

Sammendrag

I denne oppgaven tar vi for oss to utvidelser av Black-Scholes-modellen og evaluerer modellenes prestasjoner basert på prising av indeksopsjoner og delta-sikring. Modellene er Practitioners-Black-Scholes og Heston stokastiske volatilitetsmodell. Disse tar hensyn til det observerte volatilitetssmilet med to ulike tilnærminger. Vi benytter S&P 500 som underliggende aktivum og tar utgangspunkt i historiske opsjonspriser fra fra 02.01.2015 til 31.12.2015. Våre resultater viser at de to alternative modellene gir lavere prisingsfeil enn Black-Scholes, og dette bekrefter de empiriske svakhetene til Black-Scholes-modellen. Våre resultater viser at de to alternative modellene gir lavere prisingsfeil enn Black-Scholes, og bekrefter svakheten ved Black-Scholes-modellen. Til slutt ser vi på delta-sikring, der vi finner at Black-Scholes er den minst risikable sikringsraten.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på det 2-årige masterprogrammet i finansiell økonomi ved institutt for samfunnsøkonomi, NTNU. Arbeidet med oppgaven har vært en krevende, men meget lærerik prosess. Store deler av arbeidet har blitt brukt til databehandling og makroprogrammering i Excel VBA, dette er kunnskap vi i ettertid verdsetter høyt.

Vi ønsker å takke vår veileder Snorre Lindset for gode råd og konstruktive tilbakemeldinger gjennom hele semesteret. Vi vil også rette en takk til våre medstudenter for et godt faglig og sosialt miljø under arbeidet med masteroppgaven.

Trondheim, juni 2016.

Håkon Hjelseth Mygland og Sigurd Sanner Jørgensen.

Innhold

1	Introduksjon	1
1.1	Litteraturstudie	2
1.2	Begrensninger	3
2	Modeller	4
2.1	Black-Scholes	4
2.2	Practitioners-Black-Scholes	7
2.3	Heston-modellen	8
2.3.1	Parameteranalyse	9
3	Datsett	15
3.1	SPX opsjoner	15
3.2	Gjennomsnittskurs	16
3.3	Risikofri rente og dividendeavkastning	16
3.4	Filtrering av datasettet	17
4	Parameterestimering	20
4.1	Fremgangsmåte	20
4.2	Valg av tapsfunksjon	21
4.3	Estimering med Excel VBA	23
4.4	Resultater	23
5	Empiriske resultater	27
5.1	Prisingsfeil i utvalget	27
5.2	Prisingsfeil utenfor utvalget	32
5.2.1	Én dag	32
5.2.2	Fem dager	37
5.3	Delta-sikring	41
6	Konklusjon	43

Figurer

2.1	Fordelingen til logaritmen av underliggende aktivum ved ulike verdier av korrelasjon	10
2.2	Fordelingen til logaritmen av underliggende aktivum ved ulike verdier av volatilitet til variansen	11
2.3	Prisdifferansen mellom Heston og Black-Scholes for ulik korrelasjon	12
2.4	Prisdifferansen mellom Heston og Black-Scholes for ulik volatilitet til varians	13
2.5	Heston-parametrenes effekt på implisitt volatilitet	14
3.1	Fordelingen til de daglige, kontinuerlige avkastningene til S&P 500 i 2015	15
4.1	Volatiliteten til S&P 500 i 2015	26
5.1	Prisingsfeil i utvalget målt i \$RMSE	30
5.2	Prisingsfeil i utvalget for ulike kategorier av dager til forfall	31
5.3	Prisingsfeil én dag utenfor utvalget målt i \$RMSE	35
5.4	Prisingsfeil én dag utenfor utvalget for ulike kategorier av dager til forfall	36
5.5	Prisingsfeil fem dager utenfor utvalget målt i \$RMSE	39
5.6	Prisingsfeil fem dager utenfor utvalget for ulike kategorier av dager til forfall	40

Tabeller

3.1	Gjennomsnittlig opsjonspris og antall observasjoner i utvalget	18
3.2	Gjennomsnittlig Black-Scholes implisitt volatilitet	19
4.1	Gjennomsnittlige PBS-parametre for alle handelsdager i 2015	24
4.2	Gjennomsnittlige Heston-parametre for alle handelsdager i 2015	25
5.1	Prisingsfeil i utvalget	28
5.2	Black-Scholes prisingsfeil i utvalget	29
5.3	PBS og Heston prisingsfeil i utvalget sortert etter lønnsomhetsgrad	30
5.4	Prisingsfeil én dag utenfor utvalget	33
5.5	Black-Scholes prisingsfeil én dag utenfor utvalget sortert etter lønnsomhetsgrad .	34
5.6	PBS og Heston prisingsfeil én dag utenfor utvalget sortert etter lønnsomhetsgrad	35
5.7	Prisingsfeil fem dager utenfor utvalget	37
5.8	Black-Scholes prisingsfeil fem dager utenfor utvalget sortert etter lønnsomhetsgrad	38
5.9	PBS og Heston prisingsfeil fem dager utenfor utvalget sortert etter lønnsomhetsgrad	39
5.10	Delta-sikring	42

1. Introduksjon

Black og Scholes (1973) løste problemet med å finne en rettferdig pris på en europeisk kjøpsopsjon. I Black-Scholes-modellen er alle innsatsfaktorene observerbare bortsett fra underliggende aktivums fremtidige forventede volatilitet. Modellen antar at denne volatiliteten er konstant for alle opsjoner med samme underliggende aktivum. Empiriske tester av Rubinstein (1985) viste at Black-Scholes-prisene var tilstrekkelig nærme de observerte markedsprisene på S&P 500 indeksopsjoner. I etterkant av det amerikanske aksjemarkedets kraftige fall den 19. oktober 1987 (*Black Monday*) dokumenterte Rubinstein (1994) at prisingsfeilene var betydelig større, spesielt for opsjoner med lav og høy utøvelseskurs. Ved å benytte markedsdata, invertere Black-Scholes-formelen og beregne *Black-Scholes implisitt volatilitet*, observerte man at denne ikke var konstant for opsjoner med samme underliggende aktivum i etterkant av Black Monday. Den implisitte volatiliteten var fallende og konveks med opsjonens utøvelseskurs og uttrykte et såkalt skjevt volatilitetssmil, istedenfor å være konstant som det antas i en Black-Scholes-verden. Liknende trender ble også dokumentert med utgangspunkt i tyske, japanske og britiske indeksopsjoner av Gemmill og Kamiyama (2000), og variasjonene var så store at de ikke kunne forklares av markedsimperfeksjoner alene. Dette la grunnlaget for en rekke utvidelser av Black-Scholes-modellen.

Vi vil i denne oppgaven presentere to alternativer til den tradisjonelle Black-Scholes-modellen, henholdsvis Practioners-Black-Scholes (PBS) og Hestons stokastiske volatilitetsmodell, og undersøke om de egner seg bedre til prising av indeksopsjoner og delta-sikring. Disse modellene estimerer volatiliteten basert på markedsdata og tillater at den varierer med både utøvelseskurs og tid til forfall. Denne analysen er interessant for den praktiske anvendelsen av opsjonspringsmodeller. Dersom modellene evner å ta hensyn til de empiriske svakhetene til Black-Scholes, burde de også egne seg bedre til prising av opsjoner og sikring. Vi benytter historiske data på S&P 500 indeksopsjoner (SPX) i 2015 til å gjenskape modellpriser før vi sammenlikner dem med de observerte markedsprisene. I likhet med Bakshi, Cao og Chen (1997) evaluerer vi modellens prestasjoner basert på prisingsfeil i estimeringsutvalget, prisingsfeil utenfor estimeringsutvalget og delta-sikring.

I kapittel 2 presenteres de tre modellene som er benyttet i oppgaven. Kapitlet retter fokus mot de teoretiske forskjellene mellom modellene fremfor de matematiske utledningene. Videre beskriver kapittel 3 datasettet, opsjonenes karakteristik og valget av underliggende aktivum. Kapittel 4 forklarer estimeringen av de ulike modellparametrene ved hjelp av Excel VBA. Modellenes resultater presenteres i kapittel 5, og kapittel 6 omhandler resultatene og konklusjon.

1.1 Litteraturstudie

Utvidelsene av Black-Scholes-modellen kan deles inn i to grupper, deterministiske- og stokastiske volatilitetsmodeller. Deterministiske modeller baserer seg på at volatiliteten er en funksjon av observerbare faktorer i markedet (tid til forfall og utøvelseskurs). Eksempler på deterministiske volatilitetsmodeller er Cox og Ross (1976) sin konstant elastisitet av variansmodell (CEV), ad-hoc modellen med deterministiske volatilitetsfunksjoner (Dumas, Fleming og Whaley, 1998) og Gram-Charlier modellen (Backus, Foresi og Wu, 2004). Stokastiske modeller bygger på at volatiliteten følger en stokastisk prosess som baserer seg på ikke-observerbare faktorer. Flaggskipet innen denne kategorien er Heston (1993) sin stokastiske volatilitetsmodell. Det er også gjort forskning på modeller som baserer seg på stokastisk volatilitet og at aksjekursen følger en diffusjonsprosess med hopp (SVJ) (Bates, 1996), og modeller der renten også er stokastisk (SVSI) (Amin og Ng, 1993). Bakshi et al. (1997) presenterte en modell som tillot stokastisk volatilitet, stokastisk rente og hopp i aksjekursen (SVSJI), og analyserte dens prestasjoner mot stokastisk volatilitet-, SVJ-, og SVSI-modeller. Studiet konkluderte med at den viktigste utvidelsen av Black-Scholes-modellen er introduksjonen av stokastisk volatilitet. Stokastisk rente og hopp førte kun til marginale reduksjoner i prisingsfeilene. Basert på disse resultatene har vi valgt å kun fokusere på deterministiske- og stokastiske volatilitetsmodeller i vår analyse.

Opp gjennom årene er det gjort en rekke analyser av opsjonsprisingsmodellenes prestasjoner basert på prisingsfeil. Modellparametrene estimeres ved å minimere differansen mellom modellprisen og observert markedspris målt i en gitt tapsfunksjon. Modellenes prestasjoner evalueres deretter basert på hvor stor prisingsfeilen er målt i en tapsfunksjon. Valget av denne tapsfunksjonen er derfor avgjørende for resultatet.

Christoffersen og Jacobs (2004) argumenterer for at samme tapsfunksjon må brukes

til både estimeringen og evalueringen av modellene for å forhindre urettferdige sammenlikninger. Litteraturen har derimot ikke vært konsekvent. Bakshi et al. (1997) estimerer modellparametrene ved å minimere kvadratavviket mellom modellprisen og observert markedspris, og evaluerer deretter resultatene basert på det prosentvise kvadratavviket. Heston og Nandi (2000) benytter prosentvis kvadratavvik til estimeringen og kvadratavviket mellom Black-Scholes implisitte volatilitet og modellvolatilitet til evalueringen. Vi bygger vår oppgave på Christoffersen og Jacobs sine estimerings- og evalueringmetoder, for å unngå urettferdige sammenlikninger. Til å estimere modellparametrene benytter vi Rouah og Vainberg (2012); Rouah (2015) sin Excel VBA programmering.

1.2 Begrensninger

Arbeidet med denne oppgaven har vært meget omfattende, og på grunn av begrenset tid og datatilgang har oppgaven noen begrensninger.

- Datasettet vårt er ikke tidsspesifisert. Siste kursen til opsjonene kan være registrert på et annet tidspunkt enn kursen på underliggende aktivum. Dette gir et potensielt problem med asynkron skjevhet i beregningene. Vi prøver å redusere denne skjevheten ved å basere vår analyse på et gjennomsnitt av kjøper- og selgerkurs og filtrering av datasettet.
- Vi legger antakelsen om et perfekt marked, ingen transaksjonskostnader og rasjonelle aktører til grunn for vår analyse. Observasjonene i datasettet er derimot hentet fra et marked med transaksjonskostnader.
- Det finnes flere opsjonsprisinde modeller, blant annet den konstante elastisitet av varians modellen (CEV) Cox og Ross (1976), GARCH-modeller Heston og Nandi (2000) og tidsavhengige Heston-modeller Mikhailov og Nögel (2003). På grunn av tidsbegrensninger har vi valgt å kun fokusere på to modeller i vår analyse.
- Oppgaven fokuserer på modeller med ulike antakelser om underliggende aktivums volatilitet. Derfor har vi kun benyttet én deterministisk volatilitetsfunksjon i PBS-modellen. Andre volatilitetsfunksjoner ville muligens gitt enda bedre resultater.

2. Modeller

En opsjon er en rett, men ikke en plikt, til å kjøpe eller selge et verdipapir på et gitt tidspunkt til en forhåndsavtalt pris. For å få tilgang til denne retten må kjøperen betale en opsjonspremie som er prisen på opsjonen. I denne oppgaven fokuserer vi på europeiske kjøpsopsjoner. Disse kan kun utøves på den avtalte forfallsdatoen, og kontraktsfunksjonen er

$$C = \max(S_T - K, 0),$$

der C er prisen på opsjonen, S_T er prisen på underliggende aktivum på tidspunkt T og K er utøvelseskursen. Oppsiden til denne kontrakten er potensielt stor, og nedsiden er begrenset til prisen kjøperen betaler for opsjonen. Denne utbetalingsstrukturen blir verdsatt høyere i et marked med stor risiko. Opsjonsprisen vil derfor avhenge av underliggende aktivums volatilitet. Dette kapitlet presenterer tre opsjonsprisinde modeller som baserer seg på ulike antakelser om underliggende aktivums volatilitet.

2.1 Black-Scholes

Black og Scholes (1973) antar at verdien på underliggende aktivum følger en geometrisk Brownsk bevegelse

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t,$$

der μ er kontinuerlig forventet avkastning på aksjen, S_t er prisen på underliggende aktivum på tidspunkt t , Z_t er en Brownsk bevegelse og σ er volatiliteten til avkastningen på underliggende aktivum. Som følge av denne prosessen er underliggende aktivums kontinuerlige avkastning normalfordelt med konstant forventning og varians (McDonald, 2014, s. 623). Basert på denne prosessen og antakelsen om et perfekt marked, viser Black og Scholes (1973) at verdien på en europeisk kjøpsopsjon på tidspunkt t , med kontinuerlig dividendeutbetaling, er gitt ved

$$C_{BS,t} = S_t e^{-q\tau} N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2),$$

der

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma_{BS}^2)\tau}{\sigma_{BS}\sqrt{\tau}}$$

og

$$d_2 = d_1 - \sigma_{BS}\sqrt{\tau}.$$

I denne modellen er $N(\cdot)$ den kumulative sannsynlighetsfordelingen, q den konstante dividenderaten, r den konstante risikofrie renten, σ_{BS} er volatiliteten til underliggende aktivum og τ er antall handelsdager til forfall delt på antall handelsdager i et år. Alle innsatsfaktorene i modellen er observerbare, bortsett fra volatiliteten. Ved anvendelse av Black-Scholes-modellen er derfor “valget” av volatilitet avgjørende. Denne oppgaven benytter to varianter, Black-Scholes med 30-dagers volatilitet (BS-30) og Black-Scholes- $\$RMSE$ (BS- $\$RMSE$).

