere en brøk på et heltall, $\frac{1}{4}$: 2 =. 50 % av elevene i denne gruppen løste oppgaven galt. Av dem svarte to elever $\frac{0,5}{2}$ og to elever svarte $\frac{2}{8}$. Én elev leverte blankt på denne oppgaven. Elevene som svarte $\frac{0,5}{2}$ har dividert både teller og nevner på 2 og deretter valgt svaret med en blanding av desimaltall og brøk. De som svarte $\frac{2}{8}$ har multiplisert både teller og nevner med 2, og dermed bare utvidet brøken.

Oppgave 28 handler om å halvere brøken $\frac{1}{2}$. Også her har 50 % av elevene løst oppgaven galt. 4/5 av disse elevene hadde også løst oppgave 16 galt. Denne oppgaven tester samme ferdighet som oppgave 16, men har en annen ordlyd. Fire av elevene som løste oppgaven galt svarte $\frac{0,5}{1}$. Som i oppgaven ovenfor har elevene her halvert både teller og nevner og gitt svaret som en blanding av desimaltall og brøk.

Oppgave 30 har en problemstilling med divisjon med brøk i kontekst, $\frac{7}{4} : \frac{3}{2}$ =. For denne gruppen av elever var det på denne oppgaven stor variasjon i elevsvarene. Svaret som gikk igjen oftest var blankt. Det nest hyppigste svaret som ble gitt var $\frac{4}{2}$. Misoppfatningene de som avga dette svaret har ble gjennomgått i 4.2.1. Med samme utgangspunkt var det også en elev som svarte $\frac{1}{4}$. Eleven har subtrahert, $\frac{7}{4} - \frac{3}{2} = \frac{4}{2}$, men har ulikt eksempelet i figur 15, utvidet til fellesnevner og fått regnestykket $\frac{7}{4} - \frac{6}{4} = \frac{1}{4}$.

Et annet funn i elevsvarene til denne oppgaven er en av elevene som fant at $\frac{7}{4} = 1{,}75$ og $\frac{3}{2} = 1{,}5$. Eleven forsøkte så å finne ut hvilket tall som multiplisert med 1,5 blir 1,75. Dette ut i fra at formelen for arealet til et rektangel er Side 1 · Side 2 = Areal. Eleven viser en strategi for problemløsning, men mangler noen redskaper for å kunne komme helt i mål med den. Oppgave 31 er kontekstbasert og går ut på å finne lengden av hele tauet nå halvparten er oppgitt til å være $3\frac{1}{4}$. Elevene i denne gruppen ga alle ulike svar. Det er derfor vanskelig å se noe mønster i svarene på denne oppgaven. Et svar som allikevel er interessant er $3\frac{2}{8}$ (se figur 15). Eleven som svarte dette har forstått at det handler om dobling av brøken:



Figur 15 Elevsvar fra Oppgave 31, Elev 22

Denne eleven har gjort om til uekte brøk og tenkt å multiplisere denne med 2. Idet eleven gjør dette avdekkes en misoppfatning vi har sett tidligere. Eleven multipliserer både teller og nevner med 2 og utvider dermed brøken. Av elevene i denne gruppen som løste oppgaven riktig, er det interessant å se at alle benyttet seg av å gjøre om til desimaltall. Dette indikerer at forståelsen av divisjon med desimaltall er bedre enn for divisjon med brøk.

De to elevene (Elev 12 og Elev 21) i denne gruppen som hadde flest feil, hadde også, ulikt de andre, feil på oppgave 12 i Konseptet med brøk og oppgave 1, 17, 21 og 27 i Konseptet enhet (se tabell 8).

Oppgave 12 handler om å sammenligne brøker og finne brøken som er mindre enn $\frac{1}{4}$. Elevene valgte ulike alternativ, men alternativene hadde til felles at nevneren var mindre enn 4. Dette indikerer en misoppfatning om at brøken er mindre dess mindre nevneren er.

Oppgave 1 handler om å krysse av for hvilken sekskant som er fargelagt $\frac{1}{3}$ blå. Her har Elev 12 krysset av for den første sekskanten som var delt i tre deler.

Delene var imidlertid av ulik størrelse. Elev 21 krysset av for alle sekskantene som var delt i tre. Også her hadde delene i hver figur ulik størrelse. (Det riktige alternativet var her delt i seks deler, hvorav to var fargelagt blå.) For begge elevene dreier det seg om en misoppfatning knyttet til at brøkdelene må være av lik størrelse.

Oppgave 17 tester det samme som oppgave 1, men her skal en krysse av foran den sirkelen/ de sirklene som er fargelagt $\frac{1}{5}$ blå. Elevene valgte også her samme strategi. Elev 12 valgte den første sirkelen som var delt i fem deler, men av ulik størrelse. Elev 21 valgte alle figurene som var delt i fem, deriblant også det riktige alternativet.

Oppgave 21 handler om å finne en annen brøk som har samme verdi som $\frac{3}{4}$. Elev 12 svarte $\frac{2}{5}$ og har tenkt at verdien til brøken beholdes hvis vi tar trekker i fra 1 i teller og legger til 1 i nevner. Elev 21 har forkortet brøken til $\frac{1,5}{2}$. Forståelsen av hvordan en finner likeverdige brøker er til stede, men her har eleven fått en blanding av desimaltall og brøk. Dette er også gjort i elevens svar på oppgave 28.

Oppgave 27 går ut på å finne ut hvor mange ruter som må fargelegges for at $\frac{4}{5}$ av figuren skal være fargelagt (3 av 10 er fargelagt). Her har begge elevene svart 1. Da stemmer telleren, men brøken blir ikke riktig, da nevneren er 10.

Ser vi på oppgave 32 isolert så er den oftest brukte strategien til elevene å utvide brøkene til felles nevner. Deretter stopper regneprosessen opp for dem. Én elev har dividert teller med teller og nevner med nevner. En annen elev har gjort om brøkene til desimaltall og deretter gjort et godt forsøk på divisjon, men ikke kommet frem til riktig svar.

4.2.3 Tolkning av elevsvar hos elever som løste oppgave 32 riktig

I tabell 7 ser vi at elevene i denne gruppen hadde størst vansker med oppgave 24, som handler om multiplikasjon med brøk, gitt i kontekst. Nå er det bare én oppgave i kartleggingen som tester denne ferdigheten i kontekst, så det er umulig å med sikkerhet fastslå hvorfor elevene strever med denne oppgaven. Allikevel kan det være tegn på at elevene har arbeidet med for få kontekstbaserte oppgaver, eventuelt at det har vært for lite variasjon i de oppgavene de har arbeidet med. Av strategiene som er valgt ser det ut til at de har arbeidet med den hele representert som 1 (liter).

I tabell 9 ser vi at Elev 2 og Elev 9 innen områdene for brøkforståelse har henholdsvis 47 % og 40 % feil. De har med det en større feilprosent enn de fleste elevene som ikke klarte å løse oppgave 32 riktig. Det er da interessant å se nærmere på hvorfor disse elevene allikevel har klart å løse denne oppgaven. Alle elevene i denne gruppen løste også oppgave 23 riktig, så også de to elevene med flest feil. De behersker dermed regneferdigheten i algoritmen til divisjon med brøk. Det vil si «multiplisere med den omvendte brøk». Som hos elevene med flest feil, men som ikke klarte å løse oppgave 32 (se tabell 8), så hadde Elev 2 og Elev 9 vansker med oppgave 17 og 21, begge oppgavene fra kategorien Konseptet enhet. Oppgave 17 gikk ut på å krysse av foran sirkelen som var fargelagt $\frac{1}{5}$ blå. I oppgave 21 skulle de skrive en annen brøk med samme verdi som $\frac{3}{4}$.

4.2.4 60% som grense for andel elever som løste oppgave 32 galt

Hvis vi øker grensen for andel elever som løste oppgaven galt til 60 % ser vi i tabell 6 at følgende oppgaver faller ut: I Konseptet med brøk går oppgave 5 ut. Denne oppgaven tester forståelsen av addisjon av brøker med ulik nevner. Prinsippet om å gjøre om til brøker med felles nevner testes også i oppgave 10, som omhandler subtraksjon av brøker med ulik nevner. Oppgave 10 har 70 % av elevene løst galt, så den er uansett med. Videre ser vi at i Konseptet enhet så utelates oppgave 13. Denne oppgaven går ut på å finne en brøk mellom to verdier og tester det samme som oppgave 8 og 20. Oppgave 8 og 20 løste henholdsvis 80 % og 60 % av elevene galt, så forståelsen innen dette området blir uansett ivaretatt. Vi ser også at i kategorien Forståelse av divisjon med brøk så faller oppgave 16 og 28 ut. Begge disse oppgavene handler om halvering av brøk, eller å dividere en brøk med 2.

Forståelsen av dette testes også ut i oppgave 7, der to barn skal dele $\frac{1}{4}$ liter brus. Oppgave 7 har imidlertid bare 30 % av elevene løst galt, så den er ikke blant oppgavene som er interessante å se nærmere på. Det betyr at vi med å øke andel elever som har løst oppgaven galt til 60 %, så mister vi oppgavene som ser på forståelsen av halvering av brøker, eller dividere brøker med to.

I tabell 7 ser vi at for elevene som svarte riktig på oppgave 32, så vil det ikke ha noen betydning for hvilke oppgaver som er interessante å se nærmere på om vi øker andel elever som har løst den enkelte oppgave til 60 %. Oppgave 24, med en andel elever som har løst den feil på 62 %, vil fremdeles stå igjen.

4.2.5 Sammendrag av funn

Ved å sette 50 % som grense for andel feil på kartleggingsprøven fant jeg, for de elevene som ikke klarte å løse oppgave 32, at de ikke hadde vansker med kategoriene Forståelse av addisjon, Forståelse av multiplikasjon med heltall, Forståelse av Divisjon med heltall og Begrepet inverse operasjoner. De fleste elevene hadde her så gode ferdigheter at det ikke påvirker om de kan løse oppgaver med divisjon med brøk eller ikke. Innenfor Forståelse av Konseptet med brøk ser jeg at elevene har vansker med addisjon og subtraksjon av brøker med ulik nevner (oppgave 5 og 10). De fleste subtraherer teller fra teller og nevner fra nevner, og gjør ikke om til fellesnevner. I Konseptet med enhet er det én type oppgaver som går igjen som problematisk for elevene, og det er å finne en brøk som ligger mellom to verdier (oppgave 8, 13 og 20). Innen kategorien Forståelse av multiplikasjon med brøk hadde elevene vansker med dobling av brøk (oppgave 18). De strevde også med oppstilt oppgave med multiplikasjon av brøk (oppgave 23). Vanskeligst for dem var oppgaven der multiplikasjon med brøk var knyttet til kontekst (oppgave 24). Ingen av dem fikk til den oppgaven. Denne kategorien er Mas begrepsknute og således sentral i forhold til å kunne løse divisjon med brøk. I kategorien for Forståelse av divisjon med brøk hadde elevene, i tillegg til oppgave 32, vansker med halvering av brøk (oppgave 16 og 28). De strevde også med oppgaver med divisjon med brøk knyttet til kontekst (oppgave 30 og 31). Oppgave 28 kan løses med den inverse operasjonen, multiplikasjon, men siden denne gruppen elever også strevde med dobling av brøk, så var ikke det noe alternativ for dem.

