

# Aerodynamisk instabilitet av lange, slanke hengebruer

**Eirik Bergheim**

**Mak Dizdar**

Bygg- og miljøteknikk

Innlevert: juni 2016

Hovedveileder: Einar Norleif Strømmen, KT

Medveileder: Dr. Ing. Bjorn Isaksen, Vegdirektoratet  
Siv. Ing. Kristian Berntsen, Vegdirektoratet

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Institutt for konstruksjonsteknikk







## MASTER THESIS 2016

SUBJECT AREA: Structural mechanics	DATE: June 10th 2016	NO. OF PAGES: 68
---------------------------------------	-------------------------	---------------------

TITLE:

**Aerodynamic Instability of long, slender Suspension Bridges**  
Aerodynamisk instabilitet av lange, slanke hengebruer

BY:

Eirik Bergheim and  
Mak Dizdar



SUMMARY:

The theme of this thesis is wind-induced dynamic response with a special attention to what is occurring around the instability limit. It has been done a case study on Hardangerbrua where the calculations are based on the theory of buffeting. The mode shapes included in the calculations have mainly been limited to the 1<sup>st</sup> in torsion and the 2<sup>nd</sup> in vertical direction, because the aerodynamic derivatives have only been made for these two. The critical mean wind velocity, which will give instability, was calculated to be 122 m/s. The results suggest that there is a combination of flutter and loss of stiffness in torsion which causes instability. It was also made calculations with 12 mode shapes included, the first 6 in the vertical direction and the first 6 in torsion. This calculation led to a critical mean wind velocity equal to 133 m/s. It was the 3<sup>rd</sup> mode shape in the vertical direction that was the biggest reason for the different results provided. The latter results indicated that both instability by flutter and instability by loss of stiffness could separately be the reason for instability.

RESPONSIBLE TEACHER: Einar Strømmen

SUPERVISOR(S): Einar Strømmen, Bjørn Isaksen, Kristian Berntsen

CARRIED OUT AT: Department of Structural Engineering (NTNU)



# MASTEROPPGAVE 2016

## Konstruksjonsteknikk

for

**Eirik Bergheim & Mak Dizdar**

### DYNAMISK RESPONS AV LANGE SLANKE HENGEBRUER

#### *Aerodynamic response of slender suspension bridges*

I Norge er det for tiden under planlegging en rekke meget slanke brukonstruksjoner, for eksempel Halsafjorden, Julsundet og Nordfjorden, alle som klassiske hengebroer, enten med enkelt eller splittet kassetverrsnitt i hovedbæreren. Disse broene har hovedspenn mellom ca. 1550 og 2050 m. De er svært utsatt for den dynamiske lastvirkningen fra vind. Halsafjorden som er den lengste med et spenn på ca. 2050 m er på grensen av det som tidligere er bygget av denne typen konstruksjoner. Prosjektene er spesielt krevende med hensyn til virvel-avløsning og bevegelsesinduserte krefter, dvs. med hensyn til å oppnå en konstruktiv utførelse som ikke medfører uakseptable virvelavløsningssvingninger ved lave vindhastigheter og tilstrekkelig sikkerhet mot en uakseptabelt lav stabilitetsgrense i koblede vertikal og torsjonssvingninger ("flutter"). Hensikten med denne oppgaven er å se på mulige utførelser av fjordkryssinger i denne spennvidden med tanke på å oppnå gunstige aerodynamiske egenskaper, og hvor det legges spesiell vekt på kryssinger i form av en eller annen variant av den klassiske hengebroen. Arbeidet foreslås lagt opp etter følgende plan:

1. Studentene setter seg inn i teorien for hengebroen som konstruksjonssystem.
2. Studentene setter seg inn i teorien for dynamisk respons og aerodynamisk stabilitet av slanke broer (se for eksempel *Strømmen: Theory of bridge aerodynamics*, Springer 2006).
3. For en eller flere aktuelle utførelser og spennvidder (avtales med veileder) skal det foretas en utredning med sikte på å kvantifisere de viktigste mekaniske egenskapene (dvs. aktuelle masse- og stivhetsegenskaper). Det skal foretas beregninger av de aktuelle egenfrekvensene og tilhørende egenvingeformene som er avgjørende for broens dynamiske egenskaper. I den grad det er mulig kan beregningene baseres på regnemaskinprogrammet Alvsat (eller innhentes fra Vegdirektoratet/Bruavdelingen).
4. For de samme tilfellene som er behandlet under punkt 3 skal det foretas beregninger av vindindusert dynamisk respons. Studentene kan selv velge om de vil legge vekt på virvelavløsning, «buffeting» eller stabilitet. For å kunne ta tilstrekkelig hensyn til bevegelsesinduserte krefter skal responsberegningene utføres i modalkoordinater i Matlab, enten i tidsplanet eller i frekvensplanet. I den grad tiden tillater det kan studentene velge å undersøke om en eller flere massedempere kan bedre systemets dynamiske egenskaper.

Studentene kan selv velge hvilke problemstillinger de ønsker å legge vekt på. Oppgaven skal gjennomføres i samarbeid med Dr.ing. Bjørn Isaksen og Siv.ing. Kristian Berntsen i Vegdirektoratet.

NTNU, 2016-01-15

Einar Strømmen

# Sammendrag

Hardangerbrua ble åpnet i 2013 og er Norges lengste hengebru, med et spenn på 1310 meter og bredde på kun 18.3 meter [1]. I slanke konstruksjoner som dette vil den dynamiske responsen som følge av krefter fra vinden være en viktig faktor. Denne masteroppgaven studerer derfor dette nærmere ved bruk av teorien fra buffeting, med et spesielt fokus på hva som skjer i området rundt instabilitetsgrensen.

Det er kjent fra tidligere at det er den 1. svingeformen i torsjon som vil kobles med den mest fleksible svingeformen i vertikal retning som i tillegg ligner mest i form. For Hardangerbrua har dette vært den 2. svingeformen i vertikal retning. Det er derfor disse to svingeformene som hovedsakelig har blitt inkludert i beregningene i denne oppgaven. Den kritiske middelvindhastigheten,  $V_{cr}$ , som vil gi instabilitet, ble beregnet til 122 m/s. Resultatene antyder at det er en kombinasjon av klassisk flutter og tap av stivhet i torsjon, som fører til instabilitet. Nærme instabilitetsgrensen viser beregningene at korrelansen mellom vertikal retning og torsjon er høy, samt at egenfrekvensene til de to inkluderte svingeformene nesten er like. Dette er gode indikasjoner på at flutter er årsaken til instabilitet. Determinanten til  $\hat{E}_\eta$  er likevel ikke null for frekvens lik egenfrekvensene når  $V = V_{cr}$ , noe den skal være ved flutter. Stivhetsreduksjonen i torsjon er stor ved kritisk middelvindhastighet, og er et argument for at det er et tap av stivhet som er årsaken til instabilitet. Stivhetstapet er likevel ikke så stort at det alene skaper instabilitet.

Det ble også gjort beregninger hvor 12 svingeformer var inkludert i beregningene, de 6 første i vertikal retning og de 6 første i torsjon. Dette førte til at instabilitet inntraff ved en middelvindhastighet lik 133 m/s. Inkluderingen av den 3. svingeformen i vertikal retning var den største årsaken til de ulike resultatene som 2 og 12 svingeformer ga. Derfor ble en beregning med den 2. og 3. svingeformen i vertikal retning samt den 1. i torsjon studert nærmere. Ved kritisk middelvindhastighet ble denne gangen korrelansen mellom de to retningene enda høyere, og egenfrekvensen til den 3. svingeformen i vertikal retning ble lik egenfrekvensen til svingeformen i torsjon nesten samtidig som determinanten til  $\hat{E}_\eta$  ble lik null. Dette antyder at flutter har oppstått. I tillegg ble stivhetstapet i torsjon så stort at tap av stivhet alene kan være årsaken til instabilitet. Dette er en indikasjon på at andre svingeformer kan ha en avgjørende effekt på responsen. Siden de aerodynamisk deriverte er kun laget for den 2. svingeformen i vertikal retning og den 1. i torsjon, er resultatene presentert i dette avsnittet usikre. I framtiden burde derfor de aerodynamisk deriverte bestemmes for flere svingeformer enn de to nevnte, slik at beregninger for flere svingeformer kan utføres korrekt.

Den aerodynamiske dempningen fører til at total dempning blir stor ved instabilitetsgrensen, og systemet er potensielt ikke lenger lett dempet. Dette fører til at egenfrekvensene og svingeformene i realiteten forandres. Den store endringen i total stivhet fører også til at egenfrekvensene og svingeformene endres. Dette blir det ikke tatt hensyn til i beregningene i denne oppgaven.

---

# Forord

Denne masteroppgaven er skrevet våren 2016. Oppgaven er skrevet ved Institutt for konstruksjonsteknikk og er en del av det 5-årige masterprogrammet Bygg- og miljøteknikk ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, NTNU, i Trondheim. Oppgaven omhandler aerodynamisk instabilitet av lange, slanke hengebruer.

Det rettes en stor takk til vår veileder Professor Dr. Ing. Einar N. Strømmen for inspirasjon, gode råd og forklaringer. Hans bok, "Theory of Bridge Aerodynamics" [2], har lagt grunnlag for denne oppgaven og er hyppig brukt spesielt i utledningene i teorikapitlet. Vi takker også våre medveiledere fra Statens vegvesen, Siv.ing. Kristian Berntsen og Dr. Ing. Bjørn Isaksen.





# Innholdsfortegnelse

<b>Sammendrag</b>	<b>i</b>
<b>Forord</b>	<b>iii</b>
<b>Innholdsfortegnelse</b>	<b>vi</b>
<b>Figurliste</b>	<b>ix</b>
<b>Tabelliste</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introduksjon</b>	<b>1</b>
<b>2 Teori</b>	<b>3</b>
2.1 Introduksjon . . . . .	3
2.2 Stokastisk beskrivelse av en turbulent vindfelt . . . . .	4
2.2.1 Vindens hastighet og intensitet . . . . .	4
2.2.2 Kaimalspektrum . . . . .	5
2.2.3 Vindturbulensens krysspekter . . . . .	6
2.3 Krefte fra et turbulent vindfelt . . . . .	7
2.3.1 Generelt om krefte fra et turbulent vindfelt . . . . .	7
2.3.2 Aerodynamisk deriverte . . . . .	9
2.4 Vindindusert dynamisk respons . . . . .	11
2.5 Aerodynamisk instabilitet - flutter . . . . .	17
<b>3 Beregningsprogram i MATLAB</b>	<b>19</b>

---

3.1	Funksjon . . . . .	19
3.2	Beregningsbeskrivelse . . . . .	20
3.2.1	Steg 1: Definere bruas og vindens egenskaper . . . . .	20
3.2.2	Steg 2: Kjøre ”multimode_beregning”-scriptet . . . . .	22
3.3	Forenklinger . . . . .	30
3.4	Variabeloversikt . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Case-studium: Hardangerbrua</b>	<b>33</b>
4.1	Bruas egenskaper . . . . .	33
4.1.1	Svingeformdata . . . . .	34
4.1.2	Aerodynamisk deriverte . . . . .	37
4.1.3	Responsen i horisontal retning er ukoblet med responsen i vertikal retning og torsjon . . . . .	38
4.2	Vindens egenskaper . . . . .	40
4.3	Parameterstudium . . . . .	43
4.3.1	Effekt av aerodynamisk deriverte . . . . .	44
4.3.2	Effekt av størrelsen til $d\omega$ . . . . .	46
4.4	Iterasjon . . . . .	48
4.5	Betydningen av aerodynamisk dempning og stivhet . . . . .	50
4.6	Studie av responsens oppførsel ved instabilitetsgrensen . . . . .	53
4.7	Flere svingeformer . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Oppsummering</b>	<b>63</b>
5.1	Generell konklusjon . . . . .	63
5.2	Mulige feilkilder . . . . .	64
5.3	Videre arbeid . . . . .	65
	<b>Referanser</b>	<b>67</b>

---

# Figurliste

2.1	Definisjon av vind- og tverrsnittsakser samt forskyvning og last [2]. . . . .	4
2.2	Den fluktuerende komponenten, $u(t)$ , for gitt middelvindhastighet, $V$ . [2]. . . . .	5
2.3	Vindkrefter og forskyvning av tverrsnitt [2]. . . . .	7
3.1	Fargekoder for grafiske illustrasjoner. . . . .	19
3.2	Filstruktur av "output"-mappe. . . . .	20
3.3	Form på tekstfiler som gir generell input. . . . .	21
3.4	Form på tekstfilen som gir inputverdier til A-matrisen. . . . .	21
3.5	Illustrasjon av hvordan scriptet "multimode_beregning" utfører responsberegningen. . . . .	23
3.6	Oversikt over hvilke txt.-filer som lastes inn i MATLAB av scriptet "Input". . . . .	24
3.7	Illustrasjon av hvordan scriptet "save_mapper" lager mappestrukturen. . . . .	25
3.8	Illustrasjon av hvordan scriptet "save_omega_i_endelig" lagrer de itererte egenfrekvensene, samt hvilke støttestrukturer det bruker. . . . .	26
3.9	Illustrasjon av hvordan scriptet "save_SQ_J" lagrer samspill- og lastmatrisen, samt hvilke støttestrukturer det bruker. . . . .	27
3.10	Illustrasjon av hvordan scriptet "save_aeStivhet_aeDempning" lagrer endelig aerodynamisk dempnings- og stivhetsmatrise, samt hvilke støttestrukturer det bruker. . . . .	28
3.11	Illustrasjon av hvordan scriptet "save_H" lagrer den endelige dynamiske forsterkningsmatrisen, samt hvilke støttestrukturer det bruker. . . . .	29
3.12	Illustrasjon av hvordan scriptet "save_respons" lagrer den endelige responsen, samt hvilke støttestrukturer det bruker. . . . .	29
4.1	Bilde av Hardangerbrua [4]. . . . .	33
4.2	Svingeformer i horisontal retning. . . . .	35

---

4.3	Svingeformer i vertikal retning. . . . .	36
4.4	Svingeformer i torsjon. . . . .	37
4.5	Aerodynamisk deriverte. . . . .	38
4.6	Kart over området [7]. . . . .	40
4.7	Vindens spektraltetthet normalisert på vindturbulensens varians i $u$ -retning for ulike middelvindhastigheter. . . . .	41
4.8	Vindens spektraltetthet normalisert på vindturbulensens varians i $w$ -retning for ulike middelvindhastigheter. . . . .	42
4.9	Vindturbulensens kospektrum i $u$ - og $w$ -retning for ulike $\Delta x$ og en gitt middelvindhastighet, $V$ . Lignende grafer vil oppnås for andre $V$ . . . . .	42
4.10	Aerodynamisk stivhet i torsjon ved variasjon av $A_3^*$ . Rød graf tilsvarer aerodynamisk stivhet med opprinnelige verdier. . . . .	44
4.11	Standardavviket i vertikal retning og torsjon ved variasjon av $A_3^*$ . Rød graf tilsvarer standardavviket med opprinnelige verdier. . . . .	45
4.12	Absoluttverdien av den dynamiske forsterkningsfunksjonen i vertikal retning og torsjon for $d\omega = 0.1$ rad/s. . . . .	46
4.13	Absoluttverdien av den dynamiske forsterkningsfunksjonen i vertikal retning og torsjon for $d\omega = 0.01$ rad/s. . . . .	47
4.14	Utviklingen av den første egenfrekvensen i torsjon, for to ulike verdier av $d\omega$ . . . . .	47
4.15	Responsens standardavvik i vertikal retning og torsjon samt korrelasjonen mellom de to retningene for $x_r = 0.5L$ uten egenfrekvensforholdet i aerodynamisk stivhet og dempning. . . . .	49
4.16	Responsens standardavvik i vertikal retning og torsjon for $x_r = 0.5L$ med og uten den aerodynamiske dempningen og stivheten. . . . .	51
4.17	Egenfrekvensen i torsjon, $\omega_\theta$ , med og uten den aerodynamiske dempningen og stivheten. . . . .	51
4.18	Utviklingen av aerodynamisk stivhet og dempning. . . . .	52
4.19	Responsens standardavvik i vertikal retning og torsjon samt korrelasjonen mellom disse to retningene for $x_r = 0.5L$ plottet mot $V$ . Det er to svingeformer inkludert i beregningen, den 2. i vertikal retning og den 1. i torsjon. De to egenfrekvensene er plottet mot $V$ . . . . .	53
4.20	Utviklingen av absoluttverdien til reell og imaginær del av $ \hat{E}_\eta $ mot $\omega$ for $V$ lik $V_{cr}$ . . . . .	54

---

---

4.21	$V_{cr}$ for 2 og 12 svingeformer. Tilfellet med 2 svingeformer inkluderer den 2. svingeformen i vertikal retning (2z) og den 1. i torsjon (1t). . . . .	55
4.22	Responsens standardavvik i vertikal retning og torsjon samt korrelasjonen mellom de to retningene for $x_r = 0.5L$ , hvor 12 svingeformer er inkludert i beregningen. . . . .	56
4.23	Utviklingen av egenfrekvensen til de 6 svingeformene i vertikal retning og den 1. i torsjon. . . . .	56
4.24	$V_{cr}$ for 2, 3 og 12 svingeformer. 2z1t er den 2. svingeformen i vertikal retning og den 1. i torsjon. 2z3z1t er den 3. svingeformen i vertikal retning i tillegg. . . .	57
4.25	Responsens standardavvik i vertikal retning og torsjon samt korrelasjonen mellom de to retningene for $x_r = 0.5L$ . 3 svingeformer er inkludert i beregningen, den 2. og 3. i vertikal retning og den 1. i torsjon. . . . .	58
4.26	Absoluttverdien av de off-diagonale leddene, $\kappa_{ae_{i1}}$ og $\zeta_{ae_{i1}}$ , i den aerodynamisk stivhets- og dempningsmatrisen plottet mot middelvindhastigheten, $V$ . . . . .	59
4.27	Den aerodynamiske stivheten i torsjon, $\kappa_{ae_{\theta_1\theta_1}}$ , plottet mot $V$ . . . . .	60
4.28	Utviklingen av absoluttverdien til reell og imaginær del av $ \hat{\mathbf{E}}_\eta $ mot $\omega$ for tre svingeformer når $V$ er lik $V_{cr}$ . . . . .	60



# Tabelliste

3.1	Sammenheng mellom variabler brukt i MATLAB og variabler brukt i teksten. . .	32
4.1	Svingeformdataene til Hardangerbrua [6]. . . . .	34
4.2	Vinddata for området rundt Hardangerbrua [6]. . . . .	41
4.3	$V_{cr}$ for forskjellig relativ forandring av aerodynamisk deriverte. . . . .	44
4.4	Sammenheng mellom aerodynamisk deriverte og aerodynamisk stivhets- og dempningsgrad. . . . .	50





# Kapittel 1

## Introduksjon

Nasjonal transportplan for 2014-2023 har som ambisjon at en fergefri E39 skal være realisert i løpet av 20 år [3]. Vestlandets brede og dype fjorder samt relativt lave befolkningstall fører til at lange bruer med smale spenn bygges. På slike slanke hengebruer vil aerodynamiske effekter spille en stor rolle og kan føre til instabilitet i systemet. I denne oppgaven er det derfor valgt å studere den aerodynamiske vindinduserte responsen nærmere. Det vil bli fokusert på effekter knyttet til kobling av svingeformer mellom vertikal retning og torsjon. Ved å ta utgangspunkt i buffeting, teorien om krefter som oppstår som følge av en interaksjon mellom vinden og konstruksjonssvingninger, blir responsen studert ved høye middelvindhastigheter og det diskuteres hva som fører til instabilitet.

Denne masteroppgaven er delt inn som følger:

- Kapittel 2: Dette kapitlet inneholder teorien som behøves for å gjennomføre beregninger av aerodynamisk vindindusert respons.
- Kapittel 3: Et beregningsprogram i MATLAB ble utviklet for å regne ut den vindinduserte aerodynamiske responsen. Dette kapitlet forklarer hvordan programmet er bygd opp og utfører beregningen.
- Kapittel 4: I dette kapitlet blir det gjort et case-studium av Hardangerbrua, hvor responsen blir studert nærmere for høye middelvindhastigheter. Det blir diskutert hva som initierer instabilitet i systemet samt hva som påvirker instabilitetsfarten.
- Kapittel 5: Avslutningsvis oppsummerer dette kapitlet case-studiet med en generell konklusjon, mulige feilkilder samt forslag til videre arbeid.

Teorien som finnes på området begrenser denne oppgaven til å kun gjelde for lineære forskyvninger og krefter.



# Kapittel 2

## Teori

Teorien som blir beskrevet i dette kapitlet er i all hovedsak basert på boken ”Theory of Bridge Aerodynamics” [2], skrevet av Professor Dr. Ing. Einar N. Strømmen.

### 2.1 Introduksjon

Kreftene som virker på en konstruksjon fra et vindfelt, er beskrevet med Bernoullis ligning

$$q_U(t) = \frac{1}{2}\rho[U(t)]^2 \quad (2.1)$$

Når vind treffer en konstruksjon som ikke er uendelig stiv, vil konstruksjonen interagere med vinden. Den varierende vindhastigheten vil få konstruksjonen til å svinge. Denne svingningen vil igjen påvirke lastpåvirkningen fra vinden. Det finnes i hovedsak to måter vinden og konstruksjonen vil interagere på. Virvelavløsning fra vinden vil vanligvis opptre ved lave middelvindhastigheter, mens buffeting vil være den avgjørende effekten ved middels til høye vindhastigheter. Det er i det følgende kun fokusert på responsen til konstruksjonen som bygger på teorien fra buffeting.

Vinden, som antas å blåse normalt på konstruksjonens lengderetning, kan deles i en konstant og en fluktuerende komponent. Den konstante komponenten er den gjennomsnittlige vindhastigheten, og vil ikke bli fokusert på i denne oppgaven siden den gir statisk respons. Bidraget fra den varierende vindhastigheten blir vanligvis beregnet ved å anta at den vil ha en gaussisk fordeling med middelerdi lik null. Det vil da være mulig å finne maksimal respons for en vilkårlig forskyvning på følgende måte

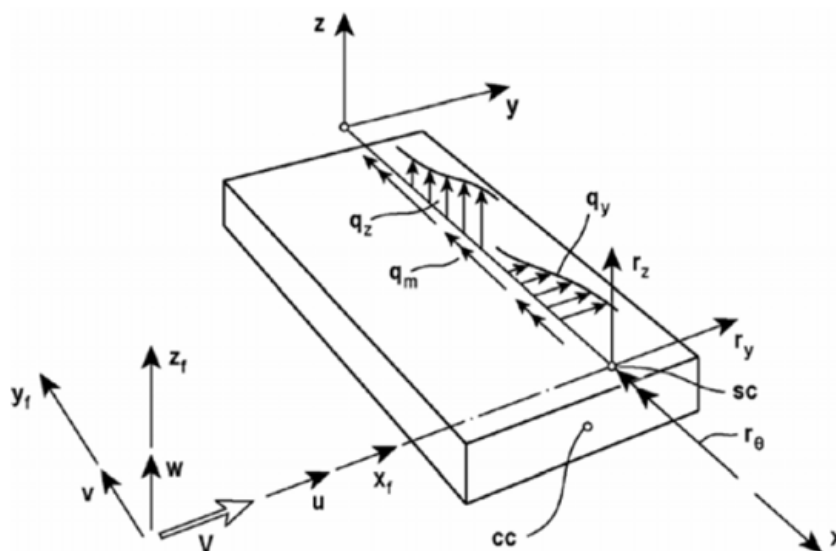
$$r_{maks} = \bar{r} + k_p \cdot \sigma_r \quad (2.2)$$

Her er  $\bar{r}$  den gjennomsnittlige verdien,  $\sigma_r$  er standardavviket og  $k_p$  er toppfaktoren. Målet med teorikapitlet blir å utlede uttrykkene for responsens standardavvik og korrelasjonen i ulike retninger.

## 2.2 Stokastisk beskrivelse av en turbulent vindfelt

### 2.2.1 Vindens hastighet og intensitet

Den momentane vindhastighetsvektoren er beskrevet i et kartesisk koordinatsystem med retninger  $x_f$ ,  $y_f$  og  $z_f$ , hvor  $x_f$  er vindens hovedstrømsretning.



**Figur 2.1:** Definisjon av vind- og tvernsnittsakser samt forskyvning og last [2].

Vindhastighetsvektoren i de tre nevnte retningene er gitt ved

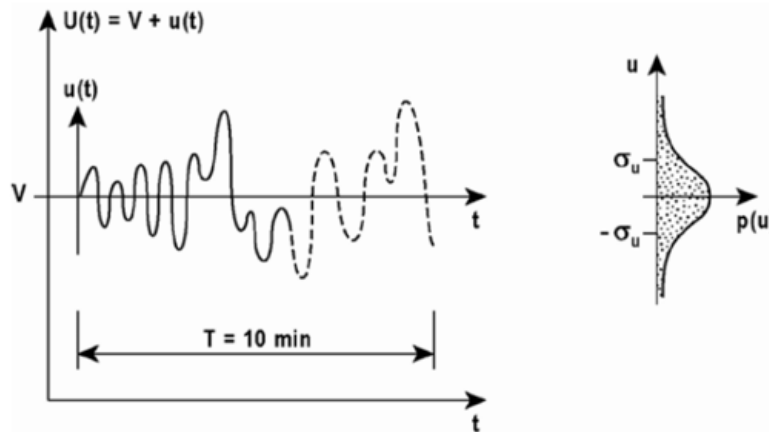
$$\begin{bmatrix} U(x_f, y_f, z_f, t) = V(x_f, y_f, z_f) + u(x_f, y_f, z_f, t) \\ v(x_f, y_f, z_f, t) \\ w(x_f, y_f, z_f, t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

hvor  $V$  er en konstant middelvei i hovedvindretningen, mens  $u$ ,  $v$  og  $w$  er fluktuerende turbulenskomponenter med middelvei null og er antatt stasjonære funksjoner av tiden. Se figur 2.1 for retninger av vindkomponenter i forhold til brua. Siden det antas at vindens hovedstrømsretning virker vinkelrett på bruas lengderetning og at høyden,  $z_f$ , vil være konstant over spennet, kan vindhastighetsvektoren i ligning 2.3 forenkles til følgende

$$\begin{bmatrix} U(y_f, t) = V + u(y_f, t) \\ w(y_f, t) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$x$ -aksen defineres langs bruas lengderetning og  $v(t)$  kan dermed fjernes.  $U(y_f, t)$  antas å oppfylle kriteriene for en gaussisk sannsynlighetsfordeling med middelvei  $V$  og standardavvik  $\sigma_u$  definert ved ligning 2.5 og figur 2.2.

$$\begin{bmatrix} \sigma_u^2 \\ \sigma_w^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} u^2(t) \\ w^2(t) \end{bmatrix} dt \quad (2.5)$$



**Figur 2.2:** Den fluktuerende komponenten,  $u(t)$ , for gitt middelvindhastighet,  $V$ . [2].

Intensiteten til turbulensen er definert ved

$$I_n(z_f) = \frac{\sigma_n(z_f)}{V(z_f)} \quad \text{hvor } n = u, w \quad (2.6)$$

Under homogene forhold for høyder under 200 m og ikke nær bakkenivå, kan intensiteten i  $w$ -retning,  $I_w$ , tilnærmes til

$$I_w = \frac{1}{2} I_u \quad (2.7)$$

## 2.2.2 Kaimalspektrum

Siden den varierende responsen beregnes ved omskriving til frekvensdomenet, må vindens egenskaper også defineres på samme måte. Det er spektraltettheten,  $S_n$ , som beskriver egenskapene til turbulenskomponentene i frekvensdomenet. Det finnes flere uttrykk i litteraturen som beskriver spektraltettheten. Kaimal sitt forslag brukes i denne oppgaven

$$\frac{f \cdot S_n(f)}{\sigma_n^2} = \frac{A_n \cdot \hat{f}_n}{(1 + 1,5 \cdot A_n \cdot \hat{f}_n)^{5/3}} \quad (2.8)$$

Den normaliserte frekvensen er definert ved  $\hat{f}_n = f \cdot x_f L_n / V$ , hvor  $x_f L_n$  er lengdeskalaen for integralet av turbulenskomponentene.

$$\begin{aligned}
x_f L_u(z_f) &\approx x_f L_u(z_{f0}) \cdot \left(\frac{z_f}{z_0}\right)^{0.3} & z_f > z_{f0} = 10 \text{ m} \\
& & \text{hvor} \\
x_f L_w(z_f) &\approx \frac{1}{12} \cdot x_f L_u(z_f) & x_f L_u(z_{f0}) = 100 \text{ m}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Frekvensen,  $f$ , i ligning 2.8, er gitt i Hz. I resten av oppgaven uttrykkes frekvensen i rad/s og derfor må ligning 2.8 skrives om til følgende uttrykk for vindens spektraltetthet

$$S_n(\omega) = \frac{A_{n\omega} \cdot x_f L_n/V}{(1 + 1.5 \cdot A_{n\omega} \cdot \omega \cdot x_f L_n/V)^{5/3}} \cdot \sigma_n^2 \tag{2.10}$$

hvor  $A_{n\omega} = \frac{A_n}{2\pi}$  og  $n = u$  eller  $w$ .

