Sammendrag

I denne oppgaven studerer vi Cartanmatriser, additive og subadditive funksjoner og translasjonsquivre. Spesielt vil vi se hvordan additive og subadditive funksjoner er definert både for Cartanmatriser og for translasjonsquivre, og hvordan disse funksjonene gir restriksjoner for Cartanklassen til et stabilt valuert sammenhengende translasjonsquiver som inneholder et periodisk hjørne. Videre vil vi bruke denne informasjonen til å bevise at Cartanklassen til en komponent i det stabile Auslander-Reiten-quiveret over en Artinsk algebra som inneholder periodiske moduler er enten et Dynkindiagram eller A_∞.

Summary

In this thesis we study Cartan matrices, additive and subadditive functions and translation quivers. In particular, we will show how additive and subadditive functions are defined for both Cartan matrices and translation quivers, and how these functions restricts the Cartan class of a stable valued connected translation quiver containing a periodic vertex. We will then use this information to prove that the Cartan class of a component of the stable Auslander-Reiten quiver over an Artin algebra containing periodic modules is either a Dynkin diagram or A_∞.

Forord

Denne oppgaven markerer slutten på min tid som student ved Lektorutdanningen i realfag på NTNU.

Først og fremst vil jeg rette en stor takk til professor Øyvind Solberg for hjelp med å velge et spennende og interessant tema til oppgaven, og for veldig god veiledning underveis. Jeg er imponert over din tålmodighet og din evne til å gi gode forklaringer når det er ting jeg ikke har forstått.

Jeg vil også takke gode venner på Matteland for hjelp med å holde holde humøret oppe underveis i prosessen.

Til slutt vil jeg takke mamma og pappa for god oppfølging i oppveksten. Uten dere er det ikke sikkert jeg hadde kommet så langt som jeg har kommet.

Sigurd G. Lyngroth
Trondheim, 27.11.16

Innhold

Innledning

Hovedmålet med denne oppgaven er å bevise at Cartanklassen til en komponent i det stabile Auslander-Reiten-quiveret over en Artinsk algebra som inneholder periodiske moduler enten er et Dynkindiagram eller A_∞.

Det forventes at leseren er kjent med grunnleggende egenskaper ved ringer og moduler, tilsvarende faget MA3201 Ringer og moduler på NTNU. Det vil si at leseren må ha vært borti temaer som homomorfier, direktesummer, eksakte sekvenser, Noeterske og Artinske ringer og moduler, Wedderburn-Artin-teoremet, komposisjonsrekker og Jordan-Hölder-teoremet.

De tre første kapitlene i oppgaven har som mål å gi en grunnleggende forståelse av henholdsvis moduler, quivre og Dynkindiagrammer. Her presenteres teori som vil bli brukt i de to siste kapitlene.

Kapittel 4 vil gi en innføring i nesten splitte eksakte sekvenser og hvordan disse kan brukes til å konstruere Auslander-Reiten-quivre. Vi vil også se på konkrete eksempler der vi konstruerer slike.

I kapittel 5 vil vi starte med å se på flere egenskaper ved translasjonsquivre, før vi til slutt ser hvordan additive og subadditive funksjoner for translasjonsquiveret gir begrensninger for Cartanklassen til et stabilt valuert sammenhengende translasjonsquiver som inneholder et periodisk hjørne. Vi vil så anvende dette på en komponent i det stabile Auslander-Reiten-quiveret over en Artinsk algebra som inneholder periodiske moduler.

En kort innføring i kategorier og funktorer finnes i Tillegg A. Hvis leseren ikke har vært borti kategorier og funktorer tidligere, anbefales det å lese Tillegg A før resten av oppgaven leses.

Kapittel 1

Moduler

I dette kapittelet beskriver vi grunnleggende egenskaper ved moduler. Vi starter med å se på radikalet til en modul og til en algebra, før vi fortsetter med å se på idempotenter, ikke-dekomponerbare moduler og projektive og injektive moduler.

Gjennom hele dette kapittelet vil K være en algebraisk lukket kropp og A en K-algebra hvis ikke noe annet er oppgitt.

1.1 Radikal, idempotenter og ikke-dekomponerbare moduler

Vi innleder denne delen med å beskrive noen grunnleggende morfier for moduler. Tidligere har vi sett homomorfier og isomorfier. Vi vil nå definere monomorfi, epimorfi, isomorfi, endomorfi og automorfi. Disse vil gå igjen gjennom hele oppgaven.

Definisjon 1.1.1. La M og N være moduler i $\operatorname{Mod} A$, og $h\colon M \longrightarrow N$ og $g : M \longrightarrow M$ to A-modulhomomorfier.

(a) La $h\colon M \longrightarrow N$ være en A-modulhomomorfi. Vi sier at h er en **monomorfi** (eller **epimorfi**) hvis den er injektiv (eller surjektiv). Dersom h både er en monomorfi og en epimorfi, er h en **isomorfi**.

(b) La $g\colon M \longrightarrow M$ være en A-modulhomomorfi. Vi sier at g er en **endomorfi**. Dersom g er en isomorf avbildning fra M til M, sier vi at g er en **automorfi**.

Vi forsetter med å se på radikalet til en algebra og radikalet til en modul.

Definisjon 1.1.2. La A være en K-algebra. **Radikalet til en algebra** $\operatorname{rad} A$ er snittet av alle de maksimale høyre idealene i A.

Vi lar $\underline{r} = \operatorname{rad} A$ betegne radikalet til A.

Definisjon 1.1.3. La M være en modul i $\operatorname{Mod} A$. **Radikalet til en modul** $\operatorname{rad} M$ er snittet av alle de maksimale undermodulene til M.

Den neste proposisjonen viser nyttige sammenhenger mellom radikalet til en algebra og radikalet til en modul.

Proposisjon 1.1.4. *Anta at L, M og N er moduler i* $\operatorname{mod} A$.

(a) *Et element $m \in M$ tilhører* $\operatorname{rad} M$ *hvis og bare hvis $f(m) = 0$ for hvilken som helst $f \in \operatorname{Hom}_A(M, S)$ og hvilken som helst simpel modul S.*

(b) $\operatorname{rad}(M \oplus N) = \operatorname{rad} M \oplus \operatorname{rad} N$.

(c) *Hvis $f \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$, så er $f(\operatorname{rad} M) \subseteq \operatorname{rad} N$.*

(d) $M \operatorname{rad} A = \operatorname{rad} M$.

(e) *Anta at L og M er A-undermoduler av N. Hvis $L \subseteq \operatorname{rad} N$ og $L + M = N$, så er $M = N$.*

Bevis. Vi ser på hvert punkt for seg.

(a) Følger direkte fra definisjonen, siden $L \subseteq M$ er en maksimal undermodul hvis og bare hvis M/L er simpel.

(b) Følger direkte fra (a).

(c) Følger direkte fra (a).

(d) Vi viser dette ved først å vise at $M \operatorname{rad} A \subseteq \operatorname{rad} M$ og deretter at $\operatorname{rad} M \subseteq M \operatorname{rad} A$. La $m \in M$ og definer en homomorfi $f_m \colon A \longrightarrow M$ av høyre A-moduler ved formelen $f_m(a) = ma$ for $a \in A$. Det følger fra (c) at for $a \in \operatorname{rad} A$ får vi

$$ma = f_m(a) \in f_m(\operatorname{rad} A) \subseteq \operatorname{rad} M,$$

og derfor er $M \operatorname{rad} A \subseteq \operatorname{rad} M$.

For å vise inklusjonen $\operatorname{rad} M \subseteq M \operatorname{rad} A$ merker vi oss først at $(M/M \operatorname{rad} A) \operatorname{rad} A = 0$. Det følger at A-modulen $M/M \operatorname{rad} A$ er en modul over algebraen $A/\operatorname{rad} A$ med respekt på virkningen

$$(m + M \operatorname{rad} A) \cdot (a + \operatorname{rad} A) = ma + M \operatorname{rad} A.$$

Det følger fra Wedderburn-Artin-teoremet at algebraen $A/\operatorname{rad} A$ er semisimpel og at den endeligdimensjonale $A/\operatorname{rad} A$-modulen $M/M \operatorname{rad} A$ er en direktesum av simple moduler. Siden radikalet til hvilken som helst simpel modul er null, følger det fra (b) at $\operatorname{rad}(M/M \operatorname{rad} A) = 0$. Ved (c) vet vi at den kanoniske A-modulepimorfien $\pi \colon M \longrightarrow M/M \operatorname{rad} A$ sender $\operatorname{rad} M$ til null, det vil si at

$$\operatorname{rad} M \subseteq \operatorname{Ker} \pi = M \operatorname{rad} A,$$

og vi er ferdige.

(e) Anta at $L \subseteq \operatorname{rad} N$ og $L + M = N$, og at dette gir $M \neq N$. Siden N er endeligdimensjonal, er M en undermodul av en maksimal undermodul $X \neq N$ til N. Det følger at $L \subseteq \operatorname{rad} N \subseteq X$ og vi får

$$N = L + M \subseteq X + M = X,$$

som strider mot antagelsen vår.

□

Senere vil radikalet bli mye brukt i ulike resultater og beviser. En modul M og radikalet til M bestemmer sammen toppen til M.

Definisjon 1.1.5. La M være en modul. Modulen

$$\operatorname{top} M = M/\operatorname{rad} M$$

kalles **toppen** til M.

Vi vet at komposisjonsrekka til en endeliggenerert modul er entydig bestemt. Den neste definisjonen viser hvordan vi bruker dette til å definere lengden til en modul.

Definisjon 1.1.6. La M være en modul i $\operatorname{mod} A$ og S en simpel A-modul. La videre $\mathcal{F}$ være en komposisjonsrekke for M. Vi definerer

$$m_s^{\mathcal{F}}(M) = |\{i \mid M_i/M_{i+1} \cong S\}|$$

og

$$l(M) = \sum_{[S]} m_S^{\mathcal{F}}(M).$$

Vi kaller $l(M)$ for **lengden til** M.

Siden komposisjonsrekka til M er entydig bestemt, er også lengden til M entydig bestemt. Vi ønsker nå å gå nærmere inn på dekomponeringen av moduler. Vi starter med å definere ikke-dekomponerbare moduler.

Definisjon 1.1.7. La $M \neq (0)$ være en modul i $\operatorname{Mod} A$. Modulen M kalles **ikke-dekomponerbar** hvis

$$M = M_1 \oplus M_2$$

impliserer at $M_1 = (0)$ eller $M_2 = (0)$.

Senere vil vi se metoder for å finne ulike typer ikke-dekomponerbare moduler. Vi vil også se på Auslander-Reiten-quivre, der hjørnene er ikke-dekomponerbare moduler og pilene er spesielle homomorfier mellom disse. Før vi går videre med moduler må vi se på en spesiell type elementer i A.

Definisjon 1.1.8. Et element $e \in A$ kalles en **idempotent** hvis $e^2 = e$. Hvis vi har to idempotenter $e_1, e_2 \in A$, sier vi at e_1 og e_2 er **ortogonale** dersom $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. En idempotent kalles **primitiv** dersom den ikke kan skrives som en sum $e = e_1 + e_2$, hvor e_1 og e_2 er ikke-null ortogonale idempotetenter i A.

Siden A er en endeligdimensjonal algebra, kan modulen M_A dekomponeres i en direktesum av ikke-dekomponerbare maksimale idealer (se [1, side 18]). Vi får

$$M_A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n,$$

der P_i er er ikke-dekomponerbare høyre idealer for $i = 1, \ldots, n$. Ved å bruke idempotenter i A, ser vi at $P_1 = e_1A, \ldots, P_n = e_nA$, hvor $e_1, \ldots, e_n$ er primitive, parvis ortogonale idempotenter i A, slik at $1 = e_1 + \cdots + e_n$.

Definisjon 1.1.9. En mengde idempotenter som beskrevet over kalles en **fullstendig mengde** av primitive ortogonale idempotenter i A.

En fullstendig mengde av primitive ortogonale idempotenter gir opphav til en spesiell type algebra.

Definisjon 1.1.10. Anta at A er en K-algebra med en fullstendig mengde av primitive ortogonale idempotenter. Algebraen A kalles **basisk** hvis $e_i A \ncong e_j A$ for alle $i \neq j$.

Den neste proposisjonen viser noen sammenhenger vi vil ha bruk for senere.

Proposisjon 1.1.11. *La $B = A/\operatorname{rad} A$. De følgende påstandene holder:*

(a) Hvert høyre ideal I i B er en direktesum av simple høyre idealer på formen eB, hvor e er en primitiv idempotent i B. Spesielt er den høyre B-modulen B_B semisimpel.

(b) Hvilken som helst modul N i $\operatorname{mod} B$ er isomorf med en direktesum av simple høyre idealer på formen eB, hvor e er en primitiv idempotent i B.

(c) Hvis $e \in A$ er en primitiv idempotent i A, så er B-modulen $\operatorname{top} eA$ simpel og $\operatorname{rad} eA = e \operatorname{rad} A \subset eA$ er den entydige maksimale ekte undermodulen til eA.

Bevis. Se [1, Theorem I.4.5]. □

Vi ser på et resultat om sammenhengen mellom lokale ringer og idempotenter før vi vender tilbake til ikke-dekomponerbare moduler.

Proposisjon 1.1.12. *En lokal ring A har 0 og 1 som de eneste idempotentene.*

Bevis. La A være en lokal ring med entydig maksimalt ideal J. Hvert element som ikke ligger i J er en enhet, og hvis $a \in J$, så er $1 - a$ en enhet. La $e \in A$ være en idempotent. Da er $0 = e^2 - e = e(e-1)$. Hvis $e \in J$ så er $1-e$ en enhet og dermed ikke en nulldivisor. Dermed er $e = 0$. Hvis $e \notin J$ så er e en enhet og dermed ikke en nulldivisor. Dermed er $1 - e = 0$, så $e = 1$. □

Vårt neste mål er å bevise at alle moduler kan dekomponeres på en entydig måte. Før vi kan bevise dette trenger vi noen flere resultater.

Lemma 1.1.13. *La A være en ring, M en A-modul med $l(M) \leq \infty$ og $\phi \in \operatorname{End} M$. Da finnes $n \in \mathbb{N}$ slik at*

$$M = \operatorname{Im} \phi^n \oplus \operatorname{Ker} \phi^n.$$

Bevis. Siden $l(M) < \infty$, vet vi at M er Artinsk og Noethersk. Det vil si at kjedene

$$\operatorname{Im} \phi \supseteq \operatorname{Im} \phi^2 \supseteq \dots,$$

og

$$\operatorname{Ker} \phi \subseteq \operatorname{Ker} \phi^2 \subseteq \dots$$

blir stasjonære. Det må derfor finnes $n \in \mathbb{N}$ slik at

$$\operatorname{Im} \phi^n = \operatorname{Im} \phi^{n+1} = \dots$$

og

$$\operatorname{Ker}\phi^n = \operatorname{Ker}\phi^{n+1} = \dots.$$

Siden $\operatorname{Im}\phi^n, \operatorname{Ker}\phi^n \subseteq M$, må vi ha $l(\operatorname{Im}\phi^n) < \infty$. Derfor har vi $l(\operatorname{Im}\phi^n) = l(\operatorname{Im}\phi^{2n})$. I tillegg vet vi at $\phi^n\colon \operatorname{Im}\phi^n \longrightarrow \operatorname{Im}\phi^{2n}$ er surjektiv. Sammen gir dette at $\phi^n\colon \operatorname{Im}\phi^n \longrightarrow \operatorname{Im}\phi^{2n}$ er en isomorfi, og vi lar $\psi\colon \operatorname{Im}\phi^{2n} \longrightarrow \operatorname{Im}\phi^n$ være inversen til ϕ^n.

Nå ønsker vi å vise at $M = \operatorname{Im}\phi^n + \operatorname{Ker}\phi^n$. La $m \in M$. Vi kan skrive

$$m = \psi\phi^n(m) + m - \psi\phi^n(m).$$

Her ser vi at $\psi\phi^n(m) \in \operatorname{Im}\phi^n$. I tillegg ser vi at

$$\phi^n(m - \psi\phi^n(m)) = \phi^n(m) - \phi^n\psi\phi^n(m)) = \phi^n(m) - \phi^n(m) = 0.$$

Altså er $m - \psi\phi^n(m) \in \operatorname{Ker}\phi^n$. Vi har nå vist at $M = \operatorname{Im}\phi^n + \operatorname{Ker}\phi^n$. For å vise at dette er en direktesum, må vi også vise at $\operatorname{Im}\phi^n \cap \operatorname{Ker}\phi^n = (0)$. La $m \in \operatorname{Im}\phi^n \cap \operatorname{Ker}\phi^n$. Da er $m = \phi^n(m')$ for noen $m' \in M$. Vi vet også at $m \in \operatorname{Ker}\phi^n$, så

$$\begin{aligned} 0 &= \phi^n(m) = \phi^{2n}(m') \\ \Rightarrow m' &\in \operatorname{Ker}\phi^{2n} = \operatorname{Ker}\phi^n \\ \Rightarrow m &= \phi^n(m') = 0. \end{aligned}$$

Dermed er lemmaet bevist. □

Det neste teoremet viser sammenhengen mellom en ikke-dekomponerbar modul M og endomorfismeringen $\operatorname{End} M$.

Teorem 1.1.14. *La A være en høyre Artinsk ring og M en endeliggenerert A-modul. Da er M ikke-dekomponerbar hvis og bare hvis* $\operatorname{End} M$ *er lokal.*

Bevis. Vi begynner med å vise at $\operatorname{End} M$ er lokal impliserer at M er en ikke-dekomponerbar modul. Hvis M kan dekomponeres som $M = X_1 \oplus X_2$, der verken X_1 eller X_2 er nullmodulen, finnes det projeksjoner $p_i\colon M \longrightarrow X_i$ og injeksjoner $u_i\colon X_i \longrightarrow M$ (for $i = 1, 2$), slik at $u_1p_1 + u_2p_2 = 1_M$. Siden både u_1p_1 og u_2p_2 er ikke-null idempotenter i $\operatorname{End} M$, er algebraen $\operatorname{End} M$ ikke lokal. Hvis dette ikke var tilfellet ville 1_M tilhøre det entydige maksimale idealet til $\operatorname{End} M$, en motsigelse.

Videre ser vi på det motsatte tilfellet. Anta at M er ikke-dekomponerbar. La $\phi \in \operatorname{End} M$ være ikke-inverterbar. Da er $l(\operatorname{Im}\phi) < l(M)$, og for alle $\psi \in \operatorname{End} M$ er komposisjonen $\psi\phi$ ikke-inverterbar. Da er $l(\operatorname{Im}(\psi\phi)) \leq l(\operatorname{Im}\phi)$. Fra Lemma 1.1.13 vet vi at $M = \operatorname{Im}(\psi\phi)^n \oplus \operatorname{Ker}(\psi\phi)^n$. Siden M er ikke-dekomponerbar, må vi enten ha

$$\operatorname{Im}(\psi\phi)^n = (0) \text{ og } \operatorname{Ker}(\psi\phi)^n = M$$

eller

$$\operatorname{Im}(\psi\phi)^n = M \text{ og } \operatorname{Ker}(\psi\phi)^n = (0).$$

Siden $l(\operatorname{Im}\phi) < l(\operatorname{Im}(M))$, må vi ha $\operatorname{Im}(\psi\phi)^n \subsetneq M$. Dette betyr at vi må ha $\operatorname{Im}(\psi\phi)^n = (0)$ og $\psi\phi$ er nilpotent.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 1_M - \psi\phi \text{ er inverterbar i } \operatorname{End} M \text{ for alle } \psi \in \operatorname{End} M \\
&\Rightarrow \phi \in \operatorname{rad}\operatorname{End} M \subseteq \{\text{ikke-inverterbare elementer i } \operatorname{End} M\} \\
&\Rightarrow \operatorname{End} M \text{ er lokal.}
\end{aligned}$$

□

Vi er nå klare for å bevise at dekomponeringen av endeliggenererte moduler er entydig.

Teorem 1.1.15. *La A være en høyre Artinsk ring og M en modul i $\operatorname{mod} A$.*

(a) M kan skrives som en endelig direktesum av ikke-dekomponerbare moduler, dvs.

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i,$$

med M_i dekomponerbar for alle i.

(b) Komposisjonen av M til ikke-dekomponerbare moduler er entydig opp til isomorfi og rekkefølge.

Bevis. (a) Vi bruker induksjon på $l(M)$. Hvis $l(M) = 1$, er M simpel og dermed ikke-dekomponerbar. Dermed er påstanden i (a) sann. Anta at (a) er sann for alle A-moduler X, med $l(X) < n$. Anta $l(M) = n$. Hvis M er ikke-dekomponerbar, er vi ferdige. Hvis derimot M lar seg dekomponere, slik at $M = M_1 \oplus M_2$, har vi $l(M_i) < l(M)$ for $i = 1, 2$. Da vet vi at (a) gjelder for M_1 og M_2, og (a) følger ved induksjon.

