NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Masteroppgave

Guro Heggem Olsen

Grubletegninger som metode i brøkundervisning

En kvalitativ studie av noen sjettetrinnselevers bruk av grubletegninger i en matematisk diskusjon om brøk.

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 1-7
Veileder: Ole Enge
Trondheim, mai 2017

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Guro Heggem Olsen

Grubletegninger som metode i brøkundervisning

En kvalitativ studie av noen sjettetrinnselevers bruk av grubletegninger i en matematisk diskusjon om brøk.

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 1-7
Veileder: Ole Enge
Trondheim, mai 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

FORORD

Denne masteroppgaven markerer slutten på en veldig lærerik epoke i livet mitt, nemlig fem fine år på Rotvoll. Arbeidet med oppgaven har vært tidkrevende og utfordrende, men det har også vært veldig lærerikt og spennende. Til tider hadde jeg mine tvil på at denne oppgaven noen gang kom til å se dagens lys, men ved hjelp av en rekke mennesker som har støttet meg underveis ble oppgaven til slutt en realitet. Uten deres hjelp hadde ikke dette prosjektet vært mulig.

Først og fremst vil jeg takke min veileder Ole Enge for alle konstruktive tilbakemeldinger, interesse for prosjektet mitt og for de erfaringene og kunnskapen som er delt. Videre vil jeg takke mine flotte medstudenter på kontor B115. Takk for alle oppmuntrende og motiverende ord, latterfylte stunder og kunnskapsrike innspill. Jeg vil også rette en stor takk til elevene som deltok i prosjektet mitt. Takk for at jeg fikk ta del i deres tanker omkring matematikk. Deres deltakelse har vært uunnværlig, og prosjektet ville ikke blitt det samme uten. Til slutt vil jeg takke min nærmeste familie, kjæreste og venner for at dere har støttet og motivert meg i oppgaveskrivingen, og for at dere har gitt meg pauser fra oppgaven de gangene jeg behøvde det som mest.

Trondheim, mai 2017

Guro Heggem Olsen

INNHOLD

FIGUROVERSIKT

1.0 INNLEDNING: Å diskutere brøk gjennom bruk av grubletegninger

1.1 Bakgrunn for oppgaven

Læring og undervisning av brøk har tradisjonelt vært ett av de mest problematiske områdene innenfor matematikken på barneskolen (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Mange mennesker har en frykt for matematikk, og på videregående er flere motvillige til å studere mer matematikk enn de må. For de fleste har forholdet til matematikk gått nedover siden tidlig på barneskolen, rett etter at brøk har blitt introdusert (Lamon, 2012, s. 15). Ifølge Anghileri (2000) har mennesker i mange generasjoner opplevd at utregning med brøk var praktisert gjennom å følge regler som ble undervist, ofte uten forståelse for hvorfor disse reglene fungerte. Lamon (2012) sier videre at meninger, modeller og symboler som fungerer når elevene adderer, subtraherer, multipliserer og dividerer hele tall ikke lenger vil være nyttige, og at mange store begrepsmessige hopp bidrar til elevenes vansker med å lære brøk. De hele tallene kan representeres fysisk ved å tegne bilder for å representere de involverte tallene. Går vi derimot utenfor heltallsområdet er det ikke like lett å representere det man arbeider med (Lamon, 2012, s. 18). En av faktorene til kompleksiteten i å lære og undervise brøk kan være at det omfatter konstruksjon med mange komponenter (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Kieren, 1993; Lamon, 2012). En annen faktor kan være at store deler av brøkregningen består av brøker som er mindre enn 1, noe som kan oppfattes abstrakt for enkelte elever (Lamon, 2012). Å arbeide med brøk er ofte utfordrende for barn fordi prinsippene og prosedyrene i brøk skiller seg fra prinsippene og prosedyrene de bruker i arbeid med heltall på viktige måter (McNamara & Shaughnessy, 2015, s. 5). Det uttrykkes blant annet forvirring med å se på brøk som en helhetlig mengde og ikke som to separate tall med en strek mellom (Lamon, 2012).

Utdanningsforbundet (u.å.) sier at «[v]ed å gi elevene et solid grunnlag for forståelsen av brøkbegrepet, kan en unngå at brøkregning blir mekanisk og drillpreget og at elevene etter hvert sier at brøk er vanskelig og noe de ikke forstår». Ove Gunnar Drageset, førsteamanuensis i matematikkdidaktikk ved UiT, sa «[i] Norge benyttes ofte den klassiske måten å undervise matematikk på. Formlene og reglene gjennomgås på tavla, og så brukes resten av tiden på individuell oppgaveløsning i boka» til Linn Sollied Madsen, journalist for forskning.no, i 2013. Drageset forklarer at denne undervisningsmetoden fører til en svært overfladisk forståelse der elevene lærer seg formlene og kommer frem til riktig svar uten at de forstår hvorfor (Madsen, 2013). Videre sier Drageset: «Det er viktigere at tenkningen bak, at logikken er riktig, enn at svaret er det.». Stortingsmelding nr. 28 sier dessuten at siden samfunnet er i endring krever det også en skole som fornyer seg (Meld. St. 28 (2015-2016), 2016). Regjeringen foreslår derfor å fornye fagene i skolen for å gi elevene mer dybdelæring og bedre forståelse.

I den norske læreplanen, Kunnskapsløftet, er en del av den muntlige ferdigheten i matematikk at elevene skal:

> […] gjere seg opp ei meining, stille spørsmål og argumentere ved hjelp av både eit uformelt språk, presis fagterminologi og omgrepsbruk. Det vil seie å vere med i samtalar, kommunisere idear og drøfte matematiske problem, løysingar og strategiar med andre. […] Vidare går utviklinga frå å bruke eit enkelt matematisk språk til å bruke presis fagterminologi og uttrykksmåte og presise omgrep. (Utdanningsdirektoratet, 2013b, s. 2)

Sitatet viser at det sosiale spiller en stor rolle i læringsprosessen. Det er viktig å ikke bare vurdere produktet, men også å ha fokus rettet mot prosessene som fører en frem mot et svar eller en løsning på et problem. Kari Aamli (2015), journalist for forskning.no, sier at selv om kompetansemålene i læreplanen tydelig beskriver hva elevene skal kunne etter fjerde, sjuende og tiende årstrinn, så blir matematikk fort et fag der elevene blir sittende og regne oppgaver for å øve seg til nasjonale prøver. Ida Heiberg Solem, førstelektor ved HiOA, hevder at elevene ikke lærer å tenke dersom de ikke blir bedt om å uttrykke tankene sine (Aamli, 2015). Den muntlige delen av matematikkfaget bør altså bli tillagt en stor rolle i faget, slik at både læringsutbyttet kan bedres og en dypere forståelse kan vokse frem. Chapin, O'Connor og Anderson (2009) sier at det å få elevene til å snakke om matematiske ideer eller prosedyrer kan bringe mangler i forståelsen til den enkelte elev til overflaten.

1.2 Formål og forskningsspørsmål

Jeg har valgt å ta for meg det matematiske temaet brøk, og jeg ønsker å ha en utforskende tilnærming til brøkundervisningen. Derfor har jeg laget tre grubletegninger, der hensikten er at de skal kunne bli brukt som utgangspunkt for diskusjon angående ulike aspekter innen brøkbegrepet. Den ene grubletegninger dreier seg om sammenligning av brøker, den andre omhandler estimering av sum og den tredje tar for seg plassering av brøk på tallinjen. I mitt prosjekt er jeg interessert i å se hvordan grubletegningene kan brukes som en metode i matematikkfaget og hvilke muligheter grubletegningene gir for å vurdere elevenes matematiske forståelse. Kommer elevene innom sentrale aspekter ved brøkbegrepet gjennom å diskutere utsagnene i grubletegningene? Vil typiske misoppfatninger komme til syne, og eventuelt gjennom diskusjonen bli forkastet av elevene? Er grubletegninger et godt utgangspunkt for arbeid med brøk? Med dette som utgangspunkt stiller jeg følgende forskningsspørsmål:

På hvilken måte blir tre grubletegninger brukt i elevers matematiske diskusjoner om brøk?

I tillegg stiller jeg spørsmålet:

Hvilken forståelse for brøk viser de utvalgte elevene i diskusjonene?

For å besvare de to spørsmålene kommer jeg til å presentere utdrag fra elevdiskusjonene. Utdragene vil bli analysert og diskutert med den hensikt å kunne si noe om hvilken rolle grubletegningene spiller i elevenes argumentasjon og begrunnelser, samt for å vurdere den brøkforståelsen elevene viser i utdragene.

Grubletegninger er et lærings- og undervisningsverktøy som hovedsakelig er brukt i naturfagsopplæringen for å utforske naturfaglige begreper, men Sexton, Gervasoni og Brandenburg (2009) mener at dette også har et stort potensiale i matematikkopplæringen. En grubletegning synliggjør måter å betrakte gitte situasjoner på i arbeid med problemløsningsoppgaver, og skal stimulere elevene til å utvikle sine ideer og synspunkter (Naturfagssenteret, 2013). Mye av forskningen omkring grubletegninger er utført av opphavspersonene, Brenda Keogh og Stuart Naylor. De hevder blant annet at grubletegninger stimulerer elever til diskusjon og argumentasjon. Diskusjon står altså sentralt i arbeid med grubletegninger, og matematikken kan for mange elever gå fra et konstruktivistisk læringssyn, et syn som hevder at kunnskapen blir konstruert i hver enkelt elev gjennom individuelt arbeid, til et syn som tror at kunnskapen oppstår i samspill mellom elevene og oppgavene de arbeider med (Säljö, 2001).

Undersøkelsen min er en småskala kvalitativ undersøkelse. Jeg har gjennomført intervjuer av to grupper på 3 elever på 6. trinn. Analysene av et utvalg samtaleutdrag blir grunnlaget for denne oppgaven. Det ble gjort lyd- og videoopptak, i tillegg til at alt materiale som elevene produserte mens intervjuet pågikk ble samlet inn.

1.3 Oppgavens oppbygning

Studien er bygd opp av fem kapitler. Etter innledningskapittelet følger et teorikapittel som inneholder det teoretiske perspektivet studien bygger på. Teorikapittelet vil være oppgavens teoretiske rammeverk som ligger til grunn for analyse og diskusjon. Studiens teoretiske utgangspunkt er i hovedsak tolkninger av brøkbegrepet, måter å tenke på innen brøk og ulike strategier som kan brukes i arbeid med brøkoppgaver. Teori om bruk av grubletegninger, læring gjennom samtale og diskusjon, samt matematisk forståelse står også sentralt i min forskning. I kapittel 3 vil jeg fremstille metodiske tilnærminger og vise til hvilke valg jeg har tatt i undersøkelsen. Mine valg innebærer noen konsekvenser i forhold til datamaterialet og etiske betraktninger. Jeg har med dette for å vise hva som har skjedd i datainnsamlingen og i forskningens gang generelt, da dette er noe som gjør at leseren har mulighet til å selv vurdere oppgavens gyldighet ut fra de metodene som er benyttet og de valgene som er tatt. Kapittel 4 presenterer og analyserer grubletegningene som er utgangspunkt for gruppeintervjuene, samt utdrag fra transkripsjon og enkelte elevnotater. Analysen av utsagn er bygd opp rundt fire kategorier. I kapittel 5 drøftes resultatene av analysene opp mot den presenterte teorien, og det tas stilling til hvordan grubletegninger blir brukt i elevdiskusjonene og hvilken brøkforståelse som kommer til syne i elevenes utsagn. Til slutt blir oppgaven avrundet med et kritisk blikk på metodevalg, diskusjon av didaktiske implikasjoner, studiens bidrag på forskningsfeltet og videre forskning, samt noen avsluttende kommentarer.

2.0 TEORI: Bruk av grubletegninger og læring av brøk

Målet med denne oppgaven er å finne ut hvordan tre grubletegninger blir brukt i en matematisk diskusjon om brøk og hvilken brøkforståelse elevene i undersøkelsen viser. For å kunne svare på disse spørsmålene vil jeg ha behov for teori som beskriver og forklarer bruk av grubletegninger, samt teori og forskning på brøktenkning- og forståelse. Jeg har valgt å plassere studien i et sosiokulturelt perspektiv, siden jeg studerer hvordan elevene benytter seg av språket og samhandler. På bakgrunn av dette læringssynet har jeg valgt å gjøre rede for læring gjennom samtale og diskusjon med andre. Deretter gjør jeg rede for hva det vil si å forstå i matematikk, samt en introduksjon til grubletegninger. Videre vil det overordnede temaet brøk presenteres og gjøres rede for ved å presentere teori angående additiv og multiplikativ tenkning, tolkninger av brøkbegrepet, sammenligning av brøker, addisjon av brøk, estimering av brøker og plassering av brøk på tallinjen.

2.1 Læring gjennom samtale og diskusjon med andre

I det sosiokulturelle perspektivet legges det vekt på at kunnskap og læring konstrueres gjennom samhandling med andre, og bruken av medierende redskaper er sentrale for læring (Dysthe, 2001). Menneskets individuelle kompetanse stammer fra ulike former for interaksjon med andre mennesker, og vi benytter oss alltid av hjelpemiddel i våre aktiviteter (Strandberg, 2008, s. 25). Menneskers aktiviteter er alltid situerte, det vil si at det foregår i spesielle situasjoner, som for eksempel et spesielt rom eller sted (Strandberg, 2008). For Lev Vygotsky utgjør sosial samhandling selve utgangspunktet for læring og utvikling (Dysthe, 2001). Vygotsky (1978) har selv skrevet følgende om barns utvikling:

> Every function in the child's cultural development appears twice: First, on the social level, and later, on the individual; first between people (interpsychological), and then inside the child (intrapsychological). […] All the higher functions originate as actual relations between human individuals. (s. 57)

Læring skjer altså i to steg og Vygotsky kaller overgangen fra det sosiale til det individuelle internalisering. Internalisering betyr at individet gjør kulturens kunnskaper til sine egne, og dette skjer gjennom tankearbeid. Elevene konstruerer altså kunnskapen i etterkant av den sosiale og kulturelle konstruksjonen. Når ulike kunnskapsprosesser kombineres tar den intellektuelle utviklingen kvalitative steg (Strandberg, 2008, s. 150). Dersom en elev møter en situasjon som inneholder nye ideer, kan et omstrukturerende steg forekomme. Et kvalitativt sprang kan skje når elevenes hverdagslige, spontane og konkrete kunnskap kombineres med vitenskapelig kunnskap (Strandberg, 2008, s. 150). Vygotsky skiller altså mellom spontane[1] og vitenskapelige begreper. De spontane begrepene utvikles «nedenfra og opp» ved at barnet kobler begreper til egne konkrete og personlige erfaringer, uten å være bevisst på den faktiske definisjonen av begrepet (Skott, Jess, Hansen, 2008). De vitenskapelige begrepene åpner et mentalt rom eller en sone der barns hverdagslige begrep kan finne sin plass (Strandberg, 2008, s. 166). Barnet overtar ikke automatisk de vitenskapelige begrepene, men gjennom å fortsette og arbeide med sine hverdagslige prosesser vil aktiviteten løftes til et nytt nivå etter at eleven har fått et lite innblikk i de vitenskapelige begrepene. De hverdagslige begrepene utvikles og blir dermed mer avanserte etter hvert.

I matematikken er argumentasjon og resonnering viktige ferdigheter (Kleve & Solem, 2014). Når elever diskuterer og resonnerer omkring en matematisk idé finner de ut at matematikk er mer enn en samling av regler og metoder (Boaler & Greeno, 2000; Boaler & Humphreys, 2005 i Kleve & Solem, 2014). Ifølge Boaler og Humphreys (2005, i Kleve & Solem, 2014) er det viktig for elever å innse at matematikk er et fag hvor de kan ha ideer, og når elevene deltar i matematiske diskusjoner føler de at de er engasjerte i en intellektuell handling. Å få elever til å snakke om matematiske ideer eller prosedyrer kan i tillegg bringe eventuelle hull i forståelsen til overflaten (Chapin et al., 2009, s. 7). Chapin et al. (2009) sier også at å legge vekt på bruk av samtaler i undervisningen kan ha mange fordeler. Elevene kan øve på sine utregningsferdigheter, i tillegg til at de kan skape en dypere forståelse for operasjonene ved å snakke om hva de gjør og hvorfor. Når elever lærer nye begreper og prosedyrer for løsning av problemer er de nødt til å gi mening til disse for å kunne forklare og begrunne dem selv. Når en elev skal forklare, begrunne eller argumentere overfor seg selv eller noen andre hvorfor et begrep eller en prosedyre er korrekt, må eleven bruke et språk som er godt egnet til å fremheve de poengene som det er ønsket å vektlegge (Carpenter, Franke & Levi, 2003). Carpenter et al. (2003) peker på at forklaringer som hører til spesielle matematiske begrep vil avhenge av elevenes definisjon og representasjon av begrepet. Elevenes oppfatning av brøkbegrepet vil dermed være en del av det som former forklaringene som elevene gir for begrepet i min undersøkelse. Samtidig er det en faktor som kan variere mellom de ulike forskningsdeltakerne.

[1] Spontane begreper kan også omtales som hverdagslige begreper.
[2] Oppgave hentet fra Lamon (2012, s. 29), direkte oversatt til norsk.

Mercer (1995) hevder at det å være involvert i en sosial aktivitet gjennom utforskende samtale med medelever i klasserommet øker resonneringsferdighetene til den enkelte. Mercer og Littleton (2007) forklarer at utforskende samtale krever at elever engasjeres kritisk men konstruktivt i hverandres ideer. Dette betyr at en elev kan komme med utsagn som andre kan motbevise. Uansett bør alle utsagn støttes av en begrunnelse. Å åpne for samtale krever at læreren åpner opp for at klassen til en viss grad kan bestemme innholdet i undervisningstimen, sammen med retningen undervisningstimen tar (Pimm, 1987, s. 46). Mercer (1995, s. 61) hevder at opplæringen er ment for å hjelpe elevene å utvikle måter å bruke språket som en sosial måte å tenke på. Videre sier Mercer (1995) at utviklingen av språket mest sannsynlig ikke vil være vellykket hvis elevenes muligheter for aktiv bruk av språket er begrenset til smal respons i samtaler med læreren.

2.2 Matematisk forståelse

God tallforståelse er viktig for å kunne forstå brøk. Hiebert (1997) sier at å forstå et emne betyr å komme på innsiden av emnet ved å se på hvordan det relaterer seg og skaper sammenhenger til andre områder vi har kjennskap til. Eksempelvis kan vi lære av å memorere regler og algoritmer i matematikk, men aldri helt forstå hvorfor det fungerer. Forståelse er dermed aldri noe vi har eller ikke har, men noe som alltid forandres og utvikles hos hvert enkelt individ. Hiebert (1997) hevder videre at for at forståelse skal utvikles, er det viktig med refleksjon og kommunikasjon. Hvis en lærer vil at elevene skal forstå er det viktig å sørge for at elevene reflekterer over hva det er de gjør, samt at de snakker med hverandre om det. Reflektering betyr at man vurderer noe i eget hode, tenker over det på nytt og prøver å relatere det til noe annet man har kjennskap til. Dersom en lærer vil at elevene skal utvikle sin matematiske forståelse er det viktig at oppgaven er interessant på en matematisk måte (Hiebert, 1997).

Skemp (1976) fremhever også betydningen av forståelse i matematikk. I den sammenheng skiller han mellom relasjonell og instrumentell forståelse. Ifølge Skemp beskrives instrumentell forståelse som en overføring av et sett med regler, og noe som kan betegnes som «rules without reasons». En av fordelene med instrumentell forståelse er at eleven kan komme raskere frem til svaret, samt at det kan være lettere å forstå for enkelte. Likevel kan det være problematisk dersom eleven ikke kjenner til hensikten med reglene eller at forståelsen for hvorfor reglene fungerer ikke er til stede. Derimot kan relasjonell forståelse kjennetegnes ved at en elev er i stand til å produsere et uendelig antall planer for å komme seg fra start til slutt i et problem. Noen av fordelene med relasjonell tenkning er at eleven aktivt oppdager store ideer og sammenhenger i matematikk som et resultat av egenproduserte strategier med fleksible fremgangsmåter. Den instrumentelle forståelsen vil være nyttig i mange sammenhenger, men denne typen kunnskap alene vil ikke omfavne hele essensen i matematikkfaget. Det er derfor viktig at elevene får utviklet både sin instrumentelle og sin relasjonelle forståelse i faget.

2.3 Grubletegninger

Keogh og Naylor (1999) startet sitt arbeid med grubletegninger i 1991, som en strategi for å fremkalle elevers ideer, utfordre ideene og gi pekere for hvordan disse ideene kan utvikles. Strategien ble introdusert gjennom begrepet «concept cartoons». Mange kan føle seg lurt av begrepet «cartoon», siden mange ofte forbinder ordet med vanlige tegneserier og humor. Grubletegningene inneholder ikke humor eller satire, men følger formen til en flervalgsoppgave. Et problem blir presentert for noen fiktive karakterer, og hver karakter artikulerer et synspunkt for å løse problemet (Webb, 2015). Alternative metoder, misoppfatninger eller gale ideer kan bli uttrykt, men ett synspunkt viser alltid den riktige oppfatningen. Ofte er det også et spørsmål på arket som stiller elevene som arbeider med grubletegningen spørsmålet «hva tror du?». I motsetning til en typisk flervalgsoppgave integreres skreven tekst i dialogform med visuell støtte (Keogh & Naylor, 1999). For å eksemplifisere hvordan en grubletegning kan se ut har jeg valgt å ta med en grubletegning hentet fra Dabell (2008), der det matematiske temaet er multiplikasjon.

Figur 1: Grubletegning hentet fra Dabell (2008).

Selv om grubletegningene er ment for å lokke frem elevenes tanker rundt begreper, er ikke vurderingen av forståelse det eneste og viktigste formålet (Keogh & Naylor, 1999). Grubletegningene er også tenkt som en hjelp til læring og undervisning. I matematikk ble grubletegninger introdusert som en innovativ måte å få innsikt i barns strategier innenfor addisjon, der elevene blir bedt om å bruke mentale strategier fremfor algoritmer (Sexton, Gervasoni & Brandenburg, 2009). Keogh og Naylor (1999) skriver dessuten at det i matematikken er vel så viktig å se på hvordan elever løser problemer som det er å se på svaret elevene kommer med. Det er ofte slik at elever ikke reflekterer over strategiene de bruker for å løse problemer, men at de kun anvender en strategi de ser for seg kan fungere i oppgaven for å komme frem til svaret på raskest mulig måte.

Bruken av dialog i grubletegningene skaper muligheten til å presentere alternative ideer og inkludere ett eller flere syn på problemet som blir tatt opp og som er vitenskapelig aksepterte. Det er viktig at alternative tolkninger, utsagn eller spørsmål knyttet til en sentral idé er presentert i grubletegningen (Kabapinar, 2005; Keogh & Naylor, 1999). Gjennom de fiktive karakterenes dialog står en elev fritt til å ta avgjørelser om han er enig eller uenig med utsagnene, uten å føle seg presset til å uttrykke sin personlige mening offentlig (Sexton et al., 2009). Elevenes respons på ytringene i grubletegningene blir brukt som «talking tools» for å hjelpe elevene til å bygge på hverandres ideer, og for å arbeide kreativt sammen. Slik kan de skape mening til en sentral idé i faget (Dabell, 2008).

2.4 Brøk

Brøk er trolig av de mest alvorlige hindringene for den matematiske utviklingen til barn (Behr, Harel, Post & Lesh, 1993). Forskere og pedagoger er enige om at en av de dominerende faktorene som bidrar til kompleksiteten av læring- og undervisning av brøk ligger i det faktum at brøk utgjør en sammensatt konstruksjon (Brousseau, Brousseau & Warfield, 2004; Kieren, 1993; Lamon, 2012). Ifølge Lamon (2012, s. 21) kan brøkbegrepet ses på på to forskjellige måter. Brøk kan bli sett på som et todelt symbol som kan brukes for å skrive bestemte tall på formen $\frac{a}{b}$, der a og b er positive heltall. En slik tilnærming refererer til et notasjonssystem som representerer et symbol bestående av to tall med en strek mellom. Brøk kan også bli sett på som et rasjonalt tall som ikke er negativt. Her skrives tallene på formen $\frac{a}{b}$, der a og b er positive heltall og b ≠ 0. Denne studien tar utgangspunkt i den siste definisjonen av brøk.

Elever kommer til formell brøkundervisning med en bakgrunn rundt formelle og uformelle opplevelser i å arbeide med hele tall (McNamara & Shaughnessy, 2010). McNamara og Shaughnessy (2010, s. 5) skriver at elever ofte synes brøk er vanskelig, blant annet på grunn av at prinsippene og prosedyrene for å arbeide med brøk er annerledes enn prinsippene og prosedyrene for å arbeide med hele tall. Lamon (2012) refererer til et «kvalitativt sprang» som elever må komme over når de beveger seg fra hele tall til brøk. Til å begynne med vil barn avvise brøk som tall, fordi brøkene ikke er en del av tellesekvensen de kjenner fra tidligere (1, 2, 3, …). At en elev avviser brøk som tall kan ofte føre til at eleven tenker at en brøk er to ulike hele tall. Dette kan for eksempel resultere i feilaktig tenkning når to brøker skal adderes. En typisk misoppfatning er at teller og teller skal adderes, og at nevner og nevner også skal adderes, slik at $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$. Anghileri (2000) sier at det er viktig å utvikle fleksibilitet i bruk av ord og symboler, samt å identifisere koblinger med den multiplikative tenkningen som barna kjenner til. En nøkkelidé om brøk, som elever må forstå, er at en brøk ikke sier noe om størrelsen på helheten eller størrelsen på delene (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2014, s. 315), brøken forteller bare om forholdet mellom delene og helheten.