### 2.2.3 Vindturbulensens krysspekter

I forrige delkapittel ble egenskapene til vindens turbulenskomponenter beskrevet i frekvensdomenet ved hjelp av spektraltettheten,  $S_n$ . Utledningene senere i teorikapittelet vil føre til at det behøves et uttrykk for hvordan vindens turbulenskomponenter varierer over bruspenet. Dette uttrykket defineres ved krysspekteret,  $S_{nn}(\Delta s, \omega)$ .

Koherens beskriver korrelasjonen mellom to vilkårlige funksjoner  $x(t)$  og  $y(t)$ , og er gitt ved

$$Coh_{xy}(\Delta s, \omega) = \frac{|S_{xy}(\Delta s, \omega)|^2}{S_x(\omega) \cdot S_y(\omega)} \tag{2.11}$$

Når  $x(t)$  og  $y(t)$  er realisering av den samme prosessen, er  $S_x(\omega) = S_y(\omega)$  og  $S_{xy}(\omega) = S_{xx}(\omega) = S_x(\omega) \cdot \sqrt{Coh_{xx}(\Delta s, \omega)} \cdot e^{i\phi_{xx}(\omega)}$ . I vinddynamikk er vindfeltet oftest antatt homogent og vinkelrett på systemet, noe som fører til at  $e^{i\phi_{xx}(\omega)}$  kan neglisjeres. Beregningene av responset fører også til at imaginære ledd faller bort i krysspekteret. Ved å innføre dette i uttrykket for krysspekteret samt ta roten av ligning 2.11, kan et uttrykk for krysspekteret defineres ved

$$\text{Re}[S_{nn}(\Delta s, \omega)] = \sqrt{Coh_{nn}(\Delta s, \omega)} \cdot S_n(\omega) = \hat{C}o_{nn}(\Delta s, \omega) \cdot S_n(\omega) \tag{2.12}$$

hvor roten av koherensen er det normaliserte kospekteret,  $\hat{C}o_{nn}$ . Gjennom forsøk har det blitt vist at det normaliserte kospekteret i vindteorien under homogene forhold kan tilnærmes ved

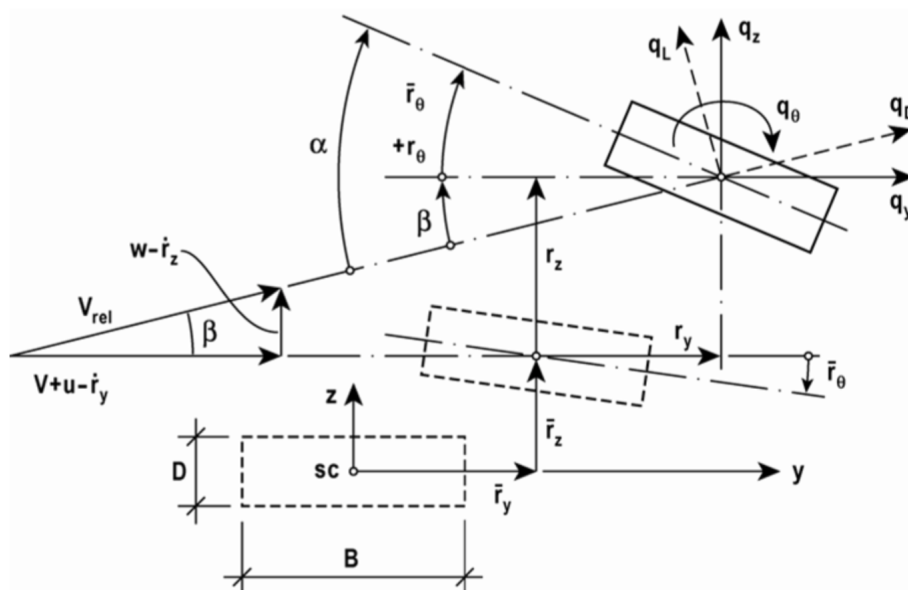
$$\hat{C}o_{nn}(\Delta s, \omega) \approx e^{-C_{nx} \cdot \omega \cdot \frac{\Delta s}{V}} \quad \text{hvor } n = u, w \tag{2.13}$$

For slanke hengebruer er det, det normaliserte kospekteret langs  $x$ -aksen som er interessant og dermed kan  $\Delta s$  settes lik  $\Delta x$ .

## 2.3 Kreftene fra et turbulent vindfelt

### 2.3.1 Generelt om kreftene fra et turbulent vindfelt

Når vinden treffer en konstruksjon, vil kreftene som oppstår som følge av den gjennomsnittlige vindhastigheten føre til en konstant utbøyning og vridning av konstruksjonen. De varierende komponentene av vinden vil deretter gi svingninger av konstruksjonen rundt dette nye likevektspunktet. Disse svingningene vil interagere med vinden og skape nye krefter, kalt bevegelsesinduserte krefter. Det er dette som er opphavet til buffetingteorien og er illustrert ved figur 2.3. De ulike kreftene som påvirker konstruksjonen vil bli utledet i dette delkapittelet.



**Figur 2.3:** Vindkrefter og forskyvning av tverrsnitt [2].

De momentane kreftene som oppstår som følge av vinden er vist i figur 2.3, og kan deles inn i de tre bidragene  $q_D(x, t)$ ,  $q_L(x, t)$  og  $q_M(x, t)$ .

$$\begin{bmatrix} q_D(x, t) \\ q_L(x, t) \\ q_M(x, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho V_{rel}^2 \begin{bmatrix} D \cdot C_D(\alpha) \\ D \cdot C_L(\alpha) \\ B^2 \cdot C_M(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Her er  $B$  og  $D$  henholdsvis bredden og høyden av tverrsnittet til brua, mens  $C_D$ ,  $C_L$  og  $C_M$  er lastkoeffisienter avhengige av innfallsvinkelen til den relative vindhastigheten,  $\alpha$ . Vinkelen  $\beta$  kan uttrykkes ved

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{w - \dot{r}_z}{V + u - \dot{r}_y} \right) \quad (2.15)$$

Siden frihetsgradene er definert i  $y$ -,  $z$ - og  $\theta$ -retning, må også kreftene defineres i samme retning.

Ved å benytte seg av ligning 2.15, er det mulig å transformere  $q_D$ ,  $q_L$  og  $q_M$  til  $q_y$ ,  $q_z$  og  $q_\theta$  på følgende måte:

$$\mathbf{q}_{tot}(x, t) = \begin{bmatrix} q_y \\ q_z \\ q_\theta \end{bmatrix}_{tot} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_D \\ q_L \\ q_M \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Ved å videre anta  $u(x, t)$  og  $w(x, t) \ll V$ , kan  $V_{rel}$  forenkles til

$$V_{rel}^2 = (V + u - \dot{r}_y)^2 + (w - \dot{r}_z)^2 \approx V^2 + 2Vu - 2V\dot{r}_y \quad (2.17)$$

I tillegg vil  $\cos(\beta) \approx 1$ . Dette gir igjen  $\sin(\beta) \approx \tan(\beta) \approx \beta$ , og siden  $\tan(\beta) = (w - \dot{r}_z)/(V + u - \dot{r}_y) \approx (w - \dot{r}_z)/V$ , gir dette tilslutt  $\beta \approx (w - \dot{r}_z)/V$ . Dermed kan følgende sammenheng skrives

$$\alpha = \bar{r}_\theta + r_\theta + \beta \approx \bar{r}_\theta + r_\theta + \frac{w}{V} - \frac{\dot{r}_z}{V} \quad (2.18)$$

Lastkoeffisientene  $C_D$ ,  $C_L$  og  $C_M$  vil i realiteten variere ikke-lineært som funksjoner av  $\alpha$ . Antagelsen om små rotasjoner fører likevel til at en lineær variasjon av lastkoeffisientene vil være en god tilnærming

$$\begin{bmatrix} C_D(\alpha) \\ C_L(\alpha) \\ C_M(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_D \\ \bar{C}_L \\ \bar{C}_M \end{bmatrix} + \alpha_f \begin{bmatrix} C'_D \\ C'_L \\ C'_M \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

hvor

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_D \\ \bar{C}_L \\ \bar{C}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_D(\bar{\alpha}) \\ C_L(\bar{\alpha}) \\ C_M(\bar{\alpha}) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} C'_D \\ C'_L \\ C'_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_D(\bar{\alpha}) \\ C'_L(\bar{\alpha}) \\ C'_M(\bar{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$\bar{\alpha}$  og  $\alpha_f$  er definert ved  $\bar{\alpha} = \bar{r}_\theta$  og  $\alpha_f = r_\theta + w/V - \dot{r}_z/V$ . Ved å kombinere ligning 2.14-2.19, samt neglisjere ledd bestående av produktet til to små verdier, vil følgende ligning til slutt oppnås

$$\mathbf{q}_{tot}(x, t) = \bar{\mathbf{q}}(x) + \mathbf{B}_q \cdot \mathbf{v} + \mathbf{C}_{ae} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_{ae} \cdot \mathbf{r} \quad (2.21)$$

hvor

$$\mathbf{v}(x, t) = [u \quad w]^T \quad (2.22)$$



$$\mathbf{r}(x, t) = [r_y \quad r_z \quad r_\theta]^T \quad (2.23)$$

$$\bar{\mathbf{q}}(x) = \begin{bmatrix} \bar{q}_y \\ \bar{q}_z \\ \bar{q}_\theta \end{bmatrix} = \frac{\rho V^2 B}{2} \begin{bmatrix} (D/B)\bar{C}_D \\ \bar{C}_L \\ B\bar{C}_M \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{B}_q(x) = \frac{\rho V B}{2} \begin{bmatrix} 2(D/B)\bar{C}_D & ((D/B)C'_D - \bar{C}_L) \\ 2\bar{C}_L & (C'_L + (D/B)\bar{C}_D) \\ 2B\bar{C}_M & BC'_M \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{C}_{ae} = -\frac{\rho V B}{2} \begin{bmatrix} 2(D/B)\bar{C}_D & ((D/B)C'_D - \bar{C}_L) & 0 \\ 2\bar{C}_L & (C'_L + (D/B)\bar{C}_D) & 0 \\ 2B\bar{C}_M & BC'_M & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{K}_{ae} = \frac{\rho V^2 B}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (D/B)C'_D \\ 0 & 0 & C'_L \\ 0 & 0 & BC'_M \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

For senere bruk er det ønskelig å ha  $\mathbf{C}_{ae}$  og  $\mathbf{K}_{ae}$  på en spesiell form. Dette gjøres ved å multiplisere ligning 2.26 med  $\frac{B}{B} \cdot \frac{\omega_i(V)}{\omega_i(V)}$  og ligning 2.27 med  $\frac{B}{B} \cdot \frac{\omega_i(V)^2}{\omega_i(V)^2}$ , og deretter organisere uttrykkene til følgende form

$$\mathbf{C}_{ae} = \frac{\rho B^2}{2} \omega_i(V) \begin{bmatrix} -2(D/B)\bar{C}_D \frac{V}{B\omega_i(V)} & (\bar{C}_L - (D/B)C'_D) \frac{V}{B\omega_i(V)} & 0 \\ -2\bar{C}_L \frac{V}{B\omega_i(V)} & -(C'_L + (D/B)\bar{C}_D) \frac{V}{B\omega_i(V)} & 0 \\ -2B\bar{C}_M \frac{V}{B\omega_i(V)} & -BC'_M \frac{V}{B\omega_i(V)} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{K}_{ae} = \frac{\rho B^2}{2} \omega_i(V)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & DC'_D \left(\frac{V}{B\omega_i(V)}\right)^2 \\ 0 & 0 & BC'_L \left(\frac{V}{B\omega_i(V)}\right)^2 \\ 0 & 0 & B^2C'_M \left(\frac{V}{B\omega_i(V)}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Den totale lasten  $\mathbf{q}_{tot}(x, t)$  som oppstår som følge av buffetingteorien består altså av en gjennomsnittlig tidsuavhengig last  $\bar{\mathbf{q}}(x)$  fra middelvindhastigheten, en last  $\mathbf{q} = \mathbf{B}_q \cdot \mathbf{v}$  fra de turbulente vindkomponentene og bevegelsesinduserte laster  $\mathbf{C}_{ae} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_{ae} \cdot \mathbf{r}$ .

### 2.3.2 Aerodynamisk deriverte

De to siste leddene fra ligning 2.21,  $\mathbf{C}_{ae} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_{ae} \cdot \mathbf{r}$ , vil bli påvirket av omskrivningen til frekvensdomenet. De ulike delene av  $\mathbf{C}_{ae}$  og  $\mathbf{K}_{ae}$  stammer opprinnelig fra luftfart og ble senere gjort mulig å anvende i brusedesign av Scanlan & Tomko. Det er derfor vanlig å bruke deres notasjon av de aerodynamisk deriverte

$$\mathbf{C}_{ae} = \frac{\rho B^2}{2} \omega_i(V) \begin{bmatrix} P_1^* & P_5^* & BP_2^* \\ H_5^* & H_1^* & BH_2^* \\ BA_5^* & BA_1^* & B^2 A_2^* \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{K}_{ae} = \frac{\rho B^2}{2} [\omega_i(V)]^2 \begin{bmatrix} P_4^* & P_6^* & BP_3^* \\ H_6^* & H_4^* & BH_3^* \\ BA_6^* & BA_4^* & B^2 A_3^* \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Ved å bruke ligningene 2.28 og 2.29 i kombinasjon med 2.30 og 2.31, vil sammenhengen mellom Scanlan & Tomko sin notasjon og de kvasistatiske aerodynamiske deriverte være på formen

$$\begin{bmatrix} P_1^* & H_1^* & A_1^* \\ P_2^* & H_2^* & A_2^* \\ P_3^* & H_3^* & A_3^* \\ P_4^* & H_4^* & A_4^* \\ P_5^* & H_5^* & A_5^* \\ P_6^* & H_6^* & A_6^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\bar{C}_D \frac{D}{B} \frac{V}{B\omega_i(V)} & -(C'_L + \bar{C}_D \frac{D}{B}) \frac{V}{B\omega_i(V)} & -C'_M \frac{V}{B\omega_i(V)} \\ 0 & 0 & 0 \\ C'_D \frac{D}{B} \left(\frac{V}{B\omega_i(V)}\right)^2 & C'_L \left(\frac{V}{B\omega_i(V)}\right)^2 & C'_M \left(\frac{V}{B\omega_i(V)}\right)^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ (\bar{C}_L - C'_D \frac{D}{B}) \frac{V}{B\omega_i(V)} & -2\bar{C}_L \frac{V}{B\omega_i(V)} & -2\bar{C}_M \frac{V}{B\omega_i(V)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Det er likevel anbefalt å bestemme leddene i 2.30 og 2.31 eksperimentelt i vindtunneler på seksjonsmodeller av brua. Det er da nødvendig å arbeide med dimensjonsløse verdier, slik at verdiene kan skaleres opp fra seksjonsmodell til fullskalamodell. Siden  $\mathbf{C}_{ae}$  er funksjon av  $V$  og  $\mathbf{K}_{ae}$  er funksjon av  $V^2$ , må de normaliseres på henholdsvis  $\omega_i(V)$  og  $\omega_i(V)^2$  for at  $V_{red} = \frac{V}{B\omega_i(V)}$  skal bli dimensjonsløs. Dette er grunnen til at ligningene 2.26 og 2.27 ble skrevet om til ligningene 2.28 og 2.29.

Vindtunneltestene som gjennomføres for å finne de aerodynamisk deriverte, er opprinnelig laget for å finne vindbelastningen som fører til instabilitet eller store svingninger av systemet. Det er som oftest den første svingeformen i torsjon og den første med likest mulig form i vertikal retning som er de kritiske svingeformene. Derfor er det disse svingeformene det blir testet for og normalisert mot i eksperimentene, ved å bruke deres modale egenskaper. På grunn av dette, er det egentlig kun disse svingeformene de aerodynamisk deriverte kan brukes til for beregninger i full skala, i tillegg til at de må brukes i modale koordinater. I Skandinavia er det vanlig å normalisere de aerodynamisk deriverte med frekvensen som hører til den svingeformen som er ansvarlig for den bevegelsesinduserte kraften.  $A_1^*$ ,  $A_4^*$ ,  $H_1^*$  og  $H_4^*$  er derfor normalisert på  $\omega_z$ , mens  $A_2^*$ ,  $A_3^*$ ,  $H_2^*$  og  $H_3^*$  er normalisert på  $\omega_\theta$ . De resterende aerodynamisk deriverte er avhengig av bevegelse i horisontal retning, og er ikke mulig å finne slik det er vanlig å sette opp vindtunneltester. For disse verdiene er det derfor de kvasistatiske verdiene som blir brukt.

Når  $V \neq 0$ , vil leddene i  $\mathbf{K}_{ae}$  og  $\mathbf{C}_{ae}$  endre stivheten og dempingen til systemet. Dette vil videre føre til at  $\omega_i(V)$  endres. Som ligning 2.31 viser, er  $\mathbf{K}_{ae}$  og  $\mathbf{C}_{ae}$  avhengig av  $\omega_i(V)$ . Iterasjon vil derfor være en nødvendighet.

---

## 2.4 Vindindusert dynamisk respons

I dette delkapittelet utledes uttrykket for den varierende responsen til en slank linjekonstruksjon påkjent av et turbulent vindfelt. De fluktuerende forskyvningene er funksjoner av posisjon og tid, og kan uttrykkes ved

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(x, t) &= [r_y \quad r_z \quad r_\theta] = \mathbf{\Phi}(x) \cdot \boldsymbol{\eta}(t) \\ \mathbf{\Phi}(x) &= [\phi_1 \quad \dots \quad \phi_i \quad \dots \quad \phi_{N_{mod}}] \\ \boldsymbol{\eta}(t) &= [\eta_1 \quad \dots \quad \eta_i \quad \dots \quad \eta_{N_{mod}}]^T\end{aligned}\tag{2.33}$$

hvor  $\phi_i = [\phi_y \quad \phi_z \quad \phi_\theta]_i^T$  og  $N_{mod}$  er antall svingeformer som er valgt i beregningen.

Som beskrevet i delkapittel 2.3.1, vil de momentane kreftene som oppstår være en kombinasjon av kraften fra vinden som treffer konstruksjonen,  $\mathbf{q}(x, t)$ , og den bevegesinduserte lasten,  $\mathbf{q}_{ae}(x, t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})$ . Dermed er det mulig å sette opp følgende sammenheng

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{tot} &= \mathbf{q}(x, t) + \mathbf{q}_{ae}(x, t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) \\ \mathbf{q}(x, t) &= [q_y \quad q_z \quad q_\theta]^T \\ \mathbf{q}_{ae}(x, t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) &= [q_y \quad q_z \quad q_\theta]_{ae}^T\end{aligned}\tag{2.34}$$

### Den dynamiske likevektsligningen

Den dynamiske likevektsligningen for brua kan da skrives i modale koordinater på følgende måte

$$\tilde{\mathbf{M}}_0 \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}(t) = \tilde{\mathbf{Q}}(t) + \tilde{\mathbf{Q}}_{ae}(t, \boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, \ddot{\boldsymbol{\eta}})\tag{2.35}$$

Her er  $\tilde{\mathbf{M}}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_0$  og  $\tilde{\mathbf{K}}_0$  henholdsvis modal masse, demping og stivhet til systemet ved  $V = 0$ .  $\tilde{\mathbf{Q}}$  er gitt ved

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Q}} &= [\tilde{Q}_1 \quad \dots \quad \tilde{Q}_i \quad \dots \quad \tilde{Q}_{N_{mod}}]^T \\ \tilde{Q}_i &= \int_{L_{exp}} (\phi_i^T \cdot \mathbf{q}) dx\end{aligned}\tag{2.36}$$

Det er hensiktsmessig å finne den varierende responsen via frekvensdomenet. Derfor fouriertransformeres ligning 2.35 og skrives på følgende måte

$$(-\tilde{M}_0 + \tilde{C}_0 i\omega + \tilde{K}_0) \cdot \mathbf{a}_\eta(\omega) = \mathbf{a}_{\tilde{Q}} + \mathbf{a}_{\tilde{Q}_{ae}} \quad (2.37)$$

hvor  $\mathbf{a}_\eta$  og  $\mathbf{a}_{\tilde{Q}}$  er fourieramplitudene til henholdsvis den modale forskyvningen og den modale vindinduserte lasten. Det antas at den modale bevegelsesinduserte lasten er proporsjonal og i fase med systemets forskyvning, hastighet og akselerasjon. Dermed vil  $\mathbf{a}_{\tilde{Q}_{ae}}$  være gitt ved

$$\mathbf{a}_{\tilde{Q}_{ae}} = (-\tilde{M}_{ae}\omega^2 + \tilde{C}_{ae}i\omega + \tilde{K}_{ae}) \cdot \mathbf{a}_\eta \quad (2.38)$$

Ligning 2.38 settes inn i ligning 2.37, og alle ledd som er funksjoner av bevegelse blir samlet på venstre side.

$$[-(\tilde{M}_0 - \tilde{M}_{ae})\omega^2 + (\tilde{C}_0 - \tilde{C}_{ae})i\omega + (\tilde{K}_0 - \tilde{K}_{ae})] \cdot \mathbf{a}_\eta(\omega) = \mathbf{a}_{\tilde{Q}}(\omega) \quad (2.39)$$

Det multipliseres så med  $\tilde{K}_0^{-1}$ , og følgende sammenhenger brukes

$$\tilde{K}_0 = \text{diag}[\omega_i^2 \tilde{M}_i]$$

$$\tilde{C}_0 = \text{diag}[2\tilde{M}_i \omega_i \zeta_i] \quad (2.40)$$

$$\mathbf{a}_{\tilde{Q}} = \tilde{K}_0^{-1} \cdot \mathbf{a}_{\tilde{Q}}(\omega) = \left[ \dots \frac{\int_{Leexp} \phi_i^T(x) \cdot \mathbf{a}_q(x, \omega) dx}{\omega_i^2 \tilde{M}_i} \dots \right]^T$$

Dette fører til at ligning 2.39 kan skrives

$$\mathbf{a}_\eta(\omega) = \hat{H}_\eta(\omega) \cdot \mathbf{a}_{\tilde{Q}}(\omega) \quad (2.41)$$

### Definisjon av den dynamiske forsterkningsmatrisen

Den dynamiske forsterkningsmatrisen er definert ved

$$\hat{H}_\eta(\omega) = \left\{ \mathbf{I} - \tilde{K}_0^{-1} \tilde{K}_{ae} - \left[ \text{diag}\left(\frac{1}{\omega_i^2}\right) - \tilde{K}_0^{-1} \tilde{M}_{ae} \right] \omega^2 + \left[ \text{diag}\left(\frac{2\zeta_i}{\omega_i}\right) - \tilde{K}_0^{-1} \tilde{C}_{ae} \right] i\omega \right\}^{-1} \quad (2.42)$$

For å skrive denne ligningen litt enklere, innføres følgende  $N_{mod} \times N_{mod}$  - matriser

$$\boldsymbol{\mu}_{ae} = \text{diag}[\omega_i^2] \cdot (\tilde{\mathbf{K}}_0^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_{ae})$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{ae} = \tilde{\mathbf{K}}_0^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{ae} \quad (2.43)$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{ae} = \frac{1}{2} \text{diag}[\omega_i] \cdot (\tilde{\mathbf{K}}_0^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_{ae})$$

i tillegg til  $\boldsymbol{\zeta} = \text{diag}[\zeta_i]$ . Ved også å neglisjere  $\boldsymbol{\mu}_{ae}$  blir nå det endelige uttrykket for den dynamiske forsterkningsmatrisen

$$\hat{\mathbf{H}}_{\eta}(\omega) = \left\{ \mathbf{I} - \boldsymbol{\kappa}_{ae} - \left( \omega \cdot \text{diag} \left[ \frac{1}{\omega_i} \right] \right)^2 + 2i\omega \cdot \text{diag} \left[ \frac{1}{\omega_i} \right] \cdot (\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_{ae}) \right\}^{-1} \quad (2.44)$$

hvor

$$\boldsymbol{\kappa}_{ae} = \begin{bmatrix} \ddots & & \ddots \\ & \kappa_{aeij} & \\ \ddots & & \ddots \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\zeta}_{ae} = \begin{bmatrix} \ddots & & \ddots \\ & \zeta_{aeij} & \\ \ddots & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

der

$$\kappa_{aeij} = \frac{\tilde{K}_{aeij}}{\omega_i^2 \tilde{M}_i} = \frac{\int_{L_{exp}} (\phi_i^T \mathbf{K}_{ae} \phi_j) dx}{\omega_i^2 \tilde{M}_i} \quad (2.46)$$

$$\zeta_{aeij} = \frac{\tilde{C}_{aeij}}{2\omega_i \tilde{M}_i} = \frac{\int_{L_{exp}} (\phi_i^T \mathbf{C}_{ae} \phi_j) dx}{2\omega_i \tilde{M}_i} \quad (2.47)$$

som skrevet ut blir

$$\begin{aligned} \kappa_{aeij} = & \frac{\rho B^2 \left[ \frac{\omega_i(V)}{\omega_i} \right]^2 \left[ \int_{L_{eksp}} (\phi_{y_i} \phi_{y_j} P_4^* + \phi_{z_i} \phi_{y_j} H_6^* + \phi_{\theta_i} \phi_{y_j} B A_6^* + \phi_{y_i} \phi_{z_j} P_6^* \right. \\ & \left. + \phi_{z_i} \phi_{z_j} H_4^* + \phi_{\theta_i} \phi_{z_j} B A_4^* + \phi_{y_i} \phi_{\theta_j} B P_3^* + \phi_{z_i} \phi_{\theta_j} B H_3^* + \phi_{\theta_i} \phi_{\theta_j} B^2 A_3^*) dx \right]}{\left[ \int_L (\phi_{y_i}^2 + \phi_{z_i}^2 + \phi_{\theta_i}^2) dx \right]} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{aeij} = & \frac{\rho B^2 \omega_i(V)}{4\tilde{m}_i \omega_i} \left[ \int_{L_{eksp}} (\phi_{y_i} \phi_{y_j} P_1^* + \phi_{z_i} \phi_{y_j} H_5^* + \phi_{\theta_i} \phi_{y_j} B A_5^* + \phi_{y_i} \phi_{z_j} P_5^* \right. \\ & \left. + \phi_{z_i} \phi_{z_j} H_1^* + \phi_{\theta_i} \phi_{z_j} B A_1^* + \phi_{y_i} \phi_{\theta_j} B P_2^* + \phi_{z_i} \phi_{\theta_j} B H_2^* + \phi_{\theta_i} \phi_{\theta_j} B^2 A_2^*) dx \right] \\ & \left[ \int_L (\phi_{y_i}^2 + \phi_{z_i}^2 + \phi_{\theta_i}^2) dx \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

---

## Utleddning av responsmatrisen

Ved å bruke ligning 2.41 kan spektraltettheten til modalresponsen uttrykkes ved

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\eta(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} (\mathbf{a}_\eta^* \cdot \mathbf{a}_\eta^T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left[ (\hat{\mathbf{H}}_\eta \mathbf{a}_{\hat{Q}})^* \cdot (\hat{\mathbf{H}}_\eta \mathbf{a}_{\hat{Q}})^T \right] \\ &= \hat{\mathbf{H}}_\eta^* \cdot \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} (\mathbf{a}_{\hat{Q}}^* \cdot \mathbf{a}_{\hat{Q}}^T) \right] \cdot \hat{\mathbf{H}}_\eta^T = \hat{\mathbf{H}}_\eta^* \cdot \mathbf{S}_{\hat{Q}} \cdot \hat{\mathbf{H}}_\eta^T \end{aligned} \quad (2.50)$$

Videre er spektraltetthetsmatrisen av forskyvningene  $r_y$ ,  $r_z$  og  $r_\theta$  i posisjon  $x = x_r$  gitt ved

$$\mathbf{S}_{rr}(x_r, \omega) = \Phi_r(x_r) \cdot \mathbf{S}_\eta(\omega) \cdot \Phi_r^T(x_r) \quad (2.51)$$

hvor  $\Phi_r(x_r) = \Phi(x_r)$ . En kombinasjon av ligningene 2.50 og 2.51 gir deretter

$$\mathbf{S}_{rr}(x_r, \omega) = \Phi_r(x_r) \cdot \left[ \hat{\mathbf{H}}_\eta^*(\omega) \cdot \mathbf{S}_{\hat{Q}}(\omega) \cdot \hat{\mathbf{H}}_\eta^T(\omega) \right] \cdot \Phi_r^T(x_r) \quad (2.52)$$

Responsmatrisen er gitt ved

$$\mathbf{Cov}_{rr}(x_r) = \begin{bmatrix} \sigma_{r_y r_y}^2 & \text{Cov}_{r_y r_z} & \text{Cov}_{r_y r_\theta} \\ \text{Cov}_{r_z r_y} & \sigma_{r_z r_z}^2 & \text{Cov}_{r_z r_\theta} \\ \text{Cov}_{r_\theta r_y} & \text{Cov}_{r_\theta r_z} & \sigma_{r_\theta r_\theta}^2 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

og kan regnes ut på følgende måte

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}_{rr}(x_r) &= \int_0^\infty \mathbf{S}_{rr}(x_r, \omega) d\omega \\ &= \Phi_r(x_r) \left[ \int_0^\infty \hat{\mathbf{H}}_\eta^*(\omega) \mathbf{S}_{\hat{Q}}(\omega) \hat{\mathbf{H}}_\eta^T(\omega) d\omega \right] \Phi_r^T(x_r) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Uttrykket for  $\hat{\mathbf{H}}_\eta^*(\omega)$  er gitt ved ligning 2.44, mens uttrykket for  $\mathbf{S}_{\hat{Q}}$  utledes under.