(b) Vi bruker induksjon på $l(M)$ her også. Anta at

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \bigoplus_{j=1}^{m} N_j,$$

med M_i og N_j ikke-dekomponerbare for alle i, j. Hvis $l(M) = 1$ er påstanden sann, siden M er simpel og derfor ikke-dekomponerbar. Anta at utsagnet er sant for alle moduler X, med $l(X) < n$. La $l(M) = n$. La henholdsvis ϕ_{sr} og ψ_{rs} betegne komposisjonene

$$M_r \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \bigoplus_{j=1}^{m} N_j \twoheadrightarrow N_s$$

og

$$N_s \hookrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} N_j = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \twoheadrightarrow M_r.$$

Da er

$$\sum_{s=1}^{m} \psi_{is}\phi_{si} = 1_{M_i}.$$

Siden $\operatorname{End} M_i$ er lokal, finnes j slik at $\psi_{ij}\phi_{ji}$ er en isomorfi. Hvis

$$\phi_{ji}\psi_{ij} \colon N_j \longrightarrow N_j$$

er i $\operatorname{rad} \operatorname{End} N_j$, så følger det fra Lemma 1.1.13 at det finnes $t \in \mathbb{N}$ slik at $\phi_{ji}\psi_{ij}$ er nilpotent, $(\phi_{ji}\psi_{ij})^t = 0$. Da er

$$(\psi_{ij}\phi_{ji})^{t+1} = \psi_{ij}(\phi_{ji}\psi_{ij})^t\phi_{ji} = 0.$$

Dette er en motsigelsen, så vi får dermed at $\psi_{ij}\phi_{ji}$ er en isomorfi og videre at både ϕ_{ji} og ψ_{ij} er isomorfier. Vi har

$$\begin{tikzcd}
M = \bigoplus_{r=1}^{n} M_r \arrow[r, "1_M = (\phi_{ji})"] \arrow[d, equal] & \bigoplus_{s=1}^{m} N_s = M \arrow[d, equal] \\
M_i \oplus \hat{M}_i \arrow[r, "B = \begin{bmatrix} \phi_{ji} & a \\ b & c \end{bmatrix}"] & N_j \oplus \hat{N}_j \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1_{N_j} & 0 \\ -b\phi_{ji}^{-1} & 1_{\tilde{N}_i} \end{bmatrix} = D", "\wr"'] \\
M_i \oplus \hat{M}_i \arrow[u, "C = \begin{bmatrix} 1_{M_i} & -\phi_{ji}^{-1}a \\ 0 & 1_{\tilde{M}_i} \end{bmatrix}", "\wr"'] \arrow[r, "A"] & N_j \oplus \hat{N}_j
\end{tikzcd}$$

Her har vi laget avbildningene $a \colon \hat{M}_i \longrightarrow N_j$, $b \colon M_i \longrightarrow \hat{N}_j$ og $c \colon \hat{M}_i \longrightarrow \hat{N}_j$. Siden

$$\bigoplus_{r=1}^{n} M_r = M_i \oplus \hat{M}_i$$

og

$$\bigoplus_{s=1}^{m} N_s = N_j \oplus \hat{N}_j,$$

og ϕ_{ji} er en isomorfi mellom dem, ser vi at B må være en isomorfi. Videre ser vi at A må være en isomorfi siden B, C og D er isomorfier.

$$A = \begin{bmatrix} 1_{N_j} & 0 \\ -b\phi_{ji}^{-1} & 1_{\tilde{N}_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ji} & a \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{M_i} & -\phi_{ji}^{-1}a \\ 0 & 1_{\tilde{M}_i} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1_{N_j} & 0 \\ -b\phi_{ji}^{-1} & 1_{\tilde{N}_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ji} & 0 \\ b & -b\phi_{ji}^{-1}a + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{ji} & 0 \\ 0 & -b\phi_{ji}^{-1}a + c \end{bmatrix}$$

Her er ϕ_{ji} og $\tilde{c} = -b\phi_{ji}^{-1}a + c$ isomorfier, og $\tilde{c} \colon \hat{M}_i \longrightarrow \hat{N}_j$. Siden i tillegg $l(\hat{M}_i) < l(M)$ vet vi at påstanden er sann for $\hat{M}_i$. Siden $M_i \cong N_j$ er teoremet bevist.

$\square$

1.2 Projektive og injektive moduler

I denne delen skal vi se på definisjonen av projektive og injektive moduler. Før vi kan sette i gang med dette trenger vi litt om eksakte sekvenser.

Definisjon 1.2.1. La $h\colon M \longrightarrow N$ og $u\colon L \longrightarrow M$ være homomorfier av høyre A-moduler. Vi kaller en A-homomorfi $s\colon N \longrightarrow M$ en **splitt monomorfi** til h hvis $hs = 1_N$, og vi kaller en A-homomorfi $r\colon M \longrightarrow L$ en **splitt epimorfi** til u hvis $ru = 1_L$.

Hvis s er en splitt monomorfi til h, så er h surjektiv, s injektiv, og det finnes en direktesumdekomposisjon

$$M = \operatorname{Im} s \oplus \operatorname{Ker} h \cong N \oplus \operatorname{Ker} h,$$

og h er en splitt epimorfi til s. På samme måte, hvis r er en splitt epimorfi til u, så er r surjektiv, u injektiv, u er en splitt monomorfi til r og det finnes en direktesumdekomposisjon

$$M = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} r \cong L \oplus \operatorname{Ker} r.$$

Vi ser med dette at $h\colon M \longrightarrow N$ er en splitt monomorfi (eller splitt epimorfi) hvis h tillater en splitt epimorfi (eller splitt monomorfi).

Vi har tidligere sett generelle eksakte sekvenser. Nå vil vi se på en mer spesifikk type.

Definisjon 1.2.2. En sekvens

$$\cdots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} X_n \xrightarrow{h_n} X_{n+1} \xrightarrow{h_{n+1}} X_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

(endelig eller uendelig) av høyre A-moduler forbundet med A-homomorfier kalles en **eksakt sekvens** hvis $\operatorname{Ker} h_n = \operatorname{Im} h_{n-1}$ for alle n. Spesielt kalles

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{r} N \longrightarrow 0$$

en **kort eksakt sekvens** hvis u er en monomorfi, r er en epimorfi og $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Im} u$.

Merk at homomorfien u tillater en splitt epimorfi $p\colon M \longrightarrow L$ hvis og bare hvis r tillater en splitt monomorfi $v\colon N \longrightarrow M$.

Definisjon 1.2.3. La

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{r} N \longrightarrow 0$$

være en kort eksakt sekvens, og la $p\colon M \longrightarrow L$ være en splitt epimorfi for u og $v\colon N \longrightarrow M$ være en splitt monomorfi for r. Da finnes det en direktesumdekomposisjon

$$M = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} v \oplus \operatorname{Ker} r$$

av M, og vi sier at den korte eksakte sekvensen **splitter**.

Vi vil komme tilbake til eksakte sekvenser i Kapittel 4. Disse vil spille en viktig rolle i konstruksjon av Auslander-Reiten-quiveret til en endeligdimensjonal algebra.

Vi er nå klare for å definere projektive moduler. Presentasjonen som blir gitt i dette kapittelet er veldig kort, og bare de mest grunnleggende egenskapene blir presentert.

Definisjon 1.2.4. La P være en modul i $\operatorname{Mod} A$. Modulen P er **projektiv** hvis det for enhver epimorfi $h \colon M \longrightarrow N$ av A-moduler og enhver A-homomorfi $f \colon P \longrightarrow N$, finnes en homomorfi $f' \colon P \longrightarrow M$ slik at

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "h"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommuterer.

Vi ønsker nå å presentere noen egenskaper knyttet til projektive moduler. Vi begynner med å definere en spesiell type epimorfier.

Definisjon 1.2.5. La M og N være moduler i $\operatorname{mod} A$. Da kalles $f \colon M \longrightarrow N$ en **essensiell epimorfi** hvis f er en epimorfi og hvis $g \colon X \longrightarrow M$ er slik at $fg \colon X \longrightarrow N$ er på, så er $g \colon X \longrightarrow M$ også på.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "fg"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Det er mulig å vise at f er en essensiell epimorfi hvis og bare hvis $\operatorname{Ker} f \subseteq \underline{r}M$, der $\underline{r} = \operatorname{rad} A$ (se [2, Proposition I.3.6]). Dette gjør det enklere å undersøke om f er essensiell.

Definisjon 1.2.6. La $f \colon P \longrightarrow M$ være en A-homomorfi. Vi sier at $f \colon P \longrightarrow M$ er et **projektivt dekke til** M hvis P er projektiv og f er en essensiell epimorfi.

La A være en endeligdimensjonal K-algebra og la $A_A = e_1 A \oplus \cdots \oplus e_n A$, hvor $\{e_1, \ldots, e_n\}$ er en fullstendig mengde av primitive ortogonale idempotenter i A. Det er mulig å vise at det for en projektiv modul P i $\operatorname{mod} A$ alltid finnes et projektivt dekke og at dette er entydig bestemt av P (se [1, Theorem I.5.8]).

Definisjon 1.2.7. En eksakt sekvens

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

i $\operatorname{mod} A$ kalles en **minimal projektiv presentasjon** til en A-modul hvis A-modulhomomorfien $p_0 \colon P_0 \longrightarrow M$ og den induserte avbildningen av p_1 gitt ved $P_1 \longrightarrow \operatorname{Im} p_1 = \operatorname{Ker} p_0$ er projektive dekker.

Vi vil nå se på injektive moduler.

Definisjon 1.2.8. La I være en modul i $\operatorname{Mod} A$. Vi sier at I er **injektiv** hvis det for enhver monomorfi $u\colon L \longrightarrow M$, med $L, M \in \operatorname{Mod} A$, og enhver A-homomorfi $g\colon L \longrightarrow I$, finnes en homomorfi $g'\colon M \longrightarrow I$ slik at

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, dashed, "g'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

kommuterer.

Vi fortsetter med noen flere definisjoner.

Definisjon 1.2.9. La $B \subseteq X$ være A-moduler.

(a) Da er B en **essensiell undermodul til** X, hvis vi for hver ikke-null undermodul C av X har at $B \cap C \neq (0)$.

(b) En monomorfi $i\colon B \longrightarrow X$ er **essensiell** hvis $i(A)$ er en essensiell undermodul til X.

(c) En monomorfi $i\colon B \longrightarrow I$ er en **injektiv innhylning** hvis både I er injektiv og i er en er en essensiell epimorfi.

Det siste vi definerer i dette kapittelet er sokkelen til en modul.

Definisjon 1.2.10. La M være en høyre A-modul. Summen av alle de simple undermodulene til M kalles **sokkelen** til M, og den betegnes med $\operatorname{soc} M$.

Vi skal nå se at det vi vet om egenskapene til en modul gir nyttig informasjon om egenskapene til dualet til modulen.

Teorem 1.2.11. *La* $D\colon \operatorname{mod} A \longrightarrow \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$ *være standarddualiteten* $D(-) = \operatorname{Hom}_K(-, K)$. *Da holder følgende påstander.*

(a) En sekvens

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{u} N \xrightarrow{h} M \longrightarrow 0$$

i $\operatorname{mod} A$ *er eksakt hvis og bare hvis sekvensen*

$$0 \longrightarrow D(M) \xrightarrow{D(h)} D(N) \xrightarrow{D(u)} D(L) \longrightarrow 0$$

er eksakt i $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$.

(b) En modul E *i* $\operatorname{mod} A$ *er injektiv hvis og bare hvis modulen D(E) er projektiv i* $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$. *En modul* P *i* $\operatorname{mod} A$ *er projektiv hvis og bare hvis modulen* $D(P)$ *er injektiv i* A^{op}.

(c) En modul S *i* $\operatorname{mod} A$ *er simpel hvis og bare hvis modulen* $D(S)$ *er simpel i* $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$.

(d) *En monomorfi* $u\colon M \longrightarrow E$ *i* $\operatorname{mod} A$ *er en injektiv innhylning hvis og bare hvis epimorfien* $D(u)\colon D(E) \longrightarrow D(M)$ *er et projektivt dekke i* $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$. *En epimorfi* $h\colon P \longrightarrow M$ *i* $\operatorname{mod} A$ *er et projektivt dekke hvis og bare hvis* $D(h)\colon D(M) \longrightarrow D(P)$ *er en injektiv innhylning i* $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$.

Bevis. Se [1, Theorem I.5.13]. □

Projektive og injektive moduler blir en viktig del av denne oppgaven. Metoden for å regne ut de ikke-demponerbare projektive og injektive modulene blir presentert i Kapittel 2. Vi avslutter dette kapittelet med et teorem som vil være til stor nytte når vi skal regne ut denne typen moduler.

Korollar 1.2.12. *Anta at* $A_A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ *er en dekomposisjon av* A *i ikke-dekomponerbare undermoduler.*

(a) *Enhver simpel høyre* A*-modul er isomorf med én av modulene*

$$S(1) = \operatorname{top} e_1A, \ldots, S(n) = \operatorname{top} e_nA.$$

(b) *Enhver ikke-dekomponerbar projektiv høyre* A*-modul er isomorf med én av modulene*

$$P(1) = e_1A, \ldots, P(n) = e_nA$$

Videre er $e_iA \cong e_jA$ *hvis og bare hvis* $S(i) \cong S(j)$.

(c) *Enhver ikke-dekomponerbar injektiv høyre* A*-modul er isomorf med én av modulene*

$$I(1) = D(Ae_1) \cong E(S(1)), \ldots, I(n) = D(Ae_n) \cong E(S(n)),$$

der $E(S(j))$ *er den injektive innhylningen til en simpel modul* $S(j)$.

Bevis. Se [1, Corollary I.5.17]. □

Kapittel 2

Introduksjon til quivre

I dette kapittelet vil vi presentere et annet nyttig verktøy; quivre. Vi vil se på hvordan quiverne kan hjelpe oss med å visualisere abstrakte konsepter, og at vi vil bruke quivre til å bestemme ikke-dekomponerbare projektive og injektive moduler.

2.1 Quiver

Vi starter med å definere hva et quiver er.

Definisjon 2.1.1. Et **quiver** $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ er en orientert graf, der Q_0 er mengden av alle hjørnene til grafen og Q_1 er mengden av alle pilene mellom hjørner. Vi har også for hvert quiver to avbildninger $s, t\colon Q_1 \longrightarrow Q_0$ som for hver pil $\alpha \in Q_1$ gir henholdsvis pilas **kilde** $s(\alpha) \in Q_0$ og **mål** $t(\alpha) \in Q_0$. Vi sier at quiveret er **endelig** dersom både Q_0 og Q_1 er endelige mengder.

Når vi beskriver et quiver pleier vi som regel å skrive $Q = (Q_0, Q_1)$ eller bare Q i stedet for $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$. Dersom en pil $\alpha \in Q_1$ har kilde $s(\alpha) = a$ og mål $t(\alpha) = b$, er det vanlig å bare skrive $\alpha\colon a \longrightarrow b$. Det er da underforstått at pila starter i hjørne a og ender i hjørne b.

Eksempel 2.1.2. Vi vil nå se på to enkle quivre.

(a) $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$

(b)

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ 2 \arrow[dr, "\gamma"'] & & 3 \arrow[dl, "\delta"] \\ & 4 & \end{tikzcd}$$

Vi ser at quiveret i (a) har $Q_0 = \{1, 2, 3\}$ og $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$. Quiveret i (b) har $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ og $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Definisjon 2.1.3. Et **underquiver** til et quiver $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ er et quiver $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ slik at $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$ og hvis $\alpha\colon a \longrightarrow b$ er en pil i Q_1 slik at $\alpha \in Q'_1$ og $a, b \in Q'_0$, så er $s'(\alpha) = a$ og $t'(\alpha) = b$, Et slikt underquiver kalles **fullt** hvis Q'_1 er lik mengden av alle piler i Q_1 som både har kilde og mål i Q'_1, dvs. at

$$Q'_1 = \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) \text{ og } t(\alpha) \in Q_0\}.$$

Det er ikke alltid vi er interessert i orienteringen til en pil $\alpha\colon a \longrightarrow b \in Q_1$ mellom to hjørner $a, b \in Q_0$. Vi lar da $\overline{Q}$ betegne quiveret der $\overline{Q}_0 = Q_0$ og hver pil i Q er byttet ut med kant i $\overline{Q}$.

Definisjon 2.1.4. Et quiver Q kalles **sammenhengende** hvis alle hjørner i den tilhørende grafen er knyttet sammen.

Vi vil nå definere hva vi vil mene med en vei i et quiver.

Definisjon 2.1.5. La $Q = (Q_0, Q_1)$ være et quiver, og la $a, b \in Q_0$. Det finnes to typer **veier** i Q:

(a) En **ikke-triviell vei** α av lengde $l \geq 1$ med kilde a og mål b, er en sekvens av piler $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l \in Q_1$

$$a = 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_l} l = b,$$

slik at $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ for $1 \leq k < l$ og $t(\alpha_l) = b$. Vi bruker vanligvis notasjonen

$$\alpha = (b \mid \alpha_l, \ldots, \alpha_2, \alpha_1 \mid a)$$

for å beskrive en ikke-triviell vei fra a til b.

(b) En **triviell vei** av lengde $l = 0$. Det finnes for hvert hjørne $i \in Q_0$ en triviell vei, og denne veien betegnes e_i. Siden e_i har lengde $l = 0$, er $s(e_i) = i = t(e_i)$. For en triviell vei bruker vi notasjonen

$$e_i = (i \mid\mid i).$$

Hvis vi ser tilbake på Eksempel 2.1.2, ser vi at vi i (a) har de trivielle veiene e_1, e_2 og e_3 og de ikke-trivielle veiene α og β av lengde $l = 1$ og $\beta\alpha = (3 \mid \beta, \alpha \mid 1)$ av lengde $l = 2$. Tilsvarende ser vi for (b) at vi har de ti veiene $e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \gamma\alpha$ og $\delta\beta$.

Definisjon 2.1.6. La Q være et quiver. Vi sier at Q

(a) har en **loop** dersom det finnes en vei av lengde $l = 1$ fra et hjørne $i \in Q_0$ til det samme hjørnet $i \in Q_0$.

(b) har **dobbelpiler** dersom det finnes mer enn én vei av lengde $l = 1$ fra et hjørne $i \in Q_0$ til et annet hjørne $j \in Q_0$.

(c) er **syklisk** hvis det finnes en vei α av lengde $l \geq 1$ slik at $s(\alpha) = t(\alpha)$.

(d) er **asyklisk** hvis det ikke er syklisk.

Vi skal nå se på eksempler på quivre med disse egenskapene.

Eksempel 2.1.7.

(a)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & 2 \arrow[loop right, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

(b)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[d, "\beta"'] & \\
3 \arrow[u, "\delta"] & 4 \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[r, "\varepsilon"] & 5
\end{tikzcd}$$

(c)

$$\begin{tikzcd}
 & & & 5 & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 & 4 \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "\varepsilon"] & 6
\end{tikzcd}$$

Quiveret i (a) har en loop $\gamma\colon 2 \longrightarrow 2$ og dobbelpiler $\alpha\colon 1 \longrightarrow 2$, $\beta\colon 1 \longrightarrow 2$. Vi ser at quiveret er syklisk, siden $s(\gamma) = t(\gamma) = 2$.

Quiveret i (b) er syklisk siden hjørne 1 både er kilde og mål for veien $(1 \mid \delta, \gamma, \beta, \alpha \mid 1)$ av lengde $l = 4$.

Quiveret i (c) er asyklisk siden det ikke inneholder noen vei av lengde $l \geq 1$ slik at startpunktet og endepunktet for veien er det samme. Et slikt asyklisk quiver uten dobbelpiler kalles et **rettet tre**. Vi vil komme tilbake til rettede trær senere.

La Q være et quiver, og la $x \in Q_0$. Da bruker vi betegnelsen x^- på mengden av startpunkter til piler med endepunkt x, og x^+ på mengden av endepunkter til piler med startpunkt x.

Definisjon 2.1.8. La Q være et quiver. La både x^- og x^+ være endelige mengder for alle $x \in Q_0$, slik figuren viser for ett hjørne $y \in Q_0$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha_1"] & & 1' \\
2 \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, dash, dashed] & y \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[dr, "\beta_m"'] & 2' \arrow[d, dash, dashed] \\
n \arrow[ur, "\alpha_n"'] & & m
\end{tikzcd}$$

Da sier vi at quiveret er **lokalt endelig**.

Veiene i et quiver Q bestemmer en algebra som vi vil se nærmere på nå.

Definisjon 2.1.9. La Q være et quiver. **Veialgebraen** KQ til Q er K-algebraen med det underliggende K-vektorrommet bestemt at basisen bestående av mengden av alle veier $(b \mid \alpha_l, \dots, \alpha_1 \mid a)$ med lengde $l \geq 0$ i Q. Produktet av to basisvektorer $(b \mid \alpha_l, \dots, \alpha_1 \mid a)$ og $(d \mid \beta_k, \dots, \beta_1 \mid c)$ er definert ved

$$(b \mid \alpha_l, \dots, \alpha_1 \mid a)(d \mid \beta_k, \dots, \beta_1 \mid c) = \delta_{cb}(b \mid \alpha_l, \dots, \alpha_1, \beta_k, \dots, \beta_1 \mid c).$$

Her er δ_{cb} Kronecker-delta, og $\delta_{cb} = 1$ hvis $s(\alpha_1) = t(\beta_k)$ og null ellers. Vi utvider dette ved å bruke distributivitet.

Identiteten til veialgebraen KQ over et endelig quiver Q er $1 = \sum\limits_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ (se [1, Corollary II.1.5)]).

Definisjon 2.1.10. La Q være et endelig og sammenhengende quiver. Det tosidige idealet til veialgebraen KQ generert av pilene i Q kalles **pilidealet** til KQ og betegnes R_Q.

Ved å bruke pilidealet til KQ kan vi definere en ny algebra.

Definisjon 2.1.11. La Q være et endelig quiver og la R_Q være pilidealet til veialgebraen KQ. Et tosidig ideal $\mathcal{I}$ i KQ kalles **tillatelig** hvis det finnes et heltall $m \geq 2$ slik at

$$R_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2.$$

Hvis $\mathcal{I}$ er et tillatelig ideal i KQ, kalles paret $(Q, \mathcal{I})$ et **quiver med relasjoner**. Kvotientalgebraen $KQ/\mathcal{I}$ kalles algebraen til quiveret $(Q, \mathcal{I})$, eller bare en **quiveralgebra**.

Vi avslutter denne delen med å se på generatorene til et tillatelig ideal.

Definisjon 2.1.12. La Q være et quiver. En **relasjon** i Q med koeffisienter i K er en K-lineær kombinasjon av veier med lengde $l \geq 2$ som alle har samme kilde og alle har samme mål. Altså er en relasjon ρ et element i KQ slik at

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_1 w_i,$$

der λ_i er skalarer (ikke alle null) og w_i er veier i Q av lengde $l \geq 2$ slik at hvis $i \neq j$, så har w_i og w_j samme kilde og samme mål.

2.2 Representasjoner og anvendelser

Vi vil nå bevege oss over til å se på hvordan vi kan bruke quivre til å visualisere moduler. Målet med denne delen er å vise hvordan man enkelt kan regne ut de ikke-dekomponerbare projektive og injektive modulene ved hjelp av quivre.

Definisjon 2.2.1. La Q være et endelig quiver. En **representasjon** M av Q defineres på følgende måte:

(a) For hvert hjørne $a \in Q_0$ tilordner vi et K-vektorrom M_a.

(b) For hver pil $\alpha\colon a \longrightarrow b \in Q_1$ tilordner vi en K-lineær avbildning $\varphi_\alpha\colon M_a \longrightarrow M_b$.

En slik representasjon som beskrevet over betegnes $M = (M_a, \varphi_\alpha)$. Representasjonen kalles endeligdimensjonal dersom alle vektorrommene M_a er endeligdimensjonale. Hvis vi har to vektorrom $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ og $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$, har vi en morfi $f\colon M \longrightarrow M'$, der $f = (f_a)_{a\in Q}$ er en familie av K-lineære avbildninger $(f_a\colon M_a \longrightarrow M'_a)_{a\in Q_0}$. Vi har også for hver pil $\alpha\colon a \longrightarrow b$ at det følgende diagrammet kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d] & M_b \arrow[d] \\
M'_a \arrow[r, "\varphi'_\alpha"] & M'_b
\end{tikzcd}$$

Hvis vi nå har to morfier $f\colon M \longrightarrow M'$ og $g\colon M' \longrightarrow M''$, ser vi at komposisjonen gf av de to er en morfi fra M til M''.