Elevene i gruppen som løste oppgave 32 riktig, hadde også vansker med oppgave 24. Det kan indikere at oppgaven ikke er avgjørende for å kunne løse oppgave 32.

Ser vi på de to elevene som hadde flest feil av de som løste oppgave 32 riktig, så ser vi at resultatene ovenfor samsvarer i stor grad. Med unntak av oppgave 8, 16 og 23, så har elevene vansker med de samme oppgavene. Det kan bety at disse oppgavene er sentrale for å løse oppgave 32.

De elevene som hadde løst oppgave 32 galt og hadde flest feil strevde i tillegg med oppgave 12 i Konseptet med brøk. Denne oppgaven går ut på å sammenligne brøker og finne brøken som er mindre enn den gitt i oppgaveteksten. I Konseptet med enhet hadde disse elevene vansker med å finne riktig figur som var fargelagt med gitt brøk (oppgave 1 og 17). De hadde også vansker med å finne én likeverdig brøk til en gitt brøk. Samtidig strevde de med, ut i fra gitt brøk $\frac{4}{5}$, å fargelegge en likeverdig andel i et rutenett med ti like store ruter.

Herunder løste de to elevene som hadde flest feil, men som hadde løst oppgave 32 riktig, oppgave 17 og 21 galt. De kan bety at disse oppgavene ikke er avgjørende for om de kan løse oppgave 32. For elevene som hadde løst oppgave 32 galt og hadde flest feil står her oppgave 1, 12 og 27 igjen som viktigere for å kunne løse oppgave 32.

Hvis vi øker andel feil til 60 %, ser vi at oppgave 10, 13, 16 og 28 faller bort. Ferdighetene som testes i oppgave 10 og 13 vil fremdeles være ivaretatt gjennom andre oppgaver (oppgave 5, 8 og 20). Oppgave 16 og 28 tester halvering av brøk. Denne ferdigheten testes ikke i noen av de andre oppgavene. At oppgavene faller bort når vi øker andel feil til 60 % kan indikere at det ikke er en like sterk sammenheng mellom ferdigheten de representerer og det å kunne løse oppgave 32. Samtidig vil en bedre forståelse av halvering og dobling av brøker gi et bedre utgangspunkt for å kunne forstå nytten av inverse operasjoner.

I tabellen nedenfor (se tabell 12) har jeg systematisert funnene ytterligere, ut ifra hvor betydelig oppgavenes sammenheng opp mot det å kunne løse oppgave 32 synes å være.

Kategori	Oppgave	Tema	
Divisjon med brøk	16/16, 28, 30, 31	Halvering av brøker Oppgaver i kontekst	
Multiplikasjon med brøk	18, 23, 24	Dobling av brøker Oppstilt oppgave Oppgave i kontekst	Begrepsknute
Konseptet med enhet	1, 8, 13, 20, 27	Finne brøker mellom to gitte verdier	Sammenligne brøker Likeverdige brøker
Konseptet med brøk	5, 10, 12	Addisjon og divisjon av brøk med ulik nevner	Subtraherer teller fra teller og nevner fra nevner
Inverse operasjoner	-	-	Ingen vansker, men andre oppgaver viser at elevene har vansker med å halvere og doble brøker
Divisjon med heltall	-	-	Ingen vansker
Multiplikasjon med heltall	-	-	Ingen vansker
Addisjon	-	-	Ingen vansker

Tabell 12 Oppgaver av betydning for å kunne løse oppgave 32

I tabellen har jeg merket noen av oppgavenumrene:

Oppgaver (umerket): Funn fra elever som ikke løste oppgave 32 riktig

Oppgaver (merket): Funn styrker sammenhengen/betydningen

Oppgaver (merket): Funn svekker sammenhengen/betydningen

Av tabellen ser vi at det knyttet til noen av oppgavene (oppgave 10, 13, 16, 24 og 28) er gjort funn som svekker betydningen de har for å kunne løse oppgave 32.

Svekket betydning her er med tanke på at også elever som løste oppgave 32 riktig, har vansker med denne typen oppgaver. I tillegg faller noen oppgaver ut når vi øker grenseverdien for andel feil til 60 %. Det betyr følgelig ikke at oppgavene ikke er av betydning for å kunne løse oppgave 32.

Det er av interesse å se at eleven som var nærmest å kunne løse oppgave 32, hadde forsøkt å løse den via å gjøre om brøkene til desimaltall, for så å utføre divisjon med tallene. Alle de elevene i denne gruppen som løste oppgave 31 riktig har gjort dette ved å benytte seg av desimaltall. Det kan tyde på at de har en bedre forståelse av begreper når de knyttes til desimaltall enn hvis de samme begrepene knyttes til brøk.

Et annet interessant funn er at de to elevene med flest feil av de som løste oppgave 32 riktig også har løst oppgave 23 riktig. Det betyr at de til tross for en dårligere generell brøkforståelse enn de fleste har lært seg algoritmene til multiplikasjon og divisjon med brøk og kan benytte dem i løsning av oppstilte oppgaver, som ikke står i kontekst.

5.0 Drøfting av forskningsmetode og de funn som er gjort

I denne delen av oppgaven vil jeg først rette et kritisk blikk på faktorer som er av betydning for reliabiliteten til denne forskningen. Jeg vil da se nærmere på og vurdere utvalg, deler av analysen, selve kartleggingsprøven og tolkning av elevsvar.

Videre vil jeg drøfte de funn som er gjort og sammenfattet i kapittel 4.2.5 Sammendrag av funn. Funnene blir da sett i forhold til valgt teori for oppgaven.

5.1 Vurdering og kritikk av metode

For å besvare min problemstilling samlet jeg inn data ved å gjennomføre en kartleggingsprøve innen emnet brøk. I tillegg gjennomførte jeg fire semistrukturerte intervjuer med elever knyttet til to av oppgavene jeg betraktet som interessante å se nærmere på, ut i fra andel feil i elevsvarene. For å gjennomføre kartleggingen måtte jeg ha et utvalg elever. På grunn av elevenes alder var samtykke fra foreldre nødvendig. Jeg fikk da samtykke fra 26 av totalt 84 elever på 10. trinn ved skolen.

Det kan stilles spørsmål til om dette er et tilstrekkelig antall. Jeg har gjort funn og kan se et mønster som kan knyttes opp mot å få svar på min problemstilling. Ville jeg gjort andre funn dersom jeg hadde hatt flere elevsvar å analysere? På den andre siden kunne flere elevsvar bidratt til å forsterke de funn jeg allerede har gjort.

For at oppgavene skulle være interessante å se nærmere på i en analyse satte jeg en grenseverdi på andel feil svar i utvalget til 50 %. Tanken bak dette var at 50 % representerer medianen til andel feil i elevsvar til den enkelte oppgave. Min usikkerhet har her vært om dette er riktig grenseverdi. Med å sette en for lav grenseverdi blir for mange oppgaver tatt med videre inn i analysen. Da blir det i neste omgang en utfordring å se noe mønster i elevsvarene. Settes grenseverdien for høyt, så blir få oppgaver tatt med i analysen. Gevinsten er da at en er sikrere på at riktig svar på disse oppgavene har en betydning for å kunne løse oppgave 32. På den andre siden vil en for høy grenseverdi kunne føre til at en mister helhetsbildet over hvilke områder elevene som ikke løste oppgave 32 ellers har vansker med. Bildet en får i analysen blir for snevert og begrenset. Jeg har derfor sett nærmere på hva som skjer dersom grenseverdien økes til 60 %. I drøfting av funnene endte jeg opp med å forholde meg til en grenseverdi på 50 %.

Selve kartleggingen har det vært en utfordring å designe. Jeg fikk ta utgangspunkt i Matematikksenterets andrepilotering til læringsstøttende prøver, men denne skulle så tilpasses Mas kunnskapspakke for divisjon med brøk (se figur 4). De fleste av oppgavene i andrepiloteringen representerte Konseptet med brøk og Konseptet med enhet, så jeg måtte lage en del oppgaver selv. Til Mas kategorier Forståelse av addisjon, Forståelse av multiplikasjon med heltall og Forståelse av divisjon med heltall valgte jeg, i motsetning til oppgavene fra andrepiloteringen, å bruke oppgaver som tester ferdighet (prosedyre) fremfor forståelse (konseptuell). Dette valget kan diskuteres, men jeg gjorde det fordi jeg mener at i forhold til oppgavene de møter knyttet til de overordnede begreper innad i kunnskapspakken, så er det tilstrekkelig å teste om elevene har gode nok ferdigheter innen addisjon, multiplikasjon og divisjon med heltall. Ferdighetene i addisjon, subtraksjon og multiplikasjon er verktøyet elevene trenger for å kunne arbeide med regning i brøk. Dette har også noe å gjøre med alder og kunnskapsnivå til utvalget. Mitt utvalg er fra 10. trinn og da har jeg forventninger om at disse verktøyene er på plass, og derfor ikke trenger utførlig testing. Det å bestemme antall oppgaver innenfor hver kategori opplevde jeg også som en utfordring. Flere oppgaver vil kunne eliminere vilkårlige feil, samtidig som det kan gjøre til at kartleggingen blir for omfattende.

En for omfattende kartlegging kan gå ut over både motivasjonen og utholdenheten til elevene. Jeg endte derfor opp med å ta med færre oppgaver i de mest elementære kategoriene, slik som Forståelse av addisjon, Forståelse av multiplikasjon med heltall og Forståelse av divisjon med heltall. I tillegg hadde Begrepet inverse operasjoner bare én oppgave, men denne kategorien ble allikevel ivaretatt av andre oppgaver. Det kan med forholdsvis få oppgaver også være spørsmål om oppgavene er dekkende for det jeg ønsker å undersøke. Analysen med 95 % konfidensintervaller og Cronbach Alfa viser at det er en god og entydig sammenheng mellom de oppgaver som er valgt og oppgave 32 som jeg vurderer elevsvarene opp mot. Allikevel må vi ta høyde for at det kan være delemner som er utelatt, men som ikke gir utslag på en slik analyse.