## Utleddning av lastmatrisen

Lastmatrisen er definert ved

---


$$\mathbf{S}_{\hat{Q}}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} (\mathbf{a}_{\hat{Q}}^* \cdot \mathbf{a}_{\hat{Q}}^T) = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & S_{\hat{Q}_i \hat{Q}_j}(\omega) & \\ \ddots & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

hvor  $S_{\hat{Q}_i \hat{Q}_j}(\omega)$  er gitt ved

$$\begin{aligned} S_{\hat{Q}_i \hat{Q}_j}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} [a_{\hat{Q}_i}^*(\omega) \cdot a_{\hat{Q}_j}(\omega)] \\ &= \frac{\iint_{L_{exp}} \boldsymbol{\phi}_i^T(x_1) \cdot \mathbf{S}_{qq}(\Delta x, \omega) \cdot \boldsymbol{\phi}_j(x_2) dx_1 dx_2}{(\omega_i^2 \tilde{M}_i) \cdot (\omega_j^2 \tilde{M}_j)} \end{aligned} \quad (2.56)$$

der  $\Delta x = |x_1 - x_2|$ . I dette uttrykket er  $\mathbf{S}_{qq}$  den eneste ukjente. Fourieramplitudene til lasten  $\mathbf{q}$  er gitt ved

$$\mathbf{a}_q(x, \omega) = \begin{bmatrix} a_{qy} \\ a_{qz} \\ a_{q\theta} \end{bmatrix} = (\rho BV/2) \cdot \hat{\mathbf{B}}_q \cdot \mathbf{a}_v \quad (2.57)$$

hvor  $\hat{\mathbf{B}}_q = \frac{2}{\rho BV} \mathbf{B}_q$ , og  $\mathbf{a}_v(x, \omega)$  er fourieramplitudene til de fluktuierende vindkomponentene.  $\mathbf{S}_{qq}(\Delta x, \omega)$  er da gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{qq}(\Delta x, \omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} [\mathbf{a}_q^*(x_1, \omega) \cdot \mathbf{a}_q^T(x_2, \omega)] \\ &= \left(\frac{\rho VB}{2}\right)^2 \cdot \hat{\mathbf{B}}_q \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} [\mathbf{a}_v^*(x_1, \omega) \cdot \mathbf{a}_v^T(x_2, \omega)] \cdot \hat{\mathbf{B}}_q^T \\ &= \left(\frac{\rho VB}{2}\right)^2 \cdot \hat{\mathbf{B}}_q \cdot \mathbf{S}_v(\Delta x, \omega) \cdot \hat{\mathbf{B}}_q^T \end{aligned} \quad (2.58)$$

hvor  $\mathbf{S}_v$  er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_v(\Delta x, \omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} [\mathbf{a}_v^*(x_1, \omega) \mathbf{a}_v^T(x_2, \omega)] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \begin{bmatrix} a_u^* a_u & a_u^* a_w \\ a_w^* a_u & a_w^* a_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{uw} \\ S_{wu} & S_{ww} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Ved og så anta at  $S_{uw} = S_{wu} = 0$ , samt benytte seg av

$$\mathbf{I}_v = \text{diag}[I_u \quad I_w] \quad (2.60)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_v(\Delta x, \omega) = \text{diag}[S_{uu}/\sigma_u^2 \quad S_{ww}/\sigma_w^2]$$

kan ligning 2.56 skrives

$$\begin{aligned} S_{\hat{Q}_i \hat{Q}_j} &= \left(\frac{\rho V^2 B}{2}\right)^2 \cdot \frac{\int \int_{L_{eksp}} \phi_i^T(x_1) \cdot \{\hat{\mathbf{B}}_q \cdot [\mathbf{I}_v \cdot \hat{\mathbf{S}}_v(\Delta x, \omega)] \cdot \hat{\mathbf{B}}_q^T\} \cdot \phi_j(x_2) dx_1 dx_2}{(\omega_i^2 \tilde{M}_i)(\omega_j^2 \tilde{M}_j)} \\ &= \frac{\rho B^3}{2\tilde{m}_i} \cdot \frac{\rho B^3}{2\tilde{m}_j} \cdot \left(\frac{V}{B\omega_i}\right)^2 \cdot \left(\frac{V}{B\omega_j}\right)^2 \cdot \hat{J}_{ij}^2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

der den reduserte samspillfunksjonen er definert ved

$$\hat{J}_{ij}^2 = \frac{J_{ij}^2}{\left(\int_L (\phi_{y_i}^2 + \phi_{z_i}^2 + \phi_{\theta_i}^2) dx\right) \cdot \left(\int_L (\phi_{y_j}^2 + \phi_{z_j}^2 + \phi_{\theta_j}^2) dx\right)} \quad (2.62)$$

hvor  $J_{ij}^2$  er gitt ved

$$\begin{aligned} J_{ij}^2 &= \int \int_{L_{eksp}} \left\{ \phi_{y_i}(x_1) \phi_{y_j}(x_2) \left[ \left(2\frac{D}{B} \bar{C}_D\right)^2 I_u^2 \hat{S}_{uu} + \left(\frac{D}{B} C'_D - \bar{C}_L\right)^2 I_w^2 \hat{S}_{ww} \right] \right. \\ &\quad + \phi_{z_i}(x_1) \phi_{z_j}(x_2) \left[ (2\bar{C}_L)^2 I_u^2 \hat{S}_{uu} + \left(C'_L + \frac{D}{B} \bar{C}_D\right)^2 I_w^2 \hat{S}_{ww} \right] \\ &\quad + \phi_{\theta_i}(x_1) \phi_{\theta_j}(x_2) \left[ (2B\bar{C}_M)^2 I_u^2 \hat{S}_{uu} + (BC'_M)^2 I_w^2 \hat{S}_{ww} \right] \\ &\quad + [\phi_{y_i}(x_1) \phi_{z_j}(x_2) + \phi_{z_i}(x_1) \phi_{y_j}(x_2)] \left[ 4\frac{D}{B} \bar{C}_D \bar{C}_L I_u^2 \hat{S}_{uu} + \left(\frac{D}{B} C'_D - \bar{C}_L\right) \left(C'_L + \frac{D}{B} \bar{C}_D\right) I_w^2 \hat{S}_{ww} \right] \\ &\quad + [\phi_{y_i}(x_1) \phi_{\theta_j}(x_2) + \phi_{\theta_i}(x_1) \phi_{y_j}(x_2)] \left[ 4\frac{D}{B} \bar{C}_D B \bar{C}_M I_u^2 \hat{S}_{uu} + \left(\frac{D}{B} C'_D - \bar{C}_L\right) BC'_M I_w^2 \hat{S}_{ww} \right] \\ &\quad \left. + [\phi_{z_i}(x_1) \phi_{\theta_j}(x_2) + \phi_{\theta_i}(x_1) \phi_{z_j}(x_2)] \left[ 4\bar{C}_L B \bar{C}_M I_u^2 \hat{S}_{uu} + \left(C'_L + \frac{D}{B} \bar{C}_D\right) BC'_M I_w^2 \hat{S}_{ww} \right] \right\} dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Ved å bruke sammenhengen fra ligning 2.12, kan følgende skrives

$$\hat{S}_{uu} = \text{Re}[S_{uu}(\Delta x, \omega)]/\sigma_u^2 = \frac{S_u(\omega)}{\sigma_u^2} \cdot \hat{C}_{o_{uu}}(\Delta x, \omega) \quad (2.64)$$

$$\hat{S}_{ww} = \text{Re}[S_{ww}(\Delta x, \omega)]/\sigma_w^2 = \frac{S_w(\omega)}{\sigma_w^2} \cdot \hat{C}_{o_{ww}}(\Delta x, \omega)$$

hvor  $\hat{C}_{o_{uu}}$  og  $\hat{C}_{o_{ww}}$  kan tilnærmes ved å bruke ligning 2.13.



## 2.5 Aerodynamisk instabilitet - flutter

Når middelvindhastigheten når en kritisk middelvindhastighet,  $V_{cr}$ , vil det bli instabilitet i systemet. Det er vanlig å dele denne instabiliteten inn i grupper, basert på årsaken til instabiliteten. En av disse årsakene kalles flutter. Dette er et dynamisk instabilitetsfenomen som oppstår som følge av kobling mellom svingeformer i vertikal retning og torsjon. Det er antatt at denne koblingen i all hovedsak skjer mellom den mest fleksible svingeformen i torsjon og den mest fleksible svingeformen i vertikal retning som har likest mulig form.

Dersom den aerodynamisk deriverte  $A_3^*$  er positiv og økende, vil en økning i vindhastigheten føre til en økning av den aerodynamiske stivheten i torsjon. Dette vil gi redusert total stivhet i denne retningen, og egenfrekvensen i torsjon,  $\omega_\theta(V)$ , reduseres.  $A_3^*$  er på denne formen dersom den deriverte av momentkoeffisienten med hensyn på vinkel,  $C'_M$ , er positiv. En liten rotasjon av brubanen vil da føre til ekstra moment fra vinden, som igjen vil forsøke å fortsette rotasjonsbevegelsen. Dette vil forsinke brua i å komme tilbake til likevektposisjonen sin, og torsjonssvingningene blir tregere. Som oftest er  $\omega_\theta(V = 0)$  større enn  $\omega_z(V = 0)$ . Da vil en reduksjon av egenfrekvensen i torsjon til slutt føre til at de to egenfrekvensene blir lik hverandre, og svingeformene er fullt koblet. For at resonans skal kunne oppstå, må i tillegg følgende ligning være tilfredsstillt

$$\det(\hat{\mathbf{E}}_\eta(\omega, V)) = 0 \quad (2.65)$$

hvor

$$\hat{\mathbf{E}}_\eta(\omega, V) = \hat{\mathbf{H}}_\eta^{-1}(\omega, V) = \mathbf{I} - \kappa_{ae} - \left( \omega \cdot \text{diag} \left[ \frac{1}{\omega_i} \right] \right)^2 + 2i\omega \cdot \text{diag} \left[ \frac{1}{\omega_i} \right] \cdot (\zeta - \zeta_{ae}) \quad (2.66)$$

Siden  $\det(\hat{\mathbf{E}}_\eta)$  som oftest vil inneholde komplekse tall, betyr det at følgende to ligninger samtidig må tilfredsstilles ved flutter

$$\text{Re}[\det(\hat{\mathbf{E}}_\eta(\omega, V))] = 0 \quad \text{og} \quad \text{Imag}[\det(\hat{\mathbf{E}}_\eta(\omega, V))] = 0 \quad (2.67)$$

Siden  $\kappa_{ae}$  og  $\zeta_{ae}$  er funksjoner av  $\omega_i(V)$ , kreves derfor en form for iterasjon i beregningene. Selbergs formel kan da eventuelt bli brukt som et første estimat for  $V_{cr}$

$$V_{cr} = 0.6B\omega_\theta \sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\omega_z}{\omega_\theta} \right)^2 \right] \frac{(\tilde{m}_z \tilde{m}_\theta)^{1/2}}{\rho B^3}} \quad (2.68)$$



# Kapittel 3

## Beregningsprogram i MATLAB

Fo å kunne gjennomføre et case-studium av Hardangerbrua, ble det utviklet et regneprogram i MATLAB. Dette kapitlet beskriver hva programmet regner ut, hvordan det utfører beregningen og hvilke forenklinger som er blitt gjort.

### 3.1 Funksjon

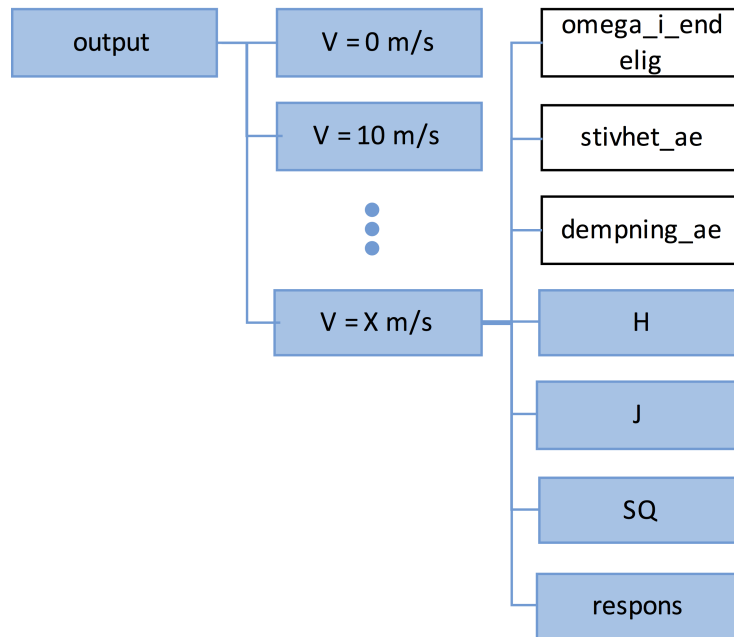
Programmet regner ut vindindusert respons for lange, slanke hengebruer basert på teorien definert i kapittel 2 og gitt inputdata. Mer spesifikt regner programmet ut responsmatrisen gitt i ligning 2.53, i tillegg til mellomverdiene aerodynamisk dempnings- og stivhetsmatrise,  $\zeta_{ae}$  og  $\kappa_{ae}$ , dynamisk forsterkningsmatrise,  $\hat{H}_\eta$ , samspillmatrise,  $\hat{J}^2$ , lastmatrise,  $S_{\hat{Q}}$ , og itererte egenfrekvenser,  $\omega_i(V)$ . Disse verdiene lagres i ”output”-mappen.

For å forklare hvordan programmet beregner og lagrer verdier, vil det være en del grafiske illustrasjoner i dette kapitlet. Fargekoder definert ved figur 3.1 vil bli brukt i det følgende.



**Figur 3.1:** Fargekoder for grafiske illustrasjoner.

”output”-mappen er inndelt som illustrert i figur 3.2. For hver middelvindhastighet,  $V$ , er det samme mappe- og filstruktur som vist for  $V = X$  m/s til høyre i figur 3.2.



**Figur 3.2:** Filstruktur av "output"-mappe.

## 3.2 Beregningsbeskrivelse

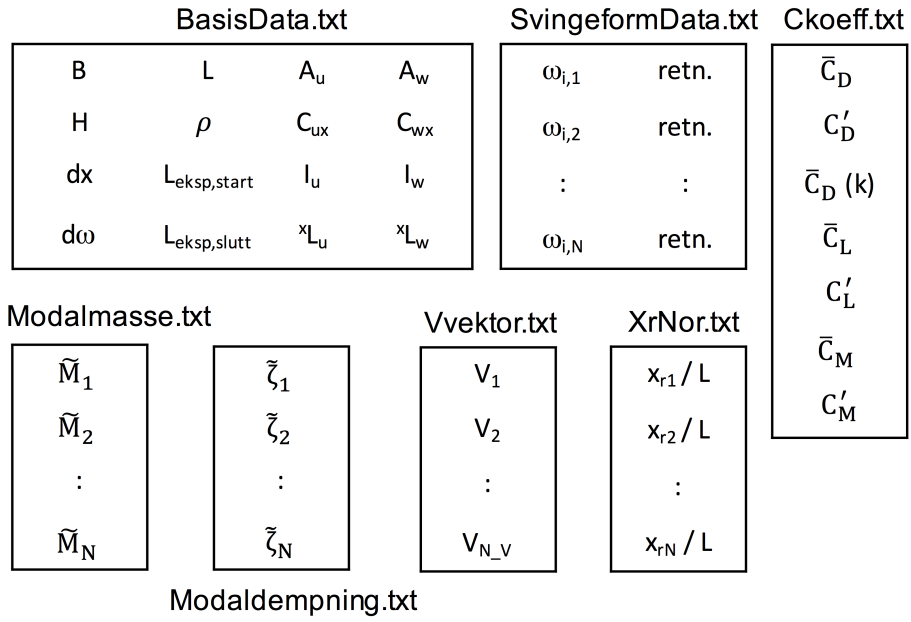
Det er to steg i bruken av beregningsprogrammet:

Steg 1: Definere bruas og vindens egenskaper i mappen "inputfiler" og i funksjonen "aeDerivert".

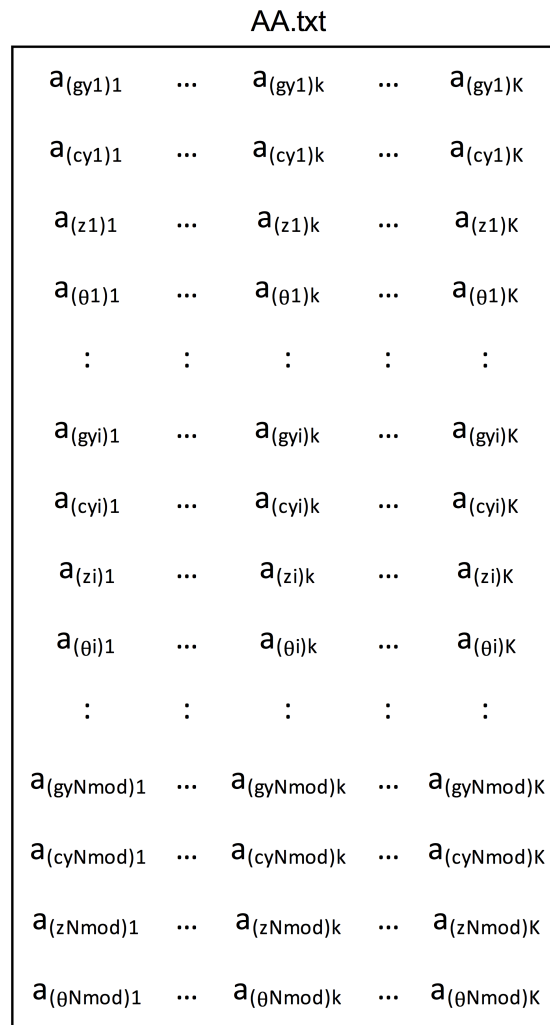
Steg 2: Kjøre scriptet "multimode\_beregning" som gjør alle beregninger og lagrer verdiene til "output"-mappen.

### 3.2.1 Steg 1: Definere bruas og vindens egenskaper

Først må bruas og vindens egenskaper defineres, samt hvilke middelvindhastigheter,  $V$ , og posisjoner langs bruspennet,  $x_r$ , beregningene skal utføres for. Samtlige egenskaper, bortsett fra de aerodynamisk deriverte, defineres i mappen "inputfiler". Denne består av 8 ulike tekstfiler, som vist i figurene 3.3 og 3.4. De aerodynamisk deriverte defineres direkte i funksjonen "aeDerivert".



**Figur 3.3:** Form på tekstfiler som gir generell input.

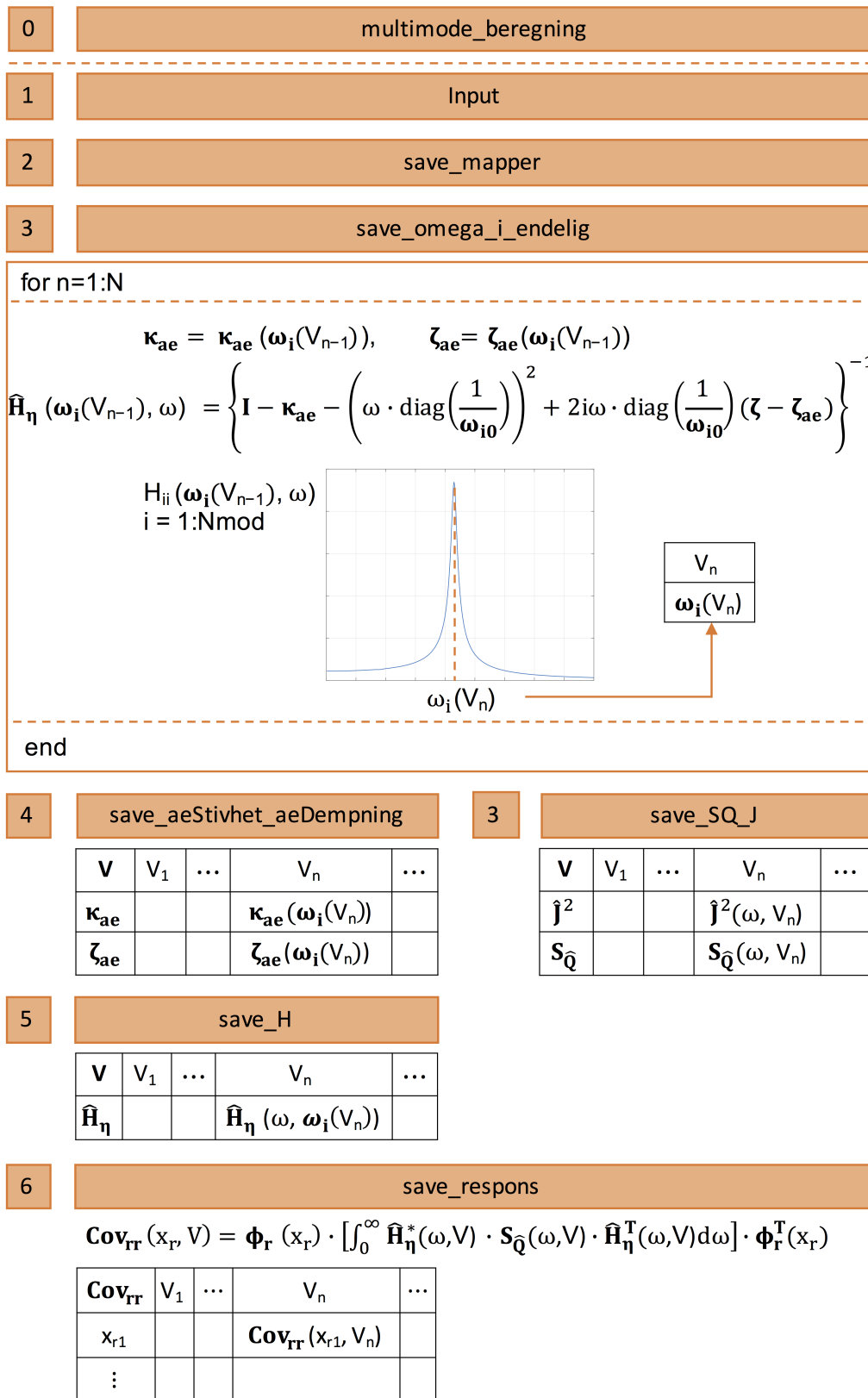


**Figur 3.4:** Form på tekstfilen som gir inputverdier til A-matrisen.

---

### 3.2.2 Steg 2: Kjøre "multimode\_beregning"-scriptet

Neste steg i prosessen er å kjøre scriptet "multimode\_beregning", som utfører alle beregninger og lagrer de beregnede verdiene i "output"-mappen. Figur 3.5 viser hvordan scriptet "multimode\_beregning" utfører beregningene med utdypende forklaring på etterfølgende sider.



**Figur 3.5:** Illustrasjon av hvordan scriptet ”multimode\_beregning” utfører responsberegningen.

$\omega_{i0}$  er egenfrekvensene ved middelvindhastighet,  $V$ , lik null.

---

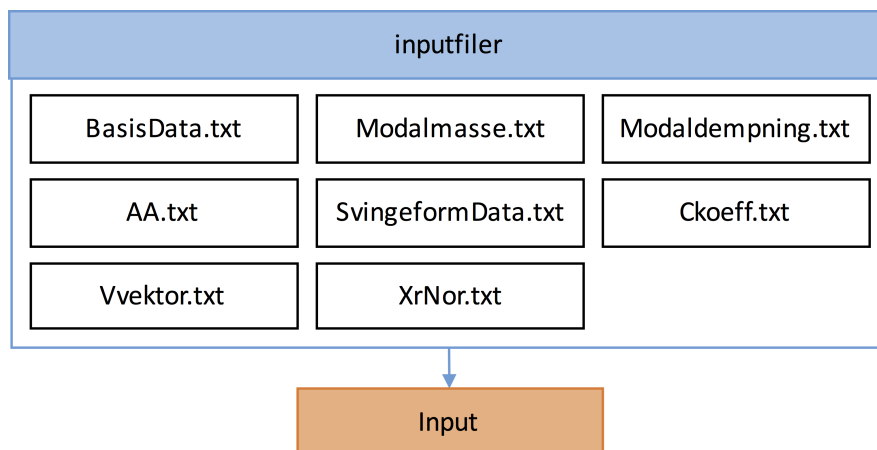
## 0 - multimode\_beregning

”multimode\_beregning”-scriptet består av 7 underscript, og kjører alle beregninger ved å bruke underscriptene i rekkefølgen illustrert ved figur 3.5. I tillegg til å lagre beregnede verdier for responsmatrisen, lagres også verdier for den aerodynamiske dempnings- og stivhetsmatrisen,  $\zeta_{ae}$  og  $\kappa_{ae}$ , den dynamiske forsterkningsmatrisen,  $\hat{H}_\eta$ , samspillmatrisen,  $\hat{J}^2$ , lastmatrisen,  $S_{\hat{Q}}$ , og de itererte egenfrekvensene,  $\omega_i(V)$ , som txt.-filer i ”output”-mappen.

Rekkefølgen på scriptene, illustrert ved tallene i figur 3.5, er vital, ettersom de bruker verdier som foregående script har beregnet og lagret. Den enkleste måten å bruke dette programmet på, er derfor å kjøre hovedscriptet, ”multimode\_beregning”, da det inneholder alle underscriptene i riktig rekkefølge.

En variabeloversikt som viser sammenhengen mellom variablene i MATLAB-scriptene og teorien er gitt i delkapittel 3.4.

## 1 - input



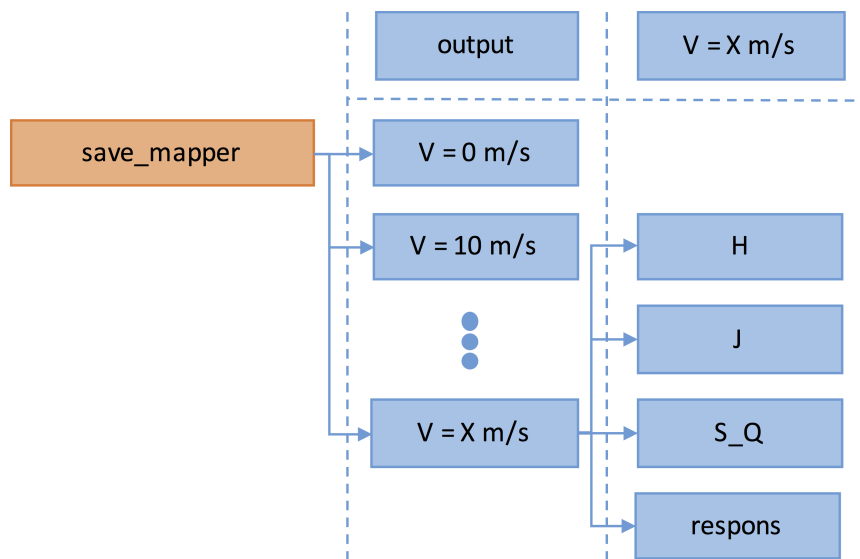
**Figur 3.6:** Oversikt over hvilke txt.-filer som lastes inn i MATLAB av scriptet ”Input”.

Som illustrert i figur 3.6, laster ”Input”-scriptet inn txt.-filene fra mappen ”inputfiler” og organiserer dem inn i MATLAB-variabler. Disse brukes videre av de andre scriptene.