BS-30 estimerer volatiliteten basert på historiske data ved å beregne standardavviket til den kontinuerlige avkastningen til underliggende aktivum 30 handelsdager tilbake i tid.

$$\sigma_{Historisk} = \sqrt{\frac{1}{30-1} \sum_{i=1}^{30} (\mu_i - \bar{\mu})^2},$$

der μ_i er den kontinuerlige avkastningen i handelsdager tilbake i tid og $\bar{\mu}$ er den gjennomsnittlige kontinuerlige avkastningen de 30 siste handelsdagene. Ved anvendelse av Black-Scholes-modellen bruker vi annualisert historisk avkastning,

$$\sigma_{Historisk}^{Annualisert} = \frac{\sigma_{Historisk}}{\sqrt{\frac{1}{252}}} = \sigma_{Historisk}\sqrt{252}$$

der 252 representerer antall handelsdager i 2015. Fordelen med denne tilnærmingen er at historiske data er lett tilgjengelige. Historiske data vil derimot ikke alltid reflektere forventningene i markedet og kan derfor føre til et forventningsskjev estimat for underliggende aktivums faktiske volatilitet.

BS- $\$RMSE$ benytter den volatiliteten som minimerer det gjennomsnittlige kvadratavviket mellom observert markedspris og modellpris for alle handlede opsjoner en gitt handelsdag,

$$\sigma_{\$RMSE} = \min_{\sigma_{\$RMSE}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{C}_i - C_i(\sigma_{\$RMSE}))^2},$$

der n er antall handlede opsjoner, \hat{C}_i er observert markedspris for opsjon i og $C_i(\sigma_{\$RMSE})$ er Black-Scholes-prisen til opsjon i med $\sigma_{\$RMSE}$ som volatilitet. Etersom BS- $\$RMSE$ tar utgangspunkt i markedsdata på aktivt handlede opsjoner, er det å forvente at dette estimatet reflekterer forventningene i markedet bedre enn historisk volatilitet. Begge

tilnærmingene gir en konstant volatilitet for opsjoner med samme underliggende aktivum hver enkelt handelsdag.

Historisk volatilitet og \$RMSE volatilitet er kun estimater på den sanne volatiliteten. Ved å benytte Black-Scholes-formelen og beregne den volatiliteten til underliggende aktivum som fører til at modellprisen er lik den observerte markedsprisen på en gitt opsjon, finner man den volatiliteten som er implisert av markedsprisene. Denne volatiliteten omtales som Black-Scholes implisitt volatilitet og finnes ved å invertere Black-Scholes-formelen

$$\sigma_{IV,i} = \text{BS}^{-1}(\hat{C}_i, \tau, K, S, r, q), \quad (2.1)$$

der $\sigma_{IV,i}$ er den implisitte volatiliteten til underliggende aktivum med utgangspunkt i opsjon i og \hat{C}_i er markedsprisen på opsjon i . Vi benytter Newton-Raphson-metoden (Rouah og Vainberg, 2012, s. 8) til å beregne verdien i (2.1). Forutsetningene til Black og Scholes (1973) tilsier at denne volatiliteten skal være konstant for opsjoner med samme underliggende aktivum. Empirien viser derimot at Black-Scholes implisitt volatilitet varierer med opsjonenes utøvelseskurs og tid til forfall (Rubinstein, 1994).

2.2 Practitioners-Black-Scholes

Denne modellen omtales som Practitioners-Black-Scholes (PBS) av Christoffersen og Jacobs (2004) og som ad hoc-modellen av Dumas et al. (1998). Modellen unngår antakelsen om konstant volatilitet ved å la volatiliteten være en deterministisk funksjon (DVF) av tid til forfall og utøvelseskurs. For å anvende denne modellen følges de fire stegene:

1. Ta utgangspunkt i et tverrsnitt av opsjonspriser med samme underliggende aktivum på samme tidspunkt, men med varierende tid til forfall og utøvelseskurs, og beregn Black-Scholes implisitt volatilitet for hver opsjon.
2. Velg en deterministisk volatilitetsfunksjon, og estimer dens parametere ved bruk av minste kvadraters metode (Brooks, 2014, s. 78).
3. For en en gitt utøvelseskurs og tid til forfall, bruk parametrene fra steg 2 til å beregne tilpasset volatilitet, σ_{TP} .
4. Bruk den tilpassede volatiliteten fra steg 3 til å beregne ny opsjonspris med den tradisjonelle Black-Scholes-formelen

$$C_{PBS,t} = S_t e^{-q\tau} N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma_{TP}^2)\tau}{\sigma_{TP}\sqrt{\tau}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_{TP}\sqrt{\tau}.$$

Dumas et al. (1998) undersøker hvordan ulike deterministiske volatilitetsfunksjoner tilpasser seg det observerte volatilitetssmilet, og endrer modellspeifikasjonene basert på antall tider til forfall det er i tverrsnittet av opsjonsprisene hver handelsdag. Datasettet som er benyttet i denne oppgaven, har tre ulike tider til forfall for opsjonene hver handelsdag. Vi har derfor valgt å kun fokusere på den mest generelle funksjonene Dumas et al. (1998) benytter. Denne er gitt ved

$$DVF : \sigma_{TP} = a_0 + a_1 K + a_2 K^2 + a_3 \tau + a_4 \tau^2 + a_5 K \tau, \quad (2.2)$$

der K er utøvelseskurs og τ er tid til forfall. For at PBS skal ta hensyn til det skjeve volatilitetssmilet forventer vi en negativ verdi for a_1 og positiv verdi for a_2 . Det er verdt å merke seg at PBS er relativt enkel å anvende i praksis, noe som gjør den til

en meget attraktiv modell. En svakhet med PBS er at den baserer seg på antakelsen om at den kontinuerlige avkastningen til underliggende aktivum er normalfordelt med konstant gjennomsnitt og varians.

2.3 Heston-modellen

Heston-modellen antar at den underliggende aksjekursen følger diffusjonsprosessen

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dz_{1,t}$$

der $z_{1,t}$ er en Wiener-prosess, og variansen, v_t , følger en kvadratrot-prosess (Cox, Ingersoll Jr og Ross, 1985)

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dz_{2,t},$$

der $z_{2,t}$ er en Wiener-prosess som har korrelasjon $\rho \in [-1, 1]$ med $z_{1,t}$. Parametrene i modellen er

$\kappa > 0$ gjennomsnittlig reverseringsfart til varians,

$\theta > 0$ langsiktig gjennomsnittlig varians,

$\sigma > 0$ volatiliteten til variansen og

$v_0 > 0$ den initielle variansen på tidspunkt 0.

I praksis kan Heston-modellen implementeres på to måter, ved Monte Carlo simulering eller ved å beregne en løsning på lukket form. Vi benytter sistnevnte. Løsningen på lukket form baserer seg på risikonøytral verdsettelse (Cox og Ross, 1976), der tidspunkt t prisen på en europeisk kjøpsopsjon med kontinuerlig dividenderate (q), og tid til forfall (τ) er gitt ved

$$C_{Heston,t}(S, v, t) = S_t e^{-q\tau} P_1 - e^{-r\tau} K P_2.$$

P_1 og P_2 er betingede sannsynligheter for at opsjonen har positiv lønnsomhetsgrad ved forfall. Heston (1993) viser at de betingede sannsynlighetene kan skrives som

$$P_j = \Pr_j(\ln[S_T] \geq \ln[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln K} f_j}{i\phi} \right] d\phi \quad (2.3)$$

der $i = \sqrt{-1}$ er den imaginære enheten, $\Pr_1 = \mathbb{Q}^s$ og $\Pr_2 = \mathbb{Q}$ er det risikonøytrale sannsynlighetsmålet med henholdsvis aksje og risikofri obligasjon som numerær og f_j er de karakteristiske funksjonene til logaritmen av aksjekursen ved tidspunkt T . De karakteristiske funksjonene er gitt ved

$$f_j = \exp(C_j + D_j v_t + i\phi x_t),$$

der $x_T = \ln[S_T]$ og C_j og D_j er konstante koeffisienter. Disse er gitt ved

$$C_j = (r - q)i\phi\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left((b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2 \ln \left[\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right] \right)$$

og

$$D_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right],$$

der $\tau = (T - t)$ er tid til forfall og

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}$$

og

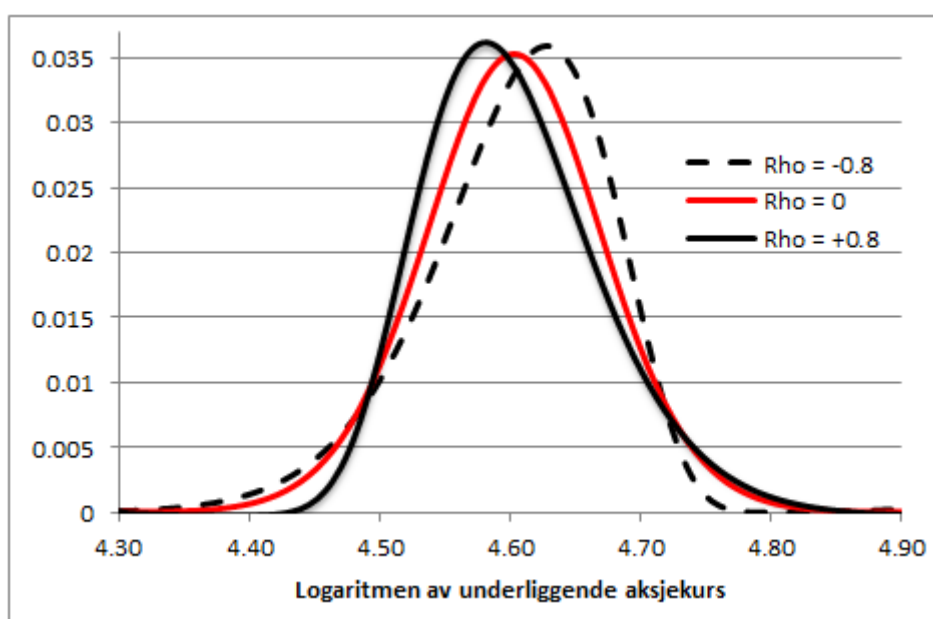
$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)},$$

der $u_1 = 1/2$, $u_2 = -1/2$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$ og $b_2 = \kappa + \lambda$. Parameteret λ representerer prisen på volatilitetsrisiko som en funksjon av underliggende aksjekurs, tid til forfall og volatilitet. Utregningen av (2.2) er en avansert oppgave og krever operasjoner med komplekse integraler. Vi approksimerer integralet i (2.2) ved å benytte numerisk integrasjon. Dette gir en tilnærmet riktig verdi på P_1 og P_2 . Tidligere stokastiske volatilitetsmodeller (Scott (1987), Hull og White (1987) og Wiggins (1987)) baserer seg på simuleringer av underliggende aktivums prisbane. Heston (1993) var den første stokastiske volatilitetsmodellen med en løsning på lukket form. Dette reduserte beregningstiden betraktelig og gjorde stokastiske volatilitetsmodeller til et mer anvendelig verktøy.

2.3.1 Parameteranalyse

Heston-modellen tar hensyn til at fordelingen til logaritmen av underliggende aksjekurs, $\ln(S_T)$, og den kontinuerlige avkastningen, $\ln(\frac{S_T}{S_0})$, kan ha skjevhet og kurtose avhengig av de underliggende modellparametrene. Denne delen undersøker hvordan korrelasjonen (ρ) og volatiliteten til variansen (σ) påvirker implisitt volatilitet og opsjonsprisen.

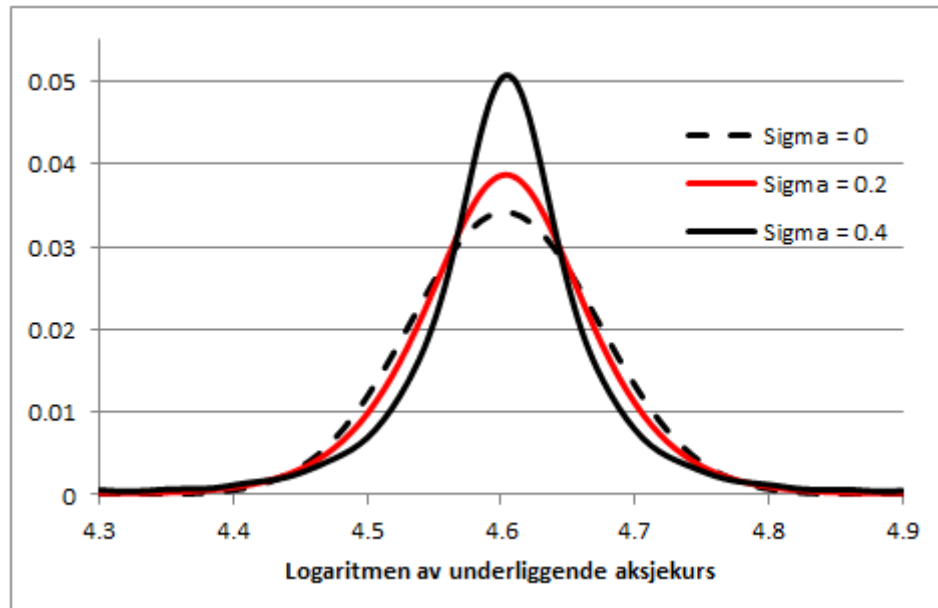
Korrelasjonen mellom aksjekursen og dens volatilitet kontrollerer skjevheten i fordelingen til $\ln(S_T)$ og $\ln(\frac{S_T}{S_0})$. Negativ ρ fører til at lav avkastning gir høy volatilitet og omvendt. Dette vil øke sannsynligheten for store fall i aksjekursen og redusere sannsynligheten for store prisøkninger. Figur 2.1 illustrerer hvordan negativ ρ fører til at fordelingen til $\ln[S_T]$ er venstreskjev med mer vekt på den venstre halen. Ved positiv ρ vil vi ha motsatt effekt. Black (1976) og Christie (1982) dokumenterer en negativ sammenheng mellom aksjekursen og dens volatilitet i det amerikanske markedet, av den grunn forventer vi også en negativ verdi ved estimeringen av ρ i vår analyse.



Figur 2.1: Fordelingen til logaritmen av underliggende aktivum ved ulike verdier av korrelasjon

Figuren viser hvordan fordelingen til logaritmen av underliggende aktivum, $\ln[S_T]$, påvirkes av ulike verdier av korrelasjon, ρ . Fordelingen er gitt ved den karakteristiske funksjonen, $f_2 = \exp(C_2 + D_2 + i\phi x_T)$. De underliggende parameterverdiene er $r = 0$, $q = 0$, $\kappa = 2$, $\theta = 0,01$, $\sigma = 0,1$ og $v_0 = 0,01$.

Volatiliteten til variansen (σ) kontrollerer kurtosen i fordelingen til $\ln[S_T]$. Høyere σ øker kurtosen slik at variansprosessen får større spredning. Fordelingen til $\ln[S_T]$ blir da spissere med tykkere haler. Dette gir mening ettersom høyere volatilitet av varians vil øke rekkevidden til $\ln[S_T]$. Figur 2.2 illustrerer dette for ulike verdier av σ .