Definisjon 2.2.2. La Q være et endelig quiver og $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ være en representasjon av Q. For hvilken som helst ikke-triviell vei $w = \alpha_l \dots \alpha_2\alpha_1$ fra a til b i Q definerer vi **evaluasjonen** til M på veien w til å være den K-lineære avbildningen fra M_a til M_b definert ved

$$\varphi_w = \varphi_{\alpha_l}\varphi_{\alpha_{l-1}}\cdots\varphi_{\alpha_2}\varphi_{\alpha_1}$$

Vi vil fra nå av bruke betegnelsen $\mathrm{Rep}(Q)$ for kategorien av K-lineære representasjoner av Q. For den fulle underkategorien av $\mathrm{Rep}(Q)$ som består av de endeligdimensjonale reprsentasjonene vil vi bruke betegnelsen $\mathrm{rep}(Q)$. I det neste teoremet introduserer vi en ny funktor mellom kategorien av moduler og kategorien av representasjoner.

Teorem 2.2.3. *La $A = KQ/\mathcal{I}$, hvor Q er et endelig sammenhengende quiver og $\mathcal{I}$ er et tillatelig ideal i KQ. Det finnes en K-lineær ekvivalens av kategorier*

$$F\colon \operatorname{Mod} A \xrightarrow{\sim} \operatorname{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$$

som restringeres til en ekvivalens av kategorier

$$F\colon \operatorname{mod} A \xrightarrow{\sim} \operatorname{rep}_K(Q, \mathcal{I}).$$

Bevis. Se [1, Theorem III.1.6]. □

Gjennom resten av denne delen vil vi alltid la $(Q, \mathcal{I})$ være et endelig sammenhengende quiver Q med $|Q_0| = n$ hjørner og $\mathcal{I}$ et tillatelig ideal i KQ. Vi lar A være quiveralgebraen $A = KQ/\mathcal{I}$.

La nå $a \in Q_0$. Vi bruker notasjonen $S(a)$ om representasjonen $(S(a)_b, \varphi_\alpha)$ definert som følger

$$S(a)_b = \begin{cases} 0 \text{ hvis } b \neq a \\ K \text{ hvis } b = a \end{cases}$$
$$\varphi_\alpha = 0 \text{ for alle } \alpha \in Q_1$$

Vi har en representasjon $S(a)$ av $(Q, \mathcal{I})$, og vi har følgende lemma.

Lemma 2.2.4. *La $A = KQ/\mathcal{I}$ være quiveralgebraen til $(Q, \mathcal{I})$.*

(a) For hvilken som helst $a \in Q_0$ er $S(a)$ (som en A-modul) isomorf med toppen til den ikke-dekomponerbare projektive A-modulen e_aA.

(b) Mengden $\{S(a) | a \in Q_0\}$ er en komplett mengde av representanter for isomorfiklassene til de simple A-modulene.

Bevis. For hvilken som helst $a \in Q_0$ er K-vektorrommet $S(a)$ endimensjonalt, og definerer dermed en simpel representasjon av $(Q, \mathcal{I})$ og en simpel A-modul. Siden vi har

$$\mathrm{Hom}_A(e_aA, S(a)) \cong S(a)e_a \cong S(a)_a \neq 0,$$

må det finnes en ikke-null A-modulhomomorfi fra den ikke-dekomponerbare projektive A-modulen e_aA på den simple A-modulen $S(a)$. Dette beviser (a), siden e_aA har en simpel topp.

Motsatt, hvis $a \neq b$, er det klart at $\mathrm{Hom}_A(S(a), S(b)) = 0$ og spesielt er $S(a) \ncong S(b)$. Dermed er de simple modulene $S(a), a \in Q_0$, parvis ikke-isomorfe. Siden det finnes en bijeksjon mellom en fullstendig mengde av primitive ortogonale idempotenter og en fullstendig mengde av parvis ikke-isomorfe simple A-moduler, gitt ved $e_a \mapsto \mathrm{top}(e_aA)$, følger (b). □

Det neste lemmaet gir det siste vi trenger før vi er klare for å presentere metoden for å regne ut de ikke-dekomponerbare projektive og injektive A-modulene.

Lemma 2.2.5. *La $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ være en representasjon av $(Q, \mathcal{I})$.*

(a) Modulen M er semisimpel hvis og bare hvis $\varphi_\alpha = 0$ for enhver $\alpha \in Q_1$.

(b) Sokkelen $\mathrm{soc}\, M = N$, hvor $N = (N_a, \psi_\alpha)$, med $N_a = M_a$ hvis a er et sluk, og

$$N_a = \bigcap_{\alpha\colon a \to b} \mathrm{Ker}(\varphi_\alpha \colon M_a \longrightarrow M_b)$$

hvis a ikke er et sluk, og $\psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{N_a} = 0$ for enhver pil α med kilde a.

(c) Radikalet $\mathrm{rad}\, M = J$, hvor $J = (J_a, \gamma_\alpha)$ med

$$J_a = \sum_{\alpha\colon b \to a} \mathrm{Im}(\varphi_\alpha \colon M_b \longrightarrow M_a)$$

og $\gamma_\alpha = \varphi_\alpha|_{J_a}$ for enhver pil α med kilde a.

(d) *Toppen* $\operatorname{top} M = L$, *hvor* $L = (L_a, \psi_\alpha)$, *med* $L_a = M_a$ *hvis* a *er en kilde, og*

$$L_a = M_a \Big/ \sum_{\alpha\colon b \to a} \operatorname{Im}(\psi_\alpha\colon M_b \longrightarrow M_a)$$

hvis a *ikke er en kilde og* $\psi_\alpha = 0$ *for enhver pil* α *med kilde* a.

Bevis. Vi beviser punkt for punkt.

(a) Første del følger fra at $\varphi_\alpha = 0$ for hver $\alpha \in Q_1$ hvis og bare hvis

$$M \cong \bigoplus_{a \in Q_0} S(a)^{\dim_K M_a}.$$

(b) Modulen N er en undermodul av M siden $\psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{N_a}$. Siden $\psi_\alpha = 0$ for hver α, er N semisimpel. La S_A være en simpel undermodul av M. Det finnes $a \in Q_0$ slik at $S \cong S(a)$. Dermed har vi, for hver $\alpha\colon a \longrightarrow b$, et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd}
K = S(a)_a \arrow[r] \arrow[d] & S(a)_b = 0 \arrow[d] \\
M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & M_b
\end{tikzcd}$$

Dermed er $S(a)_a \subseteq \operatorname{Ker} \varphi_\alpha$ for hver $\alpha\colon a \longrightarrow b$, så vi har $S(a)_a \subseteq N_a$. Dette viser at $S(a) \subseteq N$ og derfor $N = \operatorname{soc} M$.

(c) La R_Q være pilidealet til KQ. Siden $\operatorname{rad} A = R_Q/\mathcal{I}$ er generert som et tosidig ideal ved restklassene modulo $\mathcal{I}$ av pilene $\alpha \in Q_1$, følger det fra Proposisjon 1.1.4 at

$$J = \operatorname{rad} M = M \cdot \operatorname{rad} A = M \cdot (R/\mathcal{I}) = \sum_{\alpha \in Q_1} M\overline{\alpha},$$

hvor $\overline{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$. Dermed har vi, for hvilken som helst $a \in Q_0$, at $J_a = \sum_{\alpha\colon b \longrightarrow a} M\overline{\alpha}$, hvor det summeres over alle piler med mål a. For en slik pil, $\alpha\colon b \longrightarrow a$, får vi fra definisjonen av funktoren F at

$$M\overline{\alpha} = Me_b\overline{\alpha} = M_b\overline{\alpha} = \varphi_\alpha(M_b) = \operatorname{Im} \varphi,$$

siden virkningen av φ_α svarer til høyremultiplikasjon med $\overline{\alpha}$. Dermed er $J_a = \sum_{\alpha\colon b \longrightarrow a} \operatorname{Im}(\varphi_\alpha\colon M_b \longrightarrow M_a)$. Siden J er en undermodul til M, har vi $\gamma_\alpha = \varphi_\alpha|_{J_a}$.

(d) Følger fra (c), siden $L = M/(M \operatorname{rad} A) = M/\operatorname{rad} M$.

$\square$

Vi vil nå vise hvordan man regner ut de ikke-dekomponerbare projektive A-modulene. Vi har en basisk algebra A og en fullstendig mengde av primitive ortogonale idempotenter $\{e_a | a \in Q_0\}$ til A, så dekomposisjonen

$$A_A = \bigoplus_{a \in Q_0} e_a A$$

av A_A er en direktesum av parvis ikke-isomorfe ikke-dekomponerbare projektive A-moduler. Vi ønsker å beskrive modulene $P(a) = e_a A$, med $a \in Q_0$.

Lemma 2.2.6. *La $(Q, \mathcal{I})$ være et quiver, $A = KQ/\mathcal{I}$ og $P(a) = e_a A$, hvor $a \in Q_0$.*

(a) Hvis $P(a) = (P(a)_b, \varphi_\beta)$, så er $P(a)_b$ K-vektorrommet med basis mengden av alle $\overline{w} = w + \mathcal{I}$, der w er en vei fra a til b, og for en pil $\beta \colon b \longrightarrow c$, er den K-lineære avbildningen $\varphi_\beta \colon P(a)_b \longrightarrow P(a)_c$ gitt ved høyremultiplikasjon med $\overline{\beta} = \beta + \mathcal{I}$.

(b) La $\operatorname{rad} P(a) = (P'(a)_b, \varphi'_\beta)$. Da er $P'(a)_b = P(a)_b$ for $b \neq a$, $P'(a)_a$ er K-vektorrommet med basis mengden av alle $\overline{w} = w + \mathcal{I}$, med w en ikke-triviell vei fra a til a, $\varphi'_\beta = \varphi_\beta$ for hvilken som helst pil β med kilde $b \neq a$ og $\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha|_{P'(a)_a}$ for hvilken som helst pil α med kilde a.

Bevis. (a) Det følger fra definisjonen av funktoren F at representasjonen som via F svarer til A-modulen $P(a)_A = e_a A$ er slik at vi for hver $b \in Q_0$ har

$$P(a)_b = P(a)e_b = e_a A e_b = e_a(KQ/\mathcal{I})e_b = (\varepsilon_a(KQ)\varepsilon_b)/(\varepsilon_a \mathcal{I} \varepsilon_b).$$

Videre har vi at hvis $\beta \colon b \longrightarrow c$ er en pil i Q, så er $\varphi_\beta \colon e_a A e_b \longrightarrow e_a A e_c$ gitt ved høyremultiplikasjon med restklassene $\overline{\beta} = \beta + \mathcal{I}$. Det betyr at hvis $\overline{w}$ er restklassene til en vei w fra a til b, så er $\varphi_\beta(\overline{w}) = \overline{w}\overline{\beta}$.

(b) Følger fra (a) og Lemma 2.2.5.

□

Vi vil nå vise et eksempel der vi finner de ikke-dekomponerbare projektive modulene.

Eksempel 2.2.7. La Q være quiveret

$$1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2,$$

med relasjonene $\alpha\beta = 0$ og $\beta\alpha = 0$. Vi får da de ikke-dekomponerbare projektive modulene

$$P(1) = K \underset{0}{\overset{1}{\rightleftarrows}} K$$

og

$$P(2) = K \underset{1}{\overset{0}{\rightleftarrows}} K$$

Vi ser at vi har radikalene $\operatorname{rad} P(1) = 0$ og $\operatorname{rad} P(2) = 0$.

Vi vil nå vise hvordan man regner ut de ikke-dekomponerbare injektive A-modulene. Det følger fra Korollar 1.2.12 at en fullstendig liste av parvis ikke-isomorfe ikke-dekomponerbare injektiv A-moduler er gitt ved modulene $I(a) = D(Ae_a)$ (med $a \in Q_0$), hvor D er dualitetsfunktoren.

Lemma 2.2.8. *(a) Gitt $a \in Q_0$, så er den simple modulen $S(a)$ isomorf med den simple sokkelen til $I(a)$.*

(b) Hvis $I(a) = (I(a)_b, \varphi_\beta)$, så er $I(a)_b$ det duale av K-vektorrommet med basis mengden av alle $\overline{w} = w + \mathcal{I}$, der w er en vei fra b til a, og for en pil $\beta\colon b \longrightarrow c$, er den K-lineære avbildningen $\varphi_\beta\colon I(a)_b \longrightarrow I(a)_c$ gitt ved det duale av avbildningen gitt ved venstremultiplikasjon med $\overline{\beta} = \beta + \mathcal{I}$.

(c) La $I(a)/S(a) = (L_b, \psi_\beta)$. Da er L_b kvotientrommet til $I(a)_b$ utspent av restklassene av veier fra b til a av lengde høyst én, og ψ_β den induserte avbildningen.

Bevis. (a) Vi kan dualisere Lemma 2.2.4(a) og få isomorfiene

$$\operatorname{soc} I(a) \cong P(a)/\operatorname{rad} P(a) \cong S(a)$$

av høyre A-moduler.

(b) Siden det finnes isomorfier

$$I(a)_b = I(a)e_b = D(Ae_a)e_b \cong D(e_b A e_a) \cong D(\varepsilon_b(KQ)\varepsilon_a/\varepsilon_b\mathcal{I}\varepsilon_a),$$

følger første påstand fra Lemma 2.2.6. På en lignende måte har vi at hvis $\beta\colon b \longrightarrow c$ er en pil, så er den K-lineære avbildningen

$$\varphi_\beta\colon D(\varepsilon_b(KQ)\varepsilon_a/\varepsilon_b\mathcal{I}\varepsilon_a) \longrightarrow D(\varepsilon_c(KQ)\varepsilon_a/\varepsilon_c\mathcal{I}\varepsilon_a)$$

definert som følger: la

$$\mu_\beta\colon (\varepsilon_c(KQ)\varepsilon_a/\varepsilon_c\mathcal{I}\varepsilon_a) \longrightarrow (\varepsilon_b(KQ)\varepsilon_a/\varepsilon_b\mathcal{I}\varepsilon_a)$$

være venstremultiplikasjon $\overline{w} \mapsto \overline{\beta}\overline{w}$. Da er $\varphi_\beta = D(\mu_\beta)$ gitt ved $\varphi_\beta(f) = f\mu_\beta$ for $f \in D(\varepsilon_b(KQ)\varepsilon_a/\varepsilon_b\mathcal{I}\varepsilon_a)$. Med andre ord er $\varphi_\beta(f)(\overline{w}) = f(\overline{\beta}\overline{w})$.

(c) Følger fra (b).

$\square$

Vi avslutter dette kapittelet ved å se på et eksempel der vi finner de ikke-dekomponerbare injektive modulene.

Eksempel 2.2.9. La Q være quiveret

$$\begin{tikzcd} & 1 & \\ 2 \arrow[ur, "\alpha"] & & 3 \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

De ikke-dekomponerbare injektive modulene er $I(2) = S(2)$, $I(3) = S(3)$ og

$$I(1) = \begin{tikzcd} & K & \\ K \arrow[ur, "1"] & & K \arrow[ul, "1"'] \end{tikzcd}$$

I tillegg har vi at $I(2)/S(2) = 0$, $I(3)/S(3) = 0$ og $I(1)/S(1) = S(2) \oplus S(3)$.

Kapittel 3

Introduksjon til Dynkindiagrammer

I dette kapitlet vil vi se på Cartanmatriser, diagrammer bestemt av Cartanmatriser, additive og subadditive funksjoner og til slutt noen resultater om slike diagrammer og funksjoner.

3.1 Cartanmatriser og diagrammer

Vi starter med å definere hva en Cartanmatrise er. I Kapittel 5 vil Cartanmatriser være til stor hjelp når vi skal bevise hovedresultatene i denne oppgaven.

Definisjon 3.1.1. La I være en mengde, og la $i, j \in I$. La C_{ij} være et element i en matrise C, der i svarer til rad i og j svarer til kolonne j. Vi kaller funksjonen $C\colon I \times I \longrightarrow \mathbb{Z}$ for **Cartanmatrisen** over I hvis følgende krav til C_{ij} er oppfylt:

(a) $C_{ii} = 2$ for alle $i \in I$.

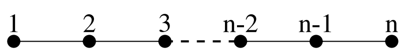
(b) $C_{ij} \leq 0$ for alle $i \neq j$ i I.

(c) $C_{ij} = 0$ hvis og bare hvis $C_{ji} = 0$.

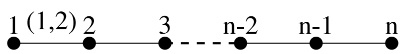
Enhver Cartanmatrise har en tilhørende graf. Hjørnene til grafen er elementene i I, og to hjørner $i, j \in I, i \neq j$ er forbundet med en kant dersom $C_{ij} \neq 0$. Ved hver kant skrives tallpar $(|C_{ij}|, |C_{ji}|)$ så lenge vi har $C_{ij} \cdot C_{ji} \neq 1$. Under følger eksempler på Dynkindiagrammer, Euklidske diagrammer og uendelige diagrammer. Merk at et Dynkindiagram X_n har n hjørner, mens et Euklidsk diagram $\tilde{X_n}$ har $n + 1$ hjørner.

Dynkindiagrammer:

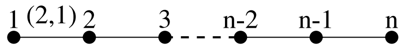
A_n:



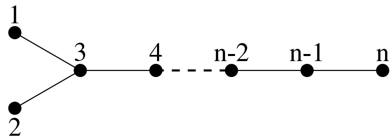
B_n:



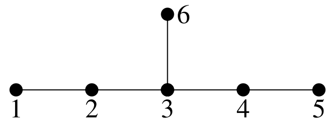
C_n:



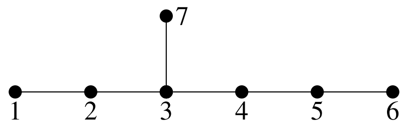
D_n:



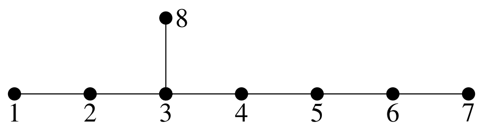
E_6:



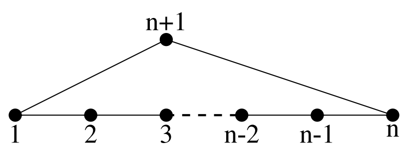
E_7:



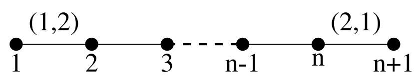
E_8:



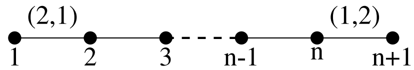
Euklidske diagrammer:
$\tilde{A}_n$:



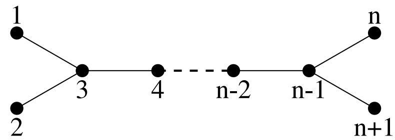
$\tilde{B}_n$:



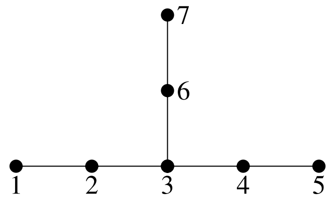
$\tilde{C}_n$:



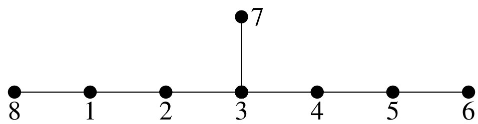
$\tilde{D}_n$:



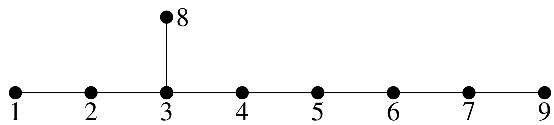
$\tilde{E}_6$:



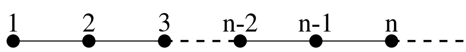
$\tilde{E}_7$:



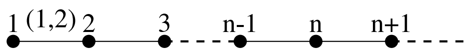
$\tilde{E}_8$:



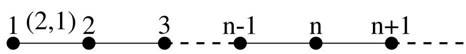
Uendelige diagrammer:
A_∞:



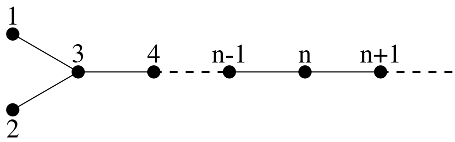
B_∞:



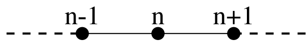
C_∞:



D_∞:



A_∞^∞:



Vi vil nå introdusere en spesiell type funksjoner for Cartanmatrisene. I neste del vil vi se at disse funksjonene legger begrensninger på diagrammene bestemt av Cartanmatriser.

Definisjon 3.1.2. La C være en Cartanmatrise over I. En **subaddivtiv funksjon** for C er en funksjon $d\colon\ I \longrightarrow \mathbb{N}$ slik at

$$\sum_{i \in I} d_i C_{ij} \geq 0$$

for alle $j \in I$. Hvis vi har

$$\sum_{i \in I} d_i C_{ij} = 0$$

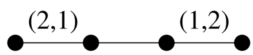
for alle $j \in I$ kalles d en **additiv** funksjon for C.

Vi viser et eksempel der vi med utgangspunkt i en Cartanmatrise finner det tilsvarende diagrammet og en additiv funksjon.

Eksempel 3.1.3. La C være Cartanmatrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi ser at denne Cartanmatrisen svarer til det Euklidske diagrammet $\tilde{C}_3$:



For å finne den additive funksjonen til C, ser vi på d = [d_0 d_1 d_2 d_3]. For at d skal være additiv, må vi ha:

$$\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette gir $2d_1 = d_2 = d_3 = 2d_4$, så enten er d = [1 2 2 1] eller et naturlig tall-multiplum av denne.

Ved å benytte denne metoden kan vi finne (sub)additive funksjoner for alle de Euklidske diagrammene.

3.2 Resultater

Formålet med denne delen er å se på hvordan additive og subadditive funksjoner legger føringer på hvilke diagrammer vi kan ha. Dette vil være til hjelp når vi skal bevise hovedresultatene i denne oppgaven. Vi starter med et lemma om Euklidske diagrammer.

