Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Patrik Hunnålvatn Tangen

Kognitive krav i arbeidet med digitale matematikkoppgaver

En kvalitativ undersøkelse om hvordan de kognitive kravene til digitale matematikkoppgaver endres underveis i tre undervisningsøkter på ungdomstrinnet

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Hermund Andre Torkildsen
Trondheim, mai 2017

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Patrik Hunnålvatn Tangen

Kognitive krav i arbeidet med digitale matematikkoppgaver

En kvalitativ undersøkelse om hvordan de kognitive kravene til digitale matematikkoppgaver endres underveis i tre undervisningsøkter på ungdomstrinnet

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Hermund Andre Torkildsen
Trondheim, mai 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Denne masteroppgaven er skrevet i forbindelse med en 2-årig masterutdanning i matematikkdidaktikk ved NTNU. Veien mot en ferdig oppgave har vært både lang og frustrerende, men samtidig utrolig lærerik og givende. Selv om dette er en individuell oppgave er det flere personer jeg vil rette en stor takk til. Dette er personer som har vært med å påvirke det endelige resultatet og som har bidratt til at forskningsprosjektet var mulig å gjennomføre.

Jeg vil takke de tre lærerne som i en hektisk skolehverdag stilte opp og tok seg tid til å bidra til dette forskningsprosjektet. Uten dere ville det rett og slett ikke vært mulig å gjennomføre denne undersøkelsen.

Videre vil jeg takke Kikora AS som ga meg tillatelse til å publisere denne masteroppgaven med bilder og innhold fra Kikora sine nettsider.

Til slutt vil jeg takke min kjære mormor som på kort varsel tok seg tid til å lese korrektur på den ferdige oppgaven. Ved å gjøre dette for meg sparte jeg mye tid som jeg kunne bruke på andre ting ved oppgaven. Dette setter jeg utrolig stor pris på!

Innholdsfortegnelse:

Figuroversikt:

Tabelloversikt:

1.0 Innledning

1.1 Bakgrunn for oppgaven

Formålet med matematikkfaget i skolen er ifølge Utdanningsdirektoratet (2013a) å skape individer som kan bidra til å utvikle samfunnet, gjennom en opplæring som består av utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter og ferdighetstrening. Siden matematikk inngår i flere samfunnsområder som for eksempel medisin, økonomi og teknologi, er matematikkfaget en viktig del av samfunnsutviklingen (Utdanningsdirektoratet, 2013a). Selv om matematikk er et av de viktigste fagene i skolen viser PISA-undersøkelser fra 2015 at norske elever scorer betydelig lavere innenfor matematikk enn land som Danmark, Finland og Japan (Nortvedt & Pettersen, 2016).

Av landene som er med i OECD (organisasjonen for økonomisk samarbeid og utvikling) er det Japan som scorer aller høyest i matematikk. I en artikkel fra Fujii (2016) kommer det frem at matematikkundervisningen i Japan ofte består av problemløsningsoppgaver, hvor elevene arbeider i lengre tid med én oppgave og hvor løsningsstrategier og fremgangsmåter ikke blir presentert for elevene. Lærerens oppgave blir dermed å stimulere elevenes tanker, ikke å presentere løsninger og fremgangsmåter for elevene (Nortvedt & Pettersen, 2016). En analyse av elevspørreskjemaene fra PISA 2012 viser derimot at over halvparten av de norske elevene svarte at de sjeldent eller aldri tok del i slike kognitivt krevende oppgaver i matematikkundervisningen (Olsen, 2013). Dette på tross av at Utdanningsdirektoratet (2013a, s. 1) definerer matematisk kompetanse som: «… å bruke problemløsning og modellering til å analysere og omforme et problem til matematisk form, løse det og vurdere gyldigheten av løsningen». Det kan dermed se ut til at store deler av norske elever arbeider med matematikkoppgaver som ikke samsvarer med formålet med matematikkundervisningen. Siden arbeidet med å løse matematikkoppgaver er en stor del av matematikkundervisningen i grunnskolen, er elevenes læring helt avhengig av hvilke typer matematikkoppgaver elevene arbeider med (Sullivan, Clarke, & Clarke, 2009). Tidligere forskning av Boaler og Staples (2008) viser dessuten at kognitivt krevende oppgaver kan bidra til høyere prestasjoner hos alle elever, både faglig svake og sterke elever. Dersom elevene ikke får arbeide med slike kognitivt krevende oppgaver vil det bli utfordrende å synliggjøre for elevene at matematikk kan brukes til å utforske og forklare verden rundt oss.

Resultater fra PISA-2012 viser samtidig at norske elever bruker digitale verktøy i matematikkundervisningen betydelig oftere enn andre OECD-land (Olsen, 2013). En av årsakene til dette kan være fordi digitale verktøy har en sentral rolle i matematikkundervisningen i den norske skolen. Det er for eksempel en grunnleggende ferdighet å kunne bruke digitale verktøy i matematikkundervisningen, og i 2015 ble eksamensformen i matematikk i grunnskolen endret slik at elevene må ta i bruk digitale verktøy under eksamen på 10. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2015). Det er i tillegg flere kompetansemål etter 7.- og 10.-trinn som direkte innebærer at elevene skal ta i bruk digitale verktøy i matematikkundervisningen (Utdanningsdirektoratet, 2013b, 2013c). Forskning viser derimot ingen entydige svar på om digitale matematikkoppgaver bør brukes i skolen eller ikke, men forskerne er enige om at det viktigste er hvordan de faktisk blir tatt i bruk (Goldenberg, 2000). I følge Van de Walle, Karp og Bay-Williams (2015) bør digitale verktøy bidra med noe for å nå læringsmålene som er satt, ikke bare bytte ut tradisjonelle verktøy som man kan oppnå det samme med.

Gjennom egne erfaringer fra praksis og arbeid i skolen har jeg en oppfatning av at de digitale matematikkoppgavene som tas i bruk i skolen sjeldent skiller seg fra oppgaver som for eksempel løses med penn og papir, og at oppgavene ofte er drilloppgaver og repetisjonsoppgaver som er lite kognitivt krevende. Jeg mener det derfor vil være interessant å undersøke hvilke digitale matematikkoppgaver som blir brukt av lærere og hvor kognitivt krevende disse oppgavene er. Samtidig viser tidligere forskning at det ikke vil være hensiktsmessig å analysere matematikkoppgaver slik de fremstår i lærebøker eller andre læremidler, da oppgavenes kognitive krav kan endres underveis i undervisningen (Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 1996). Det vil si at oppgaven som blir presentert av læreren eller læreboka ikke nødvendigvis er den samme oppgaven som elevene faktisk arbeider med, da elevene kan ta i bruk andre fremgangsmåter og strategier enn det som er etterlyst. Elevene kan altså arbeide på et lavt kognitivt nivå selv om læreren har lagt opp til en undervisning hvor elevene skal arbeide på et kognitivt høyt nivå. Det vil derfor også være interessant å undersøke endringen av de kognitive kravene og om de digitale matematikkoppgavene påvirker denne endringen, da det ser ut til at det eksisterer relativt lite forskning om akkurat dette.

På bakgrunn av dette har jeg kommet frem til et forskningsspørsmål som jeg mener vil være interessant og aktuell for både dagens- og fremtidens skole, hvor digitale verktøy kan anses som en viktig del.

1.2 Undersøkelsens forskningsspørsmål

I dette prosjektet har jeg valgt å undersøke hvordan de kognitive kravene til digitale matematikkoppgaver kan endres underveis i undervisningen. Jeg har i tillegg valgt å undersøke hvilke faktorer ved undervisningen som kan føre til denne endringen og om de *digitale aspektene* ved oppgavene har bidratt til endringen. Ved digitale aspekter mener jeg sider ved matematikkoppgavene som gjør at de skiller seg fra oppgaver i tradisjonelle verktøy, som for eksempel penn og papir. For å undersøke dette har jeg observert tre ulike undervisningssituasjoner på ungdomstrinnet hvor digitale oppgaver ble tatt i bruk. Forskningsspørsmålet jeg ønsker å belyse i denne undersøkelsen er:

«Hvordan endres det kognitive kravet til en digital matematikkoppgave underveis i undervisningen i tre ulike undervisningsøkter på ungdomstrinnet? Hvilke faktorer bidrar til denne endringen, og hvordan er påvirkningen fra oppgavenes digitale aspekt?»

For å kunne svare på forskningsspørsmålet har jeg i tillegg utviklet to underspørsmål som må besvares før jeg kan si noe om selve forskningsspørsmålet. Hensikten med underspørsmålene er å hente informasjon som er nødvendig for å kunne si noe om endringen av de kognitive kravene og hvilke faktorer som har bidratt til denne endringen. Det første underspørsmålet tar for seg hvordan det kognitive kravet til de digitale matematikkoppgavene er opprinnelig, altså slik oppgaven blir fremstilt i det digitale verktøyet eller andre læremidler. Dette er nødvendig for å kunne si om det har skjedd en endring i de kognitive kravene underveis i undervisningen, eller ikke. Det andre underspørsmålet handler om de digitale aspektene ved oppgavene som ble tatt i bruk. For å kunne si noe om hvordan de digitale aspektene ved oppgavene har påvirket de kognitive kravene er det nødvendig å kunne si noe om hvilke digitale aspekter oppgavene som ble tatt i bruk innehar. På bakgrunn av dette er de to underspørsmålene formulert på følgende måte:

1. *Hvilke kognitive krav kreves for å løse oppgavene slik de blir fremstilt opprinnelig i det digitale verktøyet eller andre læremidler?*
2. *Hvilke digitale aspekter har de digitale matematikkoppgavene som gjør at de skiller seg fra oppgaver i tradisjonelle verktøy?*

1.3 Avgrensing av begrepet *digital matematikkoppgave*

I løpet av denne masteroppgaven kommer begrepene *digitale matematikkoppgaver* og *digitale verktøy* ofte til å bli brukt. Hensikten med dette kapittelet er å avgrense og forklare hva jeg legger i disse begrepene når de blir brukt. Dette er nødvendig fordi jeg i løpet av teorikapittelet og videre i oppgaven kommer til å utrykke at digitale verktøy kan bidra til økt læring i matematikk. Problemet er at ikke alle digitale verktøy bidrar til dette, begrepet må derfor avgrenses. I løpet av forskningsprosessen har jeg ikke klart å finne en entydig definisjon av begrepet og forskere ser ut til å bruke begrepene på ulike måter. Van de Walle et al. (2015) definer for eksempel digitale verktøy på følgende måte:

> Mathematical technology refers to digital content accessed via computers, calculators, and other handheld or tablet devices; computer algebra systems (CAS); dynamic geometry software; online digital games; recording devices; interactive presentation devices; spreadsheets; as well as the Internett-based resources for use with these devices and tools. (s. 151)

Forfatterne bruker her en relativt bred definisjon hvor de kommer med eksempler på digitale verktøy. Harris et al. (2010) har brukt et annet utgangspunkt og kategorisert de digitale verktøyene etter hvilke læringsaktiviteter verktøyene kan brukes til. Problemet med begge definisjonene er at de ikke eksplisitt gjør rede for hva som skiller digitale verktøy fra tradisjonelle verktøy. Dermed blir det utfordrende å kunne si noe om hvilke digitale egenskaper som kan påvirke elevenes læring.

Tidligere forskning av Kaput (1992), Sacristán et al. (2010) og Suh, Johnston og Douds (2008) viser derimot til egenskaper eller aspekter ved de digitale verktøyene som gjør at de skiller seg fra tradisjonelle verktøy. Ved å ta utgangspunkt i deres forskning har jeg kommet frem til fire ulike aspekter som gjør at oppgavene skiller fra tradisjonelle oppgaver. Digitale matematikkoppgaver skiller seg ut ved at oppgavene er dynamiske og interaktive, noe som gjør det mulig å bruke flere dynamiske representasjoner, elevene kan ha mer fokus på et bestemt område og elevene får umiddelbar tilbakemelding. De fire aspektene blir presentert i mer detalj i kapittel 2.1. Begrepet *digitale matematikkoppgaver* blir dermed avgrenset til matematikkoppgaver som innehar ett eller flere av disse aspektene. Med denne avgrensingen vil digitale oppgaver som ikke bidrar til noe nytt og som kun er en digital representasjon av matematikkoppgaver på papirform, ikke karakteriseres som digitale matematikkoppgaver som kan bidra til økt læring hos elevene.

Begrepet *digitale matematikkoppgaver* ble ikke definert og avgrenset for lærerne som bidro med matematikkoppgaver til denne undersøkelsen. Dette var et bevisst valg for å ikke påvirke lærerne, slik at matematikkoppgavene som ble brukt av lærerne ikke skulle være påvirket av begrepets avgrensing og meg som forsker. Det vil si at lærerne sto helt fritt til å ha sin egen tolkning av hva en digital matematikkoppgave er.

1.4 Oppgavens oppbygning

Denne masteroppgaven består i alt av 7 hovedkapitler; innledning, oppgavens teorigrunnlag, metode, analyse av de digitale matematikkoppgavene, analyse av undervisningens påvirkning på de kognitive kravene, drøfting og konklusjon og veien videre. I tillegg vil informasjon som ikke fikk plass i selve oppgaven bli presentert som vedlegg til slutt i oppgaven.

Oppgavens teorigrunnlag vil bli presentert i kapittel 2 og består i alt av tre hovedteorier som datamaterialet er blitt analysert ut ifra. Den første teorien som blir presentert tar utgangspunkt i tidligere forskning gjort av Kaput (1992), Sacristán et al. (2010) og Suh et al. (2008), hvor jeg vil presentere aspekter ved digitale matematikkoppgaver som gjør at de skiller seg fra oppgaver som blir presentert i tradisjonelle verktøy. Videre vil et rammeverk som er utarbeidet av Stein og Smith (1998) og Smith og Stein (1998) bli presentert. Rammeverket handler om matematikkoppgavenes kognitive krav og hva som kjennetegner de ulike kognitive nivåene. Til slutt vil det bli presentert tidligere forskning av Stein et al. (1996) og Henningsen og Stein (1997) som tar for seg hvordan de kognitive kravene til matematikkoppgaver kan endres underveis i undervisningen, samt hvilke faktorer som kan påvirke denne endringen.

I kapittel 3 vil jeg presentere metoden jeg har brukt for å finne svar på oppgavens forskningsspørsmål. Det vil også bli gitt beskrivelser av hvordan datainnsamlingen ble gjennomført og hvordan datamaterialet ble analysert. På slutten av kapittelet vil oppgavens metodiske svakheter, gyldighet og etiske dilemmaer bli presentert og drøftet.

I kapittel 4 vil analysen av de digitale matematikkoppgavene som ble brukt i undervisningen bli presentert. Oppgavene ble analysert med hensyn til kognitive krav og digitale aspekter. Dette ble gjort for å kunne svare på oppgavens underspørsmål.

I kapittel 5 blir analysen av observasjonsnotatene og transkripsjonene av lydopptakene presentert. Alt av datamateriale vil ikke bli presentert, men det vises til situasjoner som jeg mener kan bidra til å besvare oppgavens forskningsmål.

Drøftingen i kapittel 6 tar utgangspunkt i analysene som er gjort i kapittel 4 og 5. Her vil jeg undersøke om det har skjedd en kognitiv endring i løpet av undervisningen, samt se på hvilke faktorer som har bidratt til denne endringen. Det blir også presentert en konklusjon hvor jeg forsøker å svare på oppgavens forskningsspørsmål.

I kapittel 7 vil jeg oppsummere og samle trådene fra de tidligere kapitlene, hvor jeg vil se på denne undersøkelsens plassering i forskningsfeltet, videre forskning og veien videre som fremtidig lærer.

2.0 Teorigrunnlag

2.1 Hva skiller digitale verktøy fra tradisjonelle verktøy?

For 25 år siden spådde Kaput (1992) at teknologi som er basert på dynamiske og interaktive medier har egenskaper som skiller seg fra tradisjonelle statiske media på en måte som kommer til å ha enorm påvirkning på matematikkutdanningen. Han hadde på mange måter rett. Datamaskinen har innført helt nye områder innenfor matematikk, gjort enkelte problemer og temaer mer tilgjengelig og tilført nye måter å representere og behandle matematisk informasjon på (Goldenberg, 2000). I grunnskolen er det flere mål i læreplanen som inneholder bruk av digitale verktøy, digitale verktøy er derfor en del av hverdagen i skolen.

Det finnes ikke et entydig svar på om digitale verktøy skal brukes i skolen eller ikke, men flere forskere er enige om at et av de viktigste aspektene ved bruk av digitale verktøy er hvordan de faktisk blir tatt i bruk (Goldenberg, 2000; Sacristán et al., 2010; Suh et al., 2008). For å få frem styrkene til de digitale verktøyene er det viktig at læreren tenker gjennom hva målet med undervisningen er og på hvordan måte de digitale verktøyene kan bidra til å nå disse målene. I følge Sacristán et al. (2010) kan digitale verktøy, hvis de blir brukt riktig, gjøre det mulig for matematiske fenomener å bli presentert og utforsket på måter som kan bidra til mer matematisk tenkning og forståelse. Elevene kan utforske og oppdage store ideer innenfor matematikk, de kan lage sine egne problemer og forklaringer, og elevene kan finne sammenhenger på tvers av matematiske temaer som ellers ikke ville vært mulig (Sacristán et al., 2010).

På bakgrunn av tidligere forskning av Kaput (1992), Suh et al. (2008) og Sacristán et al. (2010) vil jeg videre presentere aspekter ved digitale verktøy som gjør at de skiller seg fra de tradisjonelle verktøyene, som for eksempel penn og papir. Aspektene jeg vil trekke frem i denne oppgaven er: flere dynamiske representasjoner, dynamisk og interaktiv, et skifte i fokus og umiddelbar tilbakemelding.

2.1.1 Flere dynamiske representasjoner

I følge Duval (2006) skiller matematiske objekter seg fra fenomener i andre vitenskapsgrener ved at man kun har tilgang til de matematiske objektene og konseptene gjennom representasjoner, de kan verken måles eller sees ved hjelp av instrumenter. Han beskriver det å gå fra ett representasjonssystem til ett annet representasjonssystem, hvor begge representer det samme matematiske objektet, som «conversion». «Treatment» er når man kun beveger seg innenfor det samme representasjonssystemet. Det å kunne gå mellom ulike representasjonssystemer anser han som svært viktig for matematisk forståelse og læring. (Duval, 2006).

Ulike representasjoner eksiterer både i lærebøker og i digitale verktøy, men representasjonene man finner i lærebøker er statiske. Digitale verktøy gir oss muligheten til å ha flere dynamiske representasjoner som endres raskt og over tid i samsvar med brukerens påvirkning (Kaput, 1992). Det kan være i form av lyd, video, animasjoner, grafer og tabeller. Dette gjør at flere representasjoner kan kobles sammen innenfor et matematisk tema på en dynamisk måte (van der Meij & de Jong, 2004). I følge Ainsworth, Bibby og Wood (1998) er det tre ulike måter flere representasjonssystemer og representasjoner kan bidra til læring på: 1) flere representasjoner støtter ulike ideer og prosesser, 2) de begrenser feiltolkninger, og 3) de fremmer en dypere forståelse for et matematisk objekt.

Ulike ideer og prosesser

Én enkelt representasjon inneholder sjeldent all informasjonen om et matematisk objekt, og hvis representasjonen faktisk inneholder all informasjon kan den være for vanskelig å tolke. Flere representasjonssystemer som belyser ulike sider av et matematisk objekt vil derfor være gunstig. (Ainsworth et al., 1998; Kaput, 1992). Hver representasjon kan altså brukes med et tydelig formål og belyser objektet på ulike måter. Man kan si at flere representasjoner komplimenterer hverandre (van der Meij & de Jong, 2004). Det at flere representasjoner kan inneholde ulik informasjon og prosesser bidrar til flere fordeler for elevene på veien mot å nå et læringsmål (Ainsworth et al., 1998).

Begrensning av feiltolkninger

Bruk av flere representasjoner av en situasjon kan støtte tolkningen av mer kompliserte, abstrakte eller ukjente representasjoner, og gi støtte for elevenes manglende eller feilaktige kunnskap (Ainsworth et al., 1998). Et eksempel kan være fra en hastighetsgraf som viser avstanden en person har gått som funksjon av tiden. En vanlig misoppfatning blant elever er at en bratt kurve representerer en oppoverbakke og at en horisontal linje viser flatt terreng. Disse misoppfatningene vil kanskje ikke oppstå hvis en representasjon av personen som går blir vist ved siden av (Ainsworth et al., 1998). Elevene vil da tydelig se at kurven på grafen representerer en økning i hastighet og at den horisontale linjen viser at personen står stille. Målet med den ekstra representasjonen er altså ikke å tilføre ny informasjon, men å støtte elevene med forståelsen av abstrakte og ukjente representasjoner.