Figur 2.2: Fordelingen til logaritmen av underliggende aktivum ved ulike verdier av volatilitet til variansen

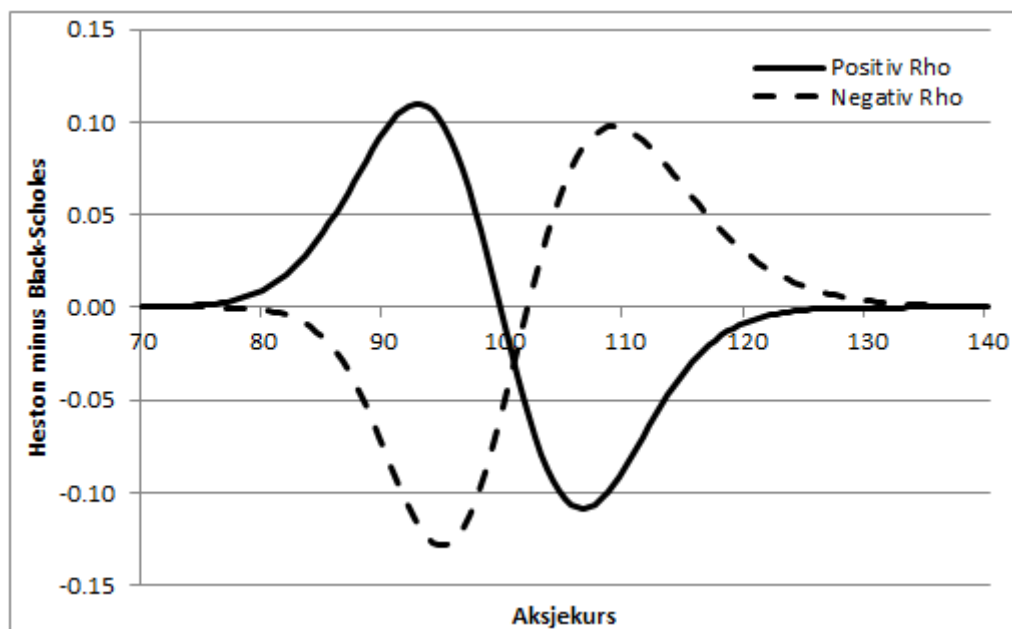
Figuren viser hvordan fordelingen til logaritmen av underliggende aktivum, $\ln[S_T]$, påvirkes for ulike verdier av volatiliteten til variansen, σ . Fordelingen er gitt ved den karakteristiske funksjonen,

$f_2 = \exp(C_2 + D_2 + i\phi x_T)$. De underliggende parameterverdiene er $r = 0$, $q = 0$, $\kappa = 2$, $\theta = 0,01$, $\rho = 0$ og $v_0 = 0,01$.

Den tradisjonelle Black-Scholes-modellen antar at logaritmen av underliggende aktivum er en normalfordelt variabel. Heston-modellen vil derfor gi en annen modellpris enn Black-Scholes dersom $\rho \neq 0$ og $\sigma \neq 0$. Figur 2.3 illustrerer denne forskjellen for ulike verdier av korrelasjon og opsjonenes lønnsomhetsgrad (S/K). Her viser x-aksen den underliggende aksjekursen, og aksjekurs lavere (høyere) enn 100 gir opsjonen lav (høy) lønnsomhetsgrad. Negativ korrelasjon, $\rho < 0$, fører til at Heston verdsetter opsjoner med lav lønnsomhetsgrad lavere og opsjoner med høy lønnsomhetsgrad høyere enn Black-Scholes-modellen. Dette er konsistent med den venstreskjeve fordelingen til $\ln[S_T]$ i figur 2.1. Opsjoner med lav lønnsomhetsgrad har utøvelseskurs i den høyre halen til fordelingen til $\ln[S_T]$. En venstreskjev fordeling vil gi slike opsjoner en lavere oppside enn en normalfordeling, og Heston verdsetter dem derfor lavere enn Black-Scholes. Opsjoner med høy lønnsomhetsgrad er derimot mer sensitive for den venstre halen til fordelingen. Denne delen av fordelingen er tykkere ved negativ korrelasjon, og Heston-modellen vil da verdsetter disse opsjonene høyere enn Black-Scholes.

Ved positiv korrelasjon vil fordelingen til $\ln[S_T]$ være høyreskjev, og Heston verdsetter

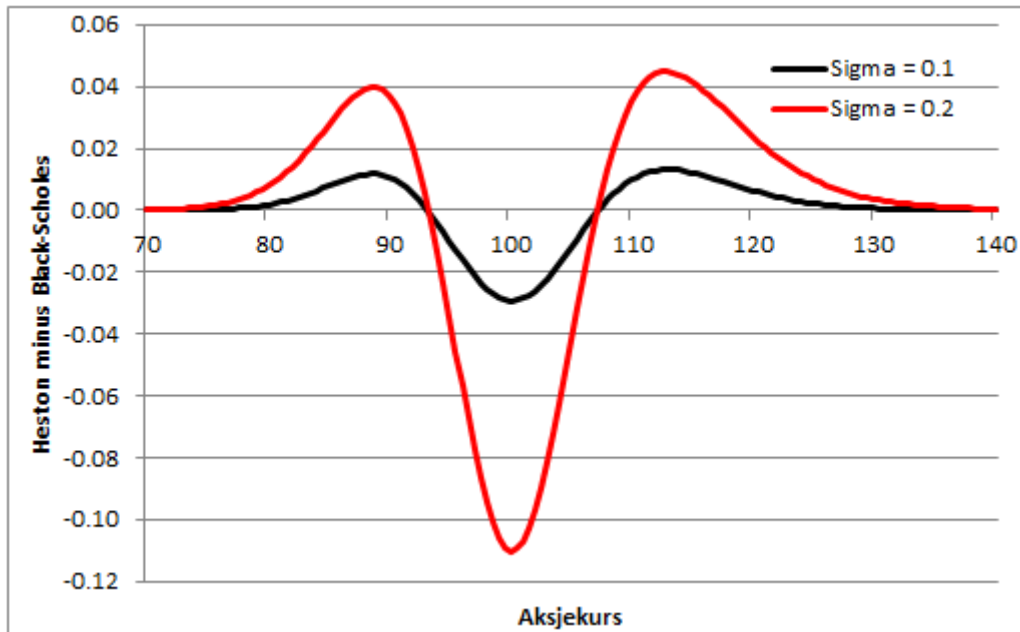
da opsjoner med lav lønnsomhetsgrad høyere enn Black-Scholes og opsjoner med høy lønnsomhetsgrad lavere.



Figur 2.3: Prisdifferansen mellom Heston og Black-Scholes for ulike korrelasjon

Figuren viser prisdifferansen mellom Heston og Black-Scholes for ulike verdier av lønnsomhetsgrad ($\frac{S}{K}$) og korrelasjon (ρ). Y-aksen viser prisdifferansen mellom Heston og Black-Scholes ($C_{Heston} - C_{BS}$). X-aksen viser aksjekursen (S) i intervallet \$70 til \$140. Utøvelseskursen, K , er konstant, og opsjonens lønnsomhetsgrad er derfor stigende med aksjekursen. Prisdifferansen vises for både positiv og negativ korrelasjon. De andre parameterverdiene er $K = 100$, $\tau = 0,5$, $r = 0$, $q = 0$, $\kappa = 2$, $\theta = 0,01$, $v_0 = 0,01$ og $\sigma = 0,1$.

Effekten av økt σ er høyere kurtose i fordelingen til $\ln[S_T]$. Figur 2.4 viser forskjellen mellom Heston- og Black-Scholes-prisen for ulike verdier av σ . Heston-prisen er høyere for opsjoner med lav og høy lønnsomhetsgrad, men Black-Scholes-prisen er høyere for opsjoner med moderat lønnsomhetsgrad. Disse observasjonene er konsistente med den økte kurtosen i fordelingen til $\ln[S_T]$ i Heston-modellen. Opsjoner med lav og høy lønnsomhetsgrad har en utøvelseskurs som ligger i halene til fordelingen til $\ln[S_T]$. Begge halene vektlegges mer i en fordeling med høyere kurtose, og Heston-modellen verdsetter dem derfor høyere enn Black-Scholes. Opsjoner med moderat lønnsomhetsgrad er ikke like sensitive for tykkere haler i fordelingen til $\ln[S_T]$, og Black-Scholes verdsetter derfor disse høyere enn Heston. Forskjellen blir større for økende verdier av σ .



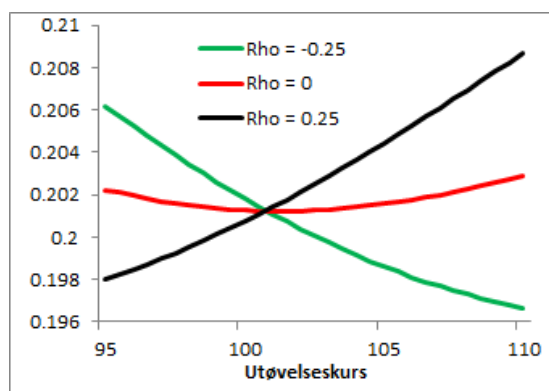
Figur 2.4: Prisdifferansen mellom Heston og Black-Scholes for ulik volatilitet til varians

Figuren viser prisdifferansen mellom Heston og Black-Scholes for ulike verdier av lønnsomhetsgrad ($\frac{S}{K}$) og volatilitet til varians (σ). Y-aksen viser differansen mellom Heston og Black-Scholes, $(C_{Heston} - C_{BS})$. X-aksen viser aksjekursen (S) i intervallet \$70 til \$140. Utøvelseskursen (K) er konstant, og opsjonens lønnsomhetsgrad er derfor stigende med økt aksjekurs. De andre parameterverdiene er $K = 100$, $\tau = 0,5$, $r = 0$, $q = 0$, $\kappa = 2$, $\theta = 0,01$, $v_0 = 0,01$ og $\rho = 0$.

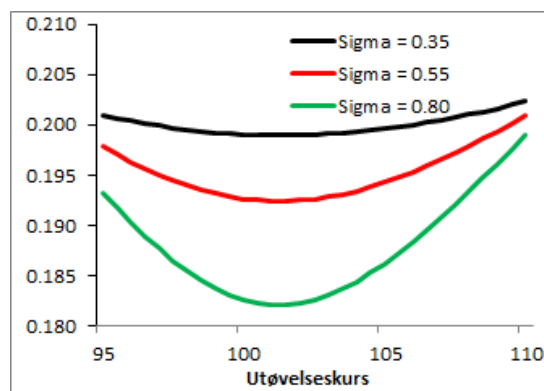
For ulike verdier av ρ og σ vil Heston-modellen kunne tilpasse seg det skjeve volatilitetssmilet som ble observert for indeksoptjoner i etterkant av *Black Monday*. Helningen til implisitt volatilitet-kurven drives av skjevheten i fordelingen til $\ln[S_T]$ og $\ln[\frac{S_T}{S_0}]$. Figur 2.5a viser hvordan Heston-modellens implisitte volatilitet påvirkes av ρ . Her viser x-aksen opsjonens utøvelseskurs (K). Aksjekursen (S) er konstant, og opsjonens lønnsomhetsgrad er derfor fallende med økt K . Den implisitte volatiliteten er funnet ved å først regne ut Heston-prisene for et utvalg av opsjoner med samme underliggende aktivum og tid til forfall, og deretter beregne Black-Scholes implisitt volatilitet med Newton-Rapson metoden. Dersom $\rho = 0$, vil implisitt volatilitet være konstant som i en Black-Scholes-verden. Negativ ρ fører til en venstreskjev fordeling av $\ln[S_T]$. Opsjoner med høy lønnsomhetsgrad vil da ha høyere volatilitet og bli verdsatt høyere av Heston-modellen enn tilsvarende opsjoner med lav lønnsomhetsgrad. Positiv ρ gir motsatt effekt.

Det er økende verdier av volatiliteten til variansen som fører til det typiske volatilitetssmilet. Økt kurtose i fordelingen til $\ln[S_T]$ gjør at unormalt høye og lave avkastninger blir vanligere. Dette gjør at Heston-modellen gir høyere implisitt volatilitet for opsjoner med lav og høy lønnsomhetsgrad, og vi får et volatilitetssmil. Figur 2.5b illustrerer dette og viser at smilet blir tydeligere for høyere verdier av σ . Her er også opsjonens lønnsomhetsgrad fallende med økt K .

Figur 2.5: Heston-parametrenes effekt på implisitt volatilitet



(a) Black-Scholes implisitt volatilitet for ulike verdier av ρ . y-aksen viser Black-Scholes implisitt volatilitet, og x-aksen viser utøvelseskurs. Aksjekursen er konstant, og opsjonens lønnsomhetsgrad er derfor fallende med økende utøvelseskurs. De andre parameterverdiene er $S = 100$, $\tau = 0,25$, $r = 0,05$, $q = 0$, $\kappa = 2$, $\theta = 0,01$, $v_0 = 0,01$ og $\sigma = 0,35$.



(b) Black-Scholes implisitt volatilitet for ulike verdier av σ . y-aksen viser Black-Scholes implisitt volatilitet, og x-aksen viser utøvelseskurs. Aksjekursen er konstant, og opsjonens lønnsomhetsgrad er derfor fallende med økende utøvelseskurs. De andre parameterverdiene er $S = 100$, $\tau = 0,25$, $r = 0,05$, $q = 0$, $\kappa = 2$, $\theta = 0,01$, $v_0 = 0,01$ og $\rho = 0$.

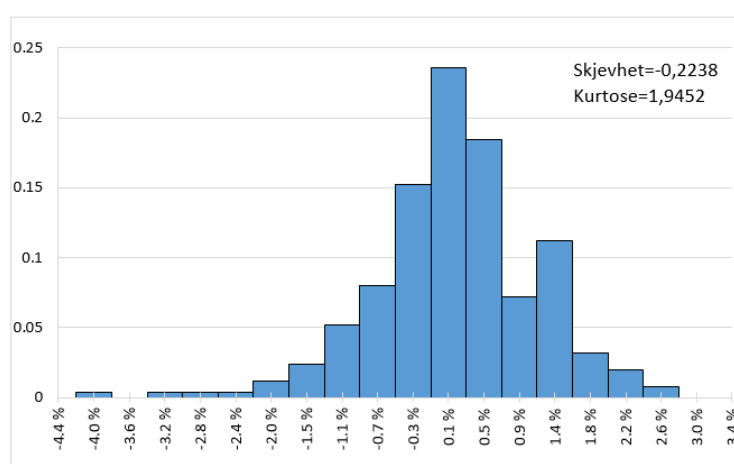
Introduksjonen av stokastisk volatilitet gjør at vi får en mer fleksibel modell. Heston-modellen kan tilpasse seg både volatilitetssmilet og fallende volatilitet med økt utøvelseskurs. I praksis burde den derfor egne seg bra til å prise opsjoner der fordelingen til underliggende aktivums kontinuerlige avkastning ikke er normalfordelt.

3. Datasett

3.1 SPX opsjoner

Datasettet består av historiske priser på S&P 500 indeksopsjoner (SPX) handlet på Chicago Board Options Exchange (CBOE) i perioden 2. januar 2015 til 31. desember 2015. Opsjonene er europeiske kjøpsopsjoner, og har forfall den tredje fredagen i forfallsmåned. Dette datasettet egner seg godt til empirisk analyse ettersom SPX opsjoner er en av de mest aktivt handlede opsjonskontraktene av europeisk type. I tillegg tar flere tidligere studier, (Bakshi et al. (1997), Dumas et al. (1998), Christoffersen og Jacobs (2004)), utgangspunkt i S&P 500 som underliggende aktivum. Datasettet er hentet fra www.historicaloptiondata.com, og inneholder nivået til S&P 500, kjøper- og selgerkurs, sluttkurs, volum og antall utestående kontrakter for hver opsjon i utvalget.

Opsjonspringsmodeller legger til grunn ulike antakelser om underliggende aktivums sannsynlighetsfordeling. Figur 3.1 viser fordelingen til den kontinuerlige avkastningen til S&P 500 i 2015. Denne fordelingen er venstreskjev og har positiv kurtose. Modeller som tar hensyn til dette, burde derfor gi lavere pringsfeil enn Black-Scholes-modellen, som antar at underliggende aktivums kontinuerlige avkastning er normalfordelt.



Figur 3.1: Fordelingen til de daglige, kontinuerlige avkastningene til S&P 500 i 2015

Histogram over den daglige kontinuerlige avkastningen til S&P 500. Y-aksen viser den relative frekvensen. X-aksen viser den kontinuerlige avkastningen målt i prosent.