Lemma 3.2.1. *La C være et Euklidsk diagram. Da er hvilken som helst subadditiv funksjon for C additiv.*

Bevis. La C^T være den transponerte av C, slik at $C^T_{ij} = C_{ji}$ for alle $i, j \in I$. Siden C er Euklidsk må også C^T være det. La δ være en additiv funksjon for C^T, slik at $\delta C^T = 0$. La d være en subadditiv funksjon for C. Da er $\delta(dC)^T = \delta(C^T d^T) = (\delta C^T)d^T = 0$, siden δ er en additiv funksjon for C^T. Dette gir at $\delta(dC)^T = 0$, som må bety at $(dC)^T = 0$ siden $\delta_i > 0$ for alle $i \in I$. Siden d er en subadditiv funksjon for C, er $(dC)_i \geq 0$ for alle $i \in I$. For å oppfylle $dC = 0$ må derfor d være en additiv funksjon for C. Dette betyr at alle subadditive funksjoner er additive for Euklidske diagrammer. □

Før vi kan gå videre må vi definere hva vi mener med at en Cartanmatrise er mindre enn en annen.

Definisjon 3.2.2. La C og C' være to Cartanmatriser over henholdsvis I og I'. Da sier vi at C' er **mindre** enn C dersom $I' \subseteq I$ og $|C'_{ij}| \leq |C_{ij}|$ for alle $i, j \in I'$. En Cartanmatrise kalles **sammenhengende** hvis alle hjørner i den tilhørende grafen er knyttet sammen.

Det neste lemmaet viser hvordan vi ut fra en Cartanmatrise med kjent subadditiv funksjon, kan finne den subadditive funksjonen til en mindre Cartanmatrise.

Lemma 3.2.3. *La C og C' være to forskjellige Cartanmatriser, der C' er mindre enn C. La d være en subadditiv funksjon for C. Da er $d|_{I'}$ en subadditiv funksjon for C' som ikke er additiv.*

Bevis. Siden d er en subadditiv funksjon for C, har vi $\sum_{i \in I} d_i C_{ij} \geq 0$ for alle $j \in I$. La $j \in I'$. Da er

$$\sum_{i \in I} d_i C_{ij} = d_j C_{jj} + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} d_i C_{ij} \geq 0.$$

Siden C er en Cartanmatrise er $C_{jj} = 2$, og vi har

$$2d_j \geq \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} d_i |C_{ij}| \geq \sum_{\substack{i \in I' \\ i \neq j}} d_i |C_{ij}| \geq \sum_{\substack{i \in I' \\ i \neq j}} d_i |C'_{ij}|,$$

som viser at $d|_{I'}$ er en subadditiv funksjon for C'. Siden C og C' er forskjellige Cartanmatriser og C' er mindre enn C, vet vi at $I' \subsetneq I$ eller at det finnes $i, j \in I'$ slik at $|C'_{ij}| < |C_{ij}|$. Anta $I' \subsetneq I$ og velg $k \in I \backslash I'$. Da er

$$\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} d_i |C_{ij}| = d_k |C_{kj}| + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j,k}} d_i |C_{ij}| > \sum_{\substack{i \in I' \\ i \neq j}} d_i |C_{ij}|.$$

Anta at det finnes $i, j \in I'$ slik at $|C'_{ij}| < |C_{ij}|$. Da er

$$\sum_{\substack{i \in I' \\ i \neq j}} d_i |C_{ij}| > \sum_{\substack{i \in I' \\ i \neq j}} d_i |C'_{ij}|.$$

Altså vil alltid minst én av ulikhetene være ekte, så $d|_{I'}$ er en subadditiv funksjon for C' som ikke er additiv. □

Det siste lemmaet i denne delen tar for seg uendelige diagrammer.

Lemma 3.2.4. *Enhver subadditiv funksjon for hvilken som helst av $A_\infty^\infty, B_\infty, C_\infty$ eller D_∞ er additiv og begrenset.*

Bevis. Start med A_∞^∞. La $I = \mathbb{Z}$ med kanter $\{i, i+1\}$. For en subadditiv funksjon d finnes det en $i \in \mathbb{Z}$ hvor d har sin laveste verdi. Dette gir $d_{i-1} \geq d_i$ og $d_{i+1} \geq d_i$. Siden d er subadditiv, er $2d_i \geq d_{i-1} + d_{i+1}$. Sammen gir dette $d_{i-1} = d_i = d_{i+1}$, som viser at d er konstant og begrenset.

Videre ser vi på den subadditive funksjonen for B_∞:

$$\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2d_1 - 2d_2 & -d_1 + 2d_2 - d_3 & -d_2 + 2d_3 - d_4 & \cdots \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

Dette gir ulikhetene

$$\begin{aligned} 2d_1 - 2d_2 \geq 0 &\Rightarrow 2d_1 \geq 2d_2 \\ -d_1 + 2d_2 - d3 \geq 0 &\Rightarrow 2d_2 \geq d_1 + d_3 \\ -d_2 + 2d_3 - d4 \geq 0 &\Rightarrow 2d_3 \geq d_2 + d_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Denne subadditive funksjonen er også en subadditiv funksjon for A_∞^∞:

$$\cdots — d_4 — d_3 — d_2 — d_1 — d_2 — d_3 — d_4 — \cdots$$

Vi ser at vi får de samme ulikhetene som for B_∞, nemlig

$$\begin{aligned} 2d_1 \geq d_2 + d_2 = 2d_2 \\ 2d_2 \geq d_1 + d_3 \\ 2d_3 \geq d_2 + d_4 \\ \vdots \end{aligned}$$

Dette viser at siden en subadditiv funksjon for A_∞^∞ må være additiv og begrenset, må også en subadditiv funksjon for B_∞ være det.

Samme fremgangsmåte for C_∞ gir ulikhetene:

$$\begin{aligned} 2d_1 - d_2 \geq 0 &\Rightarrow 2d_1 \geq d_2 \\ -2d_1 + 2d_2 - d_3 \geq 0 &\Rightarrow 2d_2 \geq 2d_1 + d_3 \\ -d_2 + 2d_3 - d_4 \geq 0 &\Rightarrow 2d_3 \geq d_2 + d_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Denne subadditive funksjonen er også en subadditiv funksjon for A_∞^∞:

$$\cdots—d_4—d_3—d_2—2d_1—d_2—d_3—d_4—\cdots$$

Ulikhetene blir de samme som for C_∞:

$$\begin{gathered} 4d_1 \geq d_2 + d_2 = 2d_2 \Rightarrow 2d_1 \geq d_2 \\ 2d_2 \geq 2d_1 + d_3 \\ 2d_3 \geq d_2 + d_4 \\ \vdots \end{gathered}$$

Til slutt ser vi at vi kan gjøre det samme for D_∞. Vi får ulikhetene

$$\begin{gathered} 2d_1 \geq d_3, 2d_2 \geq d_3 \Rightarrow 2d_1 + 2d_2 \geq 2d_3 \\ 2d_3 \geq d_1 + d_2 + d_4 \\ 2d_4 \geq d_3 + d_5 \\ \vdots \end{gathered}$$

som er en subadditiv funksjon for A_∞^∞ ved å velge

$$\cdots—d_5—d_4—d_3—d_1 + d_2—d_3—d_4—d_5—\cdots$$

Dette viser at enhver subadditiv funksjon for hvilken som helst av $A_\infty^\infty, B_\infty, C_\infty$ eller D_∞ er additiv og begrenset. □

Det neste teoremet avslutter dette kapittelet, og følger fra de tre foregående lemmaene.

Teorem 3.2.5. *La C være en sammenhengende Cartanmatrise og d en subadditiv funksjon for C.*

(a) C er Cartanmatrisen til enten et Dynkindiagram, et Euklidsk diagram eller én av $A_\infty^\infty, A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$.

(b) Hvis d ikke er additiv, så er C Cartanmatrisen til et Dynkindiagram eller A_∞.

(c) Hvis d er ubegrenset, så er C Cartanmatrisen til A_∞.

Bevis. (a) Anta at C verken er et Dynkindiagram eller én av $A_\infty^\infty, A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$. Da finnes det et Euklidsk diagram C' som er mindre enn C. Anta at det ikke finnes et slikt Euklidsk diagram. Da kan C ikke inneholde $\tilde{A}_n$, og kan dermed ikke inneholde noen orienterte sykler. Derfor må C være et tre. Siden C heller ikke kan inneholde $\tilde{D}_n$, kan dette treet ha maksimalt ett forgreiningspunkt, og ut fra dette punketet må det gå nøyaktig tre greiner. Siden C heller ikke kan inneholde $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ eller $\tilde{E}_8$, står vi igjen med at C er E_6, E_7 eller E_8. Men C skulle ikke være et Dynkindiagram. Det må derfor finnes et Euklidsk diagram C' som er mindre enn C.

Hvis C' er mindre enn C, kan d ikke være en additiv funksjon for C' ifølge Lemma 3.2.3. Samtidig vet vi fra Lemma 3.2.1 at d må være en additiv funksjon for C', siden C' er et Euklidsk diagram. Denne motsigelsen gir at C' ikke kan være mindre enn C, og dermed har vi at C er enten et Dynkindiagram, et Euklidsk diagram eller én av $A_\infty^\infty, A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$.

(b) Hvis d ikke er additiv, kan C ikke være et Euklidsk diagram ifølge Lemma 3.2.1, og heller ikke noen av $A_\infty^\infty, B_\infty, C_\infty$ eller D_∞ ifølge Lemma 3.2.4. De eneste mulighetene som gjenstår da er at C er et Dynkindiagram eller A_∞.

(c) Hvis d er ubegrenset, må C være Cartanmatrisen til et uendelig diagram. Lemma 3.2.4 sier at alle $A_\infty^\infty, B_\infty, C_\infty$ eller D_∞ har en subadditiv funksjon som er begrenset. Dermed gjenstår bare A_∞.

□

Kapittel 4

Auslander-Reiten-teori

I de tidligere kapitlene har vi sett på hvordan vi kan bruke quivre for å visualisere endeligdimensjonale algebraer og modulene deres. Vi vil i dette kapittelet se nærmere på hvordan vi kan regne ut de ikke-dekomponerbare modulene til en algebra og homomorfier mellom slike. I de to første delene i dette kapittelet vil vi se på nesten splitte eksakte sekvenser og Auslander-Reiten-translasjonen. Deretter vil vi i den siste delen se hvordan dette kan brukes for å konstruere hva vi kaller Auslander-Reiten-quiveret til en algebra.

I dette kapittelet lar vi A være en endeligdimensjonal K-algebra over en algebraisk lukket kropp K, og alle A-moduler er høyre endeligdimensjonale hvis ikke annet er oppgitt.

4.1 Nesten splitte eksakte sekvenser

Vi har tidligere sett at enhver modul i $\operatorname{mod} A$ kan dekomponeres i en direktesum av ikke-dekomponerbare moduler, og at summandene er entydig bestemt opp til isomorfi og rekkefølge. Målet videre er å finne homomorfier mellom ulike typer moduler i $\operatorname{mod} A$. Vi starter med noen definisjoner.

Definisjon 4.1.1. La L, M og N være moduler i $\operatorname{mod} A$.

(a) En A-modulhomomorfi $f\colon L \longrightarrow M$ kalles **venstre minimal** hvis enhver $h \in \operatorname{End} M$ slik at $hf = f$ er en automorfi.

(b) En A-modulhomomorfi $g\colon M \longrightarrow N$ kalles **høyre minimal** hvis enhver $k \in \operatorname{End} M$ slik at $gk = g$ er en automorfi.

(c) En A-modulhomomorfi $f\colon L \longrightarrow M$ kalles **venstre nesten splitt** hvis

  (i) f ikke er en splitt monomorfi og

  (ii) for enhver A-homomorfi $u\colon L \longrightarrow U$ som ikke er en splitt monomorfi finnes $u'\colon M \longrightarrow U$ slik at $u'f = u$, dvs. at u' får det følgende diagrammet til å kommutere:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, "u'"] \\ U & \end{tikzcd}$$

(d) En A-modulhomomorfi $g\colon M \longrightarrow N$ kalles **høyre nesten splitt** hvis

(i) g ikke er en splitt epimorfi og

(ii) for enhver A-homomorfi $v\colon V \longrightarrow N$ som ikke er en splitt epimorfi finnes $v'\colon M \longrightarrow U$ slik at $gv' = v$, dvs. at v' får det følgende diagrammet til å kommutere:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "v'"'] \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

(e) En A-modulhomomorfi $f\colon L \longrightarrow M$ kalles **venstre minimal nesten splitt** hvis den både er venstre minimal og venstre nesten splitt.

(f) En A-modulhomomorfi $g\colon M \longrightarrow N$ kalles **høyre minimal nesten splitt** hvis den både er høyre minimal og høyre nesten splitt.

Vi ser at utsagnene i definisjonen er parvis duale av hverandre. I resten av kapittelet vil vi ofte ha resultater som har to duale utsagn. Vi vil da bare bevise det første.

Proposisjon 4.1.2. *(a) Hvis A-modulhomomorfiene $f\colon L \longrightarrow M$ og $f'\colon L \longrightarrow M'$ er venstre minimale nesten splitte, så finnes det en isomorfi $h\colon M \longrightarrow M'$ slik at $f' = hf$.*

(b) Hvis A-modulhomomorfiene $g\colon M \longrightarrow N$ og $g'\colon M' \longrightarrow N$ er høyre minimale nesten splitte, så finnes det en isomorfi $k\colon M \longrightarrow M'$ slik at $g = g'k$.

Bevis. (a) Siden f og f' er venstre nesten splitte, finnes $h\colon M \longrightarrow M'$ og $h'\colon M' \longrightarrow M$ slik at $f' = hf$ og $f = h'f'$. Dermed er $f = h'hf$ og $f' = hh'f'$. Siden f og f' er minimale, er hh' og $h'h$ automorfier. Da må h være en isomorfi.

□

Det finnes en sammenheng mellom nesten splitte morfier og ikke-dekomponerbare moduler, og dette vil vi se i det neste lemmaet.

Lemma 4.1.3. *(a) Hvis $f\colon L \longrightarrow M$ er en venstre nesten splitt morfi i* $\operatorname{mod} A$*, så er modulen L ikke-dekomponerbar.*

(b) Hvis $g\colon M \longrightarrow N$ er en høyre nesten splitt morfi i $\operatorname{mod} A$*, så er modulen N ikke-dekomponerbar.*

Bevis. (a) Anta at $L = L_1 \oplus L_2$, der både L_1 og L_2 er ikke-null, og la $p_i \colon L \longrightarrow L_i$ (med $i = 1, 2$) betegne de tilsvarende projeksjonene. For begge i er homomorfien p_i ikke en splitt monomorfi. Dermed finnes det en homomorfi $u_i \colon M \longrightarrow L_i$ slik at $u_i f = p_i$. Men $u = [u_1, u_2]^T \colon M \longrightarrow L$ tilfredsstiller da $uf = 1_L$, og dette strider mot at f ikke er en splitt monomorfi. Vi kan derfor konkludere at L er ikke-dekomponerbar.

□

Vi vil nå definere irredusible morfier.

Definisjon 4.1.4. En homomorfi $f \colon X \longrightarrow Y$ i $\operatorname{mod} A$ kalles **irredusibel** gitt at:

(a) f verken er en splitt monomorfi eller en splitt epimorfi og

(b) hvis $f = f_1 f_2$, så er enten f_1 en splitt epimorfi eller f_2 en splitt monomorfi.

For at morfien f i det følgende diagrammet skal være irredusibel, må enten f_1 være en splitt epimorfi eller f_2 en splitt monomorfi.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

En irredusibel morfi i $\operatorname{mod} A$ er enten en ekte monomorfi eller en ekte epimorfi. For å vise dette ser vi på morfien $f \colon X \longrightarrow Y$, som vi lar være irredusibel, men ikke en ekte epimorfi. Den kanoniske faktoriseringen gjennom $\operatorname{Im} f$ gir $f = jp$, som vist på følgende figur:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \\ & \operatorname{Im} f \arrow[ur, hook, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Vi vet at j ikke er en splitt epimorfi, så p må være en splitt monomorfi. Dermed er f en ekte monomorfi.

Vi går videre til å se på radikalet til kategorien $\operatorname{mod} A$, som vi vil betegne rad_A. Hvis X og Y er ikke-dekomponerbare moduler i $\operatorname{mod} A$, bruker vi betegnelsen $\operatorname{rad}_A(X, Y)$ på K-vektorrommet av alle ikke-inverterbare homomorfier fra X til Y. På samme måte lar vi $\operatorname{rad}_A^2(X, Y)$ bestå av alle A-modulhomomorfier på formen gf, hvor $f \in \operatorname{rad}_A(X, Z)$ og $g \in \operatorname{rad}_A(Z, Y)$. Her er Z en modul i $\operatorname{mod} A$ som kan være dekomponerbar. Vi ser at $\operatorname{rad}_A^2(X, Y) \subseteq \operatorname{rad}_A(X, Y)$.

Lemma 4.1.5. *La X, Y være ikke-dekomponerbare moduler i $\operatorname{mod} A$. En morfi $f \colon X \longrightarrow Y$ er irredusibel hvis og bare hvis $f \in \operatorname{rad}_A(X, Y) \setminus \operatorname{rad}_A^2(X, Y)$.*

Bevis. Anta at f er irredusibel. Da har vi $f \in \operatorname{rad}_A(X,Y)$. Hvis $f \in \operatorname{rad}_A^2(X,Y)$, så kan f skrives som $f = gh$, hvor $h \in \operatorname{rad}_A(X,Z)$ og $g \in \operatorname{rad}_A(Z,Y)$ for en Z i $\operatorname{mod} A$. Vi dekomponerer Z i ikke-dekomponerbare summander slik at vi får

$$Z = \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i,$$

og vi kan skrive

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_t \end{bmatrix} : X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i$$

og

$$g = \begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_t \end{bmatrix} : \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i \longrightarrow Y.$$

Siden f er irredusibel, er enten h en splitt monomorfi eller g er splitt epimorfi. Anta det første, og la

$$h' = \begin{bmatrix} h'_1 & \dots & h'_t \end{bmatrix} : \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i \longrightarrow X$$

være slik at $1_X = h'h = \sum_{i=1}^{t} h'_i h_i$. Siden h_i ikke er inverterbar (for hvilken som helst i), kan heller ikke $h'_i h_i$ være inverterbar, så vi må ha $h'_i h_i \in \operatorname{rad}_A(X,X) = \operatorname{rad}\operatorname{End} X$. Siden $\operatorname{End} X$ er lokal, skulle vi hatt $1_X \in \operatorname{rad}\operatorname{End} X$. Dette er en motsigelse. Dermed er h ikke en splitt monomorfi, og på lignende måte kan det vises at g ikke er en splitt epimorfi. Dette viser at $f \notin \operatorname{rad}_A^2(X,Y)$.

Anta nå motsatt at $f \in \operatorname{rad}_A(X,Y) \setminus \operatorname{rad}_A^2(X,Y)$. Siden X, Y er ikke-dekomponerbare og f ikke er en isomorfi, kan f verken være en splitt monomorfi eller en splitt epimorfi. Anta $f = gh$, hvor $h\colon X \longrightarrow Z$ og $g\colon Z \longrightarrow Y$. Vi dekomponerer Z, og lar igjen $h\colon X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i$ og $g\colon \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i \longrightarrow Y$, men denne gangen slik at $f = \sum_{i=1}^{t} g_i h_i$. Siden $f \notin \operatorname{rad}_A^2(X,Y)$, finnes det enten et naturlig tall i slik at h_i er inverterbar eller et naturlig tall j slik at g_j er inverterbar. I det første tilfellet er h en splitt monomorfi og i det andre tilfellet er g en splitt epimorfi. Altså er f irredusibel. $\square$

Det neste lemmaet viser hvordan monomorfier (eller epimorfier) kan karakteriseres ved hjelp av kokjernene (eller kjernene) deres.

Lemma 4.1.6. *La*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

være en ikke-splitt kort eksakt sekvens i $\operatorname{mod} A$.

(a) Homomorfien $f\colon L \longrightarrow M$ er irredusibel hvis og bare hvis det for hver homomorfi $v\colon V \longrightarrow N$ finnes enten $v_1\colon V \longrightarrow M$ slik at $v = gv_1$ eller $v_2\colon M \longrightarrow V$ slik at $g = vv_2$.

(b) Homomorfien $g\colon M \longrightarrow N$ er irredusibel hvis og bare hvis det for hver homomorfi $u\colon L \longrightarrow U$ finnes enten $u_1\colon M \longrightarrow U$ slik at $u = u_1 f$ eller $u_2\colon U \longrightarrow M$ slik at $f = u_2 u$.

Bevis. Se [1, Lemma IV.1.7]. □

Vi skal nå se hvordan vi kan ved hjelp av det forrige lemmaet kan bruke irredusible morfier for å konstruere nye ikke-dekomponerbare moduler.

Korollar 4.1.7. *(a) Hvis $f\colon L \longrightarrow M$ er en irredusibel monomorfi, så er $N = \operatorname{Coker} f$ ikke-dekomponerbar.*

(b) Hvis $g\colon M \longrightarrow N$ er en irredusibel epimorfi, så er $L = \operatorname{Ker} g$ ikke-dekomponerbar.

Bevis. La $g\colon M \longrightarrow N$ være kokjernen til f og anta at $N = N_1 \oplus N_2$, med N_1 og N_2 ikke-null. La $q_i\colon N_i \longrightarrow N$ (med $i = 1, 2$) betegne de tilsvarende inklusjonene. Hvis det finnes en morfi $u_i\colon M \longrightarrow N_i$ slik at $g = q_i u_i$, så er q_i en epimorfi siden g er en epimorfi. Dermed er g en isomorfi, noe som strider mot at $N_1 \neq (0)$ og $N_2 \neq (0)$. Da følger det fra Lemma 4.1.6 at det finnes en homomorfi $v_i\colon N_i \longrightarrow M$ slik at $gv_i = q_i$ (for $i = 1, 2$). Dermed må $v = [v_1\ v_2]\colon N_1 \oplus N_2 \longrightarrow M$ tilfredsstille $gv = 1_N$, så g er en splitt epimorfi. Men da er f en splitt monomorfi, og dette strider mot at f er irredusibel. □

Det følgende teoremet knytter sammen irredusible morfier, ikke-dekomponerbare moduler og minimale nesten splitte sekvenser.

Teorem 4.1.8. *(a) La $f\colon L \longrightarrow M$ være venstre minimal nesten splitt i* $\operatorname{mod} A$*. Da er f irredusibel. Videre er en homomorfi $f'\colon L \longrightarrow M'$ av A-moduler irredusibel hvis og bare hvis $M' \neq (0)$ og det finnes en direktesumdekomposisjon $M \cong M' \oplus M''$ og en homomorfi $f''\colon L \longrightarrow M''$ slik at*

$$\begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix} : L \longrightarrow M' \oplus M''$$

er venstre minimal nesten splitt.