2.4.1 Multiplikativ og additiv tenkning

Lamon (2012) viser til to ulike måter å tenke om brøk. Disse to måtene å tenke på kan komme til syne i følgende oppgave[2]: «Før var tre A 8 meter høyt og tre B 10 meter høyt. Nå er tre A 14 meter høyt og tre B 16 meter høyt. Hvilket tre har vokst mest?» Et mulig svar kan være at trærne har vokst like mye, da begge trærne har vokst 6 meter, og B alltid vil være to meter høyere enn A. Et annet mulig svar kan være at A har vokst 75% av høyden sin, og at B har vokst 60% av høyden sin. Oppgaven belyser en av de viktigste typen tenkning som kreves for proporsjonal tenkning: muligheten til å analysere endring både multiplikativt og additivt (Lamon, 2012, s. 30). Lamon (2012, s. 31) skriver at «[r]elative thinking is also called multiplicative thinking. Absolute thinking is additive thinking[3]».

Dersom en elev tenker additivt vil veksten være uavhengig og ikke relatert til noe annet enn selve veksten, men det blir vurdert hvor mye høyden har økt. Den multiplikative tenkningen relaterer forventet vekst til nåværende høyde, eller ser på treets høyde etter at det har vokst i relasjon til hvor høyt treet var tidligere. Før elever kan forstå brøk må de forstå endring i to ulike perspektiver: faktisk vekst og relativ vekst, eller absolutt endring og relativ endring.

[2] Oppgave hentet fra Lamon (2012, s. 29), direkte oversatt til norsk.
[3] I denne oppgaven kommer jeg til å bruke begrepene multiplikativ tenkning og additiv tenkning.

Begge perspektiver er brukbare, men for å ta i bruk mer effektive måter å tenke på er det nødvendig å gå utover telling og absolutt tenkning (Lamon, 2012, s. 31). Eksempeloppgaven kan vise hvor vanskelig det er for elever å bevege seg fra additiv tenkning, som de er godt kjent med, og over til relativ tenkning (Lamon, 2012).

Multiplikativ tenkning innebærer mer abstraksjon enn additiv tenkning, og gjennom multiplikativ tenkning skapes mer komplekse mengder. Den multiplikative tenkningen er kritisk i den første brøkundervisningen (Lamon, 2012, s. 32). I brøkundervisning er multiplikativ tenkning medregnet i forståelse for flere viktige oppfatninger. Disse oppfatningene er blant annet at eleven må se på forholdet mellom størrelsen på bitene og antall biter, samt se behovet for å sammenligne brøker relatert til samme enhet, i tillegg til å se på størrelsen til brøken.

2.4.2 Enhetens rolle og betydning

Dersom problemer som involverer brøk skal diskuteres, må det være klarhet i hva som er «en hel». Alle brøker er avhengige av en enhet, og i arbeid med brøk trenger ikke enheten nødvendigvis å være ett enkelt objekt. Enheten kan bestå av flere objekter, bare en del av et objekt eller flere objekter pluss en del av et objekt. Alle brøker er relative størrelser, noe som vil si at de forteller hvor mye du har i forhold til enheten. I skolen er det vanlig å introdusere brøk gjennom hel-del-kontekster der enheten ofte er en pizza, en kake eller liknende. Av denne grunn kan mange elever komme til å betrakte brøken $\frac{3}{4}$ som tre fjerdedeler av en pizza eller kake. I denne tolkningen er mengden pizza bestemt av brøkdelene ($\frac{3}{4}$) og størrelsen på pizzaen. Tre fjerdedeler av en medium pizza er ikke den samme mengden av en pizza som tre fjerdedeler av en stor pizza, selv om det er likt antall biter. Mangel på oppmerksomhet til enheten eller helheten kan forklare mange av misforståelsene som elevene viser i brøkundervisningen (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 237).

Arbeid med ulike enheter fremmer fleksibiliteten i valg av måter å tenke på i ulike situasjoner. Det fremmer tenkning om brøk som et multiplikativt, relativt forhold, og ikke bare telling av delene (Lamon, 2012). Lite variasjon i enheten, og lite fokus på at brøk representerer et forhold kan føre til at elevene baserer seg på telling og at elevene etter hvert bare forsøker å memorere prosedyrer og formler i regning. Blant illustrasjonene for brøk som del av en enhet skilles det mellom kontinuerlig og diskret enhet (Bjerke, Eriksen, Rodal & Ånestad, 2013). For en kontinuerlig enhet brukes det en arealmodell, ofte med en rektangulær eller sirkulær form. Brøk som del av en diskret enhet, eller en mengde, anses for å ligge på et høyere vanskelighetsnivå enn arbeid med brøk som del av kontinuerlige enheter[4].

2.5 Tolkninger av brøkbegrepet

Det finnes mange mulige tolkninger bak en brøk. Kieren var den første som sa at brøkbegrepet ikke er så entydig, men at det består av flere beslektede tolkninger (Kieren, 1993). På 1970-tallet hevdet Kieren (1993) at brøkbegrepet besto av fire beslektede tolkninger: ratio/forhold, operator, kvotient og måling. Ifølge hans første begrepsvurdering var del-hel i brøk noe som gikk igjen i de fire andre underkategoriene, og det var derfor han unngikk å identifisere del-hel, eller del av en enhet, som en femte tolkning. Videre sa Kieren at forståelse for brøk avhenger av å få en forståelse for hver av de ulike tolkningene. Behr, Lesh, Post og Silver (1983) utvidet senere Kierens ideer og anbefalte at del-hel burde utgjøre en tydelig delkategori. De koblet også del-hel til prosessen av partisjonering. Behr et al. (1983) gikk ut fra fem tolkninger av brøkbegrepet: del-hel, ratio, operator, kvotient og måling. Å forstå alle de fem tolkningene er sett på som en forutsetning for å løse problemer innenfor brøk (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Ensidig fokus på kun en av tolkningene innen brøk gir mangelfull forståelse (Bjerke et al., 2013). Brøkundervisningen bør være slik at eleven blir kjent med mange tolkninger og sammenhenger mellom de ulike tolkningene. Ved å kjenne flere tolkninger og sammenhenger kan det utvikles en fleksibilitet i arbeidet, der eleven kan velge den tolkningen som gir mening i en gitt situasjon[5].

2.5.1 Del-hel

Den første tolkningen, del-hel, er definert som en situasjon hvor et kontinuerlig antall eller et sett av diskrete enheter er partisjonert inn i deler av lik størrelse (Lamon, 2012; Marshall, 1993). Brøken representerer en sammenligning mellom et visst antall deler av enheten, til det totale antallet deler som enheten er delt inn i. Elever må mestre flere ideer innen del-hel-aspektet av brøk. Spesielt bør elever forstå at delene må være like store. Elevene bør også være i stand til å partisjonere, eller dele inn, et kontinuerlig område eller et diskret sett i like deler og avgjøre om helheten er delt inn i like store deler/mengder (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Det er også noen ideer assosiert med forholdet mellom delene og helheten som det er nødvendig å forstå. Blant annet består disse ideene av at a) alle delene til sammen må utgjøre det hele, b) jo flere deler helheten er inndelt i, desto mindre er hver del, og c)

[4] Min studie viser kun elevenes arbeid med kontinuerlige enheter.
[5] Jeg kommer til å gå inn på tre av de ulike tolkningene i det som følger, sett bort fra ratio og operator, da dette ikke er direkte relevant for studien min.

forholdet mellom delene og helheten er bevart, uavhengig av størrelse, form, rekkefølge eller orientering av likeverdige deler (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, s. 296).

Lamon (2012, s. 128) sier at de formelle ideene knyttet til visuelle representasjoner, brøkspråk og symboler er intellektuelt utfordrende for barn. I den første brøkundervisningen starter elevene ofte med å tegne og fargelegge, og det oppstår flere vanlige problemer tidlig i del-hel-undervisningen. Et av problemene er at enheten noen ganger ikke er delt inn i like store deler. Et annet problem er at avgjørelser om likeverdighet og rekkefølge blir gjort der brøker referer til ulike enheter eller enheter av ulik størrelse. Eksempel på dette kan være en liten pizza delt i åtte biter, og en stor pizza delt i åtte biter. I tillegg kan sammenligning av brøker bli gjort på grunnlag av tegninger eller visuelle avgjørelser som ikke er riktige. Lamon (2012) viser at det kan være vanskelig å se hva som er størst av $\frac{7}{8}$ og $\frac{8}{9}$ når en elev tegner to rektangler for å representere brøkene, da forskjellen er minimal. Faktisk er forskjellen kun $\frac{1}{72}$. Det er kjent at tegning på frihånd i en arealmodell ikke er til særlig hjelp når en elev skal sammenligne brøker som har forholdsvis lik størrelse (Lamon, 2012).

2.5.2 Kvotient

I kvotient-tolkningen kan enhver brøk bli sett på som resultatet av en delingssituasjon. Brøken $\frac{x}{y}$ indikerer tallverdien som er resultatet når x er delt med y, der x og y representerer hele tall (Kieren, 1993). Aktiviteten som vanligvis benyttes for å hjelpe elevene å konstruere denne oppfatningen av brøker inkluderer problemer der eleven skal gjøre en rettferdig fordeling av kontinuerlige mengder, for eksempel pizza eller pannekaker (Marshall, 1993; Streefland, 1993 i Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, s. 299). I motsetning til i del-hel-tolkningen blir ofte to ulike målingsenheter brukt, og en typisk oppgave er: «Tre *pizzaer* skal deles likt mellom fire *personer*. Hvor mye pizza får hver person?». Resultatet på oppgaven er at hver person får $\frac{3}{4}$ av en pizza. Siden resultatet referer til en tallmengde, i stedet for delene som oppnås i aktiviteten om rettferdig fordeling er det ingen begrensning når det gjelder størrelsen på brøken. Telleren kan være mindre, lik eller større enn nevneren. Videre kan mengden som er resultatet av aktiviteten være mindre enn, lik eller større enn enheten (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

2.5.3 Måling

I målingstolkningen er en brøk assosiert med to forestillinger, og disse er nært knyttet og gjensidig avhengige av hverandre. Det er for det første ansett som et tall som formidler hvor stor brøken er. For det andre er denne tolkningen assosiert med måling tildelt et segment. Mer spesifikt, enheten til brøken er definert og gjentatt for å bestemme avstanden fra et forhåndsbestemt utgangspunkt (Lamon, 2001; Marshall, 1993). Et eksempel på dette er at $\frac{3}{4}$ korresponderer til avstanden av tre $\frac{1}{4}$ - lengder fra et gitt punkt.

For å utvikle målingsaspektet innen brøk bør elever være i stand til å bruke et gitt segment for å måle avstanden fra det starten (for eksempel 0). Det betyr at en elev bør være i stand til å lokalisere et tall på en tallinje, samt å være i stand til å identifisere et tall som er representert ved et bestemt punkt på tallinjen (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Hannula, 2003). Dersom en elev bruker en endimensjonal modell vil det rasjonale tallet måle avstanden til et bestemt punkt på tallinjen fra 0 (Lamon, 2012). Målingstolkningen er sett på som nødvendig for å utvikle kompetansen i additive operasjoner innenfor brøk (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

2.6 Sammenligning av brøker

I grubletegningene jeg har laget møter elevene på en oppgave der de skal avgjøre hvilken brøk som er størst av $\frac{3}{7}$ og $\frac{5}{9}$, og det vil derfor være relevant å gå inn på teori som tar for seg sammenligning av brøker. Når en elev skal sammenligne brøker må eleven vurdere helheten på hver av de to brøkene. Dersom man får $\frac{1}{4}$ av 200 kr vil det være mer enn dersom man får $\frac{1}{2}$ av 20 kroner, selv om $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ dersom helheten er lik. En nøkkelidé som elever må forstå er at en brøk ikke sier noe om størrelsen på helheten eller størrelsen på delene (Van de Walle et al., 2014, s. 316). Når en elev sammenligner brøker er det nødvendig å ta størrelsen av helheten i betraktning, og tolke hver brøk som et tall definert av forholdet mellom teller og nevner. Brøker kan bli sammenlignet på ulike måter, og å finne fellesnevner eller å kryss-multiplisere er to vanlige tilnærminger elevene lærer på skolen (McNamara & Shaughnessy, 2010, s. 130). Disse to tilnærmingene krever ikke en betraktning av størrelsen til brøkene. Det finnes imidlertid alternative sammenligningsstrategier som kan støtte resonnering rundt størrelsen på brøkene, og McNamara og Shaughnessy (2010) presenterer tre strategier:

1) Likt antall deler, men deler av ulik størrelse (lik teller, ulik nevner)
2) (Vurdering av om brøken(e) er) mer eller mindre enn en halv eller en hel
3) (Vurdering av om brøken(e) er) nærme en halv eller en hel

I tillegg til disse strategiene har Pearn og Stephens (2004) identifisert tre ulike typer misoppfatninger[6] i elevers arbeid med å sammenligne brøker. Den første misoppfatningen har de kalt «comparing-to-a-whole-thinking». Eksempel på dette kan være at en elev hevder at $\frac{1}{2}$ er større enn $\frac{3}{5}$, fordi $\frac{3}{5}$ er to deler fra å være en hel, og $\frac{1}{2}$ kun er en del fra å være en hel. I realiteten er $\frac{3}{5}$ større enn $\frac{1}{2}$, så å konkludere på dette grunnlaget vil være ukorrekt. Den andre misoppfatningen, «larger-is-bigger-thinking», handler om at eleven enten tenker at jo større nevneren er, desto større er brøken, eller at eleven sammenligner både teller og nevner ved å si at $\frac{18}{24}$ er større enn $\frac{12}{20}$ fordi både teller og nevner er størst i den første brøken. Den siste misoppfatningen som ble identifisert av Pearn og Stephens (2004, s. 434) er kalt «gap thinking». Det går ut på at eleven ser på differansen mellom teller og nevner og konkluderer feilaktig med at jo mindre differanse, desto større er brøken. En elev kan for eksempel si at $\frac{3}{5}$ er større enn $\frac{9}{12}$, fordi det er mindre differanse mellom 3 og 5 enn det er mellom 9 og 12, selv om $\frac{9}{12}$ faktisk er større.

2.7 Addisjon i brøk

Mange generasjoner opplevde at brøkregningen ble praktisert gjennom å følge regler, ofte uten forståelse for hvorfor disse reglene fungerte (Anghileri, 2000, s. 118). Å addere og subtrahere brøk er bare mulig hvis de tilhører samme «familie» med like nevnere. Hvis en skal addere $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{5}$ for eksempel, må alternative representasjoner bli funnet og det er der opplevelser med likeverdige brøker er viktige. Å addere $\frac{5}{10}$ og $\frac{4}{10}$ uten å bruke en regel vil bare være mulig hvis disse tallene er gjenkjent som «fem tideler» og «fire tideler», som til sammen blir «ni tideler». Anghileri (2000, s. 118) mener at det er bedre å diskutere meningene til disse representasjonene enn å introdusere regler, slik som «adder tallene på toppen». Grunnen til at det er bedre å diskutere meningene til representasjonene er at barn som forstår lettere vil

[6] Jeg har valgt å ikke oversette begrepene Pearn og Stephens (2004) bruker om de ulike misoppfatningene, slik at jeg ikke mister noe av betydningen i begrepene de har valgt.

huske prosedyrene, og være i stand til å overføre denne kunnskapen til arbeid med lignende situasjoner.

Brøk krever at to størrelser ses i en multiplikativ relasjon til hverandre – det skraverte mot det hele. I de første skoleårene arbeides det mye med additiv tenkning der størrelser kan telles, og overgangen til brøk blir da stor. Ofte fortsetter elevene å telle antall skraverte og antall deler totalt og lærer hvordan de skal skrive det som brøk. Van de Walle et al. (2014) mener at det er viktig å snakke om vanlige misoppfatninger, uansett hvilket tema elevene arbeider med. Å snakke om misoppfatninger er særlig viktig i arbeid med brøk, siden elevene lett overgeneraliserer reglene de kjenner fra arbeid med hele tall (Van de Walle et al., 2014, s. 344). Lamon (2012) refererer til et kvalitativt sprang som elever må komme over når de beveger seg fra hele tall til brøk. Som sagt vil barn til å begynne med avvise brøk som tall siden brøkene ikke er en del av tellesekvensen. Dette kan føre til at en elev tenker at brøk er to ulike hele tall, en misoppfatning som ofte resulterer i feil i utregningsoppgaver. For eksempel vil $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ fort bli $\frac{2}{6}$ i elevenes utregning, da de legger sammen teller med teller og nevner med nevner. En slik additiv tenkning er typisk når en elev begynner å regne med brøker (Lamon, 2012).

2.8 Estimering innen brøk

Estimering er definert som å finne et omtrentlig svar på aritmetiske problemer uten å egentlig regne seg frem til et nøyaktig svar (Lemaire, Lecacheur & Farioli, 2000, s. 141). Å kunne estimere er en viktig del av matematisk erkjennelse, da det gir informasjon om menneskers generelle forståelse for matematiske begreper, relasjoner, strategier og om barns kognitive utvikling i matematikkfaget. Lemaire, Lecacheur og Farioli (2000) har forsket på tiåringer og deres strategibruk når de skal estimere aritmetiske problemer. Mange av elevene i Lemaire et al. (2000) sin studie hadde problemer med å estimere svaret på $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$. Elevene kunne velge mellom å svare 1, 2, 19 eller 21, og 55% av svarte enten 19 eller 21. Dette viser at mange elever ikke har forståelse for at brøken $\frac{12}{13} \approx 1$ og $\frac{7}{8} \approx 1$, og at summen av $\frac{12}{13} + \frac{7}{8} \approx 2$ (Behr, Post & Wachsmuth, 1986, s. 103). Behr et al. (1986) hevder at dersom en elev skal lykkes i å estimere summen til $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ er eleven avhengig av å ha en forståelse for størrelsen til de respektive rasjonale tallene. Det er viktig å finne ut om elevene forstår telleren og nevneren i brøk som et tall som angir et forhold eller om de ser på teller og nevner som to separate tall. For å avgjøre størrelsen på brøk kreves en forståelse for forholdet mellom teller og nevner.

Telleren, nevneren og forholdet mellom dem må bli sett i sammenheng for at man skal kunne estimere korrekt eller forstå størrelsen til et gitt rasjonalt tall. Mange barn håndterer tellere og nevnere separat, altså ser de ikke på telleren og nevneren i relasjon til hverandre (Behr et al., 1986).

2.9 Plassering av brøk på tallinjen

Tidligere har jeg vist til at elever bør være i stand til å lokalisere et tall på en tallinje, samt å identifisere et tall som er representert ved et bestemt punkt på tallinjen. Forskning har vist at elever har vanskeligheter med nettopp dette (for eksempel Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Hannula, 2003). Det har blant annet vist seg at elever teller strekene i stedet for å se på segmentene på tallinjen og at de bruker feil enhet, særlig når lengden er mer enn 1.

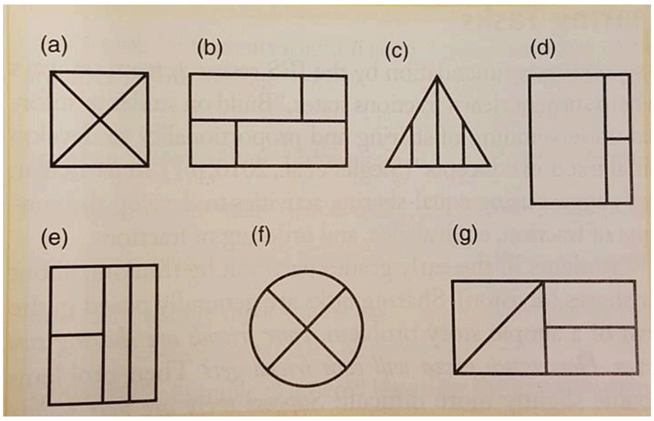
At elever har vanskeligheter med å plassere tall på tallinjen kan ha en sammenheng med at mange elever ikke tenker på størrelsen av fargelagte deler, men at de kun teller de fargelagte delene og antall deler totalt (McNamara & Shaughnessy, 2010, s. 5). Elevenes fokus på å telle deler uten å ta størrelsen i betraktning fører til at de ikke ser på det fargelagte området som en del av et areal. Når det gjelder arbeid med tallinjen er det, ifølge McNamara og Shaughnessy (2010), en tendens at elevene fokuserer på antallet deler som avstanden er delt inn i. De ignorerer avstanden mellom segmentene, og fokuserer ikke direkte på avstanden fra 0 i relasjon til en enhet. For eksempel kan elever markere et punkt på en tallinje som $\frac{3}{5}$, fordi enheten er delt inn i fem segmenter og punktet er lokalisert på det tredje segmentet, selv om lengdene av de ulike segmentene er forskjellige. Videre vil jeg presentere to begreper som er sentrale når jeg skal snakke om plassering av brøker på tallinjen, nemlig partisjonering og iterering.

2.9.1 Partisjonering

Å dele en form inn i deler av lik størrelse er kalt partisjonering (Van de Walle et al., 2014, s. 316). Partisjonering er viktig for å utvikle små elever sin forståelse for brøkbegrepet. Det er mulig å partisjonere former, lengder og mengder[7]. Når elever skal partisjonere med arealmodeller møter de ofte på former der de får spørsmål om størrelsen til den fargelagte brøken. Resultatet er at elevene tror at like deler må ha samme form, men det er ikke tilfellet. Spesielt unge elever fokuserer på formen, selv om fokuset heller burde vært på deler av lik størrelse (Van de Walle et al., 2014, s. 316). I arbeid med oppgaven som vises i figur 2 vil

[7] Jeg kommer ikke til å utdype partisjonering med mengder, da det ikke er relevant i denne studien.

elevene kanskje bare akseptere at (a) og (f) er delt inn i like store deler, de vil muligens ikke godta inndelingen til (e) og (g).



Figur 2: En elev bør være i stand til å avgjøre hvilke av disse figurene som er korrekt partisjonerte i fjerdedeler, og hvorfor de andre ikke viser fjerdedeler (Van de Walle et al., 2014, s. 317).

Som med arealmodeller er det viktig å se om elever kan gjenkjenne og skape nøyaktig partisjonerte lengdemodeller (Van de Walle et al., 2014, s. 317). Elever kan lett ignorere avstanden eller lengden av hvert segment (McNamara & Shaughnessy, 2010). Å tilby elevene eksempler hvor partisjoneringen ikke allerede er illustrert kan hjelpe elevene å utvikle en bedre forståelse for like deler (Van de Walle et al., 2014).

2.9.2 Iterering

I brøksammenheng er telling eller gjentakelse av en del kalt iterering (Van de Walle et al., 2014, s. 320). I likhet med partisjonering er iterering en viktig del av det å forstå og bruke brøk. Å forstå at $\frac{3}{4}$ kan bli sett på som en telling av tre deler kalt fjerdedeler er en viktig idé som elever må utvikle (Post, Wachsmuth, Lesh & Behr, 1985). Van de Walle et al. (2014) sier at å telle brøkdeler for å se hvordan flere deler kan sammenlignes med helheten hjelper elever å forstå forholdet mellom delene (telleren) og helheten (nevneren). Det iterative begrepet er klarest når det fokuseres på to ideer om brøksymbolet, nemlig at telleren telles, og at nevneren forteller hva som blir telt (Van de Walle et al., 2014). Iterering gir mening i arbeid med lengdemodeller fordi iterering er ganske likt måling. Dersom en elev får oppgitt en lengde, for eksempel 2,5 meter, og spørsmålet er hvor mange fjerdedeler man har, så kan eleven bruke en tråd eller liknende som er $\frac{1}{4}$ av en meter som et måleverktøy (Van de Walle et al., 2014, s. 320). I elevenes arbeid med iterering kan det være fordelaktig å diskutere forholdet mellom delen(e) og helheten.

3.0 METODISKE VALG

I dette kapittelet skal jeg begrunne valgene jeg har tatt og beskrive metodene jeg har brukt i forbindelse med innsamling, bearbeidelse og analyse av datamaterialet mitt. Først vil jeg presentere mitt valg av forskningsdesign og metode. Deretter beskriver jeg kontekst og utvalg for undersøkelsene, og datainnsamlingsprosessen. Videre tar jeg for meg bearbeidelsen og analysen av det innsamlede materialet, før jeg til slutt diskuterer troverdigheten til forskningen min og etiske forholdsregler jeg har måttet ta hensyn til både ved innhenting og analyse av materialet.

3.1 Mål og forskningsdesign for studien

Denne oppgavens hensikt er å belyse hvordan arbeid med grubletegninger kan legge til rette for arbeid med brøk. For å kunne vurdere dette syntes jeg det var hensiktsmessig å gjennomføre intervjuer med mindre elevgrupper. Gjennom gruppeintervju får forskeren mulighet til å få innsikt i den enkeltes forståelse og tenkemåte, i tillegg til hva som skjer når ulike meninger og forståelser møtes (Cohen, Manion & Morrison, 2011). Jeg har gjennomført seks intervjuer – tre intervjuer med hver elevgruppe. I intervjuene fikk elevene utdelt tre grubletegninger knyttet til brøkbegrepet, og de ble bedt om å vurdere gyldigheten til de ulike utsagnene på grubletegningene. I fellesskap skulle elevene diskutere hva de mente og hvorfor de mente nettopp dette. Siden det innsamlede materialet er relativt lite og nærheten til forskningsdeltakerne er stor, vil jeg kalle denne oppgaven et resultat av en småskala kvalitativ undersøkelse.