3.2 Gjennomsnittskurs

I datasettet er nivået til S&P 500 gitt ved den siste registrerte kursen hver handelsdag. For opsjonsprisene inneholder datasettet kjøper-, selgerkurs og siste kurs for hver observasjon. Kjøper- og selgerkurs er henholdsvis den høyeste prisen kjøperen er villig til å betale og den laveste prisen en selger er villig til å akseptere. Den sanne markedsprisen til aktivumet vil ligge mellom kjøper- og selgerkurs. Siste kurs representerer prisen på den siste transaksjonen som er registrert hver handelsdag. Datasettet er ikke tidsspesifisert, og siste kursen til opsjonen og S&P 500 kan derfor være registrert på forskjellige tidspunkt. Dette vil føre til asynkron-skjevhet.

Tidlig i vår analyse observerte vi at siste kurs lå utenfor kjøper- selgerkurs differansen for flere observasjoner, dette gjelder spesielt for opsjoner som er lite handlet. Siste kursen vil da ikke representere den sanne markedsprisen til opsjonen. For å redusere denne skjevheten har vi benyttet gjennomsnittet av kjøper- og selgerkurs som en proxy på den sanne markedsprisen.

3.3 Risikofri rente og dividendeavkastning

Risikofrie rente og dividende inngår i alle modellene i oppgaven. Som estimat for den risikofrie renten i oppgaven benyttes amerikansk statsveksel med tre måneders løpetid (US T-bill). På grunn av sin høye kredittvurdering anses denne som et godt estimat på risikofri rente. Videre er det antatt at renten er konstant over tid. På bakgrunn av dette er gjennomsnittet for tre-måneders-renten i 2015 regnet ut og deretter annualisert.

S&P 500 inkluderer dividende. Ettersom dividenden ikke blir reinvestert i indeksen, men utbetalt som kontanter, må dette justeres for. Dividendeutbetalingen er antatt å være kontinuerlig, der dividendeavkastningen er gitt ved

$$q = \frac{\text{Årlig dividende utbetalt}}{\text{Pris på underliggende aktivum}}.$$

Dividendeavkastningen er utregnet fra den gjennomsnittlige nivået på S&P 500 i 2015.

3.4 Filtrering av datasettet

Det originale datasettet inneholdt en rekke opsjoner som ikke var handlet. For at disse observasjonene ikke skulle påvirke resultatene, har vi filtrert datasettet etter følgende regler:

1. Alle observasjoner er sjekket for den nedre grensebetingelsen

$$C_t \geq S_t e^{-q\tau} - K e^{-r\tau} \quad (3.1)$$

Dersom denne betingelsen ikke er tilfredsstillt, vil det være arbitrasjemuligheter i markedet, og vi har derfor fjernet disse observasjonene.

2. Vi tar kun utgangspunkt i aktivt handlede opsjoner, og alle opsjoner uten registrerte handler er fjernet fra utvalget.
3. Vi definerer opsjonens lønnsomhetsgrad (LG) som

$$LG = \frac{S}{K} \quad (3.2)$$

Opsjoner med for lav eller høy lønnsomhetsgrad er typisk lite handlet og kan inneholde likviditetsrelaterte skjevheter. Vi har derfor valgt å ekskludere opsjoner med lønnsomhetsgrad mindre enn 0,9 og større enn 1,1.

4. Vi har ekskludert alle opsjoner med mindre enn fem dager og lengre enn 100 dager til forfall, ettersom disse kan inneholde likviditetsrelaterte skjevheter.
5. Opsjoner med gjennomsnittspris lavere enn \$0,5 er ekskludert, ettersom disse har stor innvirkning på våre beregninger og kan inneholde likviditetsrelaterte skjevheter.
6. Til å beregne Black-Scholes implisitt volatilitet har vi benyttet Newton-Raphson-metoden. Denne algoritmen klarer ikke å beregne en volatilitet som gir mening for alle opsjonene. Vi har derfor ekskludert opsjoner der implisitt volatilitet er mindre enn 1% og større enn 100% .

Det endelige datasettet består av 13644 observasjoner. Videre deles observasjonene inn i 18 kategorier basert på lønnsomhetsgrad og dager til forfall. Tabell 3.1 viser gjennomsnittlig opsjonspris og antall observasjoner sortert etter lønnsomhetsgrad og dager

til forfall. Opsjoner med lav og høy lønnsomhetsgrad er mindre handlet og er derfor underrepresentert i utvalget. Dette kan gi utslag ved estimeringen av modellparametrene. Den gjennomsnittlige opsjonsprisen er økende med lønnsomhetsgrad og forfall, og varierer fra \$1,26 for opsjoner med lav lønnsomhetsgrad og kort tid til forfall til \$155,23 for opsjoner med høy lønnsomhetsgrad og lang tid til forfall.

Tabell 3.1: Gjennomsnittlig opsjonspris og antall observasjoner i utvalget

Tabellen viser den gjennomsnittlige opsjonspris for ulike kategorier av lønnsomhetsgrad ($\frac{S}{K}$) og dager til forfall. Antall observasjoner i hver kategori vises i parentes. S betegner nivået til S&P 500, og K er opsjonens utøvelseskurs. Utvalgsperioden er fra 2. januar 2015 til 31. desember 2015.

Lønnsomhetsgrad ($\frac{S}{K}$)	Dager til forfall			Totalt
	< 33	33 – 66	> 66	
$\frac{S}{K} \leq 0,94$	1,26 (160)	4,66 (161)	9,83 (204)	(525)
$0,94 < \frac{S}{K} \leq 0,97$	2,48 (836)	8,66 (929)	16,84 (1013)	(2778)
$0,97 < \frac{S}{K} \leq 1$	11,46 (1682)	25,35 (1911)	37,24 (1759)	(5352)
$1 < \frac{S}{K} \leq 1,03$	40,30 (1287)	55,98 (1448)	68,41 (1330)	(4065)
$1,03 < \frac{S}{K} \leq 1,06$	88,14 (263)	99,40 (288)	110,61 (269)	(820)
$1,06 < \frac{S}{K}$	138,25 (28)	145,05 (41)	155,23 (36)	(105)
Totalt	(4256)	(4778)	(4611)	(13645)

Tabell 3.2 viser gjennomsnittlig Black-Scholes implisitt volatilitet over seks lønnsomhetsgrad- og tre dager til forfall kategorier. Black-Scholes implisitt volatilitet uttrykker et smil med økende lønnsomhetsgrad i alle kategorier av tid til forfall. Antakelsen om konstant volatilitet vil da føre til prisingsfeil for store deler av opsjonene i utvalget. Størrelsen på smilet er relativt lik uavhengig av antall dager til forfall. Gjennomsnittlige implisitt volatilitet varierer altså ikke like mye med tid til forfall. I de ulike kategoriene av lønnsomhetsgrad er det ingen klar trend i hvordan tid til forfall påvirker implisert

volatilitet, men for alle observasjonene er trenden svakt stigende. Resultatene i tabell 3.2 er konsistente med observasjonene i figur 3.1 som indikerer kurtose og negativ skjevhet i S&P 500 sin kontinuerlige avkastning i 2015. Dette bekrefter at Black-Scholes-modellens antakelser ikke stemmer overens med empirien. En bedre opsjonsprisinde modell burde derfor ta hensyn til negativ skjevhet og kurtose i underliggende aktivums kontinuerlige avkastning.

Tabell 3.2: Gjennomsnittlig Black-Scholes implisitt volatilitet

Tabellen viser gjennomsnittlig implisitt volatilitet for kjøpsopsjonene i de ulike kategoriene av lønnsomhetsgrad ($\frac{S}{K}$) og dager til forfall. S betegner nivået til S&P 500, og K er opsjonens utøvelseskurs. Implisitt volatilitet finnes ved å invertere Black-Scholes-formelen for hver enkelt kjøpsopsjon i utvalget.

Lønnsomhetsgrad ($\frac{S}{K}$)	Dager til forfall			Totalt
	< 33	33 – 66	> 66	
$\frac{S}{K} \leq 0,94$	15,40%	14,11%	14,08%	14,49%
$0,94 < \frac{S}{K} \leq 0,97$	11,51%	11,70%	12,53%	11,95%
$0,97 < \frac{S}{K} \leq 1$	11,68%	12,76%	13,60%	12,70%
$1 < \frac{S}{K} \leq 1,03$	14,37%	14,86%	15,45%	14,90%
$1,03 < \frac{S}{K} \leq 1,06$	17,40%	17,11%	17,35%	17,28%
$1,06 < \frac{S}{K}$	21,52%	19,02%	19,15%	19,73%
Totalt	13,04%	13,56%	14,18%	

4. Parameterestimering

4.1 Fremgangsmåte

Ved anvendelse av komplekse økonomiske modeller er estimeringsmetoden bak modellparametrene avgjørende. Modellen kan gi forventningsskjevne resultater dersom estimeringsmetoden ikke er god. Dette kapitlet forklarer hvordan vi har estimert de ulike modellparametrene ved bruk av Excel VBA. Alle modellene i oppgaven inneholder ikke-observerbare parametre, og perfekt estimering av disse er en krevende oppgave. For å beregne parametrene kan man ta utgangspunkt i enten historiske data eller tverrsnittsdata av nåværende priser. Historiske data er lett tilgjengelige, men kan som nevnt tidligere føre til forventningsskjevne estimater. For å unngå dette kan man benytte et tversnitt av observerte markedsdata på handlede opsjoner, og estimere de ikke-observerbare parametrene som er implisert av markedsprisene. Modellene i denne oppgaven baserer seg på tverrsnittsdata med unntak av BS-30. Til å estimere parameterverdiene til PBS, Heston-modellen og BS-\$RMSE har vi benyttet samme estimeringsprosedyre som Bakshi et al. (1997). Fremgangsmåten er som følger:

1. Ta utgangspunkt i n opsjonpriser med samme underliggende aktivum på samme tidspunkt. Antall opsjonspriser, n , må være større enn antall parametre som skal estimeres. For hver opsjon $i = 1, \dots, n$ er τ_i og K_i henholdsvis tid til forfall og utøvelsespris. La $\hat{C}_i(t, \tau_i, K_i)$ være den observerte markedsprisen og $C_i(t, \tau_i, K_i)$ modellprisen determinert av for eksempel Black-Scholes. Differansen mellom \hat{C}_i og C_i er en funksjon av parametervektoren Φ . Dimensjonen til denne vektoren vil variere ut fra hvilken modell som brukes til å beregne C_i .
2. Beregn så parametervektoren, Φ , som minimerer differansen mellom markedsprisen og modellprisen målt i en gitt tapsfunksjon. For eksempel

$$\text{\$RMSE}(\Phi) = \min_{\Phi} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{C}_i - C_i(\Phi))^2}.$$

Parametervektoren som løser minimeringsproblemet i steg 2 gir oss de implisitte variablene

til modellen. For PBS, Heston-modellen og BS- $\$RMSE$ er denne prosedyren gjentatt for alle dagene i utvalget.

4.2 Valg av tapsfunksjon

Valget av tapsfunksjon er en avgjørende del av estimeringsprosedyren. I oppgaven er det benyttet tre ulike tapsfunksjoner, kvadratroten av gjennomsnittlig kvadratavvik ($\$RMSE$), kvadratroten av prosentvis gjennomsnittlig kvadratavvik ($\%RMSE$) og kvadratroten av dem implisitte volatilitetens gjennomsnittlige kvadratavvik ($IVRMSE$).

$\$RMSE$ er kvadratroten av den gjennomsnittlige kvadrerte prisingsfeilen av opsjonene i utvalget

$$\$RMSE(\Phi) = \min_{\Phi} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{C}_i - C_i(\Phi))^2}, \quad (4.1)$$

der $(\hat{C}_i - C_i(\Phi))$ er prisingsfeilen til opsjon i . $\$RMSE$ -parametrene er gitt ved den parametervektoren, $\Phi_{\$RMSE}$, som løser (4.1) for en gitt handelsdag. En svakhet med denne tapsfunksjonen er at opsjoner med lav lønnsomhetsgrad bidrar lite til summen i (4.1) ettersom disse typisk har lav markedsverdi. $\$RMSE$ vil derfor legge større vekt på opsjoner med høy lønnsomhetsgrad i minimeringen av (4.1). Alternativt kan kvadratroten av prosentvis gjennomsnittlig kvadratavvik benyttes. Denne er definert som

$$\%RMSE(\Phi) = \min_{\Phi} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{C}_i - C_i(\Phi)}{\hat{C}_i} \right)^2}, \quad (4.2)$$

og $\%RMSE$ -parametrene er gitt ved den parametervektoren, $\Phi_{\%RMSE}$, som løser (4.2) for en gitt handelsdag. Tilstedeværelsen av \hat{C}_i brøkens nevner fører til at opsjoner med lav lønnsomhetsgrad i større grad bidrar til summen i (4.2), og $\%RMSE$ vil derfor legge større vekt på disse opsjonene. Vi forventer derfor at $\%RMSE$ -parametrene gir lavest prisingsfeil for opsjoner med lav lønnsomhetsgrad.

Både $\$RMSE$ og $\%RMSE$ tar utgangspunkt i markedspris og modellpris i estimeringen av modellparametrene. Den tredje tapsfunksjonen velger parametervektoren som minimerer kvadratavviket mellom markedsprisens og modellprisens implisitte volatilitet, Φ_{IVRMSE} . Denne parametervektoren løser

$$IVRMSE(\Phi) = \min_{\Phi} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_{\hat{IV},i} - \sigma_{IV,i}(\Phi))^2}, \quad (4.3)$$

der $\sigma_{IV,i}$ er Black-Scholes implisitt volatilitet for markedsprisen og $\sigma_{IV,i}(\Phi)$ er Black-Scholes implisitt volatilitet for modellprisen til opsjon i . For å konstruere avviket $(\sigma_{IV,i} - \sigma_{IV,i}(\Phi))^2$ må vi benytte Newton-Rapson-metoden for alle markedspriser og modellpriser i utvalget. Det er derfor mer tidkrevende å benytte IVRMSE som tapsfunksjon enn \$RMSE og %RMSE. Fordelen med IVRMSE er at den vektlegger opsjonene i utvalget tilnærmet likt, ettersom differansen mellom markedsprisens og modellprisens implisitte volatilitet påvirkes lite av opsjonenes lønnsomhetsgrad. Resultatene til de ulike tapsfunksjonene kan bli påvirket av eventuell skjevhet i datasettet som er benyttet i denne oppgaven. Den høyeste kategorien av lønnsomhetsgrad er underrepresentert med kun 105 observasjoner. Dette kan føre til at den skjeve vektingen til \$RMSE ikke gir et stort utslag.

Prestasjonene til de ulike modellene blir evaluert ved å sammenlikne modellpriser med observerte markedspriser både i og utenfor estimeringsutvalget. Her måles også prisingsfeilen i tapsfunksjoner. I litteraturen er det ingen konsensus om hvilken tapsfunksjon som er best å benytte i estimeringen av modellparametrene. Christoffersen og Jacobs (2004) har vist at dersom man evaluerer modellene med en annen tapsfunksjon enn den som er brukt i estimeringen, vil det føre til urettferdige resultater. Dette er fordi modellene blir målt på et annet avvik enn det de forsøker å minimere i estimeringen. Det forventes derfor at de ulike parameter-estimatene gi lavest prisingsfeil målt i den tapsfunksjon som er lagt til grunn i estimeringen.