---

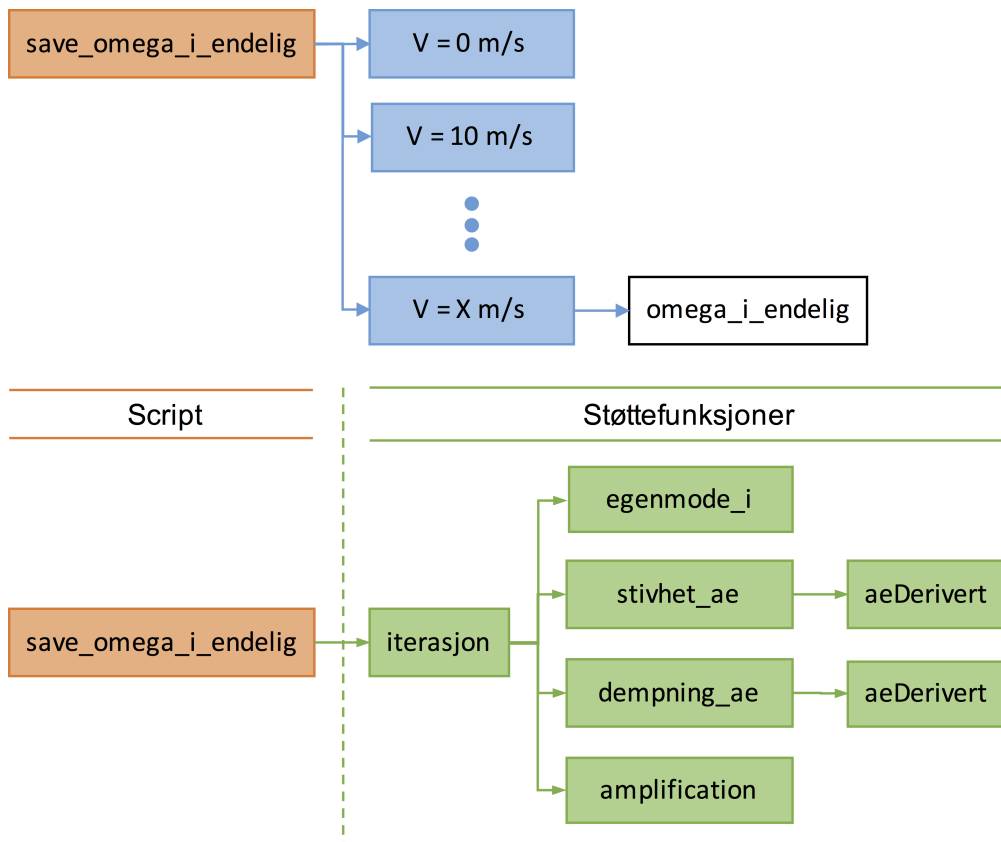
## 2 - save\_mapper



**Figur 3.7:** Illustrasjon av hvordan scriptet "save\_mapper" lager mappestrukturen.

"savemapper"-scriptet produserer mappene som er illustrert i figur 3.7. "output"-mappen må eksistere før dette scriptet kjører. Hvilke middelvindhastigheter,  $V$ , beregningen kjøres for, blir definert i inputfilen "Vvektor".

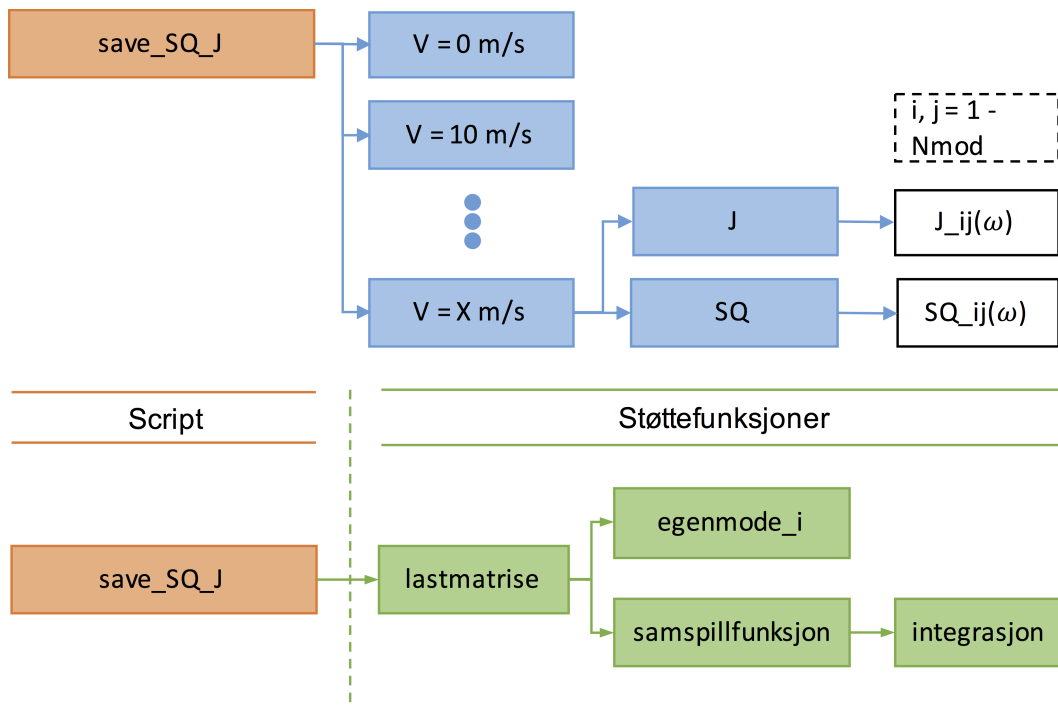
### 3 - save\_omega\_i\_endelig



**Figur 3.8:** Illustrasjon av hvordan scriptet "save\_omega\_i\_endelig" lagrer de itererte egenfrekvensene, samt hvilke støttefunksjoner det bruker.

Dette scriptet lagrer itererte egenfrekvenser for hver  $V$  i txt.-filen "omega\_i\_endelig".  $\omega_i$  fra foregående middelvindhastighet brukes til å regne ut  $\omega_i$  for neste middelvindhastighet. Hvis "Vvektor" er bestemt til [10 20 30 40 50], brukes for eksempel  $\omega_i$  fra middelvindhastighet lik 20 for å regne ut den itererte verdien av  $\omega_i$  for middelvindhastighet lik 30. Iterasjonsprosessen er illustrert ved figur 3.5.

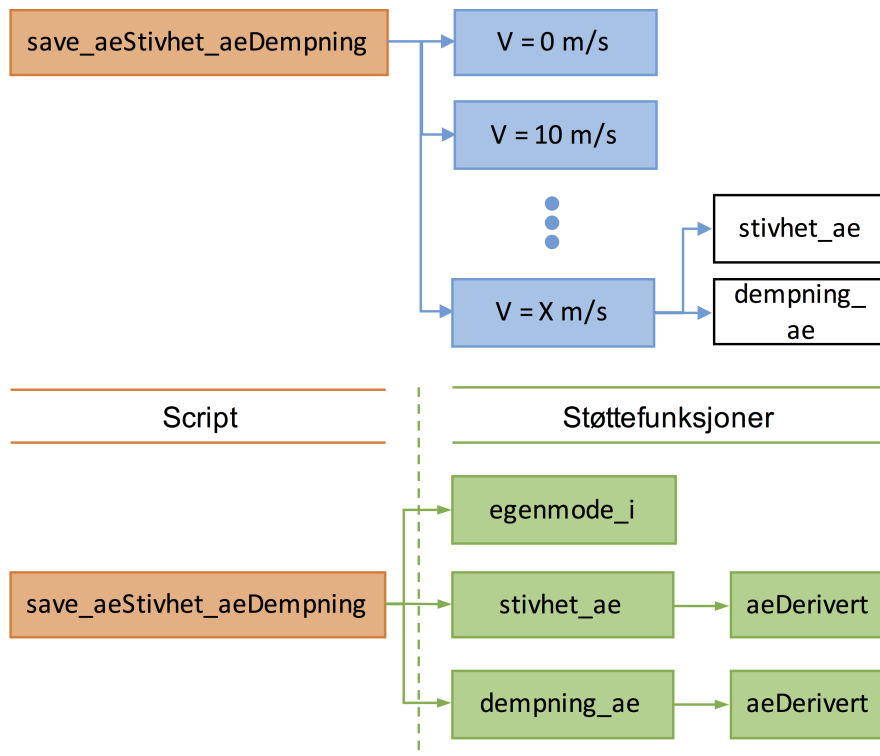
### 3 - save\_SQ\_J



**Figur 3.9:** Illustrasjon av hvordan scriptet "save\_SQ\_J" lagrer samspill- og lastmatrisen, samt hvilke støttefunksjoner det bruker.

Dette scriptet beregner den normaliserte samspillmatrisen,  $\hat{J}^2$ , og lastmatrisen,  $S_Q$ , for alle valgte middelvindhastigheter,  $V$ , og lagrer verdiene i txt.-filer som vist i figur 3.9. Dette scriptet er uavhengig av script 4 og 5.

#### 4 - save\_aeStivhet\_aeDempning

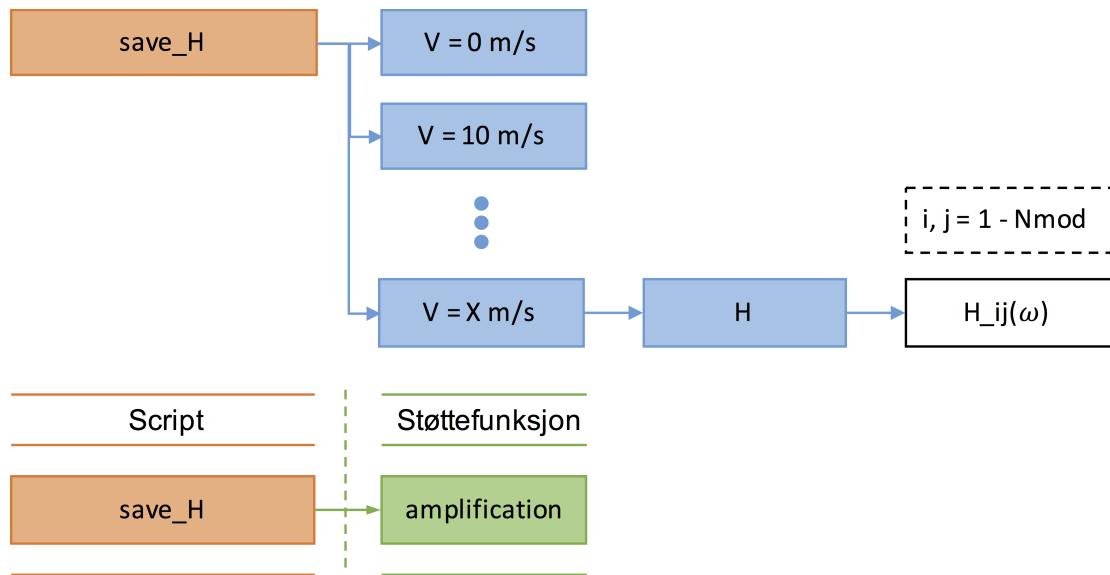


**Figur 3.10:** Illustrasjon av hvordan scriptet ”save\_aeStivhet\_aeDempning” lagrer endelig aerodynamisk dempnings- og stivhetsmatrise, samt hvilke støttefunksjoner det bruker.

”save\_aeStivhet\_aeDempning” beregner matrisen for aerodynamisk stivhet og dempning, henholdsvis  $\kappa_{ae}$  og  $\zeta_{ae}$ , for valgte middelvindhastigheter,  $V$ , og lagrer verdiene i txt.-filer som illustrert i figur 3.10.

For å regne ut stivhets- og dempningsmatriser brukes de itererte egenfrekvensene,  $\omega_i$ . De itererte egenfrekvensene går inn i egenfrekvensforholdet,  $\frac{\omega_i(V)}{\omega_i}$ , og i de aerodynamisk deriverte A1-A4( $\omega_i(V)$ ) og H1-H4( $\omega_i(V)$ ) i uttrykkene for aerodynamisk stivhet og dempning.

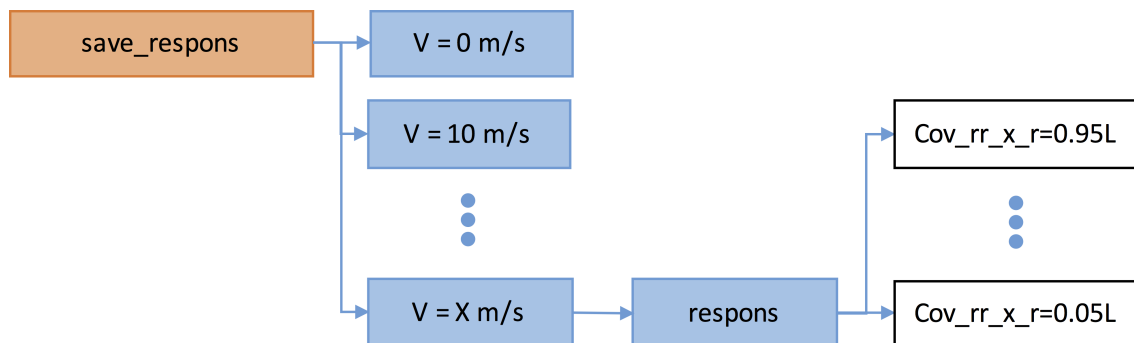
## 5 - save\_H



**Figur 3.11:** Illustrasjon av hvordan scriptet "save\_H" lagrer den endelige dynamiske forsterkningsmatrisen, samt hvilke støttefunksjoner det bruker.

Dette scriptet beregner den dynamiske forsterkningsmatrisen,  $\hat{H}_\eta$ , for alle valgte middelvindhastigheter,  $V$ , og lagrer verdiene i txt.-filer som vist i figur 3.11. Scriptet importerer allerede lagrede verdier for aerodynamisk stivhet og demping,  $\kappa_{ae}$  og  $\zeta_{ae}$ , og bruker disse verdiene for å regne ut den dynamiske forsterkningsmatrisen.

## 6 - save\_respons



**Figur 3.12:** Illustrasjon av hvordan scriptet "save\_respons" lagrer den endelige responsen, samt hvilke støttefunksjoner det bruker.

Dette scriptet beregner responsmatrisen,  $Cov_{rr}(x_r)$ , for alle valgte posisjoner langs bruspenet,  $x_r$ . Scriptet importerer allerede beregnede verdier for den dynamiske forsterkningsmatrisen,  $\hat{H}_\eta$ , og lastmatrisen,  $S_Q$ . Scriptet bruker disse importerte verdiene til å beregne responsmatrisen for alle valgte middelvindhastigheter,  $V$ , og lagres i txt.-filer som vist i figur 3.12.

---

### 3.3 Forenklinger

For å øke hastigheten til beregningene, er det gjort enkelte forenklinger i kodingen av programmet.

#### Aerodynamiske deriverte

Programmet tillater følgende aerodynamisk deriverte:  $H_1^* - H_4^*$ ,  $A_1^* - A_4^*$ , samt de kvasistatiske aerodynamisk deriverte  $P_1^* - P_6^*$ . Det er dermed ikke lagt til rette for at leddene i aerodynamisk stivhet og dempning som hører til de aerodynamisk deriverte  $H_5^*$ ,  $H_6^*$ ,  $A_5^*$ , og  $A_6^*$  kan være med i beregningen. Det er dog ikke store endringer som skal til for å tilpasse programmet, slik at de likevel blir inkludert.

#### Egenfrekvens og svingformer

Det tillates kun én retning, enten vertikalt, horisontalt eller i torsjon, per svingform. I inputfilen "SvingformData" må det spesifiseres hvilken retning hver svingform har. Grunnen til dette, er at støttestrukturfunksjonene "stivhet\_ae" og "dempning\_ae" vil da kun inneholde ett ledd om gangen, og programmet kjøres raskere. Det samme gjelder for støttestrukturfunksjonen "samspillfunksjon".

### 3.4 Variabeloversikt

Navn i MATLAB	Symbol	Kommentar
AA		A-matrisen som inneholder amplitudene fra AA.txt
omega_i_V0	$\omega_i(V = 0)$ eller $\omega_{i0}$	Vektor som inneholder egenfrekvensene til de forskjellige svingformene ved $V = 0$
omega_i_endelig	$\omega_i(V)$	Iterert egenfrekvensvektor for gitt fart $V$
zeta	$\zeta$	Modal dempningsmatrise for $V = 0$
L	$L$	Lengde av bruspenet
L_eksp_start	$L_{eksp,start}$	Definerer startsted for brua eksponert for vind
L_eksp_slutt	$L_{eksp,slutt}$	Definerer sluttsted for brua eksponert for vind
V	$V$	Middelvindhastighet

rho	$\rho$	Luftdensitet
I_u (I_w)	$I_u (I_w)$	Vindintensitet
C_Ds (C_Dd)	$\bar{C}_D (C'_D)$	Gjennomsnittlig (derivert) dragkoeff.
C_Ls (C_Ld)	$\bar{C}_L (C'_L)$	Gjennomsnittlig (derivert) løftkoeff.
C_Ms (C_Md)	$\bar{C}_M (C'_M)$	Gjennomsnittlig (derivert) momentkoeff.
dx (domega)	$dx (d\omega)$	Intervall for integrasjon
x	$x$	Inndeling av bruspennet
x_r	$x_r$	De normaliserte x-verdiene der responseren ønskes beregnet
B	$B$	Bredde av brutverrsnittet
H	$D$	Høyde av brutverrsnittet
C_ux (C_wx)	$C_{ux} (C_{wx})$	Parameter for normalisert kospekteret
A_u (A_w)	$A_u (A_w)$	Parameter for kaimalspektrum
xL_u (xL_w)	$x_f L_u (x_f L_w)$	Lengdeskalaen for integralet av turbulenskomponentene
phi	$\Phi$	Svingformmatrise
phi_ny	$\Phi_{rr}(x_r)$	Svingformmatrise for valgt $x = x_r$
phi_i (phi_j)	$\phi_i (\phi_j)$	Svingform nr. i (nr. j)
m	$\tilde{m}$	Den jevnt fordelte modale massevektoren
V_red	$V_{red}$	Den reduserte vindhastigheten
alpha_L (alpha_M)	$\alpha_M (\alpha_L)$	Konstanter for beregning av aerodynamisk deriverte
beta_L (beta_M)	$\beta_M (\beta_L)$	Konstanter for beregning av aerodynamisk deriverte
AD	$H_1^* - H_4^*, A_1^* - A_4^*, P_1^* - P_6^*$	Aerodynamisk deriverte
kappa_ae	$\kappa_{ae}$	Aerodynamisk stivhetsmatrise
zeta_ae	$\zeta_{ae}$	Aerodynamisk dempningsmatrise
omega	$\omega$	Vindens og bruas svingfrekvens

---

Jhatt	$\hat{J}_{ij}^2$	Normalisert samspillfunksjon for svingeform i og j
J	$\hat{J}^2$	Normalisert samspillmatrise
SQ	$S_Q$	Lastmatrise
H_amp	$\hat{H}_\eta$	Dynamisk forsterkningsmatrise
Cov_rr	$Cov_{rr}$	Responsmatrise

**Tabell 3.1:** Sammenheng mellom variabler brukt i MATLAB og variabler brukt i teksten.



# Kapittel 4

## Case-studium: Hardangerbrua



**Figur 4.1:** Bilde av Hardangerbrua [4].

Hardangerbrua ble åpnet i 2013 og er Norges lengste hengebru [1]. I slanke konstruksjoner som dette vil den dynamiske responsen være en viktig faktor. Det vil bli fokusert på effekter knyttet til kobling av svingeformer mellom vertikal retning og torsjon. Ved å ta utgangspunkt i buffeting, blir responsen studert ved høye middelvindhastigheter og det diskuteres hva som fører til instabilitet.

### 4.1 Bruas egenskaper

Hovedspennet på brua er 1310 meter og henger 50 meter over vannflaten. Brukassen er en lukket stålkasse og har en høyde på 3.25 meter og bredde på 18.3 meter. Siden den er tilnærmet

dobbelsymmetrisk vil skjærsenteret sammenfalle med sentroiden til brua, slik at hver svingform består av kun én retningskomponent. Brukassen har også påmontert ledeskovler for å hindre virvelavløsningsvingninger [5]. Lastkoeffisientdataen som blir brukt i beregningene er  $C'_L = 2.5$  og  $C'_M = 0.8$ . De resterende er satt lik null. Det er ikke sett på vindens påvirkning på kablene, men kablens bidrag til stivhet av brua er inkludert i beregningen av egenfrekvensene.

#### 4.1.1 Svingeformdata

Svingeformdataene til brua er gitt i tabell 4.1. Egenfrekvensene,  $\omega_i$ , gjelder ved middelvindhastighet lik null.

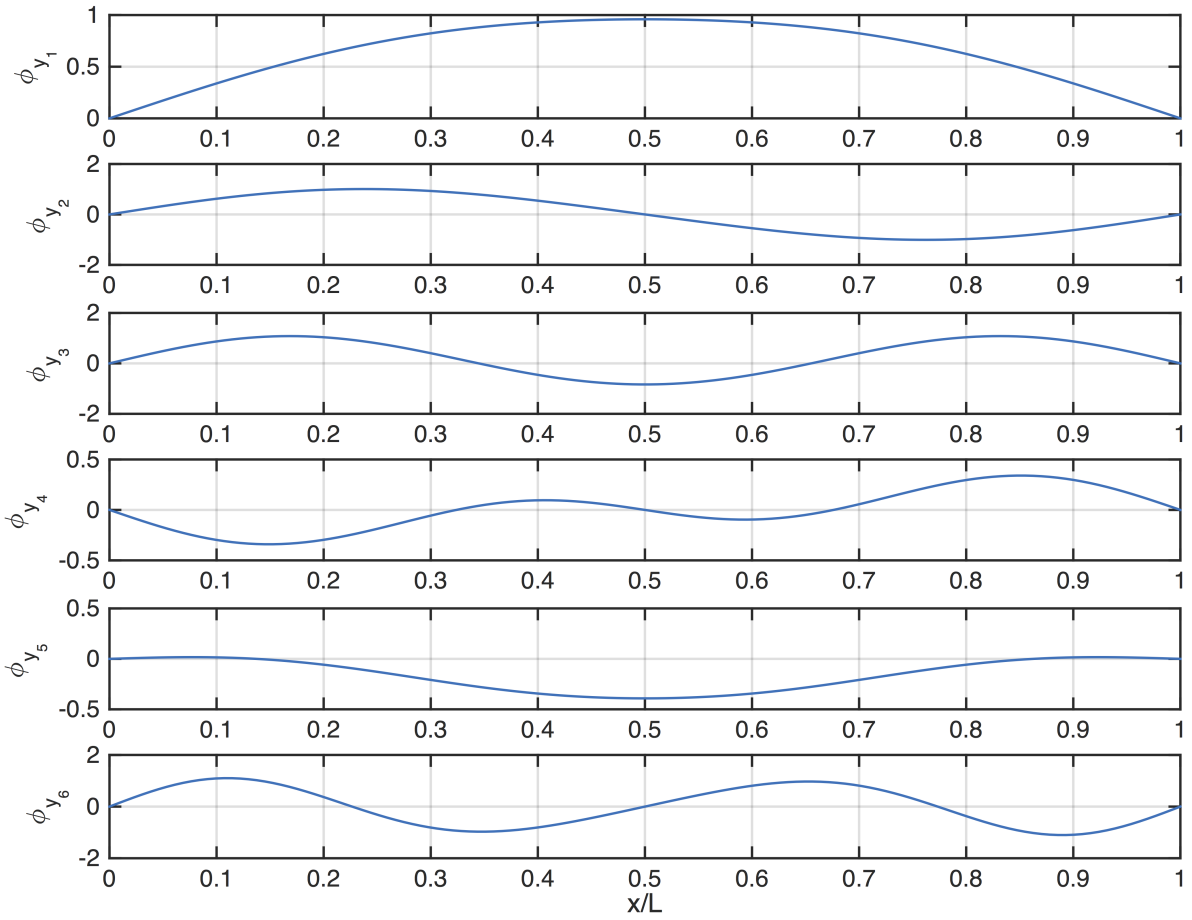
Svingeform	Retning	$\tilde{m}_i$	$\omega_i$	$\zeta_i$
1	y	12199	0.32	0.005
2	y	10090	0.64	0.0052
3	z	12937	0.71	0.005
4	z	12937	0.9	0.0051
5	y	10284	1.11	0.0062
6	z	12937	1.27	0.0058
7	z	12937	1.36	0.006
8	y	59547	1.56	0.0079
9	y	73761	1.66	0.0084
10	z	12937	1.76	0.0077
11	y	10885	1.95	0.01
12	z	12937	2.14	0.01
13	$\theta$	427243	2.25	0.005
14	$\theta$	427243	3.49	0.0052
15	$\theta$	427243	5.28	0.0063
16	$\theta$	427243	7.00	0.0083
17	$\theta$	427243	8.76	0.0112
18	$\theta$	427243	10.50	0.015

**Tabell 4.1:** Svingeformdataene til Hardangerbrua [6].

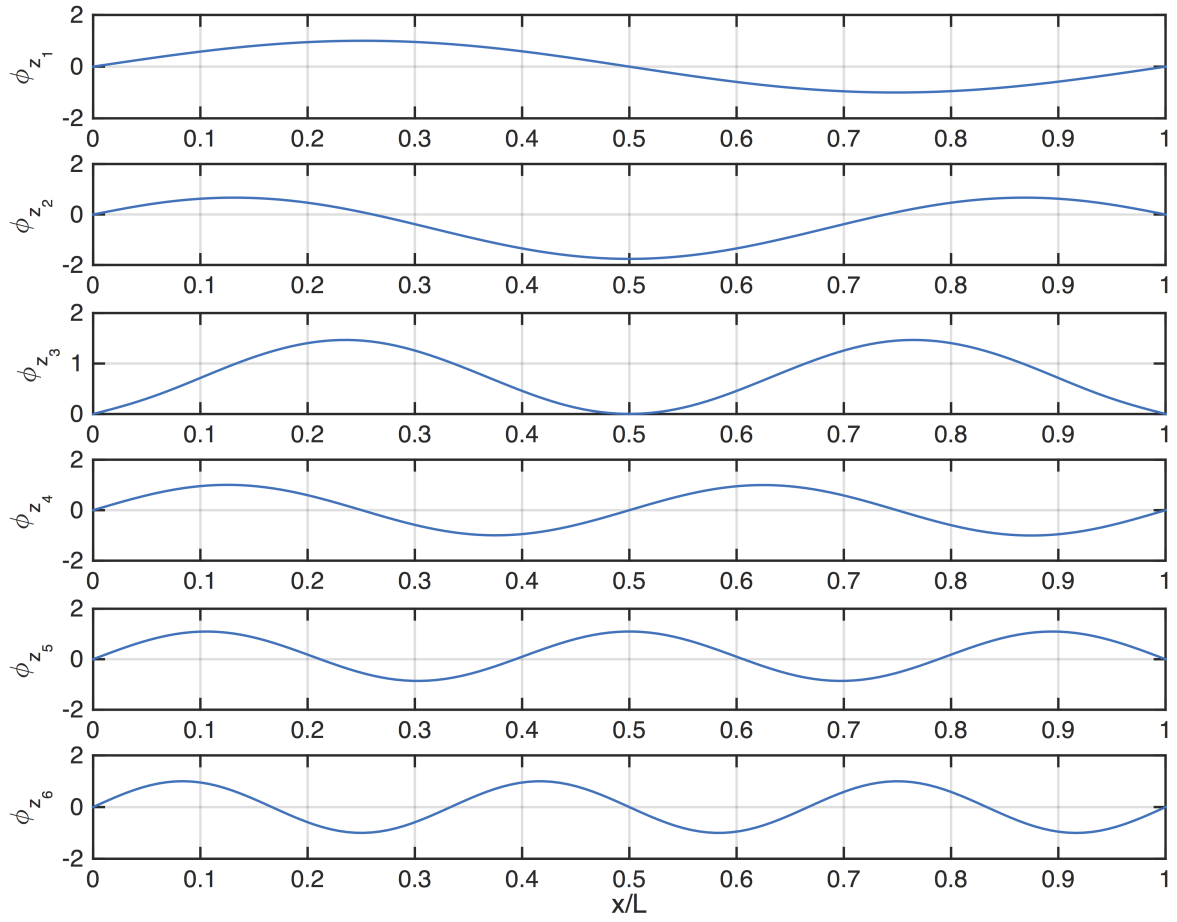
Svingeform nr.  $i$  til brubjelken er definert ved

$$\phi_i = \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} a_{y_k} \\ a_{z_k} \\ a_{\theta_k} \end{bmatrix} \cdot \sin(k\pi\hat{x}) \quad (4.1)$$

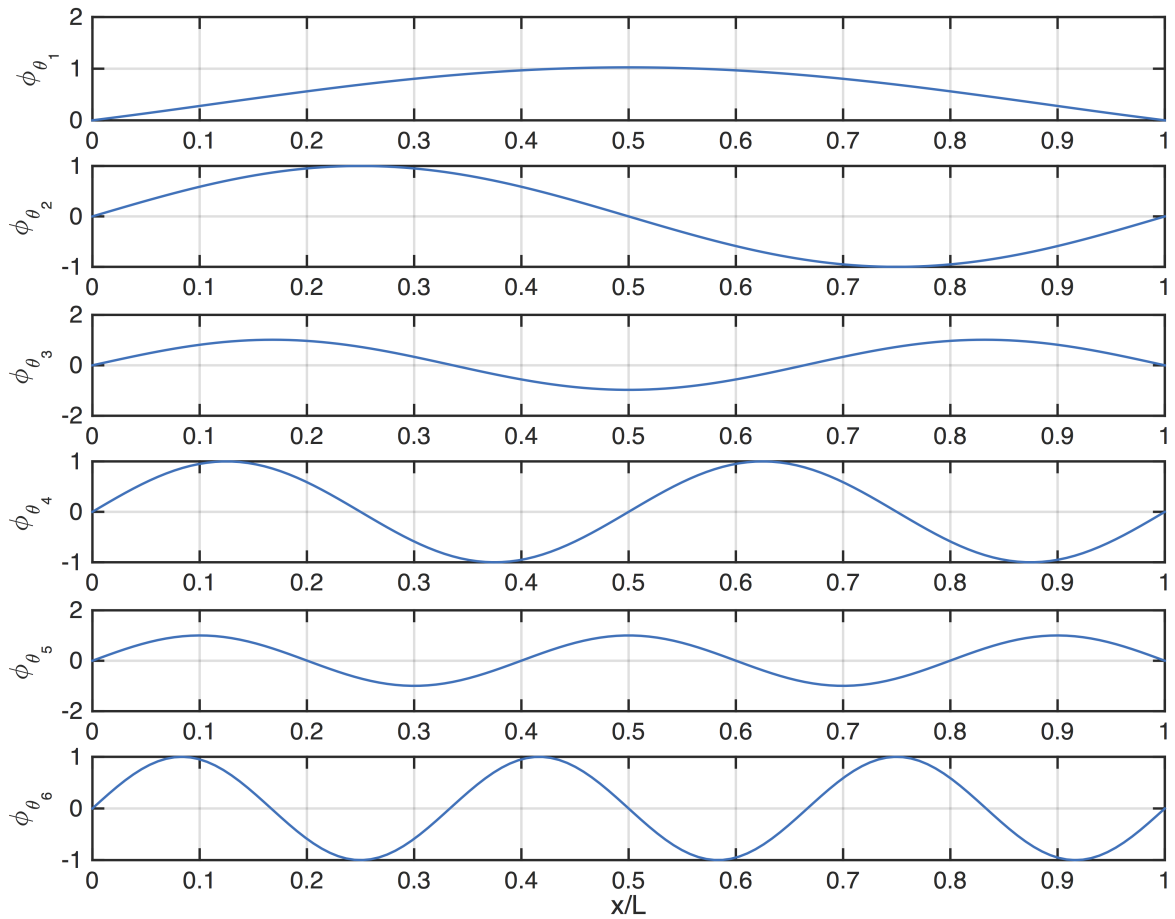
hvor  $\hat{x} = x/L$  er den normaliserte posisjonen langs lengdeaksen og  $a_{y_k}$ ,  $a_{z_k}$  og  $a_{\theta_k}$  er fourieramplituder. Den originale A-matrisen som inneholder fourieramplitudene til svingeformene, viser at svingeformene 1, 2, 5, 8, 9 og 11 har utslag i horisontal retning, svingeformene 3, 4, 6, 7, 10 og 12 har utslag i vertikal retning, mens svingeformene 13-18 har utslag i torsjon. Samtlige svingeformer er vist i figurene som følger.