Dypere forståelse av et matematisk objekt

Ved å tilføre flere representasjonssystemer innenfor det samme matematiske objektet kan elever få muligheten til å se sammenhenger på tvers av representasjonene (conversion), som igjen kan få frem de underliggende konseptene bak den matematiske ideen som blir fremstilt (Ainsworth et al., 1998). Et godt eksempel kan være å tilføre flere representasjoner i arbeidet med grafer, som for eksempel funksjonsutrykket, tabeller og selve situasjonen som modelleres. Her vil for eksempel grafen være en mer visuell fremstilling, mens funksjonsutrykket er generelt og består av algebraisk notasjon. Summen av fordelene ved å kombinere flere representasjoner som komplementerer hverandre vil være nyttig for elevene (van der Meij & de Jong, 2004).

2.1.2 Dynamisk og interaktiv

I et statisk medium, som for eksempel penn og papir, kan ikke det som er skrevet ned endres som en funksjon av tiden, mens dette er mulig med et dynamisk media (Kaput, 1992). En graf som er laget med en penn vil ikke kunne endres, den vil være statisk og dermed forbli den samme. Dynamiske representasjoner gjør det mulig for elevene å visualisere problemer eller matematiske prosesser på måter som tidligere ikke var mulig. Elevene kan ved hjelp av dynamiske media se på prosesser mens de utvikler seg, istedenfor å kun få se den i låste posisjoner. (Sacristán et al., 2010). Kaput (1992) trekker frem konseptet om invarians som et viktig aspekt innenfor matematisk tenkning og mener at dynamiske medier gjør det enklere å innføre variasjon. For å oppdage invarians, altså det som forblir det samme og ikke endres, kreves det variasjon. Et eksempel kan være dynamisk geometri hvor elevene arbeider med utforskende aktiviteter ved å dra og flytte bestemte objekter innenfor representasjonen. Med slike aktiviteter kan den kontrollerte bevegelsen av noen objekter bidra til at elevene kan oppdage og utforske invarians og matematiske relasjoner. (Sacristán et al., 2010). Dette kan for eksempel gjøres ved å endre størrelsen på en sirkel i et dynamisk program. Selv om størrelsen på sirkelen endres vil forholdet mellom radiusen og omkretsen være den samme. Elever som arbeider med å dra og flytte geometriske objekter rundt i et dynamisk media kan også lære å gjøre de samme operasjonene i hodet med statiske objekter (Goldenberg, 2000).

Kaput (1992) definerer et interaktivt media som noe som bidrar med noe nytt som et resultat av brukerens handlinger, noe som brukeren igjen må respondere på. I et ikke-interaktivt media kan brukeren kun respondere på det han eller hun direkte har produsert selv. En ekstern respons på brukerens input må derfor tilføres av noen utenfra, som for eksempel en lærer eller medelev. (Kaput, 1992). Et interaktivt media er altså noe som reagerer på brukerens handlinger.

Både Kaput (1992) og Goldenberg (2000) diskuterer styrkene til *digitale konkreter* (electronic manipulatives/virtual manipulatives) som er interaktive og dynamiske. Fysiske konkreter betegnes som noe visuelt som representerer en matematisk ide og som man kan manipulere med hendene. Fysiske konkreter blir ofte brukt på lavere klassetrinn, men blir vanskeligere å bruke senere i skolen da det ikke finnes fysiske modeller for noen matematiske ideer (Goldenberg, 2000). Datamaskiner gjør det mulig å bruke digitale konkreter hvor fysiske konkreter ikke eksisterer og hvis de digitale konkretene er riktig designet og blir brukt på en god måte, kan de bidra til å øke variasjonen av problemer som elevene kan arbeide med (Goldenberg, 2000). Digitale konkreter åpner ikke bare for muligheter der det ikke eksisterer fysiske konkreter, ifølge Kaput (1992) kan de også styrke de allerede eksisterende fysiske konkretene med det han kaller for en struktur som *støtter (support)* og *begrenser (constraint).* Ved bruk av fysiske konkreter eksisterer det ikke noen begrensninger for hvilke handlinger som er lov å gjennomføre, dette må i så fall komme i form av skriftlige eller muntlige instruksjoner fra læreren. Digitale konkreter har allerede disse støtte- og begrensningsstrukturene innebygd i programvaren. Et eksempel kan være Dienes klosser som representerer titallssystemet ved klosser som kan settes sammen i tiere, hundrere og tusener. De fysiske klossene har ingen begrensninger for hvordan de kan settes sammen og elevene må hele tiden selv ha kontroll på antallet klosser de setter sammen. Den digitale versjonen har støtte- og begrensningsstrukturer som viser antallet klosser. (Kaput, 1992). Kaput (1992) viser til forskning som tyder på at elevene som brukte den digitale versjonen av Dienes klossene utviklet en betydelig bedre forståelse av strukturene bak tallsystemet. Begrensingene og støtten som ble gitt av det digitale verktøyet bidro til at elevene kunne fokusere mindre på å ha kontroll på alle klossene og kunne dermed fokusere mer på selve strukturen i tallsystemet.

I følge Pea (1985) har de dynamiske og interaktive egenskapene gjort det mulig for en ny form for tenking, en «hva hvis»-tenkning, som er et utrykk for utprøving og eksperimentering. Som nevnt tidligere vil verktøy med disse egenskapene kunne endre seg og respondere på brukerens handlinger. Pea (1985) viser til digitale regneark som endrer seg automatisk og umiddelbart hver gang en celle i regnearket endres. Dette gjelder ikke bare for regneark, men også for andre digitale verktøy som har disse egenskapene. Denne responsen og umiddelbare endringen gjør det mulig for mer utforsking og eksperimentering, altså et fokus på «hva hvis», noe som på grunn av tidsforbruk ikke ville vært mulig med statiske verktøy (Pea, 1985).

2.1.3 Skifte av fokus

Verktøyet man bruker for å løse et matematisk problem fremhever noen aspekter ved oppgaven og undertrykker andre aspekter. Hvilket verktøy man velger å bruke er derfor avhengig av hva målet med undervisningen er (Goldenberg, 2000). Hvis målet med undervisningen er å øve på divisjonsalgoritmen vil det kanskje lønne seg å bruke penn og papir, men hvis målet er å se hvordan en graf oppfører seg når man endrer parameterne i en funksjon, vil det nok være mer lønnsomt å bruke et digitalt verktøy. Ved å la et digitalt verktøy gjøre en del av regneoperasjonene frigjør man elevene fra å tenke på utregningen og elevene kan dermed fokusere på andre aspekter ved det matematiske problemet (Goldenberg, 2000). I eksemplet ovenfor kan bruken av digitale verktøy frigjøre elevene fra arbeidet med å lage de ulike grafene, og elevene kan dermed ha et større fokus på selve endringen av grafen.

Pea (1985) skriver om en programvare kalt «AlgebraLand» som lar elever arbeide med mer krevende problemløsningsstrategier da programmet tar seg av mellomregningene. Det er elevene som bestemmer hvilke regneoperasjoner som må gjøres og med hvilke tall de skal utføres med, men programmet tar seg av symbolmanipulasjonen og utregningen. Ved at elevene ikke trenger å gjøre mellomregningene får de muligheten til å fokusere på å utvikle gode løsningsstrategier i arbeid med krevende likninger, som dermed gir nye muligheter for læring som ellers ikke ville vært mulig (Pea, 1985). Oppgaver som inneholder utregninger som er for vanskelige for elever å løse uten hjelp av et verktøy, som for eksempel en kalkulator, betyr ikke nødvendigvis at elevene ikke kan tenke meningsfullt om oppgaven (Van de Walle et al., 2015).

2.1.4 Umiddelbar tilbakemelding

Sacristán et al. (2010) mener den umiddelbare tilbakemeldingen man får av digitale verktøy må sees på som en viktig faktor for elevenes læring. Tidligere forskning av Papert (1980) om hvordan digitale verktøy kan påvirke elevenes læring viser også til at den umiddelbare tilbakemeldingen må sees på som viktig. Sacristán et al. (2010) bruker ordene «impersonal» og «non-judgemental» om tilbakemeldingene man får av digitale verktøy, som jeg videre oversetter til upersonlig tilbakemelding. En upersonlig tilbakemelding vil si at tilbakemeldingen kun består av en pekepinn på om et svar er korrekt eller ukorrekt. Dette skiller seg fra tilbakemeldingen man vanligvis får av en lærer som kan inneholde forklaringer og spørsmål til elevene. Tilbakemeldingen fra læreren er derfor ofte personlig og vil derfor påvirke relasjonen mellom eleven og læreren. Den umiddelbare tilbakemeldingen gjør det dermed mulig for elevene å få en kontinuerlig og upersonlig tilbakemelding under arbeidet med matematikkoppgaver, noe som ikke ville vært mulig med kun en lærer. Den umiddelbare tilbakemeldingen gjør det mulig for elever å sjekke sin forståelse underveis i læringsprosessen, noe som kan forhindre misoppfatninger (Suh et al., 2008).

2.2 Matematikkoppgavenes kognitive krav

Hvis man ser bort fra de digitale aspektene ved en matematikkoppgave kan en annen måte å analysere matematikkoppgaver på være å se på hvordan elevene tenker når de løser en oppgave og hvor mye det faktisk kreves av elevene for å løse oppgaven. Uavhengig om matematikkoppgavene er digitale eller ikke, vil det være interessant å si noe om tankeprosessene til elevene under arbeidet med oppgavene. Videre vil jeg derfor presentere forskning av Stein og Smith (1998) som tar for seg hvilke kognitive krav som stilles av matematikkoppgaver.

Arbeid med matematikkoppgaver er en stor del av matematikkundervisningen i grunnskolen og er derfor en viktig del av læringen som tar sted. I følge Sullivan et al. (2009) er elevenes læring helt avhengig av hvilke typer matematikkoppgaver som blir brukt og hvordan de blir brukt. Oppgavene som blir brukt påvirker i høy grad hvilke tankeprosesser elevene tar del i (Stein et al., 1996). Hvordan elever tenker for å løse en oppgave vil være med på å bestemme hva elevene lærer under arbeidet. Oppgaver som oppfordrer elever til å utføre memorerte prosedyrer som en rutine fører til én type tenkning; oppgaver som oppfordrer elevene til å tenke konseptuelt og som stimulerer elevene til å se sammenhenger fører til en helt annen tankeprosess (Smith & Stein, 1998; Stein & Smith, 1998). På bakgrunn av dette utviklet Smith og Stein (1998) et rammeverk for å kunne si noe om hvilke kognitive krav som er nødvendig for å løse en matematikkoppgave. Rammeverket er delt i fire nivåer hvor nivå 1 og 2 er klassifisert som å ha lave kognitive krav, mens nivå 3 og 4 blir klassifisert som å ha høye kognitive krav (Smith & Stein, 1998):

Memorering (nivå 1)

Oppgaver som er på nivå 1 involverer gjengivelse av tidligere lærte fakta, regler, formler eller definisjoner. Slike oppgaver er eksakte gjengivelser av tidligere sett materiale og hva som skal gjøres er tydelig og direkte forklart i oppgaven. Oppgavene skal ikke løses ved hjelp av en gitt fremgangsmåte, enten fordi en slik fremgangsmåte ikke eksisterer eller fordi tidsrammen for å løse oppgaven er for liten. Det blir heller ikke opprettet noen sammenheng til konseptene eller meningen bak det som skal læres. Et eksempel på en slik oppgave fra Stein og Smith (1998) kan være at elever skal gjøre $\frac{1}{2}$ eller $\frac{1}{4}$ om til desimaltall og prosent. På grunn av tallene som er brukt, er disse brøkene såpass enkle å gjøre om til prosent og desimaltall, at elevene vil løse denne oppgaven ved hjelp av hukommelsen. Det kognitive kravet for å løse en slik oppgave vil derfor være lavt.

Prosedyrer uten sammenhenger (nivå 2)

Oppgaver på nivå 2 er algoritmisk. Det vil si at bruken av gitte fremgangsmåter enten er etterlyst spesifikt i selve oppgaven eller innlysende på bakgrunn av tidligere gitte instruksjoner. Rekkefølgen på oppgavene kan også si noe om hvilke fremgangsmåter som etterlyses. Hvis alle tekstoppgavene på en side omhandler subtraksjon vil elevene etter hvert forvente at neste oppgave også krever subtraksjon. Disse oppgavene fokuserer på å produsere riktige svar fremfor å utvikle den matematiske forståelsen. De viser ingen sammenheng til konseptene eller meningen bak fremgangsmåtene som blir brukt og det kreves ingen forklaring av fremgangsmåten som blir tatt i bruk. Et eksempel på en slik oppgave kan være å bytte ut brøkene i forrige eksempel med brøken $\frac{3}{8}$ (Stein & Smith, 1998). Elevene vil ikke lenger kunne memorere hvilket desimaltall som hører til brøken og må dermed anvende algoritmer elevene er kjente med for å løse oppgaven. Siden elevene fortsatt vet hvilken fremgangsmåte de må ta i bruk er det kognitive kravet for å løse oppgaven lavt.

Prosedyrer med sammenhenger (nivå 3)

Et skifte i fokus gjør at oppgaver på nivå 3 skiller seg fra de forrige. Oppgavene retter elevenes oppmerksomhet mot bruken av fremgangsmåter for å utvikle en dypere forståelse for matematiske konsepter og ideer. Det vil si at oppgavene foreslår eksplisitt eller implisitt veier å følge som innebærer brede og generelle prosedyrer som har sammenheng til underliggende konseptuelle ideer, istedenfor snevre algoritmer som ikke tar hensyn til de underliggende konseptene. Oppgavene er som oftest representert på flere ulike måter, for eksempel med visuelle diagrammer, konkreter, symboler og tekstoppgaver. Flere representasjoner gjør det enklere å se sammenhengene og de matematiske ideene som ligger i grunn. Et eksempel på en slik oppgave kan være at elevene skal bruke et 10x10-rutenett for å finne desimaltallet og prosenten til $\frac{3}{5}$ (Stein & Smith, 1998). Selv om generelle prosedyrer kan følges, kan de ikke brukes tankeløst. For at oppgavene skal løses suksessfullt må elevene engasjere seg i de konseptuelle ideene som ligger bak prosedyrene som brukes. Det kreves derfor en viss grad av kognitiv innsats for å løse oppgavene.

Å gjøre matematikk (nivå 4):

Oppgaver på nivå 4 krever en kompleks og ikke-algoritmisk tenkning. Det vil si at det ikke blir foreslått en forutsigbar, innøvd fremgang til å løse oppgaven. Oppgaven krever at elevene tar i bruk relevant kunnskap og erfaringer, og at de bruker disse på en hensiktsmessig måte i arbeid med oppgaven. Det gjør at elevene må utforske og forstå matematiske konsepter, prosesser eller sammenhenger. Et eksempel på en slik oppgave kan være at elevene skal fargelegge 6 ruter i et 4x10 rutenett og forklare hvordan man kan finne ut hvor stor del som er fargelagt, både som brøk, desimaltall og prosent (Stein & Smith, 1998). En mulig forklaring kan være at én kolonne er 10% siden det er 10 kolonner. Derfor vil 4 ruter være 10% og de 2 siste rutene vil være halvparten av 10%, altså 5%. Derfor må 6 ruter være 15%. På grunn av oppgavens uforutsigbarhet og kravet om å forklare fremgangsmåten er det kognitive kravet for å løse oppgaven høyt.

Oppgavene med lave kognitive krav er typiske drilloppgaver hvor elevene løser et stort antall nokså like oppgaver, mens oppgavene med høye kognitive krav er mer tidskrevende hvor elevene vanligvis løser et færre antall oppgaver (Stein & Smith, 1998). Skillet mellom oppgavene kan også sees i sammenheng med teorien til Skemp (2006) om instrumentell og relasjonell forståelse. Oppgavene med lave kognitive krav kan sees på som instrumentelle da de ikke bygger på noen form for forståelse, man bare følger et sett med regler. Oppgavene med høye kognitive krav kan sees på som oppgaver som bidrar til relasjonell forståelse da de tar for seg at elevene skal vite hva de må gjøre og hvorfor de gjør det.

Tabell 1 viser en oversikt over kjennetegnene ved de ulike kognitive kravene. Det er denne tabellen som vil bli brukt i arbeidet med å analysere matematikkoppgave i kapittel 4.

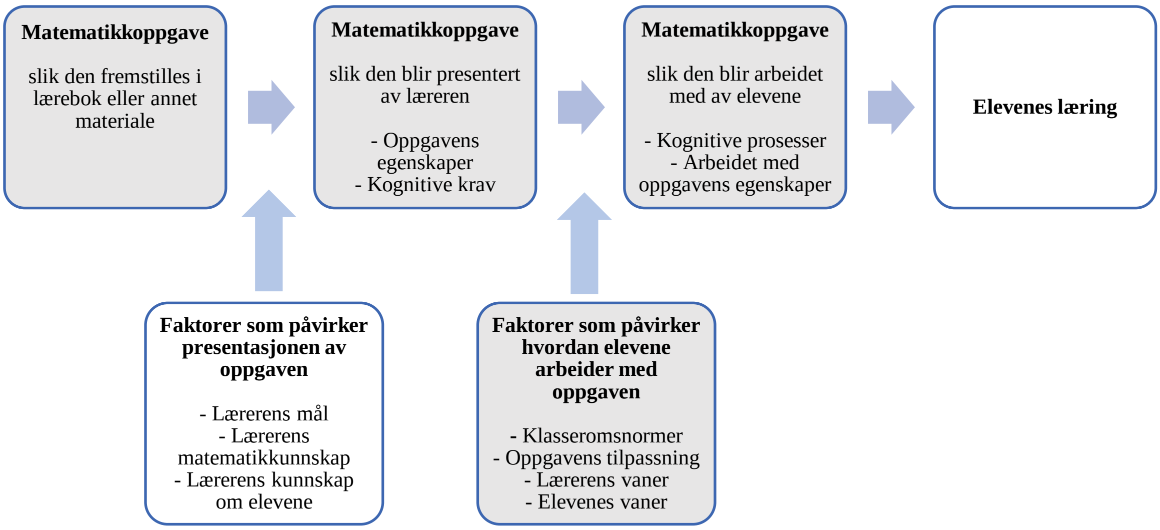
Lave krav	
Memorering (nivå 1)	*Prosedyrer uten sammenhenger (nivå 2)*
Involverer gjengivelse av tidligere lærte fakta, regler, formler eller definisjoner. Kan ikke løses ved å anvende en gitt fremgangsmåte fordi en slik fremgangsmåte ikke eksisterer eller fordi tidsrammen for å løse oppgaven er for liten til å bruke fremgangsmåten. Er ikke tvetydig. Slike oppgaver er eksakte gjengivelser av tidligere sett materiale, og hva som skal gjøres er tydelig og direkte forklart. Viser ingen sammenheng til konseptene eller meningen bak faktaene, reglene, formlene eller definisjonene som skal læres.	Er algoritmisk. Bruken av gitte fremgangsmåter er enten etterlyst spesifikt eller innlysende på bakgrunn av tidligere instruksjoner, erfaring eller rekkefølgen av oppgavene. Stiller lave kognitive krav for å suksessfullt løse oppgaven. Liten tvetydighet eksisterer om hva som må gjøres og hvordan man skal gjøre det. Har ingen sammenheng til konseptene eller meningen bak fremgangsmåtene som blir brukt. Fokuserer på å produsere riktige svar fremfor å utvikle den matematiske forståelsen. Krever ingen forklaringer eller forklaringer som fokuserer på å beskrive fremgangsmåten som ble brukt.
Høye krav	
Prosedyrer med sammenhenger (nivå 3)	*Å gjøre matematikk (nivå 4)*
Retter elevenes oppmerksomhet mot bruken av fremgangsmåter for å utvikle en dypere forståelse for matematiske konsepter og ideer. Foreslår eksplisitt eller implisitt veier å følge som innebærer brede og generelle prosedyrer med sammenhenger til underliggende konseptuelle ideer, i motsetning til snevre algoritmer som ikke tar hensyn til de underliggende konseptene. Er vanligvis representert på flere ulike måter, som for eksempel visuelle diagrammer, konkreter, symboler og tekstoppgaver. Det er meningsfullt å finne sammenhenger på tvers av flere representasjoner. Krever en viss grad av kognitiv innsats. Selv om generelle prosedyrer kan følges, kan de ikke brukes tankeløst. For å løse oppgaven suksessfullt må elevene engasjere seg i de konseptuelle ideene som ligger bak prosedyrene som følges.	Krever en kompleks og ikke-algoritmisk tenkning. En forutsigbar, innøvd fremgangsmåte er ikke eksplisitt foreslått i oppgaven, forklaringen av oppgaven eller tidligere eksempler. Krever at elevene må utforske og forstå matematiske konsepter, prosesser eller sammenhenger. Forlanger observasjon eller regulering av sine egne kognitive prosesser. Krever at elevene tar i bruk relevant kunnskap og erfaringer, og bruker disse på en hensiktsmessig måte i arbeid med oppgaven. Krever at studentene analyserer oppgaven og aktivt undersøker om det er begrensninger ved oppgaven som kan begrense mulige løsningsstrategier og løsninger. Krever en stor grad av kognitiv innsats og kan føre til noe angst hos elevene på grunn av oppgavens uforutsigbare natur.