I kartleggingen er det viktig at oppgavene viser en god og entydig sammenheng med oppstilt oppgave i divisjon med brøk. Samtidig er det også viktig at kartleggingen har riktig vanskegrad i forhold til gjennomføring i mitt utvalg. Av tabell 2 Kartleggingens vanskegrad, ser vi at den forteller mest om elever som har en Theta (dyktighet) på -1,4. Det vil si 1,4 standardavvik fra gjennomsnittet. Dette betyr at kartleggingen måler best på de svakeste elevene, og sier mindre om de faglig sterke elevene. Samtidig vil dette gjøre til at kartleggingen gir nyttig informasjon om elevene som ikke klarte å løse oppgavene. Vi vil også kunne få en forskjell i hvilke oppgaver elevene som ikke klarte å løse oppgave 32 riktig mestrer i forhold til de som klarte å løse oppgaven riktig. Det er viktig å ta hensyn til at oppgavens vanskegrad kan ha innvirkning på hvilke mønstre i elevsvar en kan finne.

I elevsvarene vil det alltid være rom for ulike tolkninger av hva elevene har tenkt når de løste den aktuelle oppgaven. Jeg har arbeidet 20 år som lærer i grunnskolen og har derfor en erfaring som kan gi meg noen subjektive oppfatninger om hva elevene har tenkt. For at tolkningene skal være mest mulig objektive har jeg gjennomført fire intervjuer knyttet til enkeltelevers svar og tenkning bak egne svar. Elevene som ble intervjuet bekreftet gjennom sine utsagn min tolkning av deres elevsvar. I tillegg søker jeg å støtte meg mest mulig til teori om de mest vanlige misoppfatningene innen emnet regning med brøk. Det vil allikevel være rom for at en tolkning ikke er 100 % objektiv. Dette er det viktig å være bevisst slik at en gjør tiltak for å minimere den innvirkning subjektive oppfatninger kan ha.

5.2 Drøfting av funn

I denne delen av oppgaven vil jeg drøfte de funn jeg har gjort opp mot valgt teori. Dette vil jeg gjøre for bedre å forstå sammenhengen mellom begrepene de aktuelle oppgavene tester og oppgave 32, divisjon med brøk. Utgangspunktet mitt var, ut i fra Mas kunnskapspakke, å se på hvilke av de underliggende begrepene til Forståelse av divisjon med brøk som har størst betydning for å kunne løse oppgave 32. Jeg beholder denne strukturen og velger å se på de oppgavene som de elevene som løste oppgave 32 galt hadde vansker med å løse. Selv om det, i 4.2.5 Sammendrag av funn, kan argumenteres for at enkelte oppgaver bør utgå, så vil det å ta med alle oppgavene gi et bedre helhetsbilde av situasjonen. For eksempel vil det ved å utelate oppgave 16 og 28 som omhandler halvering av brøker, føre til at en mister aspektet med at forståelsen av inverse operasjoner er av betydning for å løse oppgaver med divisjon med brøk. Da står vi i tilfelle bare igjen med oppgave 18 som omhandler dobling av brøk.

Kartleggingen viste at de fleste elevene i utvalget ikke hadde vansker innenfor Forståelse av addisjon, Forståelse av multiplikasjon med heltall, Forståelse av divisjon med heltall og Begrepet inverse operasjoner. Vi kunne derfor tidlig utelate de oppgavene som er i disse kategoriene fra den videre analysen. Oppgavene i Forståelse av addisjon, Forståelse av multiplikasjon med heltall og Forståelse av divisjon med heltall er ferdig oppstilte oppgaver. De tester kun om elevene innehar ferdighetene til å løse denne typen oppgaver. Vi får derfor ingen informasjon om elevene har konseptuell forståelse innen nevnte begreper. Det å løse oppgaver gjennom å ta i bruk konvensjonelle algoritmer, tester kun prosedural forståelse av begrepet (Hiebert & Lefevre, 1986).

Innen Konseptet med brøk har elevene vansker med oppgave 5 og oppgave 10, som omhandler henholdsvis addisjon og subtraksjon av brøker med ulik nevner. I henhold til Chapin og Johnson er denne misoppfatningen innenfor området del av en hel eller del av en mengde (Chapin & Johnson, 2006, s. 100-101). Misoppfatningen som forekommer flest ganger hos elevene er å addere/subtrahere teller med teller og nevner med nevner. Dette er også i følge Chapin og Johnson en veldig vanlig feil elever gjør. Chapin og Johnson knytter dette til at elevene ikke forstår den kontekstuelle situasjonen og dermed ikke kan koble denne til modeller for å representere de mer abstrakte matematiske symbolene (Chapin & Johnson, 2006, s. 122-123). Det kan her også være snakk om en overgeneralisering av en algoritme, der elevene glemmer at de skal finne felles nevner, men husker at tellerne skal adderes/subtraheres.

Dermed løses problemet med ulike nevnere med å behandle dem på samme måte som med tellerne. Vi kan også si at elevene behandler brøkene som hele tall, tellere og nevnere hver for seg. Denne tolkningen av elevsvar støttes gjennom intervju av elev som hadde denne misoppfatningen. Steven Leinwand trekker frem denne misoppfatningen i forordet til Bambergers Math Misconceptions: «You add the tops and add the bottoms» (Leinwand, i Bamberger, Oberdorf, & Schultz-Ferrell, 2010, s. 5). Elevene forstår ikke hvilke forutsetninger som må være tilstede for at brøker skal kunne adderes eller subtraheres. Det er her tilknytningen til Mas kategori Konseptet med brøk kommer inn. Vi kan si at elevene som har denne misoppfatningen kun har en delvis prosedural forståelse av addisjon og subtraksjon av brøker med ulik nevner. De kan bare delvis beskrivelsen av hvordan slike oppgaver stegvis skal fullføres (Hiebert & Lefevre, 1986). Med en konseptuell forståelse av Konseptet med brøk ville elevene i større grad vært i stand til å reflektere over svaret sitt og sannsynligvis kunne korrigere det. Elever som arbeider med konseptuell forståelse innenfor et emne gjør sjeldnere ufornuftige feil og er i større grad i stand til å vurdere om eget resultat er sannsynlig eller ikke (Kamii & Dominick, 1998).

I kategorien Konseptet enhet har elevene vansker med oppgave 8, 13 og 20. Oppgavene er av samme type og utfordrer elevene til å finne hvilken brøk som ligger mellom to gitte verdier. Chapin og Johnson plasserer denne vansken i området for brøk som måling (Chapin & Johnson, 2006, s. 100-101). I dette området er brøk som en lengde på tallinjen, som deler enheter inn i underenheter. Grunnleggende er det også å vite at et hvert intervall på tallinjen inneholder uendelig mange rasjonale tall. Når flere av elevene svarer et det er umulig å lage en brøk med verdi mellom for eksempel $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{3}$, så mangler det forståelse av dette prinsippet. Elever som svarer at det er umulig eller avgir et annet galt svar, kan også mangle strategier for å sammenligne brøker. De vet kanskje heller ikke hva som skjer med verdien til en brøk når teller eller nevner øker eller minker. Da er vi inne på Mas kategori Konseptet med enhet. I Konseptet med enhet handler det om forståelsen av at en hel kan deles i to eller flere like deler. Elevene vi her snakker om forstår ikke fullt ut hva som skjer hvis de deler den hele i flere deler. Det samme hvis vi får flere deler. Med å forstå fullt ut mener jeg å ha konseptuell kunnskap om emnet, å ha relasjoner mellom konkreter, symboler og strategier for å sammenligne brøker. Med å trekke inn Konseptet med enhet er vi også inne på et av Chapin og Johnson sine områder for vansker med brøk: Del av en hel eller del av en mengde (Chapin & Johnson, 2006, s. 100-101). Elevenes vansker med denne typen oppgaver kan komme av at de har arbeidet med for få representasjoner av brøk som en del av den hele.

Elevsvarene kan også indikere at det er tatt for lite hensyn til elevenes forkunnskaper slik at de dermed er fratatt muligheten til å bygge relasjoner til nye begreper som blir presentert. Elevene har dermed ikke forutsetninger for å kunne se de riktige sammenhengene og utvikle strategier for å sammenligne brøker. Det å relatere nye begreper til elevenes forkunnskaper legger ifølge Ma til rette for ny innsikt (Ma, 1999). I følge Ludvigsenutvalget vil det å ta utgangspunkt i elevenes forkunnskaper forsterke dem og gi dybdelæring innen emnet. Det er en sterk vekselvirkning mellom elevenes forkunnskaper og ny læring (NOU 2015:8, 2015).

Innen Mas kategori Konseptet med enhet ser vi at elevsvarene til de to elevene som har gjort flest feil forsterker funnene som er drøftet ovenfor. Disse elevene har også løst oppgave 1, 12, 17, 21 og 27 galt. Oppgavene som er listet opp handler om forståelsen av at den hele må være delt i like deler, likeverdige brøker og det å kunne sammenligne brøker. Det kommer tydelig frem at de har en misoppfatning om at nevneren ikke trenger å representere like store deler. Oppgavene er i Chapin og Johnson sitt område Del av en hel eller del av en mengde (Chapin & Johnson, 2006, s. 100-101). Vi kan si at de elevene som har flest feil også har en dårligere generell brøkforståelse.

Forståelse av multiplikasjon med brøk er kunnskapspakkens begrepsknute. De relasjonene som knyttes til dette begrepet er ifølge Ma av størst betydning for å kunne løse oppgaver med divisjon med brøk, slik som oppgave 32. Chapin og Johnson plasserer multiplikasjon med brøk i området brøk som operator (Chapin & Johnson, 2006, s. 100-101). Elevene i denne gruppen hadde størst vansker med oppgave 18, 23 og 24. Oppgave 18 handler om dobling av en brøk. Den misoppfatningen som flest elever hadde var at de doblet både teller og nevner, og per definisjon utvidet brøken i stedet for å doble den. Det kan indikere at de, som i addisjon/subtraksjon av brøker med ulik nevner, behandler brøker som hele tall. Også denne tolkningen av elevsvar støttes gjennom intervju av elev som hadde denne misoppfatningen. Ifølge Chapin og Johnsen har elevene her en utfordring med å se hvordan det å doble en brøk påvirker brøken (Chapin & Johnson, 2006, s. 100-101). Da er vi også her inne på Konseptet med brøk, der elevene ikke forstår relasjonene mellom det å doble med konkreter, heltall og desimaltall og det å doble en brøk. Elevene har, i henhold til Hieberts definisjoner, en mangelfull konseptuell forståelse som hindrer full prosedural forståelse av algoritmen (Hiebert & Lefevre, 1986). Oppgave 23 er en oppstilt oppgave med multiplikasjon av to brøker. Den står for meg som selve begrepsknuten, da ferdigheten med å løse denne er direkte avgjørende for om elevene kan løse oppgave 32.

