Hovedoppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Det humanistiske fakultet
Institutt for lærerutdanning

Camilla Kimo

Posisjonssystemet & semiotiske representasjoner

En kvalitativ studie av fire 1. klassinger sitt arbeid med posisjonssystemet

Hovedoppgave i Matematikkdidaktikk
Veileder: Yvonne Grimeland
Trondheim, mai 2017

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Camilla Kimo

Posisjonssystemet & semiotiske representasjoner

En kvalitativ studie av fire 1. klassinger sitt arbeid med posisjonssystemet

Hovedoppgave i Matematikkdidaktikk
Veileder: Yvonne Grimeland
Trondheim, mai 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Det humanistiske fakultet
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Å produsere en masteroppgave er som mange sier, en lang prosess. Arbeidet med denne masteroppgaven har vært utfordrende, men samtidig spennende og interessant. I løpet av de fem årene ved lærerutdanningen har mange tema interessert meg, mange ting jeg kunne tenke meg å finne ut mer om, deriblant posisjonssystemet. Både gjennom pensumlitteratur og praksis har de laveste trinnene fanget min interesse og det ble derfor naturlig for meg å velge 1. klasse for å gjennomføre undersøkelsen til masteroppgaven.

Først og fremst vil jeg takke min tålmodige veileder Yvonne Grimeland for all den hjelpen jeg har fått underveis. Videre vil jeg takke min nærmeste familie for all den støtte og tålmodighet dere har gitt meg. Takk også til mine medstudenter for gode diskusjoner og faglig motivasjon.

Sist, men ikke minst, vil jeg takke de fire flotte elevene på 1. trinn som ville stille opp på dette prosjektet. Takk til Line og Andrea for at dere stadig lot meg komme å gjennomføre prosjektet i klassen deres. Uten dere hadde ikke denne masteroppgaven blitt til.

Arbeidet med masteroppgaven markerer slutten på en veldig lærerik periode i livet mitt, nemlig fem fine år på Rotvoll. Nå venter en ny epoke i livet, med de første skritt som lærer i barneskolen.

Melhus, mai 2017

Camilla Kimo

Innhold

1 INNLEDNING

1.1 BAKGRUNN

Tall som begrep har en lang kulturell og historisk utvikling og det er vanskelig å gi en tidslinje som viser utviklingen av tallsymboler og tallsystemer, da ulike folkeslag forskjellige steder i verden har hatt sin utvikling på samme tid. Tallsystemer handler om ulike måter å organisere tall og mengder på. Vi trenger tall til målinger og sammenligninger, utregninger og beregninger. De eldste tallsystemene vi kjenner var svært enkle og veldig praktiske. Etter hvert som samfunnet utviklet seg og ble mer og mer sammensatt og komplisert, ble det også behov for mer avanserte tallsystemer og måter å regne på. Tallsymbolene som er blitt brukt av de ulike folkeslagene er påvirket av hvilket materiale de hadde tilgang på. For eksempel hadde egypterne papir slik at de kunne ha avanserte tegn. De som skrev tall på leire måtte derimot ha enkle tegn slik at leiren ikke størknet før man hadde skrevet ferdig. Når man skulle ripe inn i bein, stein eller tre kunne man ikke ha buede tegn, men heller rette streker (Burton, 1985).

Tidlig i den matematiske utviklingen var en – til – en – korrespondansen sentral. Man brukte fingre, skjell og stein til å representere mengder. Når man skulle telle, for eksempel sauer, kunne man slippe ned en stein for hver sau som passerte deg. Store mengder ble fort uoversiktlig og det oppstod et behov for tegn. Man kunne la en stein representerte en sau, mens en pinne representere fem sauer. Man begynte altså å gruppere, først i par, så i fem (ut fra fingrene på en hånd), ti (to hender) og tjue. Det er funnet ulvebein med tellestreker gruppert i fem fra år 30 000 f. Kr. (Burton, 1985).

Historien viser et mangfold av tellemåter og tallsystemer. Aborginerne telte kun til to, en – to, og mengder mer enn to ble kalt for «mye» eller «masse». Indianerne telte til seks, men til tross for dette sa de to – tre til fem og to – to til fire. Bushmenn i Sør – Afrika var ikke i stand til å bytte to kyr med fire griser, men var i stand til å bytte en ku mot to griser, også gjenta det. Inkaene hadde et posisjonssystem med ti som base. De laget knuter på tau, der antall knuter innenfor «tierlengden» tilsvarte antall tiere. Mayaene hadde ulike tegn som representerte ulike mengder; et skjell tilsvarte null, prikk tilsvarte en og strek tilsvarte fem. Egypterne hadde et additivt system, der tegnene hadde samme verdi uavhengig av hvilken plass de stod på. Fordi egypterne ikke hadde et posisjonssystem tok det lang tid og stor plass å skrive store tall, da de måtte bruke mange symboler. Grekerne hadde et mer effektivt system. De hadde 27 tegn som var hentet fra det greske alfabetet. Babylonerne hadde et 60 – tallsystem, som var et posisjonssystem og kun to tegn; et tegn for mengden en og et tegn for mengden ti (Burton, 1985).

De eldste tallsystemene trengte ikke noe tegn for null. Både babylonerne og mayaene brukte et tegn for null, men hos disse var ikke dette et tall, det var et tegn for ingenting. Først da en europeisk matematiker på 1600 – tallet fant opp det binære tallsystemet, altså totallsystemet, dukket nullen opp som et tall (Kristoffersen, 2012). Og da posisjonssystemet ble oppfunnet og tatt i bruk, fikk nullen en viktig betydning. Faktisk gjør nullen og posisjonssystemet at vi kan skrive alle tall ved hjelp av ganske få symboler. De fleste av de eldste tallsystemene kjente ikke til noe posisjonssystem. Før vårt posisjonssystem ble utviklet var allerede et annet i bruk, nemlig romertallene (Kristoffersen, 2012).

Det gamle Romerriket hadde et tallsystem bygget opp på symboler og som til en viss grad brukte posisjoner. Romertallene bestod av bokstaver som symboler og hadde en regel som sa at de største tallsymbolene alltid skulle komme først (Kristoffersen, 2012). Videre betydde et tegn med mindre verdi foran et tegn med større verdi at man skulle subtrahere fra en, men stod tegnet med lavest verdi bakerst, betydde det addere til en. Dette betydde at symbolenes plassering var viktig og det er derfor romertallsystemet er en form for posisjonssystem. Romertallene var mindre funksjonelt, manglet symbol for null og ble altså etter hvert erstattet av det systemet vi kjenner i dag (Kristoffersen, 2012).

Vi har vent oss til å regne med et tallsystem som vi kaller for titallsystemet. Det betyr at alle de tallene vi kan tenke oss er skrevet med ti ulike tallsymboler, nemlig tallene fra 0 til 9 (Burton, 1985). De fleste tror at dette er det eneste tallsystemet vi bruker, men til daglig bruker vi mange ulike tallsystemer. De fleste av oss klarer å bruke opp til 4-5 ulike tallsystemer samtidig – uten å blunke. Når vi snakker om tid, snakker vi nemlig både om 7-tallsystemet (1 uke = 7 dager), 12-tallsystemet (1 år = 12 måneder) og 60-tallsystemet (1 time = 60 minutter). Og hvor ofte bruker vi ikke klokka og kalenderen?

Som sagt er titallsystemet bygget på ti tallsymboler. De ti symbolene er 0 1 2 3 4 5 6 7 8 og 9. Når vi har behov for å skrive tall som er større enn ni, bruker vi to symboler, nemlig en og null. Posisjonssystemet innebærer at tallenes plassering spiller en betydelig rolle og sifrene skifter verdi etter hvilken plass de står på. Derfor kalles posisjonssystemet også plassverdisystemet. I titallsystemet kommer plassverdisystemet til syne når vi skal skrive tallet som kommer etter ni. Da oppretter vi en ny posisjon og skriver null på enerplass og en på den nye plassen, som vi kaller tierplassen. Den første posisjonen er alltid enerplassen, den andre kaller vi tierplass da den representerer ti (Kristoffersen, 2012).

Våre ti tallsymboler er hver for seg spesielle, kanskje med unntak av 6 og 9 som ligner. Alle må lære seg hva de ulike symbolene betyr, hvis ikke mister de meningen sin (Burton, 1985). Alle barn må lære seg hva fire faktisk betyr. Fire betyr mengden fire, som kan representeres med fire bamser eller med tallsymbolet 4. I arbeidet med å konkretisere og visualisere betydningen av fire i innlæringen må man ta i bruk representasjoner, siden matematiske objekter kan beskrives som abstrakte, uobserverbare og ikke – fysiske. De matematiske objektenes natur gjør oss avhengige av representasjoner for at vi skal kunne få tilgang til dem og kunne lære om dem. For å få tilgang til matematiske objekter er vi nødt til å benytte oss av det Duval (2006) omtaler som semiotiske representasjoner. Men hvordan er vi sikker på at et barn som representerer fire med fire bamser faktisk forstår hva mengden fire betyr? Steinbring (2006) benytter tre begreper for å snakke om et matematisk objekt og dets betydning; referansekontekst, begrep og tegn.

I skolen snakker man om tallet fire, man skriver fire med ord og med tallsymbol, man arbeider med fire konkreter. Lærer barn den faktiske betydningen av tallsymbolet 4 gjennom alle disse kanalene, eller blir det bare forvirret? Å sikre at et barn blir kjent med et matematisk begrep på flere måter er viktig, slik at ikke et begrep kun blir forbundet med en representasjon. Til tider har brøk blitt sett på som en pizza – modell, og kun det. I undervisningen i dagens skole er det fokus på å la barn få tilgang til et matematisk begrep på flere måter, slik at man sikrer forståelse for selve begrepet. Som nevn tar man i bruk ulike kanaler i dette arbeidet; muntlig språk, skriftlig språk, tallsymboler og konkreter. For barn kan overganger mellom ulike representasjoner være brå, da de ikke ser sammenhengen eller koblingen mellom de ulike representasjonene. Duval (2006) omtaler disse overgangene mellom semiotiske representasjoner og hvilke vanskeligheter som kan oppstå. Steinbring (2006) forklarer hvordan barn skaper mening i begreper og tegn i den epistemologiske trekanten. Han ser på det gjensidige samspillet mellom begrep, tegn og kontekst.

1.2 TEMA OG FORSKNINGSSPØRSMÅL

Jeg syns å skape en dyp forståelse for tallsymbolene og posisjonssystemet vårt er helt essensielt for å ha en fleksibel tallforståelse. Å forstå hva tallsymbolene betyr, hva de representerer og hvordan tall skrives er nødvendig i dagens samfunn. Videre syns jeg det er interessant å se om barn i 1. klasse er i stand til å overføre kunnskap om posisjonssystemet mellom ulike semiotiske representasjoner.

Jeg er vikar ved en skole som har *«dagens tall»*. Dette er en daglig rutine hvor elevene teller antall dager de har vært på skolen med sugerør. Lærer har laget en beholder bestående av tre små melkekartonger, en kartong for enerplass, en for tierplass og en kartong for hundrerplass. For hver dag elevene er på skolen settes et sugerør ned i enerkartongen. Slik fortsetter de til dag ti, da de *«går til banken og veksler ti enere til en tierbunt»*. Hver gang det er ti sugerør i enerkartongen blir disse bytte ut til en tierbunt med sugerør i tierkartongen. Og hver gang det er ti tierbunter i tierkartongen blir de byttet ut med en stav i hundrerkartongen. Jeg har mange ganger lurt på om samtlige elever forstår hva sugerørene representerer. Elevene svarer riktig på spørsmålene jeg stiller, men har de kun lært seg hva en tierbunt er eller forstår de også koblingen mellom en tier og ti enere? Disse spørsmålene lå til grunn for at jeg ønsket å la elevene arbeide med konkretene i *«dagens tall»* i datainnsamlingen til masteroppgaven min. Til masterprosjektet mitt har jeg også formulert et åpent opplegg som omhandler posisjonssystemet, inspirert av C. Fosnot (2007) sitt opplegg *«The T – shirt factory»*. Det åpne opplegget er oppgaven deltakerne i studien min arbeider med i datainnsamlingsprosessen, i tillegg til konkretene i *«dagens tall»*. Det er i hovedsak det egenformulerte opplegget som danner grunnlaget for datainnsamlingen, men en situasjon er hentet fra arbeid med konkretene i *«dagens tall»*.

Figur 1: Fotografi av *"dagens tall"*

Jeg ønsker å undersøke om et utvalg elever er i stand til å vise forståelse for posisjonssystemet både i «*dagens tall*» og i arbeidet med det åpne opplegget. I datainnsamlingssituasjonene ble konkreter tatt i bruk som et hjelpemiddel for å visualisere posisjonssystemet. Konkreter er ikke hovedfokuset mitt i denne studien, men det vil være relevant å se på hvilken måte elevene tar i bruk konkreter i arbeidet. Jeg har av den grunn med teori om konkreter og vil se på om konkretene faktisk hjelper elevene eller om de er misvisende for matematikken som ligger bak. Fokuset for masteroppgaven min er overganger mellom ulike representasjoner i 1. klassinger sitt arbeid med posisjonssystemet. Jeg undersøker om elevene viser forståelse for overgangen mellom konkreter, språk og tallsymbol i arbeidet. Jeg ser også på om elevene viser forståelse for aspektene ved posisjonssystemet i «*dagens tall*» og i det åpne opplegget. Forskningsspørsmålet for oppgaven min er:

Hvilke aspekter for posisjonssystemet viser et utvalg førsteklassinger forståelse for i arbeidet med «dagens tall» og et åpent opplegg? Hvilke transformasjoner mellom semiotiske representasjoner finner sted og på hvilken måte er de vellykkede?

Forskningsspørsmålets natur gjør det naturlig å velge en kvalitativ metode, da en småskala kvalitativ studie gir meg som forsker mulighet til å spørre hver enkelt deltaker hva de tenkte. Jeg ønsker å få en mer detaljert beskrivelse hvor jeg går i dybden for å finne ut av forskningsspørsmålet, som kjennetegner et kvalitativt forskningsprosjekt ifølge Cohen, Manion, Morrison & Belle (2011).

1.3 OPPGAVENS OPPBYGNING

Denne masteroppgaven er delt inn i seks kapitler: innledning, teori, metode, analyse – og drøfting, diskusjon og avsluttende refleksjoner. Etter dette innledningskapittelet har jeg gått nærmere inn på teorigrunnlaget som oppgaven bygger på. Med utgangspunkt i hva jeg ønsker å finne svar på i denne undersøkelsen vil jeg først i teorikapittelet presentere teori av Raymond Duval. Han skriver om semiotiske representasjoner og overgangen mellom dem. Siden matematiske objekter og ideer er abstrakte, er man avhengig av representasjoner for å få tilgang til dem. Det å forstå at representasjoner ikke er selve objektet, men en måte å visualisere på, er veldig viktig i arbeidet med konkreter. Steinbring (1997) har en teori hvor han forklarer sammenhengen mellom begrep, objekt/referansekontekst og tegn/symbol og viser denne sammenhengen i den epistemologiske trekanten. Steinbring forklarer at begrepsforståelse er et resultat av erfaringer med symbol og ting/referansekontekst. Duval og Steinbring poengterer begge viktigheten med å arbeide variert med et matematisk objekt, da ulike representasjoner og konkreter vil belyse objektets egenskaper på ulike måter. Jeg vil så gå inn på teori om posisjonssystemet og hvilke aspekter som er nødvendig for en riktig og dyp forståelse for tallsystemet vårt. Forståelsen for tallsystemet kan enten være bestående av prosedyrekunnskap eller begrepskunnskap, alt etter hvor stor kobling det er mellom ulike kunnskapsbiter. I teorien om prosedyrekunnskap og begrepskunnskap støtter jeg meg på Hiebert og Lefevre (1986) sin beskrivelse av de to kunnskapstypene. Teorikapittelet inneholder de teorier jeg bygger mine undersøkelser og analyser på og inneholder definisjoner på begrep som jeg vil bruke i analysen av datamaterialet.

I kapittel 3 begrunner jeg forskningsmetodene som er brukt. Jeg har gjort rede for den teoretiske og metodiske tilnærmingen til studien, samt beskrevet konteksten elevene befant seg i. Forklarer det åpne opplegget elevene arbeidet med, hvor jeg påpeker hvilke utfordringer og potensial det har. I tillegg har jeg beskrevet gjennomføringen av datainnsamlingen og hvordan jeg har analysert datamaterialet. Til slutt har jeg drøftet prosjektets pålitelighet og troverdighet, samt etiske og metodiske utfordringer.

I kapittel 4, analyse – og drøftingskapittelet, har jeg analysert elevenes skriftlige arbeid, deres arbeid med konkreter og deres utsagn. Videre har jeg presentert mine analyser av deltakerne sin forståelse for posisjonssystemet som kom til uttrykk gjennom samtalene, hvilke overganger som kommer til uttrykk og hvilke begreper som blir konkretisert. Samtidig løfter jeg frem mine funn og drøfter disse med utgangspunkt i forskningsspørsmålet i denne oppgaven. Jeg så det hensiktsmessig å skrive analysen og drøftingen sammen, da dette ble mest ryddig for min oppgave. Kapittel 5 er et diskusjonskapittel hvor jeg ser på funnene mine i et større perspektiv og forsøker å svare på forskningsspørsmålet.

Siste kapittel består av noen avsluttende refleksjoner. Jeg har blant annet reflektert rundt betydningen av mine funn med tanke på elever i skolen generelt og for meg som fremtidig lærer. Flere skoler benytter seg av *«dagens tall»* som er det ene konkretiseringsmateriellet som visualiserer posisjonssystemet i undersøkelsen min. Jeg håper slik at min undersøkelse vil være med på å berike forskningsfeltet omkring barns forståelse for posisjonssystemet og overgangen mellom semiotiske representasjoner.

2 TEORI

For å utvide egen forforståelse og samtidig kunne få et grunnlag for å sette mitt forskningsspørsmål i et større perspektiv, har det vært nødvendig å sette seg inn i hva andre har skrevet og gjort av funn, enten direkte tilknyttet mitt temavalg, eller med sterk tilknytning til området. I følge Hellevik (2002) starter gjerne en undersøkelse med nettopp dette å søke litteratur og resultater fra arbeid som andre har utført. Ved å sette egne undersøkelser i sammenheng med funn andre har gjort skapes forskning med sammenheng, som da blir viktige bidrag i hva som kan betraktes som sikker viten (Hellevik, 2002). I tillegg til å utvide egen kunnskap om tema, har arbeid med tidligere forskning og litteratur klart utvidet min forforståelse og dermed skapt et godt grunnlag for videre arbeid med mitt forskningsspørsmål. Dette har gjort meg i stand til å foreta de nødvendige valg jeg har stått ovenfor i alle ledd i prosessen.

I dette teorikapittelet vil jeg først presentere teori om semiotiske representasjoner av Raymond Duval. Duval (2006) poengterer at matematiske objekter kun er tilgjengelige via representasjoner, da matematiske objekter er abstrakte. Videre skriver han at ulike representasjoner viser forskjellige aspekter ved ett og samme begrep. Det blir derfor viktig å arbeide med ulike representasjoner for å belyse alle aspekter ved objektet. Duval (2006) skriver at et og samme objekt kan være ugjenkjennbart i de ulike representasjonene det opptrer i. Det er overgangen mellom de ulike representasjonene som er det sentrale i arbeidet for å skape forståelse for objektet. I arbeidet med posisjonssystemet får elevene arbeide med ulike konkreter, noe som er kjent for deltakerne i studien og noen nye konkreter. Duval sin teori om transformasjoner (*transformations*) vil være aktuell i arbeidet med å analysere de overganger som finner sted i datamaterialet og slik si noe om elevenes evne til å skifte representasjoner. Videre går jeg inn på den epistemologiske trekanten til Steinbring. Steinbring (1997) forklarer at ord og symboler kan betegne et begrep og at vekselvirkningen mellom tegn/symbol og objekt/referansekontekst er viktig for å konstruere betydningen til det matematiske begrepet. Steinbring sin teori vil benyttes for å belyse forståelsen for språk, symbol og konkreter, og forklare begrepsforståelsen elevene viser. Jeg er også interessert i å undersøke hvilke aspekter ved posisjonssystemet som kommer tilsyne i elevenes arbeid. Jeg vil av den grunn beskrive de aspekter som ligger bak posisjonssystemet. At en elev svarer riktig på lærer sine spørsmål trenger ikke nødvendigvis å bety at eleven har fullstendig forståelse for matematikken. Av og til kan elever lære seg et begrep, uten å ha forståelse for matematikken bak. De vil slik kunne bruke begrepet riktig, uten å ha forståelse for det. Alle barn har en tallforståelse og Hiebert & Lefevre (1986) skiller mellom to typer forståelser. Prosedyrekunnskap som er knyttet til evnen å gjennomføre en operasjon, men ikke nødvendigvis ha forståelse for matematikken bak, og begrepskunnskap som er evnen til å se sammenhenger og tenke fleksibelt, se sammenhenger.

2.1 MATEMATISKE REPRESENTASJONER

Objekter i matematikk vil i motsetning til objekter i andre fag, som kjemi og fysikk, ikke være tilgjengelige via opplevelser og observasjoner. Duval (2006) fremhever at matematikken har noe eget i forhold til de andre realfagene. Matematiske objekter kan beskrives som abstrakte, uobserverbare og ikke – fysiske, og objektenes natur gjør oss avhengige av representasjoner for at vi skal kunne få tilgang til de og kunne lære om dem. Duval (2006) hevder at begrep i matematikken er abstrakte ideer som vi bare kan få tilgang til ved bruk av det Duval (2006) omtaler som *semiotiske representasjoner*. Det er ingen direkte tilgang til matematiske ideer, bare til deres representasjoner (Duval, 1999).

Duval (2006) sier at bruk av representasjoner er selve kjernen av matematisk forståelse. Dette begrunner Duval (2006) med at bruken av representasjoner er så karakteristisk for tankeprosessene innenfor matematikk. Representasjoner kan forklares som *«noe som står for noe annet»*, en kort og konsis definisjon (Duval, 2006, s. 103 - 104, min oversettelse). Elevene bruker ulike representasjoner for å uttrykke matematiske ideer. Naturlig språk er en representasjon som er vanlig i all slags tenkning, mens algebraisk notasjon er mer spesifikk for matematikk. De representasjonene som er typisk for matematikkdiskursen kaller Duval (2006) for *semiotiske representasjoner*. Han forklarer videre semiotiske representasjoner som et verktøy for å produsere ny kunnskap og ikke bare for å kommunisere mentale representasjoner (Duval, 2006, s. 104). Ut fra dette benyttes representasjoner både for å utvikle kunnskap og å uttrykke kunnskap.