**Figur 4.2:** Svingformer i horisontal retning.



**Figur 4.3:** Svingeformer i vertikal retning.



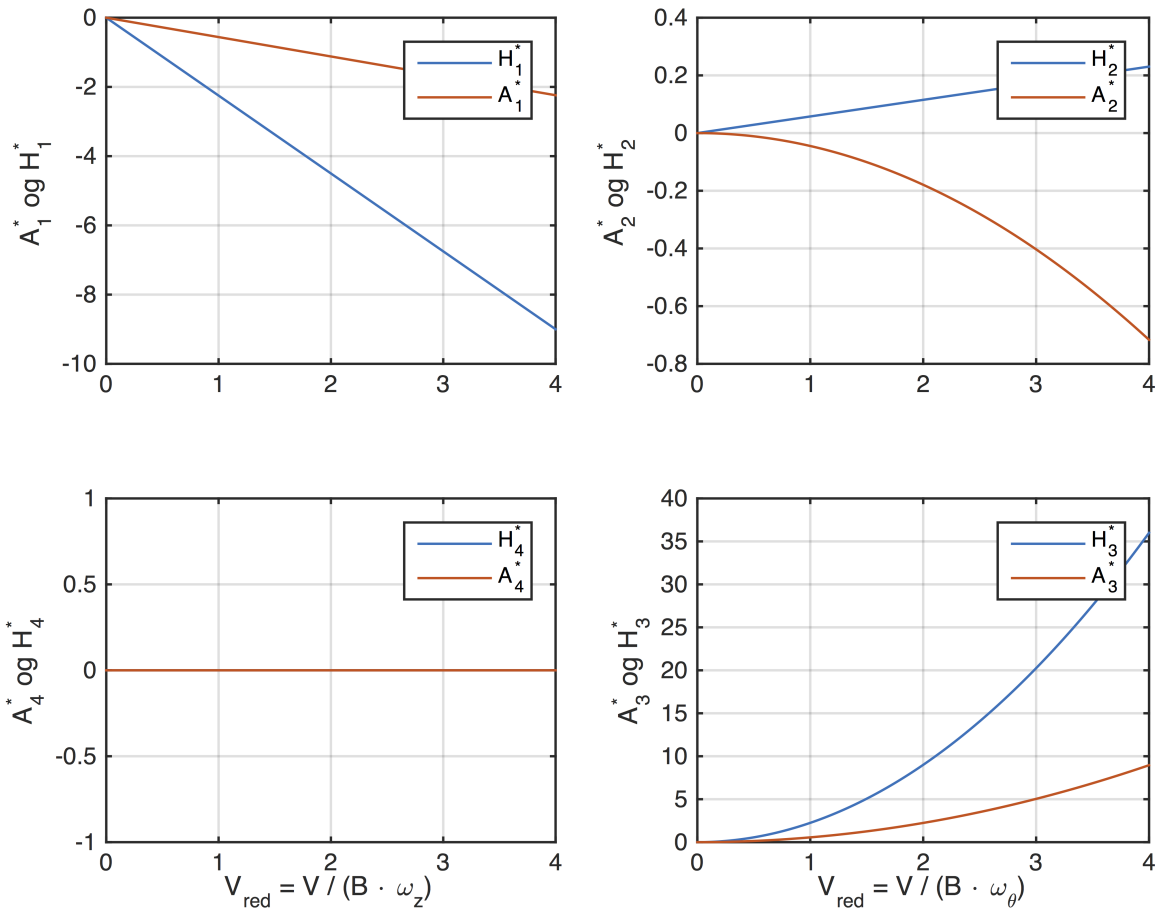
**Figur 4.4:** Svingformer i torsjon.

## 4.1.2 Aerodynamisk deriverte

Følgende funksjoner av de aerodynamisk deriverte er blitt tatt i bruk [6].

$$\begin{bmatrix} H_1^* \\ H_2^* \\ H_3^* \end{bmatrix} = \alpha_L C'_L \begin{bmatrix} -\hat{V}_z \\ \beta_L \hat{V}_\theta \\ \hat{V}_\theta^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ A_3^* \end{bmatrix} = \alpha_M C'_M \begin{bmatrix} -\hat{V}_z \\ q - \beta_L \hat{V}_\theta^2 \\ \hat{V}_\theta^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} H_4^* & A_4^* \\ H_5^* & A_5^* \\ H_6^* & A_6^* \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

hvor  $\alpha_L = 0.9$ ,  $\alpha_M = 0.7$ ,  $\beta_M = 0.4$ ,  $\beta_L = 0.16$ ,  $\hat{V}_z = V/[B\omega_z(V)]$  og  $\hat{V}_\theta = V/[B\omega_\theta(V)]$ . Dette gir følgende grafer, vist i figuren under



Figur 4.5: Aerodynamisk deriverte.

Her er  $H_1^*$  og  $A_1^*$  normalisert på den andre svingeformen i vertikal retning, mens  $H_2^*$ ,  $H_3^*$ ,  $A_2^*$  og  $A_3^*$  er normalisert på den første svingeformen i torsjon. Å bruke disse aerodynamisk deriverte for andre svingeformer enn de nevnte, vil være av diskutabel gyldighet.

### 4.1.3 Responen i horisontal retning er ukoblet med responen i vertikal retning og torsjon

Responen i horisontal retning er både upåvirket av, og påvirker ikke, responen i de to andre retningene for Hardangerbrua. Dette gjelder også for andre bruer hvor tverrsnittet kan tilnærmes som flat plate, og hvor de aerodynamisk deriverte  $P_2^*$ ,  $P_3^*$ ,  $P_5^*$ ,  $P_6^*$ ,  $A_5^*$ ,  $A_6^*$ ,  $H_5^*$  og  $H_6^*$  er lik null. Utledningen for dette følger i dette delkapittelet.

For argumentets skyld sees det på et enkelt tilfelle med 3 svingeformer. Første svingeformen er i horisontal retning, andre svingeformen er i vertikal retning og tredje svingeformen er i torsjon. Responsens varians i horisontal retning er da uttrykt ved

$$\sigma_{r_1 r_1}^2(x_r) = \phi_1^2(x_r) \cdot \int_0^\infty \left[ \begin{array}{l} H_{11} \cdot (H_{11}^* \cdot S_{\hat{Q}_{11}} + H_{12}^* \cdot S_{\hat{Q}_{21}} + H_{13}^* \cdot S_{\hat{Q}_{31}}) \\ + H_{12} \cdot (H_{11}^* \cdot S_{\hat{Q}_{12}} + H_{12}^* \cdot S_{\hat{Q}_{22}} + H_{13}^* \cdot S_{\hat{Q}_{32}}) \\ + H_{13} \cdot (H_{11}^* \cdot S_{\hat{Q}_{13}} + H_{12}^* \cdot S_{\hat{Q}_{23}} + H_{13}^* \cdot S_{\hat{Q}_{33}}) \end{array} \right] d\omega \quad (4.3)$$

hvor

$$H_{11} = \frac{1}{E_{11}}, \quad H_{11}^* = \left(\frac{1}{E_{11}}\right)^*, \quad H_{12} = H_{12}^* = 0, \quad H_{13} = H_{13}^* = 0 \quad (4.4)$$

fordi  $\kappa_{ae12}$ ,  $\kappa_{ae13}$ ,  $\zeta_{ae12}$  og  $\zeta_{ae13}$  er null som følge av at de aerodynamiske deriverte  $P_2^*$ ,  $P_3^*$ ,  $P_5^*$  og  $P_6^*$  er lik null. Dermed kan responsens varians i horisontal retning fra ligning 4.3 skrives

$$\sigma_{r_1 r_1}^2(x_r) = \phi_1^2(x_r) \cdot \int_0^\infty (H_{11} \cdot H_{11}^* \cdot S_{\hat{Q}_{11}}) d\omega = \phi_1^2(x_r) \cdot \int_0^\infty \left(\frac{1}{E_{11}} \cdot \left(\frac{1}{E_{11}}\right)^* \cdot S_{\hat{Q}_{11}}\right) d\omega \quad (4.5)$$

hvor  $E_{11}$  er uttrykt ved

$$E_{11} = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 - \kappa_{ae11} + 2i \cdot \frac{\omega}{\omega_1} \cdot (\zeta_{11} - \zeta_{ae11}) \quad (4.6)$$

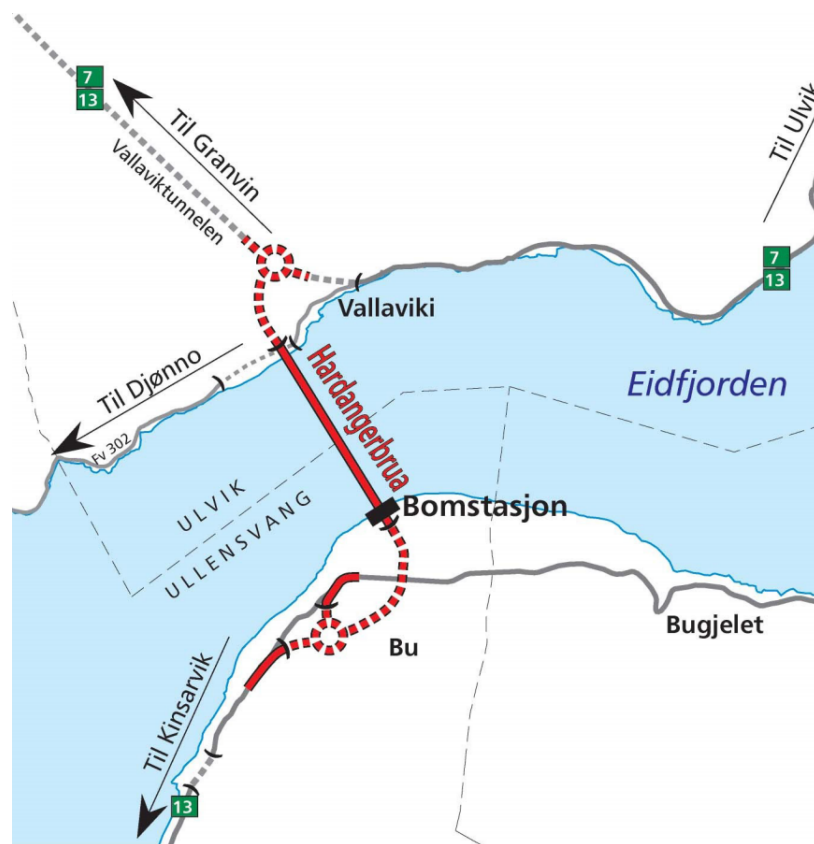
Det vil si at responsens varians i horisontal retning kun er påvirket av aerodynamisk stivhet og dempning samt lastmatrisen i denne retningen. Tilsvarende argument fører til at  $\sigma_{r_z r_z}^2$  og  $\sigma_{r_\theta r_\theta}^2$  er uavhengig av horisontal retning som følge av at de aerodynamiske deriverte  $A_5^*$ ,  $A_6^*$ ,  $H_5^*$  og  $H_6^*$  er lik null. Derfor burde også kovariansene,  $Cov_{r_y r_z} = Cov_{r_z r_y}$  og  $Cov_{r_y r_\theta} = Cov_{r_\theta r_y}$ , være lik null. Dette sjekkes også matematisk ved å implementere uttrykkene fra ligning 4.4 inn i uttrykket for kovariansen mellom  $r_y$  og  $r_z$

$$Cov_{r_1 r_2}(x_r) = \phi_1(x_r) \cdot \phi_2(x_r) \cdot \int_0^\infty H_{11}^* \cdot (H_{22} \cdot S_{\hat{Q}_{12}} + H_{23} \cdot S_{\hat{Q}_{13}}) d\omega \quad (4.7)$$

For en flat plate vil  $C'_D$ ,  $\bar{C}_L$  og  $\bar{C}_M$  være lik null [2]. Siden tverrsnittet til Hardangerbrua kan tilnærmes en flat plate, settes derfor de nevnte lastkoeffisientene lik null. Det betyr at  $S_{\hat{Q}_{12}}$  og  $S_{\hat{Q}_{13}}$  er lik null, og dermed er kovariansen mellom  $r_y$  og  $r_z$  lik null,  $Cov_{r_y r_z} = 0$ . Tilsvarende vil gjelde for kovariansen mellom  $r_y$  og  $r_\theta$ ,  $Cov_{r_y r_\theta}$ . Videre i denne oppgaven vil derfor horisontal retning ikke bli tatt med i beregningene. Svingeformer i vertikal retning og torsjon vil derimot koble seg med hverandre, og effekten av dette studeres nærmere i resten av oppgaven.

## 4.2 Vindens egenskaper

Resultatene framstilt i denne oppgaven forutsetter et stasjonært, homogent vindfelt hvor hovedretningen til vinden står vinkelrett på lengdeaksen til brua og er konstant over høyden,  $z_f$ , til brukassen. Det er også antatt at hele bruspenet er påkjent av vind, altså at  $L_{ek,sp}$  er lik  $L$ . Som figur 4.1 illustrerer, ser dette ut til å være en god antagelse. Det kan også argumenteres for at vinden har minst motstand langs med fjorden og dermed at hovedvindretningen vil være i denne retningen. Siden brua ligger 90 grader på fjordretningen, som figur 4.6 viser, indikerer det at hovedvindretningen står normalt på bruas lengdeakse. Brukassens høyde på 3.25 meter er også liten sammenlignet med bruas høyde over havet på 50 meter. At vindhastigheten ikke varierer over høyden av tverrsnittet, burde derfor også være en god tilnærming.



Figur 4.6: Kart over området [7].

De varierende vindhastighetene  $u(x, t)$  og  $w(x, t)$ , i henholdsvis hovedvindretningen og den vertikale retningen, antas også betraktelig mindre enn den gjennomsnittlige vindhastigheten,  $V$ . Målinger har vist at de fluktuerende komponentene er maksimalt  $u = 0.14$  m/s og  $w = 0.07$  m/s, mens dimensjonerende middelvindhastighet for brua er 42 m/s [6]. De fluktuerende komponentene er altså under 1 % sammenlignet med den dimensjonerende middelvindhastigheten. Antagelsen ser derfor ut til å stemme godt.



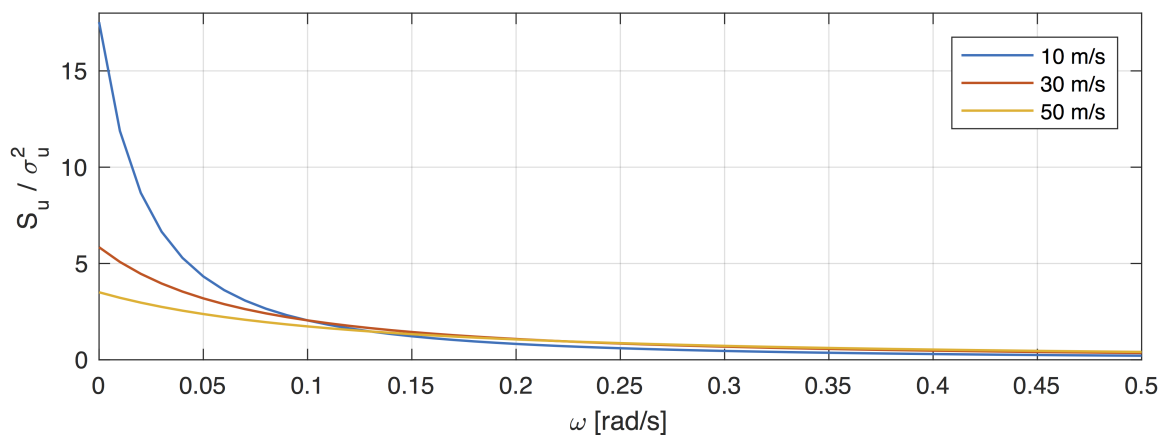
Luftdensitet	$\rho$	1.25 kg/m <sup>3</sup>
Vindintensitet	$I_u$	0.16
Vindintensitet	$I_w$	0.08
Skalar lengde for integrasjon	${}^x L_u = 100 \cdot (z_f/10)^{0.3}$	162 m
Skalar lengde for integrasjon	${}^x L_w = {}^x L_u/12$	13.5 m
Parameter for kaimalspektrum	$A_u$	1.08
Parameter for kaimalspektrum	$A_w$	1.5
Parameter for normalisert kospekter	$C_{ux}$	1.4
Parameter for normalisert kospekter	$C_{wx}$	1

**Tabell 4.2:** Vinddata for området rundt Hardangerbrua [6].

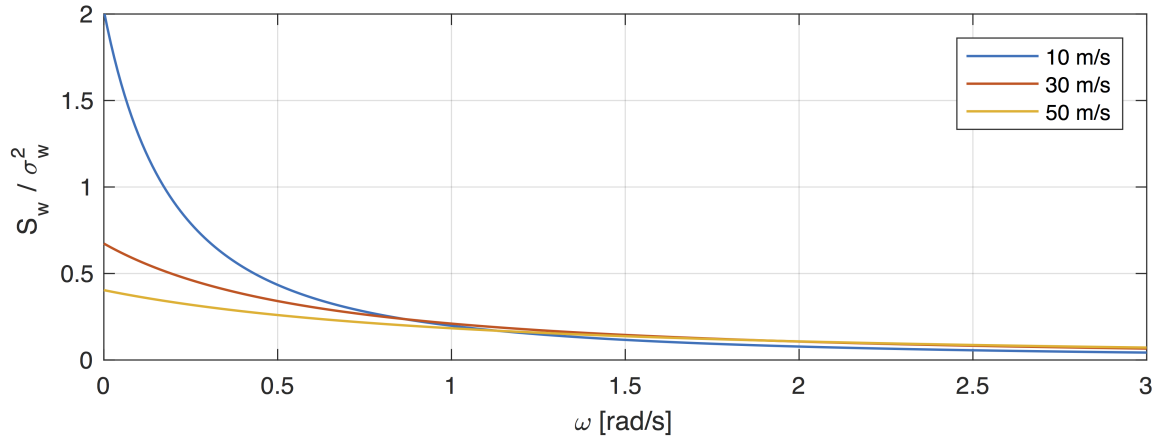
Ved å ta i bruk data gitt i tabell 4.2, kan spektraltettheten normalisert på variansen til vindturbulensen (ligning 4.8) plottes mot  $\omega$  for ulike  $V$ .

$$\frac{S_n(\omega)}{\sigma_n^2} = \frac{A_{n\omega} \cdot {}^x L_n/V}{(1 + 1.5 \cdot A_{n\omega} \cdot \omega \cdot {}^x L_n/V)^{5/3}} \quad (4.8)$$

Det er verdt å merke seg at  $\sigma_n = I_n \cdot V$ , og er dermed en funksjon av  $V$ . Det fører til at uttrykket  $S_n(\omega)/\sigma_n^2$  vil for lave frekvenser synke for økende  $V$ , i motsetning til hva uttrykket for  $S_n$  vil gjøre.

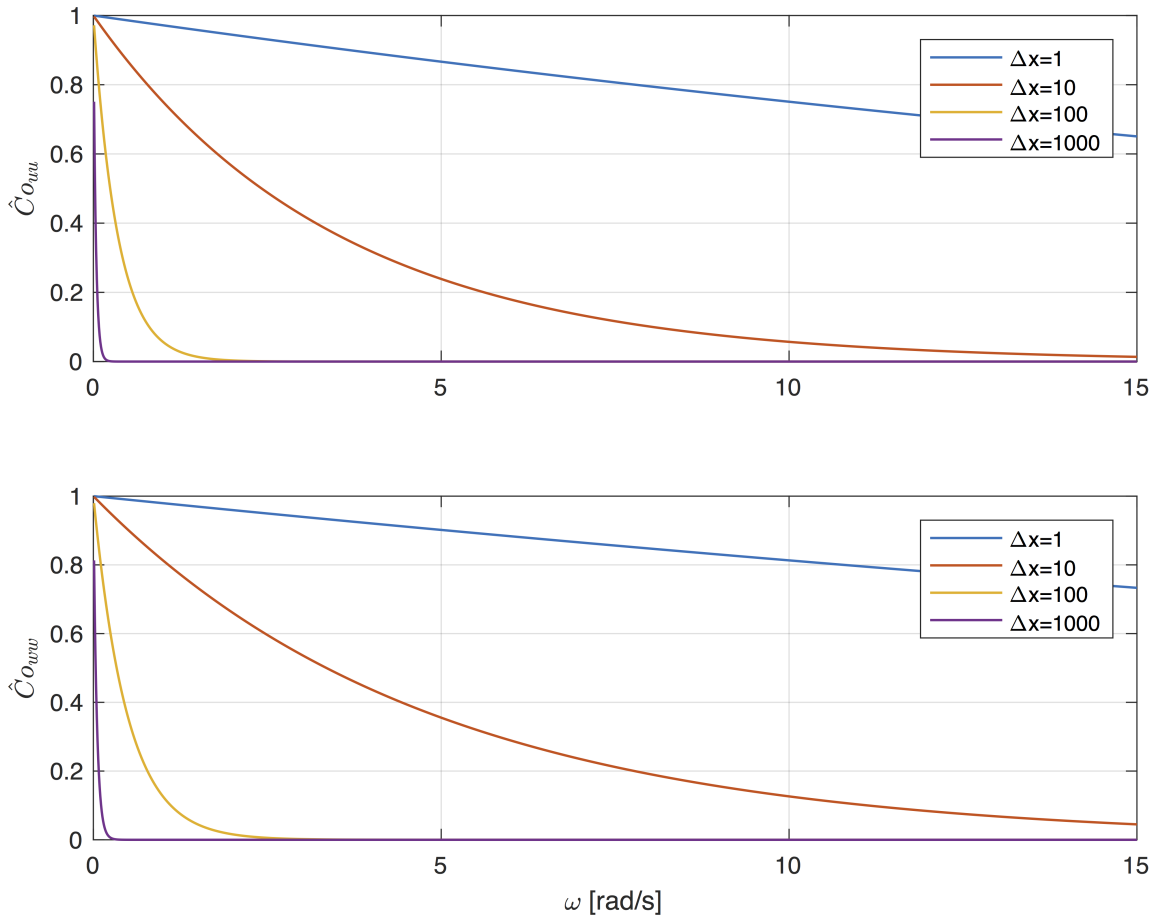


**Figur 4.7:** Vindens spektraltetthet normalisert på vindturbulensens varians i  $u$ -retning for ulike middelvindhastigheter.



**Figur 4.8:** Vindens spektraltetthet normalisert på vindturbulensens varians i  $w$ -retning for ulike middelvindhastigheter.

Uttrykket for vindturbulensens kospektrum er gitt ved ligning 2.13. Ved å ta i bruk data gitt i tabell 4.2, kan vindturbulensens kospektrum i  $u$ - og  $w$ -retning plottes for ulike  $\Delta x$  over  $\omega$ .



**Figur 4.9:** Vindturbulensens kospektrum i  $u$ - og  $w$ -retning for ulike  $\Delta x$  og en gitt middelvindhastighet,  $V$ . Lignende grafer vil oppnås for andre  $V$ .

Figur 4.7 og 4.8 avslører at vindens spektraltetthet normalisert på vindturbulensens varians er av stor størrelse for lave frekvenser og synker eksponentielt for økende frekvenser.

Figur 4.9 viser at vindens kospektrum er størst for lave frekvenser og synker for økende frekvenser. Størrelsen av kospekteret er veldig avhengig av  $\Delta x$ . For små verdier av  $\Delta x$  er kospekteret høyt for alle  $\omega$ , mens for høye verdier av  $\Delta x$  er kospekteret høyt for små verdier av  $\omega$  og synker eksponentielt for økende frekvenser. For å forstå hvilke konsekvenser dette har for bruas respons, diskuteres sammenhengen mellom vindens egenskaper og responsen nedenfor. Uttrykket for responsmatrisen er gitt ved

$$Cov_{rr}(x_r) = \int_0^\infty \mathbf{S}_{rr}(x_r, \omega) d\omega \quad (4.9)$$

Spektralitettheten til responsen,  $\mathbf{S}_{rr}(x_r, \omega)$ , er gitt ved

$$\mathbf{S}_{rr}(x_r, \omega) = \Phi_r(x_r) \cdot \mathbf{S}_\eta(\omega) \cdot \Phi_r^T(x_r), \quad \mathbf{S}_\eta(\omega) = \hat{\mathbf{H}}_\eta^*(\omega) \cdot \mathbf{S}_{\hat{Q}} \cdot \hat{\mathbf{H}}_\eta^T(\omega) \quad (4.10)$$

hvor samtlige ledd av matrisen  $\mathbf{S}_{\hat{Q}}$  er en funksjon av  $\hat{S}_{nn}$ .  $\hat{S}_{nn}$  er igjen det eneste leddet i uttrykket for  $\mathbf{S}_{\hat{Q}}$  som er avhengig av  $\omega$ .  $S_{uu}$  og  $S_{ww}$  er gitt ved

$$\hat{S}_{nn}(\omega) = \frac{S_n(\omega)}{\sigma_n^2} \cdot \hat{C}_{o_{nn}}(\Delta x, \omega), \quad n = u, w \quad (4.11)$$

Samtlige ledd av matrisen  $\mathbf{S}_\eta(\omega)$  vil derfor være på formen

$$H(\omega) \cdot H^*(\omega) \cdot S_{\hat{Q}}(\omega) = H(\omega) \cdot H^*(\omega) \cdot (C_1 \cdot \hat{S}_{uu}(\omega) + C_2 \cdot \hat{S}_{ww}(\omega)) \quad (4.12)$$

Spektralitetthetene normalisert på vindturbulensens varians i  $u$ - og  $w$ -retning,  $S_u(\omega)/\sigma_u^2$  og  $S_w(\omega)/\sigma_w^2$ , har relativt stor verdi for lave frekvenser og reduseres eksponentielt for stigende frekvenser (se figurer 4.7 og 4.8). Kospekteret i  $u$ - og  $w$ -retning,  $\hat{C}_{o_{uu}}(\Delta x, \omega)$  og  $\hat{C}_{o_{ww}}(\Delta x, \omega)$ , er også størst for lave frekvenser og synker for økende frekvenser (se figur 4.9). Den dynamiske forsterkningsmatrisen har stort utslag for frekvenser lik de respektive egenfrekvensene av svingeformene, men har ellers lav verdi. Dette betyr at for lave frekvenser, vil lastmatrisen og den dynamiske forsterkningsmatrisen være av høy verdi samtidig. Dermed vil produktet fra ligning 4.12 gi et større bidrag til responsens varians fra svingeformene med lave egenfrekvenser enn svingeformene med høye egenfrekvenser.