Samtidig ser vi i Mas modell for kunnskapspakken for divisjon med brøk (se figur 4) at Forståelse av multiplikasjon med brøk har direkte eller indirekte relasjon til hele fem av de andre underkategoriene til Forståelse av divisjon med brøk. At elevene har vansker med denne oppgaven, samtidig som de ikke klarte å løse oppgave 32, viser at det er en sterk sammenheng mellom multiplikasjon og divisjon med brøk. Svaret som forekom oftest på denne oppgaven var $\frac{14}{35} \cdot \frac{15}{35}$. Det at elevene ser det som nødvendig å utvide brøkene til å ha felles nevner før de gjør et forsøk på å multiplisere dem, viser en usikkerhet rundt både forståelsen av multiplikasjon av brøker og selve algoritmen for multiplikasjon av brøker. Med forståelsen av multiplikasjon med brøk er vi inne på forståelsen av Konseptet med brøk. Elevene mangler relasjoner mellom multiplikasjon av heltall, multiplikasjon av heltall og brøk og multiplikasjon av brøker. De har ikke oppdaget de betydningsfulle sammenhengene. Det kan også virke som om elevene blander inn deler av algoritmen for å løse oppgaver med addisjon eller subtraksjon av brøker med ulik nevner når de skal løse oppgaver med multiplikasjon. I slike oppgaver kreves det at de utvider brøkene til de har felles nevner før de utfører regneoperasjonen. Når elever har vansker med å løse oppstilte oppgaver med multiplikasjon med brøk, så kan en med rimelig sikkerhet anta at de også vil ha vansker med å løse oppgaver i kontekst som krever samme ferdighet i løsningen. Slik er det også her: Ingen av elevene klarte å løse oppgave 24, som er en kontekstbasert oppgave knyttet til multiplikasjon med brøk. I denne oppgaven var det stor variasjon i elevsvarene og dermed vanskelig å se noe fast mønster. Det som imidlertid i utregningen forekom oftest var igjen det å finne felles nevner. Elevene bruker da samme strategi som i oppstilt oppgave med multiplikasjon med brøk. Ikke alle elevene brukte multiplikasjon av brøker for å komme frem til et svar. Noen brukte også subtraksjon som sin strategi for å finne riktig svar. Det kan komme av at de ikke har forstått at oppgaven handler om multiplikasjon av brøker. Men det kan også være en konsekvens av at de tidligere har arbeidet med for liten variasjon i oppgaver og at representasjonene av begrepet dermed ble for begrenset. Det å bruke subtraksjon som løsningsstrategi kan i oppgave 24 tyde på at de ofte har hatt 1 liter som utgangspunkt for sine oppgaver. Den hele er lik 1. Hvis du har 1 liter vann og drikker $\frac{1}{3}$, så får du riktig svar ved å vite at $\frac{1}{3}$ av 1 liter er $\frac{1}{3}$ liter. Flere av elevene har utvidet brøkene til felles nevner lik 15 og dermed fått $\frac{5}{15}$ liter til svar. Brøkdelen som drikkes blir dermed direkte gjort om til rommål (liter). Du får imidlertid ikke riktig svar med å bruke samme strategi hvis mengden vann er $\frac{4}{5}$ liter.

Da vil $\frac{1}{3}$ av $\frac{4}{5}$ liter være lik $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$. Ifølge Ma fremhever kinesiske lærere multiplikasjon med brøk som en nødvendig basis for å kunne forstå divisjon med brøk. Mas forskning viser her at kinesiske lærere er veldig opptatt av å gi flere ulike innfallsvinkler og representasjoner til begrepene de arbeider med (Ma, 1999). Dette gjør de nettopp for å bygge opp et solid begrep med relasjoner til andre begreper og dermed være i stand til å bruke sine ferdigheter i nye situasjoner.

Elevene som ikke løste oppgave 32 riktig hadde i kategorien Forståelse av divisjon med brøk, i tillegg vansker med oppgave 16 og 28 som omhandler halvering av brøker. Oppgaver i kontekst var også en utfordring for disse elevene. Johnson og Chapin plasserer også denne kategorien innenfor området brøk som operatorer (Chapin & Johnson, 2006, s. 100-101).
I oppgavene som omhandler brøk er det også variasjon i elevsvarene. Der elevene i dobling av brøk endte opp med å utvide brøk, ender de her opp med å forkorte brøken. Selv om det er variasjon i svarene, er misoppfatningen de har som utgangspunkt for sin strategi i alle tilfellene, at de behandler brøk som hele tall. Teller og nevner behandles hver for seg, men samme operasjon utføres på dem. Fire av ti elever som har løst oppgave 16 galt har også løst oppgave 28 galt. Elevene mangler også her en konseptuell forståelse av konseptet med brøk. De kan ikke overføre det de kan om halvering av konkreter, heltall og desimaltall til halvering av brøker. Uten disse relasjonene får elevene vansker med prosedural forståelse av halvering av brøk. Oppgave 31 er en oppgave der elevene både kan ta i bruk multiplikasjon med brøk og divisjon med brøk. Oppgaven kan løses både som $3\frac{1}{4} \cdot 2 =$ og som $3\frac{1}{4} : \frac{1}{2} =$. Elevene hadde allikevel vansker med denne oppgaven. Vanskene kommer av at de strever med både dobling og halvering av brøker, og dermed mangler en konseptuell forståelse av inverse operasjoner. Forståelsen av inverse operasjoner ville vært til betydelig støtte for elevene i deres tenkning. Det er ifølge Mas forskning en strategi kinesiske lærere vektlegger. Det er blant annet fordi de ønsker å ha den resiproke brøk som en innfallsvinkel til å forstå algoritmen til divisjon med brøk (Ma, 1999). Oppgave 30 er den oppgaven som ligger tettest opp til oppgave 32 i innhold, men her er divisjon med brøk knyttet til en kontekst. Fire av elevene som ikke klarte å løse oppgave 32 riktig, klarte å løse denne oppgaven. I og med at disse elevene ikke klarte å løse den oppstilte oppgaven med divisjon med brøk, så kan det indikere at elevene har fått støtte av konteksten i sin tenkning rundt løsningsstrategi. Ifølge Mas forskning er ikke kinesiske lærere veldig opptatt av å gi oppgavene en god kontekst. De har mer fokus på å knytte ny læring til elevenes forkunnskaper, ha flere innfallsvinkler og gi begrepene varierte representasjoner.

Boaler refererer til Conrad Wolfram som ønsker at elevene selv skal kunne stille spørsmål ut i fra noe de er opptatt av i det samfunnet de lever i. Da er oppgaven med en gang satt i en kontekst som betyr noe for elevene. Ut i fra dette spørsmålet kan det deretter settes opp en matematisk modell, som igjen medfører en regneoperasjon. Til slutt skal elevene gå tilbake til det opprinnelige spørsmålet og se om det er besvart. Wolfram ønsker personer som kan tenke og resonnere. Da må de også kunne stille de gode spørsmålene, sette opp modeller og analysere og tolke resultater (Wolfram, i Boaler & Dweck, 2016, s. 27-29). For å gi elevene støtte i problemløsning, handler det om å engasjere elevene til matematisk tenkning knyttet til deres omgivelser. Da kan riktig kontekst være et viktig verktøy og bidra i elevenes tenkning.

Blant elevsvarene til de elevene som ikke klarte å løse oppgave 32, med oppstilt oppgave i divisjon med brøk riktig, var det et interessant funn. Den eleven med færrest feil (se tabell 6, Elev 18), hadde forsøkt å løse denne oppgaven ved å regne via å gjøre om brøkene til desimaltall. Han kom nesten i mål med riktig svar, men regnestykket ble litt for komplisert til at det ble fullført. Eleven husket ikke algoritmen for å regne med divisjon med brøk, men god brøkforståelse gjorde til at han visste om muligheten det er å regne med desimaltall. Mas forskning viser at kinesiske lærere også bruker sammenhengen mellom det å regne med desimaltall og det å regne med brøk som en innfallsvinkel i undervisningen i regning med brøk. Gjennom å skape relasjoner mellom regning med desimaltall og regning med brøk, styrker de sannsynligheten for at elevene får en konseptuell og prosedural forståelse av divisjon med brøk. De gir elevene flere innfallsvinkler til samme problem (Ma, 1999).

Ser vi på gruppen av elever som løste oppgave 32, divisjon med brøk riktig, så hadde denne gruppen kun spesielle utfordringer med oppgave 24. Denne oppgaven omhandlet multiplikasjon med brøk i kontekst. Denne gruppen hadde ferdighetene til å multiplisere brøker på plass, siden alle klarte den oppstilte oppgaven, oppgave 23. For disse elevene kan vi dermed si at utfordringen lå i å skulle bruke ferdigheten i en kontekst. Dette kan videre indikere at elevene ikke har en konseptuell forståelse av begrepet divisjon med brøk. Elevene klarer ikke å koble ordlyden i oppgaven til hvilken regneoperasjon som skal utføres. Dette kan ha noe med hvilke innfallsvinkler og representasjoner elevene har arbeidet med i tidligere oppgaver. Hvis denne konteksten var ny for elevene, kom det samtidig frem at de ikke kunne koble den til de forkunnskaper de besitter. Hvis det er slik at algoritmen for multiplikasjon med brøk blir stående alene har eleven kun prosedural forståelse og vil derfor ikke kunne overføre ferdigheten til nye kontekster. Mas forskning forfekter prinsippet om å støtte ny læring gjennom å gjenoppfriske forkunnskaper.

Det skapes da en vekselvirkning mellom elevenes forkunnskaper og ny læring som styrker elevens helhetlige læringsprosess (Ma, 1999).

Til slutt i drøftingen vil jeg også ta med resultatet til de to elevene med flest feil i gruppen av elever som klarte å løse oppgave 32 riktig. De løste i tillegg oppgave 23 riktig. Dette til tross for at de har en dårligere brøkforståelse enn de fleste. Det betyr at de nok kun har en prosedural forståelse av algoritmene til multiplikasjon og divisjon med brøk. De behersker den lineære sekvensen som kreves for, steg for steg, å løse slike oppstilte oppgaver.

6.0 Konklusjon

I denne delen av oppgaven vil jeg se på hovedtrekkene av de funnene jeg har gjort i analysen og drøftingen av resultatene fra kartleggingen. Utgangspunktet for forskningsprosjektet/ problemstillingen for denne oppgaven er:

Hvilke sammenhenger kan vi se mellom elevers forkunnskaper om brøk og hvordan de løser oppgaver knyttet til divisjon med brøk?