Tabell 1: Oversikt over kjennetegn ved kognitive krav (Smith & Stein, 1998, s. 348).

Før man bruker rammeverket til å si noe om de kognitive kravene til en oppgave må man først ta elevenes alder, resultater, tidligere kunnskap og erfaring i betraktning (Smith & Stein, 1998). En oppgave som handler om å addere to tall vil ikke være like kognitivt krevende for en elev i 7. klasse som det vil være for en elev i 2. klasse. Oppgavene må derfor være tilpasset slik at de utgjør en passende utfordringer for elevgruppen (Smith & Stein, 1998).

2.3 Undervisningens påvirkning på de kognitive kravene

En matematikkoppgave kan ifølge Stein og Smith (1998) sees på som noe som går gjennom tre faser: slik den blir fremstilt i lærebøker, digitale plattformer eller i annet skolemateriell, slik den blir presentert og fremstilt av læreren i forkant og slik den faktisk blir arbeidet med av elevene. En oppgave i læreboken er ikke nødvendigvis den samme som oppgaven læreren presenterer for en elevgruppe, og oppgaven elevene faktisk arbeider med er heller ikke nødvendigvis den samme. Figur 1 viser hvordan en matematikkoppgave går gjennom disse tre fasene og hvordan den kan bli påvirket underveis. Egenskapene og de kognitive kravene til oppgaven kan endres i overgangen mellom lærerens presentasjon og elevarbeidet (Henningsen & Stein, 1997). En oppgave kan bli presentert av læreren som en oppgave som krever høy kognitiv tenkning, men under arbeidet med oppgaven kan elevene skifte fokus vekk fra konseptene og meningen bak løsningsstrategiene og kun fokusere på å produsere en korrekt løsning. Det betyr at bruken av oppgaver med høye kognitive krav ikke garanterer at elever arbeider på et høyt kognitivt nivå. Bruken av oppgaver med høye kognitive krav ser derimot ut til å være nødvendig, siden oppgaver med lave kognitive krav nesten aldri bidrar til høy kognitiv tenkning (Smith & Stein, 1998). Fokuset i denne oppgaven vil være på de fire rutene som er fargelagt: hvordan oppgavens kognitive krav endrer seg fra oppgavens opprinnelige presentasjon i læreboka eller andre læremidler, til elevene arbeider med oppgaven, og hvilke faktorer som spiller inn for at denne endringen kan forekomme.



Figur 1: *Oversikt over matematikkoppgavenes tre faser og hvordan oppgavene kan bli påvirket*. Hentet og oversatt fra Stein et al. (1996, s. 459).

2.3.1 Lærerens presentasjon av oppgaven

Slik oppgaven blir presentert av læreren inkluderer verbale instruksjoner, fordelingen av materiale og hjelpemidler og diskusjoner om hva som forventes av elevene (Stein et al., 1996). Det kan også innebære en kortere og enklere versjon hvor elevene kun får beskjed om å arbeide med noen gitte oppgaver.

Oppgavens egenskaper referer til aspekter ved oppgaven som læreren har identifisert som viktige for utviklingen av elevenes matematiske forståelse og resonneringer. Det kan være om det eksisterer flere løsningsstrategier, om oppgaven kan presenteres/løses ved hjelp av ulike representasjoner og om det kreves forklaringer av elevene for å løse oppgaven. I denne fasen, når oppgaven presenteres av læreren, referer oppgavens egenskaper til om læreren inkluderer eller oppfordrer til bruk av disse egenskapene. (Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 1996).

De kognitive kravene i denne fasen referer til hvilke tankeprosesser læreren legger til rette for i presentasjonen av oppgaven for at elevene skal klare å løse oppgaven suksessfullt (Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 1996). Disse tankeprosessene, som forklart i delkapittel 2.2, kan variere fra memorering (nivå 1), prosedyrer uten sammenhenger og mening (nivå 2), prosedyrer med sammenhenger og mening (nivå 3) og kompleks tenkning og resonnering (nivå 4).

2.3.2 Elevenes arbeid med oppgaven

Fasen hvor elevene arbeider med oppgavene tar for seg hvordan elevene faktisk arbeider med å løse oppgaven (Stein et al., 1996). Blir oppgaven løst slik som læreren presenterte oppgaven, eller endrer elevene oppgaven på en eller annen måte under elevarbeidet?

I denne fasen referer oppgavens egenskaper til om de aspektene ved oppgaven som læreren har vurdert som viktig for elevenes læring faktisk blir tatt i bruk og realisert av elevene (Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 1996). Bruker elevene flere løsningsstrategier og representasjoner for å løse oppgaven? Begrunner og forklarer elevene løsningsstrategiene som ble tatt i bruk? De kognitive kravene i denne fasen referer til hvilke kognitive prosesser elevene faktisk tar del i når de arbeider med oppgavene (Stein et al., 1996). Tar elevene del i tankeprosesser på et høyt nivå, eller blir oppgavene løst etter hukommelsen og innøvde rutiner?

2.3.3 Faktorer som påvirker elevarbeidet

I følge Stein et al. (1996) er det viktig å anerkjenne at de komplekse omgivelsene i en klasseromssituasjon vil påvirke den endelige formen til en matematikkoppgave. Figur 1 viser at normene i klasserommet, oppgavens tilpasning, lærerens vaner og elevenes vaner kan påvirke hvordan en oppgave blir arbeidet med (Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 1996). Normene i klasserommet tar for seg de etablerte forventningene til elevene om hvordan skolearbeid skal gjøres, hvem det skal gjøres av og med hvilken kvalitet arbeidet skal gjennomføres. Oppgavens tilpasning referer til om oppgaven bygger på elevenes tidligere kunnskap, altså oppgavens vanskelighetsgrad i forhold til elevgruppen. Tiden elevene får til rådighet for å løse oppgaven er også en viktig faktor, for mye eller for liten tid kan påvirke hvordan oppgavene blir løst. Lærerens og elevenes vaner tar for seg hvordan de håndterer situasjonene som finner sted i en undervisningssituasjon. Det kan være hvor lenge læreren lar elevene streve med oppgavene, hvilken type respons læreren gir til elever som trenger hjelp og hvor tålmodig elevene er i arbeidet med å løse kognitivt krevende oppgaver. (Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 1996).

En tidligere undersøkelse gjort av Henningsen og Stein (1997) og Stein et al. (1996) viser at de mest vanlige årsakene til at de kognitive kravene til en oppgave reduseres er: oppgavene går fra å være utfordrende til ikke-utfordrende, oppgavene er ikke tilpasset elevgruppen, fokuset er på en korrekt løsning og for mye eller for liten tid.

De gangene da oppgavene som ble brukt i undersøkelsen gikk fra å være utfordrende til ikke-utfordrende var det fordi de utfordrende aspektene ved oppgavene ble omgjort til rutine, enten ved at elevene presset lærerne til å redusere oppgavens kompleksitet ved å gi elevene en eksplisitt fremgangsmåte eller steg å følge, eller at lærerne gjorde de utfordrende delene for elevene eller fortalte dem hvordan de kunne løse dem (Stein et al., 1996). Dette går under det som blir omtalt i figur 1 som lærerens vaner. Lærerne i undersøkelsen hadde problemer med å stå og se på at elevene strevde, som førte til at lærerne grep for tidlig inn og ga elevene for mye hjelp slik at de ble fratatt muligheten til å gjøre fremgang selv (Stein et al., 1996). En annen årsak som førte til at elevene ikke tok del i høy kognitiv tenking var på grunn av mangel på motivasjon og interesse. Dette kom av at oppgavene ikke var godt nok tilpasset elevgruppen ved at oppgavene enten var for krevende eller for lite utfordrende. De siste to årsakene som førte til nedgang i de kognitive kravene var at lærerne i undersøkelsen fokuserte på konseptene og meningen bak løsningsstrategiene i presentasjonen av oppgaven, men gikk bort fra dette under elevarbeidet og fokuserte kun på at elevene produserte korrekte svar. Lærerne ga også elevene for liten eller for lang tid til å løse oppgavene (Stein et al., 1996).

3.0 Metode

Som nevnt i innledningen er forskningsspørsmålet i dette prosjektet:

«Hvordan endres det kognitive kravet til en digital matematikkoppgave underveis i undervisningen i tre ulike undervisningsøkter på ungdomstrinnet? Hvilke faktorer bidrar til denne endringen, og hvordan er påvirkningen fra oppgavenes digitale aspekt?»

Med underspørsmålene:

1. *Hvilke kognitive krav kreves for å løse oppgavene slik de blir fremstilt opprinnelig i det digitale verktøyet eller andre læremidler?*
2. *Hvilke digitale aspekter har de digitale matematikkoppgavene som gjør at de skiller seg fra oppgaver i tradisjonelle verktøy?*

Hensikten med dette kapittelet er å gi et innblikk i hvordan jeg har gått frem for å finne svar på prosjektets forskningsspørsmål. En av de viktigste aspektene ved forskning er en redeliggjørelse for hvordan man kom frem til resultatene og at fremgangsmåtene er så tydelig forklart at andre forskere kan følge og gjenta dem (Cohen, Manion, Morrison, & Bell, 2011). Det vil si at forskningen skal være transparent, slik at leseren kan ta stilling til troverdigheten til forskningen og resultatene (Tjora, 2012).

I dette kapittelet vil jeg begrunne valgene jeg har tatt underveis, og det vil bli gitt en beskrivelse av hvilke metoder som ble brukt i datainnsamlingen, hvor observasjon vil bli vektlagt. Deretter vil jeg gjøre rede for hvordan utvalget av forskningsdeltakere- og digitale matematikkoppgaver ble gjort. Til slutt vil jeg presentere hvordan jeg gikk frem med analysen av matematikkoppgavene og datamaterialet fra observasjonene og lydopptakene, samt gi en beskrivelse av etiske betraktninger, validitet, reliabilitet og metodekritikk ved kvalitativ forskning.

3.1 Kvalitativ forskningsmetode

Innenfor forskning er det vanlig å skille mellom kvalitative- og kvantitative undersøkelser. Disse blir ofte sett på som ytterpunkter innenfor forskning (Tjora, 2012). Det er likevel viktig at disse retningene ikke sees på som motsetninger til hverandre, men som noe komplementært som utfyller hverandre. De bidrar på hver sin måte og egner seg til å belyse ulike typer spørsmål (Dalland, 2012; Postholm & Jacobsen, 2011; Tjora, 2012).

For å svare på forskningsspørsmålet i mitt prosjekt valgte jeg å gjennomføre en kvalitativ undersøkelse. Kvalitative undersøkelser kjennetegnes ved at man vanligvis samler inn data i de naturlige omgivelsene hvor forskningsdeltakerne befinner seg, hvor man prøver å skape en dypere forståelse for det som undersøkes og hvor fokuset er på det unike, ikke det generelle (Creswell, 2007). Kvalitativ forskning prøver dermed ikke å undersøke noe som er generelt og som gjelder for alt og alle, men man vil få et dypere innblikk i det som er unikt i akkurat dette tilfellet. Siden datamaterialet kan være stort og omfattende er det vanlig at kvalitative undersøkelser velger et lite utvalg forskningsdeltakere (Postholm & Jacobsen, 2011), noe jeg har gjort i denne undersøkelsen.

I følge Nilssen (2012) er det viktigste instrumentet innenfor kvalitativ forskning forskeren selv. Det vil si at forskeren har en nærhet til både forskningsdeltakerne og datamaterialet som blir samlet inn. Det betyr at forskeren til en viss grad alltid vil påvirke situasjonen på en eller annen måte, og dermed også påvirke datamaterialet (Nilssen, 2012). Forskerens forforståelse om situasjonen og forskningsfeltet, relasjonen til forskningsdeltakerne og selve interaksjonen mellom forsker og deltaker vil være med på å påvirke datamaterialet som blir samlet inn (Creswell, 2007). Jeg er dermed klar over at min rolle som forsker vil være med på å prege datamaterialet som har blitt samlet inn i denne undersøkelsen.

Alle fasene i kvalitative undersøkelser kan endres underveis i prosjektet og en nøyaktig plan for hvordan alt skal gjøres kan derfor ikke utarbeides (Creswell, 2007). Det vil si at forskningsspørsmålene, hvordan man velger å samle inn datamaterialet og hvem man velger som forskningsdeltakere, kan endres underveis i prosessen. I mitt tilfelle har forskningsspørsmålet blitt endret og justert flere ganger i løpet av prosessen.

3.2 Observasjon som metode

Det som kjennetegner og som er det særegne med observasjon som metode er muligheten til å samle inn data i naturlige situasjoner i det øyeblikket situasjonene faktisk oppstår. Dette er observasjonens unike styrke (Cohen et al., 2011). Hvis man er interessert i å finne ut hva personer faktisk gjør i ulike sitasjoner, bør man inkludere observasjon som metode i sin forskning (Tjora, 2012). Observasjon ble brukt som metode for å svare på selve forskningsspørsmålet til denne undersøkelsen. For å finne et best mulig svar på dette valgte jeg å gjennomføre det Cohen et al. (2011) kaller for en *halvstrukturert observasjon*, hvor jeg tok rollen som det Gold (1958) kaller for en *observatør som deltaker*.

Halvstrukturerte observasjoner er ikke like systematisk og hypotesetestende som strukturerte observasjoner og ikke like åpne og hypotesegenererende som ustrukturerte observasjoner (Cohen et al., 2011). Hvilken struktur man velger er avhengig av hva man vil finne ut og hvordan datamateriale man er ute etter. En halvstrukturert observasjon ga meg muligheten til å ha forhåndsbestemte kategorier jeg ville se etter, samtidig som jeg kunne være mer åpen for det uventede. De forhåndsbestemte kategoriene ble utarbeidet på bakgrunn av tidligere forskning på området (Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 1996) og vil bli forklart i analyseprosessen (kapittel 3.4.2.). Den tidligere forskningen sier at de kognitive kravene til oppgavene kan endres i gjennomgangen av oppgavene og under arbeidet med oppgavene, som det er skrevet om i kapittel 2.3. Denne forskningen viser derimot kun til hvordan læreren og selve undervisningen kan påvirke de kognitive kravene, og med mindre struktur på observasjonen hadde jeg i tillegg muligheten til å undersøke om kravene ble påvirket av det digitale aspektet ved oppgavene. Det var også ønskelig å ha muligheten til å gjøre lydopptak hvis det oppstod interessante diskusjoner, noe den halvstrukturerte observasjonen ga rom for. Videre vil en mindre struktur på observasjonen føre til at datamaterialet går fra å være noe som kan tallfestes, altså kvantitativt, til noe dypere og mer spesielt, som kjennetegner kvalitative data (Postholm & Jacobsen, 2011).

Gold (1958) gjør rede for fire ulike roller man kan ha som observatør og ifølge Tjora (2012) kan to av disse anses som skjulte observatører, som på grunn av etiske årsaker ikke egner seg til bruk i skolen (Cohen et al., 2011). For å påvirke det som foregikk i klasserommet i minst mulig grad tok jeg rollen som en *observatør som deltaker*. Det vil si at jeg først og fremst er en observatør, men har muligheten til å ta tak i situasjoner hvis det er ønskelig (Gold, 1958). I mitt tilfelle gjorde jeg lydopptak av elevenes diskusjoner og jeg gikk rundt for å se nærmere på hvordan elevene arbeidet med å løse oppgavene. Muligheten til å se hvordan elevene arbeidet med oppgavene var en viktig del av observasjonen da forskningsspørsmålet i dette forskningsprosjektet er å undersøke hvordan undervisningen påvirker de kognitive kravene til matematikkoppgavene.

Observasjonene ble gjennomført på skolene til de utvalgte lærerne og tok sted i matematikktimer som inneholdt bruk av digitale oppgaver. Undervisningsøktene varte mellom 45-60 minutter. Hvordan undervisningen skulle foregå, hva som skulle gjøres og hvilke oppgaver som skulle bli brukt ble planlagt og bestemt av lærerne selv. Oppgavene ble levert til meg på forhånd slik at jeg kunne forberede til en viss grad hva jeg skulle se etter under observasjonen. Et observasjonsskjema med noen forhåndsbestemte kategorier ble utarbeidet på forhånd og vil bli presentert i kapittel 3.4.2. Observasjonsnotatene ble skrevet ned fortløpende under hele observasjonen. I følge Cohen et al. (2011) vil notater som har blitt notert i ettertid av observasjonen være påvirket av vår selektive hukommelse. For å få et mer troverdig datamateriale var det derfor nødvendig å notere underveis. Under deler av observasjonen var jeg plassert bakerst i klasserommet for å ikke påvirke undervisningen, men det var også nødvendig at jeg gikk rundt i klasserommet. En av grunnene til at jeg gikk rundt var for å se hvordan lærerne responderte til elevene som trengte hjelp under arbeid med oppgavene. Det var da nødvendig å komme nærmere innpå for å høre hva som ble sagt. For å undersøke hvordan elevene arbeidet med oppgavene måtte jeg også bevege meg rundt i klasserommet.

3.3 Datainnsamling

Her vil jeg gjøre rede for praktiske valg jeg har gjort underveis med tanke på hvordan kontakten med deltakerne ble etablert og hvordan deltakerne og de digitale oppgavene ble valgt.

3.3.1 Valg av deltakere og matematikkoppgaver

For å kunne svare på oppgavens forskningsspørsmål trengte jeg tilgang til digitale matematikkoppgaver og undervisningsøkter hvor jeg kunne observere hvordan oppgavene ble tatt i bruk.

De digitale matematikkoppgavene som analyseres i denne oppgaven ble valgt ut på bakgrunn av kriteriet om at oppgavene faktisk har blitt brukt i skolen av lærere. Jeg konkluderte med at det ikke ville være hensiktsmessig å finne eksempler på oppgaver på egenhånd, da det ikke finnes noen garanti for at disse noen gang har blitt brukt i skolen. Ved å basere analysen min på oppgaver som jeg vet har blitt brukt av lærere kan troverdigheten til resultatene forsterkes. På bakgrunn av dette er oppgavene som analyseres i kapittel 4 valgt ut av lærerne som deltok i min undersøkelse.

For å finne lærere til denne undersøkelsen ble det sendt e-post og tatt telefoner til rundt 20 ungdomsskoler. Mine kriterier til deltakerne var at de var matematikklærere og at de underviste på 8.-10. trinn. Det ble ikke gjort kontakt med skoler eller lærere jeg hadde relasjoner til fra før fordi jeg ville at observasjonen skulle være så nøytral som mulig. Jeg endte med å observere tre ulike lærere, noe som er et vanlig antall for en kvalitativ studie. Lærerne ble fortalt hva prosjektet mitt handlet om og hva jeg trengte fra dem. Alle som meldte seg til å delta i mitt prosjekt gjorde dette frivillig og undervisningsopplegget de gjennomførte, inkludert de digitale matematikkoppgavene som skulle brukes, ble planlagt og plukket ut av lærerne uten noen form for påvirkning fra meg.

3.3.2 Hvorfor 8.-10. trinn?

Grunnen til at jeg valgte å bruke lærere som underviser på 8.-10. trinn er fordi bruk av digitale verktøy og oppgaver er mer utbredt på ungdomsskolen enn på mellomtrinnet. Dette ser vi ved å sammenligne kompetansemålene for 7.- og 10. trinn. Etter 7. trinn er det fire kompetansemål som omhandler bruk av digitale verktøy, mens etter 10. trinn er det seks kompetansemål (Utdanningsdirektoratet, 2013b, 2013c). I tillegg har eksamen i matematikk på 10. trinn de siste årene inneholdt oppgaver som må løses på en datamaskin, blant annet i et regneark og i en graftegner (Utdanningsdirektoratet, 2015). Lærerne på ungdomsskolen må derfor kunne bruke disse digitale verktøyene og ikke minst kunne anvende dem i sin undervisning. På bakgrunn av dette vurderte jeg at det ville være hensiktsmessig å få tak i lærere som underviste i matematikk på ungdomsskolen, fremfor barneskolen.