Kvalitativ forskning setter forskningsdeltakerne i fokus, og har et mål om å løfte frem og forstå deres meninger, oppfatninger, handlinger, holdninger, intensjoner og væremåter, på en detaljert og fyldig måte (Cohen et al., 2011, s. 219). Dalland (2007, s. 82) skriver i sin bok at de kvalitative metodene i større grad enn de kvantitative tar sikte på å fange opp mening og opplevelse som ikke lar seg tallfeste eller måle. Fra et ontologisk og epistemologisk perspektiv er virkeligheten og kunnskapen i kvalitativ forskning noe som oppstår i møtet mellom forsker og forskningsdeltakere (Nilssen, 2012). Relasjonen mellom de som er involverte i forskningsstudien vil derfor være av stor betydning for konstruksjonen av datamaterialet og resultatene forskeren ender opp med. Samspillet mellom forsker og forskningsdeltaker gjør forskningen mer fleksibel, samtidig som det stilles krav om å følge prinsipper for etikk og troverdighet (Nilssen, 2012). Som forsker er det viktig å ha et bevisst og refleksivt forhold til at man selv er med på å påvirke studien. Forskeren påvirker både gjennom tilstedeværelse i forskningssituasjonen, som dermed vil ha innvirkning på informantenes handlinger, og gjennom de forforståelsene man har av situasjonen og forskningsfeltet (Nilssen, 2012).

3.1.1 Gruppeintervju som kvalitativ metode

Intervju er en metode som ofte blir brukt i kvalitativ forskning. Cohen et al. (2011, s. 409) skriver at «[i]nterviews enable participants (…) to discuss their interpretations of the world in which they live, and to express how they regard situations from their own point of view». Intervjuet kan altså gi forskeren mulighet til å få innsikt i de(n) intervjuedes forståelse og tankegang. Jeg har i mitt prosjekt valgt å intervjue to elevgrupper, der hver gruppe består av tre elever. Gjennom gruppeintervju kan personer med ulike meninger og forståelser møtes. I et gruppeintervju blir det behov for at synspunkter som legges frem må begrunnes og forklares, siden enkeltutsagn kan bli møtt med kommentarer eller spørsmål fra de andre i gruppen (Postholm & Jacobsen, 2011). Denne typen intervju kan likevel produsere en såkalt «gruppetenking», som motvirker at enkeltpersoner som har et annet syn enn de andre snakker ut foran de andre gruppemedlemmene (Cohen et al., 2011, s. 432). Dette merket jeg noe til i gjennomførelsen av samtalene, spesielt med den ene gruppen, der særlig en elev var den som holdt diskusjonen i gang. Selv om vedkommende ikke alltid hadde et matematisk korrekt resonnement snakket eleven på en overbevisende måte, og de to andre elevene ble sittende på sidelinjen og si «vet ikke», «jeg tror det samme» og liknende. Etter at jeg som forsker presset litt ekstra på de to andre elevene forsøkte de å si hva de tenkte, men det kan virke som at de satt med tanker om at de ikke kunne dette like godt som eleven som snakket hele tiden. Resonnementene var derfor mer usikre – selv om det de sa i flere av tilfellene var helt riktig.

Ved å gjennomføre intervju med elevgrupper, ble det mulig for meg å få tak i hvordan elevene argumenterte overfor hverandre og å observere hvorvidt elevene bygde på hverandres argumenter og begrunnelser idet de skulle konstruere sine egne. I gruppeintervju er det viktig å ta hensyn til to faktorer. Den første faktoren er at det i gruppeintervju kan ende med at en av deltakerne dominerer, slik at de andre havner i bakgrunnen. Et gruppeintervju kan også føre til situasjoner hvor enkelte i gruppen ikke ønsker å ytre meninger som går mot de andre deltakerne i gruppen (Cohen et al., 2011). Den andre faktoren er at det i intervjusituasjoner kan bli et asymmetrisk maktforhold mellom intervjueren og intervjudeltakerne (Cohen et al., 2011). Intervjueren definerer situasjonen, temaet og gjennomføringen av intervjuet. Særlig ved intervju av barn vil det være ubalanse i dette maktforholdet, da intervjueren vil kunne bli oppfattet som en naturlig autoritet i situasjonen. Barn kan da handle ut fra motivasjon om å glede intervjueren eller et ønske om å svare på riktig måte. Likevel blir gruppeintervju regnet som nyttig ved intervju av barn, da det både skaper en viss trygghet, oppmuntrer til interaksjon og lar barna ta i bruk sitt eget språk og sine egne referanser (Cohen et al., 2011).

3.1.2 Grubletegninger som metode

Grubletegninger er et lærings- og undervisningsverktøy som hovedsakelig er brukt i naturfagsopplæringen for å utforske naturfaglige begreper, men Sexton et al. (2009) tror dette også har stort potensiale i matematikkopplæringen. Grubletegninger er som sagt i teorikapittelet ment for å fremkalle ideer, utfordre tankegangen og støtte elevene i deres utvikling av forståelse (Keogh & Naylor, 1999). Siden jeg ikke fant noen matematiske grubletegninger på norsk, var det jeg selv som måtte konstruere grubletegningene og tenke ut hvordan de skulle presenteres for elevene. Elevene var ikke vant til å arbeide med grubletegninger, da dette var helt nytt for dem. Før gjennomføringen av gruppeintervjuene gjennomgikk jeg hva en grubletegning er, og hvordan jeg forventet at de skulle arbeide med grubletegningene jeg hadde laget. I denne gjennomgangen viste jeg også grubletegningen fra pilotprosjektet for å gi dem et eksempel på hvordan en grubletegning kan se ut. I arbeidet med grubletegningene måtte elevene benytte seg av den kunnskapen de allerede hadde om argumentasjon og matematikk for å finne en løsning. I den første delen av analysekapittelet vil jeg se på hvilke kunnskaper som kreves av elevene for å løse oppgavene, og hvilket matematisk og didaktisk potensiale som ligger i dem.

En typisk undervisningsøkt som baserer seg på bruk av grubletegninger er ifølge Keogh og Naylor (1999) som følger:

1) En kort introduksjon til aktiviteten.
2) En invitasjon til elevene om å reflektere over grubletegningen og diskusjon i grupper rundt hva de trodde og hvorfor.
3) Samhandling og innblanding av læreren der det er hensiktsmessig i løpet av undervisningsopplegget.
4) Praktisk etterforskning eller forskningsbasert aktivitet for å følge opp elevenes ideer, oppmuntret og støttet av læreren dersom det er nødvendig.
5) Diskusjon i hel klasse for å dele og utfordre ideer.

I mitt forskningsprosjekt forsøkte jeg å legge opp til en slik økt. Punkt 5 ble sløyfet, da jeg ikke hadde hele klassen tilgjengelig i undersøkelsene, men det ble gjennomført en avsluttende oppsummering innad i de to elevgruppene jeg gjennomførte datainnsamlingen med.

3.2 Konteksten til studien og utvalget til gruppeintervjuene

Etter noe overveielse og vurdering av hvilken skole jeg ville samle inn data ved bestemte jeg meg for å samle inn ved en skole i Trondheim. Jeg hadde kjennskap til skolen fra før, og kom kjapt i kontakt med lærerne på skolen. Jeg opprettet kontakt med en lærer på skolen via SMS, og denne læreren avklarte situasjonen med resten av lærerne på skolen. I diskusjon med lærerne kom vi frem til at det ville være fint å gjennomføre datainnsamlingen på sjette trinn. Klassen jeg gjennomførte mine undersøkelser i bestod av rundt 15 elever, der alle elevene hovedsakelig var av norsk opprinnelse. Like etter kontakten med lærerne på skolen, utarbeidet jeg et informasjonsskriv med samtykkeerklæring som ble sendt med alle elevene på trinnet hjem. På bakgrunn av godkjennelsene plukket kontaktlæreren til klassen ut seks elever som jeg kunne gjennomføre samtalene mine med.

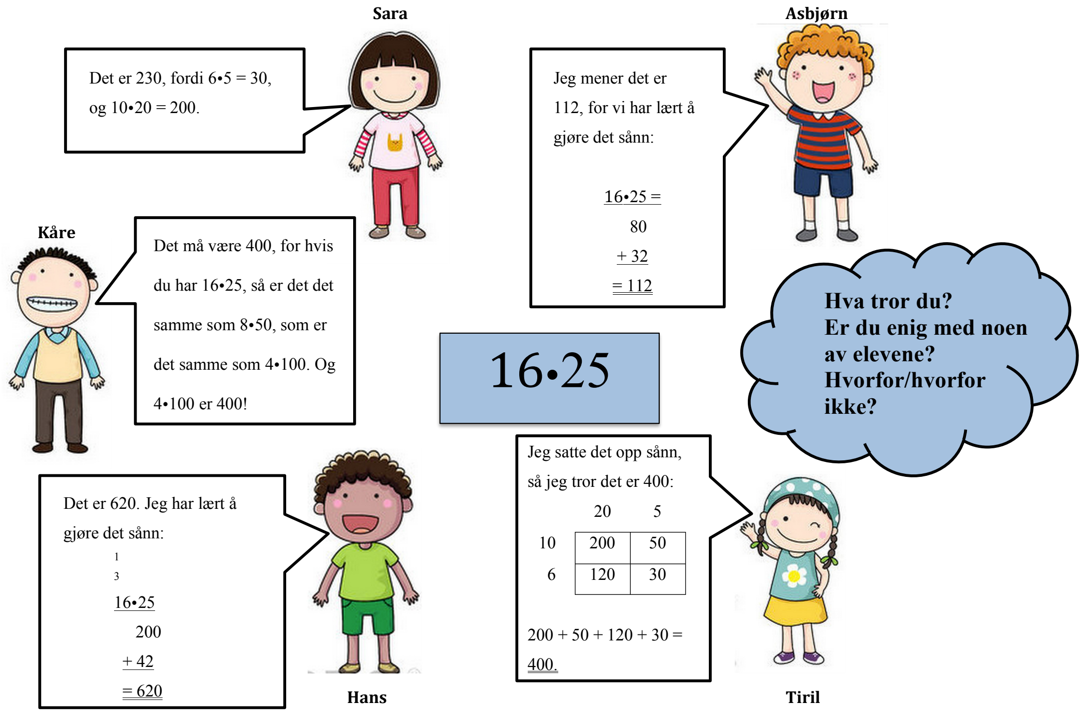
Utvalget til gruppeintervjuene var et formålstjenlig ikke-sannsynlighetsutvalg, noe som er vanlig i småskala kvalitative undersøkelser (Cohen et al., 2011). De fleste elevene på trinnet leverte samtykkeskjema underskrevet av foreldre og foresatte, og blant disse valgte læreren ut elever til å delta i intervjuene. Det eneste jeg sa til læreren i forkant var at elevene godt kunne ha ulikt faglig nivå i matematikk, men at læreren kunne bestemme hvilke elever jeg skulle ta ut fra klasserommet basert på hva læreren mente ville være mest hensiktsmessig. Jeg valgte at hver intervjugruppe skulle bestå av tre elever. Grunnen til at jeg valgte denne størrelsen var at gruppene skulle være små nok til at elevene ikke kunne la være å involvere seg, men likevel store nok til at det var et utvalg av ulike forståelser og begrunnelser. I tillegg til de to intervjugruppene, deltok også tre elever fra samme trinn i en pilotundersøkelse i forkant av min primære datainnsamling.

3.3 Datainnsamlingsprosessen

Jeg vil nå presentere hvordan innsamling av datamateriale til studien foregikk. Jeg gjennomførte først et pilotintervju, og deretter seks gruppeintervjuer – tre intervjuer med hver elevgruppe. Pilotundersøkelsen ble gjennomført i slutten av september, og de seks andre intervjuene ble gjennomført i slutten av oktober og begynnelsen av november. De seks intervjuene var fordelt på tre ulike dager, spredt over en uke. For å få innsikt i hva elevene hadde vært borti innenfor brøkundervisningen tidligere, så jeg nærmere på læreboken elevene brukte, og de bøkene de hadde hatt tidligere skoleår.

3.3.1 Pilotundersøkelse

Det første gruppeintervjuet jeg gjennomførte var en pilotundersøkelse, og som Cohen et al. (2011, s. 492) sier kan slike undersøkelser gjennomføres på flere måter. Jeg gjennomførte pilotundersøkelsen med en liten gruppe testdeltakere, der jeg testet ut oppgavetypen jeg ønsket å bruke. Hensikten var å undersøke hvordan grubletegninger fungerte som metode i matematikkfaget, og om dette var noe jeg kunne bygge videre på i min forskning. I tillegg ga pilotprosjektet meg en viss indikator på hvor lang tid hver gruppe burde få i arbeidet med grubletegningene. Multiplikasjon av flersifrede tall var det matematiske fokuset i grubletegningen som ble brukt i pilotundersøkelsen.



Figur 3: Grubletegning brukt i pilotundersøkelse.

Etter gjennomføringen av pilotundersøkelsen skrev jeg ned mine umiddelbare tanker og ideer, og hadde fokus på hvilke endringer jeg måtte gjøre før selve datainnsamlingen. Jeg fant blant annet ut at jeg i neste runde måtte ha en tydeligere gjennomgang av hva en grubletegning er, og hvordan det kan arbeides med en slik type tegning. Under gjennomføringen av pilotundersøkelsen måtte jeg forklare en del rundt hvert utsagn og vise eksplisitt hva de ulike karakterene tenkte, noe jeg ikke ønsket å gjøre i neste runde. Jeg erfarte at det var en viss utfordring å få elevene til å diskutere med hverandre. I de senere intervjuene inntok jeg rollen som en spørrende og tvilende person som elevene måtte overbevise, noe som fungerte bedre for å få elevene til å uttrykke seg tydeligere.

Gjennom pilotundersøkelsen fant jeg også ut at jeg ville redusere antallet utsagn fra fem til fire, da det ble litt i overkant for elevene å ta stilling til så mange utsagn. Jeg tenkte også en del over om det var uheldig å ha to utsagn som hadde samme svar, da elevene raskt tenkte at Tiril og Kåre hadde riktig på grunn av at de hadde samme svar. I de endelige grubletegningene, som jeg skal gå nærmere inn på senere, ble det likevel sånn at flere av karakterene på grubletegningene var enige om noe, men fokuset i diskusjonen ble heller rettet mot måten karakterene uttrykte seg på.

3.3.2 Gjennomføring av gruppeintervjuene

Intervjuene foregikk på skolen på tidspunkter hvor elevene hadde matematikkundervisning. Intervjuenes maksimale varighet var lengden på undervisningstimen, i dette tilfellet 60 minutter. På den tiden rakk jeg å gjennomføre en samtale med hver gruppe. Det ble gjort lyd- og videoopptak av intervjuene, i tillegg til at alt av skriftlig materiale som elevene produserte i løpet av intervjuet ble samlet inn. Intervjuene ble gjennomførte på et lite møterom på skolen, og elevene var plassert rundt et rundt bord. Hvert intervju startet med en kort samtale angående det som ble gjort forrige gang og informasjon om hva som skulle skje den aktuelle dagen. Deretter ble en grubletegning delt ut til hver elev, og elevene fikk tid til å studere grubletegningen individuelt før diskusjonen startet. Innledningsvis til diskusjonen telte jeg ned fra tre, og på en skulle elevene peke på det utsagnet de ville si seg mest enig i på det aktuelle tidspunktet. Hvor elevene pekte i begynnelsen hjalp diskusjonen i gang, og det ble kanskje ikke like skummelt å diskutere, da elevene ikke trengte å føle at det direkte var deres tanker. Elevene kunne si seg enig med fiktive karakterer, og de fikk også en slags indikasjon på at andre kan tenke noe lignende som dem selv.

I etterkant av diskusjonen av hver grubletegning hadde jeg en felles oppsummering sammen med informantene. Her kunne informantene dele sine tanker rundt opplegget, samt ta opp eventuelle endringer som kunne bli gjort til neste runde. Jeg benyttet meg av to ulike grubletegninger samme dag. Den ene gruppen skulle diskutere en grubletegning, og den andre gruppen skulle diskutere en annen av grubletegningene jeg hadde laget. Neste gang jeg kom for å gjennomføre gruppeintervju med elevene byttet jeg om på grubletegningene, slik at begge grupper hadde diskutert de samme grubletegningene. I det tredje intervjuet diskuterte begge grupper den samme grubletegningen. Grunnen til at jeg ga gruppene ulike grubletegninger de første to dagene var at jeg da kunne gjøre eventuelle endringer dersom det var nødvendig før den andre gruppen skulle arbeide med den samme.

I gjennomføringen av intervjuene var jeg opptatt av å få tak i elevenes meninger, forståelse og argumenter for de ulike utsagnene. I mange tilfeller stilte jeg oppfølgingsspørsmål, med hensikt å få større innsikt i elevenes tanker. Som en konsekvens av dette blir jeg som intervjuer en delaktig medspiller i diskusjonen i enkelte deler av intervjuene. I analyse av intervjuene er det derfor nødvendig å ta i betraktning hvordan jeg som intervjuer har innvirkning på det elevene sier.

3.4 Bearbeiding og analyse av materialet

3.4.1 Transkripsjon og etterarbeid

Lydopptakene fra alle intervjuene ble transkribert. Tekster som produseres av forskeren, slik som transkripsjoner, vil aldri bli helt nøyaktige. Mimikk, tonefall, gester og lignende forsvinner idet menneskelige situasjoner blir til tekst, og i tillegg vil forskeren alltid tolke og velge hva som blir lagt vekt på (Nilssen, 2012). I mitt arbeid med transkripsjonene var jeg nøye på å få gjengitt det elevene sa på en mest mulig korrekt måte, da dette gir innsikt i forståelsen deres og interaksjonen mellom elevene. Jeg har også videoopptakene å se på dersom jeg ønsker et mer tydelig bilde av situasjonen som utspilles. Jeg transkriberte samtalene med en gang etter gjennomføringene. Jeg valgte å transkribere elevutsagnene på dialekt, på grunn av at jeg syntes det ble litt kunstig å skrive det om til bokmål. Siden det var så kort tid mellom gjennomføring og transkribering var det lett å huske hva elevene henviste til og pekte på da de sa «den der» og «sånn som det der», og dette er noe jeg tror gjorde arbeidet mitt lettere og litt mindre tidkrevende siden jeg ikke trengte å gruble så lenge på hva det var elevene mente med det de sa.

Ved å være tilstede samtidig som at elevene diskuterte fikk jeg tilgang til ytringene deres, jeg kunne stille spørsmål dersom noe var uklart og jeg så hva de pekte på, henviste til og gjorde underveis. Jeg vurderte lenge om jeg skulle droppe å transkribere enkelte partier som ikke var så relevante for oppgaven, men valgte til slutt å transkribere alt, da det kanskje kunne vise seg at det som ikke er direkte relevant likevel hadde innvirkning på det som ble sagt like etter eller lenger ut i samtalene.

I transkripsjonsarbeidet brukte jeg ulik tegnsetting for å markere enkelte elementer fra samtalen:

–	Eleven blir avbrutt av en annen elev
..	Nøling
…	Pause i ca. 3 sekunder
(tekst i parentes)	Ikke-verbal handling / informasjon om situasjonen
[pause n s]	Pause n sekunder

3.4.2 Analyseprosessen

I følge Cohen et al. (2011) er det ikke én korrekt måte å analysere og presentere kvalitativ data, men måten en forsker gjør det på bør stemme overens med formålet for forskningen (Cohen et al., 2011). Analyse av kvalitative data inneholder mye tolkning fra forskerens side, og det er viktig å merke seg at det finnes flere mulige tolkninger. En av de største utfordringene ved å analysere intervju, ligger i å ivareta helheten samtidig som man plukker ut interessante situasjoner. Cohen et. al (2011, s. 427) «in interviews often the whole is better then the sum of its parts». I ettertid av gjennomføringen har jeg hørt igjennom lydopptakene mine flere ganger, blant annet for å kontrollere at transkripsjonene gir en god og nøyaktig gjengivelse av elevenes diskusjoner, men først og fremst for å beholde et bilde av helheten av de ulike intervjuene. I analyseprosessen kommer jeg til å se på enkeltsituasjoner hentet fra gruppeintervjuene.

Analysearbeidet mitt var todelt. I den første delen analyserte jeg grubletegningene som jeg hadde laget. I analysen av grubletegningene vurderte jeg først hvilken matematikk som lå i hvert enkelt utsagn. I tillegg vurderte jeg hva arbeid med grubletegninger kan legge til rette for. I dette arbeidet var det behov for å se på teori knyttet til både brøk og grubletegninger.

Den andre delen av analysearbeidet mitt besto av å studere elevutsagn. Johannessen, Tufte og Christoffersen (2016, s. 161) sier at det kan være en utfordring å få noe fornuftig ut av en stor mengde, ofte ustrukturerte data. Jeg startet med å høre gjennom lydopptakene og lese transkripsjonen mange ganger for å se at det skriftlige stemte overens med det som ble sagt. Etter at jeg hadde skaffet meg et oversiktsbilde over samtalene gikk jeg nøyere inn i transkripsjonsnotatene mine og forsøkte å hente ut de utdragene som var mest interessante, og som jeg så for meg at jeg kunne bruke for å finne svar på mitt forskningsspørsmål. I arbeidet med å velge ut utdrag benyttet jeg meg av det Johannessen et al. (2016) kaller tverrsnittbasert og kategorisk inndeling av data. Den tverrsnittbaserte inndelingen av datamaterialet betyr at jeg konstruerte et system for å indeksere datamengden. Indeksering vil si at jeg satte merkelapper på setninger eller avsnitt som kunne gjøre det mulig å identifisere og finne igjen spesielle temaer i datamaterialet (Johannessen et al., 2016, s. 165). Dette indekssystemet endte opp i en form for kategorisering, der hver kategori ble brukt om en gruppe relevante tema som hadde fellestrekk eller på en eller annen måte var like. Kategoriene jeg har valgt å analysere utdragene ut fra er additiv tenkning, multiplikativ tenkning, vurdering av nevneren og annet. Det var vanskelig å sortere og kategorisere utsagnene på en ryddig måte, siden mangfoldet innad i transkripsjonene var stort. Å finne passende navn til de ulike kategoriene var heller ikke lett, men jeg har forsøkt å redegjøre for hva jeg legger i de ulike kategoriene etter hvert som de blir presentert i analysekapittelet. Jeg har benyttet meg av tolkende lesning av datamaterialet mitt. Denne tolkende lesningen betyr at jeg som forsker har arbeidet med å vise hva jeg tror dataene betyr og representerer (Johannessen et al., 2016). Jeg har gjort et forsøk på å forstå hvordan informantene tolker og forstår det fenomenet jeg studerer. Siden jeg leser på en tolkende måte har jeg ikke vært så opptatt av det elevene sier helt ordrett, men jeg har heller valgt å se på hva som ligger bak det som blir sagt.

3.5 Troverdighet

Forskning om og med mennesker kan aldri bli fullstendig valid og reliable. Gjennom å reflektere over og være oppmerksom på validitet og reliabilitet gjennom hele forskningsprosessen kan forskeren likevel strekke seg mot idealet (Cohen et al., 2011). I kvalitativ forskning er troverdighet det overordnede begrepet for gyldighet, pålitelighet og overførbarhet (Drageset & Ellingsen, 2010, s. 334). Drageset og Ellingsen (2010) sier videre at troverdighet i kvalitativ forskning omfatter hele studien, og vurderingen av troverdighet innebærer i hvilken grad forskeren har frembrakt resultater som er gyldige, pålitelige og overførbare. Gyldighet underveis i et intervju handler om at forskeren har undersøkt det som skulle undersøkes, og det kan blant annet innebære at forskeren regelmessig sjekker sin egen oppfatning med spørsmål som: «Har jeg forstått deg rett når du sier at…?». Å regelmessig sjekke sin egen oppfatning kan bidra til at materialet i størst mulig grad representerer en felles forståelse mellom forsker og informant. I samtalene stilte jeg ofte elevene spørsmål dersom noe var uklart. Dette for at jeg skulle kunne forsikre meg om at jeg forsto det elevene uttrykte da jeg senere skulle gå i gang med mitt transkriberings- og analysearbeid. Hver gang elevene kom med et utsagn jeg ikke helt forsto eller som var litt uklart, prøvde jeg å få dem til å gjenta eller omformulere, eller jeg stilte spørsmål for å forsikre meg om at jeg forsto det de sa på riktig måte. Ved å gjøre dette kunne jeg henge med i tankerekkene deres. Helt i begynnelsen trakk elevene seg litt tilbake da jeg stilte spørsmål, da de kanskje følte at det de sa var feil siden jeg spurte. Etter hvert skjønte de at det ikke handlet om hva som var riktig eller feil, men bare at jeg ville forstå hva og hvordan de tenkte.

Drageset og Ellingsen (2010, s. 335) sier i sin artikkel at pålitelighet omfatter konsistens og nøyaktighet, og at en trussel mot troverdigheten kan være at forskeren har vært lite oppmerksom og slurvete i nedtegning og analyse av data. Forskeren kan styrke påliteligheten ved å gi leseren en inngående beskrivelse av konteksten og en detaljert fremstilling av fremgangsmåten under hele forskningsprosessen. Elevene i mitt prosjekt fikk god informasjon om prosjektet de skulle være en del av, og gjennom samtalene stiftet de også bekjentskap med grubletegninger som metode. Elevene hadde vanskelig for å godta at det var mer enn et riktig svar på et problem, og det virket som at det var utfordrende for dem å argumentere for hvorfor deres svar var riktig, og eventuelt hvorfor utsagnet deres var mer riktig enn andre utsagn. Heldigvis gikk dette over etter hvert i undersøkelsen, og elevene skjønte hvorfor jeg sa og gjorde som jeg gjorde. Tjora (2013, s. 207) hevder at vi kan styrke gyldigheten ved å være åpne om hvordan vi praktiserer forskningen, ved å redegjøre for de valg vi tar for eksempel når det gjelder datainnsamlingsmetoder og teoretiske innspill til analysen. I kvalitativ forskning er ikke forskeren en nøytral person som står utenfor og ser på forskningskonteksten med et objektivt blikk (Nilssen, 2012, s. 139). Forskeren er i interaksjon med forskningsdeltakerne og påvirker gjennom forskningskonteksten og gjennom datamaterialet. Jeg har forsøkt å unngå å bryte inn i elevenes diskusjoner, men som Nilssen (2012) sier kan ikke forskningen bli objektiv eller fri for verdier. Det er derfor viktig å være åpen om valgene som er tatt og grunnene til disse valgene, og det er dette jeg ønsker å formidle gjennom dette metodekapittelet.