### 4.3 Parameterstudium

De aerodynamisk deriverte er de mest usikre variablene brukt i responsberegningene [6], og det vil derfor bli gjennomført et parameterstudium av dem i dette delkapittelet. Størrelsen til  $d\omega$  vil også undersøkes, siden det mistenkes at en for stor  $d\omega$  vil påvirke iterasjonen av egenfrekvensene negativt. Kun to svingeformer vil bli inkludert i beregningene, den 2. svingeformen i vertikal retning og den 1. i torsjon.

### 4.3.1 Effekt av aerodynamisk deriverte

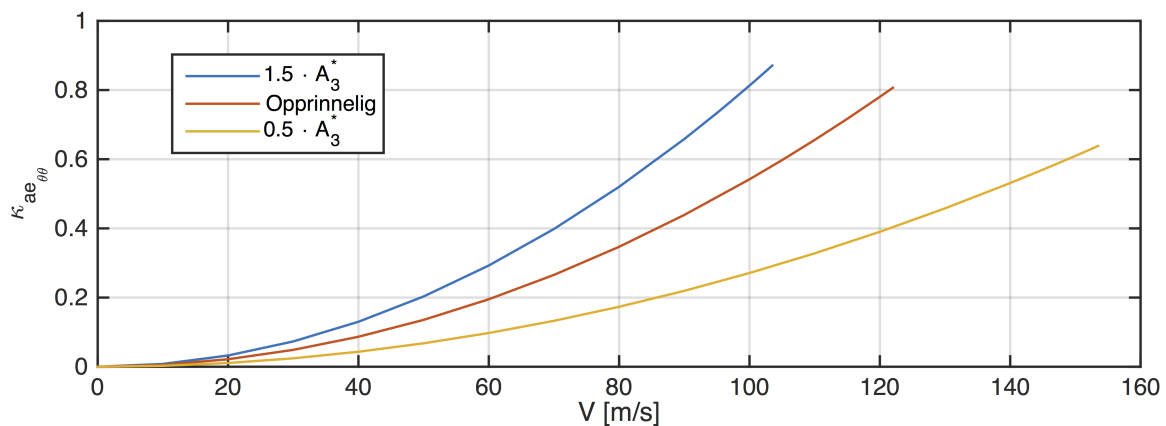
Størrelsen av de aerodynamisk deriverte har stor påvirkning på responsen. Et parameterstudium har blitt gjennomført hvor én aerodynamisk derivert av gangen blir ganget med en faktor på 0.5 og 1.5. Enkelte av de aerodynamisk deriverte er negative. Å gange disse med en faktor på 1.5, vil da bety en reduksjon. Referansetilfellet er i dette tilfellet ved kritisk middelvindhastighet lik 122 m/s, hvor ingen av de aerodynamisk deriverte er endret fra opprinnelige verdier.

	0.5 · AD [m/s]	1.0 · AD (ref.) [m/s]	1.5 · AD [m/s]	$\Delta_{max}$ fra 1.0 · AD (ref.) [m/s]
$A_1^*$	118	122	127	5
$A_2^*$	135	122	111	13
$A_3^*$	154	122	104	32
$H_1^*$	130	122	120	8
$H_2^*$	122	122	122	0
$H_3^*$	118	122	127	5

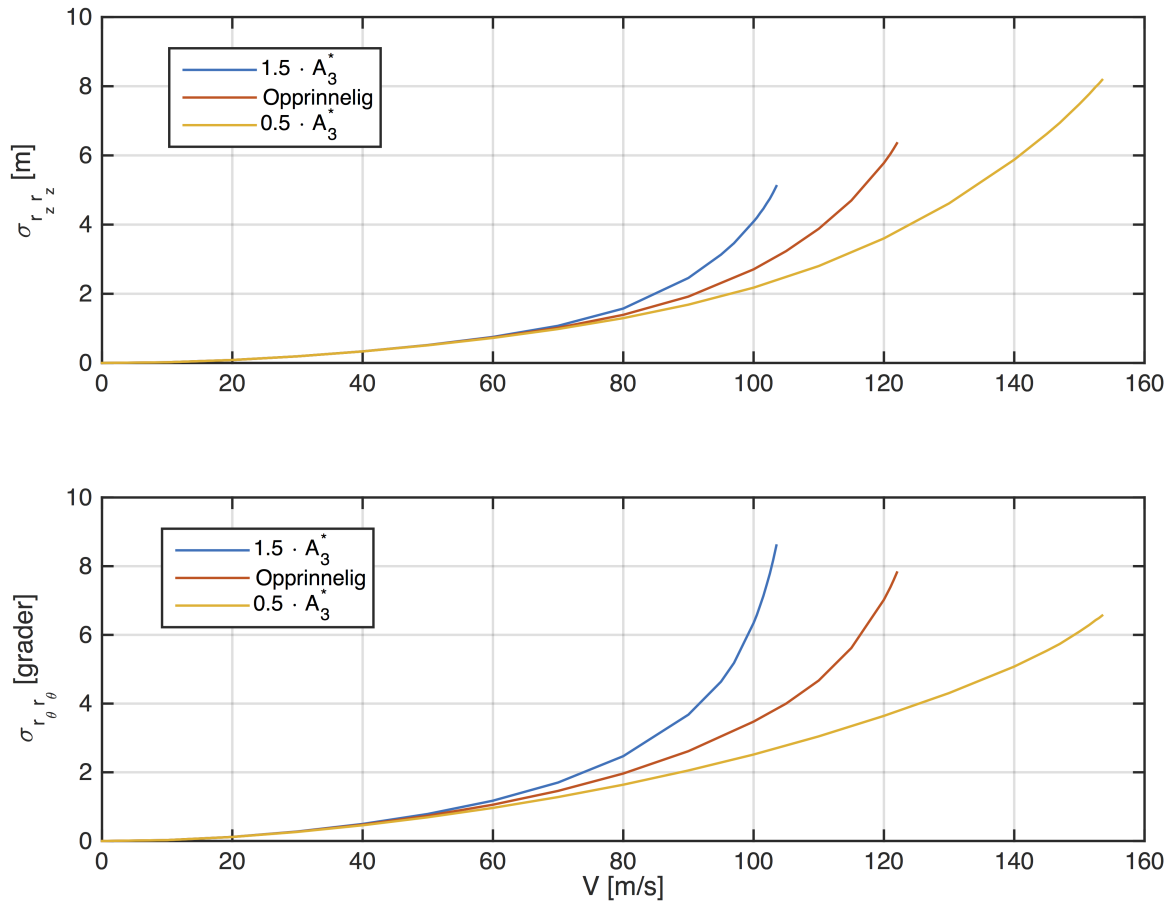
**Tabell 4.3:**  $V_{cr}$  for forskjellig relativ forandring av aerodynamisk deriverte.

Som tabell 4.3 viser, er det en relativ endring av  $A_3^*$  som gir størst endring av  $V_{cr}$ . Det er ikke blitt sett på en endring av  $A_4^*$  eller  $H_4^*$ . Disse er for Hardangerbrua satt lik null, og de er i denne sammenhengen derfor ikke interessante.

$A_3^*$  hører til  $\kappa_{ae\theta\theta}$  og figur 4.5 viser at den er positiv. En positiv  $\kappa_{ae\theta\theta}$  gir en reduksjon av den totale stivheten i torsjon. Å gange  $A_3^*$  med en faktor på 1.5, vil derfor bety at den totale stivheten til systemet i torsjon reduseres raskere. Å gange med en faktor 0.5 vil bety det motsatte. Dette blir illustrert i figur 4.10.



**Figur 4.10:** Aerodynamisk stivhet i torsjon ved variasjon av  $A_3^*$ . Rød graf tilsvarer aerodynamisk stivhet med opprinnelige verdier.

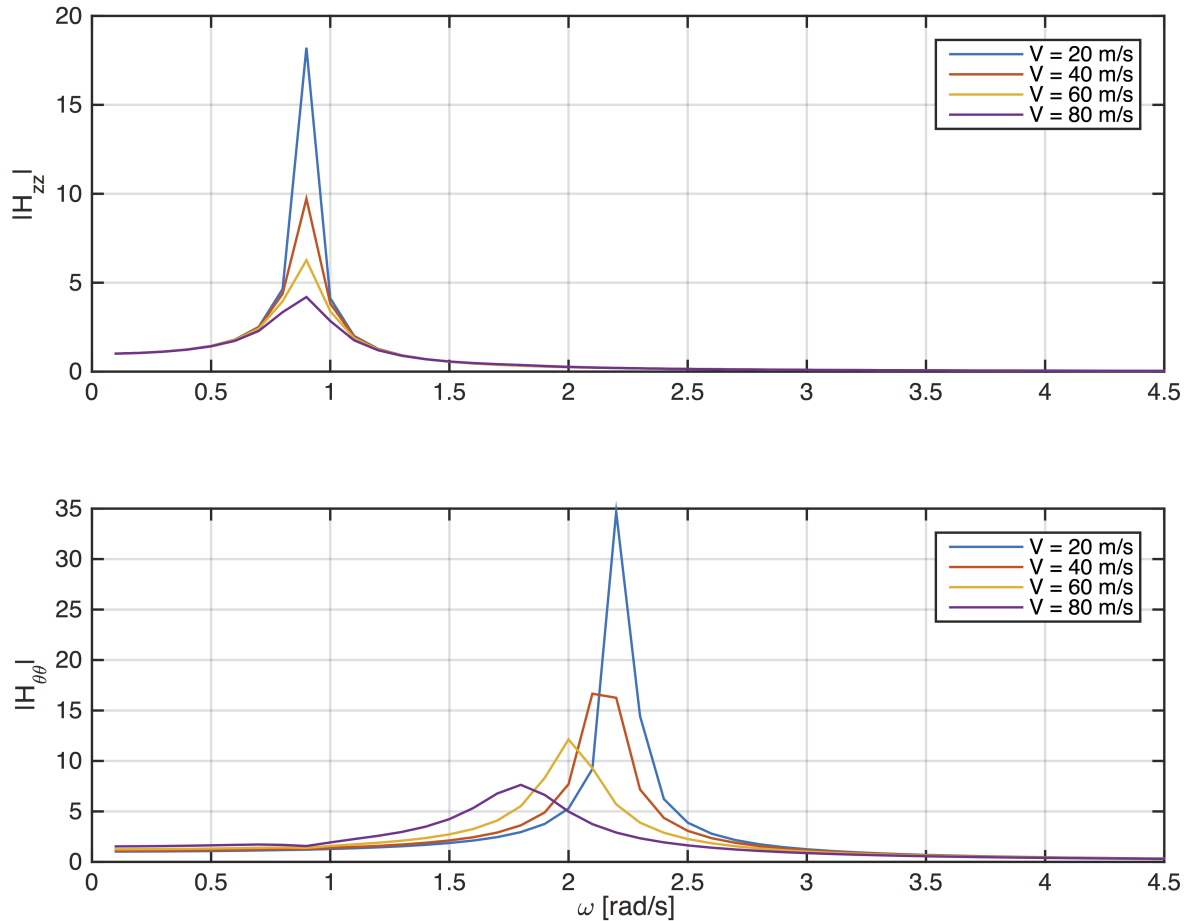


**Figur 4.11:** Standardavviket i vertikal retning og torsjon ved variasjon av  $A_3^*$ . Rød graf tilsvare standardavviket med opprinnelige verdier.

Figur 4.11 viser responsens standardavvik i vertikal retning og torsjon frem til instabilitetsgrensen er nådd. Som forklart i forrige avsnitt, reduseres stivheten raskere ved en økning av  $A_3^*$ . Dette gjenspeiler seg i figur 4.11, hvor det vises at instabilitetsgrensen blir lavere ved en økning av  $A_3^*$ . Det er også et poeng at standardavviket til responsen i vertikal retning blir påvirket av en endring av aerodynamisk stivhet i torsjon.

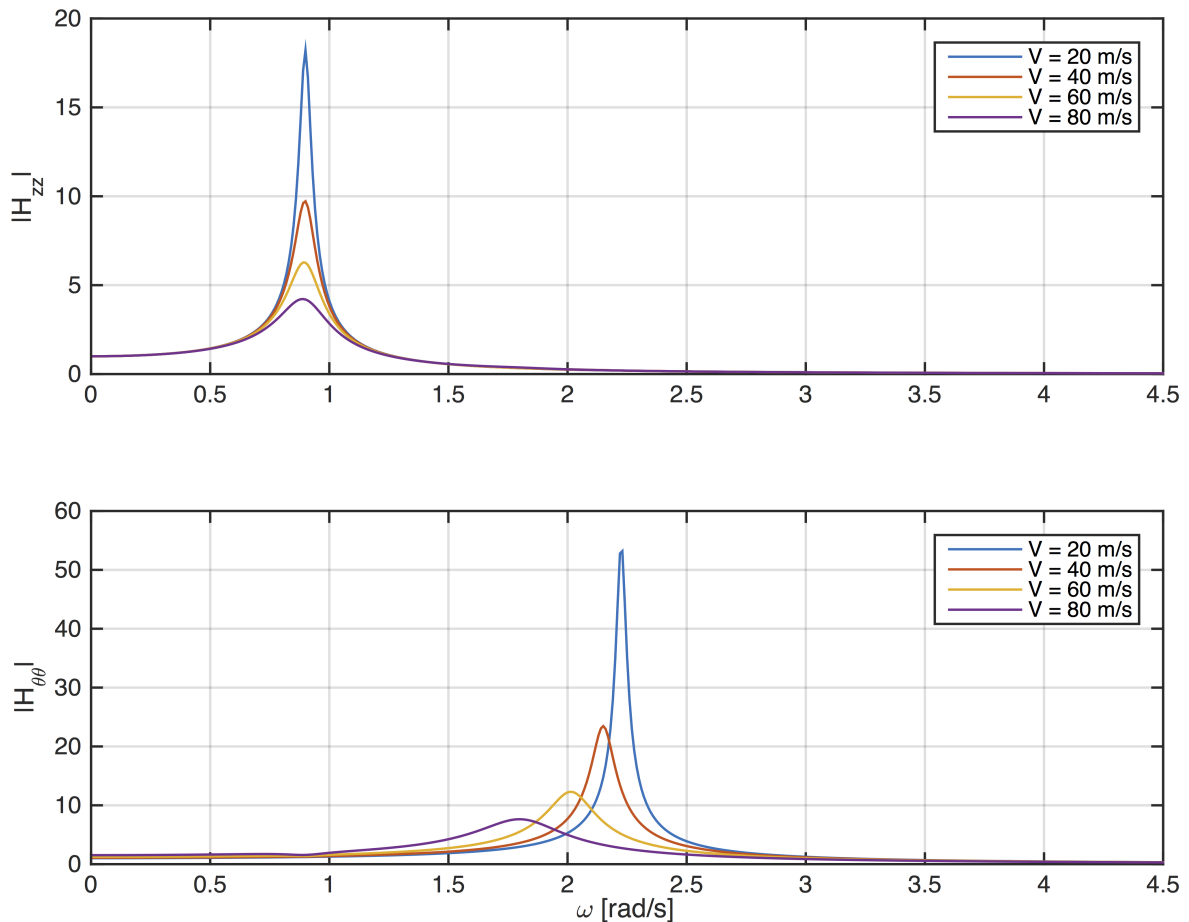
### 4.3.2 Effekt av størrelsen til $d\omega$

Et parameterstudium av  $d\omega$ , altså hvor fininddelt vindens samt bruas frekvenser er, viser at  $V_{cr}$  blir lik 122 m/s for  $d\omega$  lik 0.001 rad/s, 0.01 rad/s og 0.1 rad/s. En beregning med  $d\omega$  lik 0.1 rad/s vil likevel gi andre problemer som er verdt å belyse.



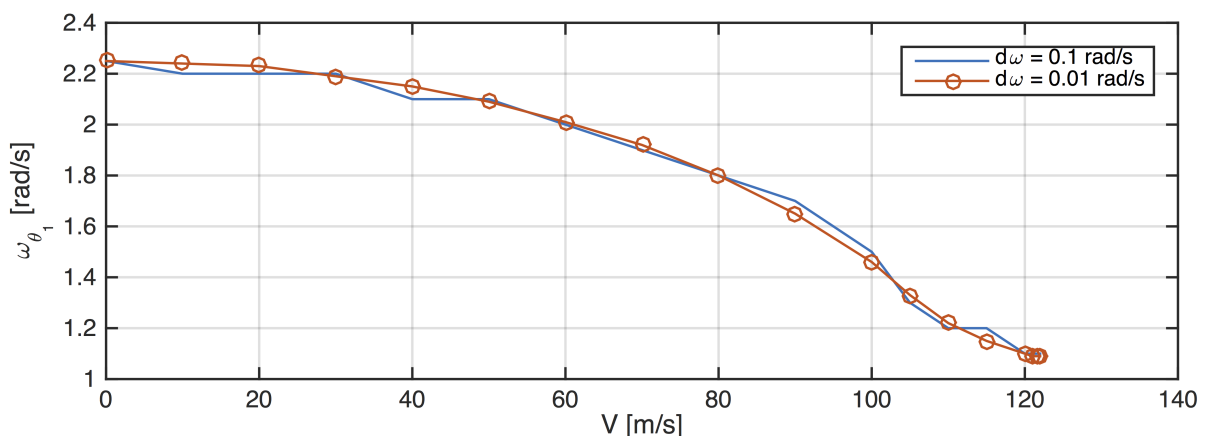
**Figur 4.12:** Absoluttverdien av den dynamiske forsterkningsfunksjonen i vertikal retning og torsjon for  $d\omega = 0.1$  rad/s.

Som figur 4.12 viser, vil en for stor  $d\omega$ -verdi ikke gi tydelige topper for den dynamiske forsterkningsfunksjonen. Dette er best illustrert nederst i figuren for  $V = 40$  m/s. Ved i stedet bruke  $d\omega = 0.01$  rad/s vil disse toppene bli fanget opp, som vist i figur 4.13.



**Figur 4.13:** Absoluttverdien av den dynamiske forsterkningsfunksjonen i vertikal retning og torsjon for  $d\omega = 0.01$  rad/s.

I figur 4.13 er det tydelig at  $d\omega$  er liten nok til at toppene til funksjonen blir tydelige. Måten programmet itererer egenfrekvensene til systemet, forklart i delkapittel 3.2.2, er grunnen til at nettopp dette er viktig.



**Figur 4.14:** Utviklingen av den første egenfrekvensen i torsjon, for to ulike verdier av  $d\omega$ .

Figur 4.14 viser hvordan egenfrekvensen i torsjon utvikler seg mot middelvindhastigheten,  $V$ , for  $d\omega$  lik 0.1 og 0.01 rad/s. Selv om tilfellet med  $d\omega$  lik 0.1 rad/s ikke har tydelige topper i grafer av den dynamiske forsterkningsfunksjonen, vil likevel egenfrekvensen følge tilfellet med

$d\omega$  lik 0.01 tett, og ende opp med omtrent samme egenfrekvens når  $V$  nærmer seg  $V_{cr}$ . Dette er muligens grunnen til at  $V_{cr}$  ikke endres stort, selv om  $d\omega$  blir stor. På tross av at  $d\omega$  lik 0.1 rad/s gir god nøyaktig for beregningen av  $V_{cr}$ , brukes  $d\omega = 0.01$  rad/s i det videre arbeidet av denne oppgaven. Dette sikrer at de itererte egenfrekvensene er beregnet med god nøyaktighet.

## 4.4 Iterasjon

Siden de aerodynamisk deriverte er funksjoner av egenfrekvensene ved en gitt fart,  $\omega_i(V)$ , og disse egenfrekvensene er funksjoner av  $\kappa_{ae}$  og  $\zeta_{ae}$ , som igjen er funksjoner av de aerodynamisk deriverte, er det i utgangspunktet nødvendig å iterere for å finne endelig respons av systemet. Tilfellet med Hardangerbrua er likevel noe spesielt. De aerodynamisk deriverte (i ligningene under kalt AD) som hører til aerodynamisk stivhet,  $H_3^*$  og  $A_3^*$ , er funksjoner av  $V_{red}^2 = \left(\frac{V}{B\omega_i(V)}\right)^2$ , mens de to andre,  $H_4^*$  og  $A_4^*$ , er lik null.

$$\kappa_{ae_{ij}} = \frac{\rho B^2}{2\tilde{m}_i} \left[ \frac{\omega_i(V)}{\omega_i(V=0)} \right]^2 \frac{\int_{L_{eksp}} (\phi_i \phi_j) dx}{\int_L \phi_i^2 dx} \cdot AD \quad (4.13)$$

Som ligning 4.13 viser, er  $\kappa_{ae_{ij}}$  en funksjon av  $\omega_i^2(V)$ . Dette fører til at leddet  $1/\omega_i^2(V)$  fra AD, kan strykes mot telleren i egenfrekvensforholdet. Aerodynamisk stivhet blir med det ikke en funksjon av  $\omega_i(V)$ .

$$\zeta_{ae_{ij}} = \frac{\rho B^2}{4\tilde{m}_i} \left[ \frac{\omega_i(V)}{\omega_i(V=0)} \right] \frac{\int_{L_{eksp}} (\phi_i \phi_j) dx}{\int_L \phi_i^2 dx} \cdot AD \quad (4.14)$$

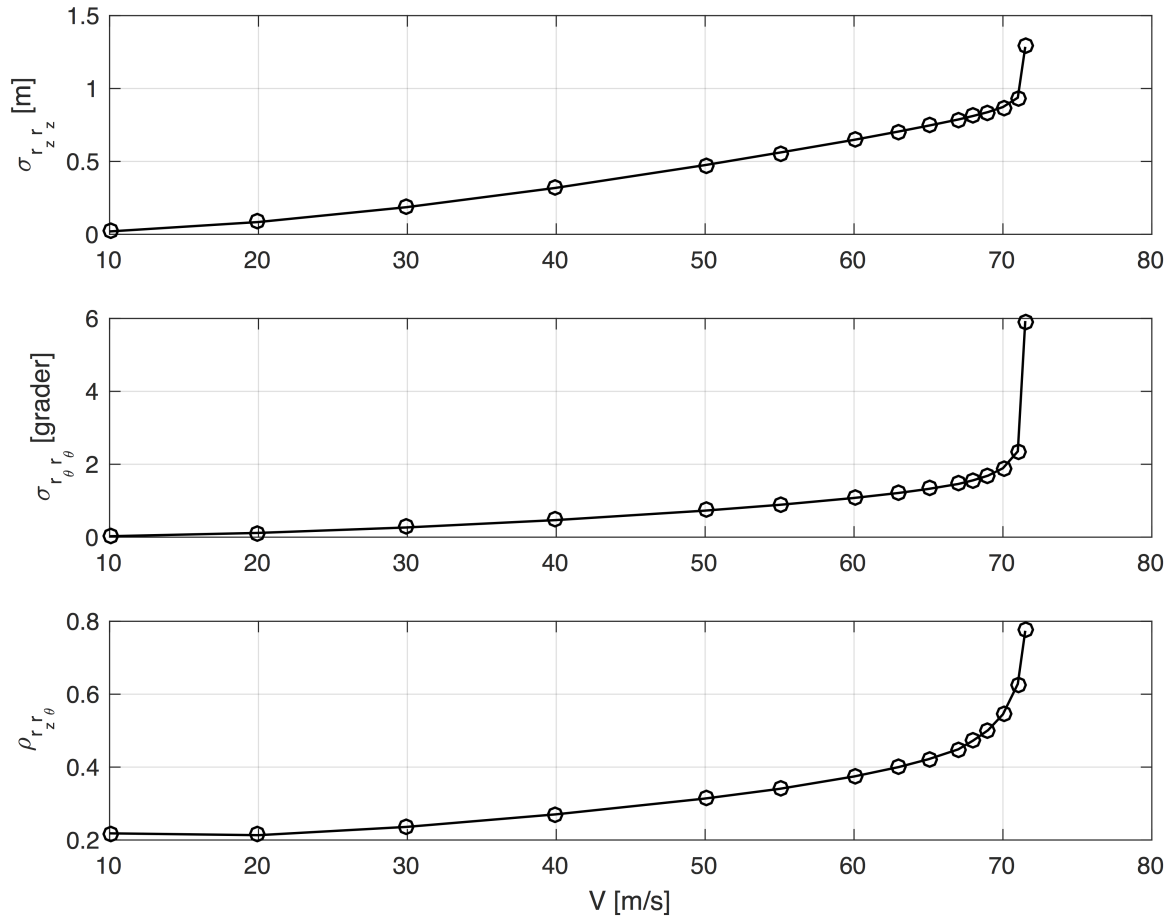
Som ligning 4.14 viser, er  $\zeta_{ae_{ij}}$  en funksjon av  $\omega_i(V)$ . Siden de aerodynamisk deriverte  $H_1^*$ ,  $H_2^*$  og  $A_1^*$  er funksjoner av  $V_{red} = \left(\frac{V}{B\omega_i(V)}\right)$  og hører til dempning, følger samme argument for stryking av  $\omega_i(V)$  som for aerodynamisk stivhet. Den siste aerodynamisk deriverte som hører til dempning,  $A_2^*$ , er en funksjon av  $V_{red}^2 = \left(\frac{V}{B\omega_i(V)}\right)^2$ , og  $\omega_i(V)$  kan dermed ikke strykes fra uttrykket til  $\zeta_{\theta\theta}$ .  $\zeta_{\theta\theta}$  vil derfor være den eneste av de aerodynamiske dempningene og stivhetene som vil være en funksjon av  $\omega_i(V)$ . I dette tilfellet er altså  $A_2^*$  den eneste grunnen til at iterasjon blir nødvendig for å finne bruas respons og den kritiske middelvindhastigheten.

En beregning hvor iterasjon har blitt tatt i bruk, gir  $V_{cr} = 122$  m/s (to svingeformer inkludert, den 2. svingeformen i vertikal retning og den 1. i torsjon). En tilsvarende beregning uten iterasjon av egenfrekvensene gir  $V_{cr} = 131$  m/s.  $\zeta_{\theta\theta}$  er en funksjon av  $\frac{1}{\omega_\theta(V)}$ , hvor  $\omega_\theta(V)$  er en synkende funksjon (se figur 4.14). En prosess med iterasjon fører derfor til at  $V_{red}$  blir større for samme  $V$  enn uten iterasjon. Tilsvarende vil gjelde for absoluttverdien av  $A_2^*$  og dermed også  $\zeta_{\theta\theta}$ . I parameterstudiet ble  $A_2^*$  multiplisert med ulike faktorer. Å multiplisere  $A_2^*$  med 1.5 vil gi de samme implikasjonene som å iterere mot å ikke iterere. Dette ga også en lavere  $V_{cr}$ , noe som bekrefter funnene i dette delkapittelet.

Hvis egenfrekvensforholdet ikke hadde vært med i uttrykkene for aerodynamisk stivhet og dempning, hadde resultatet og prosessen blitt annerledes. For lave middelvindhastigheter er



$\omega_i(V) \approx \omega_i(V = 0)$  og de kan strykes mot hverandre. Selv om denne tilnærmelsen gir tilfredsstillende nøyaktig ved lave middelvindhastigheter, vil den gi stor feil ved høye hastigheter. Likevel gjøres det en beregning hvor egenfrekvensforholdet ikke er tatt med, for å belyse hvorfor iterasjon er nødvendig.



**Figur 4.15:** Responsens standardavvik i vertikal retning og torsjon samt korrelasjonen mellom de to retningene for  $x_r = 0.5L$  uten egenfrekvensforholdet i aerodynamisk stivhet og dempning.

Figur 4.15 viser at instabilitetsfarten,  $V_{cr}$ , blir 71 m/s når egenfrekvensforholdet ikke er tatt med i uttrykket for aerodynamisk stivhet og dempning. Det er stor forskjell sammenlignet med en  $V_{cr}$  på 122 m/s når egenfrekvensforholdet er inkludert. Nå kan ikke  $\omega_i(V)$  strykes fra nevneren i de aerodynamiske deriverte, og samtlige verdier i den aerodynamiske stivhets- og dempningsmatrisen blir nødvendig å iterere. Ved å ikke iterere når egenfrekvensforholdet er strøket, blir  $V_{cr} = 136$  m/s. Feilen ved å ikke iterere blir nå enda tydeligere, og viser at iterasjon har mye å si når  $\omega_i(V)$  ikke kan strykes.

Andre bruer enn Hardangerbrua kan ha aerodynamisk deriverte som er på annen form, hvor  $\omega_i(V)$  i aerodynamisk deriverte ikke kan strykes mot  $\omega_i(V)$  i egenfrekvensforholdet. Da blir det også nødvendig å iterere, da konsekvensen av å ikke gjøre det kan gi store forskjeller, som forklart i avsnittet over.