Hvilke forkunnskaper synes å være mest sentrale for å kunne løse oppgaver med divisjon med brøk?

Analysen og drøftingen av elevsvarene fra kartleggingen viser at i de underliggende begrepene til Forståelsen av divisjon av brøk, så er det spesielt innen generell brøkforståelse elevene har størst vansker. I Konseptet med brøk og Konseptet med enhet gjør elevene som ikke løste oppgave 32 riktig flere feil enn de som løste oppgave 32 riktig. Dette kan vi si med 95 % sikkerhet (jfr. konfidensintervaller). Som konsekvens vil dette gi elevene en dårligere konseptuell forståelse av sammenhengene mellom den generelle brøkforståelsen og de overbyggende algoritmene som regning med brøk fordrer. I denne oppgaven tenker vi da spesielt på Forståelse av multiplikasjon med brøk, begrepsknuten og Forståelse av divisjon med brøk, som elevenes forståelse her måles opp mot. I Forståelse av addisjon, Forståelse av multiplikasjon med heltall og Forståelse av divisjon med heltall hadde de fleste elevene få problemer med å løse oppgavene. Det vil si at ferdighetene i regning med heltall er gode nok til å løse oppgavene de møter i de overordnede begrepene innad i kunnskapspakken.

Når det gjelder Konseptet med brøk så hadde elevene som ikke løste oppgave 32 riktig, først og fremst vansker med addisjon og subtraksjon av brøker med ulik nevner (oppgave 5 og 10). Utgangspunktet for deres misoppfatning var at de betraktet brøkene som to uavhengige tall som ikke står i forhold til hverandre. Dermed mister elevene en viktig del av prosedyren som går ut på å utvide/forkorte brøkene til felles nevner, før de foretar regneoperasjonen. De elevene som hadde flest feil strevde i tillegg med oppgaver som omhandlet likeverdige brøker (oppgave 21 og 27).

Innen Konseptet med enhet hadde elevene vansker med å finne eller vite at finnes brøker som ligger mellom to gitte verdier (oppgave 8, 13, 20). For elevene med flest feil svekkes dette begrepet ytterligere, ved at de heller ikke har strategier for å sammenligne størrelsen til brøker (oppgave 12).

Av dette ser vi at elever som ikke løste oppgave 32 har vansker med den generelle brøkforståelsen når det gjelder å behandle brøk som to tall som står i forhold til hverandre, kunne finne brøker som er større/mindre enn og begrepet likeverdige brøker. Det at de ikke ser på brøk som to tall som står i forhold til hverandre, påvirker direkte den prosedurale forståelsen i addisjon og subtraksjon av brøker med ulik nevner.

Denne forståelsen tar elevene med seg når de skal løse oppgavene med multiplikasjon med brøk. I denne kategorien hadde elevene vansker med oppgave 18, 23 og 24. Oppgave 24 skiller seg for så vidt ikke ut, da begge gruppene hadde vansker med å løse den. Den kan ut i fra det vurderes til ikke å ha betydning for å kunne løse oppgave 32. Samtidig ser vi at oppgaver gitt i kontekst kan bidra i elevenes tenkning rundt løsning av oppgaver, og derfor er av betydning. Forståelse av multiplikasjon med brøk er begrepsknuten i kunnskapspakken, så prestasjonen her vil ha sterk innvirkning på hvordan elevene løser oppgavene knyttet til divisjon med brøk. Oppgave 18 omhandler dobling av brøk. Dette er den inverse operasjonen til halvering av brøker, som elevene også strevde med (oppgave 16, 28 og 31). Forståelsen av inverse operasjoner vil elevene ha nytte av også når de skal løse oppgavene med multiplikasjon av brøk (oppgave 23) og divisjon med brøk (oppgave 30 og 32). Elevene har vansker med å løse den oppstilte oppgaven med multiplikasjon med brøk og da vil de heller ikke ha forutsetninger for å kunne løse oppgaver med divisjon med brøk, hverken i eller utenfor kontekst. Ferdighetene i de to algoritmene er i nær relasjon til hverandre.

I resultatene fra denne kartleggingen finnes det eksempler på elever som finner støtte i at oppgaven står i kontekst. På samme måte er det én elev som har brukt innfallsvinkelen med å regne via desimaltall for å komme frem til riktig svar. Selv om det i dette forskningsmaterialet ikke er mange eksempler på dette, så viser det allikevel at det å arbeide i kontekst kan være til hjelp for noen elever. Det samme vil det å gi begrepene flere ulike representasjoner kunne gjøre. Flere typer oppgaver, flere innfallsvinkler og flere representasjoner til hver oppgave vil styrke elevenes konseptuelle forståelse innen emnet.

Gjennom en styrket konseptuell forståelse vil elevene også kunne oppnå en styrket prosedural forståelse. Resultatene fra denne kartleggingen indikerer at det er arbeidet for lite med konseptuell forståelse av de grunnleggende begrepene innen emnet brøk. Dette ser vi igjen når elevene skal arbeide med algoritmene for regning med brøk. Elevene virker usikre og i analysen og drøftingen av funnene har jeg påpekt flere ganger at de blander sammen deler av algoritmene knyttet til de ulike regneartene. Kamii viste til at elever som brukte egne løsningsmetoder hadde større sjanse for å få riktig svar enn elever som brukte algoritmer (Kamii & Dominick, 1998). I elevsvarene fra denne kartleggingen ser det ut som om disse algoritmene ikke er elevenes egne, men konvensjonelle algoritmer, som er undervist med proseduralt fokus.

Konseptuell og prosedural forståelse er, som Ma poengterer, i nær relasjon til hverandre. Det vil være en vekselvirkning mellom den konseptuelle forståelsen og den prosedurale forståelsen. Når det hos elevene i denne gruppen svikter i den konseptuelle forståelsen, så vil det virke inn på hvor godt de kan forstå og bruke relevante algoritmer. Kamii påpeker de konvensjonelle algoritmer er utviklet over lang tid. Elevene kan ikke forventes å skulle kunne hoppe over hele denne prosessen frem mot algoritmen (Kamii & Dominick, 1998).

Uavhengig av brøkforståelse så vil noen elever avvike fra funnene som er beskrevet ovenfor. Vi vil alltid ha noen elever som lett tilegner seg algoritmer og tilsynelatende med god forståelse løser oppstilte oppgaver eller likelydende oppgaver knyttet til kontekst. Elevene har da en prosedural forståelse innen begrepene, men mangler knaggene for at de skal settes i relasjon til deres forkunnskaper og dermed også få en konseptuell forståelse.

7.0 Videre arbeid i fremtidens skole

Har de funnene jeg har gjort noen allmenn nytte for undervisning? I tilfelle må de funnene jeg har gjort også ha en overføringsverdi til andre emner i matematikken. Divisjon med brøk er et viktig, men begrenset område innen matematikken. Funnene jeg har gjort peker imidlertid på at det er en sammenheng mellom konseptuell og prosedural forståelse. For at elevene skal oppnå både konseptuell og prosedural forståelse, må dette også være gjennomgående i den undervisningen de blir gitt (Ma, 1999). Derfor spørsmålet:

Hvordan kan vi i undervisning legge til rette for at elevene kan tilegne seg kunnskaper slik at de kan arbeide med forståelse i overordnede begreper?

Ut ifra valgt teori og de funn jeg har gjort er det fire områder som peker seg ut som sentrale for meg å ha ekstra fokus på fremover. Disse områdene er forståelse, diagnostiske oppgaver, problembaserte oppgaver og kontekst. De to sistnevnte kan til en viss grad sies å tilhøre samme kategori.

De funnene jeg gjorde i analysen av elevsvarene fra kartleggingen sier at hvis du mangler generell brøkforståelse (Konseptet med brøk og Konseptet med enhet), så vil du ha vansker med å forstå algoritmene som kreves for å regne med brøk. Disse elevene mangler koblingen mellom konseptuell og prosedural forståelse innenfor emnet. Elevsvarene fra kartleggingen viste at det også er flere elever enn det jeg var klar over som har vansker med algoritmene innen regning med brøk. Utgangspunktet for undervisningen må derfor være at en starter med begreper som er kjente for elevene (Ma, 1999). Her vil den oversikten som en kunnskapspakke gir, være et godt hjelpemiddel for å se hvilke underbegreper som er sentrale i forhold til det nye begrepet som skal læres. I tillegg vil det å gi elevene god tid til å arbeide med varierte eksempler med ulike innfallsvinkler og ulike representasjoner av begreper, gi dem bedre forutsetninger for selv å komme frem til strategier for å løse oppgaver. Kamiis forskning viste at elevene som arbeidet med grunnleggende forståelse hadde et bedre grunnlag for å løse oppgaver enn elevene som arbeidet med algoritmer. De gjorde færre feil og hvis de gjorde feil, så var det i langt større grad en begrunnet forklaring bak. Elevene som arbeidet med algoritmer gjorde også større feil, uten at de kunne forklare hva de hadde gjort feil (Kamii & Dominick, 1998). I elevenes egne strategier ligger det en forståelse bak.

Hvis det er hensiktsmessig kan dette være et godt utgangspunkt for å lede eleven mot å forstå standardalgoritmen for operasjonen.

Elevenes forståelse kan vi se gjennom å benytte diagnostiske oppgaver i undervisningen. Oppgavene skal avdekke vanlige misoppfatninger innen emnet det arbeides med. Det er viktig at en som lærer kjenner til disse misoppfatningene og kan lage eller finne oppgaver som er egnet til å avdekke dem. Ikke alle oppgaver er egnet til dette (Brekke, 1995). Kartleggingen jeg gjennomførte hadde et sterkt innslag av diagnostiske oppgaver, spesielt innen kategoriene Konseptet med brøk og Konseptet med enhet. Resultatene viser at flere av elevene har misoppfatninger innen generell brøkforståelse som ikke blir oppdaget i oppgaver som ikke er diagnostiske. Elevenes misoppfatninger kan være godt egnet til å arbeide med riktig forståelse av det aktuelle begrepet. Gjennom diagnostisk undervisning vil en kunne skape en kognitiv konflikt hos eleven. Denne konflikten vil kunne motivere og anspore eleven til å se andre sammenhenger. I følge Boaler vil det å gjøre feil, bevisst eller ubevisst, danne synapser i hjernen, slik at tanken er i utvikling (Boaler & Dweck, 2016). Det å drive diagnostisk undervisning fordrer imidlertid at en parallelt arbeider med klassens læringsmiljø. Det å gjøre feil må være trygt og aksepteres som et bidrag til bedre forståelse for alle. Dette innebærer å legge vekt på deling gjennom dialog. En må fjerne seg fra tanken om at matematikk er noe en best gjør alene. Et felles oppbyggende læringsmiljø vil i større grad gi elevene følelsen av mestring. Hvis vi tror at vi kan lære og at feil vi gjør er verdifulle, så vil ifølge Boaler hjernen vår utvikle seg når vi gjør feil. Dette forteller oss hvor viktig det er at elevene tror på seg selv. I den forbindelse er det viktig at vi som lærere verdsetter feil og misoppfatninger i klassesituasjonen. Samtidig må vi huske å gi elevene positive tilbakemeldinger i 1 - 1 – situasjoner.