I mitt forskningsprosjekt har jeg et relativt lite elevutvalg, og det vil ikke være mulig for meg å trekke konklusjoner om elever på 6. trinn sin brøkforståelse eller hvordan grubletegninger kan fungere som metode generelt. Jeg kan imidlertid bidra med nye tolkninger til det store bildet om elevers arbeid med brøk, så resultatene fra oppgaven kan sies å ha en viss overførbarhet. Funnene i kvalitative studier er avhengige av konteksten hvor de fant sted, og den samme studien kan dermed aldri bli gjennomført en gang til (Nilssen, 2012).

3.6 Etiske betraktninger

Nærheten mellom forsker og forskningsdeltakerne i kvalitative undersøkelser gjør at det er viktig å ta etiske forholdsregler overfor forskningsdeltakerne. Ved intervju er det hovedsakelig tre etiske retningslinjer som bør bli fulgt: informert samtykke, konfidensialitet og konsekvenser for forskningsdeltakerne (Cohen et al., 2011). Prosjektet mitt hadde fått godkjenning av Norsk Senter for Forskningsdata (NSD), med prosjektnummer 50057, før kontakten ble opprettet med skolen. I henhold til NSDs retningslinjer ble elevene og elevenes foresatte informert om prosjektet gjennom et informasjonsskriv (se vedlegg 1). Informasjonsskrivet jeg utarbeidet åpnet for at jeg kunne kontaktes dersom det var noen som hadde spørsmål i tilknytning til prosjektet. Samtykkeskjemaet ble levert inn gjennom fysisk innlevering av samtykkeskjema til klassens kontaktlærer, før det videre ble gitt til meg.

Klassen jeg gjennomførte datainnsamlingen i kjente meg fra før, da jeg har vært inne i klassen ved tidligere anledninger. Kontaktlæreren informerte om prosjektet mitt da samtykkeskjemaet ble delt ut, og jeg informerte videre om det til de elevene som ble plukket ut. Da informerte jeg om hva prosjektet gikk ut på, spurte elevene om de fortsatt ønsket å delta, elevene fikk beskjed om at de når som helst kunne trekke seg og jeg informerte også om at elevenes navn kom til å bli endret i min oppgave for å sikre konfidensialitet. Lyd-og videoopptakene slettes i henhold til NSDs retningslinjer ved prosjektets slutt.

4.0 ANALYSE

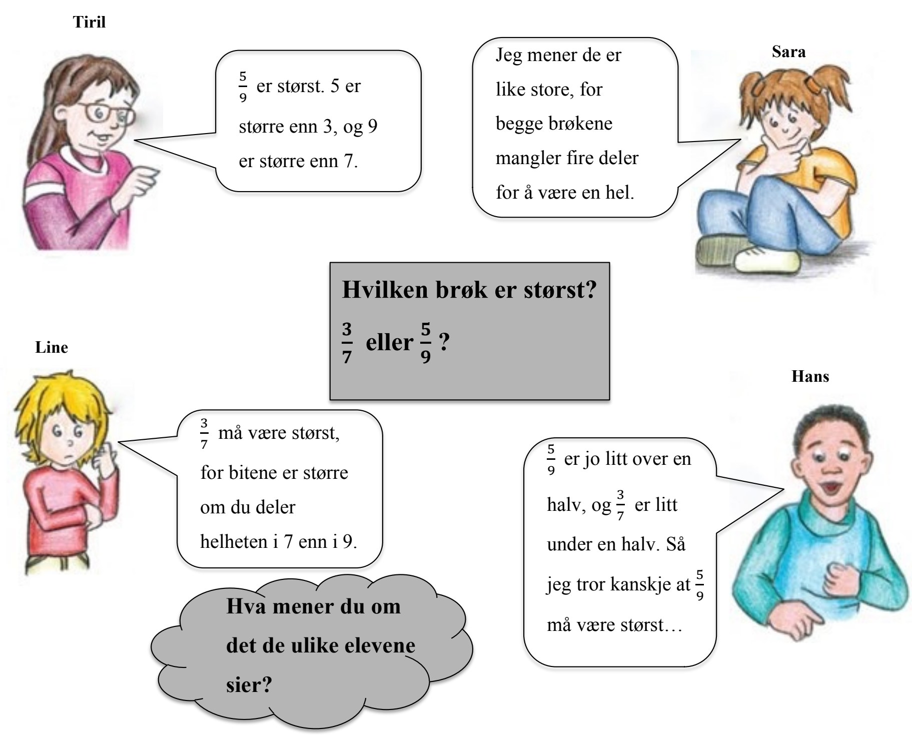
Innledningsvis i denne oppgaven stilte jeg to spørsmål: *På hvilken måte blir tre grubletegninger brukt i elevers matematiske diskusjoner om brøk?,* og *hvilken forståelse for brøk viser de utvalgte elevene i diskusjonene?* Gjennom dette kapittelet ønsker jeg å gi grunnlag for at disse spørsmålene kan bli besvart. Målet med kapittelet er først og fremst å gi innsikt i hvordan elevene i gruppene diskuterer brøkbegrepet i arbeid med de tre grubletegningene jeg har laget. Kapittelet kommer til å starte med en epistemologisk analyse av grubletegningene som ble gitt til elevene. I denne analysen vil hvert utsagn bli kommentert, med sikte på å vise hvilken matematikk som ligger bak de ulike karakterenes ytringer. Jeg sier også litt om hva grubletegningene kan legge til rette for. Etter den epistemologiske analysen vil relevante utdrag fra gruppeintervjuene presenteres og analyseres. Analysen av elevutsagn er ordnet etter kategoriene additiv tenkning, multiplikativ tenkning, vurdering av nevneren og annet. Hvert delkapittel innledes med en kort beskrivelse av hva jeg legger til grunn for kategorien. Deretter presenteres utdrag fra gruppeintervjuene, der jeg analyserer hva som blir sagt og gjort og forsøker å koble det sammen med teori fra teorikapittelet. Analysen tar altså utgangspunkt i transkripsjonen av lydopptakene som ble gjort under gjennomføringene, samt enkelte elevnotater.

Allerede på småskoletrinnene skal elevene ifølge Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2013c) møte enkle brøker og desimaltall i praktiske sammenhenger. Det er snakk om ekte brøker, der elevene bare møter brøker med samme nevner. Grubletegningene jeg presenterte for elevene inneholdt brøker med ulike nevnere, og grunnen til at jeg valgte å bruke ulike nevnere var at jeg ikke ønsket at fokuset skulle være algoritmer og innlærte regneregler, men heller å se på hvordan elevene kunne skape mening ut fra det de fikk vite i oppgavene ved å se på de involverte brøkene og karakterutsagnene.

4.1 Epistemologisk analyse av grubletegningene

Før jeg går i gang med analysen av datamaterialet mitt vil jeg gjøre en analyse av de tre grubletegningene som elevene arbeidet med under datainnsamlingen. Dette er oppgaver jeg selv har laget med utgangspunkt i det matematiske temaet brøk. Jeg har sett i lærebøkene elevene har hatt tidligere i skolegangen, kompetansemålene som kommer frem i Kunnskapsløftet og teori og forskning innenfor temaene brøk og grubletegninger. Basert på det jeg har lest har jeg laget en grubletegning som omhandler sammenligning av brøker, en som tar for seg estimering av sum og en som dreier seg om plassering av brøk på tallinjen. I tråd med grubletegningsteorien jeg har lest, integreres skreven tekst i dialogform med visuell støtte i grubletegningene mine. Bruken av disse dialogene skaper muligheten til å presentere alternative ideer, og å vise ulike strategier og tenkemåter for å komme frem til et svar.

4.1.1 Grubletegning 1: Sammenligning av brøker



Den første grubletegningen handler om sammenligning av brøker. Her har jeg valgt brøker med ulik nevner, der begge brøkene har oddetallsnevnere. Tanken bak valg av oddetallsnevnere var at dette er vanskeligere å tegne opp og dele inn dersom en elev velger en sirkulær form, da det vil være vanskelig å dele opp i like store deler. Gjennom å finne fellesnevneren til de to brøkene er det tydelig at den ene brøken ikke er mye større enn den andre brøken. $\frac{3}{7} = \frac{27}{63}$ og $\frac{5}{9} = \frac{35}{63}$. Altså er det $\frac{8}{63}$ som skiller de to brøkene, noe som er litt mindre enn $\frac{1}{8}$. Siden forskjellen er såpass liten må elevene være veldig gode for å kunne tegne opp brøkene på en måte som gjør de tydelig for dem hvilken brøk som er størst. Valget av brøker ble gjort av nettopp denne hensikten, slik at elevene ikke bare skulle kunne tegne opp og vurdere ut fra representasjonen sin. Felles for alle utsagnene er at karakterene vet at begge brøkene er deler av samme helhet i størrelse. Jeg kommer nå til å ta for meg et og et utsagn, og si hvilken matematikk og hvilke muligheter for diskusjon som ligger i hvert enkelt utsagn.

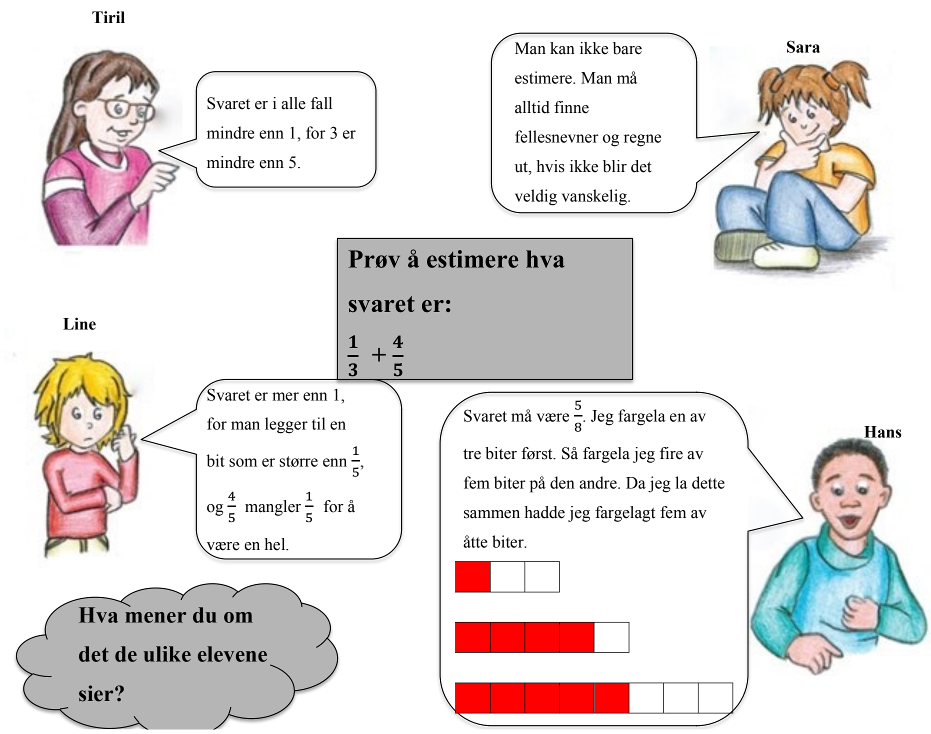
Første utsagn som skal analyseres er Tiril sitt. Hun sier at $\frac{5}{9}$ er størst siden 5 er større enn 3, og 9 er større enn 7. At $\frac{5}{9}$ er den største brøken stemmer jo, men i dette utsagnet er det viktig å se på Tiril sin argumentasjon for hvorfor denne brøken er størst. Hennes argument vil ikke kunne generaliseres, da for eksempel $\frac{12}{30}$ vil være mindre enn $\frac{1}{2}$, selv om 12 er større enn 1 og 30 er større enn 2. Dette henger sammen med det Pearn og Stephens (2004) kaller «larger-is-bigger-thinking», strategien der både teller og nevner i brøkene sammenlignes og det blir tatt en beslutning basert på hvilken brøk som har størst teller og nevner. Det er viktig at elevene blant annet ser på forholdet mellom teller og nevner i de to brøkene. Siden ikke annet er oppgitt i regnestykket må karakteren ta utgangspunkt i at helheten er lik for hver av de to brøkene, altså at en hel er like mye om den så er delt i 7 eller i 9 deler. Det er ikke tilstrekkelig med en «larger-is-bigger» tankegang i arbeid med denne oppgaven. Elevene må i sitt arbeid med Tirils utsagn tolke hver brøk som et tall definert av forholdet mellom teller og nevner.

Sara, neste karakter i grubletegningen, mener at brøkene er like store siden begge brøkene mangler fire deler for å være en hel. Også i dette utsagnet er det viktig å tenke at verdien av de ulike brøkene er definert som forholdet mellom teller og nevner, siden alle brøker presenterer et multiplikativt forhold mellom to størrelser. Sara sitt utsagn vil ikke være matematisk gyldig, da det her er snakk om at de fire delene som mangler er av ulik størrelse. Av den grunn kan ikke brøkene være like store. Sara har en såkalt «gap thinking», der hun ser på differansen mellom teller og nevner i de to brøkene. Basert på denne differansen konkluderer hun feilaktig.

Line sier at $\frac{3}{7}$ må være størst, for bitene er større om du deler helheten i 7 enn i 9. Line bruker kjente fakta om brøk, og vet at $\frac{1}{7} > \frac{1}{9}$. Elevene må være klar over at jo flere deler helheten er inndelt i, desto mindre er hver del. Det er likevel noe som mangler i Line sitt utsagn. Line ser kun på nevnerne, og vurderer ikke hva som er størst ut fra forholdet mellom teller og nevner i de to ulike brøkene. I begynnelsen av sammenligningen kan det være greit å se på nevnerne for å skape et bilde av hvor store delene i de ulike brøkene er. Det er også viktig å se på antallet deler i teller og gjøre en vurdering av forholdet mellom teller og nevner i de to brøkene for å kunne avgjøre hvilken brøk som er størst.

Siste utsagn er Hans sitt, og han sier: «$\frac{5}{9}$ er jo litt over en halv, og $\frac{3}{7}$ er litt under en halv. Så jeg tror kanskje at $\frac{5}{9}$ må være størst…». Hans tenker multiplikativt. Han ser på forholdet mellom størrelsen på bitene og antall biter, samt at han bruker en sammenligningsstrategi der han vurderer om brøkene er mer eller mindre enn en halv. Hans sier ingenting om hvordan han kommer frem til det han sier, men at han tolker hver brøk som et tall definert av forholdet mellom teller og nevner kan slås fast, siden han går veien om en halv. I motsetning til Line ser Hans både på nevner og teller, og kan ut fra dette konkludere med at $\frac{5}{9}$ er litt over en halv, og $\frac{3}{7}$ er litt under en halv. Hans kobler sin brøkkunnskap til heltallstenkning, da han vet at halvparten av 9 er 4,5 og at halvparten av 7 er 3,5. Basert på dette kan han se at $\frac{3}{7}$ er litt under en halv, og at $\frac{5}{9}$ er litt over en halv.

4.1.2 Grubletegning 2: Estimering av sum



I den andre grubletegningen skal elevene prøve å estimere svaret på addisjonsstykket $\frac{1}{3} + \frac{4}{5}$. Her har jeg også valgt brøker med ulik nevner, for at elevene ikke bare skal addere tellerne og få et endelig svar. Også i denne grubletegningen har jeg valgt oddetallsnevnere, slik at det ikke skal være så alt for lett å lage en sirkulær representasjon med like store deler. Siden elevene skal estimere summen er det tenkt at de skal finne et omtrentlig svar. Jeg vil altså i hovedsak se om elevene kan finne ut om svaret vil være større eller mindre enn 1.

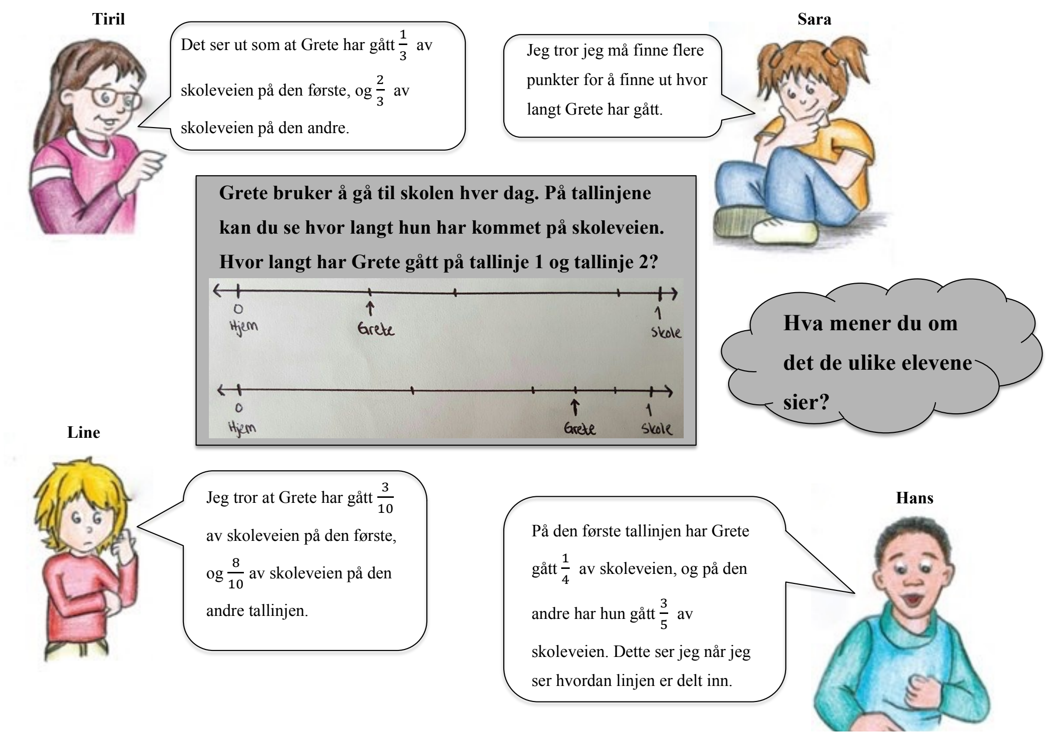
Det første utsagnet jeg skal se på er Tiril sitt. Tiril sier at svaret er mindre enn 1, siden 3 er mindre enn 5. Tirils utsagn ligner på det hun sa i grubletegningen der oppgaven var å sammenligne to brøker. Utsagnet her er også «larger-is-bigger-thinking», bare at hun her kun ser på nevnerne. Tiril mener at summen vil være mindre enn 1, siden 3 er mindre enn 5. Her har Tiril overgeneralisert heltallsreglene, og det kommer frem at hun ikke tenker over at delene vil være større dersom helheten er delt i færre deler. Hun har ikke helt forståelse for størrelsen til de rasjonale tallene (jf. Behr, Post & Wachsmuth, 1986). I tillegg mangler Tiril forståelse for forholdet mellom teller og nevner i de to brøkene.

Saras mener at det ikke går an å bare estimere, men at hun må finne fellesnevner og regne ut. Her ligger det ikke noe direkte matematisk, men jeg valgte å ha med utsagnet for å få elevene til å reflektere litt over estimeringsbegrepet. Dette utsagnet ble ikke nevnt noe nevneverdig i gruppeintervjuene, da det viste seg at elevene ikke hadde så mye kjennskap til det å finne fellesnevner. Saras utsagn ble mer forvirrende enn oppklarende for elevene i samtalen, og det ble derfor hoppet raskt over.

Tredje utsagn som skal analyseres er Line sitt. Line uttaler seg på følgende måte: «Svaret er mer enn 1, for man legger til en bit som er større enn $\frac{1}{5}$, og $\frac{4}{5}$ mangler $\frac{1}{5}$ for å være en hel». Line vet at $\frac{1}{3}$ vil være en større bit enn $\frac{1}{5}$, og siden hun skal addere $\frac{1}{3}$ og $\frac{4}{5}$ konkluderer hun med at svaret må være større enn 1. Brøken $\frac{4}{5}$ mangler $\frac{1}{5}$ for å være en hel, og biten som blir lagt til ($\frac{1}{3}$) er større enn biten som mangler. Derfor kan Line konkludere med at summen av de to brøkene vil være mer enn en hel. Ved å regne ut nøyaktig svar kan jeg se at summen er $\frac{17}{15}$, eller $1\frac{2}{15}$. Ut fra utsagnet skapes en forståelse av at Line tenker at helheten er lik på de to brøkene, altså at størrelsen på det hele vil være den samme. Den hele har samme størrelse om den er delt i tre eller fem deler.

Mange elever har en additiv tankegang. Jeg valgte derfor å inkludere Hans sitt utsagn som viser nettopp en slik tenkning. Han sier at svaret må være $\frac{5}{8}$, og viser hvordan han kom frem til dette i en representasjon. Representasjonen til Hans viser at han ikke tenker at helheten er den samme på de to brøkene. Hans har tegnet det opp på en slik måte at hver del er like stor, og det resulterer i at $\frac{5}{5}$ og $\frac{3}{3}$ har ulik størrelse og at $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{5}$ er like store i representasjonen. Hans ser ikke på forholdet mellom teller og nevner i de to brøkene, men har en additiv tilnærming til problemet der telling av biter er dominerende og avgjørende for konklusjonen. Grunnen til at jeg valgte å ta med dette utsagnet var for å skape diskusjon rundt om dette går an i addisjon av to brøker, altså om det egentlig har noe å si at helheten er forskjellig i de to brøkene som sammenlignes.

4.1.3 Grubletegning 3: Plassering av brøk på tallinjen



Siste grubletegning har i motsetning til de to andre en kontekst knyttet til seg. Oppgaven på grubletegningen presenterer to tallinjer, og disse tallinjene representerer skoleveien til Grete. På tallinjene er det merket av hvor langt Grete har kommet seg på skoleveien, på to ulike tidspunkt. Karakterene kommer med utsagn de mener er riktig når det gjelder hvor langt hun har gått, og elevenes oppgave blir å avgjøre hva som er riktig. På den øverste tallinjen har jeg markert punkter på 0, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{9}{10}$ og 1, og på den nederste tallinjen har jeg markert punkter på 0, $\frac{4}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{9}{10}$ og 1. Elevene vet ikke dette, da det ikke er oppgitt på tallinjene. De ser bare markeringene jeg har gjort. En av hensiktene med denne grubletegningen var å se om elevene så på de markerte punktene som del av et areal eller om de ignorerte avstanden mellom segmentene og brøktenkningen. I arbeidet med denne grubletegningen forkastet elevene Tiril sitt utsagn raskt, samt at de ikke så noe særlig på Saras utsagn.

Første utsagn jeg skal ta for meg er Tiril sitt som sier: «Det ser ut som at Grete har gått $\frac{1}{3}$ av skoleveien på den første, og $\frac{2}{3}$ av skoleveien på den andre». Tiril har kastet et blikk på tallinjene og på bakgrunn av det visuelle har hun estimert omtrent hvor langt Grete har gått. Utsagnet gir ikke innblikk i noe annet enn at Tiril synes at det ser ut som at Grete har gått $\frac{1}{3}$ av skoleveien på den første tallinjen, og $\frac{2}{3}$ av skoleveien på den andre tallinjen. Tirils utsagn blir ikke begrunnet av noe mer enn at «det ser sånn ut». Hun ignorerer å se på avstanden, eller lengden, til hvert segment. Utsagnet viser at Tiril har et slags «estimerende blikk» på tallinjene. Med det mener jeg at hun vurderer det visuelle på tallinjene og kommer med et omtrentlig svar.

Saras mener at hun må finne flere punkter på tallinjen for å kunne finne ut hvor langt Grete har gått. I likhet med Saras utsagn, som tar for seg en slags estimering, ligger det ikke noe direkte matematisk i dette utsagnet. Utsagnet til Sara ble tatt med for å få elevene til å reflektere over om de trenger å finne flere punkter på tallinjene for å finne et svar, eller om tallinjene kan være oppdelt på den måten de er nå. Her vil det være relevant å diskutere om avstanden mellom segmentene på tallinjen skal være like, eller om avstanden mellom segmentene kan variere.

Videre skal jeg se på det Line sier. Hun tror at Grete har gått $\frac{3}{10}$ av skoleveien på den første tallinjen, og $\frac{8}{10}$ av skoleveien på den andre tallinjen. Line har lagt inn flere punkter og delt inn begge tallinjene i ti deler. Ved å gjøre det vil avstanden mellom alle segmentene være lik, og det blir rettet et fokus mot avstanden fra 0 i relasjon til enheten. Brøkene Line nevner blir ansett som to tall som forteller hvor stor brøken er, og i dette tilfellet hvor langt Grete har kommet seg på skoleveien. Brøken $\frac{3}{10}$ korresponderer til avstanden av tre $\frac{1}{10}$-lengder fra et gitt punkt, og $\frac{8}{10}$ korresponderer til avstanden av åtte $\frac{1}{10}$-lengder fra et gitt punkt. I denne grubletegningen vil det gitte punktet være 0 på begge tallinjene. Line legger altså inn flere punkter, og teller brøkdeler for å se hvordan flere deler kan sammenlignes med helheten (jf. Van de Walle et al., 2014). Å legge inn flere punkter hjelper Line å forstå forholdet mellom delene (telleren) og helheten (nevneren), og er viktig i arbeid med iterering. Hun deler inn i deler av lik størrelse, altså partisjonerer hun helheten inn i segmenter av lik størrelse.