---

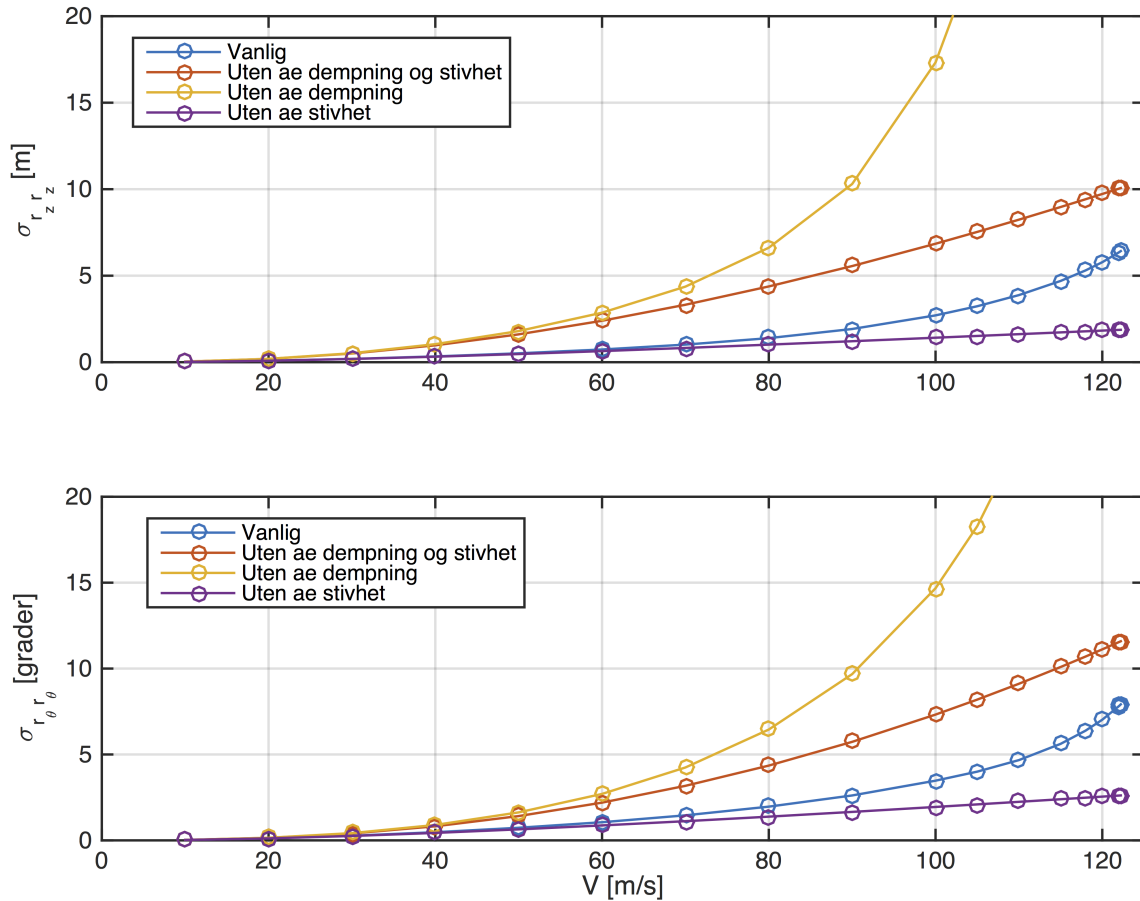
## 4.5 Betydningen av aerodynamisk dempning og stivhet

I dette delkapittelet skal betydningen av den aerodynamiske dempningen og stivheten studeres nærmere. For lesbarhetens skyld er en tabell inkludert som viser sammenhengen mellom aerodynamisk stivhet og dempning og de aerodynamisk deriverte. Denne sammenhengen kommer som en følge av ligningene 2.48 og 2.49. Tegnet i den nederste raden i tabellen viser om den respektive aerodynamisk deriverte er negativ, positiv eller lik null. Dette er hentet fra ligning 4.2.

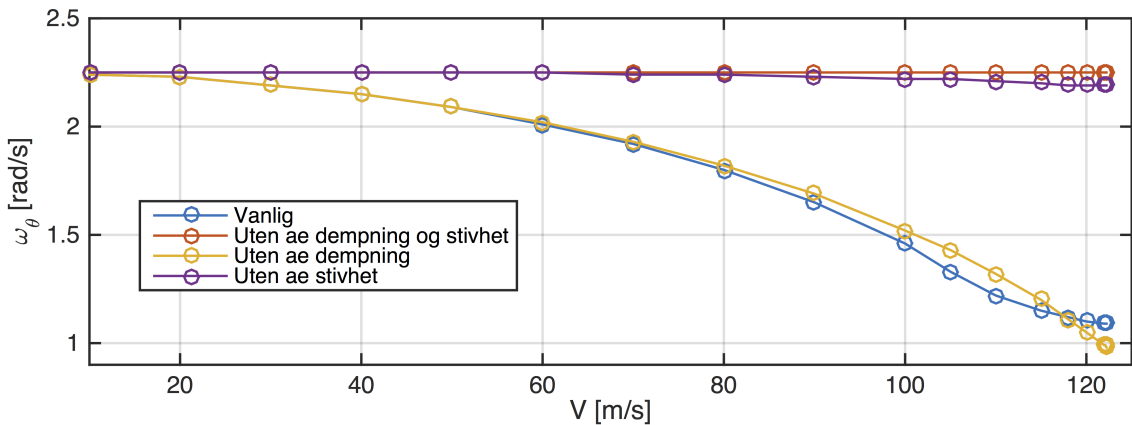
$\zeta_{aezz}$	$\zeta_{aez\theta}$	$\kappa_{aez\theta}$	$\kappa_{aezz}$	$\zeta_{ae\theta z}$	$\zeta_{ae\theta\theta}$	$\kappa_{ae\theta\theta}$	$\kappa_{ae\theta z}$
$H_1^*$	$H_2^*$	$H_3^*$	$H_4^*$	$A_1^*$	$A_2^*$	$A_3^*$	$A_4^*$
-	+	+	0	-	-	+	0

**Tabell 4.4:** Sammenheng mellom aerodynamisk deriverte og aerodynamisk stivhets- og dempningsgrad.

Som ligning 2.44 viser, skal det både summeres og ganges sammen ledd før den dynamiske forsterkningsmatrisen,  $\hat{H}_\eta$ , er funnet ved invertering av  $\hat{E}_\eta$ . Derfor vil for eksempel den aerodynamiske dempningen i torsjon,  $\zeta_{ae\theta\theta}$ , påvirke responsen i vertikal retning, i tillegg til torsjon. Effekten av å ikke ha med forskjellige varianter av den aerodynamiske påvirkningen er det derfor blitt sett nærmere på. Beregningene i dette delkapittelet inkluderer to svingeformer, den 2. i vertikal retning og den 1. i torsjon.



**Figur 4.16:** Responsens standardavvik i vertikal retning og torsjon for  $x_r = 0.5L$  med og uten den aerodynamiske dempningen og stivheten.

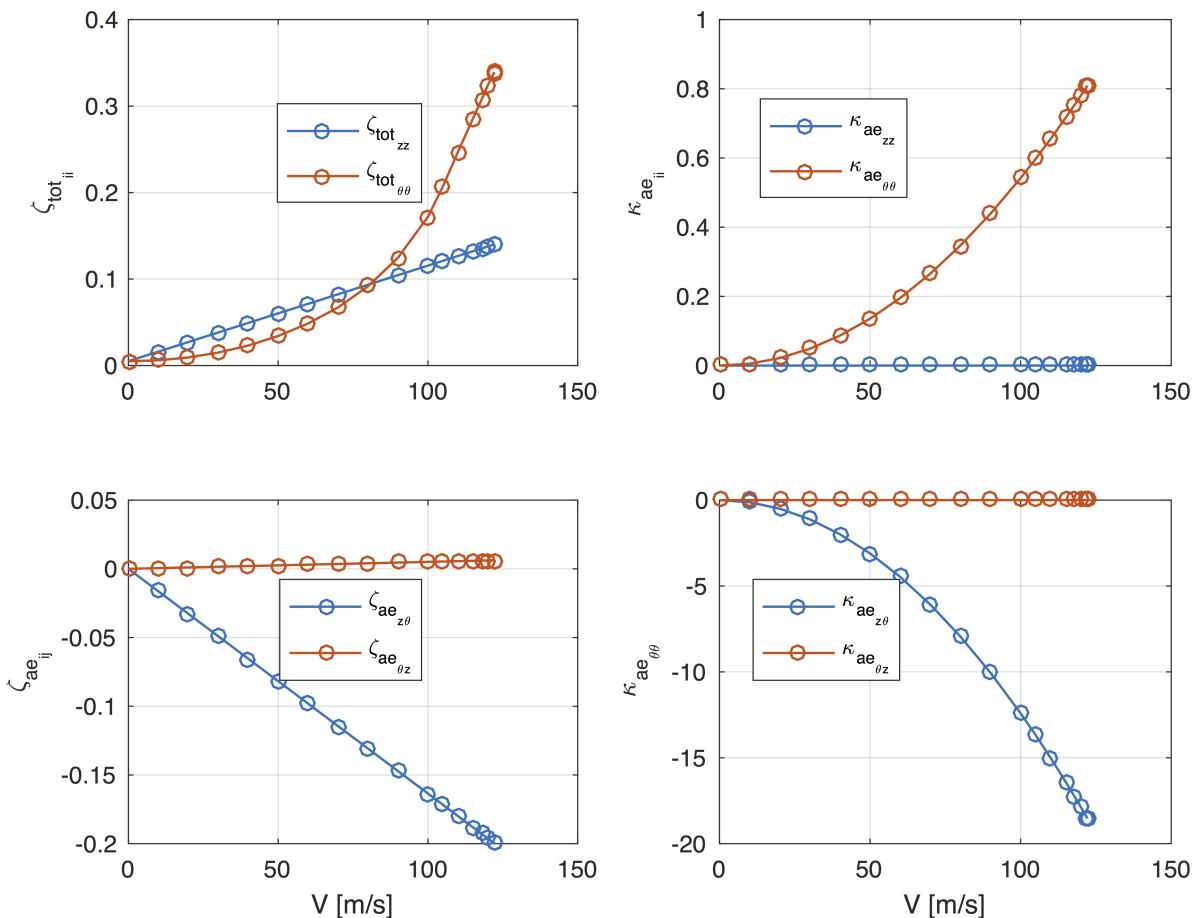


**Figur 4.17:** Egenfrekvensen i torsjon,  $\omega_\theta$ , med og uten den aerodynamiske dempningen og stivheten.

Som vist i figur 4.17, vil ikke egenfrekvensen i torsjon variere i stor grad når den aerodynamiske stivheten ikke er med i beregningen. Det vil si at det er stivheten som har mest å si for utviklingen av egenfrekvensen i torsjon.

Den aerodynamiske stivhetsmatrisen, er som vist i tabell 4.4, en funksjon av kun positive verdier av de aerodynamisk deriverte. På diagonalen vil positive aerodynamisk deriverte føre til positiv aerodynamisk stivhet. Utviklingen av de aerodynamiske stivhetene som er ulik null blir for

gjeldende svingformer vist i figuren under.



**Figur 4.18:** Utviklingen av aerodynamisk stivhet og demping.

Positive verdier av  $\kappa_{ae_{ii}}$  gir en reduksjon av den totale stivheten til systemet. Å fjerne aerodynamisk stivhet, fører derfor til at systemet blir stivere. Et stift og dempet system vil gi relativt liten respons, som de lilla grafene i figur 4.16 viser.

I dette tilfellet er  $\kappa_{ae_{z\theta}}$  av negativ verdi, siden svingformene i vertikal retning og torsjon er motsatt rettet av hverandre. Siden svingformene kan multipliseres med -1 uten at dette skal ha noen påvirkning på resultatet, betyr det at  $\kappa_{ae_{\theta z}}$  like godt kunne vært av positiv verdi. Den forteller kun hvordan stivheten i vertikal retning blir påvirket av svingning i torsjon. Siden  $\kappa_{ae_{z\theta}}$  er ulik null, mens  $\kappa_{ae_{\theta z}}$  er null, viser det at det er bevegelsen i torsjon som er den drivende svingformen, noe som er kjent fra flutter-teorien. Den samme konklusjonen kan også bli tatt som følge av å se på off-diagonalene av den aerodynamiske dempningsmatrisen, vist nederst til venstre i figur 4.18. Her er  $\zeta_{ae_{\theta z}}$  nesten lik null, mens  $\zeta_{ae_{z\theta}}$  er av signifikant verdi.

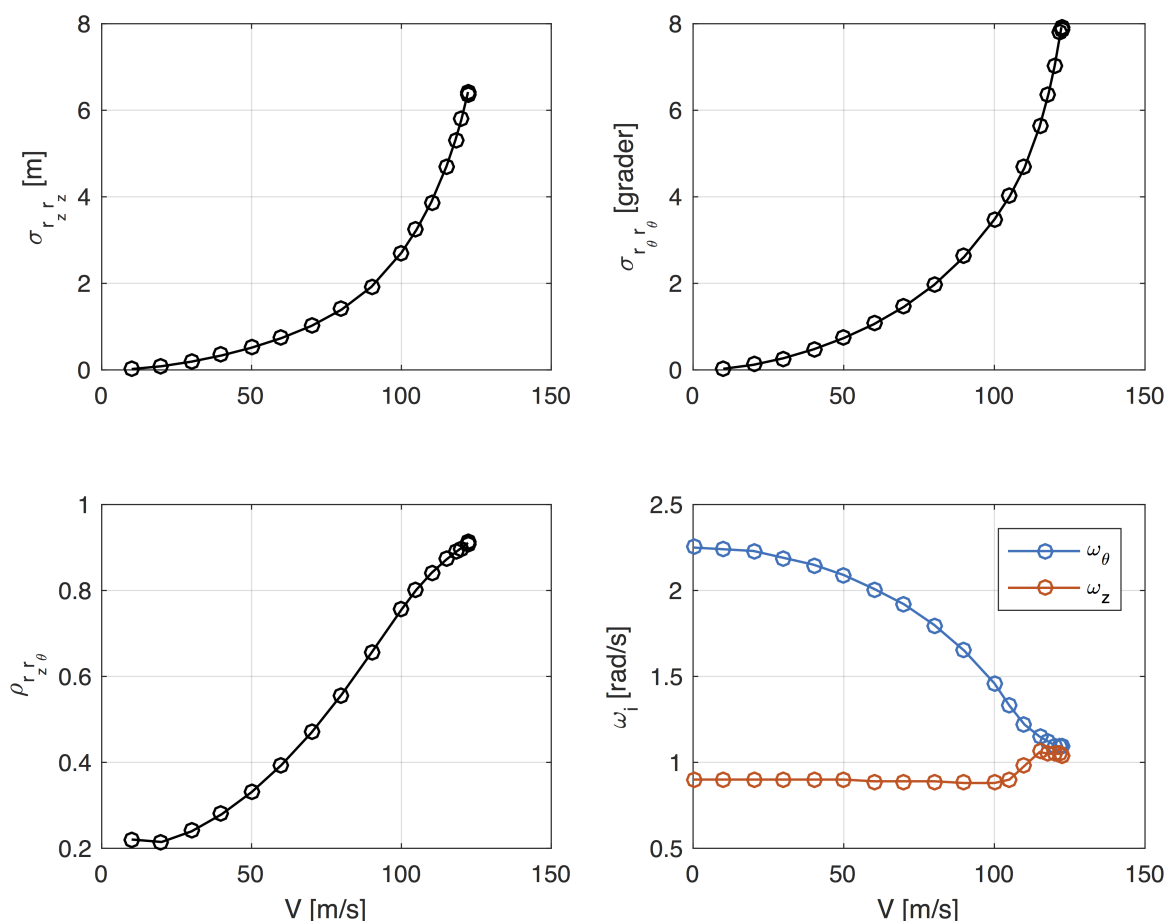
Siden uttrykket for den totale dempingen er  $\zeta_{tot} = \zeta - \zeta_{ae}$ , betyr dette at negative verdier av diagonalene i den aerodynamiske dempningsmatrisen vil gi økt total demping. Fortegnet til diagonalene av den aerodynamiske dempningsmatrisen bestemmes av de aerodynamisk deriverte  $H_1^*$  og  $A_2^*$ . Disse er, som vist i tabell 4.4, begge negative. Dette gir en stigende utvikling av systemets totale demping mot middelvindhastigheten, som vist i figur 4.18. Fra de gule grafene i figur 4.16 er det tydelig at responsens standardavvik stiger eksponentielt når den aerodynamiske dempingen ikke er inkludert. Da vil den totale dempingen være konstant, mens systemets

stivhet faller raskt. Med relativt lav dempning og fallende stivhet blir derfor responsen stor for høye middelvindhastigheter.

Oppsummert vil altså aerodynamisk dempning være gunstig for brua, da den demper responsen betraktelig som figur 4.16 viser. Aerodynamisk stivhet derimot, vil spise av stivheten til brua i torsjon og dermed gi økt respons. En sammenligning av responsen med og uten aerodynamiske effekter, henholdsvis blå og oransje graf i figur 4.16, viser at aerodynamiske effekter reduserer utslagene til brua og vil dermed være gunstig. På den negative siden, vil derimot de aerodynamiske effektene også introdusere nye instabilitetsfenomener.

## 4.6 Studie av responsens oppførsel ved instabilitetsgrensen

I dette delkapittelet studeres responsens oppførsel ved høye middelvindhastigheter nærmere, og det diskuteres hva som fører til instabilitet i systemet.



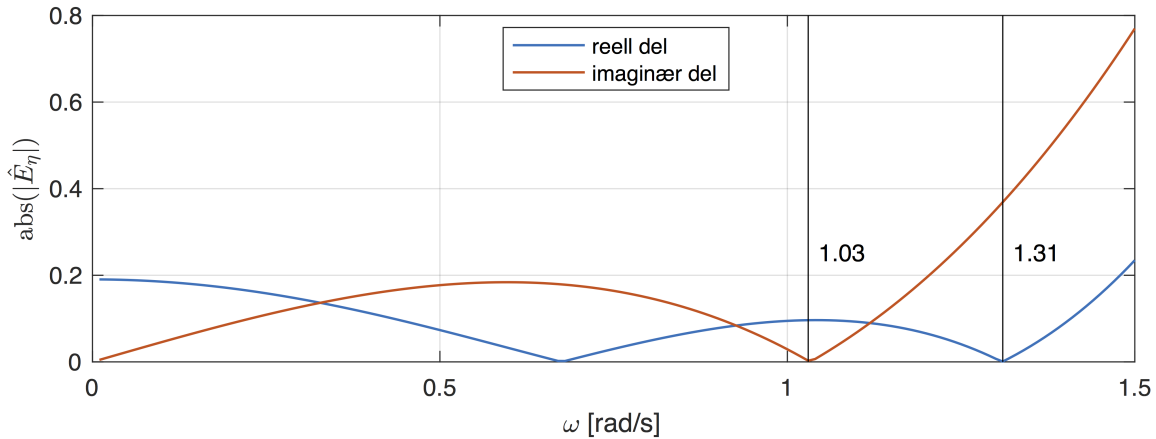
**Figur 4.19:** Responsens standardavvik i vertikal retning og torsjon samt korrelasjonen mellom disse to retningene for  $x_r = 0.5L$  plottet mot  $V$ . Det er to svingeformer inkludert i beregningen, den 2. i vertikal retning og den 1. i torsjon. De to egenfrekvensene er plottet mot  $V$ .

Figur 4.19 viser at responsens standardavvik i både vertikal retning og torsjon vil stige eksponentielt til en instabilitet inntreffer for en middelvindhastighet på omtrent 122 m/s. Ved middel-

vindhastighet lik 123 m/s vil responsen få et stort sprang, noe som tyder på at  $V_{cr}$  er passert, og middelvindhastigheter fra og med denne er derfor ikke inkludert i figur 4.19.

Grafen nede til høyre i figur 4.19 viser at  $\omega_z$  og  $\omega_\theta$  nærmer seg hverandre i verdi, og ved  $V=122$  m/s vil  $\omega_z=1.04$  rad/s og  $\omega_\theta=1.09$  rad/s. Figur 4.17 viste at det er demping som er årsaken til at egenfrekvensen i torsjon flater ut når  $V$  nærmer seg  $V_{cr}$ . Det viser seg at det er samme forklaring til at egenfrekvensen i vertikal retning stiger når  $V$  passerer 100 m/s, eller mer spesifikt er det  $\zeta_{tot\theta\theta}$  som er grunnen. En beregning med en lavere verdi av  $\zeta_{tot\theta\theta}$  vil ikke gi spranget av  $\omega_z$ , som vist i figur 4.19. Siden dempingen i torsjon øker mye for høye middelvindhastigheter, som figur 4.18 viser, indikerer det at dette er årsaken til spranget i egenfrekvensen.

Korrelasjonen mellom de to retningene,  $\rho_{r_z r_\theta}$ , er 0.91 når  $V=V_{cr}$ , som vist i figur 4.19. Siden egenfrekvensene er nesten lik hverandre for samme middelvindhastighet, samt at korrelasjonen tenderer mot 1, kan det tyde på at det er flutter som gir instabilitet. I teorien fra flutter må også ligning 2.67 tilfredsstilles når  $V=V_{cr}$ . Figur 4.20 viser hvordan den reelle og imaginære delen av absoluttverdien av determinanten til  $\hat{E}_\eta$  varierer over  $\omega$  for  $V=V_{cr}$ .



**Figur 4.20:** Utviklingen av absoluttverdien til reell og imaginær del av  $|\hat{E}_\eta|$  mot  $\omega$  for  $V$  lik  $V_{cr}$ .

Som figuren viser, vil ikke den reelle delen være lik null når den imaginære delen er det. Den reelle delen er null for frekvens lik 1.31 rad/s og er dermed ikke i umiddelbar nærhet av de to egenfrekvensene. Ligning 2.67 tilfredsstilles altså ikke. Siden  $\rho_{r_z r_\theta}$  flater litt ut før instabilitet inntreffer, og figur 4.20 viser at determinantene ikke blir lik null samtidig, kan det tyde på at det er et annet fenomen som skaper instabilitet.

Aerodynamisk stivhet i torsjon,  $\kappa_{ae\theta\theta}$ , øker til 0.81 ved  $V$  lik  $V_{cr}$ . Når  $1-\kappa_{ae\theta\theta} = 0$  har systemet mistet all sin stivhet i denne retningen og blir ustabil. I parameterstudiet av de aerodynamisk deriverte (delkapittel 4.3.1), ble det vist at det var forandringen av  $A_3^*$ , og dermed  $\kappa_{ae\theta\theta}$ , som hadde mest å si for responsen. Dette underbygger at det er tap av stivhet i torsjon som fører til det store utslaget i responsen. At den likevel er et stykke fra 1 rett før instabilitet, tyder på at det ikke er denne alene som gir instabilitet.

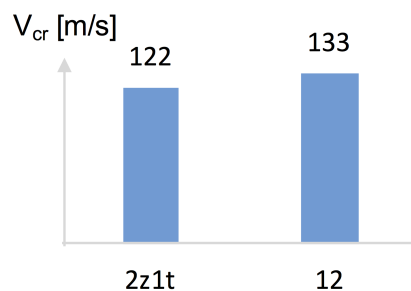
For at flutter skal oppstå, må de to egenfrekvensene endre verdi og bevege seg mot hverandre. Det er egenfrekvensen i torsjon som forandrer seg mest i verdi og driver koblingen mellom de to egenfrekvensene. For at dette skal skje, må stivheten og/eller dempingen forandre seg. Figur

---

4.17 viser at dempningen ikke har mye å si for forandringen av egenfrekvensen i torsjon. Det betyr at det er stivheten som må endre seg. Den aerodynamiske stivheten i vertikal retning,  $\kappa_{ae_{zz}}$ , er null. Dermed må den aerodynamiske stivheten i torsjon endre verdi for at egenfrekvensen skal endre seg av signifikant verdi. Med andre ord; for at flutter skal oppstå, må derfor stivheten i torsjon forandre seg i dette tilfellet. Som nevnt over, vil  $\kappa_{ae_{\theta\theta}}$  gå mot 0.81 når  $V$  er lik  $V_{cr}$ . For at tap av stivhet skal være årsaken til instabilitet alene, burde  $\kappa_{ae_{\theta\theta}}$  vært 1 når  $V$  er lik  $V_{cr}$ . For at det skal være flutter alene som gir instabilitet, så må egenfrekvensene bli lik hverandre samt at determinanten til  $\hat{E}_\eta$  blir null for samme frekvens. Dette kravet er heller ikke tilfredsstillt. Hva som er årsaken til at instabilitet inntreffer er derfor vanskelig å si. Det kan muligens være en kombinasjon av flutter og tap av stivhet i torsjon som gir instabilitet av systemet. Brua vil uansett være ustabil for store middelvindhastigheter, siden stivheten i torsjon da er liten.

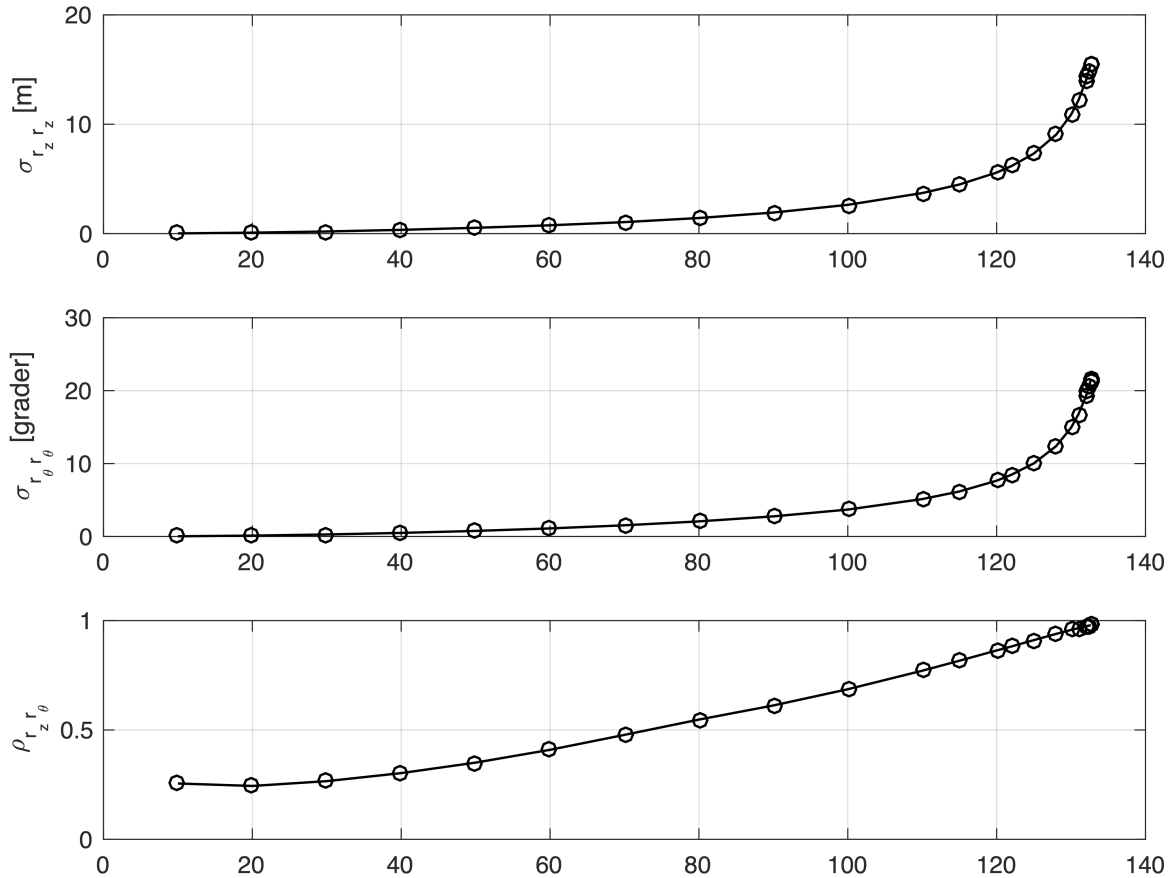
## 4.7 Flere svingeformer

I dette delkapittelet blir det sett nærmere på responsen av brua når flere svingeformer er inkludert i beregningen. De aerodynamisk deriverte er som forklart tidligere basert på den andre svingeformen i vertikal retning og den første i torsjon. Hvis det likevel skal brukes flere svingeformer i beregningen enn de to nevnte, er det vanlig praksis å fortsatt bruke de samme aerodynamisk deriverte [6]. Resultater hvor flere svingeformer er inkludert i beregningen vil derfor være usikre.



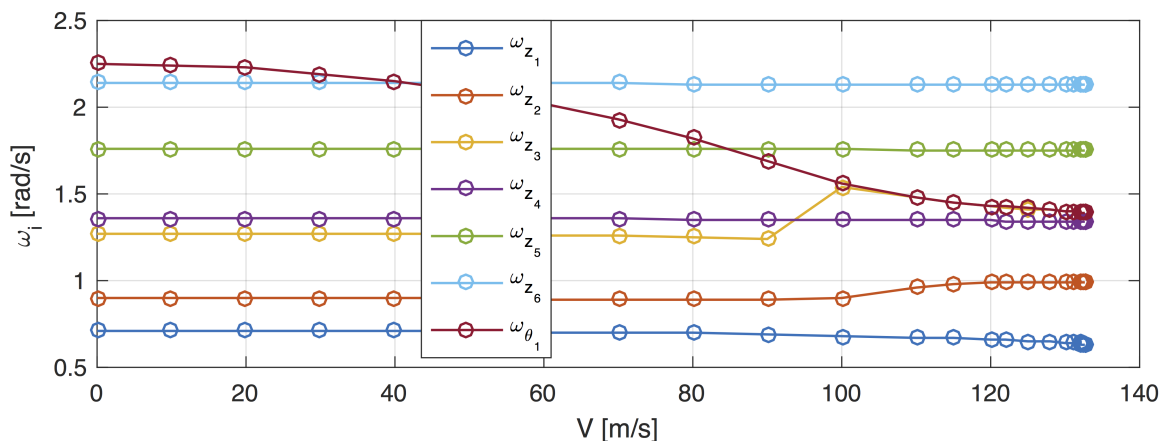
**Figur 4.21:**  $V_{cr}$  for 2 og 12 svingeformer. Tilfellet med 2 svingeformer inkluderer den 2. svingeformen i vertikal retning (2z) og den 1. i torsjon (1t).