2.1.1 Semiotiske representasjoner

Den eneste måten å få tilgang til en matematisk idé på er ifølge Duval (2006) gjennom dens semiotiske representasjoner. Ut ifra dette forstår jeg *semiotiske representasjoner* som alle mulige måter vi kan representere matematiske ideer på. Naturlig språk, tabeller, grafer og aritmetisk – algebraisk notasjon er representasjoner som er anerkjent som representasjoner i matematikk (Janvier, 1987). Forskjellige semiotiske representasjoner for ett og samme matematiske objekt kan imidlertid gjøre det vanskelig for elever å kjenne igjen det samme representerte objekt. Dette viser at elever sin evne til å mediere mellom forskjellige semiotiske representasjoner er en viktig egenskap når det gjelder matematikk (Duval, 2006). Jeg ser på mediering som det å veksle mellom semiotiske representasjoner, der disse uttrykker den samme matematiske ideen, eller som tar kunnskapen til et nytt nivå.

2.1.2 Register

Register er et begrep jeg ønsker å gjøre rede for. Pimm siterer Halliday som beskriver et register som *«a set of meanings that is appropriate to a particular function of language, together with the words and structures which express these meanings»* (Halliday, som sitert i Pimm, 1987, s. 17). Et matematisk register er dermed de symbolene fra matematikken sammen med ord fra et naturlig språk for den samme matematiske ideen. Ordene innenfor et naturlig språk som omtaler begrep innenfor matematikken kan oppfattes som et register. Duval (2006) omtaler register som representasjonssystem. Han belyser viktigheten av å kunne beherske de ulike registrene for én og samme matematisk idé.

2.1.3 Semiotiske system

Et matematisk objekt kan ha nokså forskjellige typer semiotiske representasjoner. De forskjellige representasjonene bidrar på hver sin måte til å gjøre det matematiske objektet tilgjengelig og representasjonene innehar ulikt potensial. I matematikk finnes det et stort mangfold av semiotiske representasjoner av forskjellig karakter og de innehar også ulike egenskaper. Siden de ulike representasjonene innehar forskjellige egenskaper vil det være nyttig å bruke ulike representasjoner til ulike formål og problemstillinger. Hvilken representasjon man velger å bruke kan derfor gjøre et arbeid enklere, men den kan også gjøre arbeidet vanskeligere hvis man velger en upassende representasjon. På bakgrunn av representasjoners egenskaper og karakter har Duval (2006) laget en oversikt med fire forskjellige semiotiske systemer og her kan de ulike semiotiske representasjoner plasseres etter hvilken type de er.

Tabell 1: Duval (2006, s. 110), min oversettelse

	Diskursive representasjoner	Ikke – diskursive representasjoner
Multifunksjonelt register: Prosessene kan ikke lages til en algoritme	**Naturlig språk:** to ikke – ekvivalente modaliteter for uttrykking. Muntlig: Forklaringer Skriftlig (visuell): Teoremer og bevis.	**Ikoniske:** Tegning, skisse, mønstre. **Ikke – ikoniske:** Geometriske figurer som kan bli konstruert med hjelpemidler.
Monofunksjonelt register: De fleste prosessene er algoritmer	**Symbolske system** Skriftlig: Utregninger og bevis	**Todimensjonale figurer som kombinasjon av endimensjonale og nulldimensjonale** Diagrammer og grafer

I forbindelse med denne undersøkelsen vil representasjonsregistrene naturlig språk og symbolske system være relevante. Av representasjoner innenfor naturlig språk tok elevene i bruk både muntlige og skriftlige representasjoner i arbeidet med det åpne opplegget i datainnsamlingen. I tillegg tok elevene i bruk matematiske symboler, i form av tall, som representasjoner i arbeidet. Disse representasjonene tilhører representasjonsregisteret symbolske system i Duval (2006) sin klassifisering.

2.1.4 Transformasjoner

Der noen lærere fokuserer på hvilket register eleven behersker best, mener Duval (2006) at dette er et feilaktig fokus. Det som er vanskelig er ikke å forstå de forskjellige registrene, men det å kunne gå fra et register til et annet. Duval (1999) hevder også at matematisk tenkning ofte krever at man aktiverer flere register parallelt selv om det ser ut til å være nok å bare bruke ett register. Duval (2006) utdyper at det bare er i matematikk at et slikt behov for koordinering av register er så stort, dette spesielt med tanke på at matematikken ikke har primære kilder. Den virkelige utfordringen ved matematikkdidaktikk er ifølge Duval (2006) å utvikle elevens evne til å skifte register. Det kan være vanskelig for elever å kjenne igjen det samme registret representert på en annen måte, noe som viser at evnen til å skifte fra et representasjonssystem til et annet er viktig i læring og arbeid med problemløsning i matematikk (Duval, 2006).

Duval (2006) skriver at ingen form for matematisk aktivitet kan utføres uten å bruke minst et representasjonsregister, fordi matematisk bearbeidelse innebærer alltid å erstatte et register av representasjon til et annet. Duval (2006) poengterer at evnen til å bytte fra én representasjon til en annen ofte er den kritiske delen for læring og for å løse problemer i matematikk. Derfor vil det være viktig å arbeide med transformasjoner mellom representasjoner for å støtte elevenes læring (Duval 2006). Det å kunne transformere mellom representasjoner er viktig for læring i faget, og Duval (2006) skiller mellom to ulike typer transformasjoner; Behandling (oversatt fra treatments) der transformasjoner gjøres innenfor et og samme representasjonsregister, og omdannelse (oversatt fra conversions) der transformasjoner gjøres mellom ulike representasjonsregister, men bevarer referansen til samme objekt (Duval, 2006).

2.1.4.1 Behandlinger – treatments

Behandlinger er transformasjoner av representasjoner som skjer innenfor samme register Duval (2006). Et eksempel på en behandling av en generalisering er å først forklare det generelle med muntlig språk, for så å skrive ned dette med skriftlig språk. Dette er en behandling da man gjennomfører en transformasjon i ett register; naturlig språk. I prosessen med behandlinger er det matematiske objektet representert på lignende måter, noe som gjør at elevene lettere er i stand til å kjenne igjen objektet (Duval, 2006).

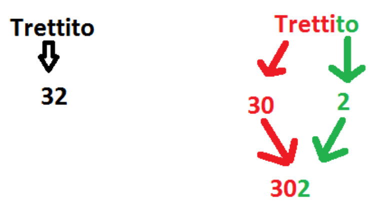
2.1.4.2 Omdannelser – conversions

Omdannelser korresponderer til en transformasjon mellom ulike semiotiske system. Omdannelser er, ifølge Duval (2006), en transformasjon som er mer kompleks enn behandlinger, og dette skyldes at et skifte av system krever gjenkjennelse av det samme objektet i to ulike representasjoner. Ofte er innholdet i representasjonene veldig forskjellig som for eksempel transformasjon mellom tekstoppgave og uttrykk skrevet med symboler.

Mange elever har problemer med omdannelsen fra en tekstoppgave til et symbolsk uttrykk og dette gapet er det flere elever som ikke kommer seg over (Duval, 2006, s. 19). Duval (2006) skriver at man må koordinere de ulike semiotiske systemene som brukes for et objekt for å utvikle en matematisk forståelse for objektet. Uten en slik samordning kan ikke elevene mobilisere ulike representasjoner i et samspill og utføre omdannelser. Det som blir viktigst i undervisningen er ikke nødvendigvis å velge det beste representasjonssystemet, men å gjøre elevene i stand til å koble forskjellige måter å representere det matematiske innholdet på (Duval, 2006). Videre skiller Duval (2006) mellom *kongruente* og *ikke – kongruente omdannelser*.

Ifølge Duval (2006) er det for mye fokus på *kongruente omdannelser* i matematikken, videre hevder han at det er *ikke-kongruente omdannelser* som viser seg for mange å være vanskelige. En omdannelse som har samme rekkefølge med det som er skrevet på et matematisk språk er *kongruent* og Duval (2006) anser dette som en lettere omdannelse enn en *ikke-kongruent* omdannelse der samme objekt opptrer på to forskjellige måter.

I en *kongruent omdannelse* er det en – til – en – relasjon mellom komponentene i de to representasjonene, som tallordet «fem» og tallsymbolet «5». I andre tilfeller er det ingen direkte relasjon mellom komponentene i de to representasjonene og omdannelsen vil da karakteriseres som *ikke – kongruent* (Duval, 2006). Eksempel på en *ikke – kongruent omdannelse* vil være tallordet «trettito» og dets tilhørende tallsymbol, «32». «Trettito» er et sammensattord og en direkte relasjon mellom komponentene ville være 30 og 2, som gir tallet 302, trehundredeogto.



Figur 2: Omdannelse av trettito

2.1.5 Konkreter hos Duval

Duval (2006, s. 110 – 111) skriver at konkreter ikke regnes som et semiotisk system, da det ikke er noen gitte «regler» for manipulering av dem. Duval (2006) hevder da at konkreter ikke har noen muligheter for transformasjoner og at det er vanskelig å avgjøre hva behandlinger og omdannelser vil være i arbeid med konkreter. Jeg velger å tolke Duval (2006) dit at konkreter er inkludert i semiotiske representasjoner, ved å se på konkreter i én spesifikk matematisk kontekst. Arbeid med konkreter i forbindelse med posisjonssystemet gjør at manipulasjon av konkreter har noen retningslinjer. Det vil i slike spesifikke situasjoner være noen gyldige manipulasjoner i det representasjonssystemet som konkretene er i i den gitte situasjonen. Man kan slik snakke om behandlinger av konkreter i det representasjonsregisteret konkreter befinner seg i. Duval (2006) skriver at bruken av konkreter er avhengig av den som skal arbeide og tolke dem. Videre forklarer han at konkreter ofte vil ha funksjonen som en hjelpende overgangsrepresentasjon. Jeg har valgt å plassere konkreter i representasjonsregisteret ikoniske og ikke – ikoniske representasjoner i Tabell 1.

I arbeidet med Bestemors boller, som er det åpne opplegget jeg har formulert, har elevene tilgang til konkreter i form av perler og plastposer. I *«dagens tall»* er konkretene melkekartonger og sugerør. En behandling innenfor konkreter vil være å gå fra å representere en mengde med perler og plastposer, til å representere samme mengde i sugerør. En plastpose med ti perler vil tilsvare en bunt med ti sugerør. De er begge representasjoner på en tier, men i ulikt materiale.

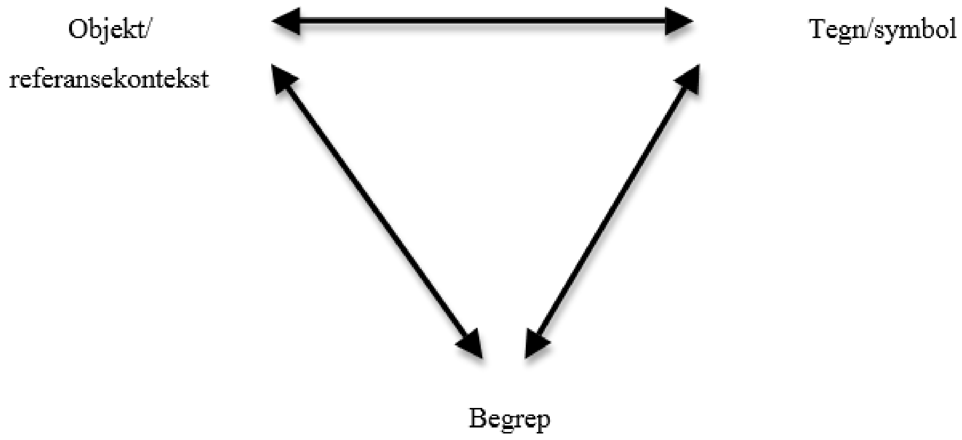
2.2 DEN EPISTEMOLOGISKE TREKANTEN - STEINBRING

Steinbring (2006) benytter den epistemologiske trekanten for å illustrere hvordan mening skapes gjennom mediering mellom objekt, symbol og begrep. Trekanten består av det han kaller for begrep, objekt/referansekontekst og tegn/symbol. Denne trekanten gir grunnlag for å si noe om hvordan elevene utvikler mening til nye tegn og symbol ved hjelp av en kjent referansekontekst og den kunnskapen de allerede har om begrepet som de arbeider med.

I barns arbeid med å gi tegn og begreper betydning er det viktig å knytte dem til ekte ting. Men praktiske erfaringer er ikke nok alene, det må skje et samspill med språklige utrykk for å benevne begrepet, for språk spiller en viktig rolle i utviklingen av forståelse for begreper. Et begrep består av symboler og ord, og disse må skilles fra hverandre (Steinbring, 2006). Denne oppdelingen av ord og symbol er viktig for å ha fullstendig forståelse for begrepet. For eksempel kan man se symbolet «8» og si «åtte», uten å forstå at dette betegner en mengde med åtte av noe. Man har slik kun forståelse for symbolet og ikke selve begrepet (Steinbring, 2006).

Begreper fungerer som et bindeledd mellom virkeligheten og språk. Virkeligheten består av ting og hendelser, mens språk er satt sammen av ord, symboler og tegn. Alle matematiske begreper er abstrakte, men det finnes ting i den virkelige verden som representerer begrepet. Når man ser et tegn eller symbol vekker det en tanke som henviser til noe som finnes i virkeligheten. Steinbring (1997) skriver at konstruksjonen av relasjoner mellom tegn/symbol og objekt/referansekontekst via begrep ikke fører fram til en ferdig definisjon, men er et samspill i stadig utvikling. Ettersom barn får rikelig med erfaringer vil begrepsinnholdet endre seg. Etter mange erfaringer vil barn assosiere tegn og ting med det konvensjonen har bestemt at begrepet skal representere. For eksempel vil man etter å ha gjort erfaringer forstå at symbolet «5» tilsvarer femtallet og mengden fem. Dette er noe som læres gjennom gjentatte erfaringer med ulike representasjoner for å belyse begrepet «fem». Steinbring (2006) skriver at tolkningen av tegnene og koblingene til referansekontekster endrer seg hos den som lærer når kunnskapen utvikles. Jo flere erfaringer en elev får, jo mer innhold blir lagt i begrepet. Dette kalles en semiotisk mediering mellom referansekontekst og tegn i matematikken.

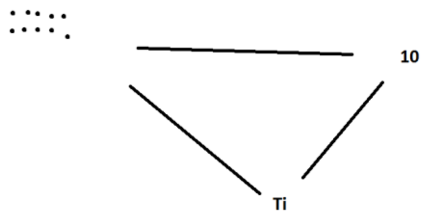
Tegn har en epistemologisk funksjon og dette forklarer Steinbring (2006) med at tegn inneholder kunnskap om det de står for. Denne kunnskapen er ikke gitt, den må tolkes og videre forstås av brukeren. Nå man er i læringsfasen av nye tegn og begreper trenger ikke tegnene i seg selv å ha noen betydning. *«These signs do not have a meaning of their own, this has to be produced by the learner by means of establishing a mediation to suitable reference contexts»* (Steinbring, 2006, s. 135). For eksempel kan elevene ha lært at ti enere er det samme som en tier, uten at det gir eleven noe mer forståelse av sammenhengen. Man må derfor selv skape mening til tegnene ved å forstå hva som medieres imellom dem. Det er først når eleven forstår sammenhengen, altså hva som medieres mellom tegnet og referanseobjektet, at den utvikler fullstendig kunnskap om begrepet (Steinbring, 2006).



Figur 3: Den epistemologiske trekanten, hentet fra Steinbring (1997, 2005, 2006).

Steinbring (1997, 2005, 2006) viser forholdet mellom tegn, referanseobjekt og begrep i den epistemologiske trekanten, se Figur 3. Her representeres aspektene til "virkeligheten" ved objekt/referansekontekst og språklige aspekter ved tegn/symbol (Steinbring, 2005). Denne trekanten viser altså koblingen mellom referansekonteksten som brukes for å skape mening i kunnskap, og tegnene som brukes for å kode denne kunnskapen. Symbolene har dermed ikke noen mening i seg selv, men får mening gjennom en referansekontekst. Meningen i symbolene oppstår i samspillet mellom tegn/ symboler og en referansekontekst (Steinbring, 1997). Steinbring (1997) sier at den epistemologiske trekanten ikke er noen statisk trekant, men mer å betrakte som et dynamisk system der begrep, tegn/symbol og referansekontekst gjensidig påvirker hverandre. Videre understreker han at en referansekontekst ikke nødvendigvis er et konkret objekt, den kan like gjerne være en illustrasjon, diagram eller til og med tegn eller symboler i seg selv.

Elevene skaper en mening av matematikken ved å mediere mellom forskjellige objekt, symbol og begrep i matematikken. Et eksempel på en slik epistemologisk trekant er illustrert i Figur 4. Der er objektet mengden av ti perler og symbolet er det matematiske symbolet 10 som benyttes for å illustrere denne mengden. I begrepshjørnet er selve tallbegrepet ti.



Figur 4: Begrepet ti illustrert i den epistemologiske trekanten

2.3 POSISJONSSYSTEMET

Det er gjort en del forskning på førsteklassingers forståelse for posisjonssystemet tidligere. Fuson (1990) skriver at elever ikke lærer konseptene bak posisjonssystemet, noe som resulterer i liten eller ingen evne til å forklare prosedyrer de benytter i utregningsprosesser. Videre skriver Fuson (1990) at det er nødvendig å ha forståelse for aspektene ved posisjonssystemet før man arbeider med addisjon og subtraksjon med flersifrede tall. Mange barn regner riktig i addisjon og subtraksjon med flersifrede tall, men er ikke i stand til å forklare prosedyren eller forklare verdiene de har skrevet (Fuson & Briars, 1990). Å skape forståelse for posisjonssystemet er et langsiktig arbeid. Det er viktig at elevene får varierte erfaringer med posisjonssystemet og får benytte varierte konkreter (Hiebert & Wearne, 1992). Alseth, Throndsen & Turmo (2008) påstår at det er helt nødvendig at barn opparbeider seg en god kompetanse i titallssystemets tierstruktur og veksling mellom enhetene.

2.3.1 Plassverdisystem

Vårt titallssystem er et posisjonssystem, et plassverdisystem. Det bygges rundt en base på ti, vi grupperer i tierenheter og det er da mulig å skrive alle tall ved hjelp av disse. Tallene er formet etter et mønster, slik at hver tier er bygd opp av tallsekvensen 0 – 9 (Van de Walle, Karps og Bay – Williams, 2011). Sifrene representerer ulike verdier avhengig av hvor det står i tallet. Noen ganger betyr to 20, andre ganger 200 og noen ganger bare 2. Det avhenger av hvor totallet er plassert. For hver posisjon mot venstre blir sifferet ti ganger større. For å forstå posisjonssystemet krever det at elevene er i stand til å koordinere tallkunnskap med tallkonsepter (Ross, 1986). Å utvikle forståelse for posisjonssystemet krever å skape koblinger mellom store ideer som posisjon og verdi, som å betrakte en gruppe med ti som en enhet og bruke strukturen i de skrevne tallene til å få tak i denne informasjonen om gruppering (Fuson, 1990).

Kamii & Joseph (2004) viser til undersøkelser som påpeker at mange barn har manglende forståelse for posisjonssystemet i begynneropplæringen. Resultatene fra undersøkelsen viser at selv om barn skjønner og kan bruke ener og tiere i separate situasjoner, er ikke kunnskapen etablert før de kan behandle enere og tiere parallelt. Elever må kunne se på tallet 10 som ti enere og som en tier. Elevene må kunne identifisere verdiene i flersifrede tall, noe som er en nødvendighet i regning med de fire regneartene. Det er viktig at elevene utvikler forståelse for plassverdisystem, da dette er nødvendig kunnskap for å kunne forklare algoritmer med flersifrede tall.

2.3.2 Aspekter ved posisjonssystemet

Jones, Thornton, Putt, Hill, Mogill, Rich og van Zoest (1996) skriver at det er fire nøkkelaspekter ved posisjonssystemet: telling, unitizing, del – hel – aspektet og sammenhengen mellom språk og symbol. Fauskanger (2004) skriver at utviklingen av forståelse for alle nødvendige aspekter ved posisjonssystemet er en tidkrevende prosess, men som er helt nødvendig å bruke mye tid på da dette danner grunnlaget for tallforståelsen.

2.3.2.1 Tellemåter og kombinasjon av dem

Et av nøkkelaspektene ved posisjonssystemet er telling og tallrelasjon (Jones et. Al, 1996). Gjennom telling og telleferdigheter får elevene nødvendige elementer i tallkunnskap som omhandler kardinaltallene og ordinaltallene. Kardinaltall angir antall elementer i en mengde, for eksempel *fem* poteter. Ordinaltall derimot angir hvilken posisjon eller rekkefølge noe er i, for eksempel lørdag er den *sjette* dagen. Anghileri (2006) forklarer tallrelasjon som å kjenne tallinjens logikk med større verdi til høyre og mindre verdi til venstre. Denne forståelsen er viktig i arbeidet med posisjonssystemet, da verdien av et flersifret tall ikke kun bestemmes av sifrene i seg selv, men også av sifrenes plassering (Lindland, 2007).

Barn vil til å begynne med telle en og en. Etter hvert vil barn utvide tellingen til å omfatte andre hopp enn en og en, og begynne å telle med to, fem eller ti om gangen, såkalt steg – telling. Jones et. Al (1996) skriver at telling er et viktig aspekt ved posisjonssystemet. Videre skriver de at elevene må kunne telle i hopp på en og en, men også steg – telle. De to måtene å telle på må også kunne kombineres, for eksempel som 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 17 – 27. Fleksibel telling er nødvendig for å kunne dele opp tall i enere og tiere.

2.3.2.2 Del – hel – aspekt

Ross (1986) og Hughes (1986) påpeker viktigheten med forståelse for «del – hele» aspektet i en grundig forståelse for posisjonssystemet. Elevene må kunne se et tall som en helhet og samtidig skjønne hvordan dette tallet kan bli delt opp i deler. Dette er hva Jones et. Al (1996) kaller oppdeling. Det er ikke nok å kun være i stand til å dele opp tall i deler, man må samtidig kunne sette sammen delene til en helhet. Å ha forståelse for at 10 kan deles opp i 9 og 1 eller 6 og 4, samtidig som 6 og 4 kan settes sammen til 10 er nødvendig for å forstå posisjonssystemet. Ross (1986) nevner oppdeling i kanoniserte og ikke – kanoniserte deler. Ross forklarer oppdeling i kanoniserte deler som representasjoner som følger konvensjonene om at ikke flere enn 9 objekter kan bli brukt i en posisjon. Ikke – kanoniserte representasjoner tillater flere enn 9 objekter på en posisjon (Ross, 1986). Oppdeling handler altså om å vite at 32 er 3 tiere og 2 enere, men også 2 tiere og 12 enere. Hughes (1986) fokuserer på den nødvendige kunnskapen bak tallene. Videre påstår han at dersom elevene utvikler forståelse for hvordan de første ti positive heltallene kan deles opp og fleksibel bruk av kombinasjonene, så er grunnlaget for regning med flersifrede tall etablert. Del - hele kunnskapen blir både en forutsetning for å forstå posisjonssystemet og en viktig del av posisjonsforståelsen i arbeid med flersifrede tall.