Det aller siste utsagnet som skal analyseres er Hans sitt. Han hevder at Grete har gått $\frac{1}{4}$ av skoleveien på den første tallinjen, og $\frac{3}{5}$ av skoleveien på den andre. Han begrunner utsagnet sitt med at han ser på hvordan tallinjene er delt inn. Hans teller altså segmentene i stedet for å vurdere størrelsen til segmentene, da det på den øverste tallinjen er fire segmenter og fem segmenter på den nederste. Hans sitt fokus på å telle deler uten å ta størrelsen i betraktning fører til at han ikke ser på det markerte området som en del av et areal. I motsetning til Line fokuseres det på antallet deler som avstanden er delt inn i, og avstanden mellom segmentene ignoreres. Hans fokuserer altså ikke direkte på avstanden fra 0 i relasjon til en enhet. Han konkluderer med at Grete har kommet $\frac{1}{4}$ av skoleveien på den første tallinjen og $\frac{3}{5}$ av den andre tallinjen fordi enheten er delt inn i fire og fem segmenter, og punktene er lokalisert på det første og tredje segmentet selv om lengdene av de ulike segmentene er forskjellige. Hans ser ikke på størrelsen til de fargelagte delene, men teller de fargelagte delene og antall deler totalt. Dette er en av vanskelighetene barn har i arbeid med å plassere tall på tallinjen (jf. McNamara & Shaughnessy, 2010). De markerte punktene blir ikke sett på som del av et areal, Hans har fokuset rettet mot å telle segmentene uten å ta størrelsen til segmentene i betraktning.

4.1.4 Hva kan grubletegningene legge til rette for?

De tre grubletegningene legger til rette for at flere aspekter ved brøkbegrepet kan diskuteres. Elevene kan uttrykke egne tanker og utvide forståelsen for brøk ved å arbeide med ulike strategier, utsagn og vanlige overgeneraliseringer og misoppfatninger. I alle grubletegningene presenteres utsagn som vil være grunnlag for refleksjon rundt strategier og måter å tenke på, dette for å aktivere elevenes tankegang og resonneringsevne.

Man kan kanskje se en sammenheng mellom utsagnet de ulike karakterene kommer med i de ulike grubletegningene, men det er ikke sånn at en bestemt karakter alltid har «riktig» svar for eksempel. Sara er i alle grubletegningene ganske undrende, og hun sier ikke noe direkte matematisk i noen av tilfellene. Det kunne kanskje vært en fordel å variere hvilken karakter som kommer med en viss type utsagn, da det kan bli forutsigbart for elevene dersom en karakter alltid tenker riktig, feil eller svevende. Det er ikke sånn at det viktigste i arbeidet med grubletegningene er å finne ut hvem av karakterene som har riktig. Minst like viktig er det å finne ut hva det er som er riktig, feil eller mangelfullt i hvert utsagn og å reflektere over dette.

4.2 Analyse av elevutsagn i gruppeintervju

I denne delen kommer jeg til å presentere funn fra gruppeintervjuene, strukturert etter kategoriene jeg laget under min kategoriske inndeling av datamaterialet. Da jeg lagde kategoriene forsøkte jeg å se etter relevante tema med fellestrekk eller som på annen måte var like. Funnene som presenteres vil hentes fra begge elevgruppene, der alle elevene har fått hvert sitt pseudonym. Gruppe 1 består av Robin, Kristian og Emma, og gruppe 2 består av Oda, Espen og Nils. Jeg har valgt å skrive «lærer» foran utsagnene jeg kommer med.

Før første grubletegning skulle diskuteres hadde jeg en kjapp samtale med elevene om hva de tenker når de hører ordet brøk. Noen av svarene da var: «Æ tenke på en brøkstrek. Også tenke æ på en pizza», «Æ tenke vi dele opp en kake æ», «Et tall, en strek og et tall», «nevner og brøkstrek». Jeg syntes det var greit å høre hva elevene tenkte om brøk før arbeidet med grubletegningene startet. Dette for å få et inntrykk av hva elevene la i brøkbegrepet før selve gjennomføringen begynte.

4.2.1 Additiv tenkning

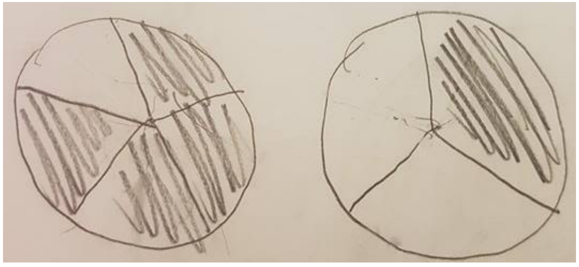
Før jeg går videre inn i utdrag fra samtalene vil jeg redegjøre for hva jeg legger til grunn for den første kategorien. Dersom en elev bruker en additiv tankegang er tenkningen preget av telling, og vekst/ulikheter vil ikke være relatert til noe annet enn telleren og nevneren som inngår i brøken. Eleven vil for eksempel ikke se på forholdet mellom teller og nevner i ulike brøker, men for eksempel legge sammen antall skraverte deler. Først kommer jeg til å presentere utdrag fra samtalen jeg hadde med elevene i gruppe 1 angående grubletegning 3, der oppgaven var at elevene skulle plassere brøk på to tallinjer som representerer hvor langt Grete har kommet på skoleveien på to ulike tidspunkt. Utdraget er et typisk eksempel på additiv tenkning, og i begynnelsen av arbeidet med denne grubletegningen sa de aller fleste elevene seg enig med Hans. Hans mener at Grete har gått $\frac{1}{4}$ av skoleveien på den første tallinjen og $\frac{3}{5}$ av skoleveien på den andre tallinjen, basert på hvordan tallinjen er delt inn. Diskusjonen rundt grubletegningen startet som følger:

8.	Kristian:	Æ trur Hans har rett, for se her.. Hvis vi ser her så dele dem inn det i fire sånne her. En, to, tre, fire. Og Grete har gått en av fire av dem bitan. Og her.. En, to, tre, fire, fem. Og hu har gått tre av fem her. Hans har riktig, Hans har riktig.
9.	Robin:	Hans, Hans, Hans.
10.	Kristian:	Den va ganske lett egentlig.

Etter at elevene hadde sett på grubletegningen individuelt i 1 minutt og 30 sekunder sier Kristian: «Æ e klar. Og æ veit ka som e riktig. Æ skjønt det!». Kristian sier seg enig med Hans, og dette valget baserer han på det visuelle på de to tallinjene. Kristian teller antall segmenter på hver tallinje, og sier at Grete har gått en av fire biter på den øverste tallinjen på grunn av at pilen peker på punktet der første segment avsluttes. Tilsvarende sier han at Grete har gått tre av fem biter på den nederste tallinjen. Utdraget over kan kategoriseres som additiv tenkning fordi elevene baserer seg på telling av segmenter i stedet for vurdering av andre faktorer på veien mot et svar. Hadde elevene tenkt multiplikativt ville de sett på forholdet mellom det som er gått og det hele, men det gjør de ikke i dette tilfellet. Typisk for elevenes arbeid med grubletegning 3 er at de teller antall segmenter, før de ser hvor det er markert at Grete er på tallinjene. Elevene bruker fingrene til å markere de ulike segmentene fra 0 (hjem) til 1 (skole) på tallinjen, og teller fire segmenter på den øverste tallinjen, og fem segmenter på den nederste tallinjen. Å telle på denne måten er ikke brøktenkning i det hele tatt, siden elevene kun teller antall segmenter på en linje uten å vurdere størrelsen til de ulike segmentene. Elevene tenker ikke at de har en enhet som er partisjonert inn i deler av lik størrelse, noe som er et vanlig problem tidlig i brøkundervisningen.

Neste utdrag er hentet fra den andre elevgruppen, som også viser at de tenker additivt. Gruppe 2 har en interessant fremgangsmåte som jeg ønsker å vise. Utdraget viser et problem elevene støter på under diskusjonen av grubletegning 2, der oppgaven er å estimere summen av $\frac{1}{3}$ og $\frac{4}{5}$. I sitt arbeid forsøker elevene å «legge brøkene oppå hverandre» ved å tegne opp to sirkler og brette arket slik at sirklene på arket havner oppå hverandre. Dette gjør de for å forsøke å se hvor stort areal de skraverte delene av sirklene dekker til sammen.

54.	Lærer:	Men etter tegningene deres da.. Er dere fortsatt enige med Tiril, om at svaret er mindre enn en?
55.	Oda:	Ja. Nei, det e æ ikke.
56.	Espen:	Nei, for at hvis vi legg dem her oppå der igjen. Hvis du legg en tredjedel oppå der, ka blir det da? Nei, det går ikke…



[…]

61.	Espen:	Kan man ta den der ($\frac{4}{5}$) oppå den der ($\frac{1}{3}$) da? Går det?
62.	Oda:	Nei, men du ser jo.. Den der. Det går ikke. Det blir nåkka igjen uansett. Æ trur Tiril har rett.
63.	Lærer:	Du tror Tiril har rett? At det er mindre enn en? Fordi tre er mindre enn fem?
64.	Oda:	Ja. For han derre Hans han har jo en tredjedel trur æ. Han fargelegg dem my lettere liksom.
65.	Nils:	Han gjør det på en lettere måte.
66.	Oda:	Han kan bare sette den der (henviser til at den fargelagte ruten i $\frac{1}{3}$ kan legges inn i $\frac{4}{5}$-rekken). Da blir det jo fem femtedel.. Ja.
67.	Espen:	Da blir det jo en.

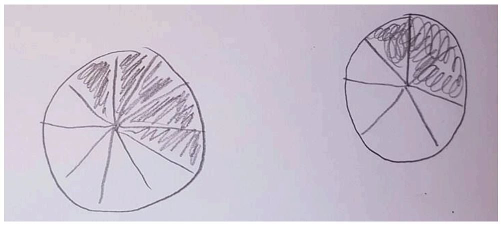
I utdraget over er elevene veldig opptatte av at de skal legge brøkene oppå hverandre, og hvorvidt det går an eller ikke. Da elevene diskuterer «å legge brøkene oppå hverandre» tegner de opp to sirkler på et ark, og forsøker å finne ut om de kan brette sammen arket slik at sirklene ligger oppå hverandre. Elevene diskuterer videre om dette kan brukes for å avgjøre hvor stort areal de fargelagte bitene dekker. Ut fra det elevene holder på med kan det virke som at de tenker at å legge fargelagte brøkdeler «oppå» hverandre er det samme som addisjon av to brøker. Ved å gjøre det på denne måten kan elevene risikere at $\frac{1}{3}$ havner oppå noe som er fargelagt fra før i brøken $\frac{4}{5}$. Altså at brøkdelen de forsøker «å legge oppå» ikke havner der det «mangler» $\frac{1}{5}$. Ved at elevene gjør og sier det de gjør kan det se ut til at de betrakter brøkene som fysiske objekter, og en brøk er ikke et fysisk objekt.

I linje 62 sier Oda «det går ikke. Det blir nåkka igjen uansett», uten å tenke at siden det blir noe igjen så vil det bety at svaret er større enn 1. Oda sier seg i stedet for enig med Tiril, selv om Tiril mener at svaret må være mindre enn 1. I linje 63 kan jeg som lærer ha påvirket elevene, da spørsmålet som stilles inneholder mer informasjon enn det Oda selv sa rett før. Informasjonen som ligger i spørsmålet til læreren er likevel ikke egen tolkning, siden det er en gjentakelse av utsagnet til Tiril i grubletegningen. Oda tror Tiril har rett, men hun synes at Hans fargelegger rutene på en lettere måte, noe Nils sier seg enig i. Dersom elevene mener at Hans løser oppgaven på en effektiv og smart måte og ser på representasjonen han har laget, så ser det jo ut som at svaret må være mindre enn 1 siden det ikke er hele den nederste linjen som er fargelagt i representasjonen hans. Oda gjør likevel om på Hans sin strategi i linje 66, da hun hevder at den fargelagte tredjedelen kan legges inn i rekken som har $\frac{4}{5}$ fargelagt. Siden $1 + 4 = 5$ og den midterste linjen i Hans sitt utsagn mangler én fargelagt rute for å være helt rød, så mener Oda at det er fem femtedeler til sammen. Oda teller altså antall deler, men tenker ikke over størrelsen på de ulike bitene – altså at en tredjedel vil være større enn en femtedel. At hun sier «da blir det jo fem femtedel» underbygger denne tankegangen. Espen ser ut til å tenke på samme måte, da han sier at det blir en. Oda og Espen teller altså antall skraverte deler, 1 + 4, og konkluderer med at det til sammen er $\frac{5}{5}$, eller 1 som Espen sier.

Tredje utdrag som skal presenteres er hentet fra gruppe 1, der elevene diskuterer grubletegning 1 som handler om sammenligning av brøkene $\frac{3}{7}$ og $\frac{5}{9}$. I denne situasjonen sitter Kristian og tegner opp sirkler, der han deler opp den ene sirkelen i sju deler og den andre i ti deler. Robin gjør Kristian oppmerksom på at han har delt den ene sirkelen inn i ti i stedet for ni, og diskusjonen dreier seg i starten om det Kristian holder på å tegne. I likhet med gruppe 2 velger også denne gruppen en sirkulær representasjonsform, men det er tydelig at det å tegne opp brøkene ikke er så lett. Siden sirklene skal deles opp i sju og ni deler er det en utfordring å få delene til å være like store, samt å dele sirklene inn i riktig antall deler.

28.	Robin:	Oi, Kristian, du har tegna en trekant for mye der.
29.	Kristian:	Nei, det e ni.
30.	Robin:	En, to, tre, fire.. –
31.	Emma:	Æ mene at dem e like stor for begge mangle fire dela.
32.	Lærer:	Ok, begge mangler fire deler så da er de like store? Men hvis vi har.. Kan du forklare det litt tydeligere?
33.	Emma:	På tegninga hans så e det ti bita der også.. dem e like stor.

34.	Kristian:	Ja, da tegna æ feil, da trur æ Sara. Det blir en halv.
35.	Lærer:	Blir det en halv?
36.	Kristian:	Ja. Begge to. … Nei, det blir det ikke! Det blir ikke halv, men det blir like mye igjen. Der e det fire igjen og tre som e fargelagt, og her e det fem som e fargelagt og fire igjen.



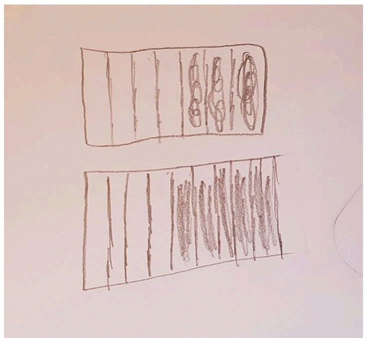
Figur 4: Kristians forsøk på å tegne opp de to brøkene fra grubletegning 1.

37.	Lærer:	Hva kan vi finne ut av det da? På den ene er det tre som er fargelagt og det er fire igjen, og på den andre er det fem som er fargelagt og det er fire igjen… Hvis dere tenker litt på det. Jeg kan skrive det opp her (skriver opp $\frac{3}{7}$: 3 fargelagt, 4 igjen. $\frac{5}{9}$: 5 fargelagt, 4 igjen). Dette var det dere sa nå. Blir det det samme?
38.	Emma:	Ja..

Forskjellen mellom de to brøkene er mindre enn $\frac{1}{8}$, så det vil ikke være lett å se hvilken brøk som er størst dersom man ikke er veldig god på å tegne opp og gjøre vurderinger av størrelsen til brøker. Et av problemene med Kristians representasjon er at han har tegnet opp $\frac{3}{7}$ og $\frac{5}{10}$, i stedet for $\frac{3}{7}$ og $\frac{5}{9}$. Et annet problem er at de to sirklene har forskjellig størrelse, noe som vil gjøre det enda vanskeligere – om ikke umulig – å avgjøre hvilken brøk som faktisk er størst.

Emma på sin side sier seg enig med Sara sitt utsagn fra grubletegningen, da hun mener at brøkene er like store siden begge brøkene mangler fire deler for å være en hel. Det kan imidlertid virke som at Emma er noe usikker på denne «gap-thinkingen», siden hun i nøler litt i utsagnene sine i linje 33 og 38. Det kan diskuteres om denne usikkerheten kommer av lærerens spørsmålsstilling, eller om Emma ikke helt vet hvordan hun tydeligere skal forklare sin tankegang. Etter at Kristian finner ut at representasjonen ikke er helt riktig sier også han seg enig med utsagnet til Sara i linje 34. Kristian legger til at begge brøkene er en halv, men etter spørsmål fra læreren ser han på nytt på representasjonen sin. Han trekker da slutningen at det ikke er halvparten av de to brøkene som er skravert, men at mengden som ikke er skravert i de to sirklene er lik.

Saras utsagn «Jeg mener de er like store, for begge brøkene mangler fire deler for å være en hel» inneholder en slags «gap thinking» siden hun likestiller størrelsen på de to brøkene i og med at begge mangler fire deler for å være en hel. Brøken $\frac{3}{7}$ mangler fire sjudeler for å være en hel, og $\frac{5}{9}$ mangler fire nideler for å være en hel. Utsagnet tar ikke i betraktning at delene vil være av ulik størrelse, men vurderer kun hvor mange deler som mangler for at brøkene skal være en hel. Siden begge brøker mangler fire deler mener Emma, med henvisning til Sara, at brøkene vil være like store. Størrelsen på delene blir ikke tatt i betraktning, og konklusjonen er ikke relatert til noe annet enn hvor mange deler som mangler for at brøken skal være en hel. Emma forsterker det hun sier ved å lage en visuell representasjon av de to brøkene der hun bruker hel-del-tolkningen i en rektangulær arealmodell. Hun sier «Æ tegna opp to kaka. Også tok æ vekk tre fra den med sju, og da ble det igjen fire. Også tegna æ opp en ny en, også tok æ vekk fem, også ble det fire igjen.». Som figur 5 viser skraverer Emma tre av sju deler på det øverste rektangelet, og fem av ni deler på det nederste rektangelet i representasjonen sin.



Figur 5: Emmas representasjon av de to brøkene fra grubletegning 1.

Etter Emmas forklaring på hvordan hun har tegnet opp, spør læreren om det ser ut som at brøkene er like store. Da blir Emma og Robin litt usikre, samtidig som at Kristian mener at $\frac{5}{9}$ er større, men at bitene vil være større dersom helheten deles i sju. Det ser ut til at representasjonen ikke gjør det tydelig nok for elevene hvilken av brøkene som faktisk er størst. Tegning på frihånd i en arealmodell er ikke alltid til særlig hjelp når en elev skal sammenligne brøker som har forholdsvis lik størrelse (Lamon, 2012). Kristian nøler litt da han sier at $\frac{5}{9}$ er større, siden elevene tidligere i samtalen har diskutert at delene er større dersom helheten deles i sju deler. Det Kristian sier om figuren kan ikke betegnes som additiv tenkning, siden han vurderer størrelsen på det skraverte arealet i tillegg til at han vurderer størrelsen på hver del med tanke på nevnerne. Utdraget blir likevel plassert under denne kategorien siden Emma har en additiv tilnærming til problemet sammen med det Pearn og Stephens (2004) kaller «gap thinking».

I gruppe 1 sin diskusjon av grubletegning 1 forsvinner grubletegningen noe. Jeg kan ikke se at grubletegningen dukker opp noe sted i utdraget og det ser mer ut som at elevene kun vurderer oppgaven som blir presentert og forsøker å finne egne løsninger løsrevet fra utdragene på grubletegningen. Likevel er det grubletegningen som ligger til grunn for diskusjonen, da elevene har studert den i noen minutter før diskusjonen ble satt i gang.

Siste utdrag i denne kategorien er hentet fra midten av en diskusjon der elevene i gruppe 1 kobler brøkene til en situasjon angående spising av pizza. Grubletegningen som blir diskutert er grubletegning 2, der elevene skal estimere summen av $\frac{1}{3}$ og $\frac{4}{5}$. Dette utdraget viser tydelig at elevene ikke vurderer nevnerne for å skape seg et bilde av brøkdelenes størrelse. Elevene tar kun tellerne i betraktning og legger tellerne sammen.

112.	Lærer:	Hva skjer da, hvis vi skulle lagt til den der (peker på den skraverte tredjedelen) til den pizzaen der (peker på sirkelen som er delt inn i fem) for eksempel?
113.	Kristian:	Da e hele pizzaen spist opp.. Fem av fem.
114.	Lærer:	Er den biten der ($\frac{1}{3}$) akkurat like stor som den biten der ($\frac{1}{5}$)?
115.	Emma:	Den e litt større.
[…]		
121.	Lærer:	Og hvis du skulle lagt til den biten der.. Du vet at du har spist fire av fem, også har Robin spist en tredjedel av en pizza. Hvor mye pizza har dere spist til sammen da?
122.	Emma:	En hel.
123.	Kristian:	Ja.
124.	Lærer:	Akkurat?
125.	Kristian:	Æ trur Tiril har rett. Nei, ikke Tiril egentlig, hu sir mindre enn en.
126.	Emma:	Æ trur fortsatt Hans hvis ikke æ trur nånn andre.

I linje 113 ser det ut til at Kristian ikke tenker over at $\frac{4}{5}$ mangler en bit som er mindre enn $\frac{1}{3}$ for å bli en hel, siden han sier at fem av fem pizzastykker vil være spist opp. Han tenker at fire biter pluss en bit til vil bli fem biter, uten å ta størrelsen til hver bit i betraktning, en tydelig additiv tenkning. Også i linje 122 ser det ut til at en additiv tankegang kommer til syne, da Emma sier at fire av fem stykker pluss en tredjedel av en pizza er en hel. Spørsmålet fra læreren i linje 124 blir ikke besvart før Kristian og Emma er på nye tanker. Kristian sier at han tror Tiril har rett, men trekker seg etter hvert på dette da han ser at hun sier at svaret er mindre enn 1. Emma er gjennom hele samtalen ganske usikker, og uttaler i linje 126 at hun tror at Hans har riktig hvis hun ikke tror noen andre. Rett før sa Emma at hun trodde de to brøkene var en hel til sammen, men likevel sier hun seg enig med Hans som mener at brøkene er $\frac{5}{8}$ til sammen. Elevene håndterer ikke teller og nevner i relasjon til hverandre, de vurderer kun hvor mange deler det er i tellerne til sammen.

4.2.2 Multiplikativ tenkning

Dersom en elev tenker multiplikativt i brøk vil eleven for eksempel se på forholdet mellom størrelsen på bitene og antall biter. Videre kan eleven se behovet for å sammenligne brøker relatert til samme enhet, eller å se på helhetens størrelse. Det er vanskelig å vite om elevene tenker multiplikativt, men utdragene som vises i dette underkapittelet kan indikere at en slik tankegang er til stede. Første utdrag er en situasjon som kom til syne da elevene i gruppe 2 diskuterte grubletegning 3, der de skulle plassere brøk på tallinjen. Da elevene skulle diskutere hvor langt Grete hadde kommet seg på skoleveien startet de med å vurdere det Hans sier.

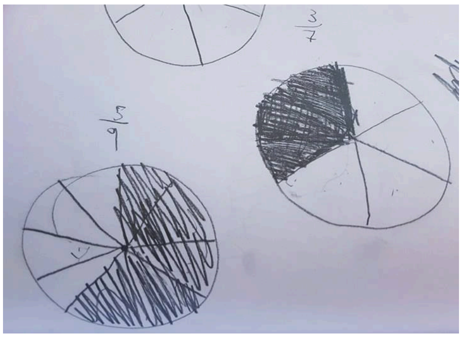
23.	Espen:	Han ser kordan linja e delt inn.
24.	Oda:	Hvis man dele det inn i fire så blir det ikke akkurat.. der. Da har ikke Grete gått akkurat en fjerdedel av skoleveien.
25.	Lærer:	Hvordan vet du det da?
26.	Oda:	Fordi at æ vet det.
27.	Espen:	Det går ikke an å dele ti på fire.
28.	Oda:	Hæ? Æ delt den her opp. Ja men det det, det går ikke med fire.
29.	Lærer:	Hvis man har to og en halv centimeter da, fire ganger?
30.	Espen:	Da blir det jo.. en hel. Eller ti.
31.	Lærer:	Er det det Hans.. er det det som er gjort på linja?
32.	Espen:	(samtidig han peker på oppdelingen på linjen) En, to, tre, fire. Ja. Nei. Dem e ikke like lang der og der og der og der.
33.	Lærer:	Må de være like lange da?
34.	Espen:	Dem må jo det, må dem ikke det da?

Oda sier at dersom tallinjen skal deles inn i fire så vil ikke segmentene være akkurat som de er tegnet opp på grubletegningen, og hun mener at det ikke er holdbart å si at det første segmentet er akkurat en fjerdedel. Odas begrunnelse for hvordan hun vet at Grete ikke har gått en fjerdedel av skoleveien er «fordi at æ vet det», noe som ikke kan anses som et holdbart argument. Espen på sin side har hengt seg opp i at det ikke er mulig å dele ti på fire. For at ikke diskusjonen skulle stanse med at det ikke går an å dele ti i fire, sa læreren «hvis man har to og en halv centimeter da, fire ganger?», siden dette ikke er direkte relevant. Videre spurte læreren om det var det Hans hadde gjort, altså om hvert segment var 2,5 cm. Først sa Espen ja, men han endret raskt mening siden segmentene ikke var like lange «der og der og der og der». Dette kan tyde på at det ligger en multiplikativ tenkning i bunnen, siden Espen vurderer forholdet mellom størrelsen på bitene og antall biter, men det er det vanskelig å si noe om. Kristian i gruppe 1 har en tilsvarende tankegang som Espen. Han sier at for at tallinjen skal være delt opp riktig må flere punkter settes inn på linja, så det ikke blir så store mellomrom mellom punktene. Ved å gjøre dette har man ifølge Kristian «delt opp riktig», noe han definerer som «at det e like langt å gå dit og dit og dit og dit og dit». Altså har både Espen og Kristian en oppfatning av at segmentene må ha lik størrelse – en oppfatning om at alle delene som til sammen utgjør helheten må være like. Dette kan ses i sammenheng med del-hel-tolkningen innen brøk, der en kontinuerlig enhet er partisjonert inn i deler av lik størrelse.