(b) La $g\colon M \longrightarrow N$ være høyre minimal nesten splitt i $\operatorname{mod} A$*. Da er g irredusibel. Videre er en homomorfi $g'\colon M' \longrightarrow N$ av A-moduler irredusibel hvis og bare hvis $M' \neq (0)$ og det finnes en direktesumdekomposisjon $M \cong M' \oplus M''$ og en homomorfi $g''\colon M'' \longrightarrow N$ slik at*

$$[g'\ g'']\colon M' \oplus M'' \longrightarrow N$$

er høyre minimal nesten splitt.

Bevis. Se [1, Theorem IV.1.10]. □

Vi vil nå se på en ny type eksakte sekvenser, sammensatt av en venstre og en høyre minimal nesten splitt sekvens.

Definisjon 4.1.9. En kort eksakt sekvens i $\operatorname{mod} A$

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

kalles en **nesten splitt sekvens** gitt at

(a) f er venstre minimal nesten splitt og

(b) g er høyre minimal neste splitt.

Vi vet fra Lemma 4.1.3 at hvis det finnes en nesten splitt sekvens, så må L og N være ikke-dekomponerbare moduler. Siden f ikke er en splitt monomorfi og g ikke er en splitt epimorfi, følger det at en nesten splitt sekvens aldri splitter, så L er ikke injektiv og N er ikke projektiv. Videre følger det fra Proposisjon 4.1.2 at en nesten splitt sekvens er entydig bestemt (opp til isomorfi) av endepunktene til sekvensen.

Lemma 4.1.10. *La*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

være et kommutativt diagram i $\operatorname{mod} A$*, hvor radene er eksakte og ikke-splitte.*

(a) Hvis L er ikke-dekomponerbar og w er en automorfi, så er u, og dermed også v, automorfier.

(b) Hvis N er ikke-dekomponerbar og u er en automorfi, så er w, og dermed også v, automorfier.

Bevis. (a) Vi kan anta at $w = 1_N$. Hvis u ikke er en isomorfi, må den være nilpotent (siden $\operatorname{End} L$ er lokal). Det må altså finnes en m slik at $u^m = 0$. Da er $v^m f = f u^m = 0$, så v^m kan faktoriseres via kokjernen $g\colon M \longrightarrow N$ av f, dvs. at det finnes $h\colon N \longrightarrow M$ slik at $v^m = hg$. Siden $gv^m = g$, deduserer vi at $ghg = g$ og en konskvens av dette er at $gh = 1_N$ (siden g er en epimorfi). Dette strider mot at den gitte sekvensen ikke er splitt. Altså må u være en automorfi.

□

Til slutt i denne delen ser vi på et teorem som gir flere ekvivalente utsagn for nesten splitte sekvenser.

Teorem 4.1.11. *La*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

være en kort eksakt sekvens i $\operatorname{mod} A$*. De følgende påstandene er ekvivalente:*

(a) Den gitte sekvensen er nesten splitt.

(b) L er ikke-dekomponerbar, og g er høyre nesten splitt.

(c) N er ikke-dekomponerbar, og f er venstre nesten splitt.

(d) Homomorfien f er venstre minimal nesten splitt.

(e) Homomorfien g er høyre minimal nesten splitt.

(f) L og N er ikke-dekomponerbare, og f og g er irredusible.

Bevis. Vi starter med å presentere strategien for hvordan vi vil vise at de ulike påstandene er ekvivalente. Fra definisjonen av nesten splitte sekvenser, har vi (a) $\Rightarrow$ (d) og (a) $\Rightarrow$ (e). Vi har også fra Lemma 4.1.3 at (a) $\Rightarrow$ (b) og (a) $\Rightarrow$ (c). Sammen gir Teorem 4.1.8 og Lemma 4.1.3 at (a) $\Rightarrow$ (f). Vi vet altså at (a) impliserer alle de andre påstandene.

For å vise de resterende implikasjonene, starter vi med å bevise at (e) $\Rightarrow$ (b). Beviset for at (d) $\Rightarrow$ (c) følger ved dualitet. Vi beviser at (b) $\Rightarrow$ (c); beviset for at (c) $\Rightarrow$ (b) er lignende. Vi beviser så at (b) og (c) sammen impliserer (a). Nå vet vi at de fem første påstandene er ekvivalente. Da gjenstår det bare å vise (f) $\Rightarrow$ (b) for å fullføre beviset.

Anta at homomorfien g er høyre minimal nesten splitt (påstand (e)). Ved Teorem 4.1.8 følger det at g er irredusibel. Da sier Korollar 4.1.7 at $L = \operatorname{Ker} g$ er ikke-dekomponerbar. Altså har vi (e) $\Rightarrow$ (b).

Se [1, Theorem IV.1.13] for beviset for at (b) er ekvivalent med (c).

Anta nå at både (b) og (c) holder. Vi må vise at f og g er minimale for å vise at (b) og (c) sammen impliserer (a). For å bevise at f er minimal, la $h \in \operatorname{End} M$ være slik at $hf = f$. Vi har et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_L"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[r] \arrow[d, "1_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

med eksakte rader. Ved Lemma 4.1.10 er h en automorfi. Dermed er f venstre minimal. Et lignende argument viser at g er høyre minimal.

Til slutt beviser vi at (f) $\Rightarrow$ (b). Vi har at L er ikke-dekomponerbar og at g ikke er en splitt epimorfi. Anta at $v\colon V \longrightarrow N$ ikke er en splitt epimorfi. Vi kan anta at V er ikke-dekomponerbar (og hvis nødvendig bytte ut V med én av dens ikke-dekomponerbare summander). Vi vet at f er irredusibel, så Lemma 4.1.6 gir $v'\colon V \longrightarrow M$ slik at $v = gv'$ (og da er vi ferdige) eller $h\colon M \longrightarrow V$ slik at $g = vh$. I det siste tilfellet må h være en splitt monomorfi siden g er irredusibel og v ikke er en splitt epimorfi. Siden V er ikke-dekomponerbar er h en isomorfi. Men $v' = h^{-1}$ tilfredsstiller da $v = gv'$, og teoremet er bevist. $\square$

4.2 Auslander-Reiten-translasjonen og eksistens av nesten splitte eksakte sekvenser

Vi ønsker nå å bevise at det finnes nesten splitte sekvenser i $\operatorname{mod} A$. Vi innleder denne delen med å se på noen spesielle funktorer. Den første funktoren vi ser på er A-dual-funktoren

$$(-)^t = \operatorname{Hom}_A(-, A)\colon \operatorname{mod} A \longrightarrow \operatorname{mod} A^{\text{op}}.$$

Denne funktoren gir en dualitet mellom kategorien av $\operatorname{proj} A$ av projektive høyre A-moduler og kategorien $\operatorname{proj} A^{\mathrm{op}}$ av projektive venstre A-moduler. Vi vil nå bruke denne funktoren til å definere en ny funktor.

Definisjon 4.2.1. La modulen M og de projektive modulene P_1 og P_0 være i $\operatorname{mod} A$ og la p_0 og den den induserte avbildningen av p_1 gitt ved $P_1 \longrightarrow \operatorname{Im} p_1 = \operatorname{Ker} p_0$ være projektive dekker slik at

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

er en minimal projektiv presentasjon av M. Ved å bruke funktoren $(-)^t$, får vi en eksakt sekvens av venstre A-moduler

$$0 \longrightarrow M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \longrightarrow \operatorname{Coker} p_1^t \longrightarrow 0.$$

Vi bruker betegnelsen $\operatorname{Tr} M$ for $\operatorname{Coker} p_1^t$, og kaller dette for den **transponerte** til M.

Vi vet at projektive dekker er entydig bestemt opp til isomorfi, og dette betyr at $\operatorname{Tr} M$ også må være entydig bestemt opp til isomorfi. Vi vil nå se på de viktigste egenskapene til $\operatorname{Tr} M$.

Proposisjon 4.2.2. *La M være en ikke-dekomponerbar modul i $\operatorname{mod} A$.*

(a) Den venstre A-modulen $\operatorname{Tr} M$ har ingen ikke-null projektive direktesummander.

(b) Hvis M ikke er projektiv, så er sekvensen

$$P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \longrightarrow \operatorname{Tr} M \longrightarrow 0$$

indusert fra den minimale projektive presentasjonen

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

til M en minimal projektiv presentasjon til den venstre A-modulen $\operatorname{Tr} M$.

(c) M er projektiv hvis og bare hvis $\operatorname{Tr} M = (0)$. Hvis M ikke er projektiv, så er $\operatorname{Tr} M$ ikke-dekomponerbar og $\operatorname{Tr}(\operatorname{Tr} M) \cong M$.

(d) Hvis M og N er ikke-dekomponerbare ikke-projektive, er $M \cong N$ hvis og bare hvis $\operatorname{Tr} M \cong \operatorname{Tr} N$.

Bevis. Se [1, Proposisjon IV.2.1]. □

Selv om Tr avbilder moduler fra $\operatorname{mod} A$ til $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$, er ikke Tr en dualitet, siden den sender de projektive modulene på null. Vi ønsker derfor på forhånd å ta bort de projektive modulene fra $\operatorname{mod} A$ og $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$ slik at Tr blir en dualitet.

For to A-moduler M, N lar vi $\mathcal{P}$ være undermengden av $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ som består av alle homomorfier som faktoriserer gjennom en projektiv A-modul. Det viser seg at $\mathcal{P}$ er et ideal i $\operatorname{mod} A$. Tilsvarende konstruerer vi idealet $\mathcal{I}$ i $\operatorname{mod} A$. Her er $\mathcal{I}$ undermengden av $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ bestående av alle homomorfier som faktoriserer gjennom en injektiv A-modul.

Definisjon 4.2.3. La $\mathcal{P}$ og $\mathcal{I}$ være idealene i $\operatorname{mod} A$ som består av undermengdene av $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ som faktoriserer gjennom henholdsvis en projektiv og en injektiv A-modul.

(a) Kvotientkategorien
$$\underline{\operatorname{mod}}A = \operatorname{mod} A/\mathcal{P}$$
kalles den **projektivt stabile kategorien**. Den har de samme objektene som $\operatorname{mod} A$, men K-vektorrommet $\underline{\operatorname{Hom}}_A(M, N)$ av morfier fra M til N i $\underline{\operatorname{mod} A}$ er definert til å være faktorrommet
$$\underline{\operatorname{Hom}}_A(M, N) = \operatorname{Hom}_A(M, N)/\mathcal{P}(M, N)$$
til $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ med sammensetning av morfier bestemt av sammensetningen i $\operatorname{mod} A$.

(b) Kvotientkategorien
$$\overline{\operatorname{mod}}A = \operatorname{mod} A/\mathcal{I}$$
kalles den **injektivt stabile kategorien**. Den har de samme objektene som $\operatorname{mod} A$, men K-vektorrommet $\overline{\operatorname{Hom}}_A(M, N)$ av morfier fra M til N i $\overline{\operatorname{mod}}A$ er definert til å være faktorrommet
$$\overline{\operatorname{Hom}}_A(M, N) = \operatorname{Hom}_A(M, N)/\mathcal{I}(M, N)$$
til $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ med sammensetning av morfier bestemt av sammensetningen i $\operatorname{mod} A$.

Dualiteten $\operatorname{Tr}\colon \underline{\operatorname{mod}}A \longrightarrow \underline{\operatorname{mod}}A^{\mathrm{op}}$, som nå er blitt beskrevet, kalles den **transponerte**. Siden denne tar høyre moduler til venstre moduler og motsatt, må den settes sammen med en annen funktor for at vi skal få en funktor som avbilder høyre moduler til høyre moduler og venstre moduler til venstre moduler. Vi velger å sette Tr sammen med standarddualiteten $D = \operatorname{Hom}_K(-, K)$.

Definisjon 4.2.4. Auslander-Reiten-translasjonene er definert som sammensetningen av D med Tr på følgende måte
$$\tau = D\operatorname{Tr} \text{ og } \tau^{-1} = \operatorname{Tr} D.$$

Den neste proposisjonen viser hvordan vi kan konstruere Auslander-Reiten-translasjonen til en modul.

Proposisjon 4.2.5. *(a) La*
$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$
være en minimal projektiv presentasjon til en A-modul M. Da finnes det en eksakt sekvens
$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \longrightarrow 0,$$
der ν er Nakayamafunktoren.

(b) *La*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_0} E_0 \xrightarrow{i_1} E_1$$

være en minimal injektiv presentasjon til en A-modul N. Da finnes det en eksakt sekvens

$$0 \longrightarrow \nu^{-1}N \xrightarrow{\nu^{-1}i_0} \nu^{-1}E_0 \xrightarrow{\nu^{-1}i_1} \nu^{-1}E_1 \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow 0,$$

der ν er Nakayamafunktoren.

Bevis. (a) Ved etter tur å anvende funktorene $(-)^t$ og D til den minimale projektive presentasjonen til M, får vi en eksakt sekvens

$$0 \longrightarrow D\,\mathrm{Tr}\,M \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \longrightarrow 0,$$

og (a) følger siden $\tau = D\,\mathrm{Tr}$.

(b) Se [1, Proposition IV.2.4].

□

Den neste proposisjonen gir noen av de mest grunnleggende egenskapene ved Auslander-Reiten-translasjonen.

Proposisjon 4.2.6. *La M og N være ikke-dekomponerbare moduler i* $\mathrm{mod}\,A$.

(a) *Modulen τM er null hvis og bare hvis M er projektiv.*

(b) *Modulen $\tau^{-1}N$ er null hvis og bare hvis N er injektiv.*

(c) *Hvis M er en ikke-projektiv modul, så er τM ikke-dekomponerbar ikke-injektiv og $\tau^{-1}\tau M \cong M$.*

(d) *Hvis N er en ikke-injektiv modul, så er $\tau^{-1}N$ ikke-dekomponerbar ikke-projektiv og $\tau\tau^{-1}N \cong N$.*

(e) *Hvis M og N er ikke-projektive, så er $M \cong N$ hvis og bare hvis det finnes en isomorfi $\tau M \cong \tau N$.*

(f) *Hvis M og N er ikke-injektive, så er $M \cong N$ hvis og bare hvis det finnes en isomorfi $\tau^{-1}M \cong \tau^{-1}N$.*

Bevis. Siden translasjonene τ og τ^{-1} er sammensetninger av transposisjonen Tr og dualiteten D, følger proposisjonen direkte fra Proposisjon 4.2.2, Teorem 1.2.11 og definisjonene. □

Nå som Auslander-Reiten-translasjonen er definert, kan vi bevise at det finnes nesten splitte eksakte sekvenser.

Teorem 4.2.7. (a) *For hvilken som helst ikke-dekomponerbar ikke-projektiv A-modul M_A finnes det en nesten splitt sekvens*

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

i $\mathrm{mod}\,A$.

(b) *For hvilken som helst ikke-dekomponerbar ikke-injektiv A-modul N_A finnes det en nesten splitt sekvens*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow 0$$

i $\operatorname{mod} A$.

Bevis. Se [1, Theorem IV.3.1]. □

Det følger at det finnes en høyre (eller venstre) minimal nesten splitt morfi som ender (eller starter) i hvilken som helst ikke-dekomponerbar ikke-projektiv (eller ikke-injektiv) modul. Vi vil nå vise at det finnes en slik homomorfi som ender (eller starter) i en ikke-dekomponerbar projektiv (eller injektiv) modul.

Proposisjon 4.2.8. (a) *La P være en ikke-dekomponerbar projektiv modul i* $\operatorname{mod} A$. *En A-modulhomomorfi $g\colon M \longrightarrow P$ er høyre minimal nesten splitt hvis og bare hvis g er en monomorfi med bilde likt* $\operatorname{rad} P$.

(b) *La I være en ikke-dekomponerbar injektiv modul i* $\operatorname{mod} A$. *En A-modulhomomorfi $f\colon I \longrightarrow M$ er venstre minimal nesten splitt hvis og bare hvis f er en epimorfi med kjerne lik* $\operatorname{soc} I$.

Bevis. Vi beviser bare (a); beviset for (b) er lignende. Fra Proposisjon 4.1.2 er det tilstrekkelig å vise at inklusjonshomomorfien $g\colon \operatorname{rad} P \longrightarrow P$ er høyre minimal nesten splitt. Siden g er en monomorfi, er g høyre minimal. Det er tydelig at g ikke er en splitt epimorfi. La dermed $v\colon V \longrightarrow P$ være en homomorfi som ikke er en splitt epimorfi. Siden P er projektiv, følger det fra Proposisjon 1.1.11 at modulen $\operatorname{rad} P$ er den entydige maksimale undermodulen til P. Siden v ikke er en epimorfi, har vi $v(V) \subseteq \operatorname{rad} P$, som vil si at v faktoriseres gjennom g. □

Vi oppsummerer de to forrige resultatene i et korollar.

Korollar 4.2.9. *La X være en ikke-dekomponerbar modul i* $\operatorname{mod} A$.

(a) *Det finnes en høyre minimal nesten splitt morfi $g\colon M \longrightarrow X$. Videre er $M = (0)$ hvis og bare hvis X er simpel projektiv.*

(b) *Det finnes en venstre minimal nesten splitt morfi $f\colon X \longrightarrow M$. Videre er $M = (0)$ hvis og bare hvis X er simpel injektiv.*

Bevis. Følger direkte fra Proposisjon 4.2.7 og Teorem 4.2.8. □

Vi vil nå se på hvordan vi kan konstruere noen typer nesten splitte eksakte sekvenser.

Proposisjon 4.2.10. (a) *La M være en ikke-dekomponerbar ikke-projektiv modul i* $\operatorname{mod} A$. *Det finnes en irredusibel morfi $f\colon X \longrightarrow M$ hvis og bare hvis det finnes en irredusibel morfi $f'\colon \tau M \longrightarrow X$.*

(b) *La N være en ikke-dekomponerbar ikke-injektiv modul i* $\operatorname{mod} A$. *Det finnes en irredusibel morfi $g\colon N \longrightarrow Y$ hvis og bare hvis det finnes en irredusibel morfi $g'\colon Y \longrightarrow \tau^{-1}N$.*

Bevis. Vi beviser bare (a); beviset for (b) er lignende. Anta at $f\colon X \longrightarrow M$ er irredusibel. Ved Teorem 4.1.8 finnes $h\colon Y \longrightarrow M$ slik at $[f\ h]\colon X \oplus Y \longrightarrow M$ er høyre minimal nesten splitt. Men da er $[f\ h]$ en epimorfi siden M ikke er projektiv. Dermed følger det fra Korollar 4.1.7 at $L = \mathrm{Ker}[f\ h]$ er ikke-dekomponerbar, og dermed er ifølge Korollar 4.1.11 den korte eksakte sekvensen

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\begin{bmatrix} f' \\ h' \end{bmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{[f\ h]} M \longrightarrow 0$$

nesten splitt. Som en konsekvens finnes det en isomorfi $g\colon \tau M \xrightarrow{\sim} L$ og homomorfien $f'g\colon \tau M \longrightarrow X$ er irredusibel. Den motsatte implikasjonen vises på lignende måte. $\square$

Videre ser vi hvordan dette kan brukes på simple projektive og injektiv moduler.

Korollar 4.2.11. *(a) La S være en simpel projektiv ikke-injektiv modul i $\mathrm{mod}\, A$. Hvis $f\colon S \longrightarrow M$ er irredusibel, så er M projektiv.*

(b) La S være en simpel injektiv ikke-projektiv modul i $\mathrm{mod}\, A$. Hvis $g\colon M \longrightarrow S$ er irredusibel, så er M injektiv.

Bevis. Vi beviser bare (a); beviset for (b) er lignende. Vi kan anta at M er ikke-dekomponerbar. Hvis M ikke er projektiv, finnes det ved Proposisjon 4.2.10 en irredusibel morfi $\tau M \longrightarrow S$, og dette strider mot Korollar 4.2.9. $\square$

La S være en simpel projektiv ikke-injektiv modul og $f\colon S \longrightarrow P$ være en venstre minimal nesten splitt morfi. Da vet vi fra Korollar 4.2.11 at P er projektiv og fra Proposisjon 4.2.8 at for hver ikke-dekomponerbare summand P' av P, er $f'\colon S \longrightarrow P'$ en monomorfi, der bildet til f' er en summand av $\mathrm{rad}\, P'$. Det følger at hvis P er en direktesum av alle slike ikke-dekomponerbare projektive P', så er sekvensen

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{f} P \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f \longrightarrow 0$$

nesten splitt.

Vi avslutter denne delen med å vise hvordan vi kan konstruere en nesten splitt eksakt sekvens for en ikke-simpel ikke-dekomponerbar projektiv-injektiv modul.

Proposisjon 4.2.12. *La P være en ikke-simpel ikke-dekomponerbar projektiv-injektiv modul, $S = \mathrm{soc}\, P$ og $R = \mathrm{rad}\, P$. Da er sekvensen*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}} R/S \oplus P \xrightarrow{[-j\ p]} P/S \longrightarrow 0$$

nesten splitt, hvor i, j er inklusjoner og p, q er projeksjoner.

Bevis. Siden R har simpel sokkel S, er den ikke-dekomponerbar. Dermed er $i\colon R \longrightarrow P$ (opp til isomorfi) den entydige ikke-trivielle irredusible morfien som ender i P, ifølge Proposisjon 4.2.8. Ved dualitet er modulen P/S ikke-dekomponerbar og $p\colon P \longrightarrow P/S$ er (opp til isomorfi) den entydige ikke-trivielle irredusible morfien som starter i P. Det følger fra Proposisjon 4.2.10 at $R \cong \tau(P/S)$. Siden den gitte eksakte sekvensen ikke er splitt, gjenstår det å vise ved Teorem 4.1.11 at monomorfien

$$\begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix} : R \longrightarrow R/S \oplus P$$

er venstre nesten splitt.