4.3 Estimering med Excel VBA

I denne oppgaven har vi benyttet Excel VBA til alle beregninger. Vi har tatt utgangspunkt i VBA programmeringen fra Rouah og Vainberg (2012) og Rouah (2015), og skrevet egne koder til å automatisere beregninger. Ved estimeringen av PBS og Heston-modellen avhenger den gitte tapsfunksjonen av flere variabler. For å løse disse minimeringsproblemene har vi benyttet en Nelder-Mead algoritme etter Lagarias et al. (1998) sin metode. Denne algoritmen avhenger av en vektor med startverdier. For Heston-modellen har vi tatt utgangspunkt i resultatene til Guillaume og Schoutens (2012) som også benytter S&P 500 som underliggende aktivum. For PBS benytter vi resultatene fra IVRMSE da denne tapsfunksjonen minimerer det samme avviket som minste kvadraters metode regresjonen av (2.1). Vi trenger derfor ikke å finne disse parameterverdiene ved hjelp av Nelder-Mead algoritmen.

4.4 Resultater

For at modellene skal egne seg godt til praktisk anvendelse, burde parameterestimatene være stasjonære for de ulike dagene i utvalget. Dersom parametrene ikke er stasjonære, er det et tegn på markedsendringer fra dag til dag som modellparametrene tar høyde for. Modellene vil da gi lave prisingsfeil for opsjoner i estimeringsutvalget, men egne seg dårlig til prising utenfor utvalget og sikring. Tabell 4.1 viser de gjennomsnittlige verdiene av de estimerte PBS-parametrene for alle handelsdager i 2015 med tilhørende standardavvik, estimert med de tre ulike tapsfunksjonene. Utøvelseskursene til opsjonene i datasettet ligger i intervallet $[1800, 2240]$. Tid til forfall er målt i antall handelsdager til forfall delt på antall handelsdager i et år. Antall handelsdager til forfall ligger i intervallet $[5, 74]$, og det er 252 handelsdager i 2015, vi vil derfor alltid ha $\tau < 0,5$. Den store forskjellen i størrelsen til K og τ forklarer hvorfor de gjennomsnittlige estimatene til a_1 og a_2 er lave sammenliknet med a_3 og a_4 .

De gjennomsnittlige estimatene for a_1 og a_2 er henholdsvis negative og positive, dette gir samsvar med det observerte volatilitetsmilet i tabell 3.2. Verdiene til a_2 er riktignok svært lave. Dette kan skyldes at opsjonene med høyest lønnsomhetsgrad ($S/K > 1,06$) er underrepresentert i utvalget, og disse blir derfor vektlagt lavere i estimeringen.

I et jevnere datasett ville sannsynligvis estimatene for a_2 vært høyere. Videre er det overraskende at de gjennomsnittlige estimatene for a_3 og a_4 er negative for \$RMSE- og IVRMSE-parametrene. Dette tilsier at lengre tid til forfall gir lavere volatilitet, og det er ikke konsistent med observasjonene i tabell 3.2 der den implisitte volatiliteten viser en svakt stigende trend med tid til forfall.

Tabell 4.1: Gjennomsnittlige PBS-parametre for alle handelsdager i 2015

Tabellen viser de gjennomsnittlige parameterverdiene til PBS for alle handelsdagene i 2015 med tilhørende standardfeil i parentes. Modellparametrene er estimert med de ulike tapsfunksjonene fra kapittel 4.2, dette gir tre forskjellige vektorer med modellparametre. Volatilitetsfunksjonen som ligger til grunn for PBS er $\sigma_{TP} = a_0 + a_1K + a_2K^2 + a_3\tau + a_4\tau^2 + a_5K\tau$, der K er opsjonens utøvelseskurs og τ er tid til forfall.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
\$RMSE-parametre						
Gjennomsnitt	2,1639	-0,0019	3×10^{-7}	-1,3605	-0.2109	0,0007
Standardavvik	(2.3357)	(0,0022)	$(5,28 \times 10^{-7})$	(0,8705)	(0,4780)	(0,0004)
%RMSE-parametre						
Gjennomsnitt	2,8756	-0,0023	5×10^{-7}	0,6337	-0,0547	0,0002
Standardavvik	(2,4331)	(0,0023)	$(5,69 \times 10^{-8})$	(1,8815)	(0,5032)	(0,0009)
IVRMSE-parametre						
Gjennomsnitt	3,07443	-0,0024	5×10^{-7}	-1,0213	-0,1164	0,0005
Standardavvik	(2,4776)	(0,0024)	$(5,60 \times 10^{-7})$	(1,5494)	(0,4640)	(0,0007)

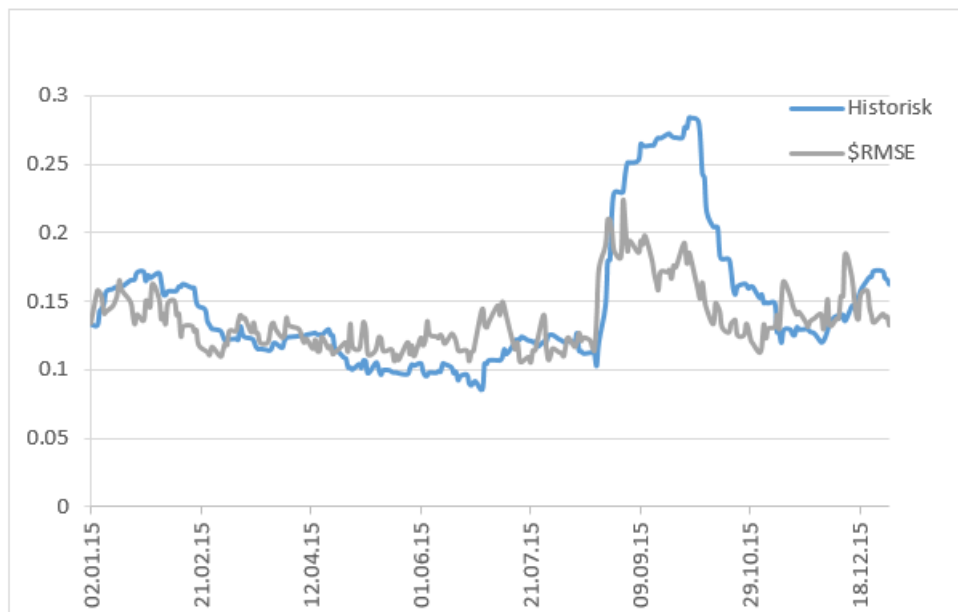
Tabell 4.2 viser gjennomsnitt og standardavvik for Heston-parametrene for alle handelsdagene i 2015, estimert med de tre ulike tapsfunksjonene. Vi merker oss her at vi har en sterk negativ korrelasjon mellom aksjekursen og dens volatilitet, ρ , og høy verdi for volatiliteten til variansen, σ . Disse parameterverdiene er konsistente med observasjonene fra figur 3.1 og tabell 3.2. Videre ser vi at parameteren med høyest standardavvik er gjennomsnittlig reverseringsfart til varians. Sammenliknet med tidligere parameterestimer for Heston-modellen, (Bakshi et al. (1997), Christoffersen et al. (2009), Guillaume og Schoutens (2012)), har vi høyere verdier for κ og ρ og høyere standardavvik for alle parametre. Dette kan tyde på at våre parameterestimer gir større prisingsfeil utenfor utvalget.

Tabell 4.2: Gjennomsnittlige Heston-parametre for alle handelsdager i 2015

Tabellen viser de gjennomsnittlige parameterverdiene til Heston-modellen for alle handelsdagene i 2015 med tilhørende standardavvik i parentes. Modellparametrene er estimert med de ulike tapsfunksjonene fra kapittel 4.2, dette gir tre forskjellige vektorer med modellparametre.

	κ	θ	σ	v_0	ρ
\$RMSE-parametre					
Gjennomsnitt	4,5167	0,0701	0,8560	0,0189	-0,8427
Standardavvik	(3,9825)	(0,1018)	(0,3209)	(0,0146)	(0,0601)
%RMSE-parametre					
Gjennomsnitt	5,1858	0,0586	0,6478	0,0189	-0,8724
Standardavvik	(4,9154)	(0,0726)	(0,4231)	(0,0171)	(0,0943)
IVRMSE-parametre					
Gjennomsnitt	4,9863	0,0766	0,7837	0,0187	-0,8532
Standardavvik	(4,5450)	(0,1402)	(0,3281)	(0,0147)	(0,0654)

For den tradisjonelle Black-Scholes-modellen har vi to ulike tilnærminger av volatiliteten, 30-dagers historisk (BS-30) og den volatiliteten som minimerer summen av kvadratavvikene mellom markedsprisene og modellprisene hver dag (BS-\$RMSE). Figur 4.1 viser at disse to volatilitetene følger samme trend gjennom 2015 med unntak av september måned. S&P 500 indeksen falt 9% fra 20. august til 25. august 2015, noe som førte til at begge volatilitetene økte kraftig. Den historiske volatiliteten vil derimot ta hensyn til det store fallet 30 dager frem i tid, og dette forklarer det store avviket mellom 30-dager historisk volatilitet og \$RMSE-volatilitet i september måned. Dette avviket viser hvordan historisk volatilitet kan gi et forventningsskjevt estimat, og vi forventer derfor at BS-30 gir størst prisingsfeil av de ulike opsjonsprisinde modellene.



Figur 4.1: Volatiliteten til S&P 500 i 2015

Figuren viser 30-dagers historisk volatilitet (blå linje) mot \$RMSE volatilitet (grå linje) for S&P 500 i 2015.

5. Empiriske resultater

5.1 Prisingsfeil i utvalget

Prisingsfeilene i utvalget forteller hvor godt modellene priser opsjonene modellparametrene er estimert på grunnlag av. I kapittel 3 ble det vist at fordelingen til den kontinuerlige avkastningen til S&P 500 er venstreskjev med positiv kurtose, og at Black-Scholes implisitt volatilitet uttrykker et volatilitetssmil. Vi forventer derfor at PBS og Heston-modellen som tar hensyn til dette, vil gi lavere prisingsfeil enn Black-Scholes. Modellenes prisingsfeil blir målt med de tre tapsfunksjonene fra kapittel 4.2 for alle dagene i utvalget. For eksempel

$$\$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{n_t} (\hat{C}_i - C_i(\Phi_t))^2},$$

der T representerer antall handelsdager i 2015, N er det totale antall observasjoner i utvalget og n_t er antall observasjoner for handelsdag t slik at

$$N = \sum_{t=1}^T n_t.$$

Tabell 5.1 viser prisingsfeilen i utvalget til Black-Scholes-30, Black-Scholes- $\$RMSE$, PBS og Heston-modellen målt i de ulike tapsfunksjonene. Black-Scholes-30 er modellen med størst prisingsfeil. Ved å benytte $\$RMSE$ -volatilitet (BS- $\$RMSE$) reduseres prisingsfeilene betydelig. Dette illustrerer svakheten ved å benytte historiske data til estimeringen av volatiliteten. PBS og Heston-modellen gir som forventet lavere prisingsfeil enn Black-Scholes. Dette viser at antakelsen om konstant volatilitet egner seg dårlig ved prising av et bredt utvalg av opsjoner. Videre ser vi at PBS gir lavere prisingsfeil målt i alle tapsfunksjoner for alle parameterestimer. Dette er overraskende ettersom Heston-modellen er en mer kompleks modell og burde derfor i teorien gi lavere prisingsfeil i utvalget. De ulike parameterestimatene for PBS og Heston-modellen gir alle lavest prisingsfeil målt i den tapsfunksjonen som er benyttet i estimeringen av parametrene, dette samsvarer med resultatene til Christoffersen og Jacobs (2004). Ettersom PBS gir tilstrekkelig lavere prisingsfeil for alle parameterestimer, er ikke valget av tapsfunksjon

avgjørende for evalueringen av modellene.

Tabell 5.1: Prisingsfeil i utvalget

Tabellen viser de tre modellenes prisingsfeil i estimeringsutvalget for alle observasjonene i utvalget. I venstre kolonne vises først hvilken modell som benyttes (**i fet skrift**), deretter hvilke parameterestimerer som er brukt i modellen. For hvert parameterestimat vises prisingsfeilen målt i de tre tapsfunksjonene fra kapittel 4.2.

Modell	Tapsfunksjoner		
	\$RMSE	%RMSE	IVRMSE
Black-Scholes			
BS-30	12,5062	2,0964	0,0486
BS-\$RMSE	4,9792	0,4918	0,0231
PBS			
\$RMSE-parametre	0,3931	0,1231	0,0040
%RMSE-parametre	1,5442	0,0701	0,0069
IVRMSE-parametre	0,5307	0,0901	0,0029
Heston			
\$RMSE-parametre	0,6283	0,1410	0,0048
%RMSE-parametre	2,1765	0,0759	0,0085
IVRMSE-parametre	0,8272	0,1031	0,0040

Videre er det interessant å undersøke hvor store prisingsfeilene er i de ulike kategoriene av lønnsomhetsgrad. Dersom prisingsfeilene er like store uavhengig av at lønnsomhetsgrad, betyr det at modellen tar hensyn til effekten av volatilitetssmilet. Prisingsfeilene måles her kun i \$RMSE og IVRMSE. Tilstedeværelsen av \hat{C}_i i brøkens nevner i (4.2) gjør at %RMSE vil gi fallende prisingsfeil med økende lønnsomhetsgrad for alle modeller. \$RMSE og IVRMSE vil derimot gi et rettfærdig mål på prisingsfeilen uavhengig av lønnsomhetsgrad.

Tabell 5.2 illustrerer svakheten til Black-Scholes-modellen. BS-\$RMSE gir større prisingsfeil for opsjoner med lav og høy lønnsomhetsgrad målt i både \$RMSE og IVRMSE. Dette er konsistent med resultatene fra tabell 3.2 som indikerer et volatilitetssmil for opsjonene i utvalget. Den konstante Black-Scholes-volatiliteten fører derfor til store prisingsfeil for opsjoner med lav og høy lønnsomhetsgrad. For BS-30 er ikke trenden like tydelig, men prisingsfeilen er betydelig større enn BS-\$RMSE for alle lønnsomhetsgrader.

Tabell 5.2: Black-Scholes prisingsfeil i utvalget

Tabellen viser prisingsfeilen til Black-Scholes-modellen i estimeringsutvalget for opsjoner i ulike kategorier av lønnsomhetsgrad ($\frac{S}{K}$). S betegner nivået til S&P 500 indeksen, og K er opsjonens utøvelseskurs. Venstre kolonne viser først hvilken tilnærming av Black-Scholes-modellen som benyttes (**i fet skrift**), og deretter hvilken tapsfunksjon prisingsfeilen måles i. De ulike tapsfunksjonene er forklart i kapittel 4.2.

	Lønnsomhetsgrad					
	$\frac{S}{K} \leq 0,94$	$0,94 < \frac{S}{K} \leq 0,97$	$0,97 < \frac{S}{K} \leq 1$	$1 < \frac{S}{K} \leq 1,03$	$1,03 < \frac{S}{K} \leq 1,06$	$1,06 < \frac{S}{K}$
BS-30						
\$RMSE	17,5792	14,4213	11,8056	11,3919	11,4089	11,5156
IVRMSE	0,0824	0,0605	0,0431	0,0392	0,0470	0,0659
BS-\$RMSE						
\$RMSE	6,5420	5,2522	3,5385	4,8605	8,8451	10,7090
IVRMSE	0,0365	0,0278	0,0182	0,0168	0,0367	0,0635

PBS og Heston-modellen tar begge hensyn til volatilitetssmilet, men med to ulike tilnærminger. Tabell 5.3 viser at begge modeller har lavere prisingsfeil enn Black-Scholes målt i alle tapsfunksjoner uavhengig av lønnsomhetsgrad. For PBS gir \$RMSE- og IVRMSE-parameterestimaterne noe større prisingsfeil for opsjoner med lav og høy lønnsomhetsgrad målt i \$RMSE og IVRMSE, men forskjellen er liten. Dette tyder på at PBS tar hensyn til effekten av det observerte volatilitetssmilet i tabell 3.2. %RMSE-parametrene gir som forventet lavest prisingsfeil for opsjoner med lav lønnsomhetsgrad for begge modeller, ettersom disse opsjonene vektlegges høyere i estimeringen. Det er noe overraskende at vi ikke observerer motsatte resultater for \$RMSE-parameterene, som legger større vekt på opsjoner med høy lønnsomhetsgrad. Dette kan skyldes at opsjonene med høyest lønnsomhetsgrad er underrepresentert i utvalget.