2.3.2.3 Unitizing

Posisjonssystemet krever den store ideen unitizing. Unitizing handler om å betrakte ti som en gruppe og bruke ti som grunnenhet (Fosnot og Dolk, 2001). Fuson (1990, s. 273) sier at barn må utvikle og konstruere *multiunit conceptual structures* som et ledd i forståelsen for posisjonssystemet. *Multiunit conceptual structures* forklares som tallord som er en samling av enheter. Tallordet hundre er et eksempel på *multiunit conceptual structures* forklarer Fuson (1990). Hundre er en samling av 100 elementer av noe (Fuson, 1990. s. 273), på lik linje som tier er en samling av ti elementer. Altså legger Fuson (1990) samme innhold i *multiunit conceptual structures* som Fosnot & Dolk (2001) legger i unitizing. Begge begrepene handler om å betrakte en gruppe objekter som en enhet. Fosnot & Dolk (2001) påpeker at unitizing handler om å betrakte en samling av ti objekter som en enhet, en tier.

2.3.2.4 Den begrepsmessige siden – språk, symbol og ord

For å forstå og bruke posisjonssystemet riktig både i skriftlig og muntlig form må barna knytte ordene og de skrevne tallsymbolene til hverandre og gi mening til begge formene, skriver Fuson & Briars (1990) i sin artikkel. Fauskanger (2004) skriver at i tidlig matematikkundervisning må man arbeide med forståelse og begrepsdannelse. Også Hiebert & Wearne (1992) påpeker viktigheten med å skape en kobling mellom konkreter, skrevne symboler og muntlig språk. Butterworth (1999) påpeker at elevene må ha kontroll over to system på samme tid, det verbale tallordsystemet og posisjonssystemet. De skal både lære seg tallordene og oppbygningen av dem, samtidig som sifrene har verdi etter hvilken posisjon de har. Det er denne parallellinnlæringen som Magne (1998) fremhever som nødvendig for å få en god forståelse for titallssystemet. Det er viktig å hele tiden skape en kobling mellom konkreter, skrevne symboler og muntlig språk (Hiebert & Wearne, 1992).

De fleste barn lærer tallene som en tallremse først, uten at dette gir tallforståelse eller betydningsfulle begrep. Det første elevene må lære seg er det verbale systemet, at alle tall har et navn. Det fins to problemområder i dette arbeidet. Det ene er at tall mellom 10 og 20 er satt sammen av to siffer, 12 skrives «en – to» men en sier «tolv». Det andre problemet mange barn har er at tallene over 20 vil være ulike i måten vi sier det og slik vi skriver dem med tall. Vi sier «tjue – en» med skriver «21», noe som for mange barn ikke står i ende med verken tallsymbolet eller verdien av tallet (Butterworth, 1999).

Flere undersøkelser påpeker at flere asiatiske språk bruker tallbegrepene på en helt annen måte enn den engelsktalende verden, som sammenfaller med de norske tallbegrepene (Butterworth, 1999; Fuson & Briars, 1990; Miura, Okamoto, Kim, Steere & Fayol, 1993). I Kina er begrepene sterkt knyttet opp mot sifferet. 12 benevnes som «ti – to», mens 22 benevnes som «to – ti – to». I flere asiatiske språk er tallordene sterkt knyttet opp mot titallsbasen. Våre tallord er ikke like konsekvente og lett å oppfatte da vi har egne ord for de ulike tierenhetene. Vi sier «tjue», «tretti» og «førti» som ikke er like enkelt å oppdage systemet på som ved den kinesiske tellemåten (Miura, Okamoto, Kim, Steere & Fayol, 1993).

2.3.3 Null

I et posisjonssystem er man avhengig av null som posisjonsnotasjon for å kunne skrive ønsket tall og for å kunne skille mellom tall (Krasa & Schunkwiler, 2009). Dersom man har mengden tjue har man to tiere og da skriver man et totall på tierplassen og er da avhengig av null for å symbolisere at enerplassen er tom, det er ingen enere. Forståelsen for null som plassholder kan være vanskelig for mange å forstå, da null er en uhåndgripelig mengde, null er ingenting.

Flere undersøkelser viser at mange barn har vansker med å forstå null som plassholder i posisjonssystemet (Fauskanger, 2004, Dickson et. Al, 1988) og Krasa & Schunkwiler (2009) skriver at mange barn ikke er fortrolige med null som plassholder. For barn er det ofte forvirrende at dersom vi setter 0 foran betyr det ingenting, men setter vi derimot 0 bak eller mellom blir tallene annerledes. Det er stor forskjell på 24 og 240 eller 204.

2.4 TALLFORSTÅELSE

Flere forskere viser til at tallforståelse er et av de viktigste fundamentene som det utvikles forståelse for i tidlig matematikk. Studier viser at tallforståelse utviklet i tidlig skolegang har betydning og innvirkning på matematiske prestasjoner langt opp i skoleløpet (McGuire, Kinzie & Berch, 2011). Anghileri (2006) sier at tallforståelsen skal brukes som utgangspunkt for å utvikle effektive matematiske strategier. Det fins mange varianter av definisjon på tallforståelse, men jeg velger å støtte meg til Anghileri (2006) sin versjon. Anghileri (2006) definerer tallforståelse som:

Tallforståelse refererer til en person sin generelle forståelse for tall og operasjoner sammen med muligheten og tilbøyeligheten til å bruke denne forståelsen på fleksible måter for å lage matematiske påstander og for å utvikle nyttige strategier for å behandle tall og operasjoner (Anghileri, 2006, s. 5, min oversettelse).

Videre forklarer Anghileri (2006) at kjennetegnet på tallforståelse er *å kunne gjøre generaliseringer om mønster og prosesser som man er kjent med og til å knytte ny informasjon til allerede etablert kunnskap* (Anghileri, 2006, s. 2, min oversettelse). Tallforståelse refereres til en persons evne og forståelse til å behandle tall på en fleksibel måte, til å gjøre matematiske avgjørelser og utvikle nyttige strategier.

Jeg velger å benytte Anghileri (2006) sin definisjon da hennes versjon inkluderer telling, som er nødvendig for å kunne forstå og bruke posisjonssystemet. Telling kommer ikke eksplisitt til uttrykk i hennes definisjon, men for å inneha «*generell forståelse for tall og operasjoner*» vil telling være en del av tallforståelsen. Videre inkluderer hun det å knytte ny kunnskap til allerede etablert kunnskap. Dette kommer til syne i prosessen med å jobbe med det åpne opplegget jeg har formulert for denne studien. Her vil det være en fordel å kunne overføre kunnskap elevene har om tall fra tidligere situasjoner over til den nye konteksten. I overføringen vil det være en fordel at elevene kan tenke fleksibelt og se mønster, slik det står i definisjonen.

I matematikkfeltet omtaler man den kompetansen mennesker bør ha i matematikk som kvantitativ literacy (Maclellan, 2012). Å inneha kvantitativ literacy handler om å være i stand til å bruke tallkunnskap i autentiske situasjoner. Begrepet kvantitativ literacy innbefatter flere sentrale og grunnleggende ferdigheter i matematikk, som tallkunnskap, telleferdigheter og – prinsipper, ikke – verbal regning, tallkombinasjoner og tekstproblemer (Maclellan, 2012). På norsk oppsummerer vi disse basisferdighetene i begrepet tallforståelse. Lindland (2007) sier at det er flere aspekter som er sentrale i utviklingen av tallforståelse, blant annet arbeid med telling, tallkunnskap, sammenligning av tall og størrelser og arbeid med tallrekker. Alle barn har en tallforståelse, men det er varierende hvor omfattende den er. Å forstå at tall kan brukes på ulike måter, ha kunnskap om egenskapene og forstå det som ligger bak en strategi er viktig i utviklingen av matematisk forståelse (Fosnot & Dolk, 2001).

2.5 BEGREPSKUNNSKAP OG PROSEDYREKUNNSKAP

Innenfor matematikkdidaktisk forskning er det vanlig å skille mellom to ulike kunnskapstyper: begrepskunnskap på den ene siden settes opp mot prosedyrekunnskap på den andre siden (Schneider & Stern, 2010). Begrepsforståelse og prosedyrekunnskap er, slik vi ser hos Kilpatrick et al. (2001), to viktige komponenter ved den matematiske kompetansen.

Innenfor matematikkdidaktikk argumenterer blant annet Hiebert og Lefevre (1986) for at skillet mellom begrepsforståelse og prosedyrekunnskap ligger i skillet mellom forståelse og ferdighet. Dette kan knyttes opp mot relasjonell og operasjonell forståelse. De karakteriserer begrepskunnskap som kunnskap som er rik på sammenheng. Begrepskunnskap er dermed et nett av kunnskap der sammenhenger er vel så fremtredende som de små informasjonsbitene (Hiebert & Lefevre, 1986). Det er nettopp dette som kjennetegner relasjonell forståelse, å kunne se kunnskap i sammenheng og benytte seg av relasjoner i nye situasjoner.

Prosedyrekunnskap er, på lik linje med operasjonell forståelse, knyttet til evnen til å bruke en prosedyre. Prosedyrekunnskap deles, av Hiebert og Lefevre (1986), i to deler. Den ene omhandler representasjoner, symboler og språk og hva de betyr, mens den andre beskriver kjennskap til algoritmer, regler og prosedyrer for å utføre matematiske oppgaver.

Hiebert og Lefevres (1986) sin definisjon av begrepsforståelse finner vi igjen hos blant annet RittleJohnson, Siegler, og Alibali (2001). Her defineres begrepsforståelse som implisitt og eksplisitt forståelse av begreper og prinsipper i et område. Det innebærer også kunnskap om og forståelse av sammenhenger mellom begrepene i det området. Denne kunnskapen er fleksibel og generaliserbar (Rittle-Johnson et al., 2001). Tilsvarende skriver Engelbrecht, Harding, og Potgieter (2005) at begrepsforståelse dekker den delen av kunnskaper som går på forståelse av sammenhenger, systemer og begreper i matematikken. Her finner vi forståelse for matematiske ideer og prosedyrer, så vel som kunnskap om grunnleggende tallfakta og tallegenskaper (Engelbrecht et al., 2005). Igjen kan begrepskunnskap knyttes til relasjonell tallforståelse, med fokus på sammenhenger og forståelse, mens prosedyrekunnskap sammenlignes med operasjonell tallforståelse.

I følge Hiebert og Lefevre (1986) utvikles begrepskunnskap ved at det skapes forbindelser mellom ulike typer informasjon. Forbindelsene kan skapes mellom informasjon som allerede eksisterer i minnet, eller de kan skapes mellom informasjon som allerede eksisterer og ny informasjon. Disse forholdene preger individuelle fakta og betingelser og knytter all informasjon sammen til et nettverk. En enhet av informasjon kan ikke eksistere som begrepskunnskap i seg selv. Informasjonen er definert som begrepskunnskap kun når den som besitter kunnskapen kan knytte informasjonen til annen informasjon (Hiebert & Lefevre, 1986). I denne studien ansees denne type forståelse å være sammenfallende med Kilpatrick et al. (2001) sin beskrivelse av forståelse, der de skriver at man må kunne mer en isolerte fakta. Det er lettere å huske når ny kunnskap settes i forbindelse med og kjent kunnskap (Kilpatrick et al., 2001).

2.6 KONKRETER

Konkreter forbinder man ofte med å gjøre noe mer håndgripelig, slik begrepet benyttes i dagligtalen. I matematikk er det mange som tror at å arbeide med konkreter kun handler om å synliggjøre, konkretisere og visualisere matematikken. I matematikk vil konkreter i tillegg til å ha funksjonen for å skape forståelse for den abstrakte matematikken, også bidra til utforskning og gjøre matematikken mer anvendt. Man kan kalle gjenstandene man benytter i matematikkundervisning for materiell og Holm (2002) deler begrepet materiell inn i ulike typer, alt etter hvilken læringsrolle de har. Samme materiell kan virke både som konkretiseringsmateriell og abstraksjonsmateriell (Holm, 2002).

Konkretiseringsmateriell er materiell som konkretiserer eller visualiserer den abstrakte matematikken. Konkretiseringsmateriell benyttes for å ha en mer konkret tilnærming til matematikken ved at matematikken konkretiseres (Holm, 2002). Konkretiseringsmateriell skal hjelpe elevene til å forstå mer matematikk – men gjør den det? Forskning er todelt her. Frostad (1995) påpeker at konkretiseringsmateriellet er laget ut fra ståstedet til den som lager det. Dette er personer som allerede har forstått det matematiske som materiellet skal konkretisere. Det er derfor ikke sikkert at materiellet treffer elevene. Man må vurdere om materiellet utvikler den matematiske abstrakte ideen eller om man må inneha den matematiske abstrakte ideen for å benytte materiellet.

Materiell som brukes for så å trekke ut matematikken kalles abstraksjonsmateriell. Abstraksjonsmateriell brukes for å undersøke matematiske problemstillinger (Holm, 2002). Ofte vil materiellet symbolisere noe konkret, i min studie vil perlene symbolisere bollene i konteksten, men den viktigste funksjonen til materiellet er å være flyttbar slik at elevene kan utforske hvordan det er mulig å pakke 28 boller i tierposer og løse. Ideen er at man først skal arbeide med materiellet for så å gjøre den mer abstrakt (Dalvang, 2006).

Sentralt i riktig bruk av materiell i undervisning er å være påpasselig med å benytte variert materiell, slik at en abstrakt matematisk ide ikke kun blir forbundet med en type materiell, men får den abstrakte meningen det har av natur. Det er viktig at elevene får bruke konkretiseringsmateriellet selv og at det ikke kun blir en demonstrasjon fra lærer (Dalvang, 2006). Elevene må selv få gjøre erfaringer med konkretene for å få fullstendig forståelse for de aspekter ved det matematiske objektet som det aktuelle materiellet viser.

3 METODE

I metodekapitlet vil jeg beskrive valgene jeg har gjort i forkant, underveis og i etterkant av innsamlingen av datamaterialet. Jeg vil begynne med å begrunne hvorfor min forskningsstudie hører til en kvalitativ forskningsmetode. Videre beskriver jeg konteksten for datainnsamlingen. Deretter redegjør jeg for hvilket datamateriale som er samlet inn og hvordan det er bearbeidet og beskriver analysemetoden som er blitt benyttet i kodingen av det innsamlede datamaterialet. Avslutningsvis kommer en diskusjon om studiens pålitelighet og kvalitetskrav, samt etiske og metodiske betraktninger.

3.1 KVALITATIV FORSKNINGSMETODE

Flere forskere forsøker å gi en definisjon eller forklaring på hva kvalitativ forskning er. De fleste er enige om at kvalitativ forskning kjennetegnes av at forskeren er interessert i å forstå deltakernes perspektiver. Kvalitativ metode vektlegger innhold og betydning. Ofte er det få deltakere som deltar i studien, men forskeren går i dybden og forsøker å få en mest mulig bred og dekkende forståelse av forskningsfeltet. Som forsker har man nær kontakt med deltakerne, i motsetning til spørreskjema i kvantitativ metode (Cohen et. Al, 2011). Forskningen jeg har gjort hører til en kvalitativ forskningsmetode, da jeg har undersøkt en liten gruppe elever sin tallforståelse og arbeid med posisjonssystemet. Postholm (2010) beskriver en kvalitativ studie som undersøkelser av menneskelige og sosiale prosesser i deres naturlige setting. Hensikten med forskningen min har vært å få et innblikk i et utvalg elever sin forståelse for posisjonssystemet og overganger mellom semiotiske representasjoner. Det ble derfor naturlig for meg å velge en kvalitativ forskningsmetode, da Cohen et. Al. (2011) skriver at kvalitativ metode fokuserer på å forstå hvordan og hvorfor mennesker gjør slik de gjør. Videre forklarer Postholm (2010) at forskerens mål i kvalitativ forskning er å danne seg et helhetlig og komplekst bilde av deltakernes perspektiv på temaet i forskningen. Jeg ønsket å få kunnskap om hvilken forståelse for posisjonssystemet et utvalg elever på 1. trinn viser gjennom observasjon, samtale og aktivitet. Som forsker var jeg til stede i datainnsamlingskonteksten og hadde på denne måten både mulighet til å observere elevene i arbeidet og stille spørsmål underveis.

Både Postholm (2010) og Nilssen (2012) skriver at som forsker har man alltid med seg antagelser og forutsetninger inn i forskningsprosessen, som vil påvirke ens tolkning og forståelse av situasjoner i studien. Kvalitative studier begynner med et teoretisk rammeverk som påvirker hvilke elementer forskeren fokuserer på i datainnsamlingsprosessen og som blir styrende for forskningsspørsmålet (Creswell, 2013). Før jeg begynte med datainnsamlingen hadde jeg lest meg opp på tidligere forskning på området, jeg hadde erfaringer fra praksis og erfaringer fra da jeg selv var elev. Disse forutsetningene påvirket meg så vel ute i felten som i min forståelse i etterkant av konteksten. Det er viktig å være bevisst på at man forstår elevene ut fra sitt teoretiske ståsted, selv om alle i utgangspunktet ønsker å forstå elevene nøytralt. Mitt teoretiske ståsted og forståelse av undersøkelsen vil være preget av det teoretiske rammeverket som ligger til grunn for forskningen min. Forskerens teoretiske bakgrunn vil alltid være med å farge de tolkninger man gjør. Kvalitativ forskning vil derfor alltid være verdiladet og det er viktig at forskeren innser at forskningen aldri vil være objektiv på grunn på referansebakgrunnen (Creswell, 2013). Postholm (2010) skriver at det er viktig at forskeren er bevisst på at referansebakgrunnen vil påvirke de observasjoner og tolkninger man gjør.

3.2 INNSAMLING AV DATAMATERIALE

I kvalitativ forskning er det vanlig å gjøre *non – probability samples* av datamateriale (Cohen et al., 2011, s. 155). Det betyr at innsamlingen av datamaterialet skjer av en liten gruppe elever, altså en liten andel av befolkningen. Cohen et al. (2011) forklarer at en slik studie kun er representativt for seg selv og ikke for hele befolkningen. Dette betyr at dersom samme type undersøkelse gjennomføres på andre elever på samme trinn, vil det kunne gi andre svar. På grunnlag av elevenes utsagn og skriftlige arbeider vil jeg vite noe om hvilken forståelse for posisjonssystemet elever *kan* ha i 1. klasse og hvilke overganger mellom semiotiske representasjoner de har forståelse for.

Jeg vil nå si noe om valget av informanter og skole hvor datainnsamlingene ble gjennomført. Videre beskriver jeg min rolle som observatør i innsamlingsprosessen.

3.2.1 Valg av skole og elever

Datainnsamlingen til denne oppgaven ble gjennomført med fire elever på første trinn ved en skole i hjemkommunen min. Skolen og elevene er anonymisert i forskningen av etiske hensyn. Valg av skole ble foretatt på bakgrunn av to aspekter. Det første aspektet var at skolen jeg gjennomførte undersøkelsene på har jeg god kontakt med, da som arbeidsplass. Det ble naturlig for meg å velge denne skolen siden jeg har gode kontakter og kjennskap til de ansatte. Det andre aspektet var å ha fleksibel tilgang på elevene for datainnsamlingen. I bakhodet hadde jeg hele tiden tanken om at fokuset i prosjektet ville kunne endre seg underveis i analysen av det innsamlede datamaterialet. Det ble derfor hensiktsmessig å velge en skole som ligger i mitt nærmiljø og hvor jeg har god kontakt med kontaktlærerne for å stadig kunne avtale tidspunkt for datainnsamling.

Hensikten med kvalitative studier er å få mye data om et begrenset antall informanter (Christoffersen & Johannessen, 2012). Thagaard (2013) påpeker at en retningslinje innenfor kvalitative studier er knyttet til omfanget av deltakere. Det finnes ikke noe fasitsvar på hvor mange informanter som vil være riktig for en valgt studie. Antall informanter vil være avhengig av faktorer som hensikten med studien, egenskaper ved populasjonen det skal forskes på, og om det blir benyttet kvantitativ eller kvalitativ metode (Cohen et al., 2011). Videre skriver Cohen et at. (2011) at antallet informanter også vil avhenge av faktorer som tiden som er satt av til rådighet for studien og antall forskere. Antallet informanter vil i stor grad være avgjørende for mengden av data som samles inn og det er viktig at mengden av data ikke overskrider forskerens kapasitet til å håndtere datamaterialet både i form av analyse og presentasjon. Antallet informanter bør ikke være større enn at det er mulig å gjennomføre omfattende analyser. Fordi jeg har et sosiokulturelt bakteppe for studien er det naturlig å undersøke små grupper av elever. Gruppene bør være av en størrelse som gjør det mulig for meg å observere og hente inn data om alt som blir sagt underveis i elevenes arbeid. Her er det hensiktsmessig å velge 3 – 4 elever slik at elevene kan samarbeide og kommunisere med hverandre. Jeg valgte i denne undersøkelsen å begrense utvalget til fire informanter. De fire informantene har fått følgende fiktive navn i analysen; Mona, Filip, Morten og Trude.

For å tidlig kunne gå i gang med datainnsamlingen høsten 2016, valgte jeg å levere et informasjonsskriv om masterstudien min til alle foresatte som hadde skolestartere høsten 2016 ved en barnehage i Melhus kommune. De fleste av barna ved nettopp denne barnehagen begynner på den aktuelle skolen hvor jeg skulle gjennomføre studien. Informasjonsskrivet ble gitt til foreldrene i juni 2016 og svarslippene hentet jeg fortløpende. I barnehagen fikk jeg kun inn sju svarslipper hvor foreldrene tillot barnet å delta i studien min. Jeg kunne derfor ikke velge ut elever selv, men måtte velge fire av de sju som var tilgjengelige. Cohen et al. (2011) kaller et slikt utvalg for en *convenience sampling* (s. 155). Altså en tilfeldig innsamling alt etter hvem som er tilgjengelige. Det er ikke helt tilfeldig hvilke elever som ble valgt da jeg kun skulle ha førsteklassinger med i studien. Det betyr at noen kriterier måtte være oppfylt for å kunne delta, noe som Cohen et al. (2011, s. 156) kaller *purposive sampling*, formålstjenelig utvalg. Klassetrinnet ble altså valgt ut fra et formålstjenelig utvalg.