Jeg vil nå presentere et utdrag til som jeg vil kategorisere som multiplikativ tenkning. Her diskuterer gruppe 2 grubletegning 1 som handler om sammenligning av brøkene $\frac{3}{7}$ og $\frac{5}{9}$. Grunnen til at jeg tenker at dette hører til under delkapittelet multiplikativ tenkning er på grunn av at elevene vurderer størrelsen til brøkene, samt at de ser på forholdet mellom størrelsen på delene og antall deler totalt. Det som skiller dette utdraget fra det forrige er at forholdet mellom teller og nevner kommer tydeligere frem. Selv om Oda har tegnet opp en representasjon som elevene betrakter under diskusjonen viser det seg at det ikke er helt enkelt for elevene å konkludere med hvilken brøk som er størst. På tross av at elevene hadde noen vanskeligheter med å konkludere, kommer noen viktige betraktninger av brøkbegrepet frem i diskusjonen mellom dem.

80.	Lærer:	Så hva tenker dere nå da, om det de ulike sier? Hvem var det dere var enige med først? Sara? Hva tenker dere om det nå?
81.	Oda:	Ikke rett. Fordi atte.. Dem e ikke like stor.
82.	Lærer:	Hva er det som ikke er like store?
83.	Oda:	Dem to brøkan. Fordi atte sju dela har jo my større dela enn ni..
84.	Espen:	Men vi har jo tegna mer der (peker på $\frac{5}{9}$) enn der (peker på $\frac{3}{7}$) da.. Av en sirkel. Så den da, den e rett ($\frac{5}{9}$).
85.	Nils:	Så tre sjudel, den e størst.

86. Espen: Koffor? Vi har jo tegna mer der ($\frac{5}{9}$).



Figur 6: Odas representasjon av de to brøkene fra grubletegning 1.

87: Oda: Æ får jo my mer kake når æ e der ($\frac{5}{9}$) enn når æ e der ($\frac{3}{7}$).

88. Nils: Ja, det gjør du.

89. Oda: Eller pizza da. Eller ka vi no ønske å spis i dag.

90. Espen: Det må jo være den da ($\frac{5}{9}$)! Det e jo mer som e fargelagt der enn det e der ($\frac{3}{7}$).

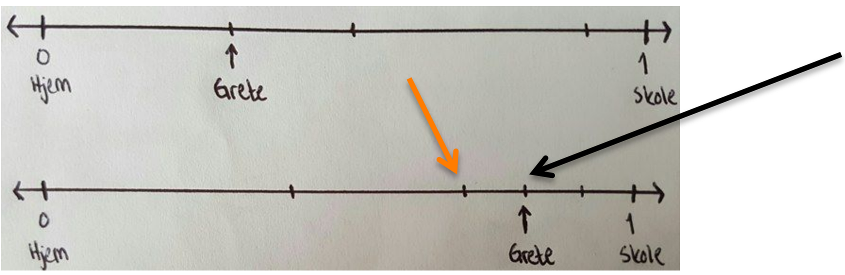
I dette utdraget beveger diskusjonen seg til størrelsen på hver del dersom helheten er delt i sju eller ni like store deler. Men i motsetning til tidligere i diskusjonen av grubletegning 1 ser elevene også på antallet deler av helheten som er fargelagt denne gangen. I linje 81 sier Oda at de to brøkene ikke er like store. Hun sier videre at delene vil være mye større dersom helheten blir delt i sju enn dersom den blir delt i ni. I realiteten er jo ikke delene *mye* større, da forskjellen på $\frac{1}{7}$ og $\frac{1}{9}$ kun er $\frac{2}{63}$, altså omtrent $\frac{3}{100}$. Selv om Oda sier dette kan jeg likevel se at hun i linje 87 sier at hun får en større andel kake dersom hun får $\frac{5}{9}$ av en kake, enn dersom hun får $\frac{3}{7}$ av en kake. Oda baserer sitt svar på det visuelle hun ser på tegningen sin. I Odas representasjon av brøkene inneholder sirklene deler av ulik størrelse, noe som er problematisk for å kunne sammenligne de to brøkene, siden delene skal være like store i arbeid med brøk. Likevel viser representasjonen at $\frac{5}{9}$ er størst, noe som stemmer. Espen gjør det samme i linje 84, der han vurderer de to brøkenes størrelse gjennom å se på det visuelle i representasjonen til Oda. I linje 86 henviser Espen til Odas tegning som viser at det er en større del som er fargelagt i brøken $\frac{5}{9}$ enn det er som er fargelagt der brøken er $\frac{3}{7}$. Utdraget viser også at elevene reflekterer rundt en hverdagslig situasjon, nemlig spising av kake eller pizza. Elevene kobler brøkene til egne konkrete og personlige erfaringer, og lager en situasjon de kan forstå brøkene ut fra. Det fremgår også av utdraget at elevene er opptatte av den sirkulære formen, og at de er vant til at brøk blir representert som en pizza eller en kake som deles inn i x antall like store biter.

4.2.3 Vurdering av nevneren

I dette delkapittelet kommer jeg til å presentere utdrag der elevene vurderer nevneren i brøken(e) for å nærme seg en konklusjon. Jeg har valgt å kalle kategorien «vurdering av nevneren» fordi elevene ofte hang seg opp i nevnerne i brøkene, og brukte det som utgangspunkt for videre diskusjon. Det første utdraget er hentet fra gruppe 1 sin diskusjon av grubletegning 3. Tiril sitt utsagn i denne grubletegningen er at det ser ut som at Grete har gått $\frac{1}{3}$ av skoleveien på den første tallinjen, og $\frac{2}{3}$ av skoleveien på den andre. Robin og Kristian hang seg opp i Tiril sitt valg av nevner, og sier følgende:

17.	Robin:	Hu (Tiril) telle litt for my.
18.	Kristian:	Nei, hu telle for lite. Hu sir en av tre, men det e jo ikke tre som e her. Det e fire. Og.. hu telt jo ikke helt riktig.
[…]		
21.	Kristian:	Også sir hu to av tre her også, det e ikke riktig. Da kjem man bare.. Da slutte hele tallinja her da. Også har hu gått dit.

Robin mener at Tiril teller for mye. Hva han legger i dette er det vanskelig å si noe om. Kristian er derimot uenig i det Robin sier, da Kristian mener at Tiril ikke har telt riktig siden den øverste tallinjen er delt inn i fire segmenter og ikke i tre. Det er rimelig å tolke at Kristian har en oppfatning om at nevneren sier noe om hvor mange deler helheten er delt inn i. Den øverste tallinjen er delt inn i fire, og på grunn av det mener han at det vil være feil å si at Grete har gått $\frac{1}{3}$ av skoleveien. På dette punktet i diskusjonen er Kristian mest enig med Hans sitt utsagn, altså at Grete har gått $\frac{1}{4}$ og $\frac{3}{5}$ av skoleveien, og siden Tiril ikke teller antall segmenter «riktig» så teller hun på en ukorrekt måte. Videre sier Kristian at dersom det skal gå an å si at Grete har gått $\frac{2}{3}$ på den andre tallinjen vil det føre til at linjen «kuttes» før punktet hvor det står «skole».



Kristian mener altså at tallinjen vil slutte der den svarte pilen peker dersom det skal være mulig å si at Grete har gått $\frac{2}{3}$ av skoleveien. Han mener at Grete da ville ha gått dit den oransje pilen peker i figuren over. Denne tankegangen kan indikere at Kristian ikke ser på hele tallinjen som et areal som viser helheten, men at han heller ser på nevneren og teller seg tre segmenter frem for å avgjøre hvor tallinjen skal slutte. Det kan med andre ord virke som at han kun tenker at nevneren forteller hvor mange segmenter som skal inkluderes på tallinjen og at telleren viser hvor mange segmenter Grete har gått.

Gruppe 1 sliter med å forstå hvor Line har fått tallene i sine brøker fra. Line sier at hun tror at Grete har gått $\frac{3}{10}$ av skoleveien på den første tallinjen, og $\frac{8}{10}$ av skoleveien på den andre tallinjen. Tellerne og nevnerne er forvirrende for gruppen, da elevene mener at tallene ikke stemmer overens med det de kan se på tallinjene på grubletegningen.

30.	Robin:	Tre av ti, åtte av ti. Okei.. Tieren på tre av ti, tieren der på tre av ti den e for stor. Treeren på tre av ti, liiitt for lite. Eller for stort det og. Æ veit ikke æ. Men åtte av ti e for stort.
[…]		
33.	Kristian:	Det e jo ikke.. Ti her. Det e jo ikke ti sånne her. Det e fem og fire. Og det e i hvert fall ikke åtte. Det der e for lite, det der e for lite. Æ veit ikke, det va vanskelig.

Elevene har vanskeligheter med å se at nevneren kan være ti siden tallinjene ikke er delt inn i ti segmenter. Robin mener at telleren er for stor, og at nevneren muligens er for liten i brøken $\frac{3}{10}$. Videre sier han at telleren og nevneren i brøken $\frac{8}{10}$ er for store. Samtidig som at Robin sier dette ser han på hvordan tallinjene er delt opp, og det kan kanskje være på bakgrunn av tallinjenes inndeling at han uttrykker seg som han gjør i linje 30. Etter spørsmålet om det er noen som ønsker å legge til noe på det Robin har sagt, sier Kristian at tallinjen ikke er delt inn i ti, men fem og fire. Kristian tenker altså litt som Hans gjør i sitt utsagn, ved at han ser på antall segmenter i stedet for å vurdere avstanden mellom segmentene og bruke kunnskapen om at delene må være like store i en brøk. Likevel klarer ikke Kristian å argumentere for hvorfor han mener det er for lite, han avslutter bare med å si «æ veit ikke, det va vanskelig».

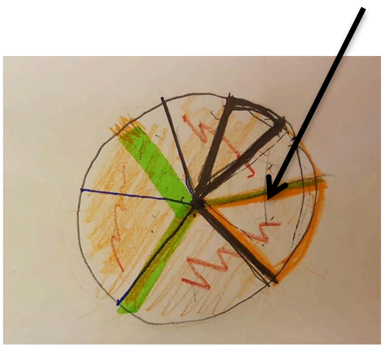
Neste utdrag er hentet fra gruppe 1 sin diskusjon av grubletegning 1 – grubletegningen som ber elevene sammenligne brøker og avgjøre hva som er størst av $\frac{3}{7}$ og $\frac{5}{9}$. I dette utdraget virker det som at elevene glemmer å se brøkenes nevnere i relasjon til telleren, altså at det eneste de betrakter som relevant er nevnerne.

41.	Lærer:	[…] Hvis vi tenker på det dere snakket om i starten, at det er inndelt i biter.. Vil det være like biter?
42.	Kristian:	Nei. Det der (sjudelene) e større bita. Så man får mer av den her.
43.	Robin:	Det går faktisk det.
44.	Lærer:	Så man får mer av tre sjudeler?
45.	Elevene:	Ja.

Det Kristian sier her, at $\frac{3}{7}$ er størst, viste seg å være en felles oppfatning hos de fleste av elevene. Elevene mente at $\frac{3}{7}$ måtte være den største brøken, nettopp på grunn av det Kristian sier: «det e større bita». Det er riktig å si at sjudelene vil være større biter, men ingen av elevene sier noe om at de ser på antallet biter i sammenheng med helheten, så det virker som at de trekker slutningen at $\frac{3}{7}$ vil være større enn $\frac{5}{9}$ fordi bitene er større dersom helheten deles i sju enn i ni. For at elevene skal kunne sammenligne brøkene, er det nødvendig å tolke hver brøk som et tall definert av forholdet mellom teller og nevner.

Det siste utdraget i denne kategorien viser et utdrag fra gruppe 2 sin samtale rundt grubletegning 2 der summen av $\frac{1}{3}$ og $\frac{4}{5}$ skal estimeres. Tidlig i diskusjonen forsøker Oda å vurdere størrelsen til en tredjedel og en femtedel, og hun sier at en femtedel nesten er like stor som en tredjedel. Lenger ut i diskusjonen av grubletegningen tegner Oda opp en figur som blir utgangspunkt for en lengre diskusjon mellom elevene. Det som er nytt med denne representasjonen er at Oda tegner opp begge brøkene i samme sirkel. Altså deler hun sirkelen inn i både tredjedeler og femtedeler, og forsøker ved hjelp av dette å finne en løsning på estimeringsoppgaven.

171.	Oda:	Sånn! Her e det en femtedel, og en tredjedel i en runding.
172.	Lærer:	Ok, nå må du forklare hva du har tenkt her.
173.	Oda:	Æ vet ikke.



Figur 7: Odas representasjon av de to brøkene fra grubletegning 2 i samme sirkel.

174.	Lærer:	Prøv da. Du må jo ha tenkt noe når du laget det der.
175.	Oda:	Ehm.. Æ skulla bare sjekke korr stor en femtedel va inni en tredjedel.
176.	Espen:	Ka e det der da? (peker på sirkelen)
177.	Oda:	At.. Det e jo en tredjedel! Der tusjen e e tredjedel, og der e en femtedel! Ja. Det der e en tredjedel, og det der e en femtedel. Ja.
178.	Lærer:	Og da fant du ut..?
179.	Oda:	At det mangle.. det der e jo en femtedel.. Da mangle det… Det mangle, så my (viser med oransje markering) Nåkka sånt. For å få.. en. Ja. Det mangle så my der i en tredjedel for å få.. Nei. Åå, hehe. Det mangle så der my for å få en tredjedel til å få en femtedel eller nå sånt. Ja. Så vi mangle det.

Her har Oda forsøkt å tegne opp både $\frac{1}{3}$ og $\frac{4}{5}$ i den samme sirkelen. Oda har delt opp i fem med gråblyant, og i tre med grønn tusj. Den tredje grønne streken vises ikke så godt, men den var tegnet under den øverste oransje streken (se pil). Hun viste også hvor hun har markert tredjedelene med oransje «bølgeskrift». Det er litt vanskelig å henge med på utsagnet til Oda i linje 179, men her prøver hun å få frem hvor mye større en tredjedel er enn en femtedel.

Diskusjonen av denne figuren er omfattende og lang elevene imellom, så i stedet for å vise hele utdraget skal jeg nå skrive et avsnitt om hva elevene diskuterer videre. Først sier Oda at $\frac{1}{5}$ trenger halvparten av en femtedel til for å kunne «bygges opp» til en tredjedel. Hun mener altså at $\frac{1}{5} + \frac{0,5}{5}$ tilsvarer $\frac{1}{3}$. Nils sliter med å forstå hva Oda snakker om, og klarer ikke helt å skjønne hvordan sirkelen egentlig er delt inn. Han synes det er vanskelig å holde oversikt over hvor tredjedelene og femtedelene er i sirkelen. Når Oda skal legge sammen $\frac{1}{3}$ og $\frac{4}{5}$ sier hun at hun først fargelegger $\frac{4}{5}$. For at hun også skal ha fargelagt $\frac{1}{3}$, så trenger hun å fargelegge $\frac{1,5}{5}$ ekstra. Hun gjør altså om $\frac{1}{3}$ til $\frac{1,5}{5}$, slik at hun bare har femtedeler å jobbe med. Oda sliter med å holde oversikt over tellerne og nevnerne i representasjonen sin, og fokuserer i begynnelsen kun på nevnerne. Til slutt klarer hun likevel å konkludere med at svaret blir mer enn 1.

4.2.4 Annet

I dette underkapittelet av analysen vil jeg vise utdrag fra transkripsjonen som jeg finner interessante, men som jeg synes det er vanskelig å plassere under en bestemt kategori. Fordi det er vanskelig å si hvilken matematikk som ligger bak elevenes tankegang er det utfordrende å kategorisere utdragene.

Måten karakterene i grubletegningene uttrykker seg på var en av tingene som ble utgangspunkt for diskusjon og uenigheter i noen tilfeller. Et eksempel på dette var når gruppe 2 skulle diskutere Tiril sitt utsagn i grubletegning 2 «$\frac{5}{9}$ er størst. 5 er større enn 3, og 9 er større enn 7.». Nils sier seg enig i dette, og uttrykker «Æ trur det e Tiril som har rett. Fordi at fem nidela e størst.». Diskusjonen fortsetter så med dette:

94.	Oda:	Men hu sir jo ikke bare det!
95.	Espen:	Fem nidela er størst, fordi at fem e større enn tre og ni e større enn sju.
96.	Oda:	Det e også feil, hu sa den måten på den måten hu sa det.

Oda er i utgangspunktet enig med konklusjonen til Tiril, altså at $\frac{5}{9}$ er den største brøken, men Oda mener at måten Tiril sier det på er feil. Dette ser vi både i linje nummer 94 og 96. Elevene sier lenger ut i samtalen at det er mulig å si det i dette tilfellet, men at det ikke vil kunne generaliseres til at «regelen» gjelder for alle brøker. For eksempel blir det eksemplifisert at $\frac{30}{1800}$ inneholder større tellere og nevnere enn $\frac{1}{2}$, men at brøken $\frac{1}{2}$ er større. En elev uttrykte det på følgende måte: «Det der ($\frac{1}{2}$) e jo halvparten, og det der ($\frac{30}{1800}$) e jo ikke i nærheten av halvparten.». Alle elevene i gruppe 2 mente at $\frac{5}{9}$ var den største brøken, men de var tydelige på at de konkluderte med dette på bakgrunn av det Hans sa og det de selv har tegnet opp, ikke på bakgrunn av Tirils utsagn.

Gruppe 2 hadde problemer knyttet til Hans sitt utsagn i grubletegning 2 angående estimering av summen til brøkene $\frac{1}{3}$ og $\frac{4}{5}$. De hang seg opp i estimeringsbegrepet, og brukte sin forståelse av begrepet for å finne ut hvilken karakter som hadde et korrekt matematisk utsagn.

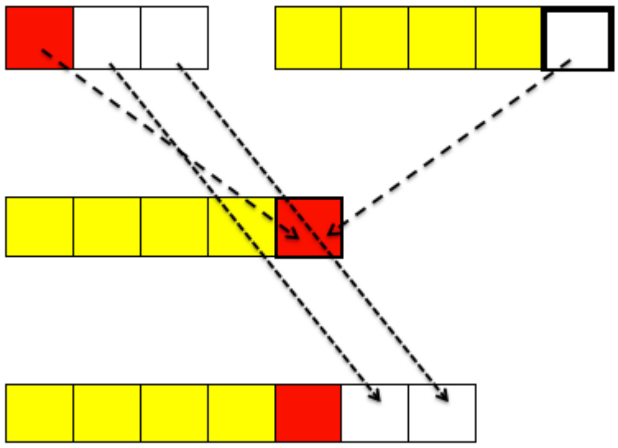
25.	Nils:	Men Hans, han tok jo akkurat.
26.	Espen:	Mindre enn en, fordi tre er mindre enn fem.
27.	Nils:	Tiril sin e cirka, men Hans den e nøyaktig.
28.	Oda:	Ja, det e sant. Men ka sir han.. Ja, æ trur Tiril har rett, fordi at svaret, for han der e jo akkurat rett på liksom. Og da e det jo mindre enn en, for der e man jo tre under en (viser til nederste linje i Hans sitt utsagn). Tiril.
29.	Nils:	Tiril.
30.	Espen:	Tiril!

Elevene bruker Hans sitt utsagn for å understreke at svaret er mindre enn 1, men mener at det Hans sier ikke kan brukes siden svaret er «nøyaktig». Derfor konkluderer de med at Tiril sitt utsagn er riktig, da hun er den eneste av de andre karakterene som mener at svaret er mindre enn 1. Tiril sier ikke et nøyaktig svar, men sånn omtrent hva det vil være. Elevene eliminerer altså på en måte utsagnene. De eliminerer utsagn uten å egentlig vurdere tellerne og nevnerne som inngår i brøkene, slik at de kan ta en beslutning som baserer seg på det direkte matematiske innholdet. Alle er enige med Hans, men mener at det ikke kan være korrekt siden det er «nøyaktig». Elevene ser bort fra Line og Saras utsagn, da deres utsagn er at svaret er større enn 1 eller at man må finne fellesnevner. Da er det kun Tiril sitt utsagn som står igjen siden Hans sitt utsagn, ifølge elevene, ikke inneholder estimering. At estimeringsbegrepet skulle være noe som var avgjørende for hvilken karakter elevene sa seg enige med, var noe jeg på forhånd ikke forutså som noe som skulle styre elevenes tenkning. Det er i alle fall tydelig at elevene definerer estimering som noe som ikke kan være nøyaktig, men at det må være et svar som sier omtrent hva løsningen kan være.

Elevene i gruppe 1 hadde også problemer knyttet til Hans sitt utsagn i grubletegning 2 der de skal estimere summen av $\frac{1}{3}$ og $\frac{4}{5}$. Dette utsagnet sa alle på gruppen seg enige i ved samtalens begynnelse. Hans sitt utsagn viser en additiv tenkning, og mange elever har nettopp en slik tankegang når de skal addere brøker.

41.	Emma:	Han har fargelagt fem svarte, også e det igjen tre, så da må det bli fem av åtte.
42.	Kristian:	Æ trur det e sju. For den der e fargelagt. Og da e det bare to igjen.
43.	Lærer:	Så du tenker på en måte at du legger den (den fargelagte ruten fra $\frac{1}{3}$) rett oppå den (den blanke ruten etter ($\frac{4}{5}$)?
44.	Kristian:	Ja. Også legg du på dem der. Og da blir det sju. Fem av sju.
45.	Robin:	Nei, da blir det fortsatt fem av åtte. Man må ikke fargelegge rutan rett ved siden av hverandre.

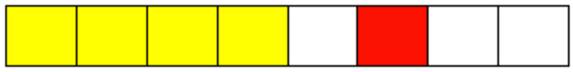
Kristian sier først at han er enig med Hans, men som jeg ser i linje 42 er han uenig i svaret Hans kommer med. Kristian mener at svaret er $\frac{5}{7}$, for han tenker at den røde delen fra $\frac{1}{3}$ overlapper den hvite delen i $\frac{4}{5}$. Da gjenstår kun to hvite deler, i stedet for tre hvite deler. Min tolkning av det som blir sagt, er at Kristian tenker at det vil bli som dette:



Figur 8: Additiv tankegang i tilknytning til grubletegning 2.

Jeg kan selvfølgelig ikke være helt sikker på at det er akkurat dette Kristian mener siden han ikke tegnet opp noe selv. Det som gjør at jeg tolker det han sier på denne måten er at han satt og pekte på figuren til Hans samtidig som han forklarte. I grubletegning 2 viser Hans sin additive tenkning, men der blir det kun vist ved bruk av røde eller hvite ruter. For å gjøre den mulige tankegangen bak Kristians utsagn tydeligere valgte jeg å bruke to forskjellige farger i tillegg til hvit. I linje 42 sier Kristian «for den der e fargelagt», samtidig som han peker på den hvite ruten som er sterkt markert, og som er $\frac{1}{5}$. Det er altså rimelig å tro at «den der», som er den hvite, markerte ruten, har blitt overlappet av den røde ruten som skal representere $\frac{1}{3}$. Denne overlappingen har jeg forsøkt å gjøre tydeligere i den midterste rekken i figur 8, der jeg viser at rekken består av fire gule og en rød del. Videre viser utdraget at Kristian i linje 44 sier: «Også legg du på dem der. Og da blir det sju. Fem av sju.». Idet Kristian sier «dem der» peker han på de to hvite delene som er øverst til venstre i figur 8. Som en tolkning av det han sier har jeg valgt å sette inn noen piler for å vise hvor disse hvite delene blir flyttet. Den nederste rekken inneholder da fire gule, en rød og to hvite deler – til sammen sju deler. Linje 43 kan være avgjørende for det Kristian sier, siden jeg som lærer sier «så du tenker på en måte at du legger den rett oppå den?». Et slikt spørsmål kan virke ledende og føre til at Kristian bare sier «ja» som han begynner med i linje 44 uten at det egentlig er akkurat det han mener. En bedre respons kunne kanskje vært å få Kristian til å gjenta eller forklare tydeligere, i stedet for å legge føringer for hvordan jeg selv tolket det som ble sagt.

Robin prøver å overbevise Kristian om at det vil være $\frac{5}{8}$ som er svaret – ikke $\frac{5}{7}$. Linje 45 viser at Robin sier «man må ikke fargelegge rutan rett ved siden av hverandre». På grubletegning 2 er det nettopp det Hans har gjort; han har samlet de røde delene lengst til venstre i representasjonen, også har han plassert de hvite delene til høyre. Slik jeg tolker Robin sitt utsagn, forstår jeg det som at han forsøker å forklare at Hans likeså godt kunne ha representert $\frac{5}{8}$ på følgende måte:



Kristian sier seg til slutt enig med Emma og Robin om at svaret vil være $\frac{5}{8}$, noe han blir overbevist over gjennom bruk av symbolmanipulasjon der han adderer teller med teller og nevner med nevner.