Anta at $u\colon R \longrightarrow U$ ikke er en splitt monomorfi. Hvis u er en monomorfi, så vet vi (fordi P er injektiv) at u faktoriseres gjennom P, og vi er ferdige. Hvis ikke finnes det en faktorisering $u = u'u''$, med $u''\colon R \longrightarrow U'$ en ekte epimorfi og $u'\colon U' \longrightarrow U$ en monomorfi. Siden $\operatorname{Ker} u \neq 0$, er den simple sokkelen S til R inneholdt i $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u'$. Dermed faktoriseres epimorfien u'' gjennom R/S, dvs. at det finnes $u_1\colon R/S \longrightarrow U'$ slik at $u'' = u_1 q$. Dermed har vi at $\overline{u} = [u'u_1\ 0]$ tilfredsstiller

$$\overline{u} \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix} = u'u_1 q = u'u'' = u.$$

□

4.3 Auslander-Reiten-quiver

I dette kapittelet vil vi se på hvordan vi kan bruke det vi vet om kategorien $\operatorname{mod} A$ til å konstruere et quiver. Hjørnene i dette quiveret vil være isomorfiklassene til ikke-dekomponerbare moduler og pilene irredusible homomorfier. Vi har sett at for to moduler M, N i $\operatorname{mod} A$ er A-homomorfien $f\colon M \longrightarrow N$ irredusibel hvis og bare hvis $f \in \operatorname{rad}_A(X,Y) \setminus \operatorname{rad}_A^2(X,Y)$. Derfor har vi at faktorrommet

$$\operatorname{Irr}(M,N) = \operatorname{rad}_A(M,N)/\operatorname{rad}_A^2(M,N)$$

av K-vektorrommene $\operatorname{rad}_A(M,N)$ og $\operatorname{rad}_A^2(M,N)$ gir antall irredusible morfier fra M til N.

Den neste proposisjonen viser sammenhengen mellom minimale nesten splitte sekvenser og rommet av irredusible morfier.

Proposisjon 4.3.1. *La $M = \bigoplus_{i=1}^{t} M_i^{n_i}$ være en modul i $\operatorname{mod} A$, med alle M_i ikke-dekomponerbare og parvis ikke-isomorfe.*

(a) La $f\colon L \longrightarrow M$ være en homomorfi i $\operatorname{mod} A$ med L ikke-dekomponerbar og

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_t \end{bmatrix}, \text{ hvor } f_i = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ \vdots \\ f_{in_i} \end{bmatrix} : L \longrightarrow M_i^{n_i}.$$

Da er f venstre minimal nesten splitt hvis og bare hvis alle f_{ij} tilhører $\operatorname{rad}_A(L, M_i)$ og deres restklasser $\overline{f}_{i1}, \ldots, \overline{f}_{in_i}$ modulo $\operatorname{rad}_A^2(L, M_i)$ danner en K-basis for $\operatorname{Irr}(L, M_i)$ for alle i, og hvis det finnes en ikke-dekomponerbar modul M' i $\operatorname{mod} A$ slik at $\operatorname{Irr}(L, M') \neq 0$, så er $M' \cong M_i$ for noen i.

(b) *La $g\colon M \longrightarrow N$ være en homomorfi i $\operatorname{mod} A$ med N ikke-dekomponerbar,*

$$g = \begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_t \end{bmatrix}, \textit{ hvor } g_i = \begin{bmatrix} g_{i1} & \dots & g_{in_i} \end{bmatrix} : M_i^{n_i} \longrightarrow N.$$

Da er g høyre minimal nesten splitt hvis og bare hvis alle g_{ij} tilhører $\operatorname{rad}_A(M_i, N)$ og deres restklasser $\overline{g}_{i1}, \dots, \overline{g}_{in_i}$ modulo $\operatorname{rad}_A^2(M_i, N)$ danner en K-basis for $\operatorname{Irr}(M_i, N)$ for alle i, og hvis det finnes en ikke-dekomponerbar modul M' i $\operatorname{mod} A$ slik at $\operatorname{Irr}(M', N) \neq 0$, så er $M' \cong M_i$ for noen i.

Bevis. Se [1, Theorem IV.4.2]. □

La

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^{t} M_i^{n_i} \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

være en eksakt sekvens i $\operatorname{mod} A$ med L, N ikke-dekomponerbare og alle M_i ikke-dekomponerbare og parvis ikke-isomorfe. La

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_t \end{bmatrix}, \textit{ hvor } f_i = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ \vdots \\ f_{in_i} \end{bmatrix} : L \longrightarrow M_i^{n_i}$$

og

$$g = \begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_t \end{bmatrix}, \textit{ hvor } g_i = \begin{bmatrix} g_{i1} & \dots & g_{in_i} \end{bmatrix} : M_i^{n_i} \longrightarrow N.$$

Det følger direkte fra Proposisjon 4.3.1 at

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^{t} M_i^{n_i} \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

er nesten splitt.

Vi er nå klare for å definere quiveret til kategorien $\operatorname{mod} A$.

Definisjon 4.3.2. La A være en basisk og sammenhengende endeligdimensjonal K-algebra. Quiveret $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ til $\operatorname{mod} A$ er definert på følgende måte:

(a) Hjørnene til $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ er isomorfiklassene $[X]$ til ikke-dekomponerbare moduler X i $\operatorname{mod} A$.

(b) La $[M]$, $[N]$ være hjørnene i $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ som svarer til de ikke-dekomponerbare modulene M, N i $\operatorname{mod} A$. Pilene $[M] \longrightarrow [N]$ er i bijektiv korrespondanse med vektorene til en basis for K-vektorrommet $\operatorname{Irr}(M, N)$.

Quiveret $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ til modulkategorien $\operatorname{mod} A$ kalles **Auslander-Reiten-quiveret til** A.

La L, M og N være moduler i $\operatorname{mod} A$, og betrakt $[L] \longrightarrow [M]$. Det følger fra Teorem 4.2.7, Proposisjon 4.2.8 og Proposisjon 4.3.1 at $[M]^-$ sammenfaller med mengen av punkter $[L]$, slik at L enten er en ikke-dekomponerbar direktesummand av $\operatorname{rad} M$ (hvis M er projektiv) eller en ikke-dekomponerbar direktesummand av den den midtre modulen i den nesten splitte sekvensen som ender i M (hvis M ikke er projektiv). Vi får det tilsvarende ved å se på $[M] \longrightarrow [N]$. Fra dette ser vi at for hver $[M]$ må mengdene $[M]^-$ og $[M]^+$ være endelige. Altså må hvert hjørne i $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ ha et endelig antall naboer. Auslander-Reiten-quiveret er derfor alltid lokalt endelig.

Vi vet fra før at enhver irredusibel morfi $f\colon M \longrightarrow N$ enten er en ekte monomorfi eller en ekte epimorfi. Videre har vi at $M = N$ fører til at f er en isomorfi siden M er endelig-dimensjonal som et K-vektorrom. Dette viser at kilden og målet til denne homomorfien må være forskjellig, og derfor at et Auslander-Reiten-quiver ikke har noen looper.

Nå ser vi på Γ_0' (eller Γ_0''), som er hjørnene i $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ som svarer til de projektive (eller injektive) ikke-dekomponerbare modulene. For hver $[N] \in \Gamma(\operatorname{mod} A)_0 \backslash \Gamma_0'$ finnes Auslander-Reiten-translasjonen τN til N, og det følger fra Proposisjon 4.2.6 at $[\tau N] \in \Gamma(\operatorname{mod} A) \backslash \Gamma_0''$. Fra dette følger bijeksjonen

$$\tau\colon \Gamma(\operatorname{mod} A)_0 \backslash \Gamma_0' \longrightarrow \Gamma(\operatorname{mod} A)_0 \backslash \Gamma_0''.$$

Dette gir $\tau[N] = [\tau N]$ for enhver ikke-dekomponerbar ikke-projektiv modul N og $\tau^{-1}[L] = [\tau^{-1}L]$ for enhver ikke-dekomponerbar ikke-injektiv modul L.

Vi betrakter nå den ikke-dekomponerbare ikke-projektive A-modulen N og den nesten splitte sekvensen

$$0 \longrightarrow \tau N \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{t} M_i^{n_i} \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

med alle M_i ikke-dekomponerbare og parvis ikke-isomorfe. For hver i har vi da

$$n_i = \dim_K \operatorname{Irr}(M_i, N) = \dim_K \operatorname{Irr}(\tau N, M_i).$$

Dette gir opphav til følgende maske i $\Gamma(\operatorname{mod} A)$:

$$\begin{tikzcd}
 & {[M_1]} \arrow[dr, shift left, "\beta_{11}"] \arrow[dr, shift right, "\beta_{1n_1}"'] \arrow[dd, dashed, no head] & \\
{[\tau N]} \arrow[ur, shift left, "\alpha_{11}"] \arrow[ur, shift right, "\alpha_{1n_1}"'] \arrow[dr, shift left, "\alpha_{tn_t}"] \arrow[dr, shift right, "\alpha_{t1}"'] & & {[N]} \\
 & {[M_t]} \arrow[ur, shift left, "\beta_{tn_t}"] \arrow[ur, shift right, "\beta_{t1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Her ser vi tydelig at $[\tau N]^+ = [N]^-$ og at det for hver $[M_i]$ i denne mengden finnes en bijeksjon mellom mengden $\{\alpha_{i1}, \dots \alpha_{in_i}\}$ av piler fra $[\tau N]$ til $[M_i]$ og mengden $\{\beta_{i1}, \dots \beta_{in_i}\}$ av piler fra $[M_i]$ til $[N]$.

Vi skal nå bruke dette til å se på en ny type quiver.

Definisjon 4.3.3. La Γ være et lokalt endelig quiver uten looper, og la τ være en bijeksjon, der både definisjonsmengden og verdimengden til τ er undermengder av Γ_0. Paret (Γ, τ) kalles et **translasjonsquiver**, hvis vi for hver $x \in \Gamma_0$ slik at τx finnes og for hver $y \in x^-$ har at antall piler fra y til x samsvarer med antall piler fra τx til y.

Et **fullt translasjonsunderquiver** til et translasjonsquiver (Γ, τ) er et translasjonsquiver (Γ', τ') slik at Γ' er et fullt underquiver av Γ og $\tau' x = \tau x$ når x er et hjørne i Γ' slik at τx tilhører Γ'.

Auslander-Reiten-quiveret $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ til en algebra A er et translasjonsquiver, der translasjonen τ er definert ved $\tau[M] = [\tau M]$ for alle hjørner $[M]$ slik at M ikke er en projektiv modul.

Vi har allerede sett at Auslander-Reiten-quiveret ikke inneholder noen looper. Vi vil nå vise at det for en representasjonsendelig algebra heller ikke inneholder dobbelpiler.

Proposisjon 4.3.4. *La A være en representasjonsendelig algebra. Da har $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ ingen dobbelpiler.*

Bevis. Vi må vise at vi har $\dim_K \operatorname{Irr}(M, N) \leq 1$ for hvert par M, N av ikke-dekomponerbare A-moduler. Vi antar at dette ikke stemmer, altså at det finnes et par M, N av ikke-dekomponerbare A-moduler slik at $\dim_K \operatorname{Irr}(M, N) \geq 2$. Spesielt er $\operatorname{Irr}(M, N) \neq 0$. Siden hver irredusibel morfi $M \longrightarrow N$ er en epimorfi eller en monomorfi, må vi ha $\dim_K M \neq \dim_K N$. Anta at vi har $\dim_K M > \dim_K N$. Spesielt kan N ikke være projektiv, og det finnes en nesten splitt eksakt sekvens på formen

$$0 \longrightarrow \tau N \longrightarrow M^2 \oplus E \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Vi får

$$\dim_K \tau N = 2 \dim_K M + \dim_K E - \dim_K N > \dim_K M > \dim_K N.$$

Videre er $\dim_K \operatorname{Irr}(\tau N, M) \geq 2$. Vi ser ved induksjon at for to naturlige tall i, j slik at $i > j$ har vi

$$\dim_K \tau^i M > \dim_K \tau^i N > \dim_K \tau^j M > \dim_K \tau^j N.$$

Dette impliserer at avbildningen $\mathbb{N} \longrightarrow \Gamma(\operatorname{mod} A)_0$ gitt ved $i \mapsto \tau^i[N]$ er injektiv og at den sammenhengende komponenten til $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ som inneholder $[N]$ er endelig. Dette strider mot at A er en representasjonsendelig algebra. Vi konkluderer derfor at vi må ha $\dim_K \operatorname{Irr}(M, N) \leq 1$, og dermed ingen dobbelpiler. $\square$

Vi viser et eksempel der vi konstruerer et Auslander-Reiten-quiver.

Eksempel 4.3.5. I dette eksempelet ser vi på quiveret

$$1 \xleftarrow{\gamma} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \xleftarrow{\alpha} 4,$$

med relasjonen $\gamma\beta\alpha = 0$. Vi ser at vi har følgende ikke-dekomponerbare projektive og injektive moduler:

$$\begin{aligned}
&P(1) = S(1) \\
&P(2) = (K \xleftarrow{1} K \longleftarrow 0 \longleftarrow 0) \\
&P(3) = (K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{1} K \longleftarrow 0) = I(1) \\
&P(4) = (0 \longleftarrow K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{1} K) = I(2) \\
&I(3) = (0 \longleftarrow 0 \longleftarrow K \xleftarrow{1} K) \\
&I(4) = S(4).
\end{aligned}$$

I tillegg merker vi oss følgende sammenhenger:

$$P(1) = \operatorname{rad} P(2)$$
$$P(2) = \operatorname{rad} P(3).$$

Siden $P(1)$ er simpel projektiv og ikke-injektiv, følger det fra Korollar 4.2.11 at målet til en irredusibel morfi som starter i $P(1)$ er projektivt. Siden $P(1) = \operatorname{rad} P(2)$ og $P(1)$ ikke er en summand av $\operatorname{rad} P(3)$ eller $\operatorname{rad} P(4)$, har vi at inklusjonen $i\colon P(1) \longrightarrow P(2)$ er den eneste irredusible morfien med start i $P(1)$, og er også den eneste høyre minimale nesten splitte morfien som ender i $P(2)$. Vi har derfor en nesten splitt sekvens

$$0 \longrightarrow P(1) \xrightarrow{i} P(2) \longrightarrow \operatorname{Coker} i \longrightarrow 0,$$

der vi ser at $\operatorname{Coker} i = P(2)/P(1) = S(2)$.

Vi vet også at det må finnes en irredusibel morfi: $P(2) \longrightarrow P(3)$ siden $P(2) = \operatorname{rad} P(3)$. I tillegg har vi to venstre minimale nesten splitte sekvenser $I(2) \longrightarrow I(3)$ og $I(3) \longrightarrow I(4)$. Siden $I(4)$ er simpel, kan det ikke gå noen piler ut fra denne. Siden både $P(3)$ og $P(4)$ er projektiv-injektive, følger det fra Proposisjon 4.2.12 at vi har nesten splitte sekvenser

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad} P(3) \longrightarrow P(3) \oplus \frac{\operatorname{rad} P(3)}{S(1)} \longrightarrow \frac{P(3)}{S(1)} \longrightarrow 0$$

og

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad} P(4) \longrightarrow P(4) \oplus \frac{\operatorname{rad} P(4)}{S(2)} \longrightarrow \frac{P(4)}{S(2)} \longrightarrow 0.$$

La $M = (0 \longleftarrow K \xleftarrow{1} K \longleftarrow 0)$. Vi ser at sekvensene over er de samme som

$$0 \longrightarrow P(2) \longrightarrow P(3) \oplus S(2) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

og

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P(4) \oplus S(3) \longrightarrow I(3) \longrightarrow 0.$$

Vi er nå klare til å sette opp $\Gamma(\operatorname{mod} A)$:

$$\begin{tikzcd}
{[P(1)]} \arrow[dr] & & {[S(2)]} \arrow[dr] & & {[S(3)]} \arrow[dr] & & {[S(4)]} \\
& {[P(2)]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[M]} \arrow[ur] \arrow[r] & {[P(4)]} \arrow[r] & {[I(3)]} \arrow[ur] & \\
& & {[P(3)]} \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Vi ser nå på en annen måte for å konstruere $\Gamma(\operatorname{mod} A)$. For hver maske på formen

$$\begin{tikzcd}
 & {[M_1]} \arrow[dr] & \\
 & \vdots & \\
{[\tau N]} \arrow[uur] \arrow[ddr] \arrow[rr, dashed, no head] & & {[N]} \\
 & \vdots & \\
 & {[M_t]} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

har vi sammenhengen

$$\mathbf{dim}N + \mathbf{dim}\tau N = \sum_{i=1}^{t} \mathbf{dim}M_i.$$

Dette følger fra at den tilsvarende nesten splitte eksakte sekvensen er eksakt. Vi avslutter dette kapittelet med et eksempel der vi benytter oss av dette.

Eksempel 4.3.6. La A være K-algebraen gitt ved quiveret

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 & & 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & 3 \arrow[ul, "\delta"] & \\
 & & 5 \arrow[ul, "\varepsilon"']
\end{tikzcd}$$

med relasjonene $\beta\alpha = \delta\gamma$ og $\delta\epsilon = 0$. Vi ser at $P(1)$ er en simpel projektiv modul, så ingen piler i $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ kan ende i $P(1)$. Videre vet vi at hver pil ut fra P(1) må ende i en projektiv modul. Siden $P(1) = \operatorname{rad} P(2) = \operatorname{rad} P(3)$, ser vi at det må finnes piler $[P(1)] \longrightarrow [P(2)]$ og $[P(1)] \longrightarrow [P(3)]$. Dette er de eneste pilene med mål henholdsvis $P(2)$ og $P(3)$. Siden $P(1)$ ikke er injektiv, har vi den nesten splitte sekvensen

$$0 \longrightarrow P(1) \longrightarrow P(2) \oplus P(3) \longrightarrow \tau^{-1}P(1) \longrightarrow 0.$$

Vi ser nå på dimensjonsvektorene til $P(1)$, $P(2)$ og $P(3)$ for å bestemme $\tau^{-1}P(1)$. Vi vet at

$$\mathbf{dim}\tau^{-1}P(1) = \mathbf{dim}P(2) + \mathbf{dim}P(3) - \mathbf{dim}P(1),$$

eller

$$\mathbf{dim}\tau^{-1}P(1) = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{smallmatrix}$$

Vi merker oss at $\tau^{-1}P(1) = \operatorname{rad} P(4)$. Dette betyr at det finnes en pil $[\tau^{-1}P(1)] \longrightarrow [\operatorname{rad} P(4)]$. Vi har nå konstruert første del av $\Gamma(\operatorname{mod} A)$:

$$\begin{tikzcd}
& \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \\
\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \\
& \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Vi benytter oss av samme metode som da vi fant $\tau^{-1}P(1)$ for å bestemme de nesten splitte eksakte sekvensene som starter i henholdsvis $P(2)$ og $P(3)$. Vi får

$$\mathbf{dim}\tau^{-1}P(2) = \mathbf{dim}\tau^{-1}P(1) - \mathbf{dim}P(2)$$

og

$$\mathbf{dim}\tau^{-1}P(3) = \mathbf{dim}\tau^{-1}P(1) - \mathbf{dim}P(3).$$

Nå ser $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ slik ut:

$$\begin{tikzcd}
& \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \\
\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \\
& \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix}
\end{tikzcd}$$

Nå ser vi at $S(3) = \operatorname{rad} P(5)$, så vi må ha en pil $[S(3)] \longrightarrow [P(5)]$. Med dette har vi brukt alle de projektive ikke-dekomponerbare modulene. Det kan derfor ikke tilføres noe nytt i Auslander-Reiten-quiveret, og resten av $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ kan bestemmes ved å fortsette å regne ut dimensjonsvektorer. Vi har nådd slutten av $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ når vi har nådd alle de injektive ikke-dekomponerbare modulene. Det endelige Auslander-Reiten-quiveret $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ blir seende slik ut:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & & & \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 1 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\
& \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 1 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \\
\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 1 \end{smallmatrix}
\end{tikzcd}$$

Kapittel 5

Anvendelser

Vi er nå nesten klare for å bevise hovedteoremene i denne oppgaven. Først vil vi se nærmere på translasjonsquivre med og uten valuasjon.

Gjennom hele dette kapittelet vil vi anta at quiveret Γ er uten dobbelpiler og orienterte sykler. Altså er Γ et rettet tre. Som vi har sett tidligere vil notasjonen $\overline{\Gamma}$ bety at alle pilene i Γ er byttet ut med kanter.

5.1 Translasjonsquivre uten valuasjon

Vi har alledere sett litt på translasjonsquivre. I dette kapittelet lar vi $\Delta = (\Delta, \tau)$ være et translasjonsquiver. Hvis det finnes en pil $\alpha\colon y \longrightarrow x$, finnes det en entydig pil $\tau x \longrightarrow y$. Denne pila vil betegnes $\sigma\alpha$. Vi vil nå definere noen flere egenskaper ved translasjonsquiveret.

Definisjon 5.1.1. (a) La Δ_0' være undermengden av Δ_0 hvor den injektive Auslander-Reiten-translasjonen τ er definert. Et translasjonsquiver $\Delta = (\Delta, \tau)$ kalles **stabilt** dersom τ er definert på hele Δ_0 og også er surjektiv.

(b) Et hjørne x i et translasjonsquiver $\Delta = (\Delta, \tau)$ kalles **periodisk** dersom det finnes en $p \in \mathbb{N}$ slik at $\tau^p(x) = x$.

Før vi ser videre på anvendelser for translasjonsquivre, vil vi beskrive et spesifikt translasjonsquiver $\mathbb{Z}\Gamma$. Dette vil bli mye brukt i resten av kapittelet. La Γ være et rettet tre. Translasjonsquiveret $\mathbb{Z}\Gamma$ har hjørner $\mathbb{Z} \times \Gamma_0$, og hvis $\alpha\colon x \longrightarrow y$ er en pil i Γ, finnes det piler $(n, \alpha)\colon (n, x) \longrightarrow (n, y)$ og $\sigma(n, \alpha)\colon (n + 1, y) \longrightarrow (n, x)$ i $\mathbb{Z}\Gamma$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. Vi lar translasjonen τ virke på pilene i $\mathbb{Z}\Gamma$, slik at $\tau(n, \alpha) = (n + 1, \alpha)$. Da blir $\tau(\sigma(n, \alpha)) = \sigma(n + 1, \alpha)$.

Proposisjon 5.1.2. *Translasjonsquiverne $\mathbb{Z}\Gamma$ og $\mathbb{Z}\Gamma'$ til de rettede trærne Γ og Γ' er isomorfe hvis og bare hvis grafene $\overline{\Gamma}$ og $\overline{\Gamma'}$ er isomorfe.*

Bevis. Se [3, seksjon 1.3, Satz]. □

Tidligere har vi sett at en isomorf avbildning fra et objekt til seg selv kalles en automorfi. I resten av dette kapittelet vil vi kalle mengden av alle automorfier som utgjør en gruppe under sammensetning av morfier for en **automorfigruppe**.

Definisjon 5.1.3. La Δ være et translasjonsquiver. En automorfigruppe G i Δ kalles **tillatelig** når ingen baner i G treffer en delmengde i Δ_0 på formen $x^- \cup \{x\}$ eller $\{x\} \cup x^+$ i mer enn ett hjørne.

Vi vil nå definere det vi kaller en overdekning.