Datainnsamlingen til studien ble gjort i oktober og november 2016, med to samtaler med hver av informantene. I alt ble det gjennomført 4 samtaler i grupper.

3.2.2 Valg av aktiviteter

Jeg valgte å formulere et åpent opplegg med posisjonssystemet som innhold, inspirert av *The t – shirt factory*, av Catherine T. Fosnot (2007). Målet med et åpent matematisk opplegg er at det ikke er gitt noen fremgangsmåte, elevene skal selv utforske og oppdage relasjoner og store ideer innenfor et tema eller konsept i matematikkfaget. Siden åpne opplegg kjennetegnes av å være bygd opp omkring en reell kontekst, har samtlige elever mulighet til å se for seg situasjonen. Fordelen med en reell kontekst er at elevene raskt kommer i gang med arbeidet, da det fins flere innfallsvinkler. Noen elever vil begynne med å tegne selve konteksten, mens andre har utviklet mer effektive strategier og bruker forenklede eller til og med symbolske representasjoner i løsningsprosessen (Fosnot, 2007). Det er ingen gitt fremgangsmåte, flere veier fører frem til målet. Slik ivaretas prinsippet om tilpasset opplæring, hvor elevene har mulighet til å løse oppgaven ut fra sine forutsetninger.

Jeg vil nå analysere det åpne opplegget jeg har formulert, med tanke på matematisk innhold og læringsutbytte.

Hovedfokuset i det åpne opplegget er posisjonssystemet med omgruppering og ekvivalens, addisjon med ti og unitizing. Posisjonssystem handler om forståelse for at et siffer kan representere enere, tiere eller hundrere, avhengig av hvilken posisjon det har i et flersifret tall. Samme siffer har ulik betydning avhengig av hvilken posisjon det har i et tall. Resultatene til Ma (1999) påpeker viktigheten med å danne en grundig basisforståelse for posisjonssystemet for å kunne benytte algoritmer med relasjonell forståelse senere i skoleløpet. Videre legger det åpne opplegget opp til overganger mellom semiotiske representasjoner. Både muntlig språk, skriftlig språk, nedskriving av tallsymboler, samt arbeid med konkreter brukes i arbeid med det samme matematiske begrepet.

Det åpne opplegget jeg har formulert handler om bestemor Nanna som har bakt mange boller som hun skal selge på markedet. Bestemoren ønsker å selge løse boller og boller i poser og ber barnebarna om hjelp til organiseringen. Barnebarna skal, sammen med elevene, pakke noen av bollene i poser og noen skal selges i løsvekt. Elevene må vurdere antall boller i hver pose og må velge et antall som gjør det enkelt å holde oversikt. Et av målene med opplegget er at eleven skal oppdage at det er hensiktsmessig å ha ti boller i hver pose, da vi kan telle tiere. Når elevene har utviklet forståelse for fleksibel telling kan de telle videre med 10, altså stegtelle med ti, når de teller antall boller i poser. Samtidig må de kombinere å telle en om gangen med ti om gangen, som 1 – 2 – 12 – 22, da de skal telle antall boller både i posene og løse. Dette med å betrakte en pose med ti boller som nettopp en pose, betegnes som unitizing. Unitizing er å betrakte flere elementer som en enhet (Fosnot & Dolk, 2001).

Videre har jeg laget en tabell som elevene kan bruke for å holde kontroll over hvor mange boller de pakker. I tabellen skal elevene oppgi antall poser med boller, altså tiere, antall løse boller, enere, og antall boller som vil være å skrive antall boller med tallsymboler. Ved at elevene skal skrive tallsymbolet får jeg innblikk i deres skrivemåte av flersifrede tall og deres innsikt i posisjonssystemet. T – chart kaller Fosnot (2007) tabellen som også jeg har benyttet meg av. Fosnot (2007) skriver at tabellen er et verktøy for tanken, den hjelper oss til å holde oversikt over antall og legger opp til oppdagelse. Tabellen kan brukes til å organisere antall boller og oppdage ekvivalensen mellom antall poser med ti boller i og antall løse boller og det skrevne totalantall boller.

Videre i opplegget jeg har formulert er det oppgitt en tabell med antall poser og antall løse boller. Her skal elevene finne ut hvor mange boller bestemoren allerede har pakket og om det er mulig å pakke bollene på ulike måter. I tabellen er det 13 løse boller og hensikten med denne deloppgaven er å se om elevene er kjent med både kanonisert – og ikke – kanonisert oppdeling av flersifrede tall. Barna må forstå at antall kan blir omgruppert, men fortsatt være ekvivalent. Gjennom arbeid med konkreter kan elevene oppdage at 13 kan være 1 tier og 3 enere eller 13 enere. Avslutningsvis er det oppgitt bestillinger. Noen av bestillingen er av typen «Skal kjøpe 27 boller. Hvor mange poser og hvor mange løse boller blir det? Har jeg bare en mulighet eller har jeg flere muligheter?». Dette krever at elevene er utforskende for å finne flere mulige måter å pakke 27 boller på. Igjen er det omgruppering med kanonisert – og ikke – kanonisert oppdeling som er målet og å utvikle forståelse for at ulik oppdeling av 27 er ekvivalente. Forskning viser at det er nødvendig med en dyp forståelse for posisjonssystemet og ekvivalens, som grunnlag for arbeid med flersifrede tall i addisjon og subtraksjon (Fuson, 1990).

3.3 OBSERVASJON OG MIN ROLLE

Postholm (2010) sier at ulike forskningsmetoder har ulike feltroller som beskriver de forskjellige måtene forskeren kan observere på. Hammersley & Atkinson (1996) beskriver tre hovedtyper observasjon; fullstendig observasjon, deltakende observasjon og fullstendig deltakelse. I fullstendig observasjon deltar ikke forskeren i observasjonssituasjonen i motsetning til fullstendig deltakelse hvor forskeren deltar på lik linje med deltakerne i studien. En mellomting, og den vanligste observasjonsrollen, er ifølge Hammersley & Atkinson (1996) deltakende observasjon. Deltakende observasjon har også Cohen et al. (2011) en lignende beskrivelse av, som de kaller deltakende observatør. Cohen et al. (2011) forklarer deltakende observatør som en feltrolle hvor forsker kan delta i aktiviteter sammen med deltakerne, gjennom observasjon, samtale og spørsmål. Jeg vil si at Cohen et al. (2011) sin beskrivelse av deltakende observatør passer godt til min rolle i datainnsamlingsprosessen.

Gjennom deltakende observasjon hadde jeg mulighet til å stille oppklaringsspørsmål til elevenes utsagn og elevarbeid, spørre etter utdypninger og videreutvikle samtalen og aktiviteten. Ved å stille spørsmål underveis i samtalen fikk jeg større innblikk i elevenes tankemåte og analyseprosessen ble slik lettere. Videre var det en fordel å være tilstede i datainnsamlingsprosessen, ved at jeg fikk ta notater knyttet til om elevenes kroppsspråk, deres bruk av konkreter og egen selvstendighet i arbeidet. Ut ifra mitt teoretiske ståsted hadde jeg med meg begreper som jeg så etter og som lå til grunn for min forståelse av datamaterialet.

3.4 ANALYSEARBEIDET

Jeg vil i denne delen belyse hvordan analysearbeidet mitt har foregått. Dataanalyse beskrives som en prosess hvor forskeren får mening ut av innsamlede data (Postholm, 2010). Dette er en prosess hvor helheten blir oppdelt for deretter å bli analysert forklarer Postholm (2010). Hensikten med oppdelingen er å gi forskeren et mer komplekst og helhetlig forståelse av datamaterialet. Postholm (2010) påpeker på samme måte som for gjennomførelsen av undersøkelsene vil også analysearbeidet være preget av forskerens teoretiske ståsted og perspektiver. Videre er det forskerens oppgave å møte datamaterialet med et åpent sinn og være åpen for funn som strider mot de funn jeg hadde forventet å finne (Postholm, 2010).

3.4.1 Datamaterialet

Hovedkilden i mitt datamateriale er lydopptak som ble gjort i datainnsamlingen. Videre ligger elevarbeid og mine feltnotater fra observasjonen til grunn for studien. Lydopptakeren ble plassert midt på bordet for å sikre god lydkvalitet gjennom tilnærmet lik avstand til alle informantene og meg selv. Gjennom bruk av lydopptaker kunne jeg rette oppmerksomheten mot elevenes arbeid i situasjonen, da jeg ikke behøvde å skrive ned alle ytringene informantene kom med. I tillegg gav bruk av lydopptaker meg en tilgang til elevenes eksakte ord og ytringer i samtalen. Ved å gjøre en nøyaktig transkripsjon av opptakene i etterkant er dette en faktor som er med på å styrke validiteten i undersøkelsen.

Kvale & Brinkmann (2009) påpeker noen utfordringer i prosessen med å omsette talespråk til skriftspråk. Blant annet svekkes tekstinnholdet fordi man mister kroppsspråket, tonefallet og mimikken hos deltakerne. For å underbygge og støtte transkripsjonene er elevenes skriftlige arbeid og mine feltnotater med. Mine feltnotater består av elevens ikke – verbale handlinger og mine tanker/analyser underveis i observasjonssituasjonen. I transkripsjonen av opptakene har jeg benyttet ulike skrivemåter får å beskrive at elevene tar tenkepauser på lengre enn 3 sekunder i ytringer og for å beskrive ikke – verbale handlinger i datainnsamlingen.

(…) Tenkepause lengre enn 3 sekunder

[kursiv] referer til ikke – verbal handling, som skjer samtidig som verbal handling

Rett etter hver observasjonssituasjon ble opptakene transkribert og feltnotatene utskrevet og strukturert. Jeg valgte å transkribere hele opptaket, da man kan oppdage noe interessant i utsagn man ikke legger merke til umiddelbart. I analysedelen i denne masteroppgaven har jeg valgt å kun legge ved utklipp av samtalene, og ikke hele samtalene. Altså vil utsagn som vil kunne belyse forskningsspørsmålet mitt være med, da det er disse jeg analyserer og drøfter i de kommende kapitlene i oppgaven.

3.5 STUDIENS TROVERDIGHET OG PÅLITELIGHET

Kvaliteten i kvalitativ forskning kjennetegnes av pålitelighet og validitet (Tjora, 2010). Gjennom redegjørelse av hvordan dataene er samlet inn, blitt brukt og bearbeidet, skapes en pålitelighet til undersøkelsen. At en studie har validitet handler om at svarene en har funnet faktisk er svar på det en forsker på. Tjora (2010) skriver at en måte å gi validitet til studien er ved å sammenstille egne funn med tidligere forskning og aktuelle teorier. Dette er hva jeg gjør i drøftingen av analysen i denne oppgaven. For å gjøre studien så troverdig og valid som mulig, vil det være lurt å benytte flere metoder for å samle inn datamateriale, noe som Postholm (2010) kaller triangulering. Som nevnt benyttet jeg transkripsjoner av lydopptak, elevbesvarelser og egne feltnotater fra observasjonssituasjonen. Teorigrunnlaget mitt består av forskningsartikler som har gjort lignende undersøkelser som meg. Det er viktig at jeg viser tilstrekkelig med datamateriale for å underbygge de tolkninger jeg har gjort og de resultater jeg har fått (Nilssen, 2012).

Som nevnt tidligere vil forskeren være farget av sitt teoretiske ståsted når en går ut i feltet og undersøker noe (Postholm, 2010). Det var derfor viktig at jeg var klar over min rolle i undersøkelsen (Cohen et al., 2011). Alle handlinger i undersøkelsen var påvirket av erfaringer jeg hadde gjort meg på forhånd og forskning og teori jeg hadde lest. Funnene i forskningen min var påvirket av meg også før jeg gikk ut i felten, både av intensjonen med studien og forskningsspørsmålet jeg hadde stilt.

Kvalitativ forskning er ikke representativ for hele befolkningen, den er kun representativ for seg selv (Cohen et al., 2011). Funnene i min studie er avhengig av den konteksten hvor forskningen fant sted og hvilke deltakere som medvirket (Postholm, 2010). En slik studie som ikke kan bli gjennomført på samme måte *og* få samme resultater kaller Cohen et. al (2011) for avhengig studie. Dette betyr at dersom jeg hadde gjennomført samme undersøkelse med andre elever på samme trinn, ville jeg ikke fått de samme resultatene. Funnene i forskningen min sier noe om hvilken forståelse for posisjonssystemet noen elever i 1. klasse har, funnene gir meg en pekepinn på hva som *kan* være forventet hos førsteklassinger.

Etterprøvbarhet handler om at andre forskere gjennomfører samme studie som meg og får samme resultater (Krumsvik, 2014). Etterprøvbarhet er ikke like lett å gjennomføre i kvalitativ forskning med få deltakere, som i kvantitativ forskning med mange deltakere. Det er derfor viktig at jeg er oppmerksom på at funnene i min studie er et resultat av deltakere og den konteksten undersøkelsen ble gjennomført i. Siden jeg var til stede i datainnsamlingssituasjonen vil jeg som forsker kunne påvirke forskningskonteksten og mitt teoretiske ståsted vil påvirke hvordan jeg ser datamaterialet.

3.6 ETISKE BETRAKTNINGER OG METODEKRITIKK

Ettersom deltakerne i studien er elever ved barneskolen og mindreårige må foresatte samtykke til at barna kan være med. Jeg laget et informert samtykke, kalt *informed consent* av Cohen et al. (2011). Et informasjonsbrev ble sendt ut til alle foresatte med 5 – og 6 – åringer ved en barnehage i juni 2016. I informasjonsbrevet forklarte jeg formålet med forskningsstudien og bad om tillatelse til å gjøre lydopptak av elevene. Samtidig informerte jeg om at all informasjon om barna skulle anonymiseres, slik at det ikke er mulig å spore i ettertid. Foresatte ble også informert om muligheten til å trekke seg fra prosjektet når som helst. Alle disse elementene har jeg overholdt i etterkant, ved å bruke fiktive navn i transkripsjonen og ikke navngitt skolen hvor undersøkelsene ble gjennomført.

I barnehagen fikk jeg kun inn sju svarslipper hvor foreldrene tillot barnet å delta i studien min. Jeg kunne derfor ikke velge ut elever selv, men måtte velge fire av de sju som var tilgjengelige. I innsamlingsprosessen hadde jeg samtale med to og to elever av gangen. Jeg hadde ingen kjennskap til deltakerne før undersøkelsen begynte. Jeg erfarte etter første gruppeintervju at to av elevene ikke kunne være på samme gruppe, da de forstyrret hverandre og hadde lite matematisk utbytte av samtalen.

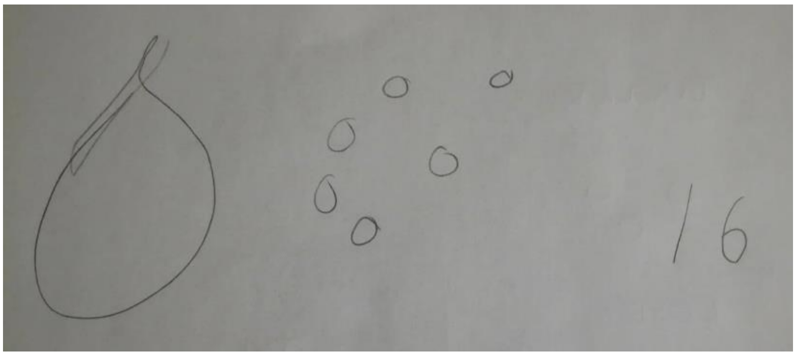
4 ANALYSE OG DRØFTING

I og med at elevene var satt i den situasjonen at de skulle diskutere og jobbe sammen var det naturlig for dem å bruke muntlig språk da de løste oppgaven. Elevene tok i bruk språket som medierende redskap for å gjøre seg forstått ovenfor hverandre og for å løse oppgaven. Jeg skal nå presentere datamateriale som vil være med på å belyse forskningsspørsmålet mitt**;**

Hvilke aspekter for posisjonssystemet viser et utvalg førsteklassinger forståelse for i arbeidet med «dagens tall» og et åpent opplegg? Hvilke transformasjoner mellom semiotiske representasjoner finner sted og på hvilken måte er de vellykkede?

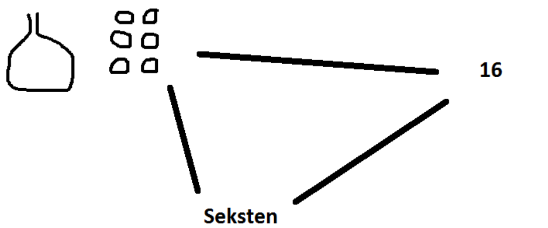
4.1 SEKSTEN - 16

1. Mona: Jeg teller hvor mange boller det er på dette brettet jeg da. *[Peketeller og sier tallordene høyt]* 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16. Her er det 16 boller. *[Går og henter seg 16 perler og setter seg ned rundt bordet og teller høyt]*1-2-3-4-5-6-7-8-9-10. Her er en pose *[Legger de ti perlene ned i posen]*. Så er det *[peketeller og teller høyt]* 1-2-3-4-5-6 løse. Da mangler jeg bare 4 så kan jeg lage en pose til*! [Tegner en pose og 6 løse boller på et ark og skriver 16]*.
2. Forsker: Hvor mange boller har du tegnet der?
3. Mona: Det er en pose og 6 løse. Det blir 16 tilsammen. I posen er det 10 boller. Jeg orker ikke å tegne dem, for jeg vet at det er 10 i posene.



Figur 5: Elevarbeid - Mona

Transkripsjonen viser eleven Mona som benytter seg av oppgavearket til det åpne opplegget, konkretiseringsmateriale i form av perler og plastposer og nedskriving på ark. I situasjonen ovenfor arbeider eleven med mengden 16. Arbeidet til Mona vil med Steinbring (1991) sin epistemologiske trekant være:



Figur 6: Den epistemologiske trekanten - seksten

Den epistemologiske trekanten viser at begrepet seksten beholder sin natur i de tre hjørnene av trekanten, både representert med tegn, referansekontekst og begrep. Mona har slik en vellykket mediering av begrepet (Steinbring, 2006). Eleven viser forståelse for at tallsymbolet 16 betegner seksten elementer, som Mona velger å gruppere i en tier og seks enere. Mona tilegner begrepet seksten riktig betydning ved å benytte en illustrasjon for å tilegne begrepet mening. Hun tegner en pose med boller og seks løse boller. Av transkripsjonen fremgår det at eleven har forståelse for den store ideen unitizing, ved at hun betrakter posen til å være ti objekter, uten å tegne hver og en av bollene i posen. Eleven viser evne til å betrakte ti elementer som en enhet, som en tier, og det er nettopp dette unitizing handler om. Unitizing og evnen til å betrakte en gruppe elementer som én enhet er nødvendig i arbeid med posisjonssystemet, da forståelsen for unitizing må være på plass for å kunne ha en riktig forståelse for skrivemåten av flersifrede tall (Fosnot og Dolk, 2001). Videre viser elevarbeidet at eleven har skrevet seksten riktig med tallsymboler.

Overgangen fra oppgaveteksten med tilhørende bilde til arbeid med konkretene krever kunnskap av typen begrepskunnskap, som Hiebert & Lefevre (1986) kaller det. Det vil være begrepskunnskap da eleven må kunne lage kobling mellom opplysningene gitt i oppgaven og konkretene. Som Duval (2006) skriver er forståelse avgjørende for elevenes evne til å gjennomføre omdannelser. Transkripsjonen viser transformasjon mellom ulike representasjonsregistre og vi har slik med omdannelser å gjøre. Først skjer det en omdannelse fra muntlig språk til konkreter. Mona teller først bollene på illustrasjonen og sier at det er seksten boller totalt. Dette tilhører det semiotiske systemet naturlig språk. Så medierer Mona begrepet seksten til konkreter. I overgangen beholder det matematiske objektet sin natur og vi snakker om en vellykket omdannelse.

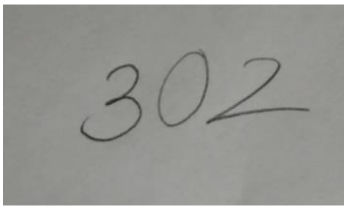
I arbeidet med konkreter vil jeg påstå at det skjer en behandling, da samme matematisk begrep, seksten, opptrer i to ulike former for konkretiseringsmateriell; først i form av perler og poser og så en tegning av dette. Forskjellen på perlene og posene og tegningen er at i tegningen kommer unitizingen frem. Eleven sier at hun ikke tegner de ti bollene inne i posen, da hun vet at det skal være ti boller der. I konkretene med perler og plastposer ser man de ti perlene i den gjennomsiktige posen. Det skjer en direkte modellering av oppgaven da Mona tar i bruk perlene og plastposene for å representere kardinaltallene i oppgaven. Konkretene representerer som sagt tallene i oppgaven og har som funksjon å være et hjelpemiddel for finne en løsning. Dette er hva Holm (2002) omtaler som abstraksjonsmateriell. I overgangen fra bilde i oppgaveteksten til representasjonen av perlene og posene er det en – til – en – korrespondanse mellom objektene. Det er bilde av 16 boller og Mona finner frem 16 perler og noen poser. Når eleven behandler konkretiseringsmateriellet til en tegning har hun gjort noen grep for å effektivisere. Elevene har valgt å ikke tegne de ti elementene inne i plastposen. I arbeid med modellering skjer det hele tiden en utvikling fra direkte modellering til mer effektive nedskrivingsmetoder (Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck, 1993). Eleven har her valgt å spare seg tid ved å tegne en «lukket» pose, som hun er innbefattet med inneholder ti elementer.

Fra arbeidet med konkreter skjer det igjen en transformasjon fra konkreter til skriftlige tallsymboler. Det er nok en gang en overgang mellom ulike representasjonsregister; konkreter til symbolske system (Duval, 2006). Eleven skriver seksten vedsiden av tegningen sin med tallsymboler. Som Steinbring (1991) sin trekant viser er det matematiske objektet det samme og det beholder sin natur. Dette er en vellykket mediering i en omdannelse.