Hans sitt utsagn i grubletegning 1 «$\frac{5}{9}$ er jo litt over en halv, og $\frac{3}{7}$ er litt under en halv. Så jeg tror kanskje at $\frac{5}{9}$ må være størst…», ble et utsagn som ble nøye diskutert av gruppe 2. Da elevene ble spurt om hva de trodde han mente med det han sa, var svaret fra elevene dette:

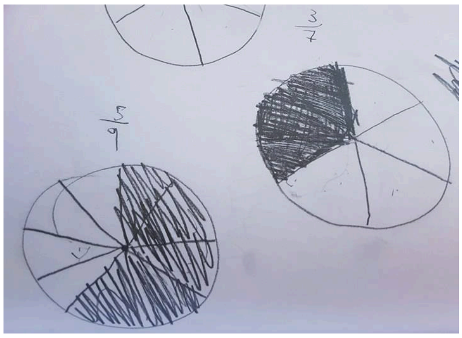
57.	Oda:	Den e en del over en halv.
58.	Espen:	Nei, menne.. Det blir jo en halv over en halv. For atte.. Det går ikke an å dele opp ni uten å ha desimaltall.
[…]		
62.	Lærer:	Så hvis du skal dele opp ni så vil du få..?
63.	Espen:	Fire komma fem. Og hvis du ska dele opp sju så bli det tre komma fem.
64.	Lærer:	Så når Hans sier at fem nideler er litt over en halv.. Stemmer det med det du sa nå?
65.	Espen:	Ja. Det e jo litt, pittelitt over en halv. En halv over en halv.
66.	Lærer:	Og tre sjudeler er litt under en halv?
67.	Espen:	Ja, en halv under en halv.
68.	Oda:	En halv under en halv nei. Det mangle en del for å bli en halv.
69.	Espen:	Det e jo tre sjudela. Tre komma fem det e jo.. halvparten av sju. Ja, nettopp.

Espen og Oda er uenige i om $\frac{3}{7}$ er en halv eller en hel del mindre enn en halv og om $\frac{5}{9}$ er en halv eller en hel del større enn en halv. Like etter denne sekvensen klarer Espen å overbevise Oda om at det er en halv del mindre og større enn en halv ved å henvise til Odas tegning der han teller delene hun har tegnet opp. Dette gjør han ved å vise at en sirkel som er delt i sju, vil ha tre hele deler og en halv del dersom halvparten skal være fargelagt. «En halv over en halv del» og «en halv under en halv del» er begreper elevene bruker for å skape mening i situasjonen, og som hjelper dem å forstå Hans sitt utsagn i grubletegningen. Elevene overfører brøken til arbeid med desimaltall for å skape mening. Espen bruker en sammenligningsstrategi som McNamara og Shaughnessy (2010) viser til, nemlig strategien der man kan vurdere om brøken er mer eller mindre enn en halv.

Neste utdrag viser at gruppe 2 overgeneraliserer regnereglene innen addisjon og at de anvender sin heltallstenkning på feil måte. Utdraget er hentet fra gruppe 2 sin diskusjon av grubletegning 1, der elevene skal sammenligne $\frac{3}{7}$ og $\frac{5}{9}$ og avgjøre hvilken brøk som er størst. Espen går i gang med å legge sammen tellerne og nevnerne, og bruker summen han finner videre i diskusjonen.

42.	Espen:	Hvis du legg dem sammen blir det åtte sekstendela!
43.	Oda:	Hæ?
44.	Espen:	Hvis du legg dem sammen.
45.	Oda:	Ja men ka ska du med det?
46.	Espen:	Æ veit ikke. Det blir jo halvparten. Det e det samme som en todel. Det der (viser til $\frac{8}{16}$) e det samme som en todel. Det va det æ fant ut.
47.	Lærer:	Så hvis du legger sammen de to brøkene så får du en halv?
48.	Espen:	Ja.
49.	Oda:	Nei. Du får en hel hvis du legg sammen dem brøkan. Trur æ. Du får jo en hel, for den derre der mangle så my for å bli en hel. Og da kan det jo ikke bli en halv. Da blir det jo en hel til sammen.
50.	Espen:	Ja.

Selv om elevene ikke skal addere gjør de et forsøk på addisjon for å nærme seg et svar. Oda mener at $\frac{3}{7}$ «får plass» inne i den delen som ikke er skravert i brøken $\frac{5}{9}$. Dette avgjør hun ved å se på tegningen sin, en representasjon jeg også har vist tidligere i analysekapittelet. Oda ble



likevel usikker på hvor hun ville med det hun sa, da det jo ikke er snakk om å addere brøkene, men å avgjøre hvilken brøk som er størst. Espen responderer på det Oda sier med å si at «hvis du legg dem sammen blir det åtte sekstendela». Her tenker Espen additivt, siden han adderer tellerne (3 + 5 = 8) og nevnerne (7 + 9 = 16). Det blir raskt avkreftet at dette kan være riktig da det ikke stemmer overens med tegningen til Oda. Oda vurderer altså det visuelle i tegningen sin, mens Espen bruker symbolmanipulasjon. Det Espen gjør er typisk, nemlig å addere teller med teller, og nevner med nevner. Her er det rimelig å si at Espen har overgeneralisert sin heltallstenkning og tatt den med seg inn i brøkregningen, selv om det ikke vil gi korrekt svar. Siden regning med brøk er relativt nytt for elevene, er det ofte sånn at de tar med seg den matematiske kunnskapen de har inn i nye områder for å prøve å skape mening til de nye situasjonene og oppgavene. Espen bruker prosedyrer fra utregningsoppgaver med hele tall, og tar det med inn i arbeidet med brøk. Kristian deler samme syn som Espen, for i diskusjonen rundt grubletegningen som handler om estimering av sum sier han: «Æ trur det e lurt.. Æ bruke å pluss sammen dem først (peker på tellerne), og dem etterpå (peker på nevnerne), og da blir det jo fem av åtte..–».

Det siste utdraget jeg skal presentere i analysekapittelet synes jeg er ganske interessant. Utdraget viser at det kan være lett å si seg enig med en karakter, men når utsagnet skal forklares med egne ord så kan det vise seg at eleven kanskje ikke er enig med den valgte karakteren likevel.

49.	Lærer:	Vi får se om vi finner en løsning på det da. Med brøk, er det sånn at bitene kan være forskjellige eller skal bitene være like store?
50.	Emma:	Like stor.
51.	Lærer:	Like store? Så hvis vi har sagt at det her (første tallinje) er fire fjerdedeler totalt, går det an? Når bitene er så ulike? Går det an å si at denne biten (første segment) er en fjerdedel?
52.	Kristian:	Nei.
53.	Lærer:	Hvorfor det da?
54.	Kristian:	Dem e ikke riktig. Det e ikke en av fire hvertfall.
55.	Lærer:	Hva er det Hans sier da?
56.	Kristian:	Han sir at det e en av fire, det trur æ egentlig. Æ trur det går an å dele opp brøka i ulike dela.

I dette utdraget er Kristian selvmotsigende. Han sier først at det ikke går an å si at det første segmentet er en fjerdedel. Når det derimot blir snakk om Hans sitt utsagn, så sier Kristian seg med en gang enig i det. I linje 54 mener Kristian at første segment ikke kan sies å være en fjerdedel. Dette indikerer at Kristian egentlig ikke aksepterer Hans sitt utsagn, siden Hans ikke ser på avstanden mellom segmentene som avgjørende for om de representerer en fjerdedel eller ikke. Jeg tolker utsagnet i linje 54 som at Kristian mener at oppdelingen av tallinjene ikke er korrekt, da Kristian tidligere har uttalt at avstanden mellom hvert punkt på tallinjen må være lik.

5.0 DRØFTING AV FUNN OG AVSLUTTENDE BETRAKTNINGER

I denne delen kommer jeg til å trekke sammen trådene fra analysen for å forsøke å gi svar til spørsmålene jeg stilte innledningsvis. Spørsmålene jeg stilte innledningsvis i oppgaven var:

På hvilken måte blir tre grubletegninger brukt i elevers matematiske diskusjoner om brøk? Og *hvilken forståelser for brøk viser de utvalgte elevene i diskusjonene?*

Gjennom analysearbeidet mitt har jeg sett på utdrag fra gruppeintervjuene som jeg har plassert i kategoriene additiv tenkning, multiplikativ tenkning, vurdering av nevner og annet. Jeg skal nå drøfte de mest sentrale funnene. Først vil jeg diskutere grubletegninger som metode, før jeg ser på hvilken brøkforståelse elevene viser. Avslutningsvis vil jeg diskutere metodekritikk, didaktiske implikasjoner, studiens bidrag på forskningsfeltet og videre forskning. Oppgaven avrundes med noen avsluttende kommentarer.

5.1 Grubletegninger som metode

Keogh og Naylor hevder at grubletegningene bringer elevenes hverdagsforestillinger frem i lyset (Keogh & Naylor, 1999; Naylor & Keogh, 2013). Utdrag fra samtalene har vist at det også var tilfelle i min forskning. Blant annet kom det frem at elevene ofte bruker en additiv tankegang i arbeid med brøk, der de teller brøkdelene uten å ta størrelsen til hver del i betraktning. De fleste elevene synes Hans sitt resonnement på hvorfor $\frac{1}{3} + \frac{4}{5}$ var $\frac{5}{8}$ var rimelig, helt til denne tankegangen ble diskutert og sammenlignet med andre utsagn. I enkelte tilfeller fungerte grubletegningene godt for å få elevene til å stille seg kritisk til ulike utsagn. Gjennom å diskutere utsagnene fant elevene ut at strategier som virket effektive og korrekte kanskje ikke var nettopp det likevel, men at en annen tilnærming til problemet muligens ville være mer hensiktsmessig. På tross av dette merket jeg meg at dersom elevene tenkte at en karakter hadde riktig tankegang kunne de fort bli veldig opphengte i den tankegangen, uten å vurdere de andre utsagnene nevneverdig. Ofte hang elevene seg opp i utsagn som inneholdt feil eller mangler, uten å tenke kritisk over det som ble sagt. Det har også vist seg at elevene ikke nødvendigvis er enig med utsagnet de sier seg enig i når de skal uttrykke hva de tenker med egne ord. Eksempel på dette ble belyst i siste utdrag i analysekapittelet, der Kristian uttrykte «Det e ikke en av fire i hvert fall. […] Hans sir det e en av fire, det trur æ egentlig.». Dette kan indikere at elevene kanskje kan miste litt av selvsikkerheten sin i møte med oppgaver og utsagn, og at de tenker at det som står skrevet er riktig. Det må nevnes at jeg informerte elevene om at de skulle diskutere utsagnene, og vurdere riktigheten til hvert enkelt utsagn. Jeg har altså implisitt sagt at ikke alt som står skrevet er matematisk korrekt. Det kan derfor stilles spørsmålstegn ved om karakterenes utsagn overstyrer det elevene egentlig tenker og mener om de ulike aspektene innen brøk. I enkelte tilfeller kan derfor muligens bruk av grubletegninger virke litt forvirrende. Da er den oppsummerende samtalen etter at grubletegningen er diskutert avgjørende. I oppsummeringen kan man trekke sammen trådene, og belyse eventuelle uklarheter og usikkerhetsmomenter.

Datamaterialet i denne studien er basert på enkeltelevers responser i løpet av noen samtalesekvenser, og er ikke tilstrekkelig for å hevde at grubletegninger oppklarer elevenes misoppfatninger. Når det er sagt viser denne studien at grubletegninger utfordrer elevenes syn på det matematiske problemet som er presentert på grubletegningen. Grubletegningen tilbyr elevene nye måter å vurdere og resonnere rundt det matematiske problemet. De ulike påstandene medfører at elevene må vurdere flere forklaringer, i tillegg til den de opprinnelig trodde var riktig. At flere av elevene i mitt prosjekt endret mening etter diskusjon av grubletegningene med medelevene, tyder på at diskusjonen fører til at elevene har reflektert over sitt opprinnelige syn, og at de eventuelt gjort noen endringer i måten de tenker på. Elevene opplevde flere kognitive konflikter, som medførte at de måtte ta oppgjør med uoverensstemmelsen, og på denne måten begynne å nærme seg den korrekte matematiske begrunnelsen.

Det var tydelig at det var vanskelig for elevene å argumentere godt for hvorfor de var enige eller uenige med karakterene. Spesielt var det for enkelte lett å si «vet ikke», uten å prøve å begrunne sin egen tankegang. Når det skal sies så var det noen av elevene som var flinke til å si hva de tenkte og forsøke å begrunne sine utsagn og valg av strategi. Selv om det i enkelte tilfeller var vanskelig for elevene å argumentere for egne tanker, finnes det tilfeller der de engasjerte seg kritisk men konstruktivt i hverandres ideer. Dersom en elev kom med en ytring var elevene flere ganger raske med å bli med på diskusjonen av det som ble tatt opp. Da stilte de hverandre spørsmål som «hvorfor gjør du det der?», sa «det der blir vel ikke helt riktig…» og liknende. Dette førte i flere tilfeller til at eleven som kom med utsagnet begynte å begrunne sin tankegang, og utdype hvorfor han/hun tenkte som han/hun gjorde. Gjennom at elevene begrunner egen tankegang kan de skape en dypere forståelse for operasjonene.

Det er lett at grubletegningene forsvinner litt i diskusjonen mellom elevene, noe enkelte av utdragene i analysekapittelet viser. Elevene tar ofte tak i det matematiske problemet som grubletegningen presenterer, og diskuterer mulige løsninger på problemet løsrevet fra karakterenes ytringer. Det er likevel viktig å huske på at selv om grubletegningene ikke vises direkte i de ulike utdragene, så er det grubletegningene som utløser diskusjonen og som ligger som et bakteppe for elevenes tankegang. I mange av tilfellene henviser elevene til karakterenes navn og tankegang, og forsøker å forklare strategien eller tenkemåten med egne ord. Hadde elevene hatt bedre kjennskap til grubletegninger som metode, ville de nok i større grad brukt de presenterte utsagnene som utgangspunkt for diskusjonen seg imellom. Det er også viktig å merke seg at grubletegningene faktisk stiller spørsmålet: «Hva tenker du om det de ulike elevene sier?». På den måten åpner grubletegningene mine for at elevene også kan legge frem egne tanker og løsningsstrategier.

5.2 Brøkforståelsen som kommer til syne i elevdiskusjonene

Gjennomføringen av datainnsamlingen la opp til en sosial aktivitet der elevene hadde en utforskende samtale omkring grubletegningene. I samtalen engasjerte elevene seg kritisk men konstruktivt i hverandres ideer. Elevene brukte i hovedsak muntlig språk for å uttrykke seg, men også enkelte skriftlige representasjoner for å tegne opp og gjøre enkelte utregninger for å hjelpe seg på veien. I dette delkapittelet ønsker jeg å svare på hvilken forståelse for brøk elevene viser i diskusjonene. Som Hiebert (1997) sier er forståelse aldri noe vi har eller ikke har, men noe som alltid forandres og utvikles hos hvert enkelt individ. For at forståelse skal utvikles, er det viktig med refleksjon og kommunikasjon.

Et av mine funn er at elevene i stor grad tenker additivt i arbeidet med brøkoppgavene, der tenkningen er preget av telling av brøkdeler eller antall segmenter på en tallinje i sammenheng med antall deler totalt. For å gjennomføre denne tellingen tegner elevene opp sirkulære representasjoner, som ofte inneholder feil eller unøyaktigheter. Representasjonene inneholder ofte deler av ulik størrelse, og dersom elevene skal tegne opp to sirkler, for eksempel for å kunne sammenligne hvilken brøk som er størst, er ofte også størrelsen på sirklene forskjellig. Det er vanskelig å partisjonere på frihånd, da det fort resulterer i unøyaktigheter. Siden representasjonene i flere tilfeller ikke er helt optimale, er det ikke alltid at de hjelper elevene noe særlig med å komme frem til en konklusjon eller løsning på problemet. Særlig i arbeidet med grubletegning 1 var det vanskelig for elevene å gjøre vurderinger basert på det visuelle i representasjonene. Årsaken til disse vanskene kan ha vært at brøkene ikke var så veldig forskjellige i størrelse. Den additive tenkningen trumfer lett andre måter å tenke på, i alle fall i begynnelsen. At additiv tenkning slår inn er ikke uvanlig, men grubletegningen presenterer også andre måter å betrakte de ulike oppgavene på. I arbeidet med grubletegningene tegner elevene opp egne representasjoner av brøkene som inngår i oppgaven. Gjennom vurderingen av andre utsagn og egne visuelle representasjoner møter elevenes additive tenkning motstand. At elevene ofte anvender en additiv tankegang kan indikere at elevene har en slags instrumentell forståelse, der de anvender regler de har hørt tidligere, uten å forstå hvorfor, eller hvorvidt, denne regelen kan brukes i regneoperasjonen.

I tillegg til at elevene tenker additivt, er også et funn at det finnes tilfeller av multiplikativ tenkning. Elevene er for eksempel opptatte av at segmentene på tallinjen må være like store. Det er spesielt i arbeidet med grubletegning 3 at dette påpekes av elevene. At delene i de sirkulære representasjonene har ulik størrelse blir ikke noe særlig kommentert, men ytringene til elevene indikerer at de er klare over at alle delene i helheten skal være like. Elevene har altså i flere tilfeller en klar oppfatning av del-hel-tolkningen innen brøk, da denne tolkningen blant annet sier at enheten skal være partisjonert inn i deler av lik størrelse. Et annet element i den multiplikative tenkningen er at elevene vurderer det multiplikative forholdet mellom teller og nevner når de skal sammenligne brøkene i grubletegning 1. De vurderer størrelsen til en brøk basert på det multiplikative forholdet til telleren og nevneren, og ikke bare telling av deler. I enkelte tilfeller understøtter elevene sine argumenter ved å henvise til representasjoner som bekrefter deres konklusjon.

Noe annet analysen viser er at elevene er opptatte av nevnerne i brøkene. Elevene er bevisste på at brøken med minst nevner inneholder de største delene, og noen ganger har elevene en tendens til å unnlate å vurdere telleren i relasjon til nevneren. Da konkluderer de med at brøken som har minst nevner må være størst, siden en del vil være større i denne brøken. Et annet funn innen kategorien «vurdering av nevneren» er at elevene tenker at nevneren forteller hva som blir telt. Dette skaper problemer i arbeid med grubletegning 3, da alle elevene først sier seg enige med Hans som mener at tallinjene er delt inn i fire og fem segmenter. I dette tilfellet blir elevene veldig opptatte av ideen om at telleren telles, og nevneren forteller hva som blir telt. Tanken om partisjonering i like deler er ikke like sentral for elevene i oppstarten av arbeidet med grubletegning 3, men dette endrer seg i løpet av diskusjonen.

Flere elever endret mening fra ukorrekt til korrekt matematisk påstand etter diskusjonen av grubletegningen med medelevene. Dette kan indikere at læring har funnet sted og at elevenes misoppfatninger til en viss grad er blitt forkastet. Likevel skal en være forsiktig med å dra slike slutninger. Hvorvidt elevene virkelig har forstått den aktuelle matematikken i oppgaven eller om de kun har sagt seg enig med den påstanden de andre på gruppen hevdet var riktig er det vanskelig å si noe om. Jeg sitter igjen med inntrykk av at diskusjonene hjelper på elevenes forståelse av brøk, siden de i diskusjonen diskuterer ulike aspekter ved brøkbegrepet og mulige strategier og tenkemåter for å finne en løsning på det presenterte problemet. Grubletegningene viser elevene at det er flere enn én måte å tenke på, og elevene må bruke den kunnskapen de har om tall og brøk for å skape mening i nye situasjoner. Det er også nødvendig å nevne elevenes representasjonsfattighet. Alle representasjoner tegnet av elevene, foruten den ene, var tegnet opp som sirkler som elevene betraktet som pizza. At elevene har dette bildet av brøk blir forsterket av det elevene ytrer i første samtale, der de skal fortelle hva de tenker på når de hører ordet brøk.

5.3 Metodekritikk

Dette er en kvalitativ småstudie, så mulighetene for generalisering er begrensede. Siden jeg kontinuerlig knytter mine funn til eksisterende forskning og innsamlet empiri har jeg gjort noen konklusjoner. For å gjøre prosjektet transparent har jeg forsøkt å gi grundige og deskriptive beskrivelser av konteksten, innsamling av data og analyseprosessen. Likevel kan jeg ikke hevde at disse konklusjonene vil være de samme for andre som forsker på det samme. Som et ledd i å gjøre prosjektet transparent vil jeg nå presentere kritikk til mitt valg av metode.

Som Postholm og Jacobsen (2011) hevder er en åpenbar svak side ved gruppeintervju at de er følsomme for uheldige gruppeprosesser. Det kan blant annet være at enkelte personer dominerer fullstendig eller at andre ikke tør å komme frem med sine synspunkter. For å unngå slike uheldige situasjoner settes det store krav til den som skal gjennomføre og lede gruppeintervjuet. Det er ikke til å legge skjul på at diskusjonen domineres av enkelte av elevene. Men det er ikke tilfelle at disse elevene ikke slipper til de andre, for det gjør de. Hadde det ikke vært for de tre elevene hadde nok jeg som lærer måtte vært mye mer delaktig enn det jeg var i gjennomføringen, så at de klarer å «dominere» samtalen i den graden de gjør ser jeg på som positivt. Det er selvfølgelig ønskelig at alle elevene skal legge frem sine tanker og forståelser av oppgavene når man skal arbeide på den måten jeg har lagt opp til, men situasjonen kan ha påvirket elevene og datamaterialet. Både gjennom den skriftlige tillatelsen på forhånd, min informasjon om prosjektet og det faktum at det ble tatt lyd- og videoopptak er situasjonen annerledes enn en vanlig undervisningssituasjon. I tillegg er det en ny metode som blir presentert for elevene, noe som kan gjøre usikkerheten i møtet med oppgavene enda større.

Under datainnsamlingen var jeg deltakende, og mine spørsmål har nok påvirket det innsamlede materialet til en viss grad. Jeg har deltatt aktivt i prosessen med oppfølgende spørsmål, og lagt opp en slags «bane» for diskusjonen dersom den har stoppet opp. Dette anser jeg likevel som nødvendig, siden elevene ikke kjente til grubletegninger som metode fra før. I tillegg til at jeg var deltakende i gruppeintervjuene er datamaterialet også tolket og analysert av meg. Ved å gi en gjennomgang av metoden samt presentasjon av data som utgangspunkt for mine analytiske påstander arbeider jeg for å sikre troverdighet i påstandene mine.

5.3.1 Kritikk av elementer i grubletegningene

I ettertid har jeg gjort meg noen tanker omkring grubletegningene jeg har laget, og notert noen endringer jeg kunne gjort dersom jeg skulle brukt grubletegningene flere ganger. Blant annet så burde nok ikke tallinjene i grubletegning 3 vært 10 cm lange, da det gjorde det veldig lett for de elevene som målte med linjal å trekke konklusjon uten å egentlig vise noe særlig forståelse. Dette var noe jeg oppdaget i gjennomføringen, og som jeg ser på som en potensiell svakhet i oppgaven.

Noe annet som slår meg er at det kunne ha vært en styrke å variere enheten i oppgavene, da den er 1 i alle de tre grubletegningene. Å variere størrelsen på helheten kan i større grad få frem elevenes tanker omkring brøkbegrepet. Gjennom arbeid med ulike enheter fremmes fleksibiliteten i valg av måter å tenke på i ulike situasjoner, noe som kunne fått frem at brøk er et multiplikativt, relativt forhold og ikke bare telling av deler. Variasjon i enheten kunne kanskje også utvidet elevenes representasjonsregister, da deres valg av representasjoner kanskje i større grad ville gått bort fra pizza- eller kaketenkningen. Når sant skal sies så er jo ikke dette noen stor undersøkelse, så det vil være umulig å prøve ut alt som er ønskelig. Dette er et forsøk fra min side å prøve ut grubletegninger i matematikkundervisningen, noe jeg ser på som en verdifull erfaring å ta med videre.

Da jeg laget grubletegningene tenkte jeg først igjennom hvilke oppgaver jeg ville presentere, før jeg forsøkte å finne passende og realistiske utsagn. I ettertid har jeg sett at det kan se ut som at det er et mønster i hva de ulike karakterene uttrykker i de tre grubletegningene, noe som fort kunne bli forutsigbart for elevene dersom mønsteret gjentok seg i videre arbeid med nye grubletegninger. For eksempel, som jeg har nevnt kort tidligere, har Sara aldri et konkret svar på oppgavene. Sara svarer som regel litt diffust og svevende. Tirils svar er aldri matematisk korrekt, men kan inneholde elementer som er typiske for elevenes brøktenkning. Hans og Line er de karakterene som uttrykker matematisk gyldige svar, men ikke i hver grubletegning. Dersom jeg skulle laget grubletegningene på nytt ville jeg ha variert mer hvilken karakter som uttrykker seg på en spesiell måte, slik at det ikke ville være fare for at elevene kunne legge merke til dette. Elevene la ikke merke til dette mønsteret, men det kan være greit å være på den sikre siden.

5.3.2 Lærerens rolle i diskusjonen

Som lærer er det lett å påvirke gjennom spørsmålene som stilles, da de ofte kan inneholde føringer eller momenter som ikke elevene selv brakte frem i sine utsagn. Min rolle kan ha hatt noe innvirkning på diskusjonen. Som jeg har nevnt litt kort tidligere kan jeg ha lagt opp en slags «bane», der jeg bestemmer retningen i diskusjonen dersom elevenes innspill stopper litt opp.

Når det gjelder grubletegningene og arbeid med disse er det godt mulig at elevene er vant til at det som står i bøker på skolen er sant. Den sosiale settingen kan også spille inn, siden jeg kommer inn som lærer og presenterer en oppgave som jeg selv har laget. Elevene blir informerte om at det kan foreligge feil i grubletegningene, og at de skal diskutere alle utsagn og vurdere hvorvidt de er korrekte eller ukorrekte. Siden elevene vet at det er jeg som har laget grubletegningene kan det være at de tenker at alt som står der må være sant, eller at de er redde for at de ikke svarer på den måten jeg har tenkt. Det skal sies at dette var et større problem med gruppe 1 enn med gruppe 2. I gruppe 2 var spesielt Oda kritisk til enkelte av utsagnene som var presenterte, og på den måten ble diskusjonen av hvert utsagn rikere.