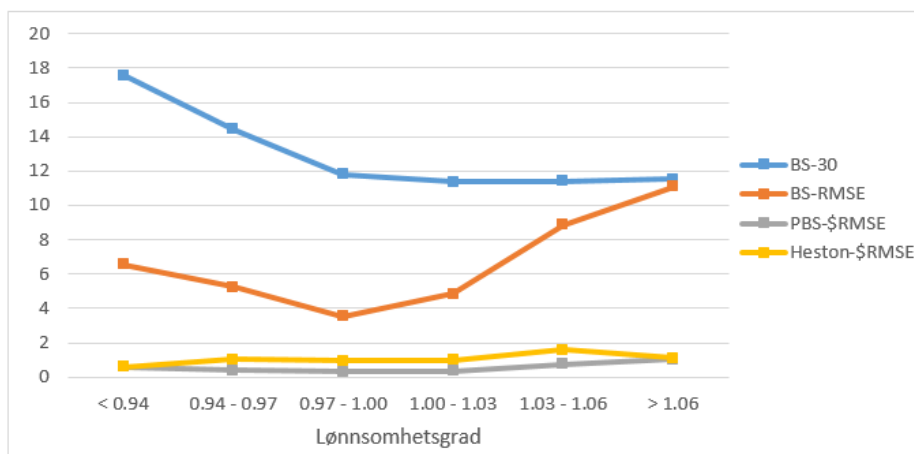
Heston-modellen gir jevnt over større prisingsfeil for alle parameterestimerer i alle kategorier av lønnsomhetsgrad. Det er spesielt i kategoriene med moderat lønnsomhetsgrad at PBS gir lavere prisingsfeil. Figur 5.1 illustrerer forskjellene i prisingsfeil målt i \$RMSE grafisk. For PBS og Heston-modellen benyttes \$RMSE-parameterestimaterne. Vi ser her hvordan både PBS og Heston-modellen reduserer forskjellen i prisingsfeil over de ulike kategoriene av lønnsomhetsgrad. Det er verdt å merke seg at selv i kategorien der BS-\$RMSE gir lavest prisingsfeil ($0,97 < \frac{S}{K} < 1$), er fortsatt

feilen betydelig høyere enn den er for modellene som antar at volatiliteten ikke er konstant.

Tabell 5.3: PBS og Heston prisingsfeil i utvalget sortert etter lønnsomhetsgrad

Tabellen viser prisingsfeilen til PBS og Heston-modellen for alle opsjonene i utvalget sortert etter lønnsomhetsgrad ($\frac{S}{K}$). S betegner nivået til S&P 500 indeksen, og K er opsjonenes utøvelseskurs. Venstre kolonne viser først hvilken modell og parameterestimat som blir benyttet (**i fet skrift**), og deretter hvilken tapsfunksjon prisingsfeilen måles i. De ulike tapsfunksjonene er forklart i kapittel 4.2.

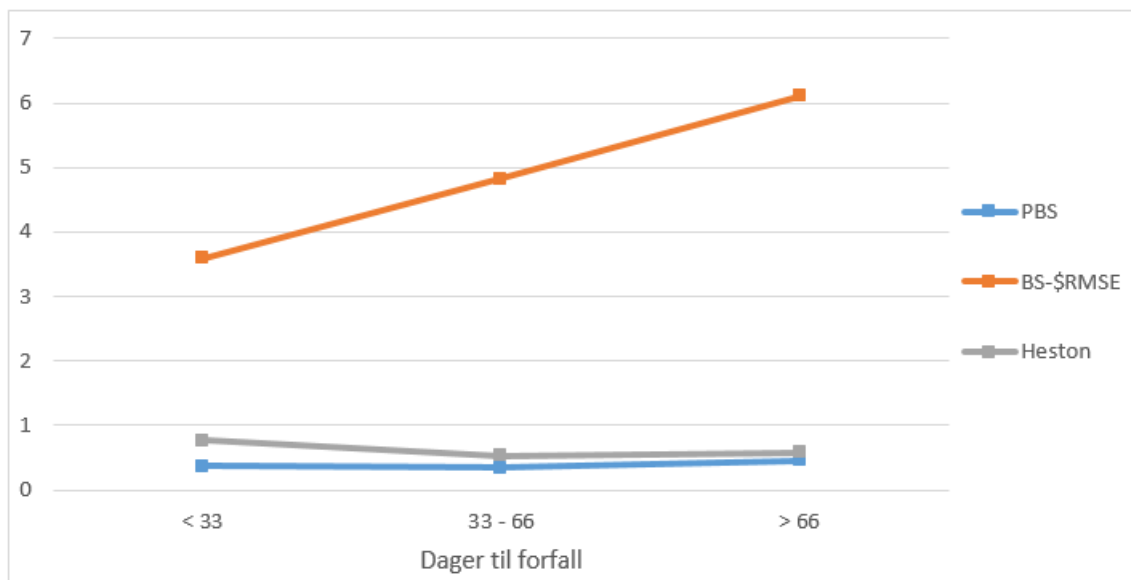
	Lønnsomhetsgrad					
	$\frac{S}{K} \leq 0,94$	$0,94 < \frac{S}{K} \leq 0,97$	$0,97 < \frac{S}{K} \leq 1$	$1 < \frac{S}{K} \leq 1,03$	$1,03 < \frac{S}{K} \leq 1,06$	$1,06 < \frac{S}{K}$
PBS-$\\$RMSE$-parametere						
$\$RMSE$	0,5757	0,3757	0,2958	0,3464	0,7578	1,0483
IVRMSE	0,0067	0,0055	0,0018	0,0017	0,0058	0,0097
PBS-%$RMSE$-parametere						
$\$RMSE$	0,3241	0,3838	0,9625	2,1280	2,9819	3,6809
IVRMSE	0,0024	0,0028	0,0037	0,0086	0,0151	0,0227
PBS-IVRMSE-parametere						
$\$RMSE$	0,4108	0,4441	0,4709	0,5277	0,9451	1,2193
IVRMSE	0,0027	0,0038	0,0022	0,0019	0,0041	0,0067
Heston-$\\$RMSE$-parametere						
$\$RMSE$	0,5869	1,0223	0,9340	1,0060	1,5774	1,1051
IVRMSE	0,0085	0,0066	0,0049	0,0050	0,0092	0,0090
Heston-%$RMSE$-parametere						
$\$RMSE$	0,4553	0,6263	1,4584	2,9712	4,0774	4,9259
IVRMSE	0,0070	0,0027	0,0048	0,0105	0,0185	0,0311
Heston-IVRMSE-parametere						
$\$RMSE$	0,4853	0,6025	0,6703	1,0120	1,3449	1,2083
IVRMSE	0,0075	0,0035	0,0027	0,0040	0,0086	0,0096



Figur 5.1: Prisingsfeil i utvalget målt i $\$RMSE$

X-aksen viser de ulike kategoriene av lønnsomhetsgrad, og Y-aksen viser prisingsfeilen målt i $\$RMSE$. For PBS og Heston-modellen benyttes $\$RMSE$ -parameterestimatene.

Videre tar vi utgangspunkt i $\$RMSE$ parametrene til de tre modellene og undersøker hvor stor prisingsfeilen er, målt i $\$RMSE$, i de ulike kategoriene av dager til forfall. Black-Scholes antar at volatiliteten er uavhengig av tid til forfall, og figur 5.2 viser at Black-Scholes har økende prisingsfeil med antall dager til forfall. PBS og Heston-modellen går bort fra denne antakelsen og gir relativt like prisingsfeil uavhengig av antall dager til forfall.



Figur 5.2: Prisingsfeil i utvalget for ulike kategorier av dager til forfall

X-aksen viser de ulike kategoriene av lønnsomhetsgrad, og Y-aksen viser prisingsfeilen målt i $\$RMSE$. For PBS og Heston-modellen benyttes $\$RMSE$ -parameterestimaterne.

5.2 Prisingsfeil utenfor utvalget

Lave prisingsfeil i estimeringsutvalget betyr ikke nødvendigvis at modellene egner seg godt til prising utenfor utvalget. Modellparametrene kan være preget av markedet endrer seg fra dag til dag, slik at modellene egner seg dårlig til prising utenfor utvalget. Mer komplekse modeller kan også være misspesifiserte. Det vil si at modellene har for mange parametre og tar for stort hensyn til observasjonene i estimeringsutvalget. Som en konsekvens av dette blir prisingsfeilene utenfor utvalget store. I likhet med tidligere studier, (Bakshi et al. (1997), Christoffersen og Jacobs (2004), Kim og Kim (2004)), ser vi på modellenes prisingsfeil én og fem dager utenfor utvalget. Modellprisen j dager utenfor utvalget, C_j , er gitt ved en opsjonsprisingsmodell, dens estimerte parametervektor i utvalget, Φ_{-j} ,

$$C_{Heston,j} = Heston(S_j, K, \tau, r, q, \Phi_{-j}).$$

Prisingsfeilen til alle observasjonene måles deretter med en av tapsfunksjonene fra kapittel 4.2, for eksempel

$$\$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{n_t} (\hat{C}_i - C_i(\Phi_{t-j}))^2}.$$

5.2.1 Én dag

Tabell 5.4 viser prisingsfeilen til de tre modellene én dag utenfor utvalget. Konturene er de samme som vi observerte for prisingsfeilen i utvalget (tabell 5.1). Både PBS og Heston gir lavere prisingsfeil enn Black-Scholes målt i alle tapsfunksjoner, men prisingsfeilen øker sammenliknet med i estimeringsutvalget. Forskjellen er størst for Heston-modellen. PBS gir også lavere prisingsfeil enn Heston målt i alle tapsfunksjoner for alle parameterestimerer utenom %RMSE. Dette parameterestimatet gir størst prisingsfeil for begge modeller, og vi konkluderer derfor med at PBS er modellen som gir best resultater én dag utenfor estimeringsutvalget. Av de ulike parameterestimatene gir \$RMSE lavest prisingsfeil for begge modeller. Dette er overraskende ettersom denne tapsfunksjonen ikke vektlegger alle opsjonene likt i estimeringen.

Tabell 5.4: Prisingsfeil én dag utenfor utvalget

Tabellen viser de tre modellenes prisingsfeil en dag utenfor utvalget for alle observasjonene i utvalget. I venstre kolonne vises først hvilken modell som benyttes (**i fet skrift**), deretter hvilke parameterestimer som er brukt i modellen. For hvert parameterestimat vises prisingsfeilen målt i de tre ulike tapsfunksjonene fra kapittel 4.2.

	Tapsfunksjoner		
	\$RMSE	%RMSE	IVRMSE
Black-Scholes			
BS-30	15.9993	3,6717	0,0486
BS-\$RMSE	5,7478	1,0935	0,0258
PBS			
\$RMSE-parametre	2,1288	0,6682	0,0104
%RMSE-parametre	2,6501	0,8632	0,0122
IVRMSE-parametre	2,2495	0,7670	0,0106
Heston			
\$RMSE-parametere	3,4332	0,7038	0,0154
%RMSE-parametere	3,8654	0,7007	0,0178
IVRMSE-parametere	3,4744	0,6786	0,0156

Black-Scholes-modellen har de samme mønstrene for prisingsfeil både i og utenfor estimeringsutvalget. Tabell 5.5 viser at BS-30 jevnt over gir store prisingsfeil, spesielt for opsjoner med lav lønnsomhetsgrad. BS-\$RMSE gir jevnt over lavere prisingsfeil, men i den høyeste kategorien av lønnsomhetsgrad ($1,06 < \frac{S}{K}$) nærmer resultatene seg hverandre. For BS-\$RMSE er det opsjonene i denne kategorien som gir klart størst prisingsfeilen også én dag utenfor utvalget, målt i begge tapsfunksjoner.

Tabell 5.5: Black-Scholes prisingsfeil én dag utenfor utvalget sortert etter lønnsomhetsgrad

Tabellen viser prisingsfeilen til Black-Scholes-modellen én dag utenfor estimeringsutvalget for observasjoner i ulike kategorier av lønnsomhetsgrad ($\frac{S}{K}$). S betegner nivået til S&P 500 indeksen, og K er opsjonens utøvelseskurs. Venstre kolonne viser først hvilken tilnærming av Black-Scholes-modellen som benyttes (**i fet skrift**), og deretter hvilken tapsfunksjon prisingsfeilen måles i. De ulike tapsfunksjonene er forklart i kapittel 4.2.

	Lønnsomhetsgrad					
	$\frac{S}{K} \leq 0,94$	$0,94 < \frac{S}{K} \leq 0,97$	$0,97 < \frac{S}{K} \leq 1$	$1 < \frac{S}{K} \leq 1,03$	$1,03 < \frac{S}{K} \leq 1,06$	$1,06 < \frac{S}{K}$
BS-30						
\$RMSE	17,1420	14,4926	12,2599	11,8877	11,6865	11,3650
IVRMSE	0,0810	0,0607	0,0448	0,0411	0,0480	0,0636
BS-\$RMSE						
\$RMSE	6,8656	6,0040	4,6929	5,5567	9,2260	10,9859
IVRMSE	0,0377	0,0304	0,0215	0,0199	0,0392	0,0648

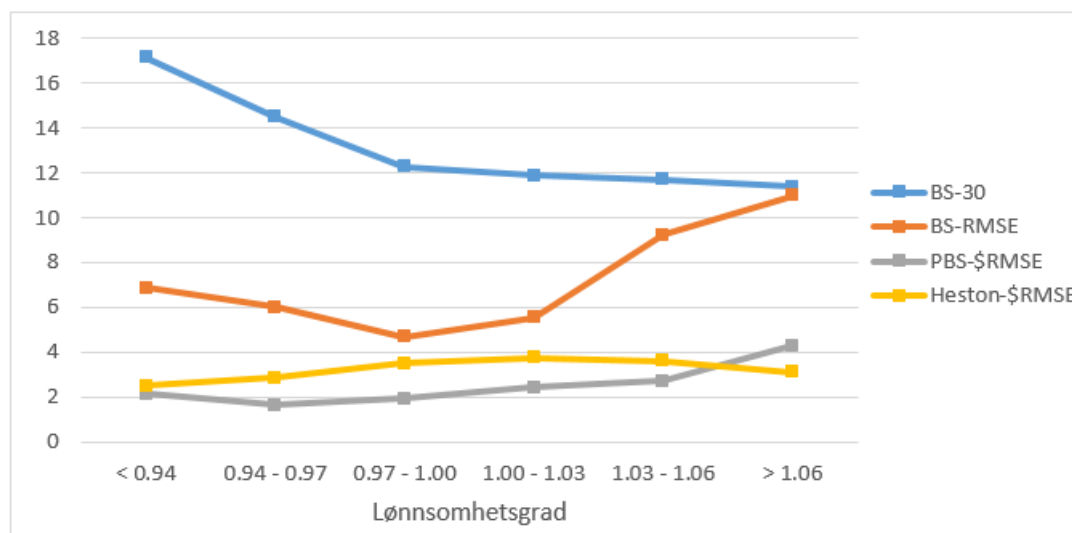
Tabell 5.6 viser prisingsfeilen til PBS og Heston-modellen én dag utenfor utvalget for ulike kategorier av lønnsomhetsgrad. PBS gir lavere prisingsfeil enn Heston i alle kategorier bortsett fra ($1,06 < \frac{S}{K}$) for både \$RMSE- og IVRMSE-parametrene. For begge modeller gir %RMSE-parametrene økende prisingsfeil med økende lønnsomhetsgrad. Det er kun i den laveste kategorien av lønnsomhetsgrad, ($0,94 < \frac{S}{K}$), %RMSE-parametrene gir lavest prisingsfeil. Dette er som forventet ettersom %RMSE vektlegger disse opsjonene høyere i estimeringen.