I utsagn 1 viser eleven at hun er i stand til å telle et og et objekt av gangen. Hun viser at hun har forstått en – til – en – korrespondansen i telleprosessen ved at hun knytter et tallord sammen med et objekt. Videre viser transkripsjonen at Mona kan si telleremsen opp til og med 16. Eleven viser forståelse for aspektet del – hel i ytringen *«Da mangler jeg bare 4 så kan jeg lage en pose til»*. Her viser eleven at hun kan tallkombinasjoner som gir ti til sum. Dette er tallkombinasjoner som omtales som «tiervenner» i grunnskolen, men som Baroody (2006) omtaler som grunnleggende tallfakta. Baroody (2006) skriver at grunnleggende tallfakta er ulike tallkombinasjoner av to addenter som til sammen gir summen 10. Hensikten med disse kombinasjonene er å automatisere tallkombinasjoner slik at det letter hoderegningen. Mona sier det ikke eksplisitt, men indirekte tyder ytringen hennes på at hun vet at 6 og 4 gir summen 10, altså 6+4=10. Mona har altså forståelse for at en helhet kan deles opp og at summen av delene gir helheten (Ross, 1986).

4.2 32 ELLER 302?

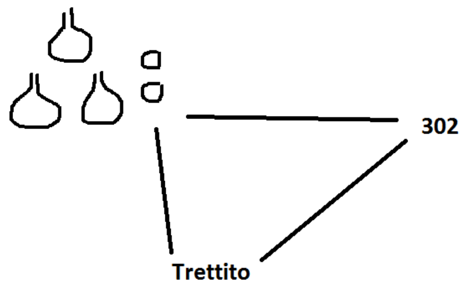
1. Filip: Her var det mange boller! *[Teller alle bollene på oppgavearket inni seg.]* Det er 32 boller! *[Finner så frem 32 perler. Teller 10 perler og legger disse i en pose, gjentar dette to ganger. Peketeller først de løse perlene så perlene i posene]*. 1 – 2 – 12 – 22 – 32, 32 perler. Da ble det 3 poser med boller og 2 løse. Kan du skrive opp det, Trude?
2. Trude: Hva skal jeg skrive?
3. Filip: At vi har 3 bolleposer og 2 løse.
4. Forsker: Hvor mange boller har vi til sammen da?
5. Filip: 32.
6. Forsker: Hvordan skrives 32?
7. Trude: Det er sånn. *[Skriver 302 ned på arket]*



Figur 7: Elevarbeid - Trude

Transkripsjonen viser et vanlig problem i forbindelse med overgangen fra muntlig språk til skriftlige symboler, nemlig feil i nedskrivingen. I utgangspunktet er «trettito» gitt med representasjonsregisteret naturlig språk, i form av muntlig språk hos Filip. Så får Trude i oppgave å transformere tallordet til tallsymboler. Eleven forflytter seg da til representasjonsregisteret symbolske system (Duval, 2006). Med tallsymboler skriver Trude «302» og transformasjonen er ikke vellykket, da objektet sin natur ikke er bevart.

I situasjonen ovenfor har vi med en omdannelse å gjøre, da eleven skifter representasjonsregister fra naturlig språk til symbolske system (Duval, 2006). Som det fremgår av transkripsjonen er ikke eleven i stand til å kjenne igjen objektet «trettito» i de to forskjellige registrene. Butterworth (1999) skriver at tallordene over 20 ikke har noen tydelig kobling mellom skrivemåte og uttale. I nedskrivingen av «trettito» får Trude kjenne på denne forskjellen. Duval (2006) skiller mellom kongruente og ikke – kongruente omdannelser. «Trettito» er et sammensatt ord av tretti og to. Trude har transformert det sammensatte ordet bit for bit i skriftlige symboler. Hun har altså laget en direkte relasjon mellom «trettito» i muntlig form og skriftlig form med tallsymboler. Hun har først skrevet ned «tretti» på arket, 30. Deretter «to», 2. Setter man disse tallsymbolene i sammenheng får vi «302», som vi leser som trehundredeogto. Trude har med andre ord gitt en kongruent omdannelse, hvor det er direkte relasjon mellom komponentene, bare at i tallord over 20 blir dette feil. Omdannelsen fra «trettito» til «32» er en ikke – kongruent omdannelse, siden komponentene ikke har noen direkte relasjon (Duval, 2006). Situasjonen ovenfor vil gi et feilaktig forhold mellom objekt, tegn og referansekontekst i den epistemologiske trekanten. Illustrert med Steinbring (2006) sin trekant vil Trudes forhold mellom de tre hjørnene se slik ut:



Figur 8: Den epistemologiske trekanten - trettito

Steinbring (2006) sier at for å ha en fullstendig og riktig forståelse for et begrep må eleven kunne skille symbolet og ordet fra hverandre. Trude har ikke forståelse for symbolet til «trettito», da hun skriver «302». Trude viser også problematikken med sifferet null i arbeid med posisjonssystemet. Det å utvikle forståelse for null som plassholder er nødvendig i posisjonssystemet vårt, for vi er avhengige av plassholderen for å skrive ønsket mengde (Krasa & Schunkwiler, 2009). Det er en stor oppdagelse å se at null foran et siffer eller tall ikke påvirker verdien til tallet, men setter man nullen mellom siffer eller bak blir verdien på tallet endret. Trude skal i utgangspunktet skrive 32, men med null mellom de to sifrene gjøres tallet nesten ti ganger større og blir 302. Null som plassholder er en viktig bit for en fleksibel tallforståelse for posisjonssystemet.

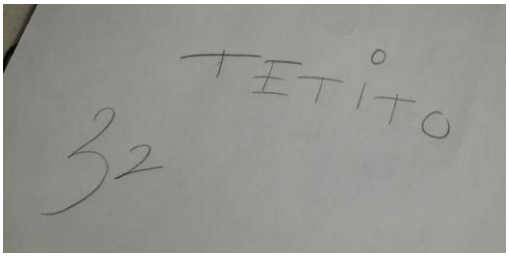
Som det fremgår av transkripsjonen teller elevene først antall boller på oppgavearket, før de finner frem tilsvarende antall perler og benytter disse for å løse oppgaven. Ettersom elevene putter ti og ti perler i poser og ser hvor mange løse perler man står igjen med, så kommer svaret på oppgaven eksplisitt frem. Dette er hva Carpenter et. Al (1993) omtaler som direkte modellering. Å bruke direkte modellering eller representasjoner av et problem handler om å gjenskape problemet i et materiale (Carpenter et. Al, 1993). Som utsagn 1 viser har Filip organisert konkretene i tre poser og to løse og svaret på oppgaven er at 32 boller kan deles opp i tre tiere (poser) og to enere (løse). Dette er kanonisert oppdeling av flersifrede tall (Ross, 1986). Arbeidet med konkretene kan betegnes som abstraksjonsmateriell, som Holm

(2002) omtaler det. Perlene og posene er flyttbare og lar elevene utforske og konkret se hvordan 32 kan fordeles, da det er gitt at det skal være ti perler i hver posen. Holm (2002) skriver at abstraksjonsmateriell skal bidra til utforskning og gjøre matematikken anvendbar, for så å gjøre de matematiske ideene abstrakt.

Utsagn 1 er interessant med tanke på et av aspektene som posisjonssystemet bygger på; telling. Filip viser evne til å kombinere to tellemåter i transkripsjonen. Eleven sier *«1 – 2 – 12 – 22 – 32»* og viser slik at han klarer å telle en og en, men også at han har kunnskap om stegtelling med hopp med ti av gangen. Jones et. Al (1996) skriver at kombinasjonen av de to tellemåtene er nødvendig i fleksibel telling og i arbeidet med posisjonssystemet. Videre peketeller Filip og dette er et tegn på en – til – en – korrespondanse. Eleven vet at hvert tallord representerer et objekt. Som transkripsjonen viser teller Filip både høyt og inne i seg. Han viser god kontroll på telleremsen da han stegteller med ti av gangen.

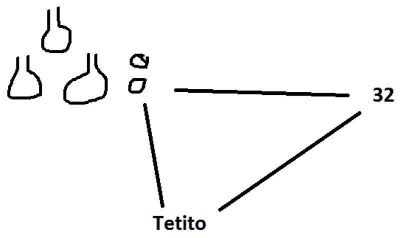
Etter at transkripsjonen ovenfor fant sted, ble jeg interessert i hvordan Filip ville ha skrevet 32. Følgende samtale utspiller seg i etterkant:

1. Forsker: Kan du skrive 32, Filip?
2. Filip: Så klart! (…) Med tall eller bokstaver?
3. Forsker: Det bestemmer du selv. Kanskje du klarer begge deler?
4. Filip: Så klart *[Skriver tetito og 32 på arket]*
5. Forsker: Hva betyr 3 – tallet og 2 – tallet?
6. Filip: 3 – tallet betyr at vi har tre tiere og 2 betyr to løse.



Figur 9: Elevarbeid - Filip

Filip er i stand til å transformere muntlig språk til skriftlig språk ved å skrive «trettito» med bokstaver. Elevarbeidet viser at eleven skrev «tetito», han mangler en t og r, men slike glipper må man regne med hos førsteklassinger. Som leser forstår jeg godt hva som står, eleven har skrevet «trettito». Filip har slik gjennomført en behandling, fra muntlig språk til skriftlig språk. Vi kan dermed si at overgangen er vellykket da objektet «trettito» beholder sin natur. Videre utfører eleven en omdannelse, fra muntlig språk til tallsymboler. Vi går slik fra naturlig språk til representasjonsregisteret symbolske system (Duval, 2006). Også i denne transformasjonen beholder «trettito» sin natur. Steinbring (2006) viser forholdet mellom begrep, tegn og objekt og i Filip sitt tilfelle vil den epistemologiske trekanten se slik ut:



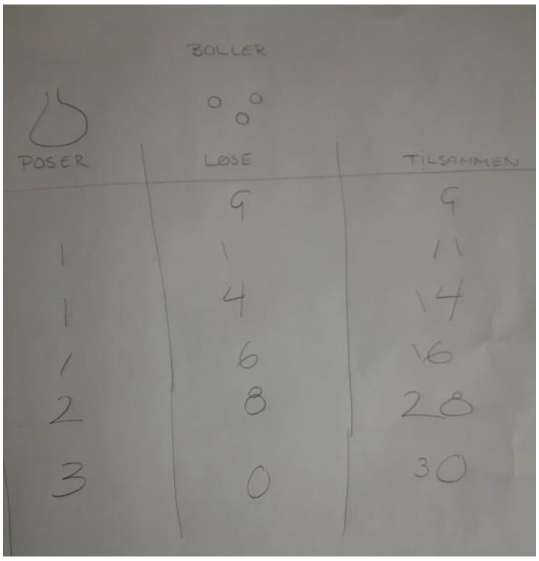
Figur 10: Den epistemologiske trekanten - tetito

Mediering er å veksle mellom representasjoner som alle uttrykker det samme matematiske objektet (Steinbring, 2006). Filip har riktig mediering som det fremgår av transkripsjonen. Eleven har forstått sammenhengen mellom uttale og skrivemåte på tall, noe elevene viser ved begrepet «trettito». Filip viser i transkripsjonen forståelse for begrepet, ved at han sier «trettito», skriver symbolet «32» og har en referansekontekst som representerer 32 elementer. Filip viser begrepskunnskap i arbeidet med «trettito». Som Hiebert & Lefevre (1986) skriver handler begrepskunnskap om kunnskap som er rik på sammenhenger. Filip evner å se sammenhengen mellom muntlig språk, tallsymboler og hva de ulike sifrene betyr. Eleven viser forståelse for skrivemåten av flersifrede tall og er i stand til å forklare hva sifrene i tallet betyr. I utsagn 6 forklarer eleven at 3 – tallet i trettito representerer tiere, mens 2 – tallet representerer løse. Eleven benytter begrepet *tiere* for å forklare den ene posisjonen, men tar i bruk begrepet *løse* for å forklare enerposisjonen. Eleven sier ikke eksplisitt at vi har to enere, men bruker altså ordet *løse* for å beskrive denne posisjonen. Dette kan tyde på at eleven er godt inn i konteksten han arbeider med. Ordet gir mening i konteksten da eleven henviser til to løse eller single perler i arbeidet med konkreter, som representerer boller i observasjonssituasjonen.

4.3 NEDSKRIVING AV TALL

Transkripsjonen nedenfor finner sted rett etter at elevene har begynt å skrive inn antall boller i skjemaet. Nedenfor ligger elevarbeidet og utsagn fra Filip og Mona.

1. Mona: Her er det 14 boller *[Skriver 14 inn i høyre kolonne. Eleven teller så opp 10 perler, putter de i en pose og teller de løse]*. Her er det en pose og 4 løse *[Skriver 1 og 4 inn i riktig kolonne i tabellen]*.
2. Morten: Her er det 16 boller på brettet! *[Eleven har telt en og en bolle på det ene brettet som jeg har tegnet. Skriver 16 inn i høyre kolonne. Finner så frem 16 perler. Teller opp 10 perler, putter disse i en pose, teller så de løse]*. Her er det 1 pose og 6 løse *[Skriver dette inn i tabellen]*.



Figur 11: Elevarbeid – Mona & Morten

Litt senere finner følgende samtale sted:

1. Morten: 30 boller *[Finner frem 30 perler, flytteteller samtlige. Begynner så å organisere ti perler i poser, gjentar dette, og en gang til]*. Det ble 3 poser *[Fører inn i skjemaet]*.
2. Forsker: Hvorfor er det ingen enere her *[Peker på den nederste linjen på elevarbeidet]*?
3. Morten: Det er ingen enere, for vi har gått i banken og vekslet alle enerne til en tierbunt. Da skriver vi en ekstra på tierplassen og null på enerplassen.

Som vi ser på elevarbeidet er alle tallene skrevet riktig og det er en veksling av håndskriften til Mona og Morten på elevarbeidet ovenfor. Under observasjonen så hadde ikke Morten riktig skriveretning på alle sifrene, men riktig skriveretning er noe man kontinuerlig arbeider med i småskolen. Som det fremgår av transkripsjonen teller elevene først totalantall boller på oppgavearket, før de skriver antallet inn i kolonnen til høyre. Deretter begynner de med konkretene, de teller opp riktig antall perler og putter ti og ti i poser, før de teller antall løse. Deretter føres dette inn i tabellen som transkripsjonen viser. Også dette arbeidet med konkreter tilhører abstraksjonsmateriell ifølge Holm (2002).

I arbeidet med å holde oversikt og skrive inn i tabellen benytter Mona og Morten seg av ulike representasjonsregister; naturlig språk og symbolske system (Duval, 2006). I nedskrivingen av tallsymbolene har vi med en omdannelse å gjøre, da det skjer en transformasjon fra ett representasjonsregister til et annet; fra naturlig, muntlig språk til symbolske system i form av tallsymboler. Samtlige omdannelser er vellykkede, da objektet beholder sine egenskaper og sin natur i overgangen fra muntlig språk til tallsymboler. Som skrevet anser jeg konkreter som en del av Duval sin teori. Jeg har valgt å plassere konkreter i representasjonsregisteret som heter ikoniske og ikke – ikoniske representasjoner. I situasjonen ovenfor skjer det en omdannelse fra arbeidet med konkretene til naturlig, muntlig språk. Jeg tolker omdannelsene som ekvivalente transformasjoner, altså at elevene jobber med det samme objektet i ulike representasjonsregister og at objektet opprettholder samme form, derav skjer det en vellykket omdannelse.

I arbeidet med posisjonssystemet skriver Hiebert & Wearne (1992) at det er viktig å hele tiden skape en kobling mellom konkreter, skrevne symboler og muntlig språk. Det er nettopp dette aspektet ved posisjonssystemet som kommer til uttrykk i transkripsjonen og elevarbeidet ovenfor. Elevene arbeider med konkretene på en god måte i forbindelse med posisjonssystemet. De tar videre i bruk et muntlig språk seg imellom og bruker språket for å tydeliggjøre egen forståelse i arbeidet med konkretene. Det skjer en god veksling mellom arbeid med konkreter, bruk av muntlig språk og nedskriving av tallsymboler. Elevene viser også forståelse for koblingen mellom to ulike konkreter; illustrasjonene på oppgavearket og perlene og posene. Elevene beveger seg slik innen samme representasjonsregister da de går fra en type konkreter til en annen, noe som Duval (2006) omtaler som behandling.

Morten viser i transkripsjonen god forståelse for posisjonssystemet. Ved å si *«ingen enere (…) null på enerplassen»* kommer hans forståelse for null som plassholder frem. Han forstår at vi skriver null for å illustrere at det ikke er noen enere i det aktuelle tallet (Krasa & Schunkwiler, 2009). Videre kommer forståelse for den store ideen unitizing til syne da han sier *«alle enerne til en tierbunt»*. Han betrakter slik de ti enerne som en tierbunt (Fosnot & Dolk, 2001). Videre sier eleven *«Da skriver vi en ekstra på tierplassen og null på enerplassen»*. Utsagnet tyder at Morten har god forståelse for overgangen fra ti enere til en tier i skrivemåten av posisjonssystemet. Han forklarer i situasjonen at når man veksler ti enere mot en tier, så skriver man null på enerplassen og «*en ekstra*» på tierplassen. Det siste utsagnet er interessant, da eleven forklarer at man ikke skriver en på tierplassen, men en til. Jeg tolker utsagnet «*en ekstra på tierplassen*» til at eleven tenker at han i utgangspunktet hadde to bolleposer, altså to tiere, så ble de resterende ti enerne til en ny bollepose og da ble det «*en ekstra*» på tierplassen. Morten baserer forklaringen sin på det ene eksemplet, tallet 30. Eleven viser slik forståelse i et konkret eksempel, men generaliserer ikke forklaringen sin til å gjelde alle tilfeller.

Oppgaven elevene skulle gjøre i forbindelse med nedskriving av tall i skjema var å organisere bollene som er illustrert på oppgavearket i bolleposer og løse og føre dette inn i skjemaet. De fire elevene, Morten, Mona, Filip og Trude skulle alle løse denne oppgaven og de arbeidet i par. Jeg erfarte en forskjell mellom Filip og Trude mot Morten og Mona. Både Morten og Mona benyttet seg av konkreter hele tiden. De teller først boller på oppgavearket, finner så frem like mange perler og begynner å bruke disse for å finne ut hvor mange bolleposer og løse boller de får i de ulike tilfellene. Dette er hva Carpenter et. Al (1993) omtaler som direkte modellering. Ved å direkte representere eller modellere problemet kan man finne en løsning skriver Carpenter et. Al (1993) videre. Mona og Morten bruker perlene til å representere antallet boller i oppgaven. De gjenskaper kardinaltallene i et annet materiale og bruker disse konkretene for å løse oppgaven. Siden perlene og posene viser svaret på oppgaven helt konkret, det er bare å se hvor mange poser og løse perler man får og føre dette inni skjemaet på riktig plass, er det direkte modellering som finner sted (Carpenter et. Al, 1993). Trude og Filip var derimot ikke like avhengige av konkreter som Mona og Morten. Trude og Filip begynte også arbeidet på samme måte som elevene i transkripsjonen ovenfor, men disse oppdaget et mønster.

Følgende samtale finner sted litt inn i arbeidet til Trude og Filip:

1. Trude: Det er 28 boller.
2. Filip: Det kan jeg skrive inn. *[Skriver 28 i kolonnen til høyre]*.
3. Trude: *[Begynner å finne frem perler, men blir avbrutt av Filip]*.
4. Filip: Nei, du trenger ikke å ta frem perler for se her! Det tallet som står på tierplassen er likedan som det tallet som står på plassen her *[peker på kolonnen for antall bolleposer]*, og tallet på enerplassen er likedan som de løse

bollene. Sånn er det på alle linjene. Så jeg kan bare skrive 2 her og 8 *her [skriver 2 inn i den fremste kolonnen og 8 i den midterste]*

Som transkripsjonen viser har Filip oppdaget et mønster som han generaliserer. Eleven gjør en generalisering da han sier *«Sånn er det på alle linjene. Så jeg kan bare (...)»*, se utsagn 4. Filip viser tallforståelse i dette utsagnet, da Anghileri (2006) definerer tallforståelse som å gjøre generaliseringer om mønster. Eleven har oppdaget at det fremste sifferet i totalantall boller på et brett er lik det sifferet som står i første kolonne i skjemaet, som representerer antall bolleposer eller tiere. *«Tallet på enerplassen er likedan som de løse bollene»* sier Filip i utsagn 4 og med dette mener han at sifferet på enerplassen i totalantall boller er det samme som står på antall løse boller. Hensikten med skjemaet er å få elevene til å betrakte grupper med ti boller som en gruppe, altså unitizing (Fosnot & Dolk, 2001). Videre skal skjemaet hjelpe elevene til å forstå skrivemåten for flersifrede tall. Enerplassen i et tall representerer enkeltstående objekter, i tilfellet med Bestemors boller er det løse boller. Tierplassen representerer grupper med ti elementer, i vårt tilfelle bolleposer med ti boller i hver pose. Hvis vi skal skrive 28 i titallssystemet så skriver vi ikke 20 på tierplassen, men 2. Totallet representerer to grupper à 10 elementer. På denne måten er unitizing en veldig sentral del av posisjonssystemet, særlig i nedskriving av tall.

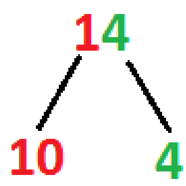
4.4 14 = 10 + 4

1. Forsker: Hvorfor kan vi skrive 1 der *[peker på 1 – tallet i 14]* når det er en pose med 10 boller? Skal det ikke stå 10 i stedet?
2. Mona: Fordi at det står på tierplassen, og det betyr at det er mange sugerør som er samlet sammen til tierbunter.
3. Forsker: Hvor mange sugerør er det i en tierbunt da?
4. Mona: Det er ti. Og når det står 1 der betyr det at bestemor har laget 10 boller.
5. Forsker: Hva betyr firetallet?
6. Mona: Det betyr 4 enere.

Gjennom sine utsagn og handlinger i observasjonssituasjonen gir Mona inntrykk av å ha en solid forståelse for posisjonssystemet da hun viser forståelse for de ulike aspektene for titallssystemet vårt. Transkripsjonen ovenfor tyder på at Mona innehar god forståelse for skrivemåten av flersifrede tall. I ytring 2 viser Mona at hun vet både hvor tierplassen er og hva det betyr å ha et siffer på denne posisjonen, nemlig at sifferet representerer grupper av ti, eller *«tierbunter»* som er hennes begrep. Hennes forklaring om at i en tierbunt samles ti sugerør sammen kan igjen tolkes til å være et tegn på forståelse for unitizing. Fosnot & Dolk (2001) skriver at unitizing er et grunnleggende aspekt for posisjonssystemet.