Definisjon 5.1.4. En morfi av translasjonsquivre $f\colon D \longrightarrow \Delta$ kalles en **overdekning** når den induserte avbildningen $p^- \longrightarrow (f(p))^-$ og $p^+ \longrightarrow (f(p))^+$ er bijektiv for hvert hjørne $p \in D_0$. Det forutsettes at τ (eller τ^{-1}) er definert i p når $\tau f(p)$ (eller $\tau^{-1} f(p)$) er definert.

Vi beskriver nå et quiver $x\Delta$ som vil bli brukt videre. La Δ være et stabilt sammenhengende translasjonsquiver. Vi velger et fiksert hjørne $x \in \Delta_0$ og ser på veiene $\delta = (y \mid \alpha_m, \dots, \alpha_1 \mid x)$ i Δ med startpunkt x som ikke inneholder noen delvei på formen $(z \mid \alpha, \sigma\alpha \mid \tau z)$. Disse veiene lar vi være hjørnene i et nytt quiver $\Gamma = x\Delta$, med piler $(s(\alpha_m) \mid \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_1 \mid x) \xrightarrow{\alpha_m} (y \mid \alpha_m, \dots, \alpha_1 \mid x) = \delta$, $\delta \neq (x \mid\mid x)$. Vi har altså følgende situasjon:

$$x \xrightarrow{\alpha_1} \cdot \xrightarrow{\alpha_2} \cdot \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_{m-1}} s(\alpha_m) \xrightarrow{\alpha_m} y$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{tikzcd}
x \longrightarrow \dots \longrightarrow s(\alpha_m) \arrow[r, bend right=60, "\alpha_m"'] & (x \longrightarrow \dots \longrightarrow y) = \delta
\end{tikzcd}$$

Hvert hjørne i $x\Delta$ er bestemt av veien fra x til dette hjørne. Hvis det finnes to ulike veier fra x til y i Δ, vil dette gi opphav til to forskjellige hjørner i $x\Delta$, og det kan derfor høyst være én pil som ender i hvert hjørne i $x\Delta$. Siden i tillegg Γ er et sammenhengende quiver, må Γ enten være syklisk eller et rettet tre. Siden ingen piler ender i $(x \mid\mid x)$, kan Γ ikke være syklisk, så Γ må være et rettet tre. I resten av kapittelet vil Δ og $\Gamma = x\Delta$ betegne quiverne som nettopp ble beskrevet med mindre noe annet er spesifisert.

Lemma 5.1.5. *La Γ være et rettet tre og $f\colon D \longrightarrow \Delta$ en overdekning. For hver $b \in \Gamma_0$, hver quivermorfi $l\colon \Gamma \longrightarrow \Delta$ og hver $p \in D_0$ med $l(b) = f(p)$ finnes nøyaktig én quivermorfi $h\colon \Gamma \longrightarrow D$ med $fh = l$ og $h(b) = p$.*

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[d, "f"] \\
\Gamma \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "l"] & \Delta
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & h(b) = p \arrow[d, mapsto, "f"] \arrow[dl, dashed, mapsto, "h"'] \\
b \arrow[r, mapsto, "l"] & l(b) = f(p)
\end{tikzcd}$$

Bevis. Velg ut et punkt $b_0 \in \Gamma$, og anvend l på b_0. Vi får da $l(b_0) \in \Delta$. Siden f er en overdekning, finnes $p_0 \in D$ slik at $f(p_0) = l(b_0)$. La $h\colon \Gamma \longrightarrow D$ være slik at $h(b_0) = p_0$. Da har vi $fh(b_0) = f(p_0)$, som ønsket.

For å se at dette gjelder for alle $b \in \Gamma_0$ ser vi nå på mengdene b_0^- og b_0^+. Siden l er en quivermorfi vil $l(b_0^-)$ være mengden av alle startpunkter til piler med endepunkt $l(b_0)$ og $l(b_0^+)$ være mengden av alle endepunkter til piler med startpunkt $l(b_0)$. For hvert hjørne $l(b_i) \in l(b_0^-), i = \{1, 2, \dots, n\}$ (eller $l(b_j) \in l(b_0^+), j = \{n+1, n+2, \dots, m\}$) finnes hjørner $p_i \in D$ slik at $f(p_i) = l(b_i)$ (eller $p_j \in D$ slik at $f(p_j) = l(b_j)$). La h være slik at $h(b_i) = p_i$ (eller $h(b_j) = p_j$).

Siden Γ er sammenhengende, kan vi fortsette slik til vi har nådd alle $b \in \Gamma_0$. □

Vi bruker dette for å bevise den følgende proposisjonen.

Proposisjon 5.1.6. *La Δ være et sammenhengende stabilt translasjonsquiver. Da gjelder:*

(a) Hvis $x \in \Delta_0$ og $\Gamma = x\Delta$, så er den kanoniske morfien $\pi\colon \mathbb{Z}\Gamma \longrightarrow \Delta$ en overdekning.

(b) Hvis Γ er et rettet tre, $\pi\colon \mathbb{Z}\Gamma \longrightarrow \Delta$ en morfi av translasjonsquivre, $f\colon D \longrightarrow \Delta$ en overdekning og q et hjørne i $\mathbb{Z}\Gamma$, så finnes det for hver $p \in D_0$, med $f(p) = \pi(q)$, nøyaktig én morfi $g\colon \mathbb{Z}\Gamma \longrightarrow D$ med $\pi = fg$ og $g(q) = p$.

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{Z}\Gamma \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "\pi"'] & \Delta \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & p \arrow[d, mapsto, "f"] \\ q \arrow[ur, dashed, mapsto, "g"] \arrow[r, mapsto, "\pi"] & \pi(q) = f(p) \end{tikzcd}$$

Bevis. (a) Vi må vise at π induserer en bijeksjon $(n,\delta)^+ \xrightarrow{\sim} (\pi(n,\delta))^+$ for hvert hjørne $(n,\delta) \in (\mathbb{Z}\Gamma)_0$. Siden π er kompatibel med τ, kan vi uten tap av generalitet nøye oss med å se på tilfellet $n = 0$. La videre $\delta = (y \mid \alpha_m, \dots, \alpha_1 \mid x)$ være et hjørne i Γ. Vi beregner δ^+ i Γ:

$$\delta^+ = \begin{cases} \{\varepsilon = (z \mid \beta, \alpha_m, \dots, \alpha_1 \mid x)\colon z \in y^+, z \neq \tau^{-1}s(\alpha_m)\}, & \text{hvis } m > 0 \\ \{\varepsilon = (z \mid \beta \mid x)\colon z \in x^+\}, & \text{hvis } m = 0 \end{cases}$$

Videre har vi i $\mathbb{Z}\Gamma$:

$$(0,\delta^+) = \begin{cases} \{(0,\varepsilon)\colon \varepsilon \in \delta^+\} \cup \{(-1, s(\alpha_m))\}, & \text{hvis } m > 0 \\ \{(0,\varepsilon)\colon \varepsilon \in \delta^+\}, & \text{hvis } m = 0 \end{cases}$$

Dermed induserer π en bijeksjon $(0,\delta)^+ \xrightarrow{\sim} y^+$.

(b) Siden π og f er kompatible med τ, kan vi uten tap av generalitet anta at q er på formen $(0,b) \xrightarrow{\sim} b$ siden $(n,b) = \tau^n(0,b)$. Nå følger det fra Lemma 5.1.5 at det finnes nøyaktig én quivermorfi $h\colon \Gamma \longrightarrow D$ med $fh = \pi|_\Gamma$ og $h(b) = p$. Det finnes det nøyaktig én $g\colon \mathbb{Z}\Gamma \longrightarrow D$ med $g|_\Gamma = h$ (se [3, seksjon 1.3, Lemma 2]). Dette er den entydig bestemte morfien vi er ute etter.

□

Det siste vi vil definere i denne delen er fundamentalgruppa til et translasjonsquiver.

Definisjon 5.1.7. La Δ være et sammenhengende stabilt translasjonsquiver, x et hjørne i Δ, $\Gamma = x\Delta$ og $\pi\colon \mathbb{Z}\Gamma \longrightarrow \Delta$ den kanoniske overdekningen. **Fundamentalgruppa** $\Pi(\Delta, x)$ til Δ i punktet x er gruppa av dekktransformasjoner for π, det vil si morfier av translasjonsquivre $g\colon \mathbb{Z}\Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}\Gamma$ med $\pi g = \pi$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}\Gamma \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{Z}\Gamma \arrow[dl, "\pi"] \\ & \Delta & \end{tikzcd}$$

Det følger fra Proposisjon 5.1.6 at $\Pi(\Delta, x)$ er en tillatelig automorfigruppe til $\mathbb{Z}\Gamma$, og at π induserer en isomorfi mellom Δ og $\mathbb{Z}\Gamma/\Pi(\Delta, x)$ (der hjørnene er alle banene mellom hjørner i $\mathbb{Z}\Gamma$ og pilene er alle banene mellom piler i $\mathbb{Z}\Gamma$).

Vi vil nå bruke det vi har sett så langt i dette kapittelet til å bevise at for alle stabile sammenhengende translasjonsquivre Δ finnes det et rettet tre Γ og en automorfigruppe G slik at $\Delta \cong \mathbb{Z}\Gamma/G$.

Teorem 5.1.8. *For hvert sammenhengende stabile translasjonsquiver Δ finnes det et rettet tre Γ og en tillatelig automorfigruppe $G \subset \operatorname{Aut}\mathbb{Z}\Gamma$, slik at Δ er isomorf med $\mathbb{Z}\Gamma/G$. Samtidig bestemmer Δ grafen $\overline{\Gamma}$ til Γ entydig opp til isomorfi og G entydig opp til konjugasjon i $\operatorname{Aut}\mathbb{Z}\Gamma$.*

Bevis. La Δ være et stabilt sammenhengende translasjonsquiver og la $\Gamma = x\Delta$. Da vet vi fra diskusjonen tidligere at Γ er et rettet tre. Det er på entydig vis mulig å utvide quivermorfien $h\colon \Gamma \longrightarrow \Delta$, $(y \mid \alpha_m, \dots, \alpha \mid x) \longmapsto y$ til en kanonisk morfi av translasjonsquivere $\pi\colon \mathbb{Z}\Gamma \longrightarrow \Delta$ (se [3, seksjon 1.3, Lemma 2]). Vi vet fra Proposisjon 5.1.6 (a) at π er en overdekning. Videre vet vi at fundamentalgruppa $G = \Pi(\Delta, x)$ er en tillatelig automorfigruppe for $\mathbb{Z}\Gamma$, og at π gir en isomorfi $\mathbb{Z}\Gamma/G \xrightarrow{\sim} \Delta$. Dermed er første del bevist.

La nå $j\colon \Delta \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\Gamma'/G'$ være en isomorfi, der Γ' er et rettet tre og G' en tillatelig automorfigruppe til $\mathbb{Z}\Gamma'$. Siden den kanoniske projeksjonen $\kappa\colon \mathbb{Z}\Gamma' \longrightarrow \mathbb{Z}\Gamma'/G'$ er en overdekning, sier Proposisjon 5.1.6 (b) at det finnes inverse isomorfier j og j^{-1} slik at vi har $\mathbb{Z}\Gamma \overset{g}{\rightleftarrows} \mathbb{Z}\Gamma'$. Vi slutter at $G' = g\Pi(\Delta, x)g^{-1}$ og fra Proposisjon 5.1.2 følger det at $\overline{\Gamma} \xrightarrow{\sim} \overline{\Gamma'}$. □

5.2 Translasjonsquivre med valuasjon

Teorem 5.1.8 gjelder bare for quivre uten valuasjon. Vi ønsker nå å utvide dette til også å gjelde valuerte quivre. Først må vi se på hva vi mener med valuasjon.

Definisjon 5.2.1. La Γ være et quiver. En funksjon $a\colon \Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kalles en **valuasjon** for Γ. Hvis a er en valuasjon for quiveret $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$, sier vi at $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, a)$ er et **valuert quiver**. For en pil $\alpha \in \Gamma_1$, der $\alpha\colon x \longrightarrow y$, bruker vi notasjonen (a_α, a'_α) eller (a_{xy}, a'_{xy}) for å beskrive valuasjonen.

Vi vil nå ta for oss valuerte translasjonsquivere. La $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \tau)$ være et translasjonsquiver. Valuasjonen til Δ defineres ved at $a_{\sigma\alpha} = a'_\alpha$ og $a'_{\sigma\alpha} = a_\alpha$ for alle $\alpha\colon y \longrightarrow x$, med $x \in \Delta'_0$. Før vi kan bevise at Teorem 5.1.8 gjelder med valuasjon, må vi se på hvordan Cartanmatrisen til et valuert quiver og Cartanklassen til et stabilt valuert translasjonsquiver er definert.

Definisjon 5.2.2. La Γ være et valuert quiver med $x, y \in \Gamma_0$. Da defineres **Cartanmatrisen til** Γ på følgende måte:

$$C_{xy} = \begin{cases} 2, & \text{hvis } x = y \\ -a_{xy} - a'_{yx}, & \text{hvis } x \longrightarrow y \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi bruker notasjonen $C(\Gamma)$ for Cartanmatrisen til Γ. La Δ være et stabilt valuert translasjonsquiver. Hvis Δ er isomorf med $\mathbb{Z}\Gamma/G$ for et valuert rettet tre Γ og en tillatelig automorfigruppe G, kaller vi $C(\Gamma)$ for **Cartanklassen** til Δ.

La Γ være et valuert rettet tre. Siden det verken finnes looper eller dobbelpiler, vil vi alltid ha enten $a_{xy} = 0$ eller $a'_{yx} = 0$. Vi ser da at Γ og $C(\Gamma)$ sammen bestemmer valuasjonen.

Vi har nå det vi trenger for å bevise den følgende proposisjonen.

Proposisjon 5.2.3. *La Γ og Γ' være valuerte rettede trær. Da er $\mathbb{Z}\Gamma$ og $\mathbb{Z}\Gamma'$ isomorfe hvis og bare hvis Cartanmatrisene $C(\Gamma)$ og $C(\Gamma')$ er isomorfe. Gitt et stabilt valuert translasjonsquiver Δ, finnes det et valuert rettet tre Γ og en gruppe G av automorfier i $\mathbb{Z}\Gamma$ slik at Δ er isomorf med $\mathbb{Z}\Gamma/G$.*

Bevis. Vi starter med å vise første del og viser bare den høyre implikasjonen, altså $\mathbb{Z}\Gamma \cong \mathbb{Z}\Gamma' \Rightarrow C(\Gamma) \cong C(\Gamma')$. Anta at det finnes en isomorfi $\phi\colon \mathbb{Z}\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\Gamma'$. Betrakt

$$\Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\Gamma' \longrightarrow \mathbb{Z}\Gamma'/\langle\tau\rangle,$$

der vi oppnår den første avbildningen ved å sende alle hjørner $x \in \Gamma_0$ til $(0, x) \in (\mathbb{Z}\Gamma)_0$.

Hjørnene i $\mathbb{Z}\Gamma'/\langle\tau\rangle$ gir hjørnene til grafen Γ':

$$x \in \Gamma_0 \mapsto (0, x) \mapsto \phi(0, x) \mapsto \overline{\phi(0, x)} \in \Gamma'_0.$$

Vi har dermed en bijektiv avbildning mellom Γ_0 og Γ'_0, gitt ved $\tilde{\phi}(x) = \overline{\phi(0, x)} \in \Gamma'_0$. For pilene blir det litt annerledes. Vi får

$$\alpha \in \Gamma_1 \mapsto (0, \alpha) \mapsto \phi(0, \alpha) \mapsto \overline{\phi(0, \alpha)}.$$

Dersom $\phi(0, \alpha)\colon (0, x) \longrightarrow (0, y)$, har vi $\overline{\phi(0, \alpha)} \in \Gamma'_1$. Dersom $\phi(0, \alpha)\colon (1, \tau y) \longrightarrow (0, x)$, har vi $\overline{\phi(0, \alpha)} \in \overline{\Gamma'_1}$, der $\overline{\Gamma'}$ har de samme hjørnene som Γ', men alle piler går i motsatt retning. Vi har altså $\overline{\Gamma'_1} = \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \Gamma'_1\}$, der $\overline{\alpha}$ og α er motsatt rettede piler.

Vi vil først vise at $C(\Gamma)_{xx} = 2$ svarer til $C(\Gamma')_{\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(x)} = 2$. Siden $C(\Gamma')$ er en Cartanmatrise, vet vi at alle elementer på diagonalen er 2. I tillegg vet vi at $\tilde{\phi}$ gir en bijektiv korrespondanse mellom hjørnene i Γ og hjørnene i Γ'. Dermed må $C(\Gamma)_{xx} = 2$ svare til $C(\Gamma')_{\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(x)} = 2$.

Videre ønsker vi å vise at $C(\Gamma)_{xy}$ svarer til $C(\Gamma)_{\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)}$. Dersom det ikke finnes en pil $\alpha : x \longrightarrow y$, vil det heller ikke finnes noen pil mellom $\tilde{\phi}(x)$ og $\tilde{\phi}(y)$. Dermed vet vi at $C(\Gamma)_{xy} = 0$ svarer til $C(\Gamma)_{\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)} = 0$.

Anta nå at vi har en pil $\alpha : x \longrightarrow y$ med valuasjonen (a_α, a'_α). Fra definisjonen av Cartanmatrisen til Γ følger det at

$$C(\Gamma)_{xy} = -a_\alpha$$

og

$$C(\Gamma)_{yx} = -a'_\alpha.$$

La $\overline{\phi(0,\alpha)} \in \Gamma'_1$. Da er valuasjonen på $\overline{\phi(0,\alpha)}$ lik (a_α, a'_α), siden ϕ er en morfi av translasjonsquivre. Da er

$$C(\Gamma')_{\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)} = -a_\alpha$$

og

$$C(\Gamma')_{\tilde{\phi}(y)\tilde{\phi}(x)} = -a'_\alpha,$$

slik vi ønsker.

La nå $\overline{\phi(0,\alpha)} \in \overline{\Gamma'_1}$. En slik pil vil ha valuasjonen (a'_α, a_α) siden σ bytter om på valusjonen. Men vi vet at en slik pil stammer fra en pil fra τy til x. Dermed får vi

$$C(\Gamma')_{\tilde{\phi}(y)\tilde{\phi}(x)} = -a'_\alpha$$

og

$$C(\Gamma')_{\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)} = -a_\alpha,$$

slik vi ønsker. Dermed er første del bevist.

La nå $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \tau, a)$ være et valuert translasjonsquiver. Anta at $(\Delta_0, \Delta_1, \tau) \cong \mathbb{Z}(\Gamma_0, \Gamma_1)/G$ for et rettet tre $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ og en automorfigruppe G. Vi vet fra 5.1.8 at dette er mulig. Vi har altså følgende situasjon:

$$(\Gamma_0, \Gamma_1) \longrightarrow \mathbb{Z}(\Gamma_0, \Gamma_1) \longrightarrow \mathbb{Z}(\Gamma_0, \Gamma_1)/G \xrightarrow{\sim} (\Delta_0, \Delta_1, \tau).$$

Vi lar ψ være isomorfien mellom $\mathbb{Z}(\Gamma_0, \Gamma_1)/G$ og $(\Delta_0, \Delta_1, \tau)$.

La x, y være to hjørner i Γ_0 og $\alpha \colon y \longrightarrow x$ være en pil i Γ_1. La videre (n, α) være en pil i $\mathbb{Z}(\Gamma_0, \Gamma_1)$. Denne sendes til pila $G((n,\alpha))$ i $\mathbb{Z}(\Gamma_0, \Gamma_1)/G$. Vi velger valuasjonen $a((n,\alpha)) = (r, s)$ for en pil (n, α) i $\mathbb{Z}(\Gamma_0, \Gamma_1)$, der a er den samme valuasjonen som i Δ. Vi bruker σ på (n, α) og ser på følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
(n+1, x) \arrow[dr, "{(s,r)}"'] & & (n, x) \\
& (n, y) \arrow[ur, "{(r,s)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Diagrammet viser at ved å anvende σ, bytter vi plass på elementene i valuasjonen. Dette følger fra definisjonen av et valuert translasjonsquiver. Ved å bruke σ to ganger får vi valuasjonen vi startet med. Vi ser derfor at to piler i samme bane i automorfigruppa må ha den samme valuasjonen.

Siden ψ er en isomorfi, har vi

$$a(n, \alpha) = a(G(n, \alpha)) = a(\psi(G(n, \alpha)))$$

og

$$a((n + 1, \sigma(\alpha))) = a(G(n + 1, \sigma(\alpha))) = a(\sigma(\psi(G(n + 1, \alpha))))$$

Vi har nå vist at a er en valuasjon for både $\mathbb{Z}(\Gamma_0, \Gamma_1)$ og Δ.

Vi ser at ved å velge den samme valuasjonen a for (Γ_0, Γ_1), og definere $(\Gamma_0, \Gamma_1) \longrightarrow \mathbb{Z}(\Gamma_0, \Gamma_1)$ ved $x \mapsto (0, x)$ for hjørnene i Γ_0 og $\alpha \mapsto (0, \alpha)$ for pilene i Γ_1, får vi $a(\alpha) = a(0, \alpha) = (r, s)$. Dette beviser at 5.1.8 også holder med valuasjon. □

5.3 Cartanklassen til et translasjonsquiver

I den siste delen i dette kapittelet vil vi bevise et teorem som forteller hvordan Cartanklassen til et translasjonsquiver kan bestemmes ut fra additive og subadditive funksjoner. Vi vil så bruke dette til å vise de ulike mulighetene for Cartanklassen i et stabilt Auslander-Reiten-quiver over en Artinsk algebra som inneholder periodiske moduler.

Vi må først definere hva subadditive funksjoner for translasjonsquivre.

Definisjon 5.3.1. La Δ være et valuert translasjonsquiver. En **subadditiv funksjon** l for Δ er definert til å være en funksjon $l \colon \Delta_0 \longrightarrow \mathbb{N}$ som oppfyller

$$l(x) + l(\tau x) \geq \sum_{y \in x^-} l(y) a'_{yx},$$

for alle $x \in \Delta'_0$. Funksjonen kalles **additiv** gitt at vi alltid har likhet for alle $x \in \Delta'_0$.

Vi er nå klare for å bestemme Cartanklassen til translasjonsquivre.

Teorem 5.3.2. *La $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \tau, a)$ være et stabilt valuert translasjonsquiver som er sammenhengende og har et periodisk hjørne. Anta at det finnes en subadditiv funksjon l for Δ.*

(a) Cartanklassen til Δ er enten et Dynkindiagram, et Euklidsk diagram eller én av $A_\infty^\infty, A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$.