Figur 4.21 viser at  $V_{cr}$  øker til 133 m/s når 12 svingeformer inkluderes i beregningen.  $V_{cr}$  for 2 svingeformer (2. i vertikal retning og 1. i torsjon) er cirka 92 % av  $V_{cr}$  for 12 svingeformer, og ligger dermed på trygg side for en prosjekterende ingeniør.



**Figur 4.22:** Responsens standardavvik i vertikal retning og torsjon samt korrelasjonen mellom de to retningene for  $x_r = 0.5L$ , hvor 12 svingeformer er inkludert i beregningen.

Figur 4.22 viser hvordan responsens standardavvik og korrelasjonen varierer over middelvindhastigheten for 12 svingeformer. Responsens standardavvik i vertikal retning og torsjon,  $\sigma_{r_z r_z}$  og  $\sigma_{r_\theta r_\theta}$ , vil stige eksponentielt til en instabilitet inntreffer for middelvindhastighet lik 133 m/s. Korrelasjonen,  $\rho_{r_z r_\theta}$ , er 0.98 når  $V$  er lik  $V_{cr}$ , og tyder på full kobling mellom de to retningene.

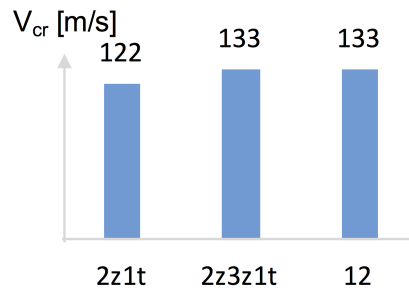


**Figur 4.23:** Utviklingen av egenfrekvensen til de 6 svingeformene i vertikal retning og den 1. i torsjon.

Figur 4.23 viser utviklingen av egenfrekvensen for alle 6 svingeformene i vertikal retning og

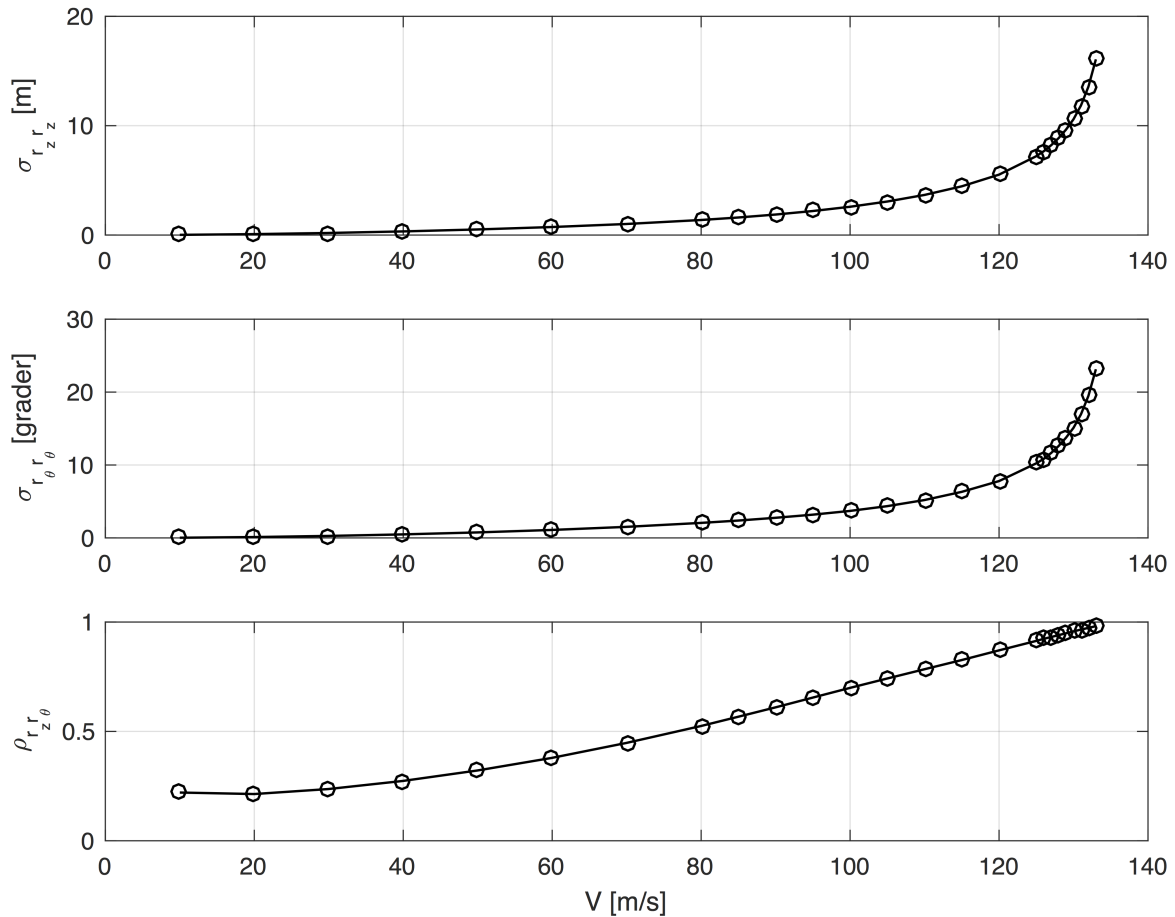


den 1. i torsjon. Grafen viser en tydelig kobling mellom den 3. svingeformen i vertikal retning og den 1. svingeformen i torsjon. Spranget i egenfrekvensen for 3. svingeform i vertikal retning mellom  $V$  lik 90 m/s og 100 m/s, vil fortsatt være til stede ved en finere inndeling av vindhastigheten. Grunnen til dette spranget er usikkert, men det er mulig det forekommer av samme årsak som spranget vist og forklart i delkapittel 4.6 ved figur 4.19. Egenfrekvensen til den 2. svingeformen øker også litt i verdi og nærmer seg egenfrekvensen til svingeformen i torsjon noe, og indikerer dermed kobling. Egenfrekvensen for den 1. svingeformen i torsjon nærmer seg også egenfrekvensen til den 4. svingeformen i vertikal retning. Det er imidlertid ikke kobling mellom disse, da den 4. svingeformen i vertikal retning er asymmetrisk og  $\kappa_{ae_{z_4}\theta_1}$  og  $\zeta_{ae_{z_4}\theta_1}$  er lik null.



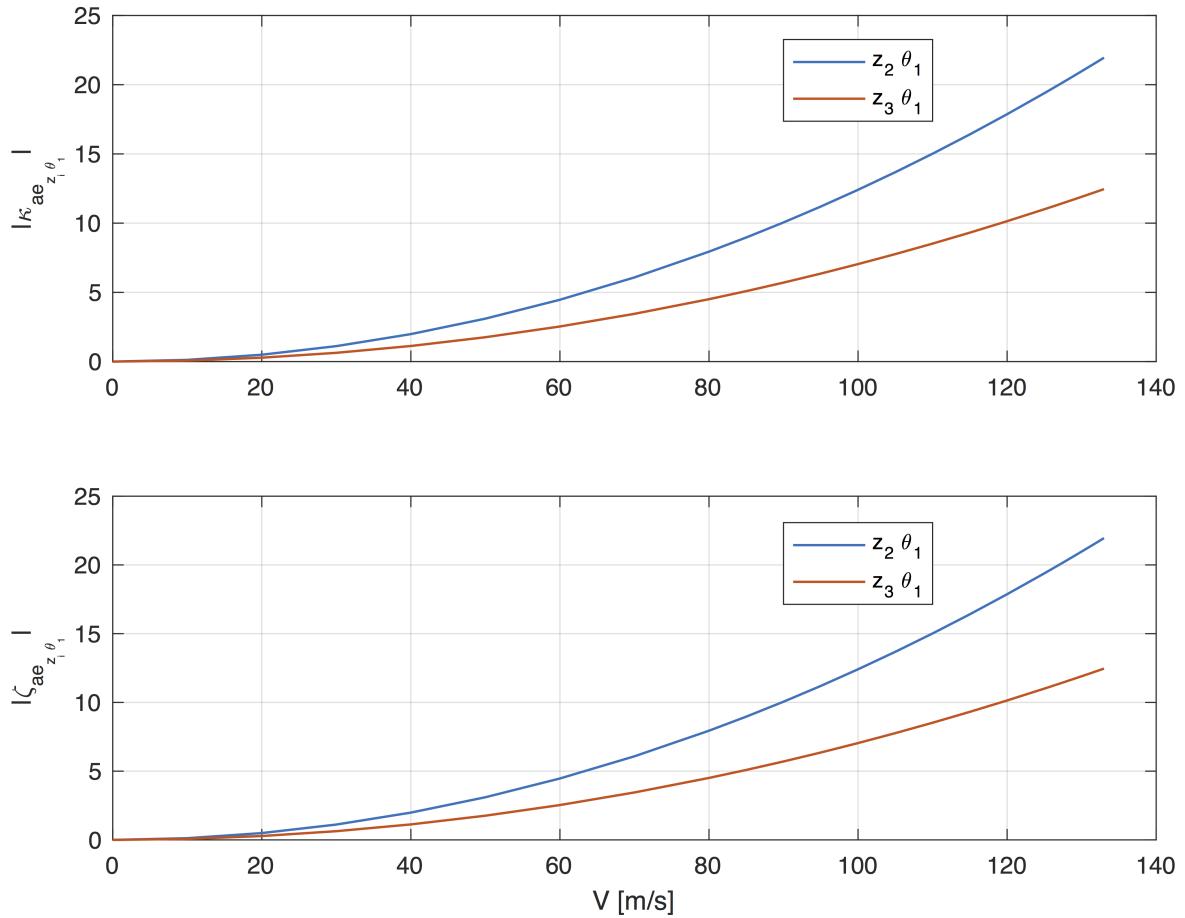
**Figur 4.24:**  $V_{cr}$  for 2, 3 og 12 svingeformer. 2z1t er den 2. svingeformen i vertikal retning og den 1. i torsjon. 2z3z1t er den 3. svingeformen i vertikal retning i tillegg.

Figur 4.24 viser at  $V_{cr}$  er lik 133 m/s når tre svingeformer er inkludert i beregningen, den 2. og 3. i vertikal retning og den 1. torsjon. Det kan tyde på at det er disse tre svingeformene som er avgjørende for å finne riktig instabilitetsgrense. Dette vil derfor etterforskes nærmere.



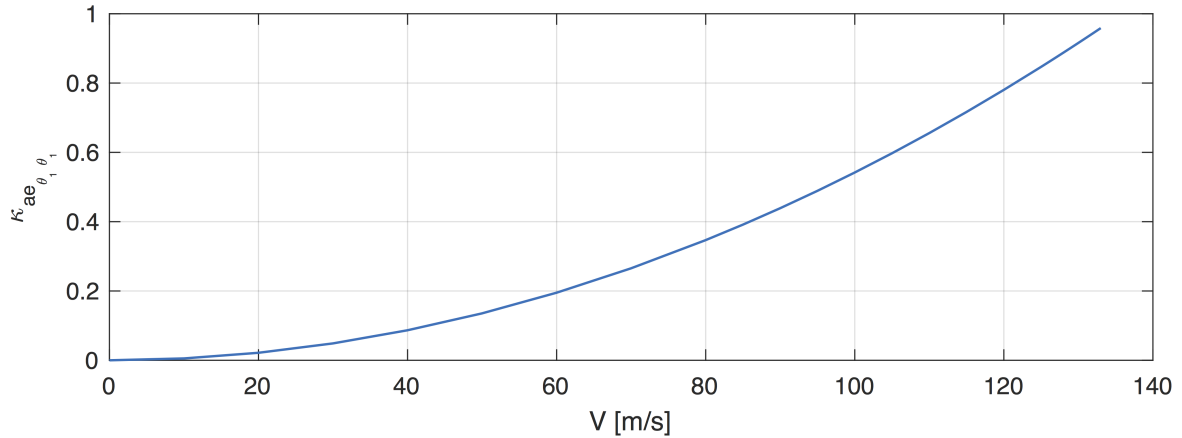
**Figur 4.25:** Responsens standardavvik i vertikal retning og torsjon samt korrelasjonen mellom de to retningene for  $x_r = 0.5L$ . 3 svingeformer er inkludert i beregningen, den 2. og 3. i vertikal retning og den 1. i torsjon.

Responsens standardavvik og korrelasjon midt på bruspennet for 3 svingeformer er nesten helt lik som for 12 svingeformer, vist ved figur 4.22 og 4.25. Korrelasjonen er 0.98 når  $V$  er lik  $V_{cr}$ , samme verdi som for 12 svingeformer. For Hardangerbrua vil det derfor være tilstrekkelig å se på de tre nevnte svingeformene når responsen rundt instabilitetsgrensen skal studeres.



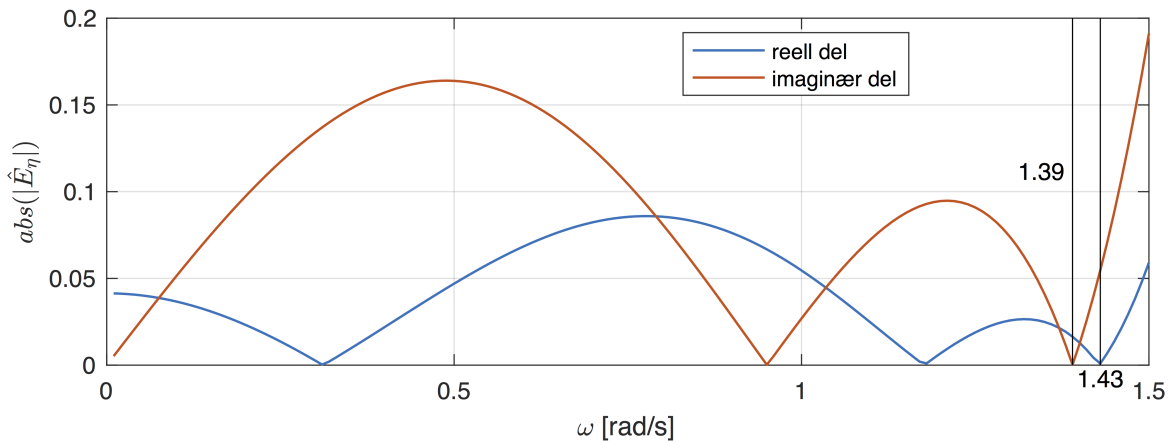
**Figur 4.26:** Absoluttverdien av de off-diagonale leddene,  $\kappa_{ae_{i1}}$  og  $\zeta_{ae_{i1}}$ , i den aerodynamisk stivhets- og dempningsmatrisen plottet mot middelvindhastigheten,  $V$ .

Figur 4.26 bekrefter koblingen mellom den 2. og 3. svingeformen i vertikal retning og den 1. i torsjon.  $\kappa_{ae_{z_2\theta_1}}$  har større verdi enn  $\kappa_{ae_{z_3\theta_1}}$ , og  $\zeta_{ae_{z_2\theta_1}}$  har større verdi enn  $\zeta_{ae_{z_3\theta_1}}$ , noe som tyder på at den 2. svingeformen i vertikal retning kobles mer med svingeformen i torsjon enn det den 3. i vertikal retning gjør. Dette motsier figur 4.23, som indikerer at det er den 3. svingeformen i vertikal retning som kobles mest med den 1. i torsjon. Egenfrekvensen til den 3. svingeformen i vertikal retning ligger nærmere egenfrekvensen til torsjon for  $V$  lik 0 m/s, sammenlignet med egenfrekvensen til den 2. svingeformen i vertikal retning. Denne "tjuvstarten" kan være årsaken til at den 3. svingeformen i vertikal retning kobles fullstendig med torsjon, mens den 2. svingeformen i vertikal retning ikke rekker å gjøre det samme.



**Figur 4.27:** Den aerodynamiske stivheten i torsjon,  $\kappa_{ae_{\theta_1 \theta_1}}$ , plottet mot  $V$ .

Figur 4.27 viser hvordan  $\kappa_{ae_{\theta_1 \theta_1}}$  utvikler seg mot  $V$ . Når  $\kappa_{ae_{\theta_1 \theta_1}}$  er lik 1, vil brua miste stivheten i torsjon og dermed være ustabil.  $\kappa_{ae_{\theta_1 \theta_1}}$  er 0.96 når  $V$  er lik  $V_{cr}$ , og brua har nesten mistet all sin stivhet i torsjon. Dette kan tyde på at instabiliteten inntreffer grunnet tap av stivhet.



**Figur 4.28:** Utviklingen av absoluttverdien til reell og imaginær del av  $|\hat{E}_\eta|$  mot  $\omega$  for tre svingeformer når  $V$  er lik  $V_{cr}$ .

Figur 4.28 viser hvordan determinanten til  $\hat{E}_\eta$  utvikler seg over  $\omega$ , hvor  $\hat{H}_\eta = (\hat{E}_\eta)^{-1}$ . Hvis determinanten til  $\hat{E}_\eta$  er lik null, vil det bli resonans i systemet.  $|\hat{E}_\eta|$  kan deles inn i en reell og imaginær del. Den reelle verdien av  $|\hat{E}_\eta|$  blir null for frekvens lik 1.43 rad/s, mens den imaginære verdien blir null for frekvens lik 1.39 rad/s når  $V$  er lik  $V_{cr}$ . Den reelle og imaginære delen av  $|\hat{E}_\eta|$  er altså null for nesten samme frekvens. Forskjellen på 0.04 rad/s er liten nok til at den kan skyldes numeriske beregningsfeil. Egenfrekvensene  $\omega_{z_3}$  og  $\omega_{\theta_1}$  er 1.39 rad/s når  $V$  er lik  $V_{cr}$ . At egenfrekvensene og determinanten til  $\hat{E}_\eta$  er lik null for nesten samme frekvens, kan tyde på at instabilitet inntreffer grunnet flutter.

Med 12 svingeformer inkludert i beregningen ble  $V_{cr}$  lik 133 m/s, en økning på 11 m/s sammenlignet med 2 svingeformer. Det viser seg at det er inkluderingen av den 3. svingeformen i vertikal retning som er den avgjørende forskjellen. Grunnen til at instabilitet oppstår er fortsatt vanskelig å fastslå, men det er nå en sterkere indikasjon på at både flutter alene og tap av stivhet alene kan være grunnen. Resultatene fra dette delkapittelet er usikre fordi de aerodynamisk deriverte ikke er laget for samtlige 12 svingeformer. Likevel kan det gi et hint om at det er flere

---

svingeformer enn den 2. i vertikal retning og den 1. i torsjon som er nødvendig å ta med i en aerodynamisk responsberegning.



# Kapittel 5

## Oppsummering

### 5.1 Generell konklusjon

I denne oppgaven er vindindusert respons ved instabilitetsgrensen for Hardangerbrua studert. Hovedsakelig er det blitt inkludert to svingeformer i beregningene, den 2. i vertikal retning og den 1. i torsjon. Horisontal retning er ikke koblet med de to andre retningene, og har derfor ikke blitt inkludert i beregningen. Det er kjent fra tidligere at det er den 1. svingeformen i torsjon som driver en kobling mellom de to retningene og initierer instabilitet. Den vil kobles med den svingeformen i vertikal retning som ligner mest, og for Hardangerbrua har dette vært den 2. svingeformen i denne retningen. En beregning med de to nevnte svingeformene ga en kritisk middelvindhastighet på 122 m/s.

Det er vanskelig å identifisere én årsak til at instabiliteten oppstår. Det finnes antydninger for at både flutter og at tap av stivhet i torsjon fører til instabilitet. For at flutter skal oppstå, må de to egenfrekvensene endre verdi og bevege seg mot hverandre. I dette tilfellet viser det seg at det er  $\kappa_{ae\theta\theta}$  som driver forandringen av egenfrekvensen i torsjon. Egenfrekvensen i vertikal retning endres ikke mye. Når  $V$  er lik  $V_{cr}$ , er korrelasjonen mellom de to retningene 0.91, og egenfrekvensene har blitt nesten like med en differanse på 0.05 rad/s. For at det skal være flutter alene som gir instabilitet, krever teorien i tillegg at determinanten til  $\hat{E}_\eta$  blir null for samme frekvens, noe den ikke er. For at tap av stivhet skal være årsaken til instabiliteten alene må  $\kappa_{ae\theta\theta}$  være lik 1, og ikke 0.81, når  $V$  er lik  $V_{cr}$ . Akkurat hva som utløser instabiliteten er derfor vanskelig å si. Det er muligens en kombinasjon av flutter og tap av stivhet i torsjon som gir instabilitet av systemet. Uansett vil brua være meget ustabil for store middelvindhastigheter, da den totale stivheten i torsjon blir liten.

Egenfrekvensforholdet,  $\frac{\omega_i(V)}{\omega_i(V=0)}$ , i aerodynamisk stivhet og dempning er vanlig å ikke inkludere, siden telleren og nevneren vil være tilnærmet lik hverandre for lave middelvindhastigheter. For høye middelvindhastigheter vil dette ikke lenger gjelde, og denne brøken kan ikke lenger strykes. I denne oppgaven er dette forholdet inkludert i beregningene, men det er også sett på effekten av å ikke inkludere det. Egenfrekvensforholdet vil for Hardangerbruas tilfelle, føre til at  $\omega_i(V)$  strykes fra nesten samtlige uttrykk for aerodynamisk stivhet og dempning, grunnet uttrykket til de aerodynamisk deriverte. Unntaket er  $\zeta_{ae\theta\theta}$ , som fortsatt vil være en funksjon av  $\omega_i(V)$ . Derfor vil den kritiske middelvindhastigheten endres fra 122 m/s dersom det itereres til 131 m/s når det ikke itereres. Dersom egenfrekvensforholdet ikke inkluderes, vil det ikke lenger være mulig å stryke  $\omega_i(V)$ , som betyr at samtlige uttrykk i aerodynamisk stivhet og

---

dempning vil være en funksjon av  $\omega_i(V)$ . Da vil den kritiske middelvindhastigheten bli 71 m/s med iterasjon, og 136 m/s uten iterasjon. Dette betyr at dersom de aerodynamisk deriverte er på en slik form at  $\omega_i(V)$  ikke kan strykes, vil valget av å iterere eller ikke ha stor innvirkning på resultatet av beregningene.

Det ble også gjort beregninger hvor 12 svingeformer var inkludert, de 6 første i vertikal retning og de 6 første i torsjon. En slik beregning førte til at instabilitet inntraff ved en middelvindhastighet lik 133 m/s. Det viste seg at det var inkluderingen av den 3. svingeformen i vertikal retning som var den dominerende årsaken til de ulike resultatene som 2 og 12 svingeformer ga. En beregning med 3 svingeformer inkludert, den 2. og 3. i vertikal retning samt den 1. i torsjon, ga samme  $V_{cr}$  som for 12 svingeformer. Den samme beregningen ga, ved  $V$  lik  $V_{cr}$ , en korrelasjon mellom de to retningene,  $\rho_{z\theta}$ , på 0.98 og antyder full kobling. Egenfrekvensene til den 3. svingeformen i vertikal retning og den 1. i torsjon koblet seg og ble lik 1.39 rad/s når  $V$  nærmet seg  $V_{cr}$ . Determinanten til  $\hat{E}_\eta$  ble lik null for nesten samme frekvens, noe som tyder på at flutter har oppstått. I tillegg ble også  $\kappa_{ae\theta\theta}$  lik 0.96 ved  $V = V_{cr}$ , noe som tyder på at instabilitet kan ha inntruffet som følge av tap av stivhet. I motsetning til tilfellet hvor 2 svingeformer var inkludert i beregningen, er det nå mulig at både flutter og tap av stivhet alene har utløst instabiliteten. Dette antyder at det ikke nødvendigvis er koblingen mellom den 1. svingeformen i torsjon og den 2. i vertikal retning som alene vil gi et riktig bilde av situasjonen. Siden det er en indikasjon på at andre svingeformer kan ha en avgjørende effekt på responsen, burde tilhørende aerodynamisk deriverte utforskes i vindtunnel.

## 5.2 Mulige feilkilder

Teorien i denne oppgaven er utledet for lineære krefter og forskyvninger. Dette er overholdt så lenge utslagene til brua er små. Når middelvindhastigheten nærmer seg  $V_{cr}$ , vil utslagene være relativt store. Det kan da være nødvendig å regne ikke-lineært, noe som ikke er mulig ved beregninger i frekvensdomenet. Da vil det også være usikkert om linealiseringen av lastkoeffisientene vil gi tilstrekkelig nøyaktighet. Gyldigheten av resultatet ved store middelvindhastigheter er derfor usikkert.

Aerodynamisk dempning fører til at  $\zeta_{tot_{zz}}$  og  $\zeta_{tot_{\theta\theta}}$  øker når middelvindhastigheten øker, vist i figur 4.18. Det totale dempningsforholdet i vertikal retning øker fra 0.0051 ved  $V$  lik 0 til 0.1402 ved  $V$  lik  $V_{cr}$ , en økning med faktor 27. I torsjon øker dempningsforholdet fra 0.0050 til 0.3392, en økning med faktor 68. Denne store økningen i dempning, kan indikere at kraften som følge av den blir vesentlig større en kraften som følge av masse. Siden systemet da potensielt ikke lenger er lett dempet, fører det til at egenfrekvensene og svingeformene både forandres og får komplekse verdier. Den store endringen i total stivhet fører også til endring av egenfrekvensene og svingeformene. Dette blir det ikke tatt hensyn til i beregningene i denne oppgaven.

De aerodynamisk deriverte er modale størrelser beregnet for kun den 2. svingeformen i vertikal retning og den 1. svingeformen i torsjon. Hvis det likevel ønskes å gjøre en beregning hvor flere svingeformer enn disse er inkludert, må de samme aerodynamisk deriverte brukes for de andre svingeformene også. Det impliserer en antagelse om at de andre svingeformene vil ha helt like aerodynamisk deriverte som de to førstnevnte. Siden det er stor forskjell på formen på de ulike



---

svingformene, indikerer det at antagelsen er feil. Resultater hvor flere svingformer enn de to førstnevnte er inkludert, må derfor brukes med forsiktighet.

Den kritiske middelvindhastigheten funnet i denne oppgaven er 122 m/s, når 2 svingformer er inkludert i beregningen. Dette er betraktelig mer enn tidligere funn og hva Selbergs formel gir som et første estimat. Årsaken til denne differansen er det blitt sett nærmere på. Det viser seg, som forklart i delkapittel 4.4, at å ikke ha med egenfrekvensforholdet i beregningen av aerodynamisk stivhet og demping gir  $V_{cr} = 71$  m/s. Dette er en verdi som ligner tidligere funn og estimert verdi fra Selbergs formel. Å ikke inkludere dette forholdet, vil i følge utledningen i teorikapittelet bli feil. Å likevel stryke denne brøken kan forsvares for lave middelvindhastigheter, siden telleren og nevneren vil være tilnærmet like.

### 5.3 Videre arbeid

Ved dimensjonering av bruer er det vanlig å inkludere flere svingformer enn kun den 2. i vertikal retning og den 1. i torsjon [6]. Siden de aerodynamiske deriverte kun er laget for de to sistnevnte svingformene, er gyldigheten av resultatet med flere svingformer inkludert uvisst. I denne oppgaven ble det likevel gjort beregninger med 12 svingformer. Det viste seg at den 3. svingformen i vertikal retning koblet seg med den 1. svingformen i torsjon, noe som påvirket responsen betydelig. Dette indikerer at det er nødvendig å inkludere flere svingformer for å få et riktig bilde av situasjonen. Derfor foreslås det at de aerodynamisk deriverte beregnes for flere svingformer gjennom forsøk i vindtunnel.



# Referanser

- [1] Statens vegvesen, Rv. 13 Hardangerbrua. Tilgjengelig fra:  
<http://www.vegvesen.no/vegprosjekter/Hardangerbrua> (Hentet 04.06.16).
- [2] Strømmen, E. N, *Theory of Bridge Aerodynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. utgave, 2010.
- [3] Statens vegvesen. Tilgjengelig fra:  
<http://www.vegvesen.no/vegprosjekter/ferjefriE39> (Hentet: 03.06.16).
- [4] Jiri Havran Photography. Tilgjengelig fra:  
<http://www.havran.no/index.php?/architecture/hardangerbrua> (Hentet 08.06.16).
- [5] Statens vegvesen, *Teknisk brosjyre Hardangerbrua*.
- [6] Professor Dr. Ing. Einar N. Strømmen. Intervju våren 2016.
- [7] Statens vegvesen, *Kart over prosjektet*.