Duval (2006) sier at når man beveger seg mellom to representasjonsregister så har man med en omdanning å gjøre. I transkripsjonen ovenfor er følgende representasjonsregistrene involvert; naturlig språk og symbolske system. *«14»* er skrevet med tallsymboler og tilhører derfor symbolske system, mens muntlig språk tilhører naturlig språk. I linje 4 forklarer Mona med naturlig muntlig språk hva ettallet i *«14»* betyr og i linje 6 viser hun at hun vet hva det betyr å ha et siffer på enerplassen. Hun omdanner forståelsen fra symbolske system til naturlig språk. Her er det ikke selve objektet, fjorten, som skifter representasjon, men Mona sin forståelse for objektet. Mona får se objektet fjorten skrevet med tallsymboler og svarer på forsker sine spørsmål med muntlig tale. På denne måten skjer det en omdannelse på Mona sin forståelse, fra forståelse for skrevne tall til å uttrykke forståelsen med tale.

Siden vi har et posisjonssystem har sifrene ulike verdier alt etter hvilken posisjon de står i. Dersom et firetall står på enerplassen er det mengden 4 som er representert. Står firetallet derimot på tierplassen betyr det mengden 40. Dette er en egenskap ved posisjonssystemet, at sifferets verdi ikke kommer tydelig frem i skrivemåten av flersifrede tall. Skriver man 14 på utvidet form blir det 14 = 10 + 4, og da kommer sifrenes faktiske verdi mer eksplisitt frem. I omdannelsen fra symbolske system til naturlig språk må det til en ikke – kongruent omdannelse (Duval, 2006). Det er en ikke – kongruent omdannelse som finner sted i linje 4, da Mona forklarer at ettallet betyr 10. Steinbring (2006) skriver i sin artikkel at dersom man ikke har tilstrekkelig med erfaring om et begrep eller symbol, så kan man bruke begrepet eller symbolet uten å ha fullstendig forståelse for det. I transkripsjonen ovenfor viser Mona forståelse for begrepet fjorten. Hun er i stand til å forklare hva de ulike sifrene i tallet betyr og som figur 12 viser, sier eleven at ettallet betyr en tierbunt eller ti objekter mens firetallet betyr fire enere. Dette er et eksempel på begrepskunnskap hos Hiebert & Lefevre (1986).



Figur 12: Utvidet form

4.5 TIER OG ENER

Under observasjonssituasjonen i datainnsamlingsprosessen fikk elevene også arbeide med det kjente konkretiseringsmaterialet de benytter i «*Dagens tall*». Dette konkretiseringsmaterialet består av tre melkekartonger, der hver kartong representerer en posisjon i et tresifret tall. Videre har hver kartong en lapp med tall på for å illustrere antall sugerør i kartongen, se bilde nedenfor. Følgende samtale finner sted i arbeidet med melkekartongene og sugerørene:

1. Filip: Her var det mye rot! Jeg skal ordne det slik vi pleier å ha det. *[Eleven finner frem sugerørene som er spredt utover bordet og tar frem melkekartongene]*. 1-2-3-4-5-6-7-8-9 *[Setter et og et sugerør oppe i enerkartongen etterhvert som han teller]*. Da er enerplassen full *[Eleven har organisert 29 av sugerørene som ligger på bordet, se figur 13]*
2. Forsker: Hvorfor er den full, det er plass til flere sugerør i kartongen?
3. Filip: Ja, men det er bare plass til 9 enere her. Her er et sugerør til *[Finner frem et sugerør til]* og da har vi ti sugerør. Da tar jeg ut alle sugerørene fra her og tar et strikk rundt dem. Nå har jeg ti sugerør i en *tierbunt [Setter tierbunten i tierkartongen]*.
4. Forsker: Hvorfor setter du tierbunten der *[peker på tierkartongen]* og ikke der sugerørene var istad?
5. Filip: For i den kartongen her skal enerne stå. Det er bare plass til 9 enere her. Blir det 10 enere så skal de settes her, for her er tierplassen. Da er det en tier.
6. Forsker: Hva betyr tierplassen?
7. Filip: Det betyr at det er ti sugerør samlet sammen til en bunt. Vi må telle 10 – 20 – 30, i stedet for en og en. Det må vi gjøre der *[peker på enerkartongen]*.

Figur 13: *"Dagens tall"* - 29

Figur 14: *"Dagens tall"* - 30

Transkripsjonen viser at Filip har god forståelse det grunnleggende ved posisjonssystemet. For det første viser eleven i linje 5 kunnskap om hvorfor vi har forskjellige posisjoner. Eleven sier i linje 5 at *«Det er bare plass til 9 enere her»*. Ross (1986) skriver at konvensjonen til kanonisert oppdeling er at ikke flere enn 9 objekter kan bli brukt i en posisjon. Filip forteller så videre at dersom man får ti elementer, så skal det opprettes en ny posisjon. Han sier at man da får *« (...) en tier»*. Filip viser gjennom arbeidet med sugerørene at han har forståelse for overgangen fra ti enere til en tier i utsagnet *« (...) ti sugerør i en tierbunt»*. Som Steinbring

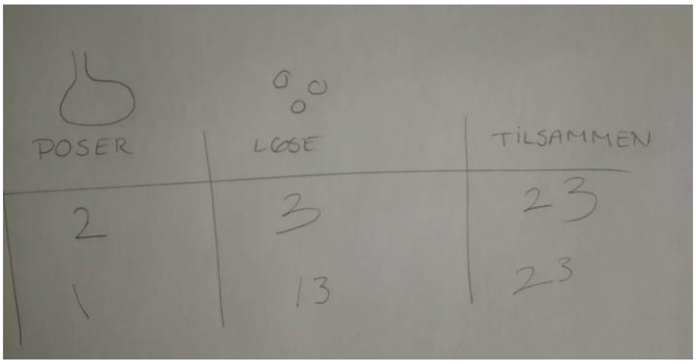
(1997) poengterer er det viktig å ha mange erfaringer med et begrep for å ha fullstendig forståelse for det. Som linje 5 viser har eleven god forståelse for begrepet «tier». Eleven har ikke kun lært seg ordet, uten å ha forståelse for begrepsinnholdet. Eleven viser i transkripsjonen stor forståelse for begrepet. Filip forklarer at det kun er plass til ni enere før man veksler ti enere til en tier. Dette er knyttet til en kanonisert oppdeling av tall (Ross, 1986), at det kun er plass til ni enheter på hver posisjon før vi får en ny posisjon.

I posisjonssystemet er det slik at for hver posisjon mot venstre blir sifferet ti ganger større (Ross, 1986). Filip sier i utsagn 7 at *«(...) må telle 10 – 20 – 30, i stedet for en og en»*. Utsagnet kan tolkes dit at eleven forstår at det er ti ganger større verdi på tierplassen enn på enerplassen. Eleven viser også evne til å telle en og en, som i utsagn 1, men også til å telle i steg, som i linje 7. I utsagn 7 teller riktignok ikke eleven, men sier heller telleramsen med steg på ti. Filip viser slik god telleforståelse. Han er i stand til å telle enkeltobjekter samtidig som han viser at han kan stegtelle. Jones et. Al. (1996) forklarer at telling er et sentralt aspekt i forståelsen for posisjonssystemet og påpeker at elevene er avhengige av å både kunne telle med en og en av gangen og telle i steg. Kombinasjonen av de to tellemåtene er helt nødvendig for å kunne bruke posisjonssystemet fleksibelt (Jones et. Al., 1996). Filip viser i transkripsjonen ovenfor kun forståelse for hver av tellemåtene og ikke de to tellemåtene i kombinasjon.

Begrepene eleven arbeider med i situasjonen er ener og tier. Han tar utgangspunkt i konkretiseringsmaterialet som klassen arbeider med daglig, nemlig sugerør og «*dagens tall*» - kartongen. Eleven benytter ikke noen tegn i situasjonen, da Filip kun bruker muntlig språk. Eleven benytter konkretiseringsmaterialet til å snakke ut fra og med det vise sin forståelse for posisjonssystemet.

4.6 DEL – HEL

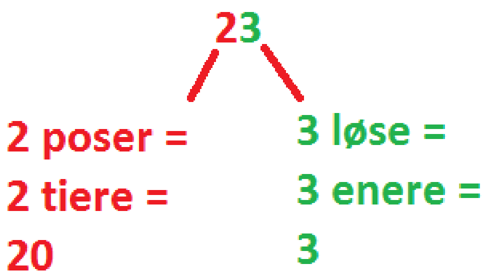
1. Forsker: Hvordan kan vi pakke 23 boller?
2. Trude: Det kan være 3 løse og 2 poser *[Skriver inn dette i skjemaet]*
3. Forsker: Bra! Det er en mulighet, er det flere?
4. Morten: *[Tar frem 23 perler, legger 10 av dem i en pose og teller opp de løse]*. Det kan også være en bollepose og 13 løse *[Fører dette inn i skjemaet]*
5. Trude: Men vi skulle jo ha 10 boller i en pose, og i 13 så får vi en bollepose og 3 løse, for 3 pluss 10 er 13.



Figur 15: Elevarbeid – Trude & Morten

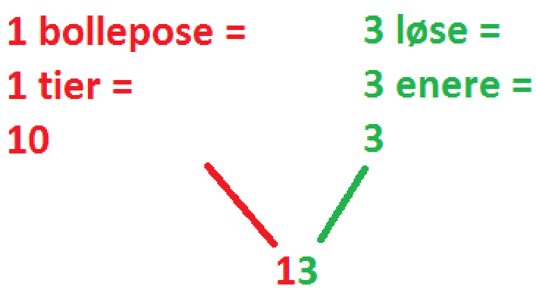
I transkripsjonen ovenfor kommer et aspekt ved posisjonssystemet til uttrykk; forståelse for del – hel. Elevene viser forståelse for at et tall kan deles opp og at delene kan settes sammen til en helhet. Linje 2 tyder på en kanonisert oppdeling av 23 fra Trude, 3+20=23. I linje 4 kommer Morten med et forslag om å dele opp 23 på en ikke – kanonisert måte, noe som Trude ikke godtar. Hun sier at i konteksten er vi blitt enige om å ha ti boller i en pose og at 13 boller da gir en pose og tre løse, se linje 5. I utsagnet *«i 13 så får vi en bollepose og 3 løse»* har eleven delt opp tallet 13 i en tier og tre enere, altså 13=10+3. *«3 pluss 10 er 13»* her setter Trude delene sammen til en helhet, 3+10=13.

Hughes (1986) forklarer del – hel – aspektet med at eleven må kunne se et tall som en helhet og samtidig skjønne hvordan dette tallet kan bli delt opp i deler. Videre er det ikke nok å kun være i stand til å dele opp tall i deler, man må samtidig kunne sette sammen delene og vite at summen av delene blir helheten. Jones et. Al. (1996) bruker begrepet oppdeling om dette aspektet og anser oppdeling som en nødvendighet for å forstå posisjonssystemet fullstendig. Trude viser forståelse for både å dele opp et tall og å sette delene sammen til en helhet, som i ytring 2 og 5. I ytring 2 sier eleven ikke eksplisitt at 23 kan deles opp i 3 og 20, men hun forklarer denne kanoniserte oppdelingen ut fra konteksten med utsagnet *«3 løse og 2 poser»*. Siden elevene har blitt enige om å ha ti boller i en bollepose betyr utsagnet *«3 løse og 2 poser»* tre løse boller (enere) og 2 bolleposer (tiere), og da får vi følgende oppdeling av 23:



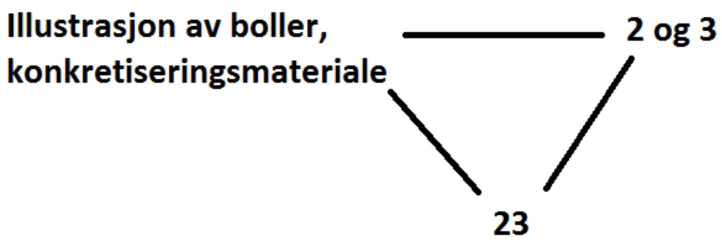
Figur 16: Utvidet form

Eleven sier i utsagn 5 *«13 så får vi en bollepose og 3 løse, for 3 pluss 10 er 13»*. Illustrert med en figur vil dette utsagnet kunne tolkes til å sette sammen en bollepose (tier) og tre løse (enere) til helheten 13:



Figur 17: Deler til en helhet

I situasjonen som transkripsjonen viser et utdrag fra skjer det en omdannelse fra muntlig språk til nedskriving av tallsymboler. I linje 2 kommer Trude med et forslag til oppdeling av 23 i form av muntlig språk, før hun skriver inn forslaget i tabellen med tallsymboler. Tallene er skrevet riktig som man ser på elevarbeidet, slik at Trudes omdannelse er vellykket. I linje 4 gjør Morten først en overgang fra konkreter til muntlig språk, før også han gjennomfører en vellykket omdannelse til symbolske system. Med Steinbring (2006) sin epistemologiske trekant vil begrepet elevene arbeider med være «tjuetre». Referansekonteksten vil være illustrasjonene av bollene og konkretene, mens tegnene vil være tallsymbolene 2 og 3, se figur 18. Som elevarbeidet og transkripsjonen viser gjennomfører både Trude og Morten vellykkede omdannelser omkring begrepet «tjuetre».



Figur 18: Den epistemologiske trekanten - tjuetre

5 DISKUSJON

I analyse – og drøftingskapittelet har jeg presentert funnene jeg har gjort i innsamlingsprosessen og drøftet funnene opp mot den utvalgte teorien presentert i teorikapittelet. Ved å tolke disse funnene og drøftingene i metaperspektiv vil jeg kunne gi svar på forskningsspørsmålet mitt; *Hvilke aspekter for posisjonssystemet viser et utvalg førsteklassinger forståelse for i arbeidet med «dagens tall» og et åpent opplegg? Hvilke transformasjoner mellom semiotiske representasjoner finner sted og på hvilken måte er de vellykkede?*

5.1 ASPEKTER VED POSISJONSSYSTEMET

I analyse – og drøftingskapittelet har jeg sett på de ulike aspektene ved posisjonssystemet og hvordan disse kommer til syne i arbeidet med det åpne opplegget Bestemors boller og arbeid med konkretiseringsmateriellet til *«dagens tall»*. Jeg vil nå med metaperspektiv se på de fire aspektene for posisjonssystemet og hvordan de kommer til uttrykk hos de fire deltakerne i studien.

5.1.1 Kombinere tellemåter

Anghileri (2006) skriver at telling danner grunnlaget for tallforståelse og utvikling av strategier. Det fins ulike strategier innen telling, hvor det er varierende hvor effektiv strategiene er. Den tellestrategien barn begynner med er å telle en og en (Jones et. Al, 1996). Dette er en tidkrevende prosess og i begynnelsen vil ofte elevene ikke telle alle objektene eller telle samme objekt flere ganger, noe som skyldes at det ikke er samsvar mellom «tellefinger» og tallord. Barna har med andre ord ikke kontroll på hvilke objekter de har telt og ikke. Anghileri (2006) skriver at et steg i telleutviklingen er å kunne begynne på hvilket som helst tall og telle videre fra dette. I min studie begynner alle deltakerne tellingen fra en.

I den første transkripsjonen viser Mona at hun har evne til å telle et og et objekt av gangen. Videre sier hun tallordene høyt og viser at hun behersker telleremsen opp til og med 16. Hun peketeller, noe som betyr at hun bruker fingeren for å peke på det objektet hun teller, altså sier telleordene mens hun flytter fingeren fra objekt til objekt. Hun viser slik at hun innehar en – til – en – korrespondanse, ved at hun vet at hvert tallord tilsvarer et objekt og flytter fingeren sin i takt til dette. Å peketelle er en strategi for å vite hvilke objekter man har telt. En annen strategi for å holde kontroll på telte og ikke – telte mengder er flyttetelling. I transkripsjonen hvor Mona og Morten skriver inn tall i skjemaet benytter Morten seg av denne strategien, se kapittel 4.3. Med flyttetelling mener jeg at for hvert objekt eleven teller så flytter han perlen til en ny haug. Dette er som sagn nok en strategi for å holde kontroll på hvilke objekter som er telt og hvilke som enda mangler og skal telles. Anghileri (2006) forklarer at i telling vil ordinaltallene bety at man har kunnskap om hvilke tall man har telt og hvilke tall som står igjen. Vi kan si at Morten viser forståelse for ordinaltall i situasjonen.

Filip viser i datamaterialet både evne til å telle et og et objekt, men også å telle i steg med ti av gangen. I delkapittel 4.5 viser Filip telling med en av gangen i forbindelse med organisering av sugerør i *«dagens tall»*. For å kunne forstå posisjonssystemet fullt ut må elevene også kunne telle i hopp skriver Jones et. Al (1996). Å telle i hopp, eller stegtelling som det også blir kalt, handler om å telle med flere enn en om gangen. Vanligst er det å telle i steg på 2, 5 og 10. Filip sier *«Vi må telle 10 – 20 – 30, i stedet for en og en»*. Dette utsagnet viser stegtelling med ti av gangen.

Jones et. Al (1996) skriver at elevene må kunne telle i hopp på en og en, men også steg – telle og kunne kombinere disse to tellemåtene. I delkapittel 4.2 teller Filip på følgende måte *«1 – 2 – 12 – 22 – 32»*. Han teller altså først et og et objekt for så å telle i steg med ti av gangen. Det er denne kombinasjonen av tellemåter som er nødvendig i arbeidet med posisjonssystemet. Grunnen til at det er nødvendig å kunne telle i steg på ti og en og en er for å lette tellingen. Ved å gruppere i tiere går tellingen raskere fremfor å telle enkeltobjekter.

5.1.2 Unitizing

Posisjonssystemet krever den store ideen unitizing, som omhandler å betrakte ti som en gruppe og bruke ti som grunnenhet (Fosnot og Dolk, 2001). Alle de fire deltakerne i studien min formidler forståelse for unitizing, men på varierende måte. Jeg vil nå presentere hvordan de fire deltakerne i studien fremmer sin forståelse for unitizing.

5.1.2.1 Mona

Mona sin forståelse for unitizing kommer til uttrykk i delkapittel 4.1 og 4.4. I den første transkripsjonen sier Mona *«I posen er det 10 boller»*. Her behandler eleven de ti elementene i posen som en enhet, som en pose. I forbindelse med at Mona tegner posene med boller så sier hun *«Jeg orker ikke å tegne dem (bollene), for jeg vet at det er 10 (boller) i posene»*. Her sier eleven at hun velger å ikke tegne de ti enkeltobjektene som er inne i posen for det er tidkrevende og for at hun vet at det er ti stykker i hver pose. Indirekte kan dette tolkes som at eleven betrakter de ti objektene som en tier, noe som er unitizing (Fosnot og Dolk, 2001).

I situasjon 4.4 benytter Mona begrepet tierplass og tierbunt. Hun forklarer at dersom et siffer står på tierplassen så er det ti sugerør som er samlet til en tierbunt. Dette er nettopp hva unitizing handler om, å betrakte ti elementer som en gruppe. Videre viser eleven forståelse for skrivemåten av flersifrede tall da hun sier *«Og når det står 1 der betyr det at bestemor har laget 10 boller»*. Indirekte kan utsagnet tolkes dit at Mona vet at ettallet på tierplassen betyr en gruppe med ti i. Mona viser forståelse for unitizing på ulike måter, både gjennom utsagn og elevarbeid.

5.1.2.2 Filip

Filip sier i et utsagn i situasjon 4.2 at *«3 – tallet betyr at vi har tre tiere (...)».* Her benytter eleven seg av begrepet tiere og ytringen viser at Filip er i stand til å forklare hva et siffer på tierplassen betyr. Vi kan diskutere hvor stor forståelse for unitizing eleven faktisk har. Siden eleven kun benytter begrepet tiere uten å gi uttrykk for kunnskap om at tiere betyr grupper med ti elementer i, tolker jeg elevens forståelse til å kun ha kunnskap om isolerte fakta. Filip sin forståelse for hva tre tiere faktisk betyr kan knyttes til prosedyrekunnskap. Som Hiebert og Lefevre (1986) skriver handler prosedyrekunnskap om kunnskap hvor man ikke ser sammenhenger og mangler en dyp forståelse for det matematiske bak en prosedyre eller begrep. Hiebert og Lefevre (1986) deler prosedyrekunnskap i to og den som er aktuell i Filip sitt tilfelle er den som omhandler representasjoner, symboler, og språk og hva de betyr.

Jeg tolker Filip sitt utsagn til at han har lært seg at posisjonen til venstre i et tosifret tall representerer tiere. Han har lært seg begrepet, men har nødvendigvis ikke forståelse for hva begrepet betyr. Siden eleven ikke sier eksplisitt at tiere betyr grupper med ti og heller ikke arbeidet hans tyder på fullstendig forståelse for begrepet tiere, tolker jeg som sagt elevens utsagn i delkapittel 4.2 som isolert kunnskap om tiere. Eleven har kun lært begrepet, ikke det matematiske innholdet bak det. Filip har prosedyrekunnskap om begrepet, da denne kunnskapen kjennetegnes av å kun være knyttet til å bruke et begrep (Hiebert og Lefevre, 1986). Filip har lært seg at dersom han sier at det er tiere i posisjonen lengst til venstre i tosifrede tall får man riktig svar. Slik vil prosedyrekunnskap kunne lure lærere, ved at eleven svarer det læreren ønsker på spørsmål. Dersom lærere ber elevene utdype forståelsen sin og ber elevene forklare hva tiere betyr, kommer det tydeligere frem om elevene har begrepskunnskap eller prosedyrekunnskap. Som Hiebert & Lefevre (1986) skriver er skillet mellom begrepskunnskap og prosedyrekunnskap i skillet mellom forståelse og ferdighet.

5.1.2.3 Morten

Delkapittel 4.3 omhandler Morten sin forståelse av unitizing. Morten forklarer hvorfor det ikke er noen enere i tretti ved å bruke strofen «*gått i banken og veksle*». Utsagnet *«veksle i banken»* er et interessant utsagn. Strofen stammer fra læreren i det daglige arbeidet med «*dagens tall*». Læreren til Morten bruker strofen for å signalisere at en tier er ekvivalent med ti enere. Morten viser selvstendig bruk av strofen og viser forståelse for hva strofen faktisk betyr, at det er ekvivalente mengder. I utsagnet *«Det er ingen enere, for vi har gått i banken og vekslet alle enerne til en tierbunt»* kommer det ikke eksplisitt frem at det er ti enere i en tierbunt. I elevarbeidet viser Morten forståelse for at i hver pose skal det være ti perler og ut fra elevarbeidet, sammen med utsagnet utenfor, tolker jeg at Morten har forståelse for unitizing. Gjennom transkripsjonen i kapittelet viser Morten at han vet at ti enere samles til en tier og at det er ekvivalente mengder. Morten har også forståelse for at når man veksler ti enere til en tier så blir skrivemåten på tallet også endret. Morten sier at man skriver null på enerplassen etter vekslingen og *«en ekstra på tierplassen»*. Han viser slik forståelse for at det blir en tier mer etter vekslingen og at man da skriver en mer på tierplassen.