3.4 Analyseprosessen

Et kvalitativt datamateriale kan virke overveldende og uoversiktlig på grunn av all informasjonen som har blitt samlet inn. Kort forklart handler analyse om å trekke ut det som er viktig for sin undersøkelse, man vil skape et system som gjør datamaterialet mer oversiktlig (Postholm & Jacobsen, 2011). I mitt tilfelle handlet analysen om å gi mening til mine observasjonsnotater og lydopptak. For å gjøre dette måtte notatene brytes ned til mindre segmenter og studeres. Deretter kunne delene settes sammen til en helhet igjen, hvor man nå har utviklet en dypere forståelse av de mindre delene som utgjør helheten. Til slutt kan man gi datamaterialet mening gjennom et rammeverk eller med teorier (Postholm & Jacobsen, 2011).

Datamaterialet mitt består av 28 digitale matematikkoppgaver, observasjonsnotater fra tre ulike undervisningsøkter og lydopptak av elevdiskusjoner. Alle oppgavene som ble samlet inn ble arbeidet med av elever, hvor henholdsvis 7 av oppgavene ble brukt i undervisningsøkt 1, én oppgave i undervisningsøkt 2 og 20 oppgaver i undervisningsøkt 3.

3.4.1 De digitale matematikkoppgavene

Det første jeg måtte gjøre med de digitale matematikkoppgavene var å redusere antallet oppgaver fra undervisningsøkt 1 og undervisnings økt 3, da denne studien er for liten til å ha med alle oppgavene. For å gjøre dette ble alle oppgavene innenfor samme undervisningsøkt analysert med hensyn til kognitive krav. Analysen ble utført med tabell 1 (s. 16). I tillegg til å bruke tabellen ble tidligere forskning av Smith og Stein (1998) og Stein og Smith (1998) studert nøye for å få en bedre forståelse av de kognitive kravene. Forskernes egne eksempler på oppgaver innenfor de ulike nivåene ble også studert slik at min egen analyse kunne gjenspeile deres forståelse av de kognitive kravene på best mulig måte.

Analysen ble gjennomført for å se om det var noen ulikheter mellom oppgavene (kognitive krav) som opprinnelig var relativt like, slik at kun forskjellige oppgaver ble tatt med videre.

Etter å ha analysert alle oppgavene kom det frem at oppgavene fra undervisningsøkt 1 besto av oppgaver med to ulike kognitive krav. Det samme gjaldt for undervisningsøkt 2, oppgavene besto av to ulike kognitive krav. Videre ble det gjort et tilfeldig utvalg av oppgavene innenfor samme undervisningsøkt med hensyn til de kognitive kravene. Det vil si at kun to oppgaver fra hver undervisningsøkt ble plukket ut, hvor de to oppgavene ble vurdert å ha ulike kognitive krav.

3.4.2 Observasjonsnotatene og transkripsjon av elevdiskusjoner

Observasjonsnotatene som ble gjort ble notert under tre forhåndsbestemte kategorier med bakgrunn i tidligere forskning (Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 1996; Stein & Smith, 1998). Kategoriene var henholdsvis *lærerens gjennomgang, respons fra læreren* og *elevarbeid*. I analysearbeidet ble disse kategoriene videre inndelt i underkategorier og til slutt koder, hvor hovedkategoriene og underkategoriene er inspirert av forskningen til Stein et al. (1996). Kategorien *lærerens gjennomgang* tar for seg hvordan læreren presenterer oppgavene for elevene og ble delt i underkategorien *kognitive krav* (hvilke kognitive krav læreren legger opp til under presentasjonen av oppgaven), som videre består av kodene *eksempeloppgaver* (hvilke oppgaver bruker læreren som eksempel under presentasjonen), *krav og forventninger* (hvilke krav og forventninger læreren stiller til elevene før elevarbeidet) og *presentasjon* (hvordan læreren legger frem oppgaven og hvordan oppgaven blir løst). Videre ble kategorien *elevarbeid* delt inn i underkategorien *kognitive krav*, som videre ble delt inn i kodene *lærerrespons* (hvordan læreren responderer til elever som trenger hjelp), *elevsamarbeid* (hvordan og på hvilken måte elevene samarbeider) og *utregninger* (hvordan elevene går frem for å løse oppgavene).

Alle observasjonsnotatene ble analysert i henhold til kategoriene og kodene som er nevnt tidligere. Situasjoner som er interessante for min problemstilling vil bli presentert i analysekapittelet (kapittel 5). Det vil si at ikke alle situasjonene som ble observert vil bli presentert og diskutert. Observasjonsnotatene var opprinnelig skrevet i ufullstendige setninger og noen ganger stikkord. Utdragene som blir presentert i analysekapittelet er skrevet om til fullstendige setninger. Dette ble gjort for å gjøre utdragene enklere å lese og forstå.

Det ble også gjort lydopptak av elevdiskusjoner i alle undervisningsøktene. Hensikten med lydopptakene var å styrke datamaterialet mitt ved å tilføre dybde til situasjonene som ble observert. Ved å bruke flere metoder for å innhente datamaterialet kan reliabiliteten til datamaterialet styrkes (Postholm & Jacobsen, 2011), og en slik tilnærming kalles triangulering (Cohen et al., 2011). Lydopptakene ble transkribert kort tid etter lydopptakene ble gjort slik at det som ble sagt under lydopptaket på best mulig måte kunne bli knyttet til situasjonen som diskusjonene oppsto, og for å få en mest mulig korrekt gjengivelse av det som ble sagt. For at elevene skal forbli anonyme vil navnene som blir brukt om elevene være pseudonymer, slik at elevdiskusjonene ikke kan spores tilbake til den enkelte elev. Transkripsjonene ble analysert for å finne funn som kunne være med på å styrke eller tilføre et nytt lys over observasjonsnotatene.

3.5 Validitet og reliabilitet ved oppgaven

For at ny forskning skal bli godkjent innenfor sitt fagfelt er det viktig at forskning ivaretar visse krav om validitet og reliabilitet. Slike krav kan være kredibilitet, bekreftbarhet og overførbarhet (Cohen et al., 2011). Det vil si at forskere innenfor kvalitativ forskning må forsikre leseren om at det som presenteres ikke er feilaktig eller en forvrenging av sannheten (Nilssen, 2012). I kvalitativ forskning vil alltid forskeren være med på å prege studien til en viss grad, ved å ta med seg egne erfaringer, verdier og kunnskap inn i situasjonene som studeres. Det er derfor viktig at forskningsprosessen dokumenteres slik at den senere kan gjennomgås og godkjennes (Nilssen, 2012). Det betyr at forskeren må være åpen om hvilke valg som er tatt underveis, og at disse valgene blir begrunnet. Ved en slik åpenhet under forskningsprosessen kan kredibiliteten og troverdigheten til forskningen ivaretas, noe som er hensikten med metodekapittelet.

I følge Cohen et al. (2011) vil man aldri være helt objektiv, da man som forsker er en del av verdenen man forsker på. Det vil si at funnene i denne oppgaven ikke nødvendigvis vil være lik andres funn, da resultatene er avhengig av både forskeren, deltakerne og situasjonene (Nilssen, 2012). I følge Nilssen (2012) fører dette til at en kvalitativ studie aldri kan bli gjennomført på nøyaktig samme måte ved en senere anledning. Kvalitative studier tar også utgangspunkt i et relativt lite utvalg av forskningsdeltakere, noe jeg også har gjort i denne studien, hvor jeg observerte tre ulike lærere. Det betyr at denne studien ikke kan si noe generelt om hvordan de digitale aspektene ved en oppgavene påvirker de kognitive kravene til alle matematikkoppgaver, men sett i lys av annen forskning kan denne studien bidra til en ny tolkning og bidra til et større bilde av hvordan digitale matematikkoppgaver kan påvirke elevenes læring.

3.6 Etiske betraktninger og metodekritikk

3.6.1 Etiske betraktninger ved kvalitativ forskning

For at forskere innenfor kvalitativ forskning skal få tilgang til personers meninger og tanker er de avhengige av at forskningsdeltakerne aksepterer å bli studert og at de er villige til å sette av tid til prosjektet. Det er derfor opprettet retningslinjer som forskere er forpliktet til å sette seg inn i for å ivareta deltakernes menneskeverd, integritet og frihet (Nilssen, 2012). I forbindelse med dette prosjektet ble det sendt inn en søknad til Personvernombudet for forskning ved Norsk senter for forskningsdata (NSD), som godkjente hvordan datamaterialet mitt skulle bli samlet inn. Det ble sendt ut et informasjonsskriv og samtykkeskjema (se vedlegg 1) til alle elevene hvor det ble redegjort for hva målet med prosjektet er og at alle som deltok forble anonyme. Det ble også krevd signatur fra foreldrene til elevene som ønsket å delta i prosjektet. Dette ble gjort for å forsikre at alle som deltok i prosjektet deltok frivillig og at alle var informerte om hva en eventuell deltagelse innebar. Elevene det ble gjort lydopptak av ble også spurt underveis i undervisningen om dette var greit, slik at de som deltok hadde muligheten til å trekke seg fra prosjektet. Informasjonsskrivet ga også muligheten for at foreldre kunne ta kontakt med meg eller min veileder hvis de hadde spørsmål om forskningsprosjektet.

I forkant av observasjonene ble også lærerne som skulle observeres informert om hva målet med forskningsprosjektet var og at det var frivillig å delta. Siden observasjonen innebar å observere lærere som utførte sin yrkespraksis ble lærerne godt informerte om at de ville forbli anonyme og at prosjektet ikke skulle inneholde konfidensiell informasjon eller prøve å si noe om hvordan lærerne presterte i jobben sin.

3.6.2 Metodekritikk

Som nevnt tidligere i kapittel 3.2 gir observasjoner oss muligheten til å se direkte på hva som skjer i naturlige omgivelser og situasjoner. Selv om jeg som observatør prøvde å påvirke situasjonene i minst mulig grad, kan selve tilstedeværelsen av en ukjent observatør i seg selv påvirke omgivelse og hva som skjer (Cohen et al., 2011; Tjora, 2012). Det er for eksempel mulig at forskningsdeltakerne endrer sin oppførsel på bakgrunn av at de blir observert. Det kan hende de prøver hardere, blir nervøse eller oppfører seg på en måte som de tror er etterlyst og ønsket av observatøren. Et eksempel på hvordan jeg kan ha vært med på å endre oppførselen til elevene blir presentert i kapittel 5, hvor elevene hele tiden slettet sine ukorrekte løsninger slik at det ble utfordrende for meg og læreren å se hva elevene hadde gjort. For å redusere faren for at forskningsdeltakerne skulle endre sin oppførsel hadde jeg på forhånd en samtale med både lærerne og elevene hvor jeg la vekt på at de skulle oppføre seg som om det var en helt vanlig undervisningsøkt.

I undersøkelser hvor observasjon blir brukt som metode er det vanlig at selve observasjonen er relativt kort og kontakten med forskningsdeltakerne liten. Dette gjelder også for mitt prosjekt hvor jeg tilbrakte rundt en time i hvert klasserom, hvor kontakten med lærerne og elevene var relativt liten. Dette gjør at det fort kan oppstå misforståelser eller at det oppstår situasjoner man ikke helt forstår (Cohen et al., 2011; Tjora, 2012). Som observatør i et forskningsprosjekt kommer man inn i ukjente miljøer hvor normene for hva som er vanlig ikke er kjente. Dette kan føre til at situasjoner tolkes feil eller at vi blir usikre på hva som faktisk skjedde. Ved å ha en struktur og observatørrolle som i denne undersøkelsen kan risikoen for misforståelser reduseres fordi man har muligheten til å stille spørsmål for å oppklare vanskelige situasjoner (Tjora, 2012).

I følge Cohen et al. (2011) vil man aldri være helt objektiv, da man som forsker er en del av verdenen man forsker på. Datamaterialet jeg fikk ut av mine observasjoner er like avhengig av min oppmerksomhet som instrumentene og metodene jeg tok i bruk. Egne interesser og erfaringer som man tar med seg inn i en forskningssituasjon vil alltid prege hva vi ser og leter etter. (Cohen et al., 2011). Datamaterialet og analysearbeidet i mitt prosjekt vil derfor være påvirket av meg på grunn av mine forkunnskaper og interesser. Det vil si at mine funn ikke nødvendigvis vil være lik andres funn, da datamaterialet er avhengig av både forskeren, deltakerne og situasjonen (Nilssen, 2012).

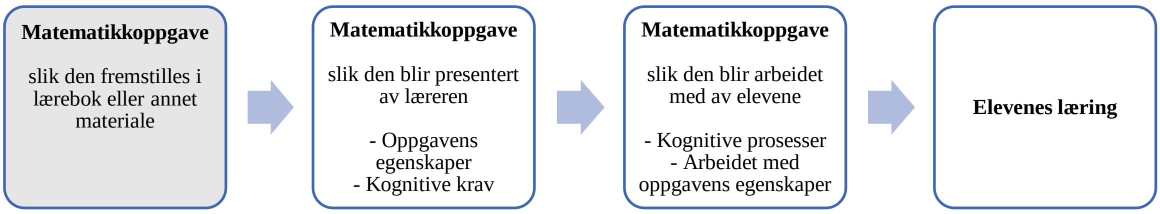
4.0 Analyse: de digitale matematikkoppgavene

I dette kapittelet vil jeg analysere de fem matematikkoppgavene som lærerne brukte i sin undervisning med fokus på oppgavenes digitale aspekter (se kapittel 2.1) og kognitive krav (se kapittel 2.2). Dette gjøres for å svare på underspørsmålene; *1) Hvilke kognitive krav kreves for å løse oppgavene slik de blir fremstilt opprinnelig i det digitale verktøyet eller andre læremidler?* og *2) Hvilke digitale aspekter har de digitale matematikkoppgavene som gjør at de skiller seg fra oppgaver i tradisjonelle verktøy?* For å gjøre analysen mest mulig strukturert og for å skille mellom de ulike oppgavene har jeg valgt å analysere oppgavene som ble brukt i samme undervisningsøkt sammen. Det vil si at oppgave 1 og 2 ble brukt i samme undervisningsøkt, det samme gjelder oppgave 4 og 5. De tre ulike undervisningsøktene ble gjennomført av ulike lærere på forskjellige skoler. Oppgavenes kognitive krav vil bli undersøkt i kapittel 4.1, mens oppgavenes digitale aspekter blir undersøkt i kapittel 4.2. Et sammendrag av alle oppgavene med deres kognitive krav og digitale aspekter kan sees i tabell 2.

	Oppgave 1	**Oppgave 2**	**Oppgave 3**	**Oppgave 4**	**Oppgave 5**
Kognitive krav	Lav (nivå 1)	Lav (nivå 2)	Høy (nivå 4)	Lav (nivå 1)	Lav (nivå 2)
Dynamiske representasjoner	Nei	Nei	Ja	Nei	Nei
Dynamisk og interaktiv	Nei	Nei	Ja	Nei	Nei
Skifte av fokus	Nei	Nei	Ja	Nei	Nei
Umiddelbar tilbakemelding	Ja	Ja	Delvis	Ja	Ja

Tabell 2: Oversikt over matematikkoppgavenes digitale aspekter og kognitive krav.

Matematikkoppgavene som blir analysert i dette kapittelet vil bli analysert etter slik oppgavene ble presentert på oppgavearket eller nettstedet, slik figur 2 viser. Hvordan læreren presenterte oppgavene og hvordan elevene arbeidet med oppgavene tas ikke i betraktning i dette kapittelet.



Figur 2: Oversikt over oppgavenes tre faser. Hentet og oversatt fra Stein et al. (1996, s. 459).

4.1 Oppgavenes kognitive krav

Før oppgavene kan analyseres i henhold til rammeverket for kognitive krav må oppgavens tilpasning sees i sammenheng med elevgruppen som skal arbeide med oppgaven. Med tanke på kompetansemålene etter 10. trinn og hvilken matematisk kunnskap elevene skal ha på 9.- og 10. trinn vil jeg påstå at alle oppgavene som blir presentert her er tilpasset nivået til elevene (Utdanningsdirektoratet, 2013b). Oppgavene krever ferdigheter og begrepsforståelse innenfor de ulike temaene som kan forventes av en elev på 9.- og 10. trinn.

4.1.1 Oppgave 1 og 2

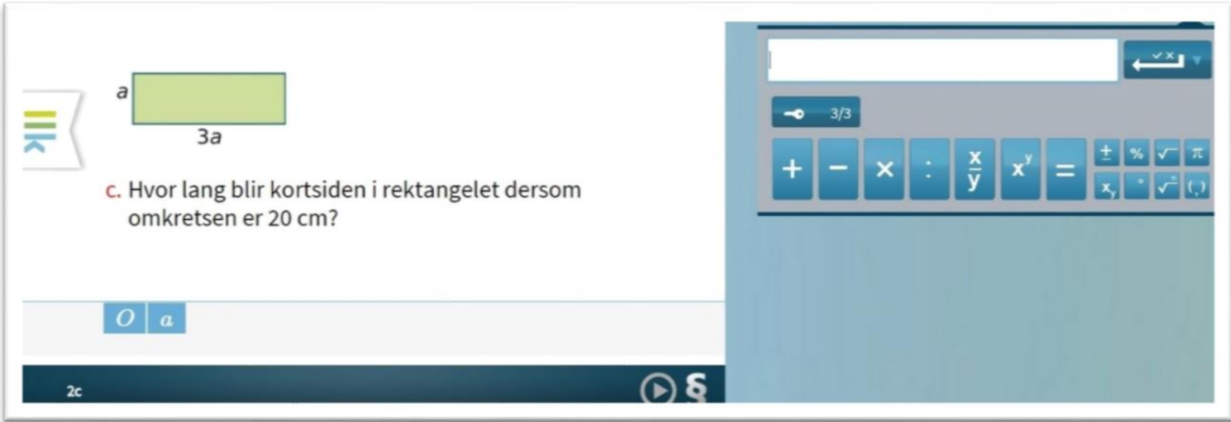
Oppgave 1 og 2 er oppgaver fra nettstedet Kikora som omhandler algebra og praktisk bruk av formler. Elevene som arbeidet med oppgavene gikk i 9. klasse og arbeidet med oppgavene på hver sin datamaskin.

Oppgave 1

Figur 3: Oppgave 1 som vist på Kikora sine nettsider. Bildet er hentet og fremvist med tillatelse fra Kikora AS.

Oppgaven går ut på at elevene skal finne en formel for omkretsen til kvadratet, som i dette tilfellet vil være $O = 4s$. Oppgaven etterlyser ingen spesifikke fremgangsmåter som kan brukes for å løse oppgaven og det kreves heller ingen forklaring på hvordan man kommer frem til svaret. På bakgrunn av at elevene gikk på 9. trinn vil det kognitive kravet for å løse denne oppgaven være lavt. Oppgaven blir derfor klassifisert av meg som nivå 1 (memorering). En elev på 9. trinn skal vite at formelen til omkretsen av et kvadrat er $O = 4s$, dermed krever denne oppgaven kun at elevene husker denne formelen, noe som kjennetegner oppgaver på nivå 1 (Stein & Smith, 1998).

Oppgave 2



Figur 4: Oppgave 2 som vist på Kikora sine nettsider. Bildet er hentet og fremvist med tillatelse fra Kikora AS.