Figur 5.3 illustrer prisingsfeilen målt i \$RMSE for alle modeller grafisk. Vi benytter \$RMSE-parametrene for PBS og Heston-modellen ettersom disse gir best resultater. Figuren viser de samme konturene som figur 5.1. Selv om PBS og Heston-modellen har større prisingsfeil en dag utenfor utvalget, gir de betydelig bedre resultater enn Black-Scholes. PBS gir størst prisingsfeil for opsjonene med høyest lønnsomhetsgrad. Dette kan være et resultat av at disse opsjonene er underrepresentert i utvalget, og dermed blir vektlagt lavere under estimeringen.

Tabell 5.6: PBS og Heston prisingsfeil én dag utenfor utvalget sortert etter lønnsomhetsgrad

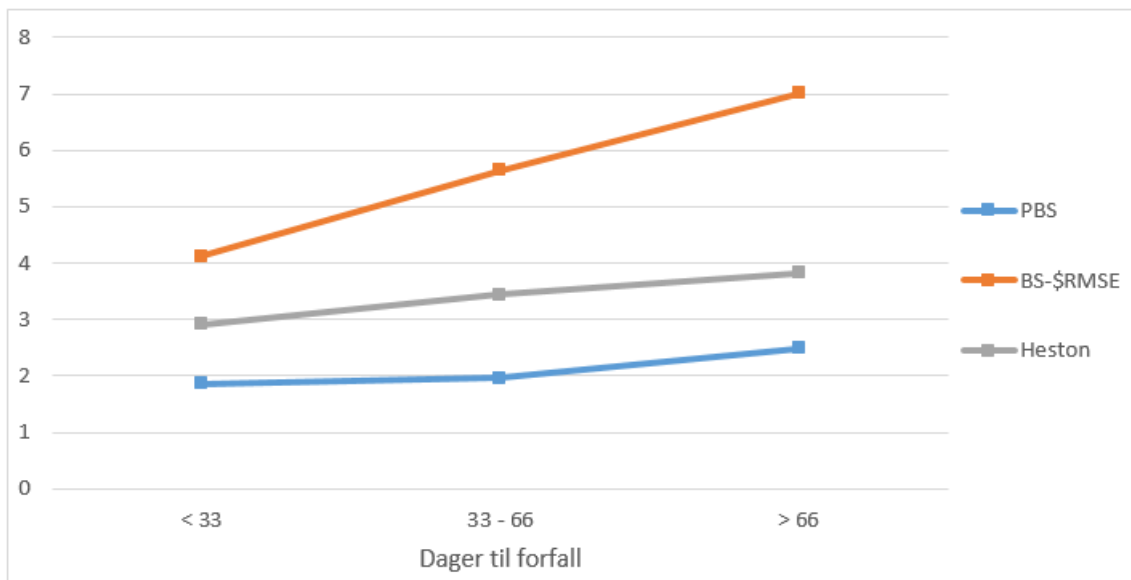
Tabellen viser prisingsfeilen til PBS og Heston-modellen én dag utenfor utvalget for observasjoner i ulike kategorier av lønnsomhetsgrad ($\frac{S}{K}$). S betegner nivået til S&P 500 indeksen, og K er opsjonens utøvelseskurs. Venstre kolonne viser først hvilken modell og parameterestimat som blir benyttet (**i fet skrift**), og deretter hvilken tapsfunksjon prisingsfeilen måles i. De ulike tapsfunksjonene er forklart i kapittel 4.2.

	Lønnsomhetsgrad					
	$\frac{S}{K} \leq 0,94$	$0,94 < \frac{S}{K} \leq 0,97$	$0,97 < \frac{S}{K} \leq 1$	$1 < \frac{S}{K} \leq 1,03$	$1,03 < \frac{S}{K} \leq 1,06$	$1,06 < \frac{S}{K}$
PBS-$\\$RMSE-parametere						
$\$$ RMSE	2,1559	1,6297	1,9287	2,4394	2,7058	4,2788
IVRMSE	0,0181	0,0099	0,0079	0,0103	0,0161	0,0265
PBS-%RMSE-parametere						
$\$$ RMSE	1,7473	1,6136	2,2591	3,2641	4,0457	5,3307
IVRMSE	0,0148	0,0095	0,0093	0,0134	0,0208	0,0327
PBS-IVRMSE-parametere						
$\$$ RMSE	2,4006	1,9233	2,0053	2,4856	2,9479	4,3463
IVRMSE	0,0163	0,0102	0,0082	0,0107	0,0161	0,0262
Heston-$\\$RMSE-parametere						
$\$$ RMSE	2,5079	2,8510	3,5125	3,7532	3,6113	3,1017
IVRMSE	0,0233	0,0145	0,0143	0,0154	0,0200	0,0193
Heston-%RMSE-parametere						
$\$$ RMSE	2,4652	2,7402	3,6951	4,5221	5,0245	5,3517
IVRMSE	0,0230	0,0134	0,0143	0,0172	0,0246	0,033
Heston-IVRMSE-parametere						
$\$$ RMSE	2,4840	2,9037	3,4880	3,7967	3,9391	3,9897
IVRMSE	0,0210	0,0139	0,0139	0,0154	0,0216	0,0242

**Figur 5.3:** Prisingsfeil én dag utenfor utvalget målt i $\$$ RMSE

X-aksen viser de ulike kategoriene av lønnsomhetsgrad, og Y-aksen viser prisingsfeilen målt i $\$$ RMSE. For PBS og Heston-modellen benyttes $\$$ RMSE-parameterestimatene.

I de ulike kategoriene av dager til forfall viser tabell 5.4 de samme konturene som ble observert i estimeringsutvalget. Black-Scholes gir økende prisingsfeil med dager til forfall. PBS og Heston-modellen tar derimot hensyn til at tid til forfall påvirker opsjonenes volatiliteten og gir derfor mindre forskjell i prisingsfeil i de ulike kategoriene.



Figur 5.4: Prisingsfeil én dag utenfor utvalget for ulike kategorier av dager til forfall

X-aksen viser de ulike kategoriene av dager til forfall, og Y-aksen viser prisingsfeilen målt i $\$RMSE$. For PBS og Heston-modellen benyttes $\$RMSE$ -parameterestimaterne.

5.2.2 Fem dager

Prisingsfeilene fem dager utenfor utvalget er generelt høyere for alle modeller. Unntaket er BS-30 som har stabile prisingsfeil både i og utenfor utvalget. Tabell 5.7 viser at PBS er modellen som gir lavest prisingsfeil målt i alle tapsfunksjoner. Det er spesielt interessant å merke seg hvor mye prisingfeilen til Heston-modellen har økt sammenliknet med resultatene fra tabell 5.1 og tabell 5.4. Etersom prisingsfeilen øker såpass mye utenfor utvalget sammenliknet med i utvalget, kan det tyde på at de Heston-modellen er misspesifisert og er mer sensitiv for markedsendringer fra dag til dag. \$RMSE-parametrene gir best resultater for både PBS og Heston-modellen målt i alle tapsfunksjoner. Vi ser nok en gang at %RMSE-parametrene gir dårligst resultater for begge modeller.

Tabell 5.7: Prisingsfeil fem dager utenfor utvalget

Tabellen viser de tre modellenes prisingsfeil fem dager utenfor estimeringsutvalget for alle observasjonene i utvalget. I venstre kolonne vises først hvilken modell som benyttes (**i fet skrift**), deretter hvilke parameterestimerer som er brukt i modellen. For hvert parameterestimat vises prisingsfeilen målt i de tre ulike tapsfunksjonene fra kapittel 4.2.

	Tapsfunksjoner		
	\$RMSE	%RMSE	IVRMSE
Black-Scholes			
BS-30	12,6290	3,3247	0,0490
BS-\$RMSE	7,3746	1,2740	0,0314
PBS			
\$RMSE-parametre	3,4452	1,1846	0,0162
%RMSE-parametre	3,9651	1,3456	0,0188
IVRMSE-parametre	3,6118	1,4743	0,0169
Heston			
\$RMSE-parametre	6,1088	1,1996	0,0280
%RMSE-parametre	6,6910	1,2235	0,0289
\$RMSE-parametre	6,1340	1,1818	0,0268

Tabell 5.8 viser at BS-30 har høyere prisingsfeil fem dager utenfor utvalget sammenliknet med resultatene i utvalget og én dag utenfor. Det er de to laveste kategoriene av lønnsomhetsgrad, ($\frac{S}{K} < 0,94$) og ($0,94 < \frac{S}{K} < 0,97$), som gir størst prisingsfeil både i og utenfor utvalget. BS-\$RMSE har tidligere gitt klart best resultater i de moderate kategoriene av lønnsomhetsgrad, ($0,97 < \frac{S}{K} < 1$) og ($1 < \frac{S}{K} < 1,03$). Vi observerer ikke like tydelige resultater fem dager utenfor utvalget.

Tabell 5.8: Black-Scholes prisingsfeil fem dager utenfor utvalget sortert etter lønnsomhetsgrad

Tabellen viser prisingsfeilen til Black-Scholes-modellen fem dager utenfor estimeringsutvalget for observasjoner i ulike kategorier av lønnsomhetsgrad ($\frac{S}{K}$). S betegner nivået til S&P 500, og K er opsjonens utøvelseskurs. Venstre kolonne viser først hvilken tilnærming av Black-Scholes-modellen som benyttes (**i fet skrift**), og deretter hvilken tapsfunksjon prisingsfeilen måles i. De ulike tapsfunksjonene er forklart i kapittel 4.2.

	Lønnsomhetsgrad					
	$\frac{S}{K} \leq 0,94$	$0,94 < \frac{S}{K} \leq 0,97$	$0,97 < \frac{S}{K} \leq 1$	$1 < \frac{S}{K} \leq 1,03$	$1,03 < \frac{S}{K} \leq 1,06$	$1,06 < \frac{S}{K}$
BS-30						
\$RMSE	17,0421	15,3277	13,9360	13,7282	13,0934	11,6551
IVRMSE	0,0811	0,0629	0,0501	0,0472	0,0533	0,0640
BS-\$RMSE						
\$RMSE	6,8910	7,3543	6,5603	7,5923	10,4275	11,1924
IVRMSE	0,0420	0,0356	0,0268	0,0274	0,0446	0,0670

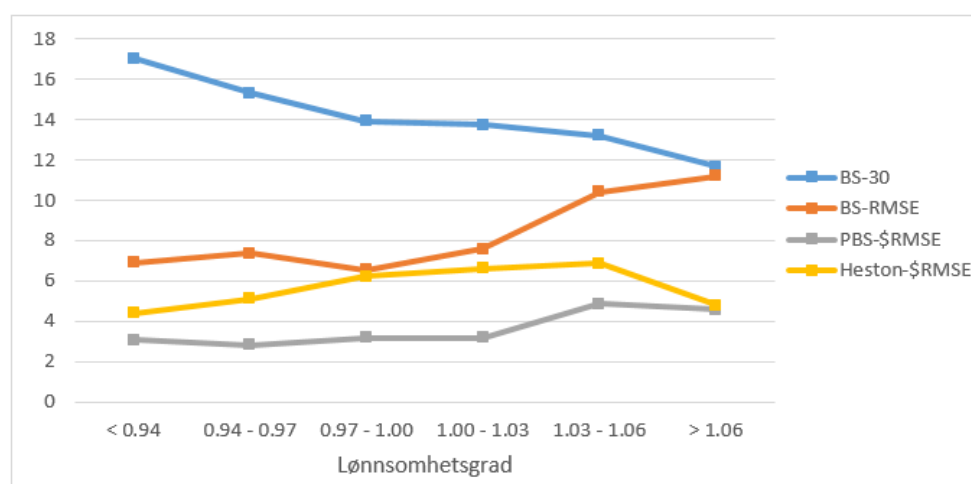
Tabell 5.9 viser at PBS gir lavest prisingsfeil i alle kategorier av lønnsomhetsgrad målt i begge tapsfunksjoner bortsett fra ($1,06 < \frac{S}{K}$) der Heston-modellen gir marginalt bedre resultater. Det er interessant at \$RMSE-parameterestimatene jevnt over gir lavere prisingsfeil enn IVRMSE målt i begge tapsfunksjoner for både PBS og Heston-modellen. Dette resultatet observerer vi også i tabell 5.6.

Figur 5.5 illustrerer de ulike modellenes prisingsfeil målt i \$RMSE grafisk. I de moderate kategoriene av lønnsomhetsgrad, ($0,97 < \frac{S}{K} < 1$) og ($1 < \frac{S}{K} < 1,03$), er forskjellen mellom BS-RMSE og Heston-modellen liten. Etersom Heston-modellen tar hensyn til den observerte skjevheten og kurtosen i fordelingen til logaritmen av nivået til S&P 500, $\ln S_T$, er det overraskende at den ikke gir lavere prisingsfeil både i og utenfor utvalget. PBS gir igjen størst prisingsfeil i kategoriene med høyest lønnsomhetsgrad. Dette kan være et resultat av at disse opsjonene er underrepresentert i utvalget.

Tabell 5.9: PBS og Heston prisingsfeil fem dager utenfor utvalget sortert etter lønnsomhetsgrad

Tabellen viser prisingsfeilen til PBS og Heston-modellen fem dager utenfor estimeringsutvalget for observasjoner i ulike kategorier av lønnsomhetsgrad ($\frac{S}{K}$). S betegner nivået til S&P 500, og K er opsjonens utøvelseskurs. Venstre kolonne viser først hvilken modell og hvilket parameterestimat som blir benyttet (**i fet skrift**), og deretter hvilken tapsfunksjon prisingsfeilen måles i. De ulike tapsfunksjonene er forklart i kapittel 4.2.