5.1.2.4 Trude

Trude viser stor forståelse for at det alltid skal være *«10 boller i en pose»,* som hun sier i delkapittel 4.6. Trude deler både 23 og 13 opp i kanoniserte deler og sier i arbeidet med 23 at *«Det kan være 3 løse og 2 poser»*. Da hun sier to poser og senere poengterer at det skal være ti boller i hver pose, viser Trude forståelse for unitizing. Som Fosnot & Dolk (2001) skriver handler unitizing om å betrakte ti elementer som en gruppe. Ved at Trude sier *«2 poser»* mener hun 20 elementer, altså to tiere. Eleven benytter seg ikke av begrepet tiere, men bruker termen poser. Begrepet gir mening i konteksten og arbeidet med bollene, perlene og posene.

5.1.3 Del – hel – aspekt

Forståelse for oppdeling eller del – hel – tenkning er viktig i arbeidet med posisjonssystemet (Ross, 1986; Jones et. Al, 1996). Hughes (1986) forklarer del – hel – aspektet med at eleven må kunne se et tall som en helhet og samtidig skjønne hvordan dette tallet kan bli delt opp i deler. Videre er det ikke nok å kun være i stand til å dele opp tall i deler, man må samtidig kunne sette sammen delene til en helhet. Ross (1986) skriver at det er nødvendig at elevene er i stand til å se på tosifrede tall som summen av delene. Forståelsen for del – hel – tenkning er vanligvis begrenset til kanonisert oppdeling av flersifrede tall i de første skoleår (Ross, 1986). Transkripsjonene viser liten grad av evne for aspektet del – hel, men i kapittel 4.1 og 4.6 fremmes denne egenskapen i arbeidet med posisjonssystemet.

Mona viser forståelse for aspektet i kapittel 4.1 hvor hun forteller hvilken mengde hun mangler for å få en tier. Å kjenne til tallkombinasjoner som gir ti til sum omtaler Baroody (2006) som grunnleggende tallfakta. Eleven sier *«(...) 6 løse. Da mangler jeg bare 4 så kan jeg lage en pose til»* og jeg tolker dette utsagnet dit at hun har forståelse for at en helhet kan deles opp og at summen av delene gir helheten (Ross, 1986). Oversatt til tallsymboler vil elevens utsagn være 6+4=10, som viser at eleven forstår at de to delene 6 og 4 gir «*en pose*», som i dette tilfellet er synonymt med ti. Begrepet *«en pose»* gir mening ut fra konteksten ved at begrepet representerer en pose med ti boller i, en tier.

Trude viser forståelse for å dele opp et tall i delkapittel 4.6. Elevene jobber med å dele opp 23 på ulike måter og da sier Trude «*Det kan være 3 løse og 2 poser*». I dette utsagnet sier eleven egentlig at 23 er det samme som tre enere og to tiere, notert med tallsymboler 23=3+20. Her viser eleven forståelse for at helheten, 23, kan deles opp i to deler. Dette er et eksempel på del – hel – tenkning i kanonisert oppdeling. Linje 5 i transkripsjonen viser at Trude også har forståelse for at to deler kan settes sammen til en helhet. I linje 5 sier eleven *«(...) 13 så får vi 1 bollepose og 3 løse, for 3 pluss 10 er 13»*. Trude sier helt direkte at 3+10=13 og har forståelse for at to deler kan settes sammen til en helhet.

Trude viser at hun forstår at 23 kan deles opp og at tre og ti gir til sammen tretten. Hennes del – hel – tenkning er knyttet til kanonisert oppdeling av tall. I linje 4 i situasjonen foreslår Morten å dele opp 23 i en tier og tretten enere. Dette er et eksempel på oppdeling av helheten i ikke – kanoniserte deler. Denne oppdelingen godtar ikke Trude, da hun ikke godtar flere enn ni elementer på hver posisjon. Denne begrensningen i forståelsen er beskrevet som en vanlig begrensning ved førsteklassingers forståelse (Ross, 1986).

5.1.4 Den begrepsmessige siden – språk, symbol og ord

Fuson & Briars (1990) skriver i sin artikkel at en nødvendighet for å kunne benytte posisjonssystemet på en korrekt og fleksibel måte er det viktig å kjenne sammenhengen mellom tallordene og tallsymbolene. I kapittel 4.2 blir nettopp forholdet mellom tallord og tallsymbol problematisert. Trude skal skrive trettito og skriver 302. Som Steinbring (1997) sin epistemologiske trekant og hans teori viser, blir det ikke en vellykket mediering i Trude sitt tilfelle, da det matematiske objektet ikke beholder sin natur i de tre formene symbol, begrep og referansekontekst. Eleven benytter en kongruent omdannelse i en situasjon som krever en ikke – kongruent omdannelse (Duval, 2006). Dette betyr at Trude direkte overfører det muntlige språket til tallsymboler og skriver først tretti, deretter to, og slik får vi skrivemåten *«302»*. Krasa & Schunkwiler (2009) skriver at mange barn har problemer med å forstå null som plassholder og generelt har problemer med å forstå tallet og mengden null. Trude viser ikke manglende forståelse for null som posisjonsnotasjon, da det ikke er dette som forårsaker skrivefeilen. Skrivefeilen skyldes misforholdet mellom begrep og symbol. Butterworth (1999) poengterer at det norske språket ikke hjelper barn som skal lære seg koblingen mellom tallord og tallsymbol. Miura et. Al. (1993) forklarer at flere asiatiske språk har et språk som er nærere knyttet opp mot skrivemåten av tallsymbolene, ved at de fokuserer på titallsbasen. Det norske språket har derimot ulike ord for tierenhetene og dette forårsaker mange misforhold mellom ord og symbol, som i Trude sitt tilfelle.

Deltakerne i studien benytter ulike begreper for de fastsatte begrepene tiere og enere. Elevene sier blant annet tierbunt, pose og løse. Dette er ord som er nært knyttet opp til konkretene som benyttes i observasjonssituasjonen. Mona sier i kapittel 4.1 *«Det er en pose og 6 løse»*. I Mona sitt tilfelle er pose synonymt med tier, ved at elevene på forhånd er blitt enige om at i en pose skal det være ti boller, altså ti elementer. *En pose* betyr en tier, altså ti objekter. Videre betyr *6 løse* seks enkeltobjekter, altså enere. De bollene som ikke pakkes i poser blir kalt for løse. Flere av barna benytter seg av bruken av nettopp disse begrepene, som Filip i kapittel 4.2 og Morten i 4.3. Dette viser hvor lett det er for elevene å leve seg inn i det åpne opplegget og finne egne begreper som gir mening ut fra konteksten. Som Hiebert & Wearne

(1992) skriver er det viktig å hele tiden skape en kobling mellom konkreter, skrevne symboler og muntlig språk, og det er nettopp denne koblingen jeg syns kommer godt frem i eksempelet med Filip og Morten. Videre sier Filip *«3 – tallet betyr at vi har tre tiere, og 2 betyr to løse»* og bruker slik både et kjent begrep og et selvlaget begrep i ett og samme utsagn.

Morten i 4.3 sier *«Det er ingen enere, for vi har gått i banken og vekslet alle enerne til en tierbunt»*. Også Filip bruker begrepet tierbunt og forklarer hva dette betyr i kapittel 4.5. *Tierbunt* refereres til en bunt med ti sugerør som er knyttet til konkretene i arbeidet med *«dagens tall»*. Unitizing heter ideen om å betrakte ti elementer som en gruppe og det er nettopp dette elevene gjør i begrepet tierbunt. «*(...) gått i banken og vekslet*» er en veldig interessant strofe. Morten sammenligner vekslingen med ti løse sugerør til en tierbunt med veksling i banken. Videre får utsagnet frem ekvivalensen i verdi mellom en tier og ti enere, ved at veksling i banken forbindes med ekvivalens. Strofen er hentet fra arbeidet med «*dagens tall*», hvor lærer bruker den for å få elevene til å forstå at det er like store mengder man opererer med, kun at enheten er ulik. Eleven kan bruke strofen uten å ha forståelse for den matematiske ekvivalensen som ligger bak begrepet, såkalt prosedyrekunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986). Ser man på hele utsagn 3 i samme transkripsjon sier Morten videre *«Da skriver vi en ekstra på tierplassen og null på enerplassen»*. Dette utsagnet sammen med strofen om veksling i banken gjør at jeg tolker elevens kunnskap til begrepskunnskap. Begrepskunnskap kjennetegnes som et nett av kunnskap der sammenhenger er vel så fremtredende som de små informasjonsbitene (Hiebert & Lefevre, 1986). Jeg syns Morten i kapittel 4.3 viser forståelse og koblinger mellom de ulike informasjonsbitene. Eleven er i stand til å forklare at ved en veksling fra ti enere til en tier, blir det forandringer i skrivemåten av tallet; *«Da skriver vi en ekstra på tierplassen og null på enerplassen»*, og det er denne evnen til å forklare som gjør at jeg tolker dette til begrepskunnskap.

5.2 OVERGANGER

Duval (2006) skriver at ulike representasjoner har ulikt potensial og hver representasjon kan komme med ulike bidrag til forståelsen. Ingen representasjon kan alene dekke alle aspekt ved et begrep og det er nettopp derfor vi er nødt til å bruke forskjellige representasjoner for å kunne dekke konseptet så godt som mulig (Duval, 2006). Steinbring (2006) forklarer at for å skape den forståelsen som konvensjonen har bestemt, må elevene få rike og varierte erfaringer slik at de tilegner begrepsinnholdet riktig innhold. Ettersom elevene får erfaringer vil de assosiere tegn og ting til begrepet på riktig måte og da vil det være balanse mellom de tre hjørnene i den epistemologiske trekanten (Steinbring, 2006). Det er samspillet mellom ulike representasjoner som skal hjelpe elevene å forstå, men forståelse kommer ikke før elevene knytter de ulike representasjonene sammen. I følge Duval (2006) er man nødt til å jobbe med et matematisk objekt innen flere systemer, men det som er helt avgjørende i arbeid med ulike semiotiske system er å kunne skifte mellom representasjonsregister og beholde naturen til det matematiske objektet.

I datamaterialet skjer det både behandling og omdannelse, som er de to overgangene som Duval (2006) skiller mellom. Behandling er overganger innad i samme register, mens omdannelse er overgang mellom ulike systemer (Duval, 2006). Det skjer til sammen seks overganger i studien min: behandling innad konkreter, behandling innad naturlig språk, omdannelse fra konkreter til symbolske system, omdannelse fra konkreter til naturlig språk, omdannelse fra naturlig språk til symbolske system og omdannelse fra symbolske system til naturlig språk. Jeg vil nå se på hvordan de ulike overgangene kommer til uttrykk i datamaterialet og om elevene behersker de ulike overgangene like godt eller om noen typer overganger byr på større problemer.

5.2.1 Behandling innad konkreter

I situasjon 4.1 skjer det en behandling, siden Mona først arbeider med konkreter i form av perler og plastpose før hun så lager en tegning av det. Vi er i det registeret som Duval (2006) omtaler som ikoniske og ikke – ikoniske og det skjer en behandling innad i dette registeret siden eleven transformerer mellom to ulike former for konkreter. Som Holm (2002) skriver vil konkreter være ting som elevene kan manipulere og ta på. Perlene og plastposene vil slik være konkreter siden dette er fysiske gjenstander som elevene kan se og ta på. Så foretar Mona en behandling til tegning. En tegning skiller seg fra de første konkretene ved at den ikke kan tas og føles på. Holm (2002) omtaler tegning som *halvkonkret*. Tegningen er forskjellig fra perlene og posen siden den ikke kan tas på og flyttes, men den er fortsatt gjenkjennbar. Eleven velger også å effektivisere i overgangen til tegning. Eleven sier *«Jeg orker ikke å tegne dem, for jeg vet at det er 10 i posene»*, og elevarbeidet viser at Mona tegner en lukket pose og seks enkeltstående objekter. Selv om eleven har valgt å effektivisere i prosessen med å tegne konkretene så er dette en behandling, da det er det samme objektet, nemlig seksten, som blir representert på to ulike måter.

Med Steinbring (2006) sin epistemologiske trekant vil det være samsvar mellom de tre hjørnene, hvor begrepet er «seksten», symbolet er «16» og referansekonteksten er konkreter i form av perler. Mona viser gjennom sitt arbeid forståelse for begrepet seksten ved å representere det i ulike konkreter samtidig som begrepet beholder sin natur. Vi kan slik si at Mona har foretatt en vellykket mediering av begrepet seksten.

5.2.2 Behandling innad naturlig språk

I kapittel 4.2 transformerer Filip begrepet trettito fra muntlig språk til skriftlig språk. Da det skjer en overgang innad i det representasjonsregisteret som heter naturlig språk, er det en behandling som finner sted. Som det fremgår av transkripsjonen sier Filip trettito med muntlig språk før han skriver *«tetito»*. I prosessen med behandlinger er det matematiske objektet representert på lignende måter, noe som gjør at elevene lettere er i stand til å kjenne igjen objektet, skriver Duval (2006). Filip viser forståelse for sammenhengen mellom uttale og skrivemåten av tallord. Det skjer en vellykket behandling siden objektet, som i kapittel 4.2 er trettito, beholder sin natur i begge formene det opptrer. Filip viser forståelse for begrepet da han er i stand til å skrive det med både ord og symboler. Han representerer begrepet først med konkreter, før han nedskriver begrepet med naturlig språk, i form av bokstaver. Avslutningsvis skjer det en omdannelse til symbolske system da Filip skriver trettito med tallsymboler.

5.2.3 Omdannelse fra konkreter til symbolske system

Omdannelser er, ifølge Duval (2006), en transformasjon som er mer kompleks enn behandlinger og dette skyldes at et skifte av system krever gjenkjennelse av det samme objektet i to ulike representasjoner. Innholdet kan i noen tilfeller være veldig forskjellige i de ulike representasjonene. Dette kan gi vanskeligheter med å gjenkjenne objektet (Duval, 2006). I datamaterialet skjer det en omdannelse fra konkreter, som jeg har valgt å plassere i registeret med ikoniske og ikke – ikoniske representasjoner, til tallsymboler som tilhører registeret symbolske system. I kapittel 4. 1 arbeidet Mona med seksten perler. Disse organiserer hun i en plastpose, altså en tier, og 6 løse, som tilsvarer enere. Deretter tegner eleven en pose og 6 løse. Vedsiden av tegningen skriver eleven seksten med tallsymboler og Mona omdanner slik konkretene til tallsymboler. Det er ikke enkelt å se koblingen mellom tegningen og tallsymbolet, særlig ikke da eleven har valgt å effektivisere tegningen ved å tegne en «lukket» pose. Som tegningen ser ut er det en pose og 6 løse. Det som ikke kommer tydelig frem på tegningen er at posen inneholder ti elementer. Ser man på transkripsjonen samtidig som man ser tegningen, kommer det tydelig frem at for eleven er posen en tier, hun bare *«(...) orker ikke å tegne dem, for jeg vet at det er 10 i posene»*.

5.2.4 Omdannelse fra naturlig språk til konkreter

Både kapittel 4.1 og 4.3 gir eksempler på situasjoner hvor begrepet er seksten. Mona og Morten jobber med seksten konkreter i hver sin situasjon og begge situasjonene gir eksempler på overgang fra naturlig språk til konkreter. Vi har med omdannelser å gjøre.

I 4.1 bruker Mona først illustrasjonen på oppgavearket til å finne totalantall boller, før hun sier *«Her er det 16 boller»*. Hun representerer slik begrepet seksten i naturlig språk. Deretter representerer hun antallet i konkreter. Eleven finner frem nøyaktig 16 perler og noen plastposer. Perlene organiserer hun så i poser med ti i og seks løse, som arbeidet i transkripsjonen viser. Vi kan slik snakke om en vellykket omdannelse fra naturlig, muntlig språk til konkreter. Hun foretar så en behandling med konkretene, ved å gå fra å representere begrepet med perler til tegning.

I kapittel 4.3 skjer det en veksling mellom konkreter og naturlig språk. Først teller Mona og Morten opp antall boller på illustrasjonen på oppgavearket og sier totalantallet høyt. Vi befinner oss slik i registeret som heter naturlig språk. Så finner elevene frem tilsvarende mange konkreter, i form av perler. Perlene organiseres så i poser med ti i og ellers løse. Elevene sier så løsningen høyt, som Morten i linje 2 i transkripsjonen *«Her er det 1 pose og 6 løse»*. Her er vi tilbake til muntlig språk, som tilhører registeret naturlig språk. Det matematiske objektet beholder sin natur arbeidet til begge elevene. Elevene har forståelse for objektet i ulike register, til tross for at omdannelser kan gjøre det vanskelig for elever å kjenne igjen objektet (Duval, 2006).

5.2.5 Omdannelse fra naturlig språk til symbolske system

I kapittel 4.2 skjer det en omdannelse da eleven skifter representasjonsregister fra naturlig språk til symbolske system (Duval, 2006). I utgangspunktet er trettito gitt med representasjonsregisteret naturlig språk, så skal Trude skrive ned tallet med symboler. Eleven gir en kongruent omdannelse i en situasjon som krever en ikke – kongruent omdannelse. Duval (2006) forklarer at i en kongruent omdannelse er det en – til – en – relasjon mellom komponentene i de to representasjonene. Butterworth (1999) skriver at tallordene over 20 ikke har noen tydelig kobling mellom skrivemåte og uttale, det er derfor ikke – kongruente omdannelser for tallord og tallsymbol over 20. Trettito er et sammensatt ord, tretti og to. Trude velger å gi en kongruent omdannelse, hvor hun først omdanner *tretti* fra muntlig språk til tallsymbol, før hun gjentar prosessen med *to*. Dette resulterer i 302, som vi leser trehundredeogto. I samme kapittel viser derimot Filip at han vet at det er en ikke – kongruent omdannelse som skal til da han beveger seg fra muntlig språk til tallsymboler. Trettito beholder sin natur i representasjonsregistrene naturlig språk og symbolske system (Duval, 2006) i Filip sitt arbeid.

Morten og Mona jobber med å skrive inn antall bolleposer og antall løse boller i tabellen i kapittel 4.3. Elevene bruker det muntlige språket for å telle opp antall boller og bruker språket i arbeidet med konkreter, før de skriver ned organiseringen av boller inn i tabellen. I nedskrivingen tar elevene i bruk tallsymboler, som tilhører registeret symbolske system. Morten sier *«Her er det 16 boller på brettet (...) Her er det 1 pose og 6 løse»* før han skriver dette inn i tabellen med tallsymboler. Morten skriver både 16, 1 og 6 inn i riktig kolonne i tabellen og siden eleven gjennomfører en vellykket kongruent omdannelse, viser han kunnskap om det samme objektet i ulike representasjonsregister. Som det fremgår av elevarbeidet og transkripsjonen i 4.3 skjer det vellykkede omdannelser både hos Morten med 16 og Mona med 14.

Både Morten, Mona og Filip er i stand til å bevege seg fra naturlig språk til symbolske system. Det er kun Trude som har vanskeligheter med denne overgangen. Som Duval (2006) skriver vil omdannelser være mer krevende for elevene enn behandlinger, da det kan være vanskeligere å kjenne igjen ett og samme objekt i ulike representasjonsregister fremfor samme representasjonsregister. Butterworth (1999) skriver at det ikke er noen en – til – en –

korrespondanse mellom tallord og tallsymbol i tall over 20. Ut fra Duval (2006) sin teori ser man at når det ikke er en – til – en – korrespondanse mellom komponentene krever det en ikke – kongruent omdannelse. Trude har ikke forståelse for mangelen på korrespondanse mellom komponentene og velger derfor kongruent omdannelse, noe som blir feil i hennes arbeid.

5.2.6 Omdannelse fra symbolske system til naturlig språk

I kapittel 4.4 forklarer Mona hva de ulike sifrene i 14 betyr. I forklaringen skjer det en overgang fra det skrevne tallsymbolet til hennes muntlige forklaring. Vi har med en omdannelse å gjøre siden vi forflytter oss fra symbolske system til naturlig språk. Gjennom transkripsjonen viser Mona stor forståelse for skrivemåten av tosifrede tall. Mona forklarer at det bakerste sifferet betyr enere, mens et tall på tierplassen betyr en samling av ti elementer. Eleven viser slik forståelse for unitizing samtidig som hun foretar en omdannelse. Som Steinbring (2006) poengterer er det viktig å ha forståelse for både symbolet og begrepet for å ha et fullstendig begrepsinnhold. Mona viser dyp forståelse for hva de ulike sifrene betyr, noe som gir begrepsforståelse (Hiebert & Lefevre, 1986).

5.2.7 Overganger – enkelt eller ikke?

Etter å ha sett på de seks overgangene som finner sted i datamaterialet mitt ser jeg at elevene behersker både behandlinger og omdannelser godt. Da jeg skriver at elevene behersker både behandlinger og omdannelser mener jeg at de gjennomfører vellykkede transformasjoner hvor det matematiske begrepet beholder sin natur. Den eneste overgangen som ikke er riktig, er omdannelse fra naturlig språk til symbolske system hos en deltaker. Jeg sikter til Trude som får i oppgave å skrive *trettito* med tallsymboler, noe som resulterer i *302*. Som skrevet tidligere har eleven gitt en kongruent omdannelse i en situasjon som krever en ikke – kongruent overgang. Også representert med Steinbring (2006) sin epistemologiske trekant vil Trude sitt arbeid vise en mislykket mediering. Begrepet trettito mister sin natur da eleven skriver 302 med tallsymboler. Det er en mediering som er feil, da det ikke er samsvar mellom de tre hjørnene i den epistemologiske trekanten.

Samtlige elever i undersøkelsen viser evne til å gjennomføre vellykkede overganger, både omdannelser og behandlinger. Videre viser datamaterialet mitt at det kun er en omdannelse som er vanskelig for den ene førsteklassingen, nemlig transformasjonen fra naturlig språk til symbolske system. Bortsett fra denne omdannelsen som beskrevet i 5.1.5 virker det som ingen av de andre overgangene byr på problemer eller vanskeligheter for deltakerne. Både i arbeidet med det kjente konkretene i «*dagens tall*» og de nye konkretene i forbindelse med Bestemors boller klarer elevene å gjennomføre vellykkede behandlinger og omdannelser. I den epistemologiske trekanten vil vellykkede transformasjoner bety mediering hvor begrepet beholder sin natur i de tre hjørnene av trekanten.