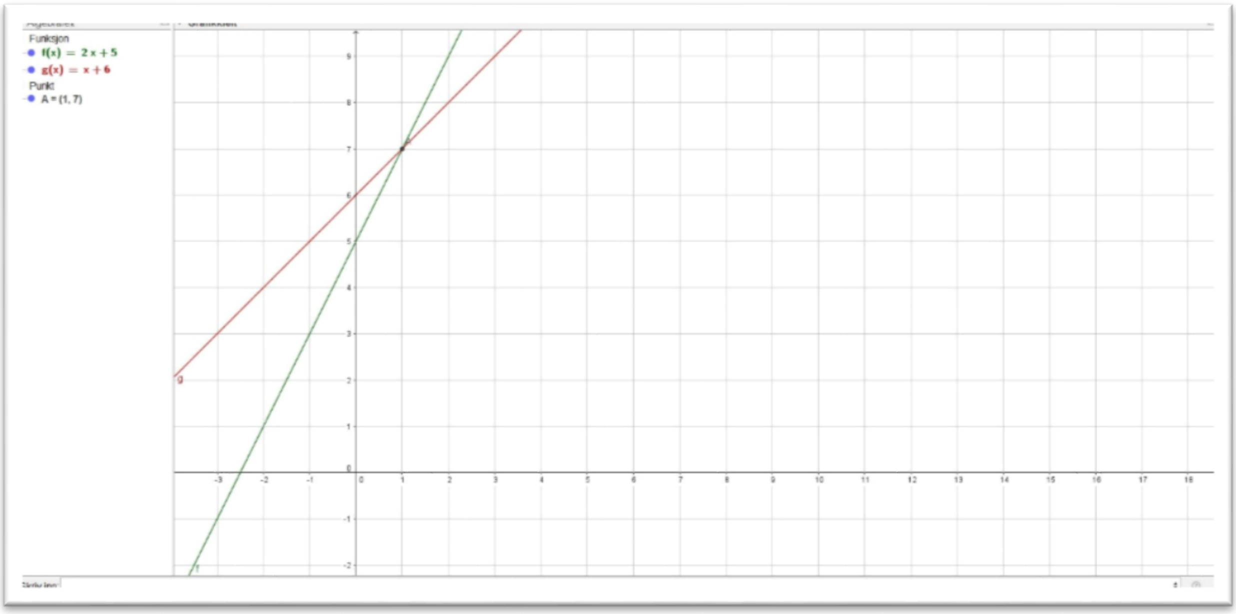
Oppgave 2 er en oppgave som dukker opp senere i samme oppgavesett som oppgave 1. Elevene har i en tidligere oppgave allerede funnet ut at omkretsen for dette rektangelet kan utrykkes ved $O = 8s$, og de har allerede kommet frem til et utrykk for kortsiden a uttrykt ved omkretsen O, som er $a = \frac{O}{8}$. Med dette utrykket skal elevene finne ut hvor lang kortsiden til rektangelet er når omkretsen er $20cm$. Her blir altså en spesifikk fremgangsmåte etterlyst hvor elevene må sette inn omkretsen i utrykket for å finne svaret. Hvordan elevene kom frem til løsningen krever heller ingen forklaring eller utregning. Elevene trenger kun å sette inn løsningen, som i dette tilfellet vil være $a = 2{,}5cm$ eller bare $2{,}5cm$. Dette er en oppgave som kunne vært mer åpen og dermed hatt et høyere kognitivt krav hvis elevene ikke allerede visste utrykkene for omkretsen og kortsiden a. Oppgavene er bygd opp stegvis, det vil si at et utrykk for hvordan oppgave 2 kan løses ble avdekket i oppgaven før. Det gjør at det er tydelig for elevene hva som skal gjøres og hvordan det skal gjøres, noe som gjør at det kognitive kravet for å løse oppgaven er lavt (Stein & Smith, 1998). Oppgaven kan dermed betegnes som instrumentell, da fokuset er på det den riktige løsningen og ikke forståelsen (Skemp, 2006). Siden elevene allerede har et utrykk for kortsiden a og kun trenger å følge en kjent prosedyre, velger jeg å plassere denne oppgaven på nivå 2 (prosedyrer uten sammenheng).

4.1.2 Oppgave 3

Oppgave 3 ble arbeidet med av elever på 10. trinn og handlet om algebra, likninger og funksjoner. Oppgaven ble delt ut på papirform, men elevene arbeidet med oppgaven i par på en datamaskin i programmet GeoGebra. Selve oppgaven er for lang til å presenteres her og vil derfor bli forklart. Hele oppgaven kan sees i vedlegg 2.

Oppgaven gikk ut på å løse likninger i GeoGebra ved å se på skjæringspunktet mellom to grafer. Den første likningen elevene skulle løse var $2x + 5 = x + 6$ og elevene satte inn uttrykkene på hver side av likhetstegnet som funksjoner i GeoGebra, som i dette tilfellet blir $f(x) = 2x + 5$ og $g(x) = x + 6$, se figur 5.

Oppgave 3



Figur 5: Deler av løsningen til likningen $2x + 5 = x + 6$ i GeoGebra.

Løsningen til likningen var bare en liten del av oppgaven elevene arbeidet med. Det som var i fokus var at elevene skulle forklare til sidemannen sammenhengen mellom grafene og likningen, og hvorfor skjæringspunktet representerer løsningen til likningen. Her ser vi at fokuset ikke er på den korrekte løsningen, men på sammenhengene og konseptene som ligger bak, noe som kjennetegnet oppgaver med høye kognitive krav (Stein & Smith, 1998). Oppgaven bygger derfor på en relasjonell forståelse (Skemp, 2006). Selv om oppgaven foreslår en fremgangsmåte for å løse likningen (finne skjæringspunktet mellom grafene), går oppgaven ut på å forklare hva skjæringspunktet representerer og hvorfor denne fremgangsmåten kan brukes. Det betyr at elevene må bruke matematiske begreper og oppgaven gir muligheten til at elevene kan resonnere og argumentere i sine forklaringer. Jeg velger derfor å plassere denne oppgaven på nivå 4 (å gjøre matematikk).

4.1.3 Oppgave 4 og 5

Oppgave 4 og 5 er oppgaver fra Kikora sine nettsider som omhandler prosent, brøk og desimaltall. Elevene som arbeidet med oppgavene gikk i 9. klasse og elevene arbeidet med oppgavene på hver sin datamaskin. Oppgavene ble brukt som repetisjon og øving til en kommende prøve om prosentregning.

Oppgave 4

Figur 6: Oppgave 4 som vist på Kikora sine nettsider. Bildet er hentet og fremvist med tillatelse fra Kikora AS.

Oppgave 4 går ut på at elevene skal finne hvor mange prosent $5kr$ utgjør av $50kr$. Siden disse oppgavene skulle fungere som repetisjonsoppgaver skal elevene på forhånd ha nok kunnskap om prosentregning til å kunne løse oppgavene. For en elev på 9. trinn skal det ikke være nødvendig å bruke prosedyrer for å løse oppgaven. Elevene skal klare å se at $5kr$ er 10% av $50kr$ uten å sette opp et regnestykke som $\frac{5kr}{50kr} * 100 = 10\%$. Siden oppgaven bruker enkle tall som er kjente for elevene og bruken av kjente prosedyrer ikke er nødvendig, vil det kognitive kravet for å løse oppgaven være lavt (Stein & Smith, 1998). Oppgaven blir derfor plassert på nivå 1 (memorering).

Oppgave 5

Figur 7: Oppgave 5 som vist på Kikora sine nettsider. Bildet er hentet og fremvist med tillatelse fra Kikora AS.

Oppgave 5 er en oppgave fra samme oppgavesett som oppgave 4. Elevene skal finne ut hvor mange prosent 15 gutter utgjør av en hel klasse på 27 elever. Selv om oppgaven ikke eksplisitt foreslår en fremgangsmåte, er hva man skal gjøre og hvordan man skal gjøre det innlysende på bakgrunn av tidligere oppgaver og instruksjoner. Denne oppgaven bruker vanskeligere tall enn forrige oppgave og krever derfor en utregning for å finne det riktige svaret. Siden elevene har arbeidet med prosentregning over en periode skal elevene være kjent med prosedyren for å løse oppgaven og vite at løsningen på oppgaven er $\frac{15}{27} * 100 = 55{,}56\%$. Oppgaven kan derfor karakteriseres som instrumentell (Skemp, 2006). Siden elevene er kjente med fremgangsmåten for å finne løsningen vil det kognitive kravet for å løse oppgaven være lavt (Stein & Smith, 1998), og jeg velger å plassere oppgaven på nivå 2 (prosedyrer uten sammenheng).

4.2 Digitale aspekter ved oppgavene

Her vil jeg undersøke hvilke digitale aspekter oppgavene tar i bruk, altså hva som skiller disse oppgavene fra oppgaver som blir arbeidet med i tradisjonelle verktøy. Aspektene som blir undersøkt ble presentert i kapittel 2.1. Legg merke til at det er de individuelle oppgavene som blir analysert, ikke verktøyet som oppgavene blir brukt i.

4.2.1 Oppgave 1 og 2

Siden oppgave 1 og 2 er nokså like og benytter seg av de samme digitale aspektene velger jeg her å ikke skille mellom oppgavene, de blir derfor videre henvist til som «oppgavene» i teksten.

Inneholder oppgaven flere dynamiske representasjoner?

Figur 3 og 4 viser at oppgavene blir representert med et matematisk skriftlig språk, algebraisk notasjon og ved en geometrisk figur, men ingen av representasjonene er dynamiske og kan dermed ikke endres. Selv om oppgaven inneholder flere representasjoner vil det ikke være nødvendig å bruke alle. Det kreves ikke at elevene går fra ett representasjonssystem til et annet, de arbeider kun innenfor samme representasjonssystem, som i dette tilfellet er algebraisk notasjon. Elevene kan for eksempel gjøre om $s + s + s + s$ til $4s$, som Duval (2006) kaller for «treatments». Oppgaven har altså ikke dynamiske representasjoner og skiller seg derfor ikke fra de tradisjonelle verktøyene, som for eksempel papir og blyant.

Er oppgaven dynamisk og interaktiv?

Oppgavene er statiske og ikke-interaktive oppgaver (Kaput, 1992). Det vil si at de ikke kan endres på noen som helst måte og oppgavene reagerer ikke på det brukeren gjør. Oppgavene krever kun at elevene skriver løsningen på oppgaven i det gitte feltet. Det betyr at oppgavene ikke skiller seg fra oppgaver på papirform og oppgaven benytter seg ikke av dette digitale aspektet.

Bidrar oppgaven til et skifte av fokus?

Det er ingen aspekter ved oppgavene som frigjør elevene fra regneoperasjoner eller som gjør det enklere å utføre regneoperasjonene. Oppgavene er som nevnt tidligere statiske og den eneste interaksjonen elevene kan gjøre med oppgavene er å sette inn en løsning. Disse oppgavene har allerede et definert fokus og det vil derfor ikke være nødvendig med et skifte av fokus. Oppgavene tar altså ikke i bruk dette digitale aspektet.

Gir oppgaven umiddelbar tilbakemelding?

Når elevene skriver en løsning i svarfeltet vil elevene få umiddelbar tilbakemelding om løsningen er riktig, delvis riktig eller feil. En delvis riktig løsning for oppgave 1 vil være $O = s + s + s + s$, som videre må forkortes til $O = 4s$ for at løsningen skal registreres som riktig. Tilbakemeldingen som blir gitt er i form av symboler (kryss for feil, hake for delvis riktig og en pokal for riktig) og det blir ikke oppgitt hva som er feil i løsningen. Dette kan karakteriseres som en upersonlig tilbakemelding (Sacristán et al., 2010). Elevene har også muligheten til å få oppgitt deler av løsningen og hele løsningen hvis de ønsker det. I oppgave 1 kan elevene for eksempel få oppgitt $O = s + s + s + s$ som en delvis løsning. Oppgavene tar altså i bruk et digitalt aspekt som gir muligheten til kontinuerlig og umiddelbar tilbakemelding, noe som ikke ville vært mulig med tradisjonelle verktøy.

4.2.2 Oppgave 3

Inneholder oppgaven flere dynamiske representasjoner?

Figur 5 viser at oppgaven blir representert med en likning, graf og funksjonsuttrykk, hvor grafene og funksjonsuttrykkene er dynamiske representasjoner (Kaput, 1992). Hvis funksjonsuttrykket endres vil den tilhørende grafen endres i samsvar med funksjonsuttrykket. Det vil si at elevene kan gå inn å endre funksjonsutrykket slik at det samsvarer med likningen i neste oppgave elevene skal løse, og grafen vil endre seg automatisk. Her må elevene gå mellom ulike representasjonssystemer (graf og funksjonsutrykk), som Duval (2006) kaller for «conversions». Elevene må i tillegg se sammenhengen mellom grafen/funksjonsuttrykket og likningen, hvor likningen representerer et annet matematisk objekt enn grafen/funksjonsuttrykket. Oppgave 3 tar altså i bruk flere dynamiske representasjoner, noe som ikke ville vært mulig å gjøre på papir.

Er oppgaven dynamisk og interaktiv?

Som nevnt i forrige avsnitt vil en endring av funksjonsuttrykket føre til en automatisk endring av grafen. Det samme kan gjøres ved å dra og flytte på grafen, funksjonsuttrykket vil da endres i samsvar med grafen. Når elevene skriver inn et funksjonsuttrykk eller flere funksjonsuttrykk vil grafene bli konstruert automatisk av datamaskinen. Funksjonsuttrykkene og grafene reagerer altså på brukerens handlinger, noe som kjennetegner dynamiske og interaktive oppgaver (Kaput, 1992). Oppgave 3 tar dermed i bruk et digitalt aspekt som gjør at den skiller seg fra oppgaver på papir.

Bidrar oppgaven til et skifte av fokus?

Oppgave 3 krever at elevene lager grafer som representerer funksjonsuttrykkene, og i denne oppgaven blir grafene laget automatisk. Det vil si at datamaskinen utfører en operasjon for elevene slik at elevene ikke trenger å gjøre den. Elevene kan da bruke mer tid på å fokusere på hensikten med oppgaven, som i dette tilfellet var å se sammenhengen mellom grafene og løsningen av en likning. Oppgaven bruker altså et digitalt aspekt som bidrar til et skifte av fokus som gjør at elevene får mer tid til å se på sammenhengene (Goldenberg, 2000). Dette ville også vært mulig å gjøre på papir dersom elevene på forhånd fikk utdelt ferdiglagde funksjonsutrykk og grafer, men dette ville begrenset elevenes muligheter til utforskning.

Gir oppgaven umiddelbar tilbakemelding?

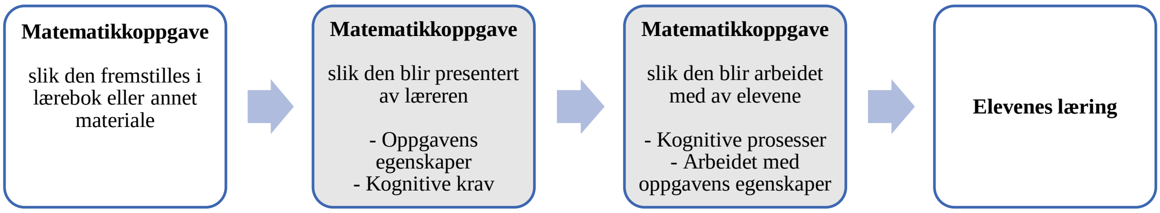
Elevens løsning av likningen blir ikke vurdert av GeoGebra i denne oppgaven, men selve løsningen av oppgaven kommer frem (skjæringspunktet). Elevene får altså ikke tilbakemelding på om løsningen deres er riktig eller ikke, dette må elevene tolke selv ut i fra skjæringspunktet og de aktuelle funksjonsutrykkene. Elevene får derimot tilbakemelding hvis de setter inn et ugyldig funksjonsutrykk, men får ikke vite hva som er galt med uttrykket. Jeg velger derfor å konkludere med at oppgaven gir delvis tilbakemelding til elevene, selv om det ikke kommer eksplisitt frem om løsningen er riktig eller ikke.

4.2.3 Oppgave 4 og 5

Hvis vi sammenligner oppgave 4 og 5 (figur 6 og 7) med oppgave 1 og 2 (figur 3 og 4) ser vi at det eneste som skiller oppgavene er det matematiske temaet. Det vil si at oppgavene tar i bruk de samme digitale aspektene som blir presentert i kapittel 4.2.1, derfor vil ikke de digitale aspektene bli presentert på nytt. Det eneste som skiller oppgavene er den umiddelbare tilbakemeldingen. Som nevnt tidligere gir oppgave 1 og 2 elevene tilgang til deler av løsningen og hele løsningen. Dette er ikke tilfellet med oppgave 4 og 5. Oppgave 4 og 5 gir altså ikke elevene muligheten til å få deler av eller hele løsningen.

5.0 Analyse: undervisningens påvirkning

Dette kapittelet vil som følge av analysearbeidet som er beskrevet i kapittel 3.4 bestå av to deler, som figur 8 viser. Den første delen tar for seg hvordan de tre ulike lærerne presenterte oppgavene som skulle brukes i undervisningen. Den andre delen handler om hvordan elevene faktisk arbeidet med oppgavene, uavhengig av hvordan oppgavene ble presentert. Disse delene vil til sammen fungere som grunnlaget for drøftingen i neste kapittel hvor jeg vil se på utviklingen av de kognitive kravene og hvilke faktorer som har bidratt til endringen. Situasjonene som blir beskrevet tar utgangspunkt i observasjonsnotatene og transkripsjoner fra elevdiskusjoner, som vil være innrammet i teksten.



Figur 8: Oversikt over oppgavenes tre faser. Hentet og oversatt fra Stein, Grover og Henningsen (1996, s. 459)

De tre ulike undervisningsøktene vil bli henvist til som undervisningsøkt A, B og C. Hvor oppgave 1 og 2 ble brukt i undervisningsøkt A, oppgave 3 i undervisningsøkt B og oppgave 4 og 5 ble brukt i undervisningsøkt C.

5.1 Lærernes presentasjon av oppgavene

Gjennom analysearbeidet har jeg kommet frem til at jeg vil se på hvilke kognitive krav læreren legger opp til at oppgavene skal ha når elevene arbeider. For å undersøke hvilke kognitive krav læreren legger opp til vil jeg se på hvordan læreren presenterer oppgavene, hvilke eksempler læreren bruker i forkant og underveis i undervisningen og om læreren stiller noen krav om hvordan elevene skal arbeide med oppgavene, som for eksempel et krav om at elevene skal samarbeide og/eller diskutere løsningene.

Undervisningsøkt A

Det første utdraget fra observasjonsnotatene er fra undervisningsøkt A hvor læreren presenterer oppgavene som elevene skal arbeide videre med:

Observasjonsnotat 1 (undervisningsøkt A)
Læreren bruker et eksempel fra Kikora på tavla hvor elevene skal finne et utrykk for omkretsen til et kvadrat. Kvadratet blir tegnet opp på tavla hvor den ene siden blir uttrykt med a. Læreren spør elevene hvordan man kan finne omkretsen til et kvadrat og hva uttrykket blir i dette tilfellet. Elevene har ikke fått utdelt datamaskiner enda. En elev rekker opp hånda og sier at man kan plusse alle sidene sammen og at svaret blir $O = a + a + a + a$. Læreren spør deretter om dette er det ferdige svaret. Elevene svarer at uttrykket kan forkortes til $4a$. Læreren viser enda et eksempel hvor den ene siden til kvadratet er $7{,}5cm$ og spør elevene hva omkretsen til kvadratet er… Elevene får utdelt hver sin datamaskin og læreren forteller dem hvilke oppgaver de skal arbeide med på Kikora.

Utdraget ovenfor viser at oppgaven som læreren brukte som et eksempel i sin presentasjon er den samme oppgaven som oppgave 1 (se kapittel 4.1.1), og som elevene selv skal arbeide med etterpå. Elevene blir spurt om hvordan man finner omkretsen til et kvadrat, noe som vil være en gjengivelse av tidligere lærte fakta som det forventes at elevene kan. Det samme gjelder når læreren spør om $O = a + a + a + a$ er det endelige svaret og elevene sier at utrykket kan forkortes. Dette er noe elevene har lært å gjøre tidligere. Den neste oppgaven læreren presenterer er algoritmisk, det vil si at elevene kun trenger å sette inn den gitte lengden i utrykket for omkretsen og deretter gjøre utregningen. Læreren legger altså opp til at elevene skal vite hvordan de kan gå frem for å løse oppgavene. Oppgavene blir ikke endret på noen måte, ved at læreren for eksempel tilføyer noe til oppgavene. Det blir heller ikke stilt noen krav eller forventninger om hvordan elevene skal arbeide med oppgavene før de får utdelt datamaskinene.

Undervisningsøkt B

Det neste utdraget fra observasjonsnotatene er fra undervisningsøkt B hvor læreren presenterer oppgaven for elevene:

Observasjonsnotat 2 (undervisningsøkt B)
Læreren skriver ned likningen $2x + 5 = x + 6$ og flere likninger på tavlen. Elevene blir deretter spurt hva man finner ut når man finner en løsning på likninger. En elev rekker opp hånda og sier at man finner ut hva *x* er. Læreren virker ikke helt fornøyd med svaret og fortsetter å spørre om hva det vil si. En elev svarer at vi finner en verdi for *x* som gjør at begge sidene av likhetstegnet blir like. Læreren spør videre om hvilke temaer de har arbeidet med i det siste i matematikkfaget. Elevene ramser opp at de har lært om likninger, funksjoner og grafer. Læreren fortsetter med å fortelle elevene at de skal arbeide med GeoGebra og at målet for undervisningsøkten er å se

sammenhengen mellom likninger, funksjoner og grafer. Læreren sier at elevene skal arbeide i par og at elevene må forklare til hverandre det som står på oppgavearket.

Her ser vi at læreren ikke fokuserer på løsningen til likningen under presentasjonen. Fokuset er istedenfor på hva løsningen til en likning representerer. Læreren godtar ikke det første forsøket på en forklaring av løsningen til en likning, og etterpå forklarer en elev at løsningen til en likning er når man finner en verdi for *x* som gjør at begge sidene av likhetstegnet blir like. Selve løsningen av likningen kommer ikke frem i det hele tatt, fordi fokuset er på konseptene og forståelsen, ikke den korrekte løsningen. Videre gjør læreren elevene bevisst på hva målet med undervisningsøkten er, som er at elevene skal se sammenhengen mellom likninger, funksjonsuttrykk og grafer. Læreren stiller også et krav til elevene om at de skal arbeide i par og at elevene må forklare muntlig til hverandre det de finner ut. I vedlegg 2 kan vi se at et eksempel på hva elevene må forklare er hva som skjer med y-verdien når x-verdien endres og hva skjæringspunktet mellom de to grafene representerer.