5.4 Didaktiske implikasjoner

Min studie kan være et utgangspunkt for lærere til å reflektere over egen praksis rundt bruk av grubletegninger som metode i matematikkfaget. Mine analyser gir et bilde av en gruppe sjettetrinnselevers bruk av grubletegninger som utgangspunkt for diskusjon rundt brøkbegrepet. Siden funnene mine er basert på en liten gruppe elever er de ikke representative for en større gruppe i befolkningen. Jeg kan ikke trekke generelle slutninger ut fra mine funn, men resultatet av denne undersøkelsen kan få en overføringsverdi til undervisning. I møtet med grubletegningene brukte elevene ulike strategier og metoder for å hjelpe seg på veien mot et svar. Enkelte ganger forsvant kanskje grubletegningen litt i utsagnene deres, men grubletegningen lå alltid der som et bakteppe og grunnlag for de tankene som ble delt.

Denne studien gir støtte til Keogh og Naylors (1999) argumentasjon om at grubletegninger får elevenes hverdagsforestillinger frem i lyset. Grubletegninger virker å være et velegnet verktøy for å avdekke hva elevene kan om et tema og hvilke misoppfatninger som foreligger. Å få innblikk i elevenes feilaktige forestillinger om faglige temaer kan ha stor verdi for læreren. Læreren kan da ta utgangspunkt i elevenes misoppfatninger i den videre undervisningen av emnet, gjennom å utfordre og forsøke å oppklare disse. Kanskje er det særlig hensiktsmessig å bruke grubletegninger ved introduksjon av nye temaer for å tidlig kunne avdekke og oppklare disse misoppfatningene. Naylor og Keogh (1999) mener blant annet at det er mulig å skape grubletegninger i alle fag hvor det er mulighet for alternative oppfatninger og motstridende synspunkter.

Om elever skal kunne bruke en grubletegning på en hensiktsmessig måte må de forstå hvordan arbeid med slike typer oppgaver skal gjøres. Et ledd mot dette er å la elevene delta aktivt i å bestemme retningen på diskusjonen, og å legge opp til at de skal hjelpe hverandre gjennom diskusjon, konstruktive tilbakemeldinger og kritisk tenkning. I en tidlig fase trenger elevene veiledning fra lærer. I begynnelsen må det spesielt legges frem hva en grubletegning er, og hvordan en kan arbeide med en slik type oppgave. Elevene må i tillegg få trening i å diskutere andre personers matematiske utsagn og forsøke å skape mening til disse, slik at de kan forstå og vurdere riktigheten av utsagnene. Dersom elevene får legge frem egne tanker om det matematiske temaet kan de gi muligheter til å strekke seg etter hverandre, og samtalen kan inspirere elevene til å tenke.

5.5 Studiens bidrag på forskningsfeltet og videre forskning

Denne studien introduserer en metode som det ikke er skrevet så mye om i matematikkdidaktisk forskning tidligere. I tillegg viser den hvordan grubletegninger kan benyttes som utgangspunkt for å diskutere det matematiske emnet brøk, et emne som har vist seg å være vanskelig for mange elever. Ved bruk av grubletegninger i undervisningen får elevene trent seg på å forsvare egne synspunkter, samt å utfordre synspunktene til andre. Elevene får altså øvelse i å finne argumenter for og imot utsagnene som er presentert, både utsagnene de fiktive karakterene kommer med og medelevenes ytringer. Fordi grubletegningene består av ulike utsagn og synspunkter, kan det være lettere for elever som ellers ikke liker å ytre sine meninger eller finner det vanskelig å finne egne argumenter, å delta i diskusjonen. Ved å ta utgangspunkt i utsagnene kan det være enklere for elevene å finne selvtillit, tørre å delta i diskusjonen og argumentere for og i mot innholdet i ytringen (Keogh & Naylor, 1999).

Videre forskning på emnet kunne fokusert på bruken av grubletegninger i arbeid med andre matematiske emner, og eventuelt effekten av å bruke en slik metode i norsk skole. Det vil være interessant å se hvordan det kan legges opp til diskusjon der grubletegningene kommer tydeligere frem i diskusjonen, noe som kanskje vil skje dersom elevene har bedre kjennskap til metoden. I en oppfølgingsstudie kunne det også være interessant å sammenligne en elevgruppe som arbeider med grubletegninger, med en elevgruppe som kun blir presentert for grubletegningens spørsmål. Da vil det være mulig å se på og vurdere likheter og/eller forskjeller i læringsutbytte og argumentasjonsevne, og det vil komme tydeligere frem hvilken effekt bruk av grubletegninger har.

5.6 Avsluttende kommentarer

Bakteppet for studien er et sosiokulturelt syn på læring, et syn som vektlegger at kunnskap og læring konstrueres gjennom samhandling med andre (Dysthe, 2001). I denne studien har jeg undersøkt hvordan elever på 6. trinn bruker grubletegninger som utgangspunkt for diskusjoner om brøk, og hvilken forståelse for brøk elevene viser i diskusjonene. Studien viser at grubletegninger er effektive når det gjelder å avdekke og utfordre elevers misoppfatninger og tanker om det matematiske temaet brøk. Det virker som at grubletegningene stimulerer elevene til å starte en diskusjon om det matematiske temaet som presenteres. De utvalgte elevenes skriftlige besvarelser og deres diskusjon viser imidlertid at flere av elevene har vanskeligheter med å danne argumenter og begrunne sine påstander. Det er tydelig at elevene behøver mer opplæring og trening i argumentasjon, og da kan muligens arbeid med grubletegninger være til hjelp. I møte med grubletegninger må elevene ta stilling til ulike utsagn og argumentere for hvorfor det ene er mer riktig enn det andre. Å reflektere over hva man gjør, og å kommunisere dette til andre, er viktig for å utvikle forståelse (Hiebert, 1997). Studien har vist at flere av elevene endrer mening fra ukorrekte til korrekte matematiske påstander etter at grubletegningene har blitt diskutert, noe som indikerer at elevenes misoppfatninger til en viss grad er blitt forkastet.

Funnene mine peker på den ene siden mot at grubletegningene lett kan forsvinne i diskusjonen, men på den andre siden at momentene som blir diskutert har rot i grubletegningene som er presenterte. Flere av elevene opplevde arbeidet med grubletegningene som utfordrende og nytt, samtidig som de syntes at det var en spennende måte å arbeide på innen matematikken. De fleste elevene var dessuten delaktige i diskusjonen, noe som tyder på at elevene var motiverte i sitt arbeid med grubletegninger, samtidig som de fikk øvd seg på faglig argumentasjon. Elevene uttrykte også ved prosjektets slutt at de syntes det var morsomt å arbeide med slike oppgaver, og at det var noe de gjerne ville gjøre flere ganger. En elev trakk også frem at det var gøy at det var litt vanskelig, siden det ikke var så lett å vite hva som var det riktige svaret.

Å anvende grubletegninger for å forsøke å få tak i elevenes misoppfatninger lar seg enkelt gjøre i undervisningen, og behøver ikke å være tidkrevende. Grubletegninger virker å ha potensiale når det kommer til å avdekke misoppfatninger og utfordre elevenes forståelse. Det virker også som at elevenes misoppfatninger endrer seg etter diskusjoner med jevnaldrende, noe som antyder at diskusjonene kan bidra til læring. Om endringen vedvarer har ikke denne studien grunnlag for å fastslå, da læring er en prosess som går over lang tid. Arbeid med grubletegninger i brøkundervisning kan i alle fall ikke sies å være mekanisk og drillpreget. Forhåpentligvis fører ikke arbeidet til at elevene får en overfladisk forståelse der de lærer seg formler og regner seg frem til riktig svar uten å forstå hvorfor. Samtidig som at fokuset i arbeidet er rettet mot prosessene som fører frem mot en løsning på et problem, skaper elevene en dypere forståelse for operasjonene ved å snakke om hva de gjør og hvorfor de gjør det.

LITTERATUR

Aamli, K. (2015). *Lærer matte av å snakke matte.* Hentet fra http://forskning.no/2015/04/laere-barna-tenke

Anghileri, J. (2000). *Teaching number sense.* London: Continuum.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct. I T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (red.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (s. 13-47). London: Routledge.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. I R. Lesh & M. Landau (red.),*Acquisition of mathematics concepts and processes,* (s. 91-125). New York: Academic Press. Hentet fra https://www.researchgate.net/profile/Edward_Silver2/publication/258510439_Rational_number_concepts/links/57598dc808aed884620b0d82.pdf

Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1986). Estimation and children's concept of rational number size. I H. L. Schoen & M. Zweng (red.), *Estimation and mental computation: 1986 Yearbook* (s. 103-111). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Hentet fra http://elementarymathendorsent.pbworks.com/w/file/fetch/91064172/estimation%20article.pdf

Bjerke, A. H., Eriksen, E., Rodal, C., & Ånestad, G. (2013). Når brøk ikke er tall – Eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. I I. Pareliussen, B. B. Moen, A. Reinertsen & T. Solhaug, *FoU i praksis 2012 conference proceedings.* Akademika forlag Trondheim, 28-36.

Boaler, J., & Greeno., J. (2000). Identity, agency and knowing in mathematics worlds. I J. Boaler (red.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (s. 171-200). Westport: Ablex.

Boaler, J., & Humphreys, C. (2005). *Connecting mathematical ideas.* Portsmouth: Heinemann.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 1: Rationals as measurement. *The Journal of Mathematical Behavior, 23*(1), 1-20. doi: 10.1016/j.jmathb.2003.12.001

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically : Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, N.H: Heinemann.

Chapin, S., O'Connor, C., & Anderson, N. (2009). *Classroom discussions : Using math talk to help students learn, grades K-6* (2. utg.). Sausalito, Calif: Math Solutions.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in mathematics, 64*(3), 293-316. doi: 10.1007/s10649-006-9036-2

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education.* London: Routledge.

Dabell, J. (2008). Using Concept Cartoons. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath,* (209)*,* 34-36. Hentet fra http://eds.b.ebscohost.com/eds/detail/detail?vid=0&sid=750230ea-352d-4f88-a31b-3fe79d1f0943%40sessionmgr101&bdata=JnNpdGU9ZWRzLWxpdmU%3d#AN=34166057&db=a9h

Dalland, O. (2007). *Metode og oppgaveskriving for studenter* (4. utg., Helse- og sosialfag: høgskole). Oslo: Gyldendal akademisk.

Drageset, S., & Ellingsen, S. (2010). Å skape data fra kvalitativt forskningsintervju, i *Sykepleien Forskning 2010 5(4)* 332-335. Hentet fra https://www.nsf.no/Content/681679/nyttestoff%20data%20fra%20kvalitativt%20intervju.pdf

Dysthe, O. (2001). *Dialog, samspel og læring.* Oslo: Abstrakt forlag AS.

Hannula, M. S. (2003). Locating Fraction on a Number Line. I N. A. Paterman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (red.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3,* 17-24. Hawaii: College of Education University of Hawai'i. Hentet fra *http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED500858.pdf*

Hiebert, J. (1997). *Making sense : Teaching and learning mathematics with understanding.* Portsmouth, N.H: Heinemann.

Johannessen, A., Tufte, P. A., & Christoffersen, L. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode.* (5. utg.). Oslo: Abstrakt.

Kabapinar, F. (2005). Effectiveness of teaching via concept cartoons from the point of view of constructivist approach. *Educational Sciences: Theory & Practice, 5*(1), 135-146.

Keogh, B., & Naylor, S. (1999). Concept Cartoons, Teaching and Learning in Science: An Evaluation. *International Journal of Science Education, 21*(4), 431-46. doi: 10.1080/095006999290642

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. I T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (red.), *Rational numbers: An integration of research* (s. 49-84). London: Routledge.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (red.). (2001). *Adding it up : helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kleve, B., & Solem, I. H. (2014). Aspects of a teacher's mathematical knowledge in the orchestration of a discussion about rational numbers. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 119-134.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* London: Routledge.

Lemaire, P., Lecacheur, M., & Farioli, F. (2000). Children's strategy use in computational estimation. I P. Pexman (red.), *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale, 54*(2), 141-148. doi: 10.1037/h0087336

Madsen, L. S. (2013). *Elever bør slite med matematikken.* Hentet fra http://forskning.no/matematikk-pedagogiske-fag/2013/05/elever-bor-slite-med-matematikken

Marshall, S. P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. I T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (red.), *Rational numbers: An integration of research* (s. 261-288). London: Routledge

McNamara, J., & Shaughnessy, M. M. (2010). *Beyond pizzas & pies: 10 essential strategies for supporting fraction sense, grades 3-5.* Math Solutions.

Meld. St. 28 (2015-2016). (2016). *Fag – Fordypning – Forståelse – En fornyelse av Kunnskapsløftet.* Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/

Mercer, N. (1995). *The guided construction of knowledge: Talk amongst teachers and learners.* England: Multilingual matters.

Mercer, N., & Littleton, K. (2007). *Dialogue and the development of children's thinking: A sociocultural approach.* London: Routledge.

Naturfagssenteret. (2013). *Grubletegninger.* Hentet fra http://www.naturfag.no/artikkel/vis.html?tid=1233986&within_tid=1233983

Naylor, S. & Keogh, B. (2013). Concept Cartoons: what have we learnt?. *Journal of Turkish*

Science Education, (s. 3-11). Hentet fra https://search.proquest.com/docview/1659748384?accountid=12870

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren.* Universitetsforlaget.

Pearn, C., & Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. I *Mathematics education for the third millenium: Towards 2010 Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. (s. 430-437). Sydney, Australia: Merga.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically : Communication in mathematics classrooms* (Language, education and society). London: Routledge & Kegan Paul.

Post, T. R., Wachsmuth, I., Lesh, R., & Behr, M. J. (1985). Order and equivalence of rational numbers: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1). (s. 18-36). doi: 10.2307/748970

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk. Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Sexton, M., Gervasoni, A., & Brandenburg, R. (2009). Using a Concept Cartoon to Gain Insight into Children's Calculation Strategies.*Australian Primary Mathematics Classroom, 14*(4), 24-28.

Skemp, R. (1976). Instrumental understanding and relational understanding. *Mathematics Teaching, 77,* 20-26.

Skott, J., Jess, K., & Hansen, H. C. (2008). *Matematik for lærerstuderende: Delta: fagdidaktik.* Frederiksberg: Forlaget Samfundslitteratur.

Strandberg, L. (2008). *Vygotsky i praksis: Blant pugghester og fuskelapper.* Oslo: Gyldendal Akademisk.

Säljö, R. (2001). Læring i praksis – Et sosiokulturelt perspektiv. Oslo: Cappelen Akademisk.

Tjora, A. (2013). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis.* (2. utg, 2. oppl.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2013b). *Læreplan i matematikk fellesfag – Grunnleggjande ferdigheiter.* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Grunnleggende_ferdigheter/

Utdanningsdirektoratet. (2013c). *Læreplan i matematikk fellesfag – Kompetansemål.* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal

Utdanningsdirektoratet (u.å.). *Den første innføring av brøkbegrepet.* Hentet fra https://www.udir.no/pagefiles/veiledninger/matematikk/undervisningsopplegg/2/broek_uo.pdf

Van de Walle, J., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. (2014). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (8. utg.). Essex: Pearson Education Limited.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Webb, L. (2015). The Use of Cartoons as a Tool to Support Teacher Ownership of Mathematics Curriculum Change. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 19*(1), 57-68. doi: 10.1080/10288457.2015.1012905

VEDLEGG

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring til foresatte

Guro Heggem Olsen | Tlf:

NTNU | E-post:

Avd. for lærer- og tolkeutdanning

7053 Trondheim

Trondheim 12.09.16

Til foreldre/foresatte for elever på 6. trinn ved _______ skole

Anmodning om tillatelse til video-/lydopptak av undervisning og gruppeintervju

Bakgrunn og informasjon

Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved NTNU, avdeling for lærer- og tolkeutdanning. Jeg skal i løpet av studieåret 2016/2017 gjennomføre et masterprosjekt i matematikk, der jeg skal bruke grubletegninger som utgangspunkt for en matematisk samtale om brøk.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, har jeg i samråd med min veileder kommet til at det vil være ønskelig å gjøre video-/lydopptak av undervisningssekvenser/intervju med/av elever. Jeg vil i tillegg samle inn elevarbeid fra undervisningssekvensen. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å kunne gjøre video-/lydopptak av elever i 6. trinn ved _____ skole. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert så langt råd er, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Opptakene og elevarbeidene vil kun bli sett/hørt av meg, Guro Heggem Olsen, og min veileder, Ole Enge. Opptakene vil transkriberes og analyseres ut fra matematikkdidaktisk forskning. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil det ikke være mulig å spore tilbake til enkeltindivider ettersom involverte personer vil bli anonymisert. Etter at oppgavene er gjennomførte vil innsamlede data bli slettet, senest 01.07.17.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.

Dersom eleven ikke deltar i masterprosjektet, vil det ikke få noen innvirkning på elevens forhold til skolen eller undervisningen. Han/hun vil da følge undervisningen som læreren har planlagt.

Generelt

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD – Norsk senter for forskningsdata AS.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer), eller min veileder, Ole Enge. Han kan nås på telefon ______ eller e-post ______.

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å la deres barn være med på det. Jeg ber foreldre/foresatte om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til video-/lydopptak i klassen.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen
Guro Heggem Olsen

Svarslipp med samtykke til deltakelse i masterprosjekt

Jeg bekrefter at jeg har lest informasjonsarket og samtykker i at mitt barn deltar i aktiviteter knyttet til masterprosjektet til Guro Heggem Olsen.

Barnets navn: ____

Jeg/vi samtykker i at: (Kryss av det som passer)

☐ Mitt barn deltar i intervjuer og at det gjøres lydopptak av intervjuene til transkribering og analyse. Anonymiserte sitater fra barnet, der barnet ikke skal nevnes eller identifiseres, brukes i masteroppgaven.

☐ Det tas videoopptak av barnet, som en del av matematikkundervisningen. Videoen kan brukes av meg og veileder i arbeidet med skrivingen. Videoen skal ikke offentliggjøres.

Sted og dato: ____

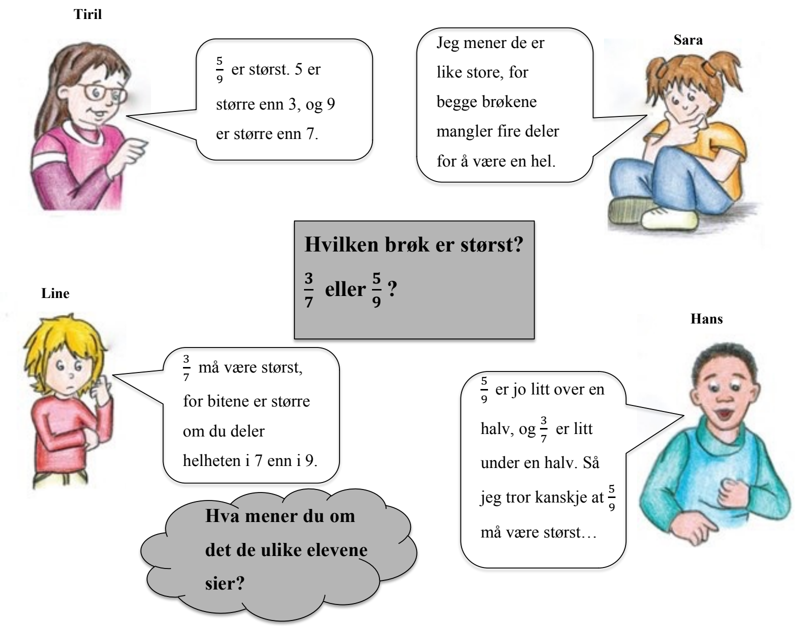
Forelders/foresattes underskrift: ____

Vennligst returner svarslippen til ______ så snart som mulig, og senest 07.10.16.

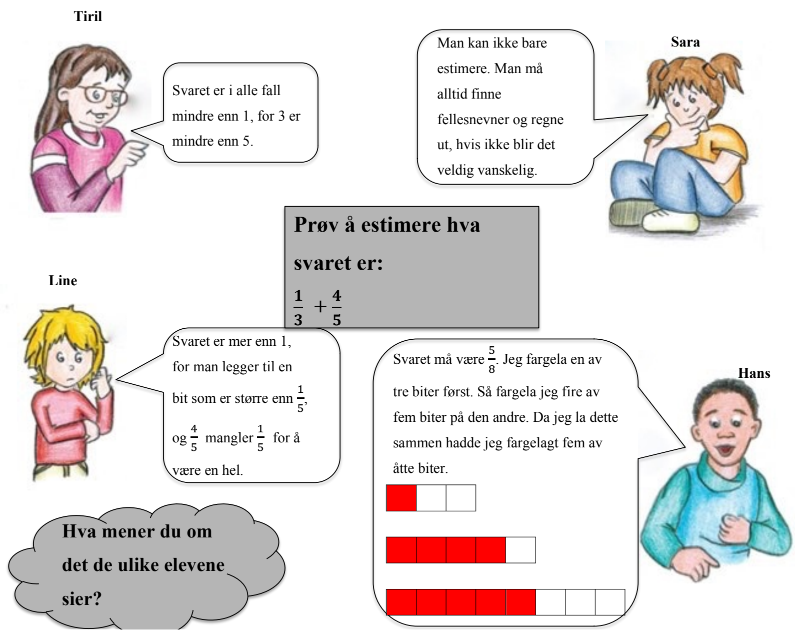
Tusen takk!

Vedlegg 2: Grubletegningene som ble brukt

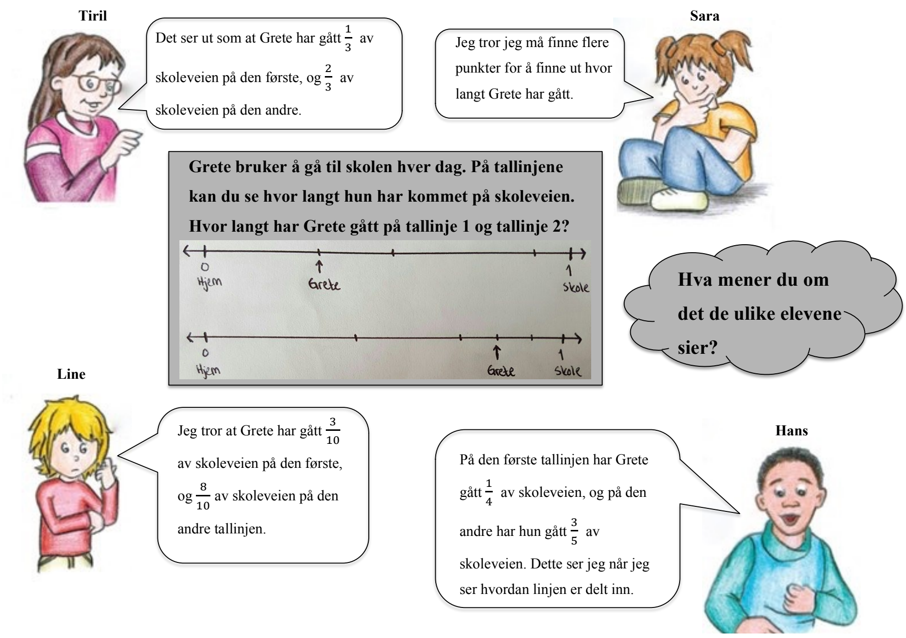
Grubletegning 1: Sammenligning av brøker



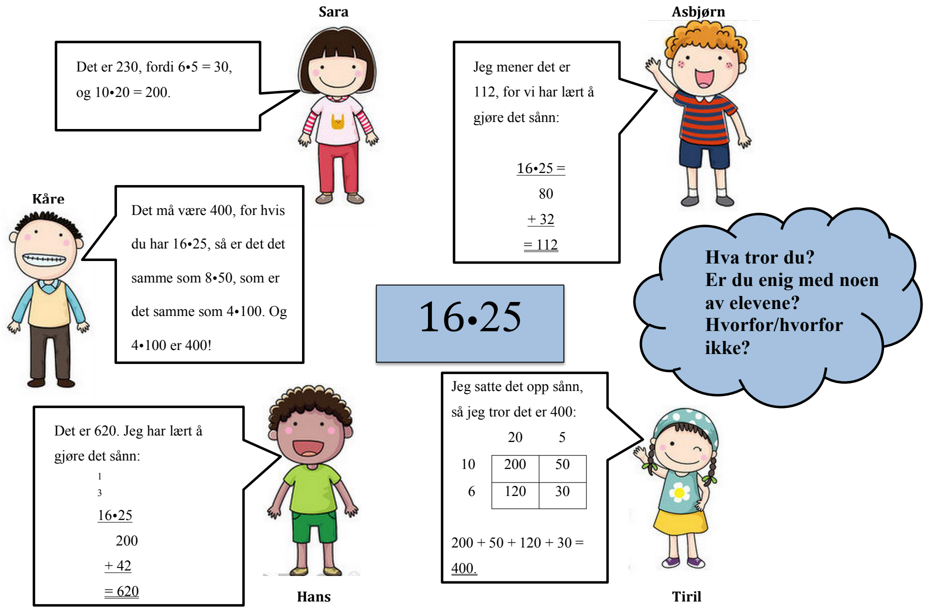
Grubletegning 2: Estimering av sum



Grubletegning 3: Plassering av brøk på tallinjen



Vedlegg 3: Grubletegning fra pilotundersøkelse



Vedlegg 4: Kvittering fra NSD etter avsluttet saksbehandling av prosjektmeldingen

NSD

Ole Enge
Institutt for grunnskolelærerutd. 1-7 og bachelor i arkiv og samlingsforvaltning NTNU

7491 TRONDHEIM

Vår dato: 19.10.2016 Vår ref: 50057 / 3 / AMS Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 19.09.2016. Meldingen gjelder prosjektet:

50057	*Grubletegninger som utgangspunkt for matematiske samtaler om brøk*
Behandlingsansvarlig	*NTNU, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Ole Enge*
Student	*Guro Heggem Olsen*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 20.06.2017, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Kjersti Haugstvedt

Anne-Mette Somby

Kontaktperson: Anne-Mette Somby tlf: 55 58 24 10
Vedlegg: Prosjektvurdering

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no