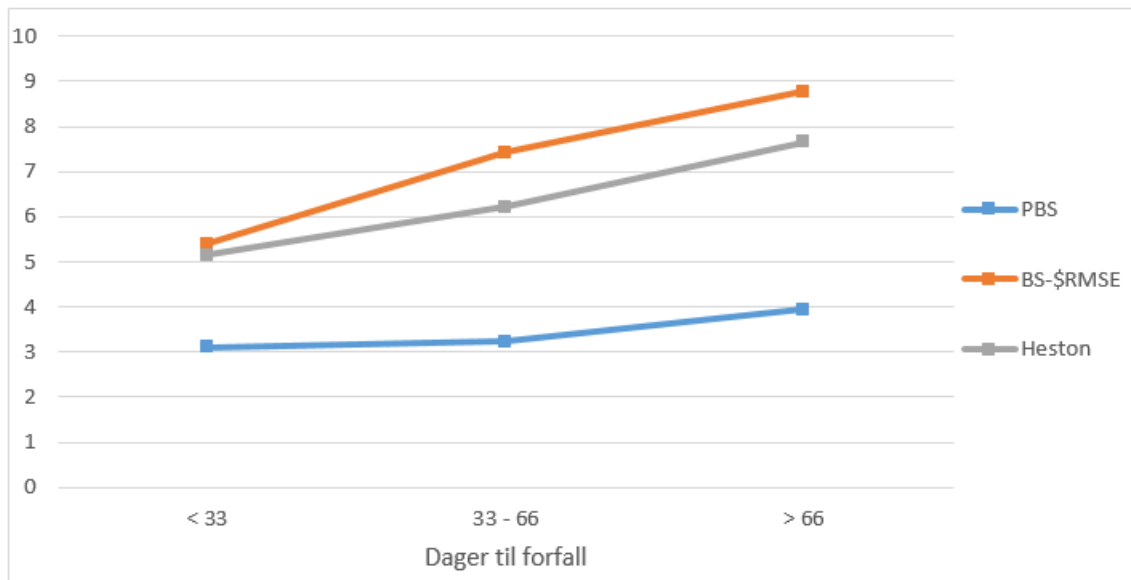
	Lønnsomhetsgrad					
	$\frac{S}{K} \leq 0,94$	$0,94 < \frac{S}{K} \leq 0,97$	$0,97 < \frac{S}{K} \leq 1$	$1 < \frac{S}{K} \leq 1,03$	$1,03 < \frac{S}{K} \leq 1,06$	$1,06 < \frac{S}{K}$
PBS-$\\$RMSE$-parametere						
$\$RMSE$	3,0797	2,8147	3,1899	3,9170	4,8508	4,5904
IVRMSE	0,0296	0,0162	0,0130	0,0154	0,0229	0,0279
PBS-%RMSE parametere						
$\$RMSE$	3,0114	2,8772	3,5430	4,6393	5,9438	6,1204
IVRMSE	0,0301	0,0169	0,0149	0,0190	0,0295	0,0376
PBS-IVRMSE parametere						
$\$RMSE$	3,5104	3,1430	3,3220	3,8964	5,0611	4,8431
IVRMSE	0,0300	0,0171	0,0136	0,0159	0,0241	0,0290
Heston-RMSE-parametere						
$\$RMSE$	4,3961	5,1232	6,2398	6,6103	6,8571	4,8032
IVRMSE	0,0460	0,0253	0,0253	0,0256	0,0331	0,0266
Heston-%RMSE-parametere						
$\$RMSE$	4,5030	5,0681	6,5596	7,6794	8,1785	7,1014
IVRMSE	0,0475	0,0253	0,0259	0,0294	0,0389	0,0416
Heston-IVRMSE-parametere						
$\$RMSE$	4,4968	5,1677	6,2021	6,6597	7,0594	4,7999
IVRMSE	0,0515	0,0615	0,0249	0,0257	0,0346	0,0273



Figur 5.5: Prisingsfeil fem dager utenfor utvalget målt i $\$RMSE$

X-aksen viser de ulike kategoriene av lønnsomhetsgrad, og Y-aksen viser prisingsfeilen målt i $\$RMSE$. For PBS og Heston-modellen benyttes $\$RMSE$ -parameterestimatene.

Heston-modellen viser også svakheter når prisingsfeilen måles i ulike kategorier av tid til forfall. Tabell 5.6 viser at prisingsfeilen til Heston-modellen øker betraktelig med dager til forfall. Dette er oppsiktsvekkende ettersom prisingsfeilen er stabil i utvalget og én dag utenfor (tabell 5.1 og tabell 5.4). PBS gir nok en gang relativt like prisingsfeil i de ulike kategoriene av dager til forfall. Dette resultatet kan komme av at volatilitetsfunsjonen i PBS legger mer vekt på tid til forfall enn det Heston-modellen gjør.



Figur 5.6: Prisingsfeil fem dager utenfor utvalget for ulike kategorier av dager til forfall

X-aksen viser de ulike kategoriene av dager til forfall, og Y-aksen viser prisingsfeilen målt i σ RMSE. For PBS og Heston-modellen benyttes σ RMSE-parameterestimaterne.

5.3 Delta-sikring

Opsjoner kan i praksis benyttes til å redusere risiko assosiert med prisendringer i underliggende aktivum. Det finnes en rekke ulike strategier, vi tar utgangspunkt i delta-sikring. Delta er et mål på hvor sensitiv opsjonsverdien er for prisendringer i underliggende aktivum. Denne finnes ved å ta utgangspunkt i en opsjonsprisindeformel og derivere opsjonsverdien med hensyn på underliggende,

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}.$$

Hver opsjonsprisindemodell vil gi ulik delta, og vi kan da evaluere modellene basert på hvor godt delta-sikringen fungerer i praksis. Vi tar utgangspunkt i en strategi der vi kjøper en delta-nøytral portefølje, det vil si en portefølje som består av korte og lange posisjoner som utjevner hverandre. Strategien er som følger:

1. Selg en kjøpsopsjon for C_t^i . Invester i en replikerende portefølje bestående av Δ_s aksjer og $\delta = (C_t^i - \Delta_s S_t)$ lånt til risikofri rente.
2. Neste dag likvideres denne posisjonen ved å kjøpe den samme opsjonen for $C_{t+\Delta t}^i$, selge aksjene for $\Delta_s S_{t+\Delta t}$ og betale tilbake lånet inklusive renter $\delta e^{r\Delta t}$.

Gevinsten/tapet ved denne strategien er gitt ved,

$$\epsilon_t = \Delta_s S_{t+\Delta t} - \delta e^{r\Delta t} - C_{t+\Delta t}^i.$$

Black-Scholes og PBS tar utgangspunkt i samme matematiske formel, og Δ er gitt ved

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial S} = e^{-q(\tau)} N(d_1).$$

I praksis vil man kunne observere Δ for hver enkeltopsjon ved å ta utgangspunkt i Black-Scholes implisitt volatilitet. Det vil derfor ikke være hensiktsmessig å benytte en annen volatilitet enn den som er implisert i markedsprisene for samme opsjonsprisindemodell. Vi har derfor ikke inkludert delta-verdien til PBS siden denne modellen benytter den samme matematiske formelen som Black-Scholes. Heston-modellen baserer seg derimot på en annen matematisk formel, og det vil derfor være interessant å undersøke om Δ_{Heston} er ulik Δ_{BS} . Heston-deltaen, Δ_{Heston} , er gitt ved

$$\frac{\partial C_{Heston}}{\partial S} = e^{-q\tau} P_1.$$

For å implementere delta-sikringen er vi avhengige av at datasettet har prisingsdata for samme opsjon i to og seks dager, noe som ikke alltid er tilfelle. Én-dags sikringen er derfor basert på 8913 observasjoner, og fem-dagers sikringen er basert på 5069 observasjoner.

Tabell 5.10 viser gjennomsnittlig gevinst/tap og standardavvik ved en delta-nøytral strategi basert på opsjonsprisingsmodellenes ulike delta-verdier. Resultatene viser at Heston-modellens Δ -verdi gir lavere lønnsomhet for både én- og fem-dagers strategien enn Black-Scholes. Det er spesielt interessant å merke seg at Black-Scholes-deltaen også gir lavest standardavvik. Vi konkluderer derfor med at Heston-modellen gir en mer risikabel sikringsrate til tross for at modellen baserer seg på en mer avansert matematisk formel enn Black-Scholes.

Tabell 5.10: Delta-sikring

Tabellen viser gjennomsnittlig gevinst/tap ved å benytte en delta-nøytral sikringsstrategi for én- og fem dager hver handelsdag i 2015 med tilhørende standardavvik i parentes. Først vises hvilken modell som benyttes til å beregne Δ (**i fet skrift**), og deretter resultatene for én- og fem dager. Heston-modellen har tre ulike parameterestimerer som igjen gir tre ulike Δ -verdier.

Heston Δ			
	\$RMSE	%RMSE	IVRMSE
1-dag	-0,039	-0,0053	-0,0429
	(3,64)	(3,61)	(3,61)
5-dager	0,1060	0,4008	0,1146
	(8,61)	(7,65)	(8,33)
Black-Scholes implisitt Δ			
1-dag	-0,0352		
	(2.47)		
5-dager	0,4180		
	(6.33)		

6. Konklusjon

Resultatene antyder som forventet at 30-dagers historisk volatilitet ikke er et godt estimat for forventet fremtidig volatilitet. Ved å benytte \$RMSE-volatilitet fremfor 30-dagers historisk volatilitet reduseres prisingsfeilen betraktelig. En svakhet ved Black-Scholes-modellen er at implisitt volatilitet ikke er konstant, men uttrykker et volatilitetssmil. Black-Scholes-modellen gir derfor store prisingsfeil for opsjoner med lav og høy lønnsomhetsgrad, og den er også økende med dager til forfall.

PBS og Heston gir begge lavere prisingsfeil enn Black-Scholes, både i og utenfor utvalget. Dette antyder at antakelsen om konstant volatilitet er en klar svakhet med Black-Scholes-modellen. I vår analyse gir PBS lavest prisingsfeil både i og utenfor utvalget. På forhånd hadde vi forventet at Heston-modellen skulle gi lavest prisingsfeil i utvalget ettersom dette er en mer kompleks modell. Utenfor utvalget øker prisingsfeilen for begge modeller, men økningen er betydelig større for Heston-modellen. Dette kan være et tegn på misspesifisering.

Sammenliknet med resultater fra tidligere studier, (Bakshi et al. (1997), Christoffersen et al. (2009), Guillaume og Schoutens (2012)), er prisingsfeilene til Heston-modellen store. Årsaken til dette kan være at disse studiene baserer seg på tidsspesifiserte datasett der opsjonene er jevner fordelt over lønnsomhetsgradene.

Til delta-sikring viser vår analyse at Heston-modellen gir en mer risikabel sikringsrate enn Black-Scholes-modellen. Dette er overraskende ettersom den observerte fordelingen til den kontinuerlige avkastningen til S&P 500 ikke er normalfordelt i 2015. Til tross for at Heston-modellen tar hensyn til dette, evner den ikke å gi en bedre sikringsrate enn Black-Scholes-modellen.

Av de ulike parameterestimatene gir \$RMSE-parametrene best resultater for både PBS og Heston-modellen. På forhånd hadde vi forventet at IVRMSE-parametrene skulle gi best resultater ettersom IVRMSE-tapsfunksjonen vektlegger opsjonene tilnærmet likt. %RMSE-parametrene gir dårligst resultater for begge modeller både i og utenfor utvalget.

De store prisingsfeilene til Heston-modellen, og \$RMSE-parametrenes overraskende gode resultater, kan komme av skjevheten i datasettet. Datasettet som ligger til grunn for denne studien, har majoriteten av observasjonene i de moderate lønnsomhetsgradene,

ettersom mange av opsjonene med lav og høy lønnsomhetsgrad blir fjernet ved filtreringen av datasettet. Heston-modellen er mer kompleks enn PBS og kan derfor bli påvirket av denne skjevheten i større grad. \$RMSE legger mer vekt på opsjoner med høy lønnsomhetsgrad i estimeringen av parametrene, og Tabell 3.1 viser at opsjonene med høyest lønnsomhetsgrad ($1,06 < \frac{S}{K}$) er sterkt underrepresentert i utvalget med bare 105 observasjoner. Dette forklarer hvorfor vi ikke observerer at \$RMSE-parametrene gir lavest prisingsfeil for opsjoner med høy lønnsomhetsgrad. I et jevnt fordelt datasett vil vi kunne forvente at IVRMSE-parametrene gir best resultater ettersom denne tapsfunksjonen vektlegger alle opsjoner tilnærmet likt.

I praksis er dette vanskelig å anskaffe et datasett der opsjonene er jevnt fordelt over de ulike lønnsomhetsgradene. Dette er fordi opsjoner med lav og høy lønnsomhetsgrad er mindre handlet og kan føre til likviditetsrelaterte skjevheter dersom vi inkluderte dem i datasettet. Gjennomsnittet mellom kjøper- og selgerkurs er også bare en proxy på den sanne markedsprisen. Dersom vi hadde hatt tilgang til et tidsspesifisert datasett der man kan observere nivået til S&P 500 samtidig som opsjonene blir handlet, unngår vi asynkron-skjevhet, og resultatene ville blitt mer korrekte.

Våre resultater, og det faktum at PBS er en enkel modell å implementere i praksis, viser at Practitioners-Black-Scholes er et godt alternativ til den tradisjonelle Black-Scholes-modellen. En potensiell utvidelse av oppgaven kan være å undersøke om PBS gir bedre resultater med andre deterministiske volatilitetsfunksjoner, og deretter analysere hvilke modellparametre som har størst innvirkning på den implisitte volatiliteten.

Referanser

- Amin, K. og Ng, V. (1993). Arch processes and option valuation. *Manuscript, University of Michigan*.
- Backus, D.K., Foresi, S. og Wu, L. (2004). Accounting for biases in black-scholes. *Available at SSRN 585623*.
- Bakshi, G., Cao, C. og Chen, Z. (1997). Empirical performance of alternative option pricing models. *The Journal of finance*, 52(5), 2003–2049.
- Bates, D.S. (1996). Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options. *Review of financial studies*, 9(1), 69–107.
- Black, F. (1976). Studies of stock price volatility changes. *Proceedings of the 1976 Meeting of the American Statistical Association*, 177–181.
- Black, F. og Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, 637–654.
- Brooks, C. (2014). *Introductory econometrics for finance*. Cambridge university press.
- Christie, A.A. (1982). The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects. *Journal of financial Economics*, 10(4), 407–432.
- Christoffersen, P., Heston, S. og Jacobs, K. (2009). The shape and term structure of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well. *Management Science*, 55(12), 1914–1932.
- Christoffersen, P. og Jacobs, K. (2004). The importance of the loss function in option valuation. *Journal of Financial Economics*, 72(2), 291–318.
- Cox, J.C., Ingersoll Jr, J.E. og Ross, S.A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 385–407.
- Cox, J.C. og Ross, S.A. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of financial economics*, 3(1-2), 145–166.

- Dumas, B., Fleming, J. og Whaley, R.E. (1998). Implied volatility functions: Empirical tests. *The Journal of Finance*, 53(6), 2059–2106.
- Gemmill, G. og Kamiyama, N. (2000). International transmission of option volatility and skewness: when you're smiling, does the whole world smile. *City University Business School, London, working paper (February 1997)*.
- Guillaume, F. og Schoutens, W. (2012). Calibration risk: Illustrating the impact of calibration risk under the heston model. *Review of Derivatives Research*, 15(1), 57–79.
- Heston, S.L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of financial studies*, 6(2), 327–343.
- Heston, S.L. og Nandi, S. (2000). A closed-form garch option valuation model. *Review of Financial Studies*, 13(3), 585–625.
- Hull, J. og White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The journal of finance*, 42(2), 281–300.
- Kim, I.J. og Kim, S. (2004). Empirical comparison of alternative stochastic volatility option pricing models: Evidence from korean kospi 200 index options market. *Pacific-Basin Finance Journal*, 12(2), 117–142.
- Lagarias, J.C., Reeds, J.A., Wright, M.H. og Wright, P.E. (1998). Convergence properties of the nelder–mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on optimization*, 9(1), 112–147.
- McDonald, R.L. (2014). *Derivatives markets* (Third utg.). Pearson Education Limited.
- Mikhailov, S. og Nögel, U. (2003). Heston's stochastic volatility model implementation. *Calibration and*.
- Rouah, F.D. (2015). *The heston model and its extensions in vba*. John Wiley & Sons.
- Rouah, F.D. og Vainberg, G. (2012). *Option pricing models and volatility using excel-vba* (vol. 361). John Wiley & Sons.
- Rubinstein, M. (1985). Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active cboe option classes from august 23, 1976 through august 31, 1978. *The Journal of Finance*, 40(2), 455–480.

-
- Rubinstein, M. (1994). Implied binomial trees. *The Journal of Finance*, 49(3), 771–818.
- Scott, L.O. (1987). Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation, and an application. *Journal of Financial and Quantitative analysis*, 22(04), 419–438.
- Wiggins, J.B. (1987). Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates. *Journal of financial economics*, 19(2), 351–372.