Undervisningsøkt C

Det siste utdraget er fra undervisningsøkt C som tar for seg hvordan læreren presenterte oppgavene elevene skulle arbeide med:

Observasjonsnotat 3 (undervisningsøkt C)

Læreren forteller elevene at de skal arbeide med prosentoppgaver på nettsidene til Kikora og at dette er øving og repetisjon til en kommende prøve. Elevene henter hver sin datamaskin og begynner å arbeide med oppgavene.

Utdraget viser at læreren ikke presenterer noen av oppgavene og viser ikke eksempler som elevene skal arbeide med. Læreren henviser til oppgavene som repetisjon og øving, noe som betyr at elevene allerede har arbeidet med lignende oppgaver tidligere. Siden læreren ikke presenterer oppgavene på noen måte eller stiller krav som kan endre hvordan elevene arbeider med oppgaven, har ikke læreren vært med på å påvirke de kognitive kravene til oppgavene. Det er dermed ingen forskjell på hvordan oppgavene blir presentert på nettsiden og hvordan læreren presenterer oppgavene.

5.2 Hvordan arbeider elevene med oppgavene?

Her vil jeg vise utdrag fra observasjonsnotatene som viser hvordan elevene faktisk arbeidet med oppgavene, uavhengig av hvordan læreren la opp til at elevene skulle arbeide og hvordan oppgavene ble fremstilt på oppgavearket og på nettsidene. Dette er for å undersøke oppgavenes faktiske kognitive krav når elevene arbeider med oppgavene. I tillegg til å vise situasjoner fra hvordan elevene arbeider vil jeg også vise situasjoner hvor læreren gir respons til elevene som trenger hjelp, da responsen til læreren også kan være med på å påvirke de kognitive kravene (Stein et al., 1996).

Videre i analysekapittelet kommer jeg til å skille mellom *gjetting* og *prøving og feiling*, da jeg har vurdert at disse fremgangsmåtene har ulike kognitive krav. Forskjellen kom frem under observasjonen da jeg observerte at elevene brukte ulike fremgangsmåter for å løse oppgavene. Fremgangsmåtene var såpass ulike at jeg vurderte at det var nødvendig med et skille. Gjetting karakteriserer jeg som noe som har veldig lave eller tilnærmet ingen kognitive krav, da elevene kun gjetter vilkårlig på en løsning. Prøving og feiling karakteriserer jeg som noe som har høyere kognitive krav enn gjetting, da elevene til en viss grad har forstått konteksten til oppgaven og prøver seg frem med tallene som er oppgitt i oppgaven.

5.2.1 Undervisningsøkt A

Det første utdraget er fra undervisningsøkt A hvor en elev gjettet gjentatte ganger for å finne riktig løsning:

Observasjonsnotat 4 (undervisningsøkt A) Eleven gjetter for å finne riktig løsning på hvor lang kortsiden til et rektangel er når omkretsen er 20cm. Eleven har ca. 10 feile løsninger som han/hun slettet da jeg kom. Noen av løsningene var 2, 5, 6 og 4,5. Forsetter å gjette på løsningen etter jeg har gått bort og fjerner de gale svarene underveis.

Dette gjaldt ikke bare den ene eleven, gjetting ble brukt av flere av elevene under observasjonen. Elevene så ut til å være mer opptatt av å løse flest mulig oppgaver, enn å tenke over hva de gjorde. Grunnen til at jeg velger å karakterisere dette som gjetting er fordi elevene gjettet opptil flere ganger på hver oppgave i et såpass raskt tempo at det ikke ville vært mulig med en krevende kognitiv prosess i mellomtiden. Svarene som elevene oppga hadde heller ingen tydelig sammenheng og var relativt ulike. De ukorrekte løsningene ble slettet av elevene hver gang jeg eller læreren nærmet oss deres datamaskin, noe som gjorde det vanskelig å se hva elevene egentlig hadde gjort.

Det neste utdraget er fra samme undervisningsøkt hvor en av elevene benyttet seg av en hjelpefunksjon som ga eleven deler av løsningen:

Observasjonsnotat 5 (undervisningsøkt A)
Eleven sitter lenge og tenker uten å oppgi en løsning på oppgaven. Eleven skal finne et utrykk for omkretsen til et rektangel hvor den lengste siden er $3a$ og den korte siden a. Han/hun bruker hjelpefunksjonen som oppgir at første delen av løsningen er $O = 2 * 3a + 2 * a$. Eleven klarer å bruke den til å finne riktig løsning.

Utdraget viser at eleven sitter fast og ikke klarer å oppgi en løsning på oppgaven. Istedenfor å spørre læreren om hjelp bruker eleven hjelpefunksjonen i Kikora. Hjelpefunksjonen ga eleven en løsning hvor eleven kun trenger å regne ut og legge sammen for å finne den godkjente løsningen, noe som kun er symbolmanipulasjon.

Hjelpefunksjonen ble brukt av flertallet av elevene i klassen i forskjellige grader. Det neste utdraget er fra en annen elev som arbeider med samme oppgave:

Observasjonsnotat 6 (undervisningsøkt A)
Eleven har prøvd seg frem med ulike løsninger som $a + a + a + a$ og $3a * a$. Løsningene er ukorrekte og eleven bruker hjelpefunksjonen tre ganger som oppgir hele svaret til eleven, $O = 8a$. Eleven sletter løsningen som blir oppgitt og skriver den inn selv i svarfeltet og får svaret godkjent.

Her ser vi at eleven prøver og feiler uten å finne fram til den korrekte løsningen og velger derfor å bruke hjelpefunksjonen. Grunnen til at jeg karakteriserer dette som prøving og feiling er fordi svarene eleven oppga var satt i konteksten til oppgaven ved at løsningene inneholder det riktige utrykket, a. Eleven velger å bruke hjelpefunksjonen tre ganger som gir han/henne hele løsningen. Det vil si at eleven ikke trenger å gjøre noen utregninger, kun å kopiere den oppgitte løsningen som sitt eget svar. Før eleven skrev inn løsningen i svarfeltet ble hintet slettet slik at det så ut som elevens egen løsning. Dette gjaldt ikke bare denne eleven, nesten samtlige av elevene som brukte hjelpefunksjonen slettet hintene underveis. Dette gjorde det vanskelig å se hva som var elevenes arbeid og hva som ikke var elevenes arbeid. Selv om det er mulig å se at elevene har brukt hjelpefunksjonen (et lite nøkkelsymbol dukker opp på oppgaven) vil det være vanskelig å vurdere elevenes arbeid da nesten alt av elevarbeidet ble slettet, utenom den korrekte løsningen.

Utdraget under viser hvordan en elev kommuniserte og samarbeidet med en medelev som sitter ved siden av ham/henne:

Observasjonsnotat 7 (undervisningsøkt A)
En elev spør eleven som sitter ved siden av hva svaret på oppgaven er og sidemannen oppgir det riktige svaret. Eleven skriver inn svaret og går videre til neste oppgave.

Utdraget viser en situasjon som oppsto flere ganger mellom flere av elevene. Elevene spurte ofte personen ved siden av om å få det korrekte svaret og ikke om hjelp til å komme frem til den riktige løsningen. Elevene hadde ingen problemer med å oppgi løsningen sin til andre elever, og elevene som mottok løsningen virket fornøyd med å kun få det riktige svaret oppgitt. Denne typen elevsamarbeid var gjennomgående gjennom hele undervisningsøkten.

Det siste utdraget fra undervisningsøkt A er fra slutten av undervisningen da en elev rakk opp hånda og spurte etter hjelp:

Observasjonsnotat 8 (undervisningsøkt A)
En elev rekker opp hånda og spør læreren hva formelen for omkretsen av en sirkel er. Læreren svarer med å gi eleven formelen.

Her ser vi et eksempel på en respons fra læreren når en elev trenger hjelp. Eleven trenger å vite formelen for omkretsen av en sirkel for å løse oppgaven, og læreren gir eleven formelen. Selv om læreren gir eleven svaret vil ikke dette være med på å endre oppgavens kognitive krav, da det ikke kan forventes at elevene skal kunne utlede formelen på egenhånd og den kun er nødvendig som memorert kunnskap for å løse oppgaven. Det som er interessant er at dette var den eneste interaksjonen jeg registrerte mellom læreren og en elev som trengte hjelp. Det var altså nesten ingen av elevene som rakk opp hånda for å få hjelp av læreren under elevarbeidet. Det virket som at elevene foretrakk å få hjelp fra medelevene og hjelpefunksjonen i programmet fremfor læreren.

5.2.2 Undervisningsøkt B

Det første utdraget er fra en generell observasjon som ble gjort under elevarbeidet:

Observasjonsnotat 9 (undervisningsøkt B)
Alle elevene sitter og diskuterer oppgaven med medeleven ved siden av, selv om læreren ikke er i umiddelbar nærhet. Det ser ut som elevene prøver å hjelpe hverandre til å forstå.

Utdraget viser en generell observasjon som var gjennomgående under hele undervisningsøkten. Læreren hadde på forhånd stilt et krav til elevene om at spørsmålene skulle diskuteres med en medelev, noe elevene gjorde selv om læreren ikke observerte elevene direkte. Elevene var ikke opptatte av hva løsningen på likningen var, men diskuterte og prøvde å forstå sammenhengen mellom likningen og grafene. Det virket som om elevene var genuint interessert i å forstå konseptene og var ivrige med å hjelpe hverandre, som utdraget fra samarbeidet mellom to elever viser nedenfor:

Transkripsjon 1 (undervisningsøkt B)

21.	Lars:	Jeg skjønner ikke…
22.	Ola:	Se her. Først skrev vi inn utrykket her.
23.	Lars:	Hvilket utrykk?
24.	Ola:	For venstre side av likningen.
25.	Lars:	Åja, det utrykket ja.
26.	Ola:	Så fant vi ut at $y = 5$ når x er null. Så ser vi at y øker med to for hver x.
27.	Lars:	Ja, det skjønner jeg. Så satt vi inn det andre utrykket.
28.	Ola:	Da fant vi ut at skjæringspunktet var når x er 1. Så da blir det $x = 1$, fordi skjæringspunktet representerer hva x blir i likningen her.
29.	Lars:	Men hvordan vet vi at svaret på likningen er 1?
30.	Ola:	Fordi skjæringspunktet er når x er 1 og det er svaret på likningen. Fordi venstre side i likningen skal være lik høyre side. Skjæringspunktet viser at begge sidene er like.

Utdraget viser en kort diskusjon hvor en elev prøver å forklare sammenhengen mellom skjæringspunktet og løsningen til likningen for en elev som ikke klarer å se sammenhengen. Her ser vi at Ola ikke bare gir Lars den riktige løsningen til likningen og går videre, men prøver å forklare med egne ord hvordan man kan bruke grafene til å finne løsningen til likningen.

Det neste utdraget er fra en observasjon som ble gjort midtveis i undervisningsøkten:

Observasjonsnotat 10 (undervisningsøkt B)
Det er to elever som ikke gjør det de skal. Elevene sitter på forskjellige internettsider og ser på klær.

Utdraget viser to elever som er på internett istedenfor å gjøre det de skal. Dette var det eneste tilfellet i løpet av undervisningen hvor jeg observerte elever som ikke gjorde det de skulle på datamaskinen. Det er usikkert om læreren la merke til dette eller ikke, men tilfellet ble kun observert én gang.

Dette utdraget er fra en situasjon hvor en elev rakk opp hånda og trengte hjelp av læreren:

Observasjonsnotat 11 (undervisningsøkt B)
Læreren gikk bort til to elever som syntes det var vanskelig å forklare hva skjæringspunktet mellom grafene representerte. Læreren gir ikke elevene svaret, men stiller istedenfor spørsmål om hva de forskjellige aksene viser, hva x-verdien og y-verdien forteller oss og hva som er spesielt med skjæringspunktet. Elevene klarer tilslutt å forklare hva skjæringspunktet representerer.

Her ser vi lærerens respons til to elever som trengte hjelp til å forstå hva skjæringspunktet representerer. Læreren gir ikke elevene svaret ved å gi sin egen forklaring, men stiller åpne spørsmål som skal få elevene til å kunne gi sin egen forklaring. Det var åpenbart at flere av elevene syntes oppgavene var vanskelig å forklare og ba derfor ofte om hjelp fra læreren. Lærerens respons var fortsatt preget av å stille spørsmål til elevene uten å gi dem for mye informasjon gjennom hele undervisningsøkten.

Det siste utdraget fra undervisningsøkt B er fra en diskusjon mellom to elever som tok sted ved slutten av undervisningsøkten:

Observasjonsnotat 12 (undervisningsøkt B)
To elever har veldig gode forklaringer til hverandre om hva skjæringspunktet mellom de to grafene representerer. Jeg spurte elevene om de da hadde funnet en løsning på likningen som grafene representerte. Elevene konkluderte med at de ikke hadde funnet en løsning på likningen.

Selv om de to elevene klarte å forklare til hverandre hva skjæringspunktet representerte og så ut til å ha en forståelse for det de diskuterte og forklarte, mente de at de ikke hadde klart å finne en løsning på likningen som grafene representerte. De klarte altså ikke å se sammenhengen på tvers av representasjonene, som i dette tilfellet var mellom grafenes skjæringspunkt og løsningen på likningen. Dette gjaldt ikke bare disse to elevene, det var flere elever som ikke klarte å forklare sammenhengen mellom grafene og likningene.

5.2.3 Undervisningsøkt C

Det første utdraget er fra en situasjon hvor en elev prøver og feiler for å komme frem til den riktige løsningen:

Observasjonsnotat 13 (undervisningsøkt C)
Eleven skal skrive 12% som en brøk og har flere ukorrekte løsninger i svarfeltet og forsetter å prøve seg frem til løsningen. Noen av løsningene var $\frac{12}{10}$ og $\frac{100}{12}$. Eleven sletter løsningene som er feil når eleven ser at jeg kommer.

Her ser vi en situasjon hvor en elev prøver seg frem for å finne en brøk som representerer 12%. Grunnen til at jeg mener eleven prøver seg frem og ikke gjetter vilkårlig, er fordi svarene eleven oppga kan sees i kontekst med oppgaven ved tallet 12 og 100 ble brukt, og eleven brukte tid til å tenke før et svar ble oppgitt. Denne metoden ble brukt av flere av elevene i undervisningsøkt C. Elevene prøvde ulike løsninger opptil flere ganger og samtlige av elevene som hadde oppgitt en feil løsning fjernet løsningene med en gang slik at ingen skulle se de ukorrekte løsningene.

Det neste utraget er fra en annen elev som gjettet for å finne den korrekte løsningen:

Observasjonsnotat 14 (undervisningsøkt C)
Eleven har flere feile løsninger i svarfeltet og sletter samtlige i det øyeblikket jeg kommer bort til han/henne. Når jeg trekker meg litt unna begynner eleven på nytt å skrive inn løsninger, og noen av løsningene er de samme, ukorrekte løsningene som eleven tidligere har slettet.

Utdraget viser at denne eleven gjetter på løsninger for å finne det riktige svaret. Eleven slettet løsningene som var feil da jeg nærmet meg, men fortsatte med å bruke de samme løsningene på nytt da eleven ikke trodde jeg observerte han/hun lengre. Dette viser at løsningene som eleven avgir kun er et forsøk på å gjette seg frem til riktig løsning, da eleven ikke har kontroll på hvilke løsninger som allerede er prøvd. Gjetting ble også brukt av flere elever i undervisningsøkten.

En annen elev skulle finne ut hvor mange prosent 12 jenter utgjorde i en klasse med 27 elever:

Observasjonsnotat 15 (undervisningsøkt C)
Eleven bruker tallene i oppgaven og prøver seg frem med ulike regneoperasjoner på kalkulatoren. Eleven fant den korrekte løsningen.

Her ser vi en elev som bruker tallene (og tallet 100, siden det handler om prosent) som blir oppgitt i oppgaven og prøver seg frem med ulike regneoperasjoner. Eleven brukte tallene fra oppgaven og tallet 100, og dividerte og multipliserte de ulike tallene i forskjellige rekkefølger. Eleven fant tilslutt den riktige løsningen og fikk svaret godkjent. Dette karakteriserer jeg som prøving og feiling, da eleven bruker de riktige tallene og regneoperasjonene og prøver seg frem for å finne riktig løsning.

Det neste utdraget er fra en situasjon jeg noterte midtveis i undervisningen:

Observasjonsnotat 16 (undervisningsøkt C)
Halvparten av elevene gjør ikke det de skal. Det er 13 elever (av 26) som ser på et tv-program. Elevene skjuler internettvinduet med en gang læreren er i nærheten.

Midtveis i undervisningen gikk jeg bakerst i klasserommet for å få en oversikt over alle elevene og hva de gjorde på datamaskinen. Halvparten av klassen hadde samtidig oppe et internettvindu hvor de så et tv-program. Elevene var raske med å skjule internettvinduet med en gang læreren nærmet seg, men så ikke ut til å bry seg om at jeg observerte dette. Elevene var så raske med å fjerne filmen at læreren ikke la merke til at elevene så på film. Læreren bekreftet da jeg spurte han/henne etter timen at hun/han ikke hadde lagt merke til at elevene så på film i løpet av undervisningsøkten.

Dette utdraget viser også en gruppe elever som brukte datamaskinen til andre ting enn matematikk:

Observasjonsnotat 17 (undervisningsøkt C)
En gruppe med fire elever er inne på en internettside hvor de programmerer et spill. Elevene bryr seg ikke om jeg observerer dem, men går tilbake til å arbeide med matematikkoppgaver når læreren er i nærheten.

Utdraget viser fire elever som gjennom hele undervisningsøkten holdt på med å programmere et spill istedenfor å arbeide med de oppgitte matematikkoppgavene. Elevene tok kun frem matematikkoppgavene da de så at læreren nærmet seg og elevene var i likhet med elevene som ble nevnt i observasjonsnotat 16, raske med å gjemme bort internettsiden og finne frem matematikkoppgavene. Selv om programmering kan ha visse likhetstrekk med matematikk og kan være kognitivt krevende, er dette et eksempel på at elevene brukte datamaskinen til å gjøre andre ting enn hva læreren hadde gitt beskjed om.

Det neste utdraget tar for seg to elever som også brukte datamaskinen til å gjøre andre aktiviteter enn matematikk:

Observasjonsnotat 18 (undervisningsøkt C)

To elever som sitter ved siden av hverandre går inn i programmeringskoden til internettsiden og endrer oppgavene derifra.

Her ser vi to elever som tydelig er interessert og som har noe kunnskap om programmering. Elevene går inn i koden til internettsiden for å endre oppgavene. Elevene klarte med dette å endre oppgaveteksten på flere av oppgavene slik at teksten bare inneholdt tull. Dette utdraget er også et eksempel på elever som bruker datamaskinen til andre aktiviteter enn det som var hensikten med undervisningen.

Det siste utdraget fra undervisningsøkt C viser en situasjon hvor en elev rekker opp hånda for å få hjelp av læreren:

Observasjonsnotat 19 (undervisnings økt C)

En elev rekker opp hånda for å få hjelp til å finne ut hvor mange prosent 15 gutter utgjør av en klasse med 27 elever. Læreren starter med å forklare og med å stille eleven spørsmål for å få henne/han til å forstå hvordan man løser oppgaven. Uten å fortelle eleven hva som skal gjøres klarte læreren å få eleven til å finne riktig løsning.

Utdraget viser et eksempel på hvordan læreren responderte når elevene trengte hjelp. Læreren ga ikke eleven løsningen og fortalte ikke eleven direkte hva som måtte gjøres for å komme frem til løsningen. Læreren stilte istedenfor spørsmål til eleven og prøvde å forklare konseptene til eleven. Dette var gjennomgående gjennom hele undervisningsøkten når elevene ba om hjelp. Oppgavene som ble brukt i undervisningsøkt C hadde ingen hjelpefunksjon og elevene rakk ofte opp hånda for å be læreren om hjelp.