5.3 ARBEID MED KONKRETER

I min studie tar elevene i bruk ulike konkreter. Deltakerne jobber med de kjente konkretene sugerør og kartonger fra «*dagens tall*» og de nye konkretene i det åpne opplegget, illustrasjon av boller på brett, perler og poser.

I «*dagens tall*» teller elevene antall dager de har gått på skolen. De legger et sugerør for hver skoledag i et kartongsystem, med enerkartong, tierkartong og hundrerkartong. Ideen er at de ulike kartongene skal tilsvare de ulike posisjonene i et flersifret tall og at hvert sugerør skal representerer enere. Hver gang det er ti sugerør i enerkartongen blir disse ti satt en strikk rundt og plassert i tierkartongen og betraktet som en *tierbunt*. En elev blir hver dag trukket ut til å legge oppi et sugerør og dette går på rundgang. Den valgte eleven skal også snu tallsymbolet slik at tallet stemmer overens med antall sugerør. Avslutningsvis skal eleven si tallet og si hvor mange sugerør som er på ener – og tierplass. Denne daglige sekvensen gir elevene en måte å visualisere posisjonssystemet på, men selv om dette er en daglig rutine er det ikke nødvendigvis at elevene sitter igjen med det utbyttet som er hensikten fra læreren. Som jeg har skrevet kan elevene utvikle prosedyrekunnskap og likevel svare riktig på de spørsmålene som lærer stiller hver dag. Slik tror læreren at eleven har begrepskunnskap, ved at den svarer riktig på hvor tierplassen er, hvor mange enere det er i 34 og lignende spørsmål som blir gjentatt daglig. Egentlig har eleven kun lært seg begrepene, uten å ha forståelse for det matematiske som ligger bak. Eleven kan ha lært seg at den midterste kartongen er tierplassen, her skal jeg telle hvor mange bunter med sugerør det er, så får jeg riktig svar. Det er ikke nødvendigvis slik at eleven forstår at i hver bunt så er det alltid ti elementer.

Et annet viktig element i forbindelse med konkreter på en slik demonstrasjonsmåte er at det ikke er tilstrekkelig for elevene å få jobbe med konkretene selv kun en gang i blant eller å få det demonstrert – selv om det blir demonstrert av lærer eller medelever hver dag. Elevene trenger tid på å bli kjent med og utvikle forståelse for konkretiseringsmateriellet og få et nært forhold til det. Jeg syns at sugerør og *«dagens tall»* er helt fint å bruke som ett av flere konkretiseringsmateriell for titallssystemet. Poenget mitt er at elevene må bli kjent med posisjonssystemet på flere ulike måter, det er ikke tilstrekkelig å kun arbeide med sugerørene. Elevene må få andre erfaringer for å etablere og få tilgang til de abstrakte ideene som ligger bak posisjonssystemet. Videre er det viktig at elevene får gjøre erfaringer selv med konkretene. Det er slik Dewey sier; man lærer gjennom å gjøre erfaringer selv, *«learning by doing»*.

Konteksten elevene benytter konkretiseringsmateriell i er formulert som et åpent opplegg. Hensikten med det åpne opplegget er at det skal være så realistisk at elevene kan se for seg situasjonen og slik komme lett i gang med arbeidet. I arbeidet med Bestemors boller har elevene tilgang til illustrasjoner på oppgavearket. Holm (2002) skriver at abstraksjonsmateriell er hjelpemiddel i matematisk utforskning, ved at de skal være flyttbare gjenstander som er til hjelp i utforskningsprosessen. Perlene og posene vil være abstraksjonsmateriell, ved at perlene representerer bollene. Elevene bruker så perlene for å løse oppgavene, ved at de kan fysisk flyttes og løsningen kommer frem i konkretene. Ved at konteksten er så kjent og virkelighetsnær kan materiellet som brukes være hva som helst så lenge det gir hjelp og støtte i løsningsprosessen for elevene.

6 AVSLUTNING

I studien har elevene arbeidet med to ulike tilnærminger til posisjonssystemet, *«dagens tall»* og Bestemors boller, et åpent opplegg. De er begge representasjoner på posisjonssystemet, da Duval (2006) skriver at matematiske ideer og begreper kun er tilgjengelige via representasjoner. Grunnen er at matematiske objekter har en abstrakt og ikke – fysisk natur og man er derfor nødt til å ta i bruk ulike representasjoner for å visualisere de forskjellige objektene. Det er ikke nok at elevene kun arbeider med representasjonene i form av konkreter for å få kjennskap til posisjonssystemet og de aspekter som ligger bak. Nei, det er helt avgjørende at elevene ser sammenhengen mellom konkretene, begrepene og de matematiske objektene. Hiebert & Wearne (1992) poengterer viktigheten med å skape en kobling mellom konkreter, skrevne symboler og muntlig språk. Steinbring (1997) sin epistemologiske trekant visualiserer nettopp denne koblingen mellom tegn/symbol, objekt/referansekontekst og begrep. Steinbring (1997) skriver at konstruksjonen av relasjoner mellom tegn/symbol og objekt/referansekontekst via begrep ikke fører fram til en ferdig definisjon, men er et samspill i stadig utvikling.

Undersøkelsen min viser at samtlige elever gjennomfører vellykkede medieringer. Altså er det samsvar mellom det matematiske begrepet representert i ulike representasjonsregister, som tegn/symbol og referansekontekst. En vellykket mediering betyr at det matematiske begrepet eller objektet man arbeider med beholder sin natur og egenskaper, uavhengig av hvilken materiale eller form det blir representert i. Elevene i undersøkelsen har i de fleste tilfeller en riktig kobling mellom tallord, tallsymbol og konkreter. Det er kun Trude som viser en vanskelighet med nedskriving av tall. Som transkripsjonen i kapittel 4.2 viser skriver eleven 302 til begrepet trettito og medieringen er da ikke vellykket siden begrepet ikke beholder sin natur (Steinbring, 1997).

Duval (2006) skriver at den eneste måten å få tilgang til en matematisk idé på er gjennom dens semiotiske representasjoner. Et matematisk objekt kan ha nokså forskjellige typer semiotiske representasjoner, der de ulike representasjonene bidrar på hver sin måte til å gjøre det matematiske objektet tilgjengelig og konkret. Duval (2006) forklarer at i enhver form for matematisk aktivitet tas det i bruk minst ett representasjonsregister. Videre forklarer han at matematisk bearbeidelse alltid betyr å forflytte seg til andre representasjonsregister. Det sentrale i matematisk forståelse er å kunne gjenkjenne et matematisk objekt i ulike representasjonsregister. Noen ganger vil slike forflytninger ikke gi store forskjeller, det er i prosesser man gjennomfører transformasjoner innad i ett og samme register. Duval (2006) omtaler denne prosessen som en behandling. I studien min gjennomfører elevene vellykkede behandlinger. Blant annet forflytter elevene seg fra muntlig språk til skriftlig språk. Man befinner seg slik i samme register, naturlig språk, men det er skjedd en overgang hvor objektet beholder sin natur. Videre kan noen forflytninger gjøre det vanskelig å kjenne igjen objektet man arbeider med. Det er da omdannelser som finner sted. Duval (2006) forklarer omdannelser som overganger mellom ulike representasjonsregister. En omdannelse som ikke er vellykket i studien er overgangen fra registeret som heter naturlig språk til det symbolske systemet. Den aktuelle eleven gjennomfører en kongruent omdannelse i en situasjon som krever en ikke – kongruent omdannelse. Objektet er i utgangspunktet trettito, men blir omdannet til 302. Dette er det eneste tilfellet hvor medieringen mislykkes i studien.

I arbeidet med *«dagens tall»* og det åpne opplegget viser elevene forståelse for de aspektene som ligger til grunn for posisjonssystemet. Jones et. Al (1996) skildrer fire forskjellige aspekter i arbeidet med posisjonssystemet; tellemåter og kombinasjon av disse, del – hel – aspekt, unitizing og det begrepsmessige. Som det fremgår av analysen og diskusjonen kommer samtlige aspekter tilsyne i datamaterialet mitt. Unitizing er det aspektet alle deltakerne i studien viser forståelse for. Del – hel – aspektet er ikke like fremtredende, men kommer frem i et par av transkripsjonene. Forståelsen for aspektene kommer frem både i arbeidet med det kjente konkretiseringsmaterialet og den nye og ukjente konteksten i det åpne opplegget. Elevene viser slik evne til å overføre sin forståelse for posisjonssystemet fra det kjente til også nye og ukjente situasjoner og kontekster. Dette er en del av det Anghileri (2006) omtaler som tallforståelse.

Funnene i denne undersøkelsen er relevante for matematikklærere som ønsker å gi elever varierte tilnærminger til posisjonssystemet. Som det fremgår av studien er det viktig å la elevene få ulike representasjoner for et og samme objekt og rette fokuset mot å se sammenhengen mellom dem. Det er som Duval (2006) skriver, det vanskelige er ikke å arbeide med et objekt i ulike representasjonsregister, men å se koblingen mellom de ulike representasjonene. Lærer må være tilstede og støtte elevene i overgangen mellom representasjonsregister for å sikre vellykkede medieringer. «*Dagens tall*» er en god representasjon på posisjonssystemet, men elevene må få arbeide med andre representasjoner også. Det er gjennom arbeid med flere ulike representasjonsregister og overganger mellom dem at elevene får forståelse for det matematiske objektet.

I forbindelse med det åpne opplegget som jeg har formulert, kalt Bestemors boller, kunne det vært interessant å undersøke hvilke semiotiske representasjoner og hvilke transformasjoner konteksten legger opp til. Jeg har under metodekapittelet skrevet noe om forventet læringsutbytte og hvilke aspekter ved posisjonssystemet som fremmes gjennom arbeid med opplegget. Som videre forskning hadde det vært interessant å se nærmere på det åpne opplegget og analysere det som en representasjon i arbeidet med å utvikle forståelse for posisjonssystemet.

7 REFERANSELISTE

- Alseth, B., Throndsen, I. & Turmo, A. (2008). *Rapport fra kartleggingsprøver i tallforståelse og regneferdighet for 2. årstrinn og Vg1* (Vol- 2/2009). Oslo: Instituttet.
- Anghileri, J. (2006). *Teaching number sense. (2nd edition).* London: Bloomsburd
- Baroody, A. J. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children mathematics*, 13(1), 22-31
- Burton, D. M. (1985). The history of mathematics: An introduction. London
- Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain.* London: Macmillan.
- Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E., & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 428-441.
- Christoffersen, L. og Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7. Edition). London: Routledge.
- Creswell, J. W. (2013). *Qualitative inquiry & research design: Choosing among five approaches*. Sage Publications, Inc.
- Dalvang, T. (2006). *Undersøkelseslandskap som tilnærming til arbeidet med matematikkvansker – et redskap for mestring?* Masteroppgave, Universitetet i Oslo
- Dickson, L., Gibson, O., & Brown, M. (1988). *Children learning mathematics: a teacher's guide to recent research*.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. I F. Hitt & M. Santos (Red.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico: PMENA.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131. Doi:10.1007/s10649006-0400-z.
- Engelbrecht, J., Harding, A., & Potgieter, M. (2005). Undergraduate students' performance and confidence in procedural and conceptual mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(7), 701-712. doi: 10.1080/00207390500271107
- Fauskanger, J. (2004). Arbeid med posisjonssystemet i 1.klasse. 1968-Utdanning (Oslo: trykt utg.). Oslo: Forbundet 3(2004)nr 2 2004

- Fosnot, C. T. (2007). *The t-shirt factory: Place value, addition, and subtraction.* Portsmouth, N.H.: Heinemann.
- Fosnot, C. T., & Dolk, M. L. A. M. (2001). *Young mathematicians at work: Construction number sense, addition and subtraction*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Frostad, P. (1995). Konkretiseringsmateriell – veien til matematikkinnsikt? *Tangenten* 6(2), 9–17
- Fuson, K. C. (1990). Issues in place-value and multidigit addition and subtraction learning and teaching. *Journal for research in mathematics education*, *21*(4), 273-280.
- Fuson, K. C., & Briars, D. J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first-and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 180-206.
- Hammersley, M. & Atkinson, P. (1996). *Feltmetodikk: grunnlaget for feltarbeid og forskning (2. utg).* Oslo: Gyldendal
- Hellevik, O. (2002). *Forskningsmetode i sosiologi og statsvitenskap.* Oslo: Universitetsforlag.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematiscs: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (s. 1 -27). Hillsdale, N.J.: Erlbaum
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for research in mathematics education,* 98-122.
- Holm, M. (2002) *Opplæring i matematikk*. Oslo: Cappelen Akademisk.
- Hughes, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics*. Wiley-Blackwell.
- Janvier, c. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. I C. Janvier, (red), *Problems of representation om the teaching and learning of mathematics*. NJ: Lawremce Erlbaum.
- Jones, G. A., Thornton, C. A., Putt, I. J., Hill, K. M., Mogill, A. T., Rich, B. S., & Van Zoest, L. R. (1996). Multidigit number sense: A framework for instruction and assessment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 310-336.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.
- Kamii, C. & Joseph, L. L. (2004). *Young children continue to reinvent aritmetic, 2nd grade: implications of Piaget's theory.* New York: Teachers Collage
- Krasa, N. & Schunkwiler, S. (2009). *Number sense and number nonsense: understanding the challenges of learning math.* Baltimore, Md: Brookes Publ.

- Kristoffersen, R. (2012). Tallsystemer fra a til å. Hentet fra https://matteroar.files.wordpress.com/2011/10/tallsystemer1.pdf
- Krumsvik, R. J. (2014). *Forskingsdesign og kvalitativ metode: ei innføring*. Oslo: Fagbokforlaget
- Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju.* Oslo: Gyldendal Akademisk
- Lindland, E (2007). Kunnskap om posisjonssystemet – sammenheng med leseferdighet? Hentet fra http://www.caspar.no/tangenten/2007/Elisabet_Lindland_1_2007.pdf Tangenten 1/2007
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. London: Routlegde.
- Maclellan, E. (2001). Mental calculation: Its place in the development of numeracy. *Westminster studies in education*, *24*(2), 145-154.
- Magne, O. (1998) *Att Lyckas med matematik i Grundskolan*. Lund: Studentlitteratur
- McGuire, P., Kinzie, M. B., & Berch, D. B. (2012). Developing number sense in pre-k with five-frames. *Early childhood education journal*, *40*(4), 213-222.
- Miura, I. T., Okamoto, Y., Kim, C. C., Steere, M., & Fayol, M. (1993). First graders' cognitive representation of number and understanding of place value: Cross-national comparisons: France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. *Journal of Educational Psychology*, *85*(1), 24.
- Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.
- Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier.* Oslo: Universitetsforlaget.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346-362. doi: 10.1037/0022-0663.93.2.346
- Ross, S. H. (1986). *The Development of Children's Place-Value Numeration Concepts in Grades Two through Five.*
- Schneider, M., & Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach. *Developmental Psychology*, 46(1), 178-192. doi: 10.1037/a0016701
- Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 32(1), 49-92.

- Steinbring, H. (2005). Do mathematical symbols serve to describe or construct "reality"? Epistemological problems in teaching mathematics in the field of elementary algebra. I F. Seeger, M. H. G. Hoffmann & J. Lenhard (red.), *Activity and sign: Grounding mathematics education* (s. 91- 104). New York: Springer.
- Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 133162.
- Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse – en innføring i kvalitativ metode (4. utg).* Bergen: Fagbokforlag
- Tjora, A. (2010). *Kvalitative forskningsmetoder I praksis*. Oslo: Gyldendal akademisk.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2014). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (8th ed.). Essex: Pearson Education Limited.

8 VEDLEGG

8.1 FORESPØRSEL OM DELTAKELSE I FORSKNINGSPROSJEKTET

Bakgrunn og formål:

Jeg er masterstudent ved NTNU og skal skrive en masteroppgave i matematikkdidaktikk. Jeg er fasinert av hvor mye kunnskap barna sitter inne med når de kommer til skolen i 1. klasse. Målet mitt er å få innblikk i hvilken forståelse for posisjonssystemet et utvalg barn har høsten de begynner på skolen.

Formålet med studien er å undersøke hvilken forståelse for posisjonssystemet barn har i de første månedene av 1. klasse. Prosjektet er et masterstudie tilknyttet NTNU. Datainnsamlingen vil foregå i løpet av høsten 2016, og leveringen av oppgaven vil være i mai 2017. Dette skrivet er sendt ut til alle foresatte av barn i __________ Barnehage som har barn som begynner på skolen høsten 2016.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Deltakelse i studien innebærer at elevene deltar aktivt i ulike matematiske opplegg, både i grupper og individuelt. Datainnsamlingen vil være basert på observasjon, intervju og lydopptak. De matematiske oppleggene vil omhandle posisjonssystemet og tallforståelse, og det tas høyde for at elevene skal få et faglig utbytte av disse øktene.

Hva skjer med informasjonen om eleven?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. I studien vil kun masterstudent Camilla Kimo og veileder ved NTNU, Yvonne Grimeland, ha tilgang på det innsamlede datamaterialet og lydopptak. Deltakerne i prosjektet vil bli anonymisert ved bruk av koding og pseudonym, og vil ikke kunne gjenkjennes i en eventuell publikasjon. Prosjektet skal avsluttes i mai 2017 og alle personopplysninger og lydopptak vil da bli slettet.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i prosjektet, og eleven kan når som helst trekke seg fra studien med foresattes samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom eleven trekker seg fra studien vil alle opplysninger om han/hun bli slettet.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste AS (NSD).

Samtykke til deltakelse i studien

Foresatte for____ (barnets navn)

Har mottatt informasjon om studien og gir samtykke til at barnet kan delta.

__________________________________ ______________________

(Foresattes underskrift) (sted og dato)

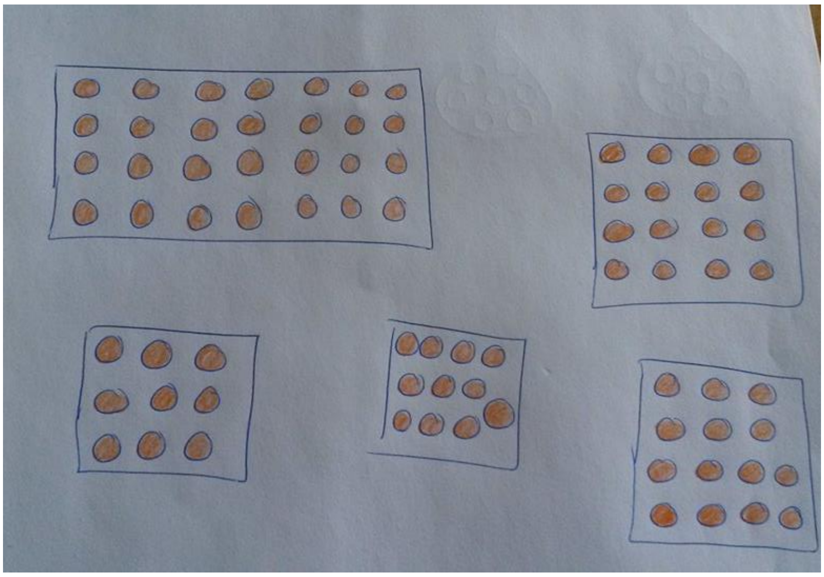
Med vennlig hilsen Camilla Kimo

8.2 BESTEMOR SINE BOLLER

Bestemor Nanna er kjent for å bake veldig gode boller. Hele familien håper hun baker boller når de kommer på besøk. En dag familien er samlet går Mona og Even inn på kjøkkenet for å se alle bollene bestemor Nanna har laget. Det er boller på kjøkkenbordet, på kjøkkenbenken og på komfyren, ja overalt! Så mange boller har aldri Mona og Even sett før.

De spør bestemor Nanna hva hun skal med alle bollene. Bestemoren svarer at hun skal selge dem på et marked. Men at hun trenger hjelp til å gjøre bollene klare for salg. Hun har tenkt å selge noen boller i poser og noen boller hver for seg. Bestemor har veldig mange boller og spør om Mona og Even kan pakke bollene for henne. Dette vil de gjerne, men de trenger hjelp fra dere.

Her er noen av brettene med boller bestemor Nanna har på kjøkkenet:



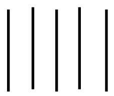
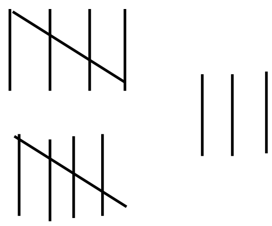
Kan dere lage en oversikt over hvor mange poser med boller, hvor mange løse boller og hvor mange boller hun har laget? Fins det flere måter å pakke bollene på?

Mona og Even lager en tavle med oversikt over hvor mange poser med boller de har laget og hvor mange løse boller de har:

Poser med boller:	Løse boller:	Antall boller:

På kontoret har hun 17 boller, på soverommet har hun 8 boller og på stuen har hun 15 boller. Kan dere pakke disse bollene også i poser og noen løse boller?

Etter noen dager ser tabellen slik ut:

Poser med boller:	Løse boller:	Antall boller:
		

Hvor mange boller har bestemor Nanna laget til sammen? Fins det andre måter å pakke bollene på?

Etter noen dager på markedet begynner bestemor Nanna å få bestillinger på boller.

Nedenfor ser dere bestillingene. Kan dere hjelpe bestemor Nanna med å gjøre klar bestillingene ved å skrive ned hvor mange løse boller og hvor mange poser med boller de skal ha?

Hei! Vi bestiller 3 poser og 5 løse boller. Hvor mange boller blir det til sammen?
Hei! Jeg vil bestille 27 boller. Hvor mange poser og hvor mange løse boller blir det? Har jeg bare en mulighet eller har jeg flere muligheter?
Hei! Jeg skal kjøpe 25 boller, men vet ikke hvor mange poser og hvor mange løse boller det blir. Kan dere hjelpe meg?
Hei! Vi skal ha Halloween – party på skolen og ønsker å kjøpe boller. 1. klasse er 15 elever og 3 voksne. 2. klasse er 12 elever og 2 voksne. 3. klasse er 9 elever og 1 voksen 4. klasse er 17 elever og 4 voksne. Hvor mange boller trenger vi? Hvor mange poser og hvor mange løse boller blir det?
Hei! Jeg vil bare kjøpe poser med boller til bursdagen min, ikke løse boller. Vi blir 27 personer. Hvor mange poser trenger jeg?