(b) Hvis l ikke er additiv, har vi at Cartanklassen til Δ er et Dynkindiagram eller A_∞.

(c) Hvis l er ubegrenset, har vi at Cartanklassen til Δ er A_∞.

Bevis. Siden det finnes en subadditiv funksjon for Δ, må Δ være lokalt endelig.

Vi ønsker å vise at for alle $x_i \in \Delta_0$ finnes det et tall p_i slik at $\tau^{p_i} x_i = x_i$. Siden Δ er stabilt og vi vet at det finnes et periodisk hjørne $x \in \Delta_0$, vet vi at det finnes en p slik at $\tau^p(x^+) = (\tau^p(x))^+ = x^+$. Dette viser at τ^p er en permutasjon av elementene i x^+, og det må da finnes en $m \in \mathbb{N}$ slik at τ^{pm} er identitetsavbildningen. Dermed er alle $y \in x^+$ periodiske. På samme måte er alle $y \in x^-$ også periodiske. Siden Δ er sammenhengende kan vi treffe alle andre hjørner ved å bruke τ. Dette viser at alle $x \in \Delta_0$ er periodiske.

La nå Δ være en kvotient av $\mathbb{Z}\Gamma$, der Γ er et valuert rettet tre med Cartanmatrise C. Vi kan anta at $\Gamma = \{0\} \times \Gamma$ er inkludert i $\mathbb{Z}\Gamma$, og betegne den tilsvarende avbildningen $\Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}\Gamma \longrightarrow \Delta$ ved $u \longmapsto \tilde{u}$. Fra definisjonen av en Cartanmatrise C har vi

$$C_{uv} = \begin{cases} 2, & \text{hvis } u = v \\ -a_{\tilde{u}\tilde{v}}, & \text{hvis } u \longrightarrow v \\ -a'_{\tilde{v}\tilde{u}}, & \text{hvis } v \longrightarrow u \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Anta at det finnes en subadditiv funksjon l for Δ. Vi ser først på tilfellet der det finnes et fiksert tall p, med $\tau^p x_i = x_i$ for alle $x_i \in \Delta_0$. Ved å bruke l kan vi definere en $\tau-$invariant subadditiv funksjon d for Δ:

$$d(x) = \sum_{i=0}^{p-1} l(\tau^i x).$$

Vi ser at

$$\begin{aligned} d(x) = \sum_{i=0}^{p-1} l(\tau^i x) &= l(x) + l(\tau x) + \dots + l(\tau^{p-1} x) \\ &= l(\tau x) + \dots + l(\tau^{p-1} x) + l(\tau^p x) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} l(\tau^{i+1} x) = \sum_{i=0}^{p-1} l(\tau(\tau^i x)) = d(\tau x). \end{aligned}$$

Videre ser vi at d er additiv hvis og bare hvis l er additiv. Siden $d(x) = d(\tau x)$, har vi:

$$\begin{aligned} 2d(x) = d(x) + d(\tau x) &= \sum_{i=0}^{p-1} l(\tau^i x) + \sum_{i=0}^{p-1} l(\tau(\tau^i x)) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} [l(\tau^i x) + l(\tau(\tau^i x))] \\ &\geq \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{y \in (\tau^i x)^-} l(y) a'_{y,\tau^i x} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{z \in x^-} l(\tau^i z) a'_{\tau^i z, \tau^i x} \\ &= \sum_{z \in x^-} \sum_{i=0}^{p-1} l(\tau^i z) a'_{z,x} \\ &= \sum_{z \in x^-} d(z) a'_{z,x}. \end{aligned}$$

Her har vi skrevet $y \in (\tau^i x)^- = \tau^i(x^-)$ på formen $y = \tau^i z$ og brukt at $a'_{\tau^i z, \tau^i x} = a'_{z,x}$ for alle $x, z \in \Delta_0$. Vi ser dermed at d er en subadditiv funksjon for Δ som er additiv hvis og bare hvis l er additiv.

Vi ser nå på avbildningen $\Gamma \longrightarrow \Delta \longrightarrow \mathbb{N}$ gitt ved $u \longmapsto d(\tilde{u})$. Merk at $\tilde{u}^-$ er den disjunkte unionen av $\{\tilde{v} \mid v \in u^-\}$ og $\{\tau\tilde{v} \mid v \in u^+\}$. Ved å bruke dette, $2d(x) \geq \sum_{z \in x^-} d(z) a'_{z,x}$ og definisjonen av Cartanmatriser får vi

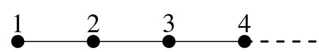
$$\begin{aligned}
2d(\tilde{u}) &\geq \sum_{z \in \tilde{u}^-} d(z) a'_{z,\tilde{u}} \\
&= \sum_{v \in u^-} d(\tilde{v}) a'_{\tilde{v}\tilde{u}} + \sum_{v \in u^+} d(\tilde{v}) a'_{\tau\tilde{v},\tilde{u}} \\
&= \sum_{v \in u^-} d(\tilde{v}) a'_{\tilde{v}\tilde{u}} + \sum_{v \in u^+} d(\tilde{v}) a_{\tilde{u}\tilde{v}} \\
&= -\sum_{v \in u^-} d(\tilde{v}) C^T_{vu} - \sum_{v \in u^+} d(\tilde{v}) C^T_{vu} \\
&= -\sum_{v \neq u} d(\tilde{v}) C^t_{vu}.
\end{aligned}$$

Dette viser at vi får en subadditiv funksjon for C^T som er additiv (eller ubegrenset) hvis og bare hvis l er additiv (eller ubegrenset). Siden det finnes en subadditiv funksjon for Δ, vet vi fra Teorem 3.2.5 at C er Cartanmatrisen til et Dynkindiagram, et Euklidsk diagram eller én av $A_\infty^\infty, A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$. Hvis l er additiv, må C være Cartanmatrisen til et Dynkindiagram eller A_∞, og hvis C er ubegrenset, må C være Cartanmatrisen til A_∞.

Videre ser vi på tilfellet der det for hvert hjørne $x_i \in \Delta_0$ finnes et tall $p(x_i)$ slik at $\tau^{p(x_i)}(x_i) = x_i$. Spesielt er Γ uendelig. Velg et endelig underdiagram Γ' av Γ, og la Δ' være det stabile translasjonsquiveret generert av Γ'. Vi ser at Γ' må være et Dynkindiagram eller et Euklidsk diagram. Herfra følger det at Γ må være $A_\infty^\infty, A_\infty, B_\infty, C_\infty$ eller D_∞.

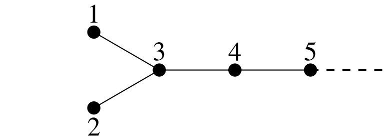
Vi påstår nå at når Γ er på formen $A_\infty^\infty, A_\infty, B_\infty, C_\infty$ eller D_∞ vil hvilken som helst automorfigruppe G av $\mathbb{Z}\Gamma$ som inneholder et element g med $g(n, x) = (n + p, x)$ for noen $(n, x) \in \mathbb{Z}\Gamma$ og noen $p \geq 1$ inneholde en translasjon.

Vi ser først på A_∞, B_∞ og C_∞ med følgende nummerering av hjørnene i Γ:



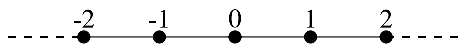
Enhver automorfi av $\mathbb{Z}\Gamma$ avbilder en undermengde på formen $\mathbb{Z} \times \{1\}$ til seg selv. Vi ser at 1 må avbildes til 1 siden dette er eneste hjørne uten noen piler inn. Videre skal 2 ha en pil inn fra 1, så 2 må også avbildes til seg selv siden det bare går én pil ut fra 1. Det følger ved induksjon at en delmengde på formen $\mathbb{Z} \times \{x\}$ avbildes til seg selv. Hvis vi nå har $g(n, x) = (n + p, x)$ for noen (n, x), vil det også gjelde for alle naboene (m, y) til (n, x) at $g(m, y) = g(m + p, y)$.

På samme måte ser vi på D_∞:



Undermengdene $\mathbb{Z} \times \{1, 2\}$ og $\mathbb{Z} \times \{x\}$ med $x \geq 3$ er avbildet til seg selv ved enhver automorfi. Hvis $g(n, x) = (n + p, x)$ for noen (n, x), så er også $g(m, y) = g(m + p, y)$ for alle naboer, med $y \geq 3$. Hvis $(m, 1)$ er en nabo til $(n, 3)$ og $g(n, 3) = (n + p, 3)$, kan vi bare konkludere med at $g^2(m, 1) = (m + 2p, 1)$. Men dette viser at g^2 er en translasjon.

Til slutt ser vi på A_∞^∞:



Vi kan anta at $g(n, 0) = g(n + p, 0)$ for noen n, p. Hvis $(m, 1)$ er en nabo til $(n, 0)$, er enten $g(m, 1) = (m + p, 1)$, og g er en translasjon, eller så er $g(m, 1) = (m + p, -1)$, og da er g^2 en translasjon.

Vi ser at i alle tilfeller finnes det er fiksert tall q med $\tau^q(z) = z$ for alle hjørner $z \in \Delta$. Dermed er vi i det forrige tilfellet, og teoremet er bevist. □

Det neste teoremet følger nærmest direkte fra det forrige.

Teorem 5.3.3. *Cartanklassen til en komponent i det stabile Auslander-Reiten-quiveret over en artinsk algebra R som inneholder periodiske moduler er enten et Dynkindiagram eller A_∞.*

Bevis. Vi vet at et Auslander-Reiten-quiver alltid er lokalt endelig. Vi ser nå på den stabile delen $A_S(R)$ av Auslander-Reiten-quiveret, og velger ut en komponent $\mathcal{C}$ fra $A_S(R)$ som inneholder en periodisk modul. Videre lar vi l være den vanlige lengdefunksjonen, som vi vet er en subadditiv funksjon. Merk at det følger fra definisjonen av en subadditiv funksjon for et translasjonsquiver at l er additiv hvis og bare hvis $\mathcal{C}$ er en komponent i det fullstendige Auslander-Reiten-quiveret. Anta at R er sammenhengende.

(a) Hvis l ikke er additiv følger det fra Teorem 5.3.2 at Cartanklassen til $\mathcal{C}$ er enten et Dynkindiagram eller A_∞.

(b) La nå l være additiv. Vi vet at $\mathcal{C}$ er en komponent av Auslander-Reiten-quiveret uten projektive moduler. Da følger det fra [2, Theorem VII.2.1] at R ikke kan være av endelig representasjonstype. Siden R ikke er av endelig representasjonstype følger det fra [1, Theorem IV.5.4] at l ikke er begrenset på $\mathcal{C}$. Det følger fra Teorem 5.3.2 at Cartanklassen til $\mathcal{C}$ er A_∞.

□

Tillegg A

Kategorier og funktorer

Både kategorier og funktorer spiller en viktig rolle i denne oppgaven. Dette tillegget er ment for å gi leseren en grunnleggende forståelse. Vi starter med å definere hva vi mener med en kategori.

Definisjon A.0.1. En **kategori** er en triplett $\mathcal{C} = (\operatorname{Obj}\mathcal{C}, \operatorname{Hom}\mathcal{C}, \circ)$, hvor $\operatorname{Obj}\mathcal{C}$ kalles **klassen av objekter** i $\mathcal{C}$, $\operatorname{Hom}\mathcal{C}$ kalles **klassen av morfier** i $\mathcal{C}$ og $\circ$ er en delvis binæroperasjon på morfier i $\mathcal{C}$ som oppyller de følgende kravene:

(a) for hvert par av objekter X, Y i $\mathcal{C}$ tilordner vi en mengde $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, kalt **mengden av morfier** fra X til Y, slik at hvis $(X, Y) \neq (Z, U)$ så er snittet av mengdene $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ og $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, U)$ tomt og

(b) for hver triplett av objekter X, Y, Z i $\mathcal{C}$ er operasjonen

$$\circ\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),\ (g, f) \mapsto g \circ f,$$

kalt **sammensetningen** av f og g, definert og har de følgende to egenskapene:

(i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, for hver triplett $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $h \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, U)$ av morfier og

(ii) for hvert objekt X i $\mathcal{C}$, finnes det et element $1_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, kalt **identitetsmorfien** til X, slik at hvis $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ og $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, så er $f \circ 1_X = f$ og $1_X \circ g = g$.

For enkelthetsskyld bruker vi ofte notasjonen $f\colon X \longrightarrow Y$ eller $X \xrightarrow{f} Y$ i stedet for $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Definisjon A.0.2. La $\mathcal{C}$ være en kategori. En kategori $\mathcal{C}'$ er en underkategori av $\mathcal{C}$ hvis de følgende fire betingelsene er tilfredsstilt:

(a) klassen $\operatorname{Obj} \mathcal{C}'$ av objekter i $\mathcal{C}'$ er en underklasse av klassen $\operatorname{Obj} \mathcal{C}$ av objekter i $\mathcal{C}$,

(b) hvis X, Y er objekter i $\mathcal{C}'$, så er $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$,

(c) sammensetningen av morfier i $\mathcal{C}'$ er den samme som i $\mathcal{C}$ og

(d) for hvert objekt X i $\mathcal{C}'$ sammenfaller identitetsmorfien $1'_X$ i $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, X)$ med identitetsmorfien 1_X i $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$.

En underkategori $\mathcal{C}'$ av $\mathcal{C}$ kalles **full** hvis $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ for alle objekter X, Y i $\mathcal{C}'$.

Når vi snakker om et kommutativt diagram, vil det være snakk om et diagram der sammensetningen av morfier langs to vilkårlige veier mellom samme kilde og mål er den samme. Et kommutativt diagram kan for eksempel være på formen

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "i"] & Z \end{tikzcd}$$

der $g \circ f = i \circ h$.

Definisjon A.0.3. En kategori $\mathcal{C}$ er en **additiv kategori** hvis de følgende betingelsene er tilfredsstilt:

(a) for enhver endelig mengde av objekter $X_1, \ldots, X_n$ i $\mathcal{C}$ finnes det en direktesum $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ i $\mathcal{C}$,

(b) for hvert par $X, Y \in \operatorname{Obj} \mathcal{C}$, er mengenden $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ av alle morfier fra X til Y i $\mathcal{C}$ utstyrt med en abelsk gruppestruktur,

(c) for hver triplett av objekter X, Y, Z i $\mathcal{C}$ er sammensetningen av morfier i $\mathcal{C}$

$$\circ\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

bilineær. Det vil si at $(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$ og $f \circ (g + g') = f \circ g + f \circ g'$ for alle morfier $f, f' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ og alle morfier $g, g' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ og

(d) det finnes et objekt $0 \in \operatorname{Obj} \mathcal{C}$, kalt nullelementet i $\mathcal{C}$, slik at identitetsmorfien 1_0 er nullelemtentet i den abelske gruppa $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0)$.

Vi vil nå se på den motsatte kategorien til en kategori.

Definisjon A.0.4. For hvilken som helst kategori $\mathcal{C}$ definerer vi den **motsatte kategorien** $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ til $\mathcal{C}$ til å være den additive kategorien der objektene er de samme som objektene i $\mathcal{C}$, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ for alle objekter X og Y i $\operatorname{Obj} \mathcal{C}$. Addisjon i $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y)$ er addisjon i $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ og sammensetningen $\circ'$ i $\operatorname{Hom} \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ er gitt ved formelen $g \circ' f = f \circ g$, hvor $\circ$ er sammensetning i $\operatorname{Hom} \mathcal{C}$. Vi ser at $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$.

Vi vil nå presentere på tre eksempler på kategorier som er mye brukt i oppgaven.

Eksempel A.0.5. (a) Vi lar $\operatorname{Mod} A$ betegne kategorien av alle høyre A-moduler. Objektene i $\operatorname{Mod} A$ er alle høyre A-moduler, morfiene er A-modulhomomorfier og sammensetning er den vanlige sammensetningen av avbildninger.

(b) Vi lar $\operatorname{mod} A$ være den fulle underkategorien av $\operatorname{Mod} A$ der objektene er endeliggenererte moduler.

(c) Vi lar $\operatorname{proj} A$ være den fulle underkategorien av $\operatorname{mod} A$ der objektene er de projektive modulene.

Vi beveger oss nå over til å se på funktorer.

Definisjon A.0.6. En **kovariant funktor** $T\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ fra en kategori $\mathcal{C}$ til en kategori $\mathcal{C}'$ er definert ved å tilordne et objekt $T(X)$ i $\mathcal{C}'$ til hvert objekt X i $\mathcal{C}$ og en morfi $T(h)\colon T(X) \longrightarrow T(Y)$ i $\mathcal{C}'$ til hver morfi $h\colon X \longrightarrow Y$ i $\mathcal{C}$, slik at de følgende betingelsene er tilfredsstilt:

1. $T(1_X) = 1_{T(X)}$, for alle objekter X i $\mathcal{C}$ og
2. for hvert par av morfier $X \xrightarrow{f} Y$ og $Y \xrightarrow{g} Z$ i $\mathcal{C}$, holder likheten $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

En **kontravariant funktor** $T\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ fra en kategori $\mathcal{C}$ til en kategori $\mathcal{C}'$ er definert ved å tilordne et objekt $T(X)$ i $\mathcal{C}'$ til hvert objekt X i $\mathcal{C}$ og en morfi $T(h)\colon T(Y) \longrightarrow T(X)$ i $\mathcal{C}'$ til hver morfi $h\colon X \longrightarrow Y$ i $\mathcal{C}$ slik at de følgende betingelsene er tilfredsstilt:

1. $T(1_X) = 1_{T(X)}$, for alle objekter X i $\mathcal{C}$ og
2. for hvert par av morfier $X \xrightarrow{f} Y$ og $Y \xrightarrow{g} Z$ i $\mathcal{C}$, holder likheten $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$.

La $T, T'\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ være funktorer. En funktoriell morfi $\Psi\colon T \longrightarrow T'$ er en familie $\Psi = \{\Psi_X\}_{X \in \operatorname{Obj} \mathcal{C}}$ av morfier $\Psi_X\colon T(X) \longrightarrow T'(X)$ slik at for enhver morfi $f\colon X \longrightarrow Y$ i $\mathcal{C}$, er diagrammet

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\Psi_X"] \arrow[d, "T(f)"'] & T'(X) \arrow[d, "T'(f)"] \\
T(Y) \arrow[r, "\Psi_Y"] & T'(Y)
\end{tikzcd}$$

i $\mathcal{C}'$ kommutativt. Vi kaller Ψ for en funktoriell isomorfi hvis morfien $\Psi_X\colon F(X) \longrightarrow F'(X)$ er en isomorfi i $\mathcal{C}'$ for hvilken som helst $X \in \operatorname{Obj} \mathcal{C}$. Vi vil få bruk for funktorielle isomorfier når vi skal definere ekvivalens av kategorier.

Definisjon A.0.7. En kovariant funktor $T\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ kalles en **ekvivalens av kategorier** hvis det finnes en funktor $F\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ og funktorielle isomorfier $\Psi\colon 1_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} FT$ og $\Phi\colon 1_{\mathcal{C}'} \xrightarrow{\sim} TF$, hvor $1_{\mathcal{C}'}$ og $1_{\mathcal{C}}$ er identiteten til henholdsvis $\mathcal{C}'$ og $\mathcal{C}$. I dette tilfellet kalles funktoren F for kvasi-inversen til T.

Vi vil nå se på en spesiell type funktorer, kalt dualitet.

Definisjon A.0.8. En kontravariant funktor $D\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ som gir en ekvivalens av kategoriene $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ kalles en **dualitet**.

En viktig dualitet er standarddualiteten

$$D = \operatorname{Hom}_K(-, K)\colon \ \operatorname{mod} A \longrightarrow \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$$

mellom kategorien $\operatorname{mod} A$ av endeliggenererte høyre A-moduler og kategorien $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$ av endeliggenererte venstre A-moduler.

Eksempel A.0.9. Vi vil nå presentere to ulike funktorer som blir brukt i oppgaven.

(a) Vi ser først på A-dualfunktoren

$$(-)^t = \operatorname{Hom}_A(-, A)\colon \ \operatorname{mod} A \longrightarrow \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}.$$

Denne funktoren gir en dualitet mellom kategorien $\operatorname{proj} A$ av projektive venstre A-moduler og kategorien $\operatorname{proj} A^{\mathrm{op}}$ av projektive høyre A-moduler.

(b) La D være standarddualiteten og $(-)^t$ være funktoren beskrevet over. Nakayamafunktoren ν er en sammensetning av disse, slik at vi har

$$\nu = D(-)^t = D\operatorname{Hom}_A(-, A)\colon \ \operatorname{mod} A \longrightarrow \operatorname{mod} A.$$

Nakayamafunktoren gir opphav til to ekvivalenser av kategorier $\nu\colon \ \operatorname{proj} A \longrightarrow \operatorname{inj} A$ og $\nu^{-1}\colon \ \operatorname{inj} A \longrightarrow \operatorname{proj} A$, der $\nu^{-1} = \operatorname{Hom}_A(DA, -)$ er kvasi-inversen til ν.

Vi avslutter med å definere radikalet til en kategori.

Definisjon A.0.10. (a) **Radikalet** til en additiv K-kategori $\mathcal{C}$ er det tosidige idealet $\operatorname{rad}_{\mathcal{C}}$ i $\mathcal{C}$ definert ved formelen

$$\operatorname{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \{h \in \mathcal{C}(X, Y) \mid 1_X - g \circ h \text{ er inverterbar for enhver } g \in \mathcal{C}(Y, X)\}$$

for alle objekter X og Y i $\mathcal{C}$.

(b) Gitt $m \geq 1$, definerer vi den m-te potensen $\operatorname{rad}_{\mathcal{C}}^m \subseteq \operatorname{rad}_{\mathcal{C}}$ av $\operatorname{rad}_{\mathcal{C}}$ ved for hver $\operatorname{rad}_{\mathcal{C}}^m(X, Y)$ å ta underrommet av $\operatorname{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ som består av morfier på formen

$$X = X_0 \xrightarrow{h_1} X_1 \xrightarrow{h_2} \cdots \longrightarrow X_{m-1} \xrightarrow{h_m} X_m = Y,$$

hvor $h_j \in \operatorname{rad}_{\mathcal{C}}(X_{j-1}, X_j)$. I tilfellet der $\mathcal{C} = \operatorname{mod} A$, skriver vi rad_A i stedet for $\operatorname{rad}_{\operatorname{mod} A}$.

Bibliografi

[1] I. Assem, D. Simson, and A. Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1*. Camebridge University Press, 2006.

[2] M. Auslander, I. Reiten, and S. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Camebridge University Press, 1997.

[3] C. Riedtmann. Algebren, darstellungsköcher, ueberlagerungen und zurück. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 55:199–224, 1980.