6.0 Drøfting og konklusjon

Denne delen av oppgaven tar utgangspunkt i analysen som ble gjort i kapittel 4 og 5. Utdragene fra analysen vil bli drøftet og sett opp mot oppgavens teorigrunnlag for å kunne svare på forskningsspørsmålet. Kapittelet vil bestå av to deler hvor den første delen tar for seg hvilket kognitivt krav læreren la opp til i presentasjonen av oppgaven og hvilket kognitivt nivå elevene faktisk arbeidet på under arbeidet med oppgavene. Dette er for å svare på forskningsspørsmålets første del: *Hvordan endres det kognitive kravet til en digital matematikkoppgave underveis i undervisningen i tre ulike undervisningsøkter på ungdomstrinnet?* Den andre delen handler om hvilke faktorer som har vært med på å endre de kognitive kravene underveis i undervisningen. Her vil det også drøftes om de digitale aspektene ved oppgaven har vært en faktor som påvirket de kognitive kravene. Dette gjøres for å kunne si noe om siste del av forskningsspørsmålet: *Hvilke faktorer bidrar til denne endringen, og hvordan er påvirkningen fra oppgavenes digitale aspekt?*

6.1 Har det skjedd en endring av de kognitive kravene?

Oppgavenes kognitive krav slik oppgavene blir presentert opprinnelig (på oppgavearket og nettsiden) ble presentert i kapittel 4 og varierte mellom nivå 1, nivå 2 og nivå 4.

6.1.1 Fra den opprinnelige oppgaven til lærerens presentasjon

Undervisningsøkt A

Ut i fra analysen i kapittel 5.1 og observasjonsnotat 1, ser vi at læreren i undervisningsøkt A bruker de samme oppgavene som elevene skal arbeide med som sine eksempler i presentasjonen. Det betyr at elevene allerede er kjente med fremgangsmåter som kan brukes for å løse de videre oppgavene. Den første oppgaven læreren viser går ut på å gjengi en tidligere lært regel for hvordan man finner omkretsen til et kvadrat. Dette går under det Stein og Smith (1998) kaller for memorering og kjennetegner oppgaver med lave kognitive krav (nivå 1). Den neste oppgaven læreren presenterer er det Stein og Smith (1998) kaller for en algoritmisk oppgave, noe som kjennetegner oppgaver på nivå 2. Det vil si at elevene kun trenger å sette inn de oppgitte verdiene i en allerede gitt formel og deretter gjøre de nødvendige utregningene. Ved at læreren viser oppgaver som er like oppgavene som elevene skal arbeide med senere, og som krever samme fremgangsmåte, legger læreren opp til at det kognitive kravet for å løse oppgavene er lavt, da elevene vet hvilke fremgangsmåter som kan brukes for å løse oppgavene. Læreren stiller heller ingen krav til hvordan elevene skal arbeide med oppgavene, som fører til at læreren legger opp til det samme kognitive kravet som oppgavene hadde opprinnelig. Det er altså ingen forskjell mellom slik læreren presenterte oppgavene i undervisningsøkt A og slik de ble fremstilt opprinnelig. De kognitive kravene er fortsatt lave, henholdsvis nivå 1 og nivå 2.

Undervisningsøkt B

Observasjonsnotat 2 viser at læreren i undervisningsøkt B ikke viser et konkret eksempel på oppgaven som elevene skal arbeide videre med. Fokuset er ikke på å finne den korrekte løsningen, men på å forklare konseptene som ligger bak. Dette kjennetegner oppgaver med høye kognitive krav (Stein & Smith, 1998). Ved at selve oppgaven elevene skal arbeide med går ut på forklaringer, og at læreren ikke gir elevene deler eller hele forklaringen i presentasjonen, har ikke elevene noen kjent fremgangsmåte eller strategi de kan bruke i arbeidet med oppgaven. Elevene må dermed bruke tidligere kunnskap og se disse i sammenheng med hverandre for å kunne forklare konseptene, noe som kjennetegner oppgaver med høye kognitive krav (Stein & Smith, 1998). Læreren gjør også elevene klar over hva målet med timen er og stiller krav om at oppgavene skal diskuteres muntlig med sidemannen under arbeidet. Siden læreren ikke gir elevene gitte fremgangsmåter eksplisitt eller ved bruk av like eksempler, og stiller et krav om at elevene skal diskutere og forklare, legger læreren til rette for at elevene skal arbeide på det Stein og Smith (1998) karakteriserer som et kognitivt høyt nivå (nivå 4). Ved at læreren har opprettholdt det høye kognitive kravet i presentasjonen av oppgaven, har ikke kravet endret seg fra oppgavens opprinnelige fremstilling på oppgavearket.

Undervisningsøkt C

Læreren i undervisningsøkt C bruker ingen eksempeloppgaver i sin presentasjon av oppgavene, som observasjonsnotat 3 viser. Læreren presenterer oppgavene som repetisjonsoppgaver og øvingsoppgaver til en kommende prøve. Det betyr at elevene allerede skal være kjente med hvilke fremgangsmåter som kan brukes for å løse oppgavene. Siden læreren ikke viser eksempler eller presenterer oppgavene på noen annen måte, og ved at det ikke blir stilt noen krav til hvordan oppgavene skal arbeides med, har ikke lærerens presentasjon påvirket oppgavenes kognitive krav. Læreren legger derfor opp til at elevene skal arbeide på det kognitive nivået som oppgavene opprinnelig hadde, som i dette tilfellet var nivå 1 og nivå 2.

Oppgavenes kognitive krav har så langt ikke endret seg fra slik oppgavene ble fremstilt opprinnelig til hvordan lærerne presenterte oppgavene. De kognitive kravene forblir de samme i alle tre undervisningsøktene på tvers av de to fasene. Videre vil jeg utfra analysen i kapittel 5.2 drøfte hvilket kognitivt nivå elevene faktisk arbeidet på.

6.1.2 Fra lærerens presentasjon til elevarbeidet

Undervisningsøkt A

Analysen viser at undervisningsøkt A var preget av mye prøving og feiling og gjetting, som observasjonsnotat 4 og 6 viser. Vilkårlig gjetting for å finne en løsning kan ikke plasseres under noen av kategoriene for kognitive krav til Stein og Smith (1998). Ved å gjette gjør man ingen refleksjoner eller tanker rundt hva man avgir som svar, annet enn å avgi et svar som til en viss grad passer konteksten til oppgaven. Det kognitive kravet for å gjette mener jeg derfor er veldig lavt eller tilnærmet null. Prøving og feiling krever derimot at man gjør noen tanker rundt oppgaven og at man gjør noen refleksjoner rundt de ukorrekte svarene for å videre finne riktig svar. Det kognitive kravet vil fremdeles være lavt, men høyere enn ved gjetting. Disse strategiene ble ikke brukt av alle elevene, men ble observert brukt av flere av elevene. Det vil si at flere av elevene i undervisningsøkt A arbeidet på et veldig lavt kognitivt nivå under arbeidet med oppgavene.

En annen situasjon som oppsto ofte i undervisningsøkt A var bruken av hjelpefunksjonen i Kikora, som observasjonsnotat 5 og 6 viser. Denne hjelpefunksjonen ble brukt av nesten alle elevene i forskjellige grader, hvor noen brukte den for å få oppgitt hele løsningen, mens noen brukte funksjonen til å kun få oppgitt deler av løsningen. Ved å få oppgitt hele løsningen vil det kognitive kravet for å løse oppgaven være tilnærmet null, da man kun trenger å kopiere løsningen og lime den inn i svarfeltet. Observasjonsnotat 5 viser et eksempel hvor en elev får oppgitt deler av løsningen, hvor eleven kun trenger å legge sammen utrykkene for å finne riktig løsning. Selv om eleven ikke fikk oppgitt hele svaret bidrar den oppgitte løsningen til at eleven ikke trenger å komme frem til utrykket selv, som nesten er hele oppgaven. På grunn av at resten av løsningen kun krever symbolmanipulasjon vil det kognitive kravet for å løse oppgaven være lavt (Stein et al., 1996). Elevenes samarbeid i undervisningsøkt A bidrar også til at flere av elevene arbeider på et kognitivt nivå som er tilnærmet null, da elevene kun spurte medelevene om det riktige svaret. Et eksempel på dette ser vi i observasjonsnotat 7. Alt samarbeid som ble observert mellom elevene bestod av at elevene kun fikk oppgitt det korrekte svaret og ikke løsningsstrategien bak. Elevene i undervisningsøkt A ba om hjelp fra læreren kun én gang, og henviste seg nesten bare til oppgavens hjelpefunksjon og medelevene hvis de trengte hjelp. Dette gjorde at læreren ikke fikk muligheten til å forklare konseptene til elevene slik at de kunne forstå hvordan de kunne løse oppgaven. Istedenfor fikk elevene alltid oppgitt det korrekte svaret når de trengte hjelp, noe som gjør at det kognitive kravet for å løse oppgavene er veldig lavt.

Elevene i undervisningsøkt A var opptatte av å finne de korrekte løsningene på oppgavene og flere av elevene brukte fremgangsmåter som gjetting og prøving og feiling for å finne det riktige svaret. Når elevene trengte hjelp til å finne løsningen ble hjelpefunksjonen hyppig brukt og elevene fikk også oppgitt løsningene av medelevene. Selv om dette ikke gjaldt alle elevene var dette gjennomgående for flere under hele undervisningsøkten. På bakgrunn av dette mener jeg derfor at undervisningsøkt A var preget av elever som arbeidet på et kognitivt nivå som er veldig lavt. Selv om læreren la opp til at elevene skulle arbeide på et lavt kognitivt nivå, mener jeg at elevene arbeidet på et enda lavere nivå underveis i undervisningsøkt A. Det har dermed skjedd en endring ved oppgavenes kognitive krav fra lærerens presentasjon til elevarbeidet.

Undervisningsøkt B

Undervisningsøkt B var preget av samarbeid mellom elevene gjennom hele undervisningsøkten, som observasjonsnotat 9 og transkripsjon 1 viser. Elevene diskuterte og prøvde å forklare sammenhengen mellom likningene og de to grafene til hverandre, noe som kjennetegner arbeid på et kognitivt høyt nivå (Stein & Smith, 1998). Dette gjaldt alle elevene og ble gjort uavhengig om læreren var i nærheten eller ikke. Oppgavene var krevende og elevene spurte ofte læreren om hjelp. I følge Stein et al. (1996) er en av de vanligste årsakene til at det kognitive kravet til en oppgave reduseres at læreren reduserer oppgavens kompleksitet ved å gi elevene en eksplisitt fremgangsmåte eller steg å følge, eller at læreren gjør de utfordrende delene for elevene eller forteller dem hvordan de kan løse oppgaven. Observasjonsnotat 11 viser at læreren ikke reduserer det kognitive kravet til oppgaven ved at læreren stiller spørsmål til elevene istedenfor å gi dem den riktige løsningen. Læreren var ikke opptatt av at elevene skulle finne de riktige løsningene og forklaringene med engang, men at elevene skulle klare å se sammenhengene på egenhånd. Lærerens respons er dermed med på å opprettholde det høye kognitive kravet til oppgaven (Stein et al., 1996).

Selv om elevene arbeidet med å se sammenhengene mellom likning og graf, viser observasjonsnotat 12 at flere av elevene ikke klarte å se denne sammenhengen mot slutten av undervisningsøkten. Noen av elevene klarte å forklare grafene og likningen hver for seg, men så ingen sammenheng mellom dem. Likningen representerer ett matematisk objekt, mens grafen og funksjonsutrykket er representasjoner av et annet matematisk objekt. Det er altså ikke nok at elevene arbeider på tvers av ulike representasjoner som representerer det samme objektet (graf/funksjonsutrykk), elevene må også se sammenhenger på tvers av representasjoner som representerer ulike matematiske objekter (likning → graf/funksjonsuttrykk). Duval (2006) sier det er krevende for elever å gå mellom ulike representasjoner (conversion) som representerer det samme matematiske objektet, som i dette tilfellet er å gå mellom funksjonsuttrykket og grafen, det vil derfor være enda mer krevende for elevene å se sammenhengen mellom likningen og funksjonsuttrykket/grafen, da de ikke representerer det samme matematiske objektet. Selv om noen av elevene ikke nådde målet som ble satt av læreren før timen startet og ikke klarte å se denne sammenhengen, arbeidet elevene på et kognitivt høyt nivå. Fokuset til oppgaven var ikke på å finne det korrekte svaret til likningen, men på veien mot løsningen, med fokus på konseptene og sammenhengene, som kjennetegner oppgaver med høye kognitive krav (Stein & Smith, 1998).

Elevene i undervisningsøkt B samarbeidet under hele undervisningsøkten og læreren ga elevene som trengte hjelp en respons som ikke reduserte oppgavens kognitive krav. Observasjonsnotat 10 viser at to elever brukte datamaskinen til noe annet enn å løse oppgavene, men siden dette kun ble observert én gang mener jeg at dette ikke er noe som påvirket det kognitive kravet til flertallet av elevene. På bakgrunn av dette har jeg konkludert med at elevene arbeidet på et kognitivt høyt nivå gjennom hele undervisningsøkten og det kognitive kravet til oppgaven har dermed ikke endret seg fra lærerens presentasjon til elevarbeidet. Læreren la opp til at elevene skulle arbeide på det Stein og Smith (1998) karakteriserer som et høyt kognitivt nivå, noe elevene også gjorde underveis i elevarbeidet.

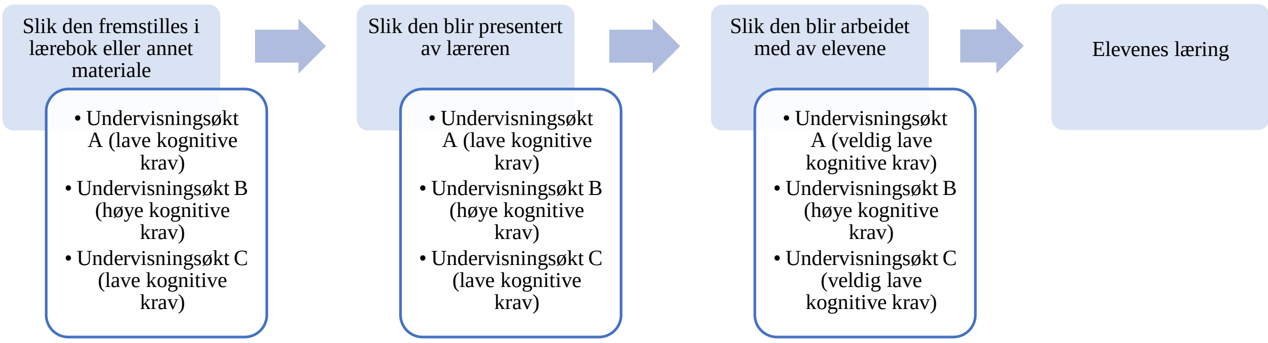
Undervisningsøkt C

Undervisningsøkt C, slik som undervisningsøkt A, var preget av mye prøving og feiling og gjetting, noe observasjonsnotat 13, 14 og 15 viser. Dette vil som nevnt under avsnittet om undervisningsøkt A, føre til at flere av elevene arbeidet på et veldig lavt kognitivt nivå under elevarbeidet. Elevene i undervisningsøkt C hadde derimot ikke tilgang til hjelpefunksjonen i Kikora og spurte læreren ofte om hjelp. Lærerens respons til elevene som trengte hjelp, som observasjonsnotat 19 viser, kan sammenlignes med lærerens respons i undervisningsøkt B. Læreren reduserte ikke oppgavens kompleksitet ved å gi elevene svaret eller deler av svaret, og opprettholdt dermed oppgavenes opprinnelige kognitive krav (Stein et al., 1996).

Det som kjennetegner undervisningsøkt C er elevenes bruk av datamaskinen. Flere av elevene brukte datamaskinen til andre ting enn å løse oppgavene og observasjonsnotat 16 viser et eksempel hvor halvparten av klassen så på et tv-program istedenfor å løse oppgavene som ble gitt. Siden dette gjaldt så mange elever og var gjennomgående gjennom hele undervisningsøkten mener jeg dette er med på å påvirke det kognitive nivået elevene arbeidet på. Ved å ikke løse oppgavene og ved å ikke gjøre matematikk i det hele tatt vil elevene arbeide på et kognitivt nivå som er tilnærmet null (med tanke på matematikk). Observasjonsnotat 17 og 18 viser flere elever som holder på med programmering fremfor å arbeide med de gitte oppgavene. Selv om programmering kan ha visse likhetstrekk med matematikk og kan være kognitivt krevende vil jeg også karakterisere dette som forstyrrende, da elevene gjorde andre ting enn det de hadde fått beskjed om.

På bakgrunn av at flere av elevene prøvde og feilet og gjettet seg frem til løsninger, og at en stor del av klassen brukte datamaskinen til andre ting enn matematikk, mener jeg at elevene arbeidet på et veldig lavt kognitivt nivå under elevarbeidet. Selv om læreren la opp til at elevene skulle arbeide på et kognitivt lavt nivå, mener jeg at elevene arbeidet på et lavere nivå enn det læreren la opp til. Det har dermed skjedd en endring i de kognitive kravene fra lærerens presentasjon til elevarbeidet.

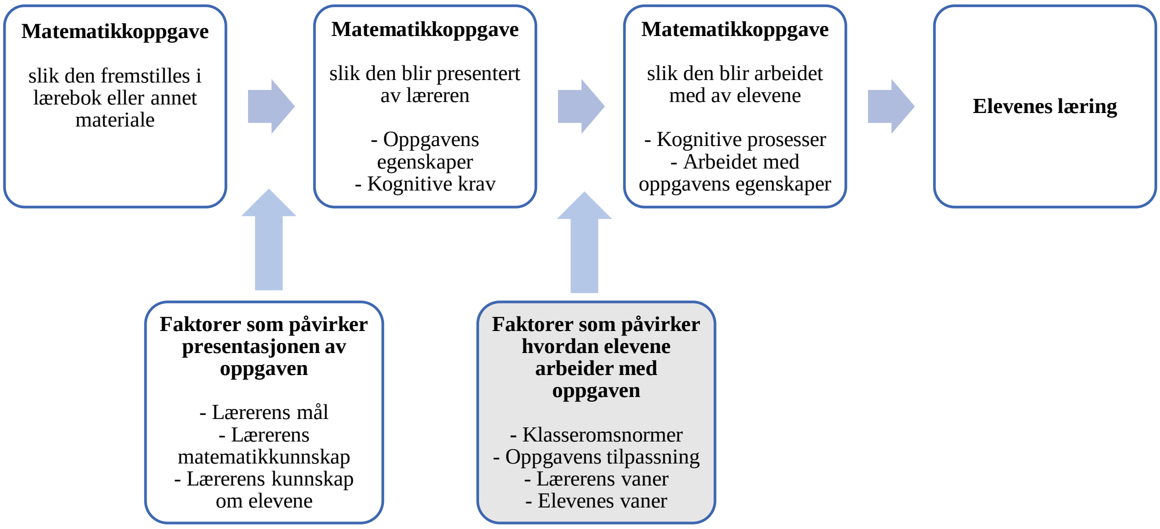
Det har altså skjedd en endring i de kognitive kravene i undervisningsøkt A og i undervisningsøkt C. Elevene arbeidet på et lavere kognitivt nivå under arbeidet med oppgavene enn hva læreren la opp til. Figur 9 viser en oversikt over hvordan de kognitive kravene i undervisningsøktene har endret seg på tvers av de tre fasene.



Figur 9: Oversikt over endringen av de kognitive kravene i de ulike undervisningsøktene.

6.2 Hvilke faktorer har påvirket de kognitive kravene?

I dette kapittelet vil jeg drøfte hvilke faktorer som har vært med på å endre de kognitive kravene til oppgavene som ble brukt i undervisningsøktene. Drøftingen tar utgangspunkt i figur 10 som er utarbeidet av Stein et al. (1996), hvor jeg vil fokusere på faktorene som kan ha påvirket hvordan elevene faktisk arbeidet med oppgavene.



Figur 10: Oversikt over matematikkoppgavenes tre faser og hvordan oppgavene kan bli påvirket. Hentet og oversatt fra Stein et al. (1996, s. 459).

I forrige kapittel kom jeg frem til at det ikke hadde skjedd en endring ved oppgavens kognitive krav i undervisningsøkt B. Siden det ikke forekom en endring vil ikke denne undervisningsøkten bli diskutert videre.

Oppgavens tilpasning handler om i hvilken grad oppgavene er tilpasset nivået til den aktuelle elevgruppen og om tiden for å løse oppgavene er passende (Stein et al., 1996). I kapittel 4 konkluderte jeg at elevene på ungdomstrinnet har forutsetningene og den matematiske kunnskapen som skal til for å løse oppgavene som ble brukt i undervisningsøktene. Tiden elevene fikk til å løse oppgavene har også vært tilstrekkelig, spesielt i undervisningsøkt A og undervisningsøkt C, hvor elevene arbeidet med et større antall oppgaver som ikke er spesielt tidskrevende. Tidligere forskning av Stein et al. (1996) og Henningsen og Stein (1997) viser at oppgavens tilpasning er en av faktorene som påvirker oppgavenes kognitive krav i størst grad. I denne undersøkelsen mener jeg at dette ikke har vært en faktor som har påvirket hvordan elevene arbeidet med oppgavene, da oppgavenes tilpasning har vært passende for de aktuelle elevgruppene.