Problembaserte oppgaver vil være et godt utgangspunkt for å skape dialog i klasserommet. Mas forskning viser at elever i Kina bruker mer tid på færre oppgaver. De arbeider med oppgaver som kan ha ulike innfallsvinkler og kan representeres på flere måter (Ma, 1999). Elevene vil dermed kunne ha ulikt utgangspunkt for å løse oppgavene og dermed skapes det en arena for å drøfte og dele ulike strategier. Problembaserte oppgaver er også i større grad kognitivt stimulerende. Kartleggingen jeg gjennomførte i forbindelse med denne oppgaven viste også et det er en utfordring for elevene å løse problembaserte oppgaver. De kjenner ikke igjen problemstillingene tilstrekkelig til å klare å ta i bruk riktig løsningsstrategi.

Problembaserte oppgaver ser jeg gjerne kan knyttes til en kontekst som er kjent for elevene. Kinesiske lærere bruker ifølge Ma ikke tid på å knytte oppgavene til en kontekst. Deres begrunnelse for dette er at de ikke kjenner elevene godt nok til å velge en kontekst som støtter elevenes tenkning (Ma, 1999). Denne utfordringen er løsbar. Selv om jeg mener at jeg kjenner egne elever tilstrekkelig til å kunne gi oppgaver en god kontekst, så kan vi som lærere kartlegge hvilke interesser elevene har. Hva er de interesserte i? Hvilke hobbyer har de? Hvilke yrker kan de tenke seg i fremtiden? Hvilke erfaringer har de? Her er kan det også være naturlig å ha ta en tidlig kontakt med videregående skole, for å få innblikk i hva det kreves av matematikk i aktuelle studieretninger. Det kan gi elevene en ekstra motivasjon for faget hvis de hører dette fra faglærere i videregående skole. I en undersøkelse vi gjennomførte i mitt første år på dette masterstudiet, spurte vi elevene om deres holdninger til matematikkfaget. Spørsmålene vi stilte var: Liker du matematikk? Hvorfor/Hvorfor ikke? Fordelingen i min klasse var omtrent 50/50 i forhold til om de likte matematikk eller ikke. Av de elevene som ikke likte matematikk, så rådet det to årsaker. Den ene årsaken var at matematikk oppleves som vanskelig. Den andre årsaken var at de ikke så nytteverdien av store deler av faget. De trodde ikke de får bruk for det de lærer i fremtiden. Jeg tenker at det å kunne legge matematikken inn i en større kontekst som elevene kjenner til, så vil faget oppleves med større nytteverdi. Det vil igjen gjøre noe med elevenes motivasjon i matematikkfaget.

I 2020 får grunnskolen en ny læreplan. Den vil etter all sannsynlighet bygge på Ludvigsenutvalgets[11] anbefalinger i «Fremtidens skole», NOU 2015:8. På bakgrunn av utviklingstrekkene i samfunnet anbefaler utvalget fire kompetanseområder som grunnlag for fornyelse av skolens innhold.

11 http://nettsteder.regjeringen.no/fremtidensskole/files/2015/06/NOU201520150008000DDDPDFS.pdf

Figur 16 De fire kompetanseområdene (NOU 2015:8, 2015, s. 11)

– Fagspesifikk kompetanse. Her tenkes det på god kunnskap om de mest sentrale metodene og tenkemåtene, begrepene og prinsippene faget består av. Begrepet byggesteiner står sentralt. Med det menes innsikt og ferdigheter som er relevante over tid. Det vi arbeider med må oppleves å ha en fremtidig nytteverdi for elevene, uavhengig av yrkesvalg.
– Kompetanse i å lære. Her anbefaler utvalget at metakognisjon og selvregulert læring vektlegges. Elevene skal kunne reflektere over hensikten med det de har lært, hva de har lært og hvordan de lærer. Det innebærer at elevene må settes i stand til å ta i bruk ulike strategier for å planlegge, gjennomføre og evaluere egne lærings- og arbeidsprosesser. Det å kunne arbeide med litt større og problembaserte oppgaver vil for elevene være et godt utgangspunkt for å ta initiativet og være aktive i egen læringsprosess. Elevene skal lære å lære.
– Kompetanse i å kommunisere, samhandle og delta. Lesing, skriving og muntlig aktivitet skal fremdeles være en del av alle fag. I matematikkfaget vil det å arbeide diagnostisk gjennom å dele, forklare og begrunne ulike løsningsstrategier føre til økt innsikt og forståelse. Samtidig blir verden mer og mer globalisert. Det stilles økende krav til at elevene skal kunne samhandle og delta i samarbeid om problemløsning, flerfaglige problemstillinger og deltakelse i faglige diskusjoner. Dette er også i tråd med Conrad Wolframs verdsatte egenskaper i arbeidslivet. Her vil også det å kunne knytte matematikken inn mot en større kontekst kunne gi elevene en gevinst. De vil kunne oppleve å se tverrfaglige problemstillinger fra ulike sider. Matematikk skal ikke være et fag isolert fra hverken andre skolefag eller samfunnet for øvrig.
– Kompetanse i å utforske og skape. Ønsket er at elevene skal «gjenoppdage» matematikken. Gjennom kritisk tenkning og problemløsning vil vi kunne legge til rette for at elevene bruker ulike strategier for å løse problemer.

De må resonnere, analysere og identifisere relevante spørsmål. I dette ligger det også å kunne vurdere påstander, argumenter og beviser. Ifølge Ludvigsen henger kritisk tenkning og problemløsning sammen med kreativitet og innovasjon (NOU 2015:8, 2015, s. 10). Vi ønsker at elevene skal være kreative, gjennom å være nysgjerrige, utholdende og fantasifulle i problemløsning. Alene og sammen med andre. Å være innovativ innebærer her å omsette ideene til handling. Elevene skal utvikle evnen til å utforske, se nye muligheter og utvikle nye løsninger. I et samfunnsperspektiv vil dette gjøre elevene bedre rustet til å møte fremtidige utfordringer.

Å utvikle forståelse innenfor et fagområde fordrer at elevene tilegner seg kunnskaper og ferdigheter, at de reflekterer over det de lærer og setter det i sammenheng med det de kan fra før av. Det å lære med god forståelse forutsetter at elevene er aktive i sin egen læringsprosess. De må bruke ulike læringsstrategier og kunne vurdere egen mestring og fremgang. Ludvigsen fremhever her anvendelse som et sentralt poeng. Elevenes kunnskap om og forståelse av det de har lært og når de kan anvende det, er viktig for å oppnå de kompetansene jeg har fremhevet ovenfor. Når elevene selv, gjennom dette, kan konstruere en varig forståelse innen et emne eller på tvers av emner, betegnes det som dybdelæring. Dybdelæring er et sentralt begrep i «Fremtidens skole», som vil få fokus i årene fremover.

Selv om det er elevene selv som skal være den aktive og konstruere sin egen forståelse, kommer vi ikke bort fra at læreren og relasjonen lærer – elev er av største betydning for å legge til rette for optimale læringsprosesser.

For at elevene skal kunne være en aktiv part i undervisningen og konstruere sin egen kunnskap er det viktig å gi dem muligheten til å ta initiativet i læringsprosessen. Det å la elevene få initiativet forutsetter imidlertid at læreren gir i fra seg noe av kontrollen. En læringsprosess på elevenes premisser vil mest sannsynlig ikke følge en planlagt lineær sekvens (jfr. Hieberts forklaring av prosedurale ferdigheter). Det kreves her av læreren både en god oversikt over fagets struktur og en konseptuell og prosedural forståelse av det faglige emnet som det arbeides innenfor (se figur 1). Med nevnte på plass vil læreren kunne veilede elevene gjennom læringsprosessen mot å gjenoppdage matematikken (Guided reinvention).

I arbeidet med å legge til rette for en elevaktiv og elevinitiert undervisning vil de fire fokusområdene jeg fremhevet ovenfor være et godt utgangspunkt:

- Undervisningen skal legge til rette for både konseptuell og prosedural forståelse hos elevene
- Undervisningen skal være diagnostisk for å kunne avdekke eventuelle misoppfatninger hos elevene og arbeide med å bryte disse
- Elevene skal arbeide med problembaserte oppgaver som innbyr til ulike innfallsvinkler og representasjoner
- Eleven skal arbeide i en kontekst de kjenner seg igjen i og som betyr noe for dem

Med disse prinsippene som utgangspunkt ligger det til rette for også å kunne ivareta Ludvigsenutvalgets anbefaling om at elevene må utvikle kompetanse i fag, i det å lære, å kommunisere, samhandle og delta og å utforske og skape.

Det å legge om egen praksis er en krevende øvelse. Det kreves et godt gjennomtenkt opplegg med både kortsiktige og langsiktige planer for hvordan dette skal gjennomføres. Dette arbeidet kan gjøres alene, men det vil være en langt større mulighet for at det lykkes hvis en får til et samarbeid med kolleger på eget trinn, eventuelt på tvers av trinn. Et samarbeid vil både lette arbeidsbyrden på den enkelte og legge til rette for konstruktive drøftinger som vil heve nivået på opplegget. På egen skole skal det være mulig å få til et samarbeid gjennom innarbeidet fagsamarbeid på trinn og felles seksjonsmøter på tvers av trinn. Jeg ser frem til å dele og prøve ut nye ideer!

Jeg vil avslutte med å sitere Liping Ma, som på et vis oppsummerer min oppgave:

«The real mathematical thinking going on in a classroom, in fact, depends heavily on the teacher`s understanding of mathematics».
(Ma, 1999, s. 153)

Dette betyr at for at elevene skal kunne oppnå både konseptuell og prosedural forståelse, så må læreren ha kompetanse og forståelse til å undervise med vekt på både det konseptuelle og det prosedurale. Hverken konseptuell eller prosedural forståelse står godt alene.

Oversikt over vedlegg og tillegg

Vedlegg 1: Kartleggingsprøve

Vedlegg 2: Intervjuguide

Vedlegg 3: Mal for oversikt over elevsvar

Vedlegg 4: Kartleggingsprøve med konfidensintervaller

Vedlegg 5: Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

Vedlegg 6: Samtykke til deltakelse i studien

Søknad NSD: http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/meldeskjema

Søknad Udir: https://www.udir.no/tall-og-forskning/dispensasjon-utlevering-av-taushetsbelagte-opplysninger-til-bruk-i-forskning/

Litteratur

Bamberger, H. J., Oberdorf, C., & Schultz-Ferrell, K. (2010). *Math misconceptions - From misunderstanding to deep understanding*. Portsmouth: Heinemann.

Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, when, and how. *National council of teachers of mathematics*, 156-167.

Boaler, J., & Dweck, C. (2016). *Mathematical mindsets : unleashing students' potential through creative math, inspiring messages, and innovative teaching*. San Francisco, Calif.: Jossey Bass Publishers.

Brekke, G. (1995). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Chapin, H. S., & Johnson, A. (2006). *Math Matters: Understanding the Math You Teach Grades K–8, Second Edition*: Math Solutions Publications.

Gulbrandsen, J. E., Løchsen, R., & Melhus, A. (2007). *Nye Mega : Matematikk for ungdomstrinnet, Grunnbok 9B*. Oslo: Damm.

Hiebert, J., & Lefevre, p. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert (red.), *Conceptual and procedural knowledge : the case of mathematics* (s. 1-27). Hillsdale, N.J: Erlbaum.

Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. *The teaching and learning of algorithms in school mathematics, 19*, 130-140.

Kjærnsli, M., & Jensen, F. (2016). *Stø kurs : norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015*. Oslo: Universitetsforlaget.

Lysø, K. O. (2006). *Sannsynlighetsregning og statistisk metodelære* (2. [rev.] oppl. utg.). Bergen: Caspar forl.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics : teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Nesher, P. (1987). Towards an Instructional Theory: the Role of Student's Misconceptions. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 33-40.

NOU 2015:8. (2015). *Fremtidens skole*. regjeringen.no: Kunnskapsdepartementet

Rienecker, L., & Stray Jørgensen, P. (2013). *Den gode oppgaven : håndbok i oppgaveskriving på universitet og høyskole*. Bergen: Fagbokforlaget.

Ryan, J., & Williams, J. (2007). *Children's mathematics 4-15 : learning from errors and misconceptions*. Maidenhead: McGraw Hill/Open University Press.

Sherman, H. J., Richardson, L. I., & Yard, G. J. (2005). *Teaching children who struggle with mathematics: A systematic approach to analysis and correction*: Pearson/Merrill Prentice Hall.

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88-95.

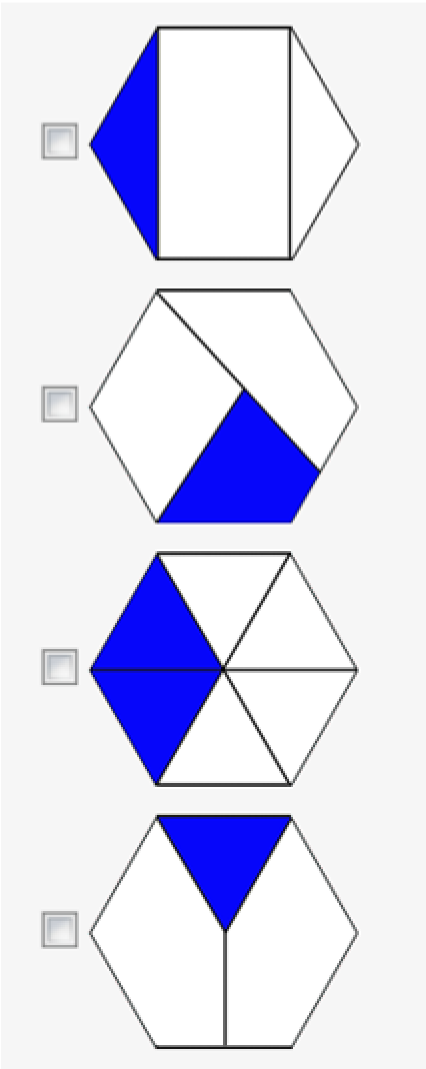
Sun, X. (2011). "Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics, 76*(1), 65. doi: 10.1007/s10649-010-9263-4

Vedlegg 1 Kartleggingsprøve

Navn: ________________________ Klasse: ______

Oppgave 1

Sett kryss foran den eller de figurene der $\frac{1}{3}$ er fargelagt blå.



Oppgave 2

Regn ut

$8 \cdot 7 =$ ______

Oppgave 3

Studer brøkene $\frac{1}{8}$ og $\frac{1}{9}$.

Hvilken brøk er størst?

- ◯ $\frac{1}{8}$
- ◯ $\frac{1}{9}$
- ◯ De har like stor verdi.

Oppgave 4

Emma laget 3 L jus som hun fylte over på like store flasker. Det ble til sammen seks flasker.

Hvor mye jus ble det i hver flaske?

Svar: ________ L

Oppgave 5

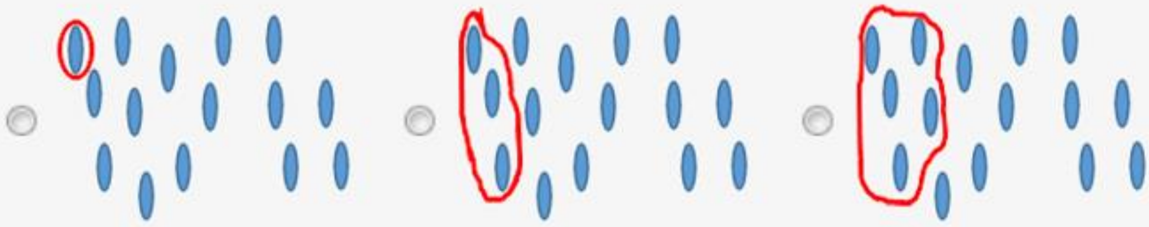
Regn ut:

$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} =$

- ◯ $\frac{3}{4}$
- ◯ $\frac{3}{6}$
- ◯ $\frac{4}{4}$

Oppgave 6

På hvilket bilde er det satt ring rundt $\frac{1}{3}$ av brikkene?



Oppgave 7

Henrik og Kasper deler likt ei flaske brus som rommer $\frac{1}{4}$ L.

Hvor mange liter får de hver?

- $\frac{1}{2}$ L
- $\frac{1}{8}$ L
- $\frac{2}{8}$ L

Oppgave 8

Hvilken brøk har verdi mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{3}$?

- $\frac{1}{3}$
- $\frac{2}{2}$
- $\frac{3}{5}$
- Det er umulig å lage en brøk med verdi mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{3}$.

Oppgave 9

Regn ut

$8 \cdot 9 =$ ______

Oppgave 10

Regn ut:

$\frac{3}{5} - \frac{1}{2} =$

- $\frac{1}{10}$
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{2}{5}$
- $\frac{2}{10}$

Oppgave 11

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{\square}$$

Hva skal stå i den tomme ruta?

- 3
- 5
- 6

Oppgave 12

Hanna er på fjelltur med far. Hun spør om de har igjen $\frac{1}{4}$ av turen.

Far sier de har igjen mindre enn det.

Hvor langt kan de ha igjen av turen?

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{5}$

Oppgave 13

Hvilken brøk har verdi mellom 1 og 3?

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{2}{1}$
- $\frac{2}{3}$

Oppgave 14

Hvor stor brøkdel av flagget til Thailand er blått?

Svar: $\frac{\square}{\square}$

Oppgave 15

Regn ut

72 : 8 =

Oppgave 16

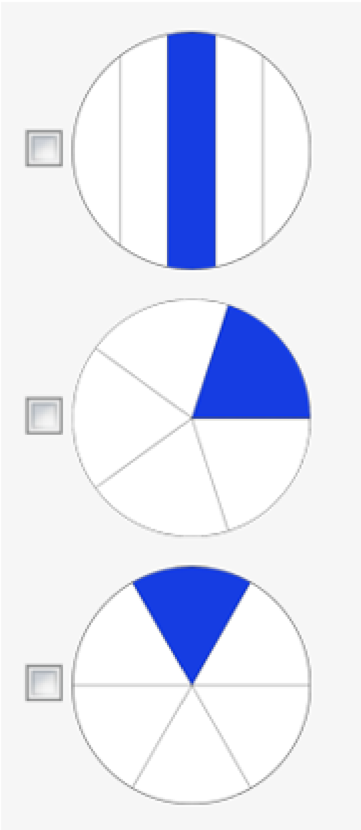
Regn ut:

$\frac{1}{4} : 2 =$

- $\frac{0,5}{2}$
- $\frac{1}{8}$
- $\frac{2}{8}$
- $\frac{8}{2}$

Oppgave 17

Sett kryss foran den eller de figurene der $\frac{1}{5}$ er fargelagt blå.



Oppgave 18

Hvilken brøk har dobbel så stor verdi som $\frac{1}{3}$?

- $\frac{1}{6}$
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{2}{6}$

Oppgave 19

Regn ut

56 : 7 = ______

Oppgave 20

Hvilken brøk har en verdi mellom 0 og 1?

- $\frac{0}{1}$
- $\frac{3}{11}$
- Det er umulig å lage en brøk med verdi mellom 0 og 1.

Oppgave 21

Skriv en annen brøk med samme verdi som $\frac{3}{4}$.

Svar: $\frac{\square}{\square}$

Oppgave 22

4 + 4 + 4 + 4 = ______

Oppgave 23

Regn ut $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$

Oppgave 24

En flaske rommer $\frac{4}{5}$ liter juice. Bob Kåre drikker $\frac{1}{3}$ av innholdet.

Hvor mye drikker han?

Oppgave 25

Sett kryss foran det eller de av flaggene der $\frac{1}{3}$ er gult.

Oppgave 26

Regn ut

5 + 6 + 7 = _____

Oppgave 27

Hvor mange flere ruter må fargelegges for at $\frac{4}{5}$ av rutene skal være fargelagt?

- 1
- 2
- 5
- 6

Oppgave 28

Hvilken brøk har halvparten så stor verdi som $\frac{1}{2}$?

- $\frac{0,5}{1}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{4}$
- $\frac{2}{2}$
- $\frac{2}{4}$

Oppgave 29

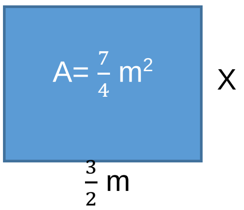
Et tau er $\frac{3}{4}$ m langt. Det skal deles opp slik at hvert tau blir $\frac{1}{8}$ m.

Hvor mange tau kan du få til? 

Fortell/Skriv hvordan du tenker

Kan du sette opp dette som et regnestykke?

Oppgave 30



Et gulv har et areal på $\frac{7}{4}$ m^2. Gulvet har form som et rektangel, der den ene siden er $\frac{3}{2}$ m lang.

Hvor lang er den andre siden?

Fortell/Skriv hvordan du tenker

Kan du sette opp dette som et regnestykke?

Oppgave 31

Halvparten av et tau er $3\frac{1}{4}$ m langt 

Hvor langt er hele tauet?

Fortell/Skriv hvordan du tenker

Kan du sette opp dette som et regnestykke?

Oppgave 32

Regn ut $\frac{3}{5} : \frac{2}{7}$

Vedlegg 2 Intervjuguide

Intervjuguide

Jeg vil ta utgangspunkt i elevsvar fra kartleggingsprøven som elevene da har gjennomført.

«Kan du fortelle meg hvordan du tenkte da du løste denne oppgaven»?

Evt. oppfølgingsspørsmål for å hjelpe til med å strukturere elevenes tenkning:

- Så du sier at…?
- Så du mener…?
- Hva mener du med det?
- Hvorfor tror du det?
- Er det noe du har gjort her du nå vil endre på?

Vedlegg 3 Mal for oversikt over elevsvar

Navn	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Elev 1																																
Elev 2																																
Elev 3																																
Elev 4																																
Elev 5																																
Elev 6																																
Elev 7																																
Elev 8																																
Elev 9																																
Elev 10																																
Elev 11																																
Elev 12																																
Elev 13																																
Elev 14																																
Elev 15																																
Elev 16																																
Elev 17																																
Elev 18																																
Elev 19																																
Elev 20																																
Elev 21																																
Elev 22																																
Elev 23																																
Elev 24																																
Elev 25																																
Elev 26																																
Antall feil																																
Prosent feil																																

Vedlegg 4 Kartleggingsprøve med konfidensintervaller

Galt på oppgave 32

Kategori	Divisjon med brøk							Multi. med brøk			Konseptet med enhet (del av hele)										Konseptet med brøk					Inv. Op	Divi. Ht		Multi. Ht		Addi. Ht							
Navn	7	16	28	29	30	31	32	18	23	24	1	6	8	13	14	17	20	21	25	27	3	5	10	11	12	4	15	19	2	9	22	26	n	Poeng	Snitt			
Elev 1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	17	0,53125			
Elev 12	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	2	11	0,34375			
Elev 18	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	27	0,84375			
Elev 19	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	20	0,625			
Elev 20	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	5	24	0,75			
Elev 21	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	6	16	0,5			
Elev 22	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	7	25	0,78125			
Elev 23	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	17	0,53125			
Elev 24	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	22	0,6875			
Elev 25	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	10	21	0,65625			
Antall feil	3	5	5	3	9	5	10	8	5	10	3	0	8	5	1	4	6	2	2	3	1	5	7	0	2	2	1	2	2	0	0	1			snitt	20,00	95% konfidensintervall	
Prosent feil	30	50	50	30	90	50	100	80	50	100	30	0	80	50	10	40	60	20	20	30	10	50	70	0	20	20	10	20	20	0	0	10			std	4,830	17,01	22,99
I kategorien				64					77			34										30				20		15		10		5					17,01	22,99

Riktig på oppgave 32

Kategori	Divisjon med brøk							Multi. med brøk			Konseptet med enhet (del av hele)										Konseptet med brøk					Inv. Op	Divi. Ht		Multi. Ht		Addi. Ht							
Navn	7	16	28	29	30	31	32	18	23	24	1	6	8	13	14	17	20	21	25	27	3	5	10	11	12	4	15	19	2	9	22	26	n					
Elev 2	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	16	0,5			
Elev 3	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	2	29	0,90625			
Elev 4	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	25	0,78125			
Elev 5	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	30	0,9375			
Elev 6	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	30	0,9375			
Elev 7	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	6	23	0,71875			
Elev 8	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	7	26	0,8125			
Elev 9	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	20	0,625			
Elev 10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	32	1			
Elev 11	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	26	0,8125			
Elev 13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	30	0,9375			
Elev 14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	31	0,96875			
Elev 15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13	31	0,96875			
Elev 16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	14	30	0,9375			
Elev 17	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	15	27	0,84375			
Elev 26	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	16	27	0,84375			
Antall feil	2	5	4	3	7	5	0	7	0	10	1	0	4	4	0	3	4	4	0	0	0	4	6	3	0	2	0	0	0	1	0	0			snitt	27,06	95% konfidensintervall	
Prosent feil	13	31	25	19	44	31	0	44	0	63	6	0	25	25	0	19	25	25	0	0	0	25	38	19	0	12,5	0	0	0	6,3	0	0			std	4,389	24,91	29,21
I kategorien				23					35			13										16				12,5		0		3,13		0					24,91	29,21

Variansanalyse: To-faktor uten tilbakelegging

SAMMENDRAG	*Antall*	*Sum*	*Gjennomsnitt*	*Varians*
Elev nr 1	32	17	0,53125	0,257056452
2	32	11	0,34375	0,232862903
3	32	27	0,84375	0,13608871
4	32	20	0,625	0,241935484
5	32	24	0,75	0,193548387
6	32	16	0,5	0,258064516
7	32	25	0,78125	0,17641129
8	32	17	0,53125	0,257056452
9	32	22	0,6875	0,221774194
10	32	21	0,65625	0,232862903
11	32	16	0,5	0,258064516
12	32	29	0,90625	0,087701613
13	32	25	0,78125	0,17641129
14	32	30	0,9375	0,060483871
15	32	30	0,9375	0,060483871
16	32	23	0,71875	0,208669355
17	32	26	0,8125	0,157258065
18	32	20	0,625	0,241935484
19	32	32	1	0
20	32	26	0,8125	0,157258065
21	32	30	0,9375	0,060483871
22	32	31	0,96875	0,03125
23	32	31	0,96875	0,03125
24	32	30	0,9375	0,060483871
25	32	27	0,84375	0,13608871
26	32	27	0,84375	0,13608871

Oppgave 16	26	16	0,615384615	0,246153846
29	26	20	0,769230769	0,184615385
30	26	10	0,384615385	0,246153846
31	26	16	0,615384615	0,246153846
32	26	16	0,615384615	0,246153846
18	26	11	0,423076923	0,253846154
23	26	21	0,807692308	0,161538462
24	26	6	0,230769231	0,184615385
28	26	17	0,653846154	0,235384615
1	26	22	0,846153846	0,135384615
6	26	26	1	0
8	26	14	0,538461538	0,258461538
13	26	17	0,653846154	0,235384615
14	26	25	0,961538462	0,038461538
17	26	19	0,730769231	0,204615385
20	26	16	0,615384615	0,246153846
21	26	20	0,769230769	0,184615385
25	26	24	0,923076923	0,073846154
27	26	23	0,884615385	0,106153846
3	26	25	0,961538462	0,038461538
5	26	17	0,653846154	0,235384615
7	26	21	0,807692308	0,161538462
10	26	13	0,5	0,26
11	26	23	0,884615385	0,106153846
12	26	24	0,923076923	0,073846154
4	26	22	0,846153846	0,135384615
15	26	25	0,961538462	0,038461538
19	26	24	0,923076923	0,073846154
2	26	24	0,923076923	0,073846154
9	26	25	0,961538462	0,038461538
22	26	26	1	0
26	26	25	0,961538462	0,038461538

Variansanalyse

Variasjonskilde	*SK*	*fg*	*GK*	*F*	*P-verdi*	*F-krit*
Rader	25,1838942	25	1,007355769	8,318196371	9,9763E-27	1,52033124
Kolonner	32,3641827	31	1,044005893	8,620833173	5,6153E-33	1,46608169
Feil	93,8545673	775	0,121102667			
Totalt	151,402644	831				

Cronbachs alfa

0,87978163 0,884001931

Vedlegg 5 Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

«Hvilke sammenhenger kan vi se mellom elevers forkunnskaper om brøk og hvordan de løser oppgaver knyttet til divisjon med brøk?

Hvilke forkunnskaper synes å være mest sentrale for å kunne løse oppgaver med divisjon med brøk?

Hvordan kan vi i undervisning legge til rette for at elevene skal lære de sentrale forkunnskapene?»

Bakgrunn og formål

Jeg, Geir Karlsen, studerer for tiden til master i matematikkdidaktikk ved NTNU. I den forbindelse skal jeg nå gjennomføre et forskningsprosjekt. Jeg har valgt å se nærmere på hvilke forkunnskaper som er sentrale i forhold til det å kunne forstå divisjon med brøk.

Prosjektet gjennomføres på 10. trinn fordi temaet ligger i elevenes årsplan. I tillegg har jeg min undervisning her og kjenner elevene.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Deltakelse i studien innebærer å gjennomføre en kartleggingsprøve som hovedsakelig er utarbeidet av Matematikksenteret. I tillegg ønsker jeg å gjennomføre et intervju med inntil 5 elever om hvordan de har tenkt når de løste enkelte oppgaver. Intervjuene tas det lydopptak av.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. De som vil ha tilgang til data er jeg som student, min veileder ved NTNU og elevenes faglærer. Alle digitale data vil bli lagret på mitt område på kommunens server. Personopplysninger i papirformat vil oppbevares innelåst.

Elevene vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 20. juni 2017. Alt datamateriale vil da bli anonymisert og alle opptak vil bli slettet.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.

Elever som ikke deltar i studien vil få et likeverdig pedagogisk tilbud. Det vil ikke få konsekvenser for elevens forhold til skolen.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med Geir Karlsen, prosjektleder (92452806) eller
Svein Arne Sikko, veileder og førsteamanuensis ved NTNU (93088327)

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta /

Jeg har mottatt informasjon om studien, og mitt barn ____________________ kan delta

Sted og dato:
____

Prosjektdeltakers/ forelders/ foresattes underskrift:

____

Jeg samtykker i at: (Kryss av der det passer)

- ☐ Det gjøres faglig kartlegging, som en del av matematikkundervisningen. Anonymiserte resultater og sitater fra deg/barnet, der du/barnet ikke skal nevnes eller identifiseres, kan brukes i prosjektets publikasjoner og begivenheter.
- ☐ Jeg/Mitt barn deltar i et intervju der det gjøres lydopptak til transkribering og analyse. Anonymiserte sitater fra deg/barnet, der du/barnet ikke skal nevnes eller identifiseres, kan brukes i prosjektets publikasjoner og begivenheter.

Vennligst lever skjemaet til din kontaktlærer

Tusen takk!