Som figur 10 viser kan lærerens vaner være en faktor som påvirker undervisningen. Lærerens vaner tar for seg hvilken type respons lærerne gir til elevene som trenger hjelp og hvor lenge lærerne lar elevene arbeide med en oppgave før de får hjelp, og er den faktoren som påvirker de kognitive kravene i aller størst grad (Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 1996). Funnene i denne undersøkelsen viser at lærerne ikke gir elevene det riktige svaret og gir dem heller ikke en gitt fremgangsmåte for å løse oppgaven under elevarbeidet. Lærerens vaner har i denne undersøkelsen dermed ikke vært en faktor som har påvirket oppgavenes kognitive krav, da lærerne ga en respons til elevene som ikke gjorde oppgavene enklere for elevene.

Ut ifra analysene i kapittel 5.2 mener jeg at jaget etter den korrekte løsningen, ved å få oppgitt løsningene fra medelever og hjelpefunksjonen i Kikora, og ved å anvende fremgangsmåter som gjetting og prøving og feiling har vært med og bidratt til at elevene arbeidet på et veldig lavt kognitivt nivå i undervisningsøkt A og undervisningsøkt C. Dette velger jeg med hensyn til figur 10 å karakterisere som klasseromsnormer og elevenes vaner, som handler om de etablerte forventningene til elevene om hvordan skolearbeid skal gjøres og hvor tålmodige elevene er i arbeidet med oppgavene (Stein et al., 1996).

Elevenes samarbeid og bruk av hjelpefunksjonen.

Samarbeidet mellom elevene i undervisningsøkt A skiller seg tydelig fra de andre undervisningsøktene ved at elevene kun var opptatt av den riktige løsningen. Siden dette kun forekom i en av undervisningsøktene sier det noe om at normene som er etablerte i klasserommet og elevenes vaner kan ha stor påvirkning på hvordan elevene samarbeider, og dermed hvilket kognitivt nivå elevene arbeider på. I undervisningsøkt A hadde elevene i tillegg tilgang til hjelpefunksjonen i Kikora som kan være en av årsakene til at læreren kun ble brukt som hjelp én gang. Elevene hadde tilgang til alle de korrekte løsningene enten ved hjelp av medelevene eller ved hjelp av hjelpefunksjonen, som førte til at det ikke var nødvendig med hjelp fra læreren. På bakgrunn av dette mener jeg at hjelpefunksjonen i Kikora og mangelen på normer for hvordan elevene skal samarbeide, og hvordan hjelpefunksjonen skal brukes, har bidratt til at det kognitive nivået elevene arbeidet på ble redusert under elevarbeidet i undervisningsøkt A, både ved at hjelpefunksjonen i seg selv reduserte det kognitive kravet ved å oppgi løsningen og ved at hjelpefunksjonen gjorde at læreren ikke lengre var en nødvendighet. Læreren fikk dermed ikke muligheten til hjelpe elevene med tilbakemeldinger som kan tilpasse oppgaven slik at elevene kunne løst oppgaven på egenhånd, noe som også kan omtales som stillasbygging.

Den umiddelbare tilbakemeldingen.

En annen faktor jeg mener kan ha påvirket oppgavenes kognitive krav er elevenes fremgangsmåter som ble brukt i både undervisningsøkt A og undervisningsøkt C. Det som gjør at disse fremgangsmåtene er mulig å gjennomføre for elevene mener jeg er den umiddelbare tilbakemeldingen fra Kikora. Ved at elevene kontinuerlig får tilbakemelding på om den oppgitte løsningen er korrekt eller ikke, kan elevene utnytte dette ved å bruke fremgangsmåter som gjetting og prøving og feiling, noe som ikke ville vært mulig med tradisjonelle verktøy. Tilbakemeldingene elevene får fra Kikora er det Sacristán et al. (2010) kaller for en upersonlig tilbakemelding (non-judgemental). Det vil si at elevene kun får oppgitt om løsningen er korrekt eller ikke, og ved å utnytte denne tilbakemeldingen slipper elevene å få tilbakemelding fra læreren, som vil være preget av en mer nær og relasjonsrelatert tilbakemelding. Elevene i denne undersøkelsen (spesielt undervisningsøkt A) så ut til å foretrekke den upersonlige tilbakemeldingen fremfor lærerens tilbakemelding. På bakgrunn av dette mener jeg at det digitale aspektet, umiddelbar tilbakemelding, har vært en faktor som har redusert det kognitive nivået elevene arbeidet på i undervisningsøkt A og i undervisningsøkt C. Det betyr ikke at den umiddelbare tilbakemeldingen er et negativt digitalt aspekt, men at det Stein et al. (1996) kaller for klasseromsnormer, som er forventningene til hvordan elevene skal arbeide med matematikkoppgavene må være kjente og tydelige for elevene slik at den umiddelbare tilbakemeldingen ikke blir utnyttet.

Elevenes bruk av datamaskinen.

En annen faktor jeg mener har påvirket de kognitive kravene i denne undersøkelsen er det digitale verktøyet i seg selv (datamaskinen), som kom veldig tydelig frem i undervisningsøkt C, hvor elevene brukte datamaskinen til å gjøre andre ting enn matematikk. Dette går også under det Stein et al. (1996) kaller for klasseromsnormer. Datamaskinen kan være forstyrrende og gir elevene muligheter til å utføre andre aktiviteter istedenfor matematikk, noe som vil påvirke det kognitive nivået elevene arbeider på. Dette er noe elevene også kan gjøre i undervisningssituasjoner hvor de ikke har tilgang til datamaskiner, men andre aktiviteter er enklere å skjule når man sitter bak en datamaskin. For at læreren i det hele tatt kan avgjøre om eleven gjør det de skal må læreren gjøre en grundig sjekk på elevenes datamaskin, da elevene er flinke til å skjule for eksempel andre internettvinduer på datamaskinen. Hvis vi ser dette i sammenheng med hvordan elevene konstant slettet arbeidet sitt underveis, vil det være krevende for en lærer å få et innblikk i hva elevene har gjort i løpet av undervisningsøkten. Siden denne bruken av datamaskinen kun forekom i undervisningsøkt C er det tydelig at dette handler om klasseromsnormer og kan dermed forebygges med klare forventninger og krav til elevene.

6.3 Konklusjon

Funnene fra analysen og drøftingen viser at de kognitive kravene til oppgavene har blitt redusert betydelig underveis i to av undervisningsøktene, henholdsvis undervisningsøkt A og undervisningsøkt C. Tidligere forskning av Stein et al. (1996) og Henningsen og Stein (1997) viser at det er oppgavens tilpasning og lærerens respons til elever som trenger hjelp som har vært de faktorene som har påvirket det kognitive kravet til oppgavene i aller størst grad. Funnene i analysen og drøftingen viser derimot at dette ikke er tilfellet i undervisningsøktene som har blir observert i denne undersøkelsen. Lærerens respons til elever som trenger hjelp har på tvers av alle undervisningsøkene bidratt til å opprettholde de kognitive kravene til oppgavene. Resultatene i denne undersøkelsen viser at bruken av datamaskiner i seg selv og den umiddelbare tilbakemeldingen som de digitale matematikkoppgavene tilbyr, har vært faktorer som har vært med og bidratt til at de kognitive kravene har blitt redusert. Bruken av datamaskiner og den umiddelbare responsen har ført til at elevene bruker fremgangsmåter for å løse matematikkoppgavene som er lite kognitivt krevende og at flere av elevene bruker datamaskinen til å gjøre andre aktiviteter enn matematikk.

Ved å bruke digitale matematikkoppgaver på riktig måte i undervisningen kan man bidra til at elevene øker sin matematiske tekning og forståelse (Sacristán et al., 2010). Funnene i denne undersøkelsen viser derimot at digitale verktøy som ikke blir brukt på riktig måte kan føre til en nedgang i de kognitive kravene. Normene og de etablerte forventningene til elevene om hvordan skolearbeid skal gjøres, hvem det skal gjøres av og med hvilken kvalitet arbeidet skal gjennomføres, viser seg å være viktige faktorer for hvordan datamaskinen og de digitale verktøyene tas i bruk av elevene. Det kan dermed se ut til at de etablerte normene i klasserommet kan være en viktig del av elevenes læring i møte med digitale matematikkoppgaver. De digitale verktøyene bringer nye sider til undervisningen som kan misbrukes av elevene og dermed føre til at elevene arbeider på et lavere kognitivt nivå enn det som er planlagt av læreren. Klare forventninger og krav om hvordan de digitale verktøyene skal brukes av elevene ser dermed ut til å være en nødvendighet.

Ved bruk av digitale matematikkoppgaver i undervisningen er det viktig at læreren har god nok kompetanse og kunnskap om de digitale verktøyene som tas i bruk. Læreren må vite hvordan verktøyet på best mulig måte kan bidra til elevenes læring, og lærerne må være klar over hvordan de digitale aspektene ved matematikkoppgavene kan påvirke hvordan elevene arbeider med oppgavene. I denne undersøkelsen kan det se ut til at lærerne i undervisningsøkt A og undervisningsøkt C ikke var klar over hvordan de digitale verktøyene kunne bli brukt av elevene, og som dermed kan ha ført til at elevene som arbeidet med de digitale matematikkoppgavene, arbeidet på et lavere kognitivt nivå enn forventet. Ukritisk bruk av digitale matematikkoppgaver kan dermed gjøre det utfordrende å gjennomføre en undervisning som samsvarer med Utdanningsdirektoratets formål for matematikkfaget i skolen.

7.0 Veien videre

7.1 Oppgavens bidrag til forskningsfeltet og videre forskning

Dette prosjektet har tatt utgangspunkt i tidligere forskning på matematikkoppgavenes kognitive krav og hvordan undervisningen kan påvirke de kognitive kravene (Henningsen & Stein, 1997; Smith & Stein, 1998; Stein et al., 1996; Stein & Smith, 1998). Funnene i denne undersøkelsen støtter resultatene i den tidligere forskningen ved at de kognitive kravene til matematikkoppgavene har endret seg i løpet av undervisningen. Faktorene som har påvirket de kognitive kravene ser derimot ut til å være forskjellige. Formålet med dette forskningsprosjektet var å undersøke om de digitale aspektene ved en digital matematikkoppgave kan være en faktor som kan påvirke de kognitive kravene, som gjør at dette forskningsprosjektet skiller seg fra den tidligere forskningen. På den måten har denne undersøkelsen basert seg på tidligere forskning, samtidig som de nye funnene kan bidra til å gi et større bilde av hvilken påvirkning undervisningen har på de kognitive kravene til en matematikkoppgave. Denne undersøkelsen er kvalitativ og har dermed blitt påvirket av meg som forsker. Det vil si at resultatene kun gjelder for denne undersøkelsen. Resultatene kan derimot bidra til å belyse at det kan være flere faktorer i arbeidet med digitale verktøy som kan påvirke elevenes læring, og som vil være interessante å undersøke. Videre forskning på området vil derfor være interessant, da jeg mener påvirkningen av de kognitive kravene ser ut til å være en viktig del av undervisningen, som lærere bør ta i betraktning i arbeidet med elevenes læring.

Videre kunne det vært interessant å undersøke lærernes didaktiske valg i planleggingsfasen og underveis i matematikkundervisning hvor det brukes digitale verktøy. Selv om noen digitale verktøy gir elevene hjelp og/eller løsningen til matematikkoppgavene som elevene arbeider med, er læreren fortsatt en av de viktigste faktorene for elevenes læring. Denne undersøkelsen viser at ukritisk bruk av digitale matematikkoppgaver kan være problematisk i møte med elevenes læring, da det ser ut til at de digitale verktøyene kan brukes mot sin hensikt. Lærerens refleksjoner og tanker rundt bruk av digitale verktøy vil derfor være interessant å undersøke. Dette kan blant annet sees i sammenheng med tidligere forskning av Mishra og Koehler (2006) som utviklet et rammeverk de kaller for TPCK (technological pedagogical content knowledge). Rammeverket tar for seg en spesiell type kunnskap som lærere må ha for å utføre god undervisning med digitale verktøy, som jeg mener kan være både aktuelt og interessant med tanke på lærere i den norske skolen.

7.2 Veien videre som fremtidig lærer

Gjennom dette forskningsprosjektet har jeg fått bedre innsikt i hvor viktig det er med forskning på elevers arbeid med matematikk. Ved å observere ulike lærere og hvordan elever arbeider med digitale matematikkoppgaver, har jeg blant annet blitt mer bevisst på hvor viktig det er med en tett oppfølging av elevene under elevarbeidet. Jeg har også sett viktigheten av god planlegging i forkant av en undervisningsøkt, hvor man bør reflektere og tenkte over hvordan man på best mulig måte kan bruke digitale verktøy i undervisningen. Ved å støtte min forskning til Stein og Smith (1998) og Stein et al. (1996) sine undersøkelser rundt matematikkoppgavenes kognitive krav, har jeg blitt mer bevisst på viktigheten av gode matematikkoppgaver i undervisningen. Jeg har også innsett at det ikke er nok med gode oppgaver, men at jeg som fremtidig lærer må være bevisst på valgene jeg tar underveis i undervisningsøktene for å opprettholde at elevene arbeider på et kognitivt høyt nivå.

Etter å ha arbeidet med denne undersøkelsen er jeg blitt tryggere med tanke på å bruke digitale matematikkoppgaver i undervisningen, samt motivert til å videreformidle denne kunnskapen til fremtidige kollegaer.

Litteraturliste:

Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (1998). Analysing the Costs and Benefits of Multi-Representational Learning Enviroments. I M. W. v. Someren (Red.), *Learning with Multiple Representations* (s. 120-135). Amsterdam: Pergamon Press.

Boaler, J., & Staples, M. (2008). Creating Mathematical Futures through an Equitable Teaching Approach: The Case of Railside School. *Teachers College Record*, *110*(3), 608-645.

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K., & Bell, R. C. (2011). *Research methods in education* (7. utg.). London: Routledge.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry & research design : choosing among five approaches* (2. utg.). Thousand Oaks, Calif: Sage.

Dalland, O. (2012). *Metode og oppgaveskriving for studenter* (5. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. *ZDM*, *48*(4), 411-423. doi: 10.1007/s11858-016-0770-3

Gold, R. (1958). Roles in sociological field observations. *Social forces*, *36*(3), 217-223.

Goldenberg, P. (2000). Thinking (And Talking) About Technology in Math Classrooms. *Issues in Mathematics Education, The K-12 Mathematics Curriculum Center, Education Development Center, Inc., 1-8*.

Harris, J., Hofer, M., Blanchard, M., Grandgenett, N., Schmidt, D., van Olphen, M., & Young, C. (2010). "Grounded" Technology Integration: Instructional Planning Using Curriculum-Based Activity Type Taxonomies. *Journal of Technology and Teacher Education*, *18*(4), 573-605.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524-549.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. I D. Grouws (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 515-556): Information Age Publishing.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054. doi: 10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier : den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforl.

Nortvedt, G. A., & Pettersen, A. (2016). Matematikk. I M. Kjærnsli & F. Jensen (Red.), *Stø kurs. Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015* (s. 107-135). Oslo: Universitetsforlaget.

Olsen, R. V. (2013). Undervisning i matematikk. I M. Kjærnsli & R. V. Olsen (Red.), *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012* (s. 121-155). Oslo: Universitetsforlaget.

Papert, S. (1980). *Mindstorms : children, computers, and powerful ideas*. New York: Basic Books.

Pea, R. D. (1985). Beyond Amplification: Using the computer to Reorganize Mental Functioning. *Educational Psychologist, 20*(4), 167-182. doi: 10.1207/s15326985ep2004_2

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk : innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforl.

Sacristán, A. I., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., . . . Perrusquía, E. (2010). The Influence and Shaping of Digital Technologies on the Learning – and Learning Trajectories – of Mathematical Concepts. I C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Red.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain: The 17th ICMI Study* (s. 179-226). Boston, MA: Springer US.

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88-95.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research To Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455-488.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research To Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Suh, J. M., Johnston, C. J., & Douds, J. (2008). Enhancing Mathematical Learning in a Technology-Rich Environment. *Teaching Children Mathematics, 15*(4), 235-241.

Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2009). Converting Mathematics Tasks to Learning Opportunities: An Important Aspect of Knowledge for Mathematics Teaching. *Mathematics Education Research Journal, 21*(1), 85-105. doi: 10.1007/BF03217539

Tjora, A. H. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (2. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2013a). *Læreplan i matematikk fellesfag. Formål*. (LK06). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Formaal

Utdanningsdirektoratet. (2013b). *Kompetansemål etter 10. årssteget*. (LK06). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-10.-arssteget

Utdanningsdirektoratet. (2013c). *Kompetansemål etter 7. årssteget*. (LK06). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-7.-arssteget

Utdanningsdirektoratet. (2015). *Revidert eksamensordning i matematikk*. (LK06). Hentet fra https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/eksamensordning-skriftlig-eksamen-i-matematikk/

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2015). *Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally* (9. utg.). Essex, England: Pearson Education Limited.

van der Meij, J., & de Jong, T. (2004). *Learning with multiple representations.* Paper presentert på Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Vedlegg 1: Informasjon og samtykkeskjema

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjekt

DIGITALE MATEMATIKKOPGAVER I SKOLEN

Bakgrunn og formål
Som lærer- og masterstudent ved NTNU skal jeg gjennomføre et forskningsprosjekt som omhandler bruk av digitale oppgaver i matematikkfaget. Prosjektet skal kartlegge hvilke oppgaver som tas i bruk og hvordan de blir gjennomført i undervisningen.

Hva innebærer deltakelse i studien?
En viktig del av prosjektet vil være å undersøke hvordan de digitale oppgavene blir tatt i bruk i undervisningen. For å finne ut av dette vil jeg som student observere enkelte undervisningsøkter. Observasjonen innebærer at det blir tatt notater om hva som foregår i undervisningen, samt lydopptak. Lydopptaket vil være av faglige diskusjoner og vil ikke inneholde noen form for personlige opplysninger.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Det samles ikke inn personlige opplysninger utover klassetrinn. Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Tilgang til datamaterialet som samles inn vil kun være tilgjengelig for meg og min veileder. Data som publiseres vil være anonymisert og vil ikke kunne knyttes til enkeltdeltakere.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 16.05.2017. Alle data vil bli fullstendig anonymisert og lydopptakene vil bli slettet ved prosjektslutt.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med student Patrik Hunnålvatn Tangen, patrik.hunnaalvatn@live.com, tlf 99576616, eller min veileder, førsteamanuensis Hermund Andre Torkildsen, hermund.a.torkildsen@ntnu.no, tlf 73412778

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i prosjektet

Forelders/ foresattes samtykkeskjema

Jeg bekrefter at jeg har lest informasjonsarket og samtykker i at mitt barn deltar i aktiviteter knyttet til forskningsprosjektet om digitale matematikkoppgaver.

Barns navn/klasse:____

Jeg samtykker i at:

- ☐ Det kan bli gjort lydopptak av mitt barn under faglige diskusjoner. Anonymiserte sitater fra barnet, der barnet ikke skal nevnes med navn eller identifiseres, kan brukes i publikasjonen av prosjektet.

Sted og dato:____

Forelders/ foresattes underskrift: ____

Vedlegg 2: Matematikkoppgave 3

Geogebra og likninger

Navn:_______________

<u>Vi skal løse likningene i oppg. 3.6 i Grunntall10 ved å bruke Geogebra</u>

Oppg 3.6 a):

- ☐ Skriv inn 2x+5 i skrivefeltet. Hva viser kurven som kommer fram? Diskuter med sidemannen.

  Svar:____

  (Hjelpespørsmål: Hvilken y-verdi får vi hvis vi setter inn x=0 i uttrykket? Hvis vi setter inn x=1, x=2, x=3?)

- ☐ Skriv inn den andre siden av likningen, altså x+6, i skrivefeltet.

- ☐ Legg inn skjæringspunktet mellom de to kurvene. Hva representerer skjæringspunktet? Diskuter med sidemannen.

  ____

  (Hjelpespørsmål: Hva viser koordinatene til dette punktet? Hva viser x-verdien? Hva viser y-verdien?)

- ☐ Løs resten av oppgavene 3.6 b), 3.6 c) og 3.6 d) på samme måte.

Hva viser x-verdien i en slik grafisk løsning?____

Hva viser y-verdien i en slik grafisk løsning?____

Hva bruker du x-verdien til når du skal løse en likning?__________________________________

Hva bruker du y-verdien til når du skal løse en likning?__________________________________

Hva bruker du x-verdien til når du skal sette prøve på en løsning?__________________________

Hva bruker du y-verdien til når du skal sette prøve på en løsning